UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
Katedra algebry a geometrie

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Vlastnosti trojúhelníků v neutrální geometrii

Vedoucí práce: **Doc. RNDr. Alena VANŽUROVÁ, CSc.**
Termín odevzdání: 2009

Autor: **Bc. Ludmila MÁLKOVÁ**
V. ročník, M-Bi

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracovala samostatně pod vedením paní Doc. RNDR Aleny Vanžurové,CSc. a s využitím uvedené literatury.

V Olomouci dne 3. dubna 2009

Poděkování

Na tomto místě bych chtěla poděkovat své vedoucí diplomové práce paní Doc. RNDr. Aleně Vanžurové, CSc. za poskytnutí potřebných materiálů, cenné rady a postřehy a ochotu konzultovat práci přes internet. Také bych ráda poděkovala manželovi Janu Málkovi za pomoc s instalací programu $LaTeX$ a s vytvořením obrázků.

Úvod

Touto prací bych chtěla navázat na svoji bakalářskou práci, ve které jsem se mimo jiné zabývala axiomatickou výstavbou eukleidovské geometrie (na základě syntetického přístupu).

Cílem této diplomové práce je seznámit čtenáře se základními vlastnostmi trojúhelníků v neutrální geometrii (tedy jak v geometrii eukleidovské, tak také hyperbolické). Práce by měla zároveň ukázat, jak postupně axiomaticky vybudovat neutrální geometrii v rovině metrickým přístupem.

Tato práce by mohla být využita také jako pomocný studijní text pro kurzy axiomatické výstavby geometrie a neeukleidovské geometrie na VŠ.

Nejprve by se měla zaměřit na geometrii abstraktní a stručně seznámit se základními vztahy, které v ní platí. Dále postupně vybudovat geometrii incidenční a metrickou, zavést axiomaticky vztah "mezi" a popsat elementární geometrické útvary. Na základě toho pak definovat Paschovu geometrii a s využitím zavedení míry úhlu také geometri shodnostní. V ní dále zavést pojmy kolmost a shodnost, které nám umožní definovat neutrální geometrii.

Jádrem práce by měla být kapitola o neutrální geometrii, ve které bych se chtěla zaměřit jednak na vztahy platné v celé neutrální geometrii (tedy společný základ geometrie eukleidovské a hyperbolické), který se týká axiomů strana-úhel-strana, úhel-strana-úhel a strana-strana-strana. Dále se zabývat teorií rovnoběžek, problematikou Sachceriho čtyřúhelník a definovat kritickou funkci, která bude důležitá v dalších kapitolách. Tyto kapitoly by se měly zaměřit na specifika eukleidovské a hyperbolické geometrie.

K problematice hyperbolické geometrie bych chtěla nejdříve popsat několik jejích modelů a dále se věnovat vlastnostem asymptotických polopřímek, zkoumat problematiku defektu trojúhelníků a vzdálenosti rovnoběžných přímek.

Dále bych chtěla zařadit kapitolu o eukleidovské geometrii a v ní se zaměřit na věty ekvivalentní s Eukleidovou vlastností rovnoběžek a teorii podobnosti a zmínit také některé základní věty, které zde platí.

Na závěr práce bych chtěla zařadit několik úloh na konstrukci trojúhelníka a porovnat postup jejich řešení v hyperbolické a eukleidovské geometrii. A na těchto ukázkách demonstrovat základní rozdíly mezi hyperbolickou a eukleidovskou geometrií.

Obsah

Kapitola 1

Abstraktní geometrie

1.1 Definice abstraktní geometrie

Definice 1.1.1 Nechť $\mathcal{B}$ je neprázdná množina, její prvky nazveme body.
Nechť $\mathcal{P}$ je neprázdný systém neprázdných podmnožin z množiny $\mathcal{B}$, které budeme nazývat přímky.

Dále požadujeme, aby platilo: pro dva navzájem různé body $A,\ B \in \mathcal{B}$ existuje přímka $\ell \in \mathcal{P}$ taková, že A i B jí patří (říkáme, že A i B leží na ℓ)

$$\forall A, B \in \mathcal{B}\ ;\ A \neq B,\ \exists \ell \in \mathcal{P}:\ A \in \ell \wedge B \in \ell$$

a dále, aby na každé přímce ležely alespoň dva body, tedy

$$\forall\ \ell \in \mathcal{P}\ \exists P,\ Q \in \mathcal{B}\ ,\ P \neq Q:\ P \in \ell,\ Q \in \ell.$$

Poznámka 1.1.1 I v této abstraktnější situaci budeme používat terminologii, na kterou jsme zvyklí z analytické geometrie.

Chceme-li studovat nějakou matematickou teorii, musíme si nejdříve ověřit, že existují příklady dané axiomatizované teorie. Takovým příkladům pak říkáme modely.

Poznámka 1.1.2 Pokud by se nenašly žádné příklady, byla by teorie prázdná a nemělo by smysl ji studovat.

1.2 Modely abstraktní geometrie

Existuje celá řada modelů abstraktní geometrie. Zde poukážeme na tři z nich. Eukleidovskou (kartézskou) rovinu, hyperbolickou (Poincarého) rovinu a Riemannovu sféru.

1.2.1 Eukleidovská rovina

Za body budeme považovat všechny možné dvojice reálných čísel. Vyjdeme z rovnic přímek, jak je známe z analytické geometrie.
Pokud přímka není svislá, můžeme ji zapsat ve směrnicovém tvaru; je-li $a \in \mathbb{R}$ pevné reálné číslo, položíme:

$$\ell_a := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = a\}$$

a systém takových podmnožin

$$\mathcal{P}_v = \{\ell_a \mid a \in \mathbb{R}\}$$

bude systémem všech vertikálních přímek.
Jsou-li $m, b \in \mathbb{R}$ reálná čísla, utvoříme

$$\ell_{m,b} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx + b\}$$

a systém všech takových podmnožin

$$\mathcal{P}_s = \{\ell_{m,b} \mid m, b \in \mathbb{R}\}$$

bude systém všech nevertikálních přímek.
Sjednocením obou těchto skupin přímek získáme množinu všech přímek v eukleidovské rovině.

Věta 1.2.1 *Eukleidovská rovina $\mathbb{E}^2$ je modelem abstraktní geometrie.*

1.2.2 Poincarého rovina

Označme $\mathbf{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$. V ní budeme uvažovat dva systémy podmnožin.

I. systém podmnožin tvaru

$${}_aL = \{(x, y) \in \mathbf{H} \mid x = a\},$$

což jsou otevřené polopřímky v $\mathbf{H}$ kolmé k ose x, bez počátku

$$\mathcal{P}_1 = \{a_\ell \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

II. systém podmnožin tvaru

$${}_cL_r = \{(x, y) \in \mathbf{H} \mid (x - c)^2 + y^2 = r^2\},$$

což jsou otevřené polokružnice se středem na hraniční přímce a poloměrem r,

$$\mathcal{P}_2 = \{{}_cL_r \mid c \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}, r > 0\}.$$

Potom položíme $\mathcal{P}_H = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$.

Věta 1.2.2 $\mathbb{H}^2 = (\mathbf{H}, \mathcal{P}_H)$ *je modelem abstraktní geometrie.*

Důkaz: Nechť jsou dány body v tomto modelu $P = (x_1, y_1)$ a $Q = (x_2, y_2)$ takové, že $P \neq Q$. Protože $P,\ Q \in \mathbb{H}$, musí být $y_1 > 0,\ y_2 > 0$. Rozlišíme dva případy:

(i) $x_1 = x_2$, potom $P,\ Q \in \ell = {}_aL \in \mathcal{L}_H$, tedy $a = x_1 = x_2$;

(ii) jestliže $x_1 \neq x_2$, definujeme c a r takto:

$$c = \frac{y_2^2 - y_1^2 + x_2^2 - x_1^2}{2(x_2 - x_1)},$$
$$r = \sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2};$$

pak $P,\ Q \in {}_cL_r$.

Snadno se vidí, že každá přímka má alespoň dva body, tedy $\mathbb{H}^2$ je abstraktní geometrií.

Poznámka 1.2.1 Tomuto modelu budeme říkat Poincarého rovina, protože ho poprvé použil francouzský matematik Henry Poincaré.

Poznámka 1.2.2 Zatímco pro eukleidovskou geometrii jsou charakteristické trigonometrické funkce, geometrie na Poincarého modelu je charakterizována funkcemi hyperbolickými.

1.2.3 Riemannova sféra

Definice 1.2.1 Jednotková sféra v $\mathbb{R}^3$ je množina

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Definice 1.2.2 Rovina v $\mathbb{R}^3$ je množina tvaru

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; ax^2 + by^2 + cz^2 = d, \quad \text{kde } a, b, c, d \in \mathbb{R}, (a, b, c) \neq (0, 0, 0)\},$$

přičemž je-li $d = 0$, prochází rovina počátkem (středem sféry).

Definice 1.2.3 Hlavní kružnice na $\mathbb{S}^2$ je množina

$$\mathbb{K} = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2;\ ax + by + cz = 0 \quad \text{pro} \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0)\}.$$

Označení: Množinu všech hlavních kružnic na sféře $\mathbb{S}^2$ označíme $\mathcal{K}_r$.

Věta 1.2.3 $\mathcal{S} = (\mathbb{S}^2, \mathcal{K}_r)$ *je modelem abstraktní geometrie.*

Poznámka 1.2.3 Riemannova sféra v tomto smyslu není příkladem eliptické (Riemannovy) geometrie.

Kapitola 2

Incidenční geometrie

2.1 Definice incidenční geometrie

Definice 2.1.1 Incidenční geometrií nazveme abstraktní geometrii, ve které dále platí:

(i) Každé dva různé body leží na jediné přímce,

$$\forall A, B \in \mathcal{B}\ \exists!\ \ell \in \mathcal{P} : A \in \ell \wedge B \in \ell.$$

(ii) Existují tři body, které neleží na přímce,

$$\forall \ell \in \mathcal{P}\ \exists\ A,\ B,\ C \in \mathcal{B} : \neg(A \in \ell) \wedge (B \in \ell) \wedge (C \in \ell).$$

Označení: Jedinou přímku, která prochází body $A,\ B$ označíme $\overleftrightarrow{AB}$.

Definice 2.1.2 Podmnožinu $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}$ bodů nazveme kolineární, jestliže existuje přímka

$$\ell \in \mathcal{P} :\ \mathcal{M} \subseteq \ell.$$

Poznámka 2.1.1 Místo "množina bodů $\{A,\ B,\ C\}$ je (resp. není) kolineární" budeme říkat "body $A,\ B,\ C$ jsou (resp. nejsou) kolineární".

2.2 Příklady incidenční geometrie

Příklad 2.2.1 1) Eukleidovská rovina $\mathbb{E}^2$ je incidenční geometrií.
2) Poincarého rovina $\mathbb{H}^2$ je incidenční geometrií.
3) Riemannova sféra naproti tomu není příkladem incidenční geometire (protože nesplňuje podmínku, že každými dvěma různými body prochází jediná přímka).

Nyní ukážeme, že $\mathbb{H}^2$ je incidenční geometrií. První část důkazu - že $\mathbb{H}^2$ je abstraktní geometrií, jsme provedli již dříve. Zbývá ještě ukázat, že splňuje podmínky (i) a (ii) z definice incidenční geometrie.

Předpokládejme, že $P = (x_1, y_1)$ a $Q = (x_2, y_2)$ jsou navzájem různé body.

Krok 1: Předpokládejme, že $P,\ Q$ leží oba na dvou různých přímkách I. typu ${}_aL$ a ${}_bL$, potom musí platit $a = x_1 = x_2$ a současně $b = x_1 = x_2$, a tedy $a = b$. To je spor s předpokladem, že ${}_aL$ a ${}_bL$ jsou dvě různé přímky, tedy P a Q nemohou oba současně ležet na dvou různých přímkách prvního typu.

Krok 2: Předpokládejme, že $P,\ Q$ leží oba současně na dvou různých přímkách ${}_aL$ a ${}_cL_r$, z toho vyplývá, že $a = x_1 = x_2$ a

$$(x_1 - c)^2 + y_1^2 = r^2 \quad \text{a současně} \quad (x_2 - c)^2 + y_2^2 = r^2,$$

tedy

$$(a - c)^2 + y_1^2 = r^2 \quad \text{a} \quad (a - c)^2 + y_2^2 = r^2,$$

proto $y_1^2 = y_2^2$. Protože $y_1, y_2 > 0$, musí platit $y_1 = y_2$. To je ale spor s předpokladem, že se jedná o dva různé body.

Krok 3: Konečně předpokládejme, že P i Q leží na dvou různých přímkách II. typu ${}_cL_r$ a ${}_dL_s$. Musíme dokázat, že pak ${}_cL_r = {}_dL_s$, tedy že $c = d$ a $r = s$. K tomu využijeme rovnosti

$$c = \frac{y_2^2 - y_1^2 + x_2^2 - x_1^2}{2(x_2 - x_1)},$$

$$r = \sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2}.$$

Aby $P,\ Q \in {}_cL_r$, musí platit

$$(x_1 - c)^2 + y_1^2 = r^2 \quad \text{a} \quad (x_2 - c)^2 + y_2^2 = r^2.$$

Odečtením dostaneme

$$(x_1 - c)^2 - (x_2 - c)^2 = y_1^2 - y_2^2$$

neboli

$$x_1^2 - 2cx_1 - x_2^2 + 2cx_2 = y_2^2 - y_1^2,$$

pro c tedy dostaneme

$$c = \frac{y_2^2 - y_1^2 + x_2^2 - x_1^2}{2(x_2 - x_1)}.$$

Podobně uvažujme, že $P,\ Q \in {}_dL_s$, a pro d dostáváme

$$d = \frac{y_2^2 - y_1^2 + x_2^2 - x_1^2}{2(x_2 - x_1)}.$$

Tedy $c = d$. Dále protože

$$r = \sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2} = \sqrt{(x_1 - d)^2 + y_1^2} = s,$$

musí platit $r = s$. Celkem tedy ${}_cL_r = {}_dL_s$. Tím jsme dokázali, že dvěma různými body je určena vždy jedna přímka.

Zbývá ještě dokázat, že existují tři nekolineární body. Uvažujme například body $A = (x_1, y_1),\ B = (x_1, y_2),\ C = (x_2, y_1)$, kde $x_2 \neq x_1$, a přímku prvního typu ${}_aL$, kde $a = x_1$. Zřejmě $A,\ B \in {}_aL$, ale $C \notin {}_aL$.
Podobně na přímce jdoucí body A, C neleží B a na přímce procházející B, C neleží bod A. Body $A,\ B,\ C$ jsou tedy nekolineární.

Celkem jsme dokázali, že Poincarého rovina je incidenční geometrií.

Kapitola 3

Metrická geometrie

3.1 Stručný popis budování absolutní geometrie

Chceme-li vybudovat absolutní geometrii, musíme do abstraktní geometrie zavést pojmy mezi, shodnost, míra úsečky a míra úhlu a dále zařídit, aby bodů na přímce bylo "právě tolik, kolik je reálných čísel". Existují v zásadě dva způsoby, jak postupovat - syntetický a metrický. Zde byl zvolen metrický přístup navržený americkým matematikem G. D. Birkhoffem.

K abstraktní geometrii nejprve přidáme pojem vzdálenosti, díky tomu můžeme snadno zavést pojem "*mezi*". Máme tedy k dispozici pojmy úhel, trojúhelník, úsečka, polopřímka apod. Tím dostáváme metrickou geometrii. Dále axiomaticky zavedeme rozdělení roviny danou přímkou na dvě poloroviny a požadujeme zde platnost Paschova axiomu. Tím přecházíme k Paschově metrické geometrii. Nakonec v takovéto geometrii axiomaticky zavedeme míru úhlu a tím přejdeme ke shodnostní geometrii. Zde už můžeme hovořit například o shodnosti úhlů nebo kolmosti přímek. Shodnostní geometrii, v níž je navíc splněn axiom *sus*, nazveme geometrií absolutní.

Poznámka 3.1.1 Protože absolutní geometrie je společným základem eukleidovské i Poincarého geometrie (z nichž každá má jiným způsobem definovanou míru úhlu), je také často nazývána "geometrie neutrální".

3.2 Distanční funkce

Definice 3.2.1 Distanční funkcí (resp. distancí) na množině $\mathcal{M}$ nazveme funkci $d : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ takovou, že pro všechny prvky $A,\ B \in \mathcal{M}$ platí:

$$\begin{array}{rl} (i) & d(A,B) \geq 0, \\ (ii) & d(A,B) = 0 \Longleftrightarrow A = B, \\ (iii) & d(A,B) = d(B,A). \end{array}$$

Poznámka 3.2.1 Někdy bývá distanční funkce označována jako metrika, ale toto označení není přesné, protože distanční funkce nemusí splňovat trojúhelníkovou nerovnost.

Definice 3.2.2 Pro eukleidovskou rovinu zavedeme pevnou distanční funkci, kterou nazveme eukleidovská distanční funkce (a označíme d_E) takto:
pro $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2) \in \mathcal{B}$ $(= \mathbb{R}^2)$,

$$d_E(A,B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Poznámka 3.2.2 Eukleidovskou distanční funkci budeme zkráceně nazývat "*distance*".

Poznámka 3.2.3 Na jedné množině můžeme zavést celou řadu různých distančních funkcí.

Pro definování distanční funkce na Poincarého rovině využijeme logaritmické měřítko a uvažujeme distanční funkce na přímkách I. a II. typu.

Definice 3.2.3 Pro dva body Poincarého roviny $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $y_1, y_2 \geq 0$ zavedeme Poincarého distanci jako

$$d_H(A,B) = \left|\ln \frac{y_1}{y_2}\right|, \text{ platí-li } x_1 = x_2,$$

$$d_H(A,B) = \left|\ln \frac{\frac{x_1-c+r}{y_1}}{\frac{x_2-c+r}{y_2}}\right|, \quad \text{leží-li oba body na } {}_cL_r.$$

Definice 3.2.4 Taxikářskou distanční funkcí na $\mathbb{R}^2$ budeme rozumět funkci

$$d_T(A,B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

Věta 3.2.1 *Takto definovaná d_T je distanční funkcí na $\mathbb{R}^2$.*

Poznámka 3.2.4 Tato distanční funkce je dokonce metrika.

Definice 3.2.5 Nechť je dána incidenční geometrie $(\mathcal{B}, \mathcal{P})$. Předpokládejme, že na množině bodů $\mathcal{B}$ je dána distanční funkce d.
Nechť $\ell \in \mathcal{P}$. Potom zobrazení $f : \ell \longrightarrow \mathbb{R}$ nazveme souřadnicovým systémem na přímce ℓ, jestliže platí:

(i) f je bijektivní

(ii) pro libovolná $A, B \in \ell$ platí $|f(A) - f(B)| = d(A,B)$.

Číslo $f(A)$ pak nazýváme souřadnicí bodu A vzhledem k souřadnicovému systému f.

Poznámka 3.2.5 Souřadnicový systém umožňuje studovat vlastnosti přímek pomocí vlastností reálných čísel.

3.3 Definice metrické geometrie

Definice 3.3.1 Metrickou geometrií $(\mathcal{B}, \mathcal{P}, d)$ budeme rozumět incidenční geometrii se zadanou distanční funkcí d takovou, že na každé přímce je zadán souřadnicový systém (vzhledem k d).

Poznámka 3.3.1 V metrické geometrii je tedy každá přímka jistým způsobem ztotožněna s množinou reálných čísel.

Důsledek 3.3.1 *Každá přímka v metrické geometrii má nekonečně mnoho bodů.*

Lemma 3.3.1 *Je-li $\ell \in P$ a $f : \ell \longrightarrow R$ je zobrazení, které je surjektivní a splňuje vlastnost*

$$|f(A) - f(B)| = d(A,B)$$

pro $\forall A, B \in \ell$, pak f je injektivní (a je tedy soustavou souřadnic na ℓ).

Poznámka 3.3.2 Ne každá distanční funkce (i když je třeba metrikou) je vhodná pro vytvoření metrické geometrie.

Věta 3.3.1 *Eukleidovská rovina s (eukleidovskou) distancí d_E je metrickou geometrií.*

Poznámka 3.3.3 Pod pojmem eukleidovská rovina budeme nadále rozumět $\mathcal{E} = (\mathbb{R}^2, \mathcal{P}_E, d_E)$.

Věta 3.3.2 *Eukleidovská rovina s taxikářskou distancí d_T je metrická geometrie.*

Důsledek 3.3.2 *Z předchozího vyplývá, že mohou existovat různé metrické geometrie vystavěné na stejné incidenční geometrii.*

Věta 3.3.3 *Nechť d_H je distanční funkce na Poincarého rovině, potom $\mathcal{H} = (\mathbf{H}, \mathcal{P}_H, d_H)$ je metrická geometrie.*

3.4 Popis eukleidovské roviny s využitím vektorového počtu

Použitý způsob zavedení eukleidovské roviny byl blízký analytické geometrii. Jeho výhodou je rychlé ověření platnosti axiomů. Naopak nevýhoda spočívá v umělém rozdělení přímek do dvou skupin. Co do geometrických vlastností jsou ale přímky I. i II. typu stejné. Eukleidovskou rovinu můžeme alternativně popsat s využitím vektorového počtu a metod lineární algebry. Tento přístup nám usnadní zavedení některých pojmů a dokazování vztahů.

Dále budeme uvažovat $\mathbb{R}^2$ jako reálný vektorový prostor dimenze 2 nad $\mathbb{R}$, přičemž lineární operace jsou definovány po složkách.

Označení: Přímku jdoucí dvěma různými body $A, B \in \mathbb{R}^2$ označíme L_{AB}. Tato přímka je dána vztahem:

$$L_{AB} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = A + t(B - A) \quad \text{pro jisté} \quad t \in \mathbb{R}\}.$$

Věta 3.4.1 *Nechť $\mathcal{P}'$ je systém všech podmnožin v $\mathbb{R}^2$ tvaru L_{AB}. Pak $(\mathbb{R}^2, \mathcal{P}')$ je eukleidovská rovina, a je tedy incidenční geometrií.*

Využitím těchto nových prostředků můžeme také charakterizovat distanční funkci d_E a soustavy souřadnic.

Lemma 3.4.1 *Jsou-li $A, B \in \mathbb{R}^2$, pak* $d_E(A, B) = \| A - B \|$.

Lemma 3.4.2 *Pro přímku L_{AB} (v eukleidovské rovině) má funkce $f : L_{AB} \longrightarrow \mathbb{R}$, která je dána předpisem:*

$$f(A + t(B - A)) = t \parallel B - A \parallel,$$

vlastnosti soustavy souřadnic pro metrickou geometrii $(\mathbb{R}^2, \mathcal{P}', d_E)$.

Naše dosavadní úvahy se týkaly pouze vzdáleností bodů ležících na přímce. Nyní nás budou zajímat distanční funkce, které navíc splňují trojúhelníkovou nerovnost.

Definice 3.4.1 Řekneme, že distanční funkce splňuje trojúhelníkovou nerovnost, jestliže platí

$$d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$$

pro všechny body $A,\ B,\ C \in \mathcal{B}$.

Věta 3.4.2 *Eukleidovská distanční funkce splňuje trojúhelníkovou nerovnost.*

3.5 Zavedení vztahu "mezi" a elementární útvary

3.5.1 Vztah "mezi"

K zavedení vztahu "*mezi*" využijeme distanční funkci. Vztah "*mezi*" později s výhodou využijeme k zavedení útvarů úsečka, polopřímka, úhel a trojúhelník.

Definice 3.5.1 Jsou-li A, B, C navzájem různé body ležící v jedné přímce nějaké metrické geometrie $(\mathcal{B}\ , \mathcal{P}, d)$, řekneme, že B leží mezi A a C, platí-li

$$d(A,B) + d(B,C) = d(A,C).$$

Což budeme značit $A - B - C$.

Věta 3.5.1 *Jestliže platí $A - B - C$, pak platí také $C - B - A$.*

Definice 3.5.2 Jsou-li x, y, $z \in \mathbb{R}$, řekneme, že y je mezi x a z, jestliže platí buď $x < y < z$ nebo $x > y > z$. Obě tyto možnosti budeme zapisovat současně ve tvaru $x * y * z$.

Poznámka 3.5.1 Pro tři různá reálná čísla vždy platí, že právě jedno z nich je mezi dalšími dvěma.

Věta 3.5.2 *Nechť ℓ je přímka a f je její souřadnicový systém. Jsou-li A, B, C tři body na přímce a x, y, z jejich souřadnice, potom $A - B - C$ právě tehdy, když $x * y * z$.*

Důsledek 3.5.1 *Jsou-li dány tři různé body na přímce, právě jeden z nich je mezi zbývajícími dvěma.*

Věta 3.5.3 *Jsou-li A, B dva různé body metrické geometrie, pak*

(i) existuje bod C takový, že $A - B - C$,

(ii) existuje bod D takový, že $A - D - B$.

Důsledek 3.5.2 *Mezi dvěma různými body je nekonečně mnoho dalších bodů.*

Poznámka 3.5.2 Zápisem $A - B - C - D$ v metrické geometrii rozumíme, že současně platí $A - B - C$, $A - B - D$, $A - C - D$ a $B - C - D$.

3.5.2 Elementární útvary

Úsečky, polopřímky

Definice 3.5.3 Nechť je dána metrická geometrie a dva různé body A, B. Úsečkou $\overline{AB}$ nazveme množinu

$$\overline{AB} = \{C \in \mathcal{B}; (A - C - B) \vee (C = A) \vee (C = B)\}.$$

Definice 3.5.4 Je-li $\mathcal{M}$ podmnožina metrické geometrie, její bod $B \in \mathcal{M}$ nazveme průběžným, jestliže existují body $X, Y \in \mathcal{M}$ takové, že $X - B - Y$.

V opačném případě nazveme bod B bodem extremálním (neboli hraničním).

Věta 3.5.4 *Jsou-li $A \neq B$ body metrické geometrie a $\overline{AB}$ jimi určená úsečka, pak jejími hraničními body jsou právě body A a B.*
Speciálně, je-li $\overline{CD} = \overline{AB}$, pak platí $\{C,\ D\} = \{A,\ B\}$.

Definice 3.5.5 Krajními body úsečky $\overline{AB}$ nazveme body A, B. Délkou této úsečky nazveme číslo $d(A, B)$ a budeme ji zkráceně zapisovat AB.

Definice 3.5.6 Jsou-li $A \neq B$ body metrické geometrie, (uzavřenou) polopřímkou s počátkem A určenou bodem B nazveme množinu

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{C \in \mathcal{B};\ A - B - C\}.$$

Věta 3.5.5 *V metrické geometrii platí:*

(i) je-li $C \in \overrightarrow{AB}$ a $C \neq A$, pak $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$,

(ii) je-li $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, potom $A = C$.

Věta 3.5.6 *Jsou-li $A \neq B$ body metrické geometrie, existuje soustava souřadnic $f : \overleftrightarrow{AB} \longrightarrow \mathbb{R}$ taková, že*

$$\overrightarrow{AB} = \{X \in \overleftrightarrow{AB}; f(X) \geq 0\}.$$

Definice 3.5.7 Dvě úsečky $\overline{AB}$ a $\overline{CD}$ metrické geometrie nazveme kongruentní (značíme $\overline{AB} \cong \overline{CD}$), jsou-li jejich délky stejné (tedy pokud platí $AB = CD$).

Věta 3.5.7 *Je-li $\overrightarrow{AB}$ polopřímka a $\overline{CD}$ úsečka, existuje jediný bod $C \in \overrightarrow{AB}$ takový, že*

$$\overline{CD} \cong \overline{AB}.$$

Kapitola 4

Paschova geometrie

4.1 Definice Paschovy geometrie

Paschův axiom: Nechť je dán trojúhelník $\triangle ABC$ a přímka p, která neprochází žádným z jeho vrcholů, ale protíná jednu jeho stranu v jejím vnitřním bodě. Potom tato přímka musí protnout také jednu ze zbývajících dvou stran $\triangle ABC$ v jejím vnitřním bodě.

Definice 4.1.1 Metrickou geometrii splňující Paschův axiom nazveme Paschovou geometrií.

Definice 4.1.2 Metrická geometrie splňuje Paschův požadavek (PP), jestliže pro každou přímku ℓ, každý trojúhelník $\triangle ABC$ a všechny body $D \in \ell$ takové, že $A - D - B$, platí

$$\ell \cap \overline{AC} \neq \emptyset \quad \text{nebo} \quad \ell \cap \overline{BC} \neq \emptyset.$$

Věta 4.1.1 *Splňuje-li metrická geometrie PP, pak splňuje i Paschův axiom.*

4.2 Vnitřky

Definice 4.2.1 Nechť $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d\}$ je metrická geometrie a $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}$. Řekneme, že $\mathcal{S}_1$ je konvexní množina, jestliže pro každé dva body $P,\ Q \in \mathcal{S}_1$ platí

$$\overline{PQ} \subset \mathcal{S}_1.$$

Definice 4.2.2 Nechť $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d\}$ je metrická geometrie. Pro každou přímku $\ell \in \mathcal{L}$ definujeme dvě podmnožiny $\mathbf{H}_1,\ \mathbf{H}_2 \subset \mathcal{S}$ takové, že platí

(i) $\mathcal{S} \setminus \ell = \mathbf{H}_1 \cup \mathbf{H}_2$

(ii) $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ jsou konvexní a navzájem disjunktní množiny

(iii) jetližе $A \in \mathbf{H}_1$ a $B \in \mathbf{H}_2$, pak $\overline{AB} \cap \ell \neq \emptyset$.

Podmnožiny $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ nazveme poloroviny určené přímkou ℓ.

Definice 4.2.3 Nechť $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d\}$ je metrická geometrie, $\ell \in \mathcal{L}$ je libovolná přímka a $\mathbf{H}_1,\ \mathbf{H}_2$ jsou poloroviny určené přímkou ℓ.

Řekneme, že dva různé body $A,\ B$ leží na stejné straně od ℓ, jestliže platí

$$A \in \mathbf{H}_1 \wedge B \in \mathbf{H}_1 \quad \text{nebo} \quad A \in \mathbf{H}_2 \wedge B \in \mathbf{H}_2.$$

Řekneme, že body A a B leží na opačných stranách od přímky ℓ, jestliže platí

$$A \in \mathbf{H}_1 \wedge B \in \mathbf{H}_2 \quad \text{nebo} \quad A \in \mathbf{H}_2 \wedge B \in \mathbf{H}_1.$$

Věta 4.2.1 *V Paschově geometrii platí: jestliže neprázdná konvexní podmnožina $\mathcal{A} \neq \emptyset$ neprotíná přímku ℓ, pak všechny body $\mathcal{A}$ leží na stejné straně od ℓ.*

Definice 4.2.4 Vnitřek polopřímky je v metrické geometrii množina

$$int(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB} \setminus \{A\}.$$

Vnitřek úsečky je v metrické geometrii množina

$$int(\overline{AB}) \cup \{A, B\}.$$

Věta 4.2.2 *Jestliže $\mathcal{A}$ označuje přímku (resp. polopřímku, úsečku nebo jejich vnitřky) v Paschově geometrii a ℓ je přímka, která $\mathcal{A}$ neprotíná, pak celá přímka ℓ leží na jedné straně od $\mathcal{A}$.*

Věta 4.2.3 *V Paschově geometrii platí, jsou-li P, Q v opačných polorovinách určených přímkou $\overleftrightarrow{AB}$, pak*

$$\overrightarrow{BP} \cap \overrightarrow{AQ} = \emptyset, \quad \text{a tedy i} \quad \overline{BP} \cap \overline{AQ} = \emptyset.$$

Definice 4.2.5 V Paschově geometrii vnitřkem úhlu $\angle ABC$ nazveme průnik polorovin $\overrightarrow{ABC}$ a $\overrightarrow{BCA}$.

Věta 4.2.4 *V Paschově geometrii platí: je-li $\angle ABC = \angle A'BC'$, pak také*

$$int(\angle ABC) = int(\angle A'BC').$$

Věta 4.2.5 *V Paschově geometrii platí: $P \in int(\angle ABC)$ právě tehdy, když A, P jsou ve stejné polorovině určené přímkou $\overleftrightarrow{BC}$ a současně C, P jsou ve stejné polorovině určené přímkou $\overleftrightarrow{BA}$.*

Věta 4.2.6 *Je-li v Paschově geometrii dán $\triangle ABC$ a platí $A - P - C$, pak $P \in int(\angle ABC)$, a tedy*

$$int(\overline{AC}) \subset int(\angle ABC).$$

Věta 4.2.7 *(Křížová věta:) V Paschově geometrii, je-li $P \in int(\angle ABC)$, potom $\overrightarrow{BP}$ protíná $\overrightarrow{AC}$ v jediném bodě F takovém, že platí $A - F - C$.*

Poznámka 4.2.1 Tato věta řeší situaci, kdy přímka vstoupí do trojúhelníka přímo jedním jeho vrcholem (na rozdíl od Paschovy věty, která popisuje chování přímky, jež vstupuje do trojúhelníka mimo jeho vrcholy).

Věta 4.2.8 *V Paschově geometrii platí, je-li $\overline{CP} \cap \overleftrightarrow{AB} = \emptyset$, potom $P \in int(\angle ABC)$ právě tehdy, když A, C jsou v opačných polorovinách určených $\overleftrightarrow{BP}$.*

Definice 4.2.6 V Paschově geometrii vnitřkem trojúhelníka $\triangle ABC$ rozumíme průnik polorovin $\overrightarrow{ABC}$, $\overrightarrow{BCA}$ a $\overrightarrow{CAB}$. Značíme $int(\triangle ABC)$.

Věta 4.2.9 *Vnitřek $int(\triangle ABC)$ je v Paschově geometrii konvexní množinou.*

Poznámka 4.2.2 Také $\triangle ABC \cup int(\triangle ABC)$ je konvexní množina.

Kapitola 5

Shodnostní geometrie

5.1 Míra úhlu

Definice 5.1.1 Nechť $r_0 \in \mathbb{R}$ je pevné reálné číslo. V Paschově geometrii míra úhlu odpovídající r_0 je funkce $m : \mathrm{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ (kde U je množina všech úhlů) taková, že platí:

(i) je-li $\angle ABC \in \mathrm{U}$, potom

$$0 < m(\angle ABC) < r_0,$$

(ii) jestliže $\overrightarrow{BC}$ leží v hraniční přímce poloroviny H_1 a je-li $t \in \mathbb{R}$ takové reálné číslo, že platí $0 < t < r_0$, pak existuje jediná polopřímka $\overrightarrow{BA}$ taková, že

$$A \in H_1 \ \wedge \ m(\angle ABC) = t,$$

(iii) je-li $D \in int(\angle ABC)$, potom

$$m(\angle ABD) + m(\angle DBC) = m(\angle ABC).$$

Poznámka 5.1.1 Speciálně pro $r_0 = 180$ nazýváme m stupňovou mírou (nepřipisujeme symbol stupňů, protože zde míra úhlu je definována jako reálné číslo). Je-li $r_0 = \pi$, pak m je míra v radiánech.

Dohoda: V dalším textu budeme uvažovat míru stupňovou.

Poznámka 5.1.2 Úhel v tomto smyslu nemůže mít míru 0 nebo 180.

Definice 5.1.2 V eukleidovské rovině zavedeme eukleidovskou míru úhlu pro $\angle ABC$ vztahem

$$m_E(\angle ABC) = cos^{-1}\frac{(A-B).(C-B)}{\|A-B\|.\|C-B\|}.$$

Definice 5.1.3 V Poincarého rovině zavedeme míru úhlu $\angle ABC$ vztahem:

$$m_H(\angle ABC) = cos^{-1}\frac{T_{BA}.T_{BC}}{\parallel T_{BA} \parallel . \parallel T_{BC} \parallel},$$

kde T_{BA} označuje tzv. eukleidovský tečný vektor k hyperbolické polopřímce $\overrightarrow{BA}$ Poincarého modelu.

Definice 5.1.4 Je-li $\overrightarrow{BA}$ hyperbolická polopřímka Poincarého roviny,

$$B = (x_B, y_B),\ A = (x_A, y_A),$$

eukleidovským tečným vektorem k $\overrightarrow{BA}$ budeme nazývat vektor

$T_{BA} = (0, y_A - y_B)$, je-li AB přímka I. typu,

$(y_B, C - x_B)$, je-li AB přímka II. typu ${}_cL_r$ a platí $x_B < x_A$,

$-(y_B, C - x_B)$, je-li AB přímka II. typu ${}_cL_r$ a $x_B > x_A$.

Poznámka 5.1.3 Eukleidovská polopřímka patřící k $\overrightarrow{AB}$ je $\overrightarrow{BA'}$, kde

$$A' = B + T_{BA}.$$

Výše definovaná míra úhlu nám umožní zavést nyní obvyklou terminologii pro úhly.

Definice 5.1.5 Úhel $\angle ABC$ nazveme ostrým, jestliže míra úhlu

$$m(\angle ABC) < 90.$$

Definice 5.1.6 Úhel $\angle ABC$ nazveme pravým, jestliže míra úhlu

$$m(\angle ABC) = 90.$$

Definice 5.1.7 Úhel $\angle ABC$ nazveme tupým, jestliže míra úhlu

$$m(\angle ABC) > 90.$$

Definice 5.1.8 Dva úhly $\angle ABC$, $\angle DEF$ nazveme úhly sousední, jestliže

$$m(\angle ABC) + m(\angle DEF) = 180.$$

Definice 5.1.9 Dva úhly $\angle ABC$, $\angle DEF$ nazveme úhly doplňkové, jestliže

$$m(\angle ABC) + m(\angle DEF) = 90.$$

Věta 5.1.1 *Dva úhly $\angle ABC$ a $\angle A'BC'$ jsou úhly vrcholové, právě tehdy, když platí*

$$(A - B - A' \wedge C - B - C') \quad \text{nebo} \quad (A - B - C' \wedge C - B - A')$$

(neboli pokud jejich sjednocením dostaneme různoběžky).

Věta 5.1.2 *Dva úhly $\angle ABC$ a $\angle CBD$ tvoří sousední úhly, jestliže platí $A - B - D$.*

5.2 Definice shodnostní geometrie

Definice 5.2.1 Paschovu geometrii nazveme geometrií shodnostní, je-li v ní dána míra úhlu m.

Věta 5.2.1 *Nechť body C, D (ve shodnostní geometrii) leží ve stejné polorovině určené přímkou $\overleftrightarrow{AB}$ a platí $m(\angle ABC) < m(\angle ABD)$, potom $C \in int(\angle ABD)$.*

Definice 5.2.2 Řekneme, že úhly $\angle ABC$ a $\angle CBD$ tvoří lineární dvojici, jestliže platí $A - B - D$.

Věta 5.2.2 *(o lineární dvojici): Jestliže $\angle ABC$ a $\angle CBD$ tvoří ve shodnostní geometrii lineární dvojici, pak jsou úhly sousedními (součet jejich měr je 180).*

Věta 5.2.3 *Je-li ve shodnostní geometrii*

$$m(\angle ABC) + m(\angle CBD) = m(\angle ABD),$$

potom $C \in int(\angle ABD)$.

Poznámka 5.2.1 Pro vzdálenosti analogický vztah neplatí.

Příklad 5.2.1 Užijeme-li taxikářskou metriku, snadno se přesvědčíme, že z platnosti $d(A,B) + d(B,C) = d(A,C)$ zde nevyplývá $B \in int(\overline{AC})$.

Uvažujme body $A = (x_1, y_1),\ B(x_2, y_1),\ C = (x_2, y_2)$.

$$d_T(A,C) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$
$$d_T(A,B) + d_T(B,C) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_1| + |x_2 - x_2| + |y_1 - y_2| = d_T(A,C)$$

a přitom body $A,\ B,\ C$ nejsou kolineární.

Věta 5.2.4 *Leží-li body A a D v opačných polorovinách určených přímkou $\overleftrightarrow{BC}$ a platí*

$$m(\angle ABC) + m(\angle CBD) = 180,$$

potom $A - B - D$ a úhly tvoří lineární dvojici.

K oběma větám platí také věty obrácené.

5.3 Kolmost přímek a shodnost úhlů

Definice 5.3.1 Dvě přímky ℓ a ℓ' jsou kolmé, jestliže $\ell \cap \ell' = P$ a pro $\forall A \in \ell, B \in \ell'$ $A \neq P \neq B$ je $\angle APB$ pravý úhel. Zapisujeme $\ell \perp \ell'$.

Definice 5.3.2 Dvě polopřímky (resp. úsečky) jsou kolmé, jestliže přímky, které jsou jimi určeny, jsou kolmé.

Věta 5.3.1 *Je-li dána přímka ℓ a bod $B \in \ell$ ve shodnostní geometrii, pak existuje jediná přímka ℓ' taková, že $B \in \ell'$ a současně $\ell \perp \ell'$.*

Poznámka 5.3.1 Je-li $B \notin \ell$, není zaručena existence (ani jednoznačnost) kolmice bodem B k přímce ℓ. Ve shodnostní geometrii nemusí platit Pythagorova věta.

Definice 5.3.3 Osou úsečky $\overline{AB}$ ve shodnostní geometrii nazveme přímku ℓ, která prochází středem úsečky $\overline{AB}$ a je k ní kolmá.

Věta 5.3.2 *Ve shodnostní geometrii má každá úsečka jedinou osu úsečky.*

Definice 5.3.4 Osou úhlu $\angle ABC$ nazveme polopřímku $\overrightarrow{BD}$ takovou, že

$$D \in int(\angle ABC) \quad \text{a} \quad m(\angle ABD) = m(\angle DBC).$$

Věta 5.3.3 *Ve shodnostní geometrii má každý úhel $\angle ABC$ jedinou osu úhlu.*

Definice 5.3.5 Řekneme, že úhel $\angle ABC$ je shodný s úhlem $\angle DEF$, jestliže platí

$$m(\angle ABC) = m(\angle DEF).$$

Značíme $\angle ABC \cong \angle DEF$.

Dále ve shodnostní geometrii platí následující věty:

Věta 5.3.4 *Jsou-li úhly vrcholové, pak jsou shodné.*

Věta 5.3.5 *(o sčítání úhlů): Platí-li $D \in int(\angle ABC)$, $S \in int(\angle PQR)$,*

$$\angle ABD \cong \angle PQS \quad \text{a} \quad \angle DBC \cong \angle SQR,$$

pak také

$$\angle ABC \cong \angle PQR.$$

Věta 5.3.6 *(o odčítání úhlů): Jestliže $D \in int(\angle ABC)$, $S \in int(\angle PQR)$,*

$$\angle ABD \cong \angle PQS \quad \text{a} \quad \angle ABC \cong \angle PQR,$$

potom platí

$$\angle DBC \cong \angle SQR.$$

Věta 5.3.7 *(o konstrukci úhlů): Je-li dán úhel $\angle ABC$ a polopřímka $\overrightarrow{ED}$, která leží v hraniční přímce poloroviny $\mathbf{H}_1$, potom existuje jediná polopřímka $\overrightarrow{EF}$ taková, že*

$$F \in \mathbf{H}_1 \quad \text{a současně} \quad \angle ABC \cong \angle DEF.$$

Kapitola 6

Neutrální geometrie

6.1 Axiom strana-úhel-strana

Definice 6.1.1 Nechť $\triangle ABC$ a $\triangle DEF$ jsou dva trojúhelníky ve shodnostní geometrii a nechť zobrazení $f : \{A, B, C\} \to \{D, E, F\}$ je bijekce mezi vrcholy trojúhelníka. Zobrazení f je kongruence, jestliže platí:

$$\overline{AB} \cong \overline{f(A)f(B)},\ \overline{BC} \cong \overline{f(B)f(C)},\ \overline{CA} \cong \overline{f(C)f(A)}$$

a

$$\angle CAB \cong \angle(f(C)f(A)f(B)),\ \angle ABC \cong \angle(f(A)f(B)f(C)),\ \angle BCA \cong \angle(f(B)f(C)f(A)).$$

Definice 6.1.2 Dva trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle DEF$ jsou kongruentní, jestliže existuje kongruence $f : \{A, B, C\} \longrightarrow \{D, E, F\}$, která je dána vztahem

$$f(A) = D,\ f(B) = E,\ f(C) = F;$$

píšeme

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF.$$

Definice 6.1.3 Řekneme, že ve shodnostní geometrii platí axiom strana-úhel-strana (sus), jestliže každé dva trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle DEF$, ve kterých platí

$$\overline{AB} \cong \overline{DE},\ \angle ABC \cong \angle DEF,\ \overline{BC} \cong \overline{EF};$$

jsou kongruentní.

Definice 6.1.4 Shodnostní geometrii, ve které platí axiom sus, nazveme neutrální geometrií.

Poznámka 6.1.1 Eukleidovská i Poincarého rovina jsou příklady neutrální geometrie. Taxikářská rovina není neutrální geometrií.

Definice 6.1.5 Trojúhelník ve shodnostní geometrii je rovnoramenný, jestliže nejméně dvě jeho strany jsou kongruentní. V ostatních případech je trojúhelník obecný.
Trojúhelník je rovnostranný, jestliže jsou všechny tři jeho strany kongruentní.

Věta 6.1.1 *V neutrální geometrii jsou úhly při základně rovnoramenného trojúhelníka kongruentní.*

Důkaz: Nechť $\triangle ABC$ je rovnoramenný a platí $\overline{AB} \cong \overline{CB}$. Nechť je dále dána kongruence $f(A) = C,\ f(B) = B,\ f(C) = A$. (Je odvozena z osové souměrnosti daného trojúhelníku podle osy procházející bodem B a kolmé k $\overleftrightarrow{AC}$).

Protože $\overline{AB} \cong \overline{CB}$, $\angle ABC \cong \angle CBA$ a $\overline{CB} \cong \overline{AB}$, je $\triangle ABC \cong \triangle CBA$ podle věty *sus*. To ale znamená, že $\angle BAC \cong \angle BCA$, takže úhly při základně jsou kongruentní.

6.2 Axiom úhel-strana-úhel

Definice 6.2.1 Shodnostní geometrie splňuje axiom úhel-strana-úhel (*usu*), jestliže každé dva trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle DEF$, ve kterých platí

$$\angle CAB \cong \angle FDE,\ \overline{AB} \cong \overline{DE},\ \angle ABC \cong \angle DEF,$$

jsou kongruentní.

Věta 6.2.1 *Neutrální geometrie splňuje axiom úhel-strana-úhel (usu).*

Důkaz: Nechť $\triangle ABC$ a $\triangle DEF$ jsou dva trojúhelníky, ve kterých platí $\angle CAB \cong \angle FDE$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ a $\angle ABC \cong \angle DEF$. Existuje právě jeden bod $G \in \overrightarrow{DF}$ takový, že platí $\overline{DG} \cong \overline{AC}$.

Chceme ukázat, že platí $\triangle ABC \cong \triangle DEG$ a že $G = F$, tedy že $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Protože $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\angle CAB \cong \angle DEG$ a $\overline{AC} \cong \overline{DG}$ podle axiomu *sus*, tedy platí $\triangle BAC \cong \triangle EDG$. Proto $\angle ABC \cong \angle DEG$. Ale podle předpokladu je $\angle ABC \cong \angle DEF$, tedy $\angle DEF \cong \angle DEG$. Protože $G \in \overrightarrow{DF}$, F a G jsou na stejné straně od $\overleftrightarrow{DE}$. Podle věty o konstrukci úhlů $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EG}$. Tudíž $\{F\} = \overrightarrow{EF} \cap \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{EG} \cap \overrightarrow{DF} = \{G\}$, $F = G$, a tedy $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Věta 6.2.2 *Nechť je v neutrální geometrii daný $\triangle ABC$, ve kterém platí $\angle CAB \cong \angle BCA$, potom $\overline{AB} \cong \overline{CB}$ a tento trojúhelník je rovnoramenný.*

Důkaz najde čtenář v literatuře.

6.3 Axiom strana-strana-strana

Definice 6.3.1 Řekneme, že shodnostní geometrie splňuje axiom strana-strana-strana (*sss*), jestliže každé dva trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle DEF$, ve kterých platí

$$\overline{AB} \cong \overline{DE},\ \overline{BC} \cong \overline{EF} \quad \text{a} \quad \overline{CA} \cong \overline{FD},$$

jsou kongruentní.

Věta 6.3.1 *Neutrální geometrie splňuje axiom sss.*

Důkaz: Nechť $\triangle ABC$ a $\triangle DEF$ jsou dva trojúhelníky, pro které platí $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ a $\overline{CA} \cong \overline{FD}$. Vytvoříme kopii trojúhelníka $\triangle DEF$ na spodní straně $\triangle ABC$ a využijeme axiom *sus*. (Podle věty o konstrukci úhlů existuje právě jedna polopřímka $\overrightarrow{AH}$, kde H leží na opačné straně od $\overleftrightarrow{AC}$ než bod B a platí $\angle CAH \cong \angle FDE$. A existuje právě jeden bod $B' \in \overrightarrow{AH}$ takový, že $\overline{AB'} \cong \overline{DE}$).
Protože $\overline{CA} \cong \overline{FD}$, $\angle CAB' \cong \angle FDE$ a $\overline{B'A} \cong \overline{ED}$, je podle axiomu *sus* $\triangle CAB' \cong \triangle FDE$. Dále ukážeme, že $\triangle ABC \cong \triangle AB'C$. Protože jsou B a B' na opačných stranách od přímky $\overleftrightarrow{AC}$, úsečka $\overline{BB'}$ protíná $\overleftrightarrow{AC}$ v jediném bodě G. Pro tento bod je pět

možností: $G - A - C$, $G = A$, $A - G - C$, $G = C$, $A - C - G$. První a pátá možnost jsou v podstatě shodné, stejně tak druhá a čtvrtá.

Dokážeme platnost pro první možnost: Předpokládáme $G - A - C$, takže B, A a B' nejsou kolineární. $\triangle BAB'$ je rovnoramenný, protože $\overline{BA} \cong \overline{ED} \cong \overline{B'A}$. Tudíž $\angle ABB' \cong \angle AB'B$. Podobně $\triangle BCB'$ je rovnoramenný a $\angle CBB' \cong \angle CB'B$. Protože $G - A - C$, je $A \in int(\angle CBG) = int(\angle CBB')$. Podobně $A \in int(\angle CB'B)$. Podle věty o odčítání úhlů $\angle CBA \cong \angle CB'A$. Protože $\overline{BA} \cong \overline{ED} \cong \overline{B'A}$ a $\overline{BC} \cong \overline{EF} \cong \overline{B'C}$, je $\triangle ABC \cong \triangle AB'C$ podle věty *sus*.

Podobně uvažujeme další možnosti a celkem dostaneme $\triangle ABC \cong \triangle AB'C \cong \triangle DEF$.

Věta 6.3.2 *Jestliže shodnostní geometrie splňuje axiom usu, pak splňuje také axiom sus, a je tedy neutrální geometrií.*

Věta 6.3.3 *Nechť je v neutrální geometrii dána přímka ℓ a bod $B \notin \ell$, potom existuje alespoň jedna přímka jdoucí bodem B, která je kolmá k přímce ℓ.*

Důkaz: Nechť A a C jsou dva různé body na ℓ. Podle věty o konstrukci úhlů existuje právě jedna polopřímka $\overrightarrow{AH}$ taková, že H je na opačné straně od $\ell = \overleftrightarrow{AC}$ než B a platí $\angle CAH \cong \angle CAB$. Existuje jediný bod $B' \in \overrightarrow{AH}$, pro který $\overline{AB'} \cong \overline{AB}$. Protože B a B' jsou na opačných stranách od ℓ, $\overline{BB'}$ protíná ℓ právě v jednom bodě G.

Jestliže $G \neq A$, potom $\triangle BAG \cong \triangle B'AG$ podle věty *sus*, takže $\angle BAC \cong \angle AGB'$. Tedy $\angle AGB$ je pravý úhel a $\overleftrightarrow{BB'} \perp \ell$.

Pokud $G = A$, potom $\angle BAC$ a $\angle B'AC$ tvoří lineární pár shodných úhlů, a tedy $\overleftrightarrow{BB'} \perp \ell$.

6.4 Věta o vnějším úhlu a její důsledky

Definice 6.4.1 V metrické geometrii platí, že úsečka $\overline{AB}$ je kratší než úsečka $\overline{CD}$ (píšeme $\overline{AB} < \overline{CD}$), jestliže $AB < CD$.
Podobně úsečka $\overline{AB}$ je delší než úsečka $\overline{CD}$ (píšeme $\overline{AB} > \overline{CD}$), jestliže $AB > CD$.

Definice 6.4.2 Ve shodnostní geometrii úhel $\angle ABC$ je menší než $\angle DEF$ (píšeme $\angle ABC < \angle DEF$), jestliže

$$m(\angle ABC) < m(\angle DEF).$$

Řekneme, že úhel $\angle ABC$ je větší než $\angle DEF$ (píšeme $\angle ABC > \angle DEF$), jestliže

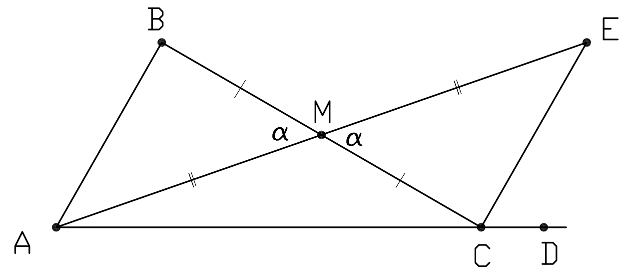
$$m(\angle ABC) > m(\angle DEF).$$

Věta 6.4.1 *V metrické geometrii je úsečka $\overline{AB}$ kratší než $\overline{CD}$ právě tehdy, když existuje bod $G \in int(\overline{CD})$ tak, že platí $\overline{AB} \cong \overline{CG}$.*

Věta 6.4.2 *Ve shodnostní geometrii je $\angle ABC$ menší než $\angle DEF$ právě tehdy, když existuje bod $G \in int(\angle DEF)$ takový, že $\angle ABC \cong \angle DEG$.*

Definice 6.4.3 Mějme dán ve shodnostní geometrii trojúhelník $\triangle ABC$. Jestliže platí $A - C - D$, potom úhel $\angle BDC$ je vnějším úhlem $\triangle ABC$; $\angle CAB$ a $\angle ABC$ jsou protilehlé vnitřní úhly k vnějšímu úhlu $\angle BCD$.

Věta 6.4.3 *(o vnějším úhlu): V neutrální geometrii je libovolný vnější úhel trojúhelníka větší než kterýkoli z jeho protilehlých vnitřních úhlů.*



Obrázek 6.1: Věta o vnějším úhlu

Důkaz: Nechť je dán $\triangle ABC$ a platí $A-C-D$. Ověříme, že z platnosti $\angle BCD > \angle ABC$ vyplývá $\angle BCD > \angle BAC$.

Nechť M je střed úsečky $\overline{BC}$ a nechť E je bod polopřímky $\overrightarrow{AM}$, pro který platí $A-M-E$ a $\overline{ME} \cong \overline{MA}$ (Viz obr.6.1). Protože $\angle AMB$ a $\angle EMC$ jsou úhly vrcholové, jsou kongruentní. Protože $\overline{BM} \cong \overline{MC}$, dostáváme $\triangle AMB \cong \triangle EMC$ podle věty *sus*. Proto

$$\angle ABC = \angle ABM \cong \angle ECM = \angle ECB.$$

Ale protože $A - M - E$, musí platit $E \in int(\angle BCD)$. Dále podle věty 6.4.2

$$\angle ABC \cong \angle ECB < \angle BCD \quad \text{nebo} \quad \angle BCD > \angle ABC.$$

Pro důkaz, že $\angle BCD > \angle BAC$, zvolíme D' tak, že $B - C - D'$. Podle první části důkazu platí

$$\angle ACD' > \angle BAC \quad \text{a} \quad \angle ACD' \cong \angle BCD.$$

Tedy $\angle BCD > \angle BAC$.

Důsledek 6.4.1 *V neutrální geometrii existuje právě jedna přímka kolmá k přímce ℓ jdoucí bodem P, který neleží na ℓ.*

Důkaz: Jestliže $P \in \ell$, potom tvrzení platí podle věty 5.3.1 Proto se budeme zabývat pouze případem, kdy $P \notin \ell$. Podle věty 6.3.3 existuje taková přímka. Nyní předpokládejme, že existují dvě různé přímky ℓ' a ℓ'' jdoucí bodem P a obě kolmé k ℓ. Nechť $A = \ell' \cap \ell$ a $C = \ell'' \cap \ell$. Protože ℓ' a ℓ'' jsou různé přímky, nemohou mít dva společné body, a tudíž $A \neq C$.

Zvolíme si bod D takový, že $A - C - D$. Potom pravý úhel $\angle DCP$ je vnější úhel trojúhelníka $\triangle APC$, a tedy je větší než $\angle CAP$ podle věty o vnějším úhlu. Což je spor s tím, že $\angle CAP$ je pravý a všechny pravé úhly jsou kongruentní. Proto nemohou existovat dvě různé přímky jdoucí bodem P a kolmé k přímce ℓ.

Věta 6.4.4 *(axiom strana-úhel-úhel): Mějme dány v neutrální geometrii dva trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle DEF$. Jestliže*

$$\overline{AB} \cong \overline{DE}, \quad \angle CAB \cong \angle FDE \quad \text{a} \quad \angle BCA \cong \angle EFD,$$

potom

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF.$$

Důkaz: Jestliže $\overline{AC} \ncong \overline{DF}$, potom jedna úsečka musí být kratší než druhá. Předpokládejme, že $\overline{AC} < \overline{DF}$. Potom existuje bod G takový, že $D - G - F$ a $\overline{AC} \cong \overline{DG}$. Nyní $\triangle BAC \cong \triangle EDG$ podle věty *sus*, tedy $\angle ACB \cong \angle DGE$. Protože $\angle DGE$ je vnějším úhlem $\triangle GEF$, musí být $\angle DGE > \angle DFE$ podle věty o vnějším úhlu. Podle předpokladu je ale $\angle ACB \cong \angle DFE$, tedy

$$\angle ACB \cong \angle DGE > \angle DFE \cong \angle ACB,$$

což nemůže nastat. Podobně nemůže být ani $\overline{AC} < \overline{DF}$. Musí tedy platit $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ a $\triangle BAC \cong \triangle EDF$ podle věty *sus*.

Věta 6.4.5 *Jestliže v neutrální geometrii dvě strany v trojúhelníku nejsou kongruentní, pak nejsou kongruentní ani jim protilehlé úhly a navíc platí, že delší strana leží proti většímu úhlu.*

Důkaz: Předpokládáme, že v $\triangle ABC$ platí $\overline{AB} > \overline{AC}$. Chceme ukázat, že $\angle BCA > \angle ABC$. Existuje jediný bod D, pro který $A - C - D$ a $\overline{AD} \cong \overline{AB}$. Protože $A - C - D$, je $C \in int(\angle ABD)$ a $\angle ABC < \angle ABD$.

Nicméně $\triangle BAD$ je rovnoramenný, platí v něm $\overline{AB} \cong \overline{AD}$, takže $\angle ABD \cong \angle ADB$. Podle věty o vnějším úhlu pro $\triangle BCD$ musí platit $\angle ADB < \angle ACB$. Tedy

$$\angle ABC < \angle ABD \cong \angle ADB < \angle ACB,$$

takže $\angle ABC < \angle BCA$.

Věta 6.4.6 *Jestliže v trojúhelníku v neutrální geometrii nejsou dva vnitřní úhly kongruentní, pak nejsou kongruetní ani jim protilehlé strany a navíc platí, že delší strana leží proti většímu úhlu.*

Důkaz je analogický důkazu předchozí věty.

Věta 6.4.7 *(trojúhelníková nerovnost): V neutrální geometrii je délka jedné strany trojúhelníka vždy menší než součet délek zbývajících dvou stran.*

Důkaz: musíme ukázat, že v $\triangle ABC$ platí $AC < AB + BC$. To můžeme udělat přenesením "zbývající části" vzdálenosti AB za úsečku $\overline{BC}$. Nechť $D \in \overrightarrow{CB}$ takový, že $C - B - D$ a $\overline{BD} \cong \overline{AB}$. Potom $CD = CB + BD = BC + AB$. Jestliže $B \in int(\angle DAC)$, pak $\angle DAB < \angle DAC$. Protože $\triangle DBA$ je rovnoramenný, platí $\angle DAB \cong \angle ADB$, takže $\angle ADB < \angle DAC$. Aplikací věty 6.4.5 na $\triangle ADC$, dostaneme $AC < CD$. Celkem dostaneme $AC < BC + AB$.

Věta 6.4.8 *Nechť jsou v neutrální geometrii dány dva trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle DEF$ takové, že*

$$\overline{AB} \cong \overline{DE}, \quad \overline{BC} \cong \overline{EF}.$$

Pokud $\angle ABC > \angle DEF$, potom platí $\overline{AC} > \overline{DF}$.

Důkaz: Nejprve sestrojíme kopii trojúhelníka $\triangle DEF$ podél strany $\overline{BC}$ trojúhelníka $\triangle ABC$. Existuje právě jeden bod H na stejné straně od $\overleftrightarrow{BC}$ jako A, pro který platí $\angle HBC \cong \angle DEF$ a $\overline{BH} \cong \overline{ED}$. Potom $\triangle DEF \cong \triangle HBC$ podle věty *sus*. A proto $\overline{HC} \cong \overline{DF}$.
Protože $\angle DEF < \angle ABC$, $H \in int(\angle ABC)$ a $\overrightarrow{BH}$ protíná $\overline{AC}$ v jediném bodě K, nastane buď $B - H - K$, $H = K$ nebo $B - K - H$. Nechť $\overrightarrow{BL}$ je osa úhlu $\angle ABH = \angle ABK$. Užitím křížové věty vidíme, že $\overrightarrow{BL}$ protíná $\overline{AK}$ (a také $\overline{AC}$) v jediném bodě M.
Nyní $\triangle ABM \cong \triangle HBM$ podle věty *sus*, takže $\overline{AM} \cong \overline{HM}$. Rozebereme jednotlivé možnosti pro bod H. Jestliže $H \neq K$, potom C, H a M jsou nekolineární a podle trojúhelníkové nerovnosti platí $HC < HM + MC$.

Jestliže je $K = H$ musí platit $C - H - M$, což znamená $HC < MC < HM + MC$. Protože $\overline{AM} \cong \overline{HM}$ dostáváme

$$HC < HM + MC = AM + MC = AC.$$

(Poslední rovnost vychází z toho, že $A - M - C$.) Konečně protože $\overline{HC} \cong \overline{DF}$ vidíme, že

$$DF < AC \quad \text{neboli} \quad \overline{AC} > \overline{DF}.$$

Věta 6.4.9 *V neutrální geometrii je úsečka spojující vrchol trojúhelníka a libovolný bod na protější straně trojúhelníka kratší než delší ze zbývajících dvou stran trojúhelníka.*

Důkaz najde čtenář v literatuře.

6.5 Pravoúhlý trojúhelník

Definice 6.5.1 Je-li některý úhel v $\triangle ABC$ pravý, trojúhelník $\triangle ABC$ se nazývá pravoúhlý. Strana proti pravému úhlu se nazývá přepona.

Definice 6.5.2 Úsečka $\overline{AB}$ se nazývá nejdelší strana trojúhelníka $\triangle ABC$, jestliže platí

$$\overline{AB} > \overline{AC} \quad \text{a} \quad \overline{AB} > \overline{BC}.$$

Věta 6.5.1 *Každý pravoúhlý trojúhelník v neutrální geometrii má vždy jen jeden pravý úhel a jednu přeponu, která je jeho nejdelší stranou.*

Důkaz: Nechť $\triangle ABC$ je trojúhelník s pravým úhlem při vrcholu C. Nechť D je bod, pro který platí $D - C - B$. Úhel $\angle DCA$ je pravý a podle věty o vnějším úhlu musí platit

$$\angle ABC < \angle DCA \quad \text{a} \quad \angle CAB < \angle DCA.$$

Tedy oba úhly při vrcholech A a B jsou ostré, a tudíž je jen jeden úhel v $\triangle ABC$ pravý. Konečně podle věty 6.4.6

$$\overline{BC} < \overline{AB} \quad \text{a} \quad \overline{AC} < \overline{AB}.$$

Tedy přepona $\overline{AB}$ je nejdelší stranou daného trojúhelníka.

Definice 6.5.3 Nechť $\triangle ABC$ je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C, potom $\overline{AC}$ a $\overline{BC}$ jsou odvěsny trojúhelníka $\triangle ABC$.

Věta 6.5.2 *Nechť je v neutrální geometrii dána přímka ℓ, bod $Q \in \ell$ a bod $P \notin \ell$, potom*

(i) jestliže $\overleftrightarrow{PQ} \perp \ell$, pak $PQ \leq PR$ pro $\forall R \in \ell$,

(ii) jestliže $PQ \leq PR$ pro $\forall R \in \ell$, potom $\overleftrightarrow{PQ} \perp \ell$.

Důkaz: Jestliže $\overleftrightarrow{PQ} \perp \ell$ a $R \in \ell$, potom buď $Q = R$ (takže $PQ = PR$) nebo $Q \neq R$ (a body $P,\ Q,\ R$ nejsou kolineární). V druhém případě $\triangle PQR$ má pravý úhel při vrcholu Q. Podle věty 6.5.1 $PQ < PR$, protože $\overline{PR}$ je přepona v $\triangle PQR$. Potom $PQ \leq PR$ pro všechna $R \in \ell$ jestliže $\overleftrightarrow{PQ} \perp \ell$.

Obráceně předpokládejme, že $PQ \leq PR$ pro všechna $R \in \ell$. Musíme dokázat, že $\overleftrightarrow{PQ} \perp \ell$. Nechť ℓ' je jediná přímka jdoucí bodem P, která je kolmá k ℓ a nechť $\ell \cap \ell' = Q'$.

Chceme ukázat, že $Q = Q'$. Jestliže $Q \neq Q'$, potom $\triangle PQ'Q$ je pravoúhlý a $PQ' < PQ$. Protože podle předpokladu platí $PQ \leq PR$ pro všechna $R \in \ell$, speciálně $PQ \leq PQ'$. To je spor s předpokladem, že $PQ' < PQ$, takže musí platit $Q = Q'$. Proto $\overleftrightarrow{PQ} = \ell'$ je kolmá k ℓ.

Definice 6.5.4 Nechť ℓ je přímka a P bod v neutrální geometrii. Vzdáleností bodu P od přímky ℓ označíme $d(P,\ell)$ a platí

$$d(P,\ell) = d(P,Q) \quad \text{pro} \quad P \notin \ell, \quad \text{kde} \quad Q \in \ell \quad \text{a} \quad PQ \perp \ell;$$
$$d(P,\ell) = 0 \quad \text{pro} \quad P \in \ell.$$

Věta 6.5.3 *Pro každou přímku ℓ v neutrální geometrii a každý bod $P \notin \ell$ platí*

$$d(P,\ell) \leq d(P,R) \quad \text{pro} \quad \forall R \in \ell.$$

Navíc platí

$$d(P,l) = d(P,R) \Longleftrightarrow \overleftrightarrow{PR} \perp \ell.$$

Důkaz najde čtenář v literatuře.

Definice 6.5.5 Nechť ℓ je jediná kolmice na $\overleftrightarrow{AB}$, která prochází vrcholem C trojúhelníka $\triangle ABC$ a nechť $\ell \cap \overleftrightarrow{AB} = \{D\}$, potom úsečku $\overline{CD}$ nazýváme výškou z vrcholu C a bod D se nazývá pata výšky.

Věta 6.5.4 *Pokud $\overline{AB}$ je nejdelší strana trojúhelníka $\triangle ABC$ v neutrální geometrii a D je pata výšky z bodu C na $\overline{AB}$, pak platí $A - D - B$.*

Důkaz: Platí buď $D - A - B$, $D = A$, $A - D - B$, $D = B$ nebo $A - B - D$. První a poslední případ jsou v podstatě stejné a podobně také druhý a čtvrtý. Máme ukázat, že nemůže nastat první ani druhý případ, tedy že jediná možnost je $A - D - B$.

Nechť $\overline{CB}$ je přepona v pravoúhlém $\triangle CBD$, potom $\overline{DB} < \overline{CB}$. Jestliže $D - A - B$, potom musí být $\overline{AB} < \overline{DB}$, takže

$$\overline{AB} < \overline{DB} < \overline{CB},$$

což je spor s tím, že $\overline{AB}$ je nejdelší strana trojúhelníka.

Jestliže $D = A$, potom $\overline{AB} = \overline{DB}$, takže

$$\overline{AB} = \overline{DB} < \overline{CB},$$

což vede opět ke sporu. Musí tedy platit $A - D - B$.

Věta 6.5.5 *Jestliže $\triangle ABC$ a $\triangle DEF$ jsou pravoúhlé trojúhelníky s pravými úhly při vrcholech C a F v neutrální geometrii a platí*

$$\overline{AB} \cong \overline{DE} \quad \text{a} \quad \overline{AC} \cong \overline{DF},$$

pak

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF.$$

Důkaz: Stejně jako v jiných větách o ekvivalenci trojúhelníků chceme zkonstruovat takový trojúhelník, který je kongruentní s oběma $\triangle ABC$ a $\triangle DEF$ (Obr. 6.2).

Nechť G je jediný bod, pro který platí $E - F - G$ a $\overline{FG} \cong \overline{BC}$. Protože E, F, G jsou kolineární a $\angle DFE$ je pravý úhel, je také $\angle DFG$ pravý úhel a platí $\angle ACB \cong \angle DFG$. Podle předpokladu $\overline{AC} \cong \overline{DF}$. Z konstrukce vyplývá $\overline{BC} \cong \overline{GF}$. Tudíž $\triangle ABC \cong \triangle DGF$ podle věty *sus*.

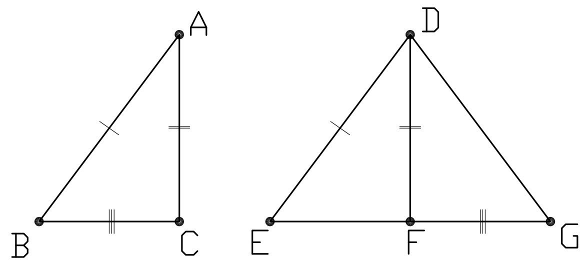
Protože $\triangle ABC \cong \triangle DGF$, je $\overline{AB} \cong \overline{DG}$. Ale podle předpokladu $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, takže $\overline{DE} \cong \overline{DG}$ a $\triangle EDG$ je rovnoramenný. Tedy

$$\angle DEF = \angle DEG \cong \angle DGE = \angle DGF$$

a

$$\triangle DEF \cong \triangle DGF$$

podle věty *suu*. Celkem $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



Obrázek 6.2:

Věta 6.5.6 *Jestliže $\triangle ABC$ a $\triangle DEF$ jsou pravoúhlé trojúhelníky s pravými úhly při vrcholech C a F v neutrální geometrii a platí*

$$\overline{AB} \cong \overline{DE} \quad \text{a} \quad \angle CAB \cong \angle FDE,$$

potom

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF.$$

Definice 6.5.6 Osou úsečky $\overline{AB}$ v neutrální geometrii budeme rozumět jedinou přímku ℓ jdoucí středem M úsečky $\overline{AB}$, která je kolmá k $\overline{AB}$.

Věta 6.5.7 *V neutrální geometrii je osou úsečky $\overline{AB}$ množina*

$$\mathcal{O} = \{P \in \mathcal{P} \mid AP = BP\}.$$

Důkaz: Nejprve ukážeme, že $\mathcal{O} \subset \ell$. Nechť $P \in \mathcal{O}$, musíme ukázat, že potom $P \in \ell$. Jestliže $P \in \overleftrightarrow{AB}$, potom $AP = BP$ implikuje $A - P - B$ a $P = M$ je středem úsečky $\overline{AB}$. Tedy $P \in \ell$.

Jestliže $P \notin \overleftrightarrow{AB}$ nechť ℓ' je jediná kolmice k $\overleftrightarrow{AB}$ jdoucí bodem P. Nechť $\ell' \cap \overleftrightarrow{AB} = \{N\}$. Potom N není A ani B. Máme tedy dva trojúhelníky $\triangle PNA$ a $\triangle PNB$, které jsou kongruentní. Tedy $\overline{AN} \cong \overline{NB}$ a $N = M$ je střed úsečky. Tedy $\ell' = \ell$ a $P \in \ell$, proto $\mathcal{O} \subset \ell$.

Nyní ukážeme, že $\ell \subset \mathcal{O}$. Budeme předpokládat, že $P \in \ell$ a ukážeme, že potom $P \in \mathcal{O}$. Jestliže $P \in \overleftrightarrow{AB}$, potom $P = M$ a $P \in \mathcal{O}$. Pokud $P \notin \overleftrightarrow{AB}$, potom $\angle PMA \cong \angle PMB$, tedy oba tyto úhly jsou pravé. Tudíž $\triangle PMA \cong \triangle PMB$ podle věty *sus* a $\overline{PA} \cong \overline{PB}$. Tedy $P \in \mathcal{O}$ a $\ell \subset \mathcal{O}$. Celkem dostáváme $\ell = \mathcal{O}$.

Poznámka 6.5.1 V neutrální geometrii existuje jediná osa úsečky $\overline{AB}$ a je to množina právě všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od bodů A i B.

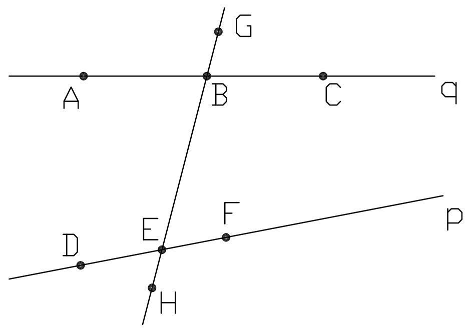
Věta 6.5.8 *Jestliže $\overrightarrow{BD}$ je osou úhlu $\angle ABC$ v neutrální geometrii a body E, F jsou paty kolmic vedených z bodu D k $\overleftrightarrow{BA}$ a $\overleftrightarrow{BC}$, potom*

$$\overline{DE} \cong \overline{DF}.$$

Důkaz najde čtenář v literatuře.

6.6 Teorie rovnoběžek

Definice 6.6.1 Mějme tři různé přímky $\ell,\ \ell_1,\ \ell_2$. Řekneme, že ℓ je příčka ℓ_1 a ℓ_2, jestliže ℓ protíná přímky ℓ_1 a ℓ_2 v různých bodech.



Obrázek 6.3:

Definice 6.6.2 Předpokládejme, že $\overleftrightarrow{GH}$ je příčkou k $q = \overleftrightarrow{AC}$ a $p = \overleftrightarrow{DF}$ v metrické geometrii a platí

$$\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{GH} = \{B\} \quad \text{a} \quad \overleftrightarrow{DF} \cap \overleftrightarrow{GH} = \{E\}.$$

Jestliže body A, B, C, D, E, F, G a H splňují následující podmínky

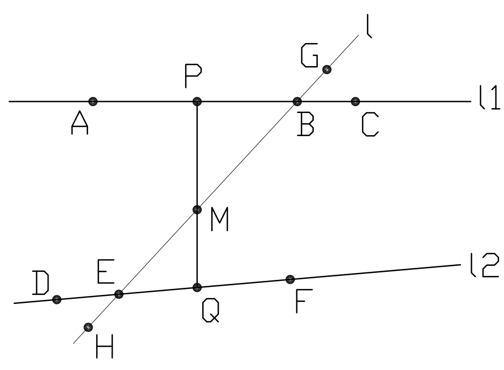
(i) $A - B - C$, $D - E - F$, $G - B - E - H$,

(ii) A a D jsou na téže straně od $\overleftrightarrow{GH}$,

potom $\angle ABE$ a $\angle FEB$ se nazývají střídavé úhly a úhly $\angle ABG$ a $\angle DEB$ úhly souhlasné.

Věta 6.6.1 *Nechť ℓ_1, ℓ_2 jsou dvě přímky v neutrální geometrii. Jestliže ℓ je příčka ℓ_1 a ℓ_2 s kongruentními střídavými úhly, pak existuje přímka ℓ', která je kolmá na ℓ_1 i ℓ_2.*

Důkaz: Nechť $\ell_1 = \overleftrightarrow{AC}$, $\ell_2 = \overleftrightarrow{DF}$, $\ell = \overleftrightarrow{GH}$, přičemž $\ell_1 \cap \ell = \{B\}$, $\ell_2 \cap \ell = \{E\}$, $A - B - C$, $D - E - F$, $G - B - E - H$ a body A a D jsou na stejné straně od $\overleftrightarrow{GH}$ (Obr. 6.4). Jestliže střídavé vnitřní úhly jsou pravé úhly, potom $\overleftrightarrow{GH}$ je požadovanou přímkou ℓ'. Jinak je jeden pár střídavých vnitřních úhlů tvořen ostrými úhly. Tento případ máme vyšetřit.
Předpokládejme, že $\angle ABE \cong \angle FEB$ jsou ostré úhly. Nechť M je střed úsečky $\overline{EB}$ a nechť P je pata kolmice z M na $\overleftrightarrow{AC}$. Protože $\angle ABE = \angle ABM$ je ostrý, A a P leží na stejné straně od $\overleftrightarrow{GH}$. Mimoto jestliže Q je pata kolmice z bodu M k $\overleftrightarrow{DF}$, potom Q a F leží také na stejné straně od $\overleftrightarrow{GH}$. Tedy P a Q jsou na opačných stranách od $\overleftrightarrow{GH}$.



Obrázek 6.4:

Máme ukázat, že P, M a Q jsou kolineární. To dokážeme pomocí věty o konstrukci úhlů. Pravoúhlé trojúhelníky $\triangle MBP$ a $\triangle MEQ$ jsou kongruentní, tudíž $\angle BMP \cong \angle EMQ$. Nechť $R \in \overleftrightarrow{PM}$ je bod, pro který platí $P{-}M{-}R$. Podle věty o vrcholovém úhlu $\angle BMP \cong \angle EMR$. Tedy $\angle EMQ \cong \angle EMR$. Q a R jsou na stejné straně od $\overleftrightarrow{GH}$. Podle věty o konstrukci úhlů je $\angle EMQ = \angle EMR$. Tedy $Q \in int(\overrightarrow{MR}) \subset \overleftrightarrow{PM}$, takže P, M a Q jsou kolineární. Tedy $\overleftrightarrow{PQ} = \ell'$ je hledaná společná kolmice.

Věta 6.6.2 *Jestliže dvě přímky v neutrální geometrii ℓ_1, ℓ_2 mají společnou kolmici, pak jsou rovnoběžné. Speciálně, existuje-li příčka k ℓ_1 a ℓ_2 s kongruentními střídavými úhly, potom $\ell_1 \parallel \ell_2$.*

Důkaz: Předpokládejme, že ℓ je kolmice k ℓ_1 v bodě P a k ℓ_2 v bodě Q. Jestliže $\ell_1 = \ell_2$, pak je první část tvrzení triviální. Dále budeme předpokládat, že $\ell_1 \neq \ell_2$.

Předpokládejme nejprve, že $\ell_1 \cap \ell_2$ obsahuje bod R. Potom $P \neq R$, $Q \neq R$ a P, Q, R nejsou kolineární. Ale $\triangle PQR$ má dva pravé úhly, což není možné. Tedy

$$\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset \quad \text{a} \quad \ell_1 \parallel \ell_2.$$

Věta 6.6.3 *V neutrální geometrii, nechť ℓ je přímka a $P \notin \ell$. Potom existuje přímka ℓ' jdoucí bodem P, která je rovnoběžná s ℓ.*

Důkaz: Nechť Q je pata kolmice k ℓ jdoucí bodem P a ℓ' je jediná kolmice k $\overleftrightarrow{PQ}$ z bodu P. Potom $\overleftrightarrow{PQ}$ je společná kolmice k ℓ a ℓ' a podle předchozí věty platí $\ell \parallel \ell'$.

Definice 6.6.3 Řekneme, že shodnostní geometrie splňuje Eukleidův pátý postulát, jestliže $\overleftrightarrow{BC}$ je příčka $\overleftrightarrow{DC}$ a $\overleftrightarrow{AB}$ a platí

(i) A a D jsou na stejné straně od $\overleftrightarrow{BC}$

(ii) $m(\angle ABC) + m(\angle BCD) < 180$.

Potom $\overleftrightarrow{AB}$ a $\overleftrightarrow{CD}$ se protínají v bodě E, který je na stejné straně od $\overleftrightarrow{BC}$ jako body A a D.

Věta 6.6.4 *Jestliže ℓ je přímka a $P \notin \ell$ v neutrální geometrii, která splňuje Eukleidův pátý postulát, potom existuje právě jedna přímka ℓ' jdoucí bodem P, která je rovnoběžná s ℓ.*

Důkaz: Nechť ℓ je přímka taková, že Q je pata kolmice k ℓ z bodu P. Předpokládejme, že $\overleftrightarrow{AB}$ je jiná přímka jdoucí bodem P taková, že platí $A - P - B$. Jestliže $\overleftrightarrow{AB} \neq \ell'$ potom jeden z úhlů $\angle APQ$ nebo $\angle BPQ$ je ostrý. Aplikujeme Eukleidův pátý postulát a vidíme, že $\overleftrightarrow{AB}$ protíná ℓ v bodě E. Tedy jestliže $\overleftrightarrow{AB} \neq \ell'$, potom $\overleftrightarrow{AB}$ není rovnoběžná s ℓ. Tudíž existuje pouze jedna přímka rovnoběžná s ℓ jdoucí bodem P.

Definice 6.6.4 Řekneme, že incidenční geometrie splňuje Eukleidovu vlastnost rovnoběžek, jestliže pro každou přímku ℓ a každý bod P existuje právě jedna přímka jdoucí bodem P, která je rovnoběžná s ℓ.

Věta 6.6.5 *Jestliže neutrální geometrie splňuje Eukleidovu vlastnost rovnoběžek, pak splňuje také Eukleidův pátý postulát.*

Důkaz: Nechť $\overleftrightarrow{BC}$ je příčka $\overleftrightarrow{AB}$ a $\overleftrightarrow{CD}$, kde A a D jsou na stejné straně od $\overleftrightarrow{BC}$. Předpokládejme, že

$$m(\angle ABC) + m(\angle BCD) < 180.$$

Chceme ukázat, že

$$\overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{CD} \neq \emptyset.$$

Zvolíme bod E na stejné straně od $\overleftrightarrow{BC}$ jako A, pro který $\angle EBC$ a $\angle BCD$ jsou doplňkové úhly. Zvolíme bod F, pro který $F - B - E$. Potom $\angle FBC$ a $\angle EBC$ jsou doplňkové úhly, a tedy

$$\angle FBC \cong \angle DCB.$$

Podle věty 6.6.2 platí $\overleftrightarrow{BE} \parallel \overleftrightarrow{CD}$. Protože předpokládáme splnění Eukleidovy vlastnosti rovnoběžek, nemůže být $\overleftrightarrow{BA}$ rovnoběžná s $\overleftrightarrow{CD}$, protože $\overleftrightarrow{BA} \neq \overleftrightarrow{BE}$. Proto

$$\overleftrightarrow{BA} \cap \overleftrightarrow{CD} \neq \emptyset.$$

Nyní musíme ukázat, že skutečně platí

$$\overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{CD} \neq \emptyset.$$

Protože

$$m(\angle CAB) + m(\angle BCD) < 180 = m(\angle CBE) + m(\angle BCD)$$

dostáváme

$$\angle CBA < \angle CBE.$$

Tedy $A \in int(\angle CBE)$, protože A a E jsou na stejné straně od $\overleftrightarrow{BC}$.

Určitě A je na stejné straně od $\overleftrightarrow{BE}$ jako C. Tedy všechny body z $int(\overrightarrow{BA})$ jsou na stejné straně od $\overleftrightarrow{BE}$ jako $\overleftrightarrow{CD}$. Protože $\overleftrightarrow{CD} \cap \overleftrightarrow{AB} \neq \emptyset$, bod z průniku musí náležet $\overrightarrow{BA}$. Konečně protože $int(\overrightarrow{BA})$ a $int(\overrightarrow{CD})$ leží na stejné straně od $\overleftrightarrow{BC}$, jejich průsečík musí ležet na $\overrightarrow{CD}$. Tedy $\overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{CD} \neq \emptyset$.

6.7 Saccheriho čtyřúhelník

Definice 6.7.1 Čtyřúhelník ve shodnostní geometrii nazveme Saccheriho čtyřúhelník, jestliže $\angle BAD$ a $\angle ADC$ jsou pravé a platí

$$\overline{AB} \cong \overline{CD}.$$

Úmluva: Úsečku $\overline{AD}$ budeme nazývat dolní základna, $\overline{BC}$ horní základna a $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ ramena Saccheriho čtyřúhelníku $\square ABCD$.

Věta 6.7.1 *V neutrální geometrii je každý Saccheriho čtyřúhelník konvexním čtyřúhelníkem.*

Důkaz: Přímky $\overleftrightarrow{AB}$ a $\overleftrightarrow{CD}$ mají společnou kolmici, označíme ji $\overleftrightarrow{AD}$. Podle věty 6.6.2 $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, a tedy čtyřúhelník je konvexní.

Definice 6.7.2 Dva konvexní čtyřúhelníky v neutrální geometrii $\square ABCD$ a $\square EFGH$ jsou kongruentní, jestliže odpovídající si strany a úhly jsou kongruentní.

Píšeme

$$\square ABCD \cong \square EFGH.$$

Věta 6.7.2 *Nechť v neutrální geometrii* $\square ABCD$ *a* $\square PQRS$ *jsou Saccheriho čtyřúhelníky. Jestliže platí*

$$\overline{AD} \cong \overline{PS} \quad \text{a} \quad \overline{AB} \cong \overline{PQ},$$

potom

$$\square ABCD \cong \square PQRS.$$

Důsledek 6.7.1 *Jestliže $\square ABCD$ v neutrální geometrii je Saccheriho čtyřúhelník, potom*

$$\square ABCD \cong \square DCBA \quad \text{a platí} \quad \angle ABC \cong \angle BCD.$$

Věta 6.7.3 *(mnohoúhelníková nerovnost): Uvažujme $n \geq 3$. Jestliže $P_1, P_2, ..., P_n$ jsou body v neutrální geometrii, potom*

$$d(P_1, P_n) \leq d(P_1, P_2) + ... + d(P_{n-1}, P_n).$$

Důkaz: (provedeme matematickou indukcí) Jestliže $n = 3$ dostáváme trojúhelníkovou nerovnost, jejíž platnost byla dokázána dříve. Předpokládáme platnost pro $n = k$. Tedy nechť

$$d(P_1, P_k) \leq d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) + ... + d(P_{k-1}, P_k).$$

Podle trojúhelníkové nerovnosti platí

$$d(P_1, P_{k+1}) \leq d(P_1, P_k) + d(P_k, P_{k+1}).$$

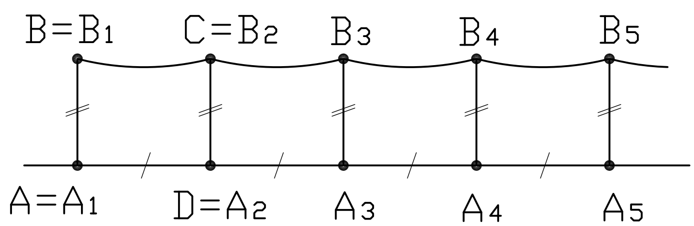
Kombinací předchozích nerovností dostáváme

$$d(P_1, P_{k+1}) \leq d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) + ... + d(P_{k-1}, P_k) + d(P_k, P_{k+1}).$$

Dokázali jsme, že z platnosti pro $n = k$ vyplývá platnost pro $n = k + 1$. Nerovnost tedy platí pro všechna $n \geq 3$.

Věta 6.7.4 *Nechť je v neutrální geometrii dán Saccheriho čtyřúhelník $\square ABCD$, potom*

$$\overline{BC} \geq \overline{AD}.$$



Obrázek 6.5:

Důkaz: Zkonstruujeme řetězec kongruentních Saccheriho čtyřúhelníků (Obr 6.5). Nechť

$$A_1 = A, \ A_2 = D, \ B_1 = B \quad \text{a} \quad B_2 = C.$$

Pro každé $k \geq 3$ nechť A_k je jediný bod na $\overleftrightarrow{AD}$, pro který

$$A_{k-2} - A_{k-1} - A_k \quad \text{a} \quad \overline{A_{k-1}A_k} \cong \overline{AD}.$$

Všimněme si, že

$$d(A_1, A_{n+1}) = n.d(A, D).$$

Pro každé $k \geq 3$, nechť B_k je jediný bod na stejné straně od $\overleftrightarrow{AD}$ jako B, pro který

$$\overline{B_kA_k} \perp \overleftrightarrow{AD} \quad \text{a} \quad \overline{B_kA_k} \cong \overline{BA}.$$

Podle věty 6.7.2 jsou Saccheriho čtyřúhelníky $\square A_iB_iB_{i+1}A_{i+1} \cong \square ABCD$ pro $\forall i \geq 1$. Speciálně

$$\overline{B_1B_2} \cong \overline{B_2B_3} \cong \dots.$$

Podle mnohoúhelníkové nerovnosti

$$d(A_1, A_{n+1}) \leq d(A_1, B_1) + d(B_1, B_2) + \cdots + d(B_n, B_{n+1}) + d(B_{n+1}, A_{n+1}).$$

Dále protože

$$d(A, B) = d(A_1, B_1) = d(B_{n+1}, A_{n+1}) \quad \text{a} \quad d(B_i, B_{i+1}) = d(B, C),$$

$$n.d(A, D) \leq 2d(A, B) + n.d(B, C) \quad \text{pro} \quad n \geq 1.$$

Tedy

$$d(A, D) - d(B, C) \leq \frac{2}{n} d(A, B) \quad \text{pro} \quad n \geq 1.$$

Protože poslední nerovnost platí pro všechna $n \geq 1$ a na pravé straně můžeme dosadit libovolně malé číslo při volbě velkého n, musí být

$$d(A, D) - d(B, C) \geq 0.$$

Tedy

$$\overline{AD} \leq \overline{BC}.$$

Věta 6.7.5 *Nechť je v neutrální geometrii dán Saccheriho čtyřúhelník $\square ABCD$, potom*

$$\angle ABD \leq \angle BDC.$$

Věta 6.7.6 *V neutrální geometrii je součet měr ostrých úhlů v pravoúhlém trojúhelníku menší nebo roven* 90.

Důkaz: Nechť $\triangle ABC$ má pravý úhel při vrcholu A a C je jediný bod na stejné straně od $\overleftrightarrow{AD}$ jako B, pro který platí

$$\overline{CD} \perp \overleftrightarrow{AD} \quad \text{a} \quad \overline{AB} \cong \overline{DC}.$$

Máme tedy Saccheriho čtyřúhelník $\square ABCD$ a podle věty 6.7.5

$$m(\angle ABD) + m(\angle ADB) \leq m(\angle BDC) + m(\angle ADB).$$

Protože Saccheriho čtyřúhelník $ABCD$ je konvexní, $B \in int(\angle ADC)$ a tak

$$m(\angle BDC) + m(\angle ADB) = m(\angle ADC) = 90.$$

Tedy

$$m(\angle ABD) + m(\angle ADB) \leq 90.$$

Věta 6.7.7 *(Saccheriho): V neutrální geometrii je součet měr vnitřních úhlů v trojúhelníku menší nebo roven* 180.

Důkaz: Nechť $\triangle ABC$ je libovolný trojúhelník. Předpokládejme, že $\overline{AC}$ je jeho nejdelší stranou. Potom podle věty 6.5.4 patou kolmice z bodu B na $\overleftrightarrow{AC}$ je bod D takový, že $A - D - C$. Přitom $D \in int(\angle ABC)$, takže

$$m(\angle CAB)+m(\angle ABC)+m(\angle BCA) = m(\angle DAB)+m(\angle ABD)+m(\angle BCD) \leq 90+90 = 180.$$

Věta 6.7.8 *(Eukleidova o součtu úhlů): V neutrální geometrii, která splňuje Eukleidovu vlastnost rovnoběžek je součet měr vnitřních úhlů v každém trojúhelníku roven* 180.

Důkaz: Nechť je dán $\triangle ABC$ a nechť ℓ je jediná přímka jdoucí bodem B a rovnoběžná s $\overleftrightarrow{AC}$. Zvolíme D a E na ℓ, aby platilo $D - B - E$ a body D a A byly na stejné straně od $\overleftrightarrow{BC}$. Pak platí

$$\angle DBA \cong \angle BAC \quad \text{a} \quad \angle EBC \cong \angle BCA.$$

Víme, že $A \in int(\angle DBC)$, takže

$$m(\angle DBA) + m(\angle ABC) = m(\angle DBC).$$

Tudíž

$$m(\angle CAB) + m(\angle ABC) + m(\angle BCA) = m(\angle DBA) + m(\angle ABC) + m(\angle EBC) =$$

$$= m(\angle DBC) + m(\angle EBC) = 180.$$

Definice 6.7.3 Čtyřúhelník $\Box ABCD$ je rovnoběžník, jestliže $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ a $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.
Čtyřúhelník je pravoúhelník, jestliže všechny čtyři jeho vnitřní úhly jsou pravé.
Pravoúhelník je čtverec, jestliže všechny jeho strany jsou kongruentní.

Věta 6.7.9 *V neutrální geometrii je Saccheriho čtyřúhelník vždy rovnoběžník.*

Důkaz: V Saccheriho čtyřúhelníku $\Box ABCD$ je $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Protože existuje přímka, která je kolmá k oběma stranám - například přímka jdoucí středy obou stran (označíme ji $\overleftrightarrow{AD}$) platí $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$.

Definice 6.7.4 Množina bodů $\mathcal{A}$ v neutrální geometrii je stejně vzdálená od ℓ, jestliže $d(A, \ell)$ je stejná pro $\forall A \in \mathcal{A}$.

Věta 6.7.10 *Nechť $\Box ABCD$ v neutrální geometrii je čtyřúhelník s pravými úhly při vrcholech A a D. Jestliže*

$$\overline{AB} > \overline{DC}, \quad \text{pak} \quad \angle ABC < \angle DCB.$$

Důkaz: Zvolíme bod $E \in \overrightarrow{DC}$ takový, že platí $D - C - E$ a $\overline{DE} \cong \overline{AB}$. Potom $\Box ABED$ je Saccheriho čtyřúhelník, takže $\angle ABE \cong \angle DEB$. Podle věty o vnějším úhlu $\angle DEB < \angle DCB$. Na druhou stranu $C \in int(\angle ABE)$, proto

$$\angle ABC < \angle ABE.$$

Takže

$$\angle ABC < \angle ABE \cong \angle DEB < \angle DCB.$$

Věta 6.7.11 *Jestliže $\Box ABCD$ je čtyřúhelník v neutrální geometrii s pravými úhly při vrcholech A a D, potom*

(i) $\overline{AB} > \overline{CD} \iff \angle ABC < \angle DCB$,

(ii) $\overline{AB} \cong \overline{CD} \iff \angle ABC \cong \angle DCB$,

(iii) $\overline{AB} < \overline{CD} \iff \angle ABC > \angle DCB$.

Věta 6.7.12 *(Giordanova): Jestliže v neutrální geometrii existují tři různé body na přímce ℓ, které mají stejnou vzdálenost od přímky ℓ', pak ℓ je ekvidistanta ℓ'.*

Důkaz: Jestliže $\ell = \ell'$, potom ℓ je všude stejně vzdálená od ℓ'. Předpokládejme tedy, že $\ell \neq \ell'$. Nechť

$$A,\ B,\ C \in \ell \quad \text{a platí} \quad d(A,\ell') = d(B,\ell') = d(C,\ell').$$

Alespoň dva z bodů $A,\ B,\ C$ musí ležet na stejné straně od ℓ'. Přímka ℓ je tedy rovnoběžná s ℓ', a proto celá přímka ℓ leží na jedné straně od ℓ'. Protože jeden ze tří bodů na přímce musí ležet mezi zbývajícími dvěma, musí ležet všechny tři body $A,\ B,\ C$ na stejné straně od ℓ'. Můžeme tedy předpokládat, že platí například $A - B - C$. Nechť $D,\ E,\ F$ jsou po řadě paty kolmic z bodů $A,\ B,\ C$ k přímce ℓ'. Dostali jsme tři Saccheriho čtyřúhelníky $\Box DABE$, $\Box DACF$ a $\Box EBCF$. Platí tedy

$$\angle ABE \cong \angle BAD \cong \angle BCF \cong \angle CBE.$$

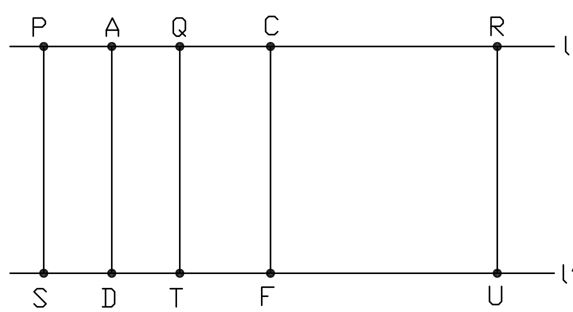
Protože $\angle ABE$ a $\angle CBE$ tvoří lineární pár, je $\angle ABE$ pravý úhel. Tudíž všechny úhly v předchozí kongruenci jsou pravé. Tedy Saccheriho čtyřúhelník $\Box DACF$ je pravoúhelník. Musíme ukázat, že pokud $P \in \ell$ a S je pata kolmice z bodu P k ℓ, pak

$$\overline{PS} \cong \overline{AD}.$$

Případ 1. Předpokládejme, že P je mezi dvěma body z $A,\ B,\ C$. Musí tedy platit $A - P - C$. Jestliže $\overline{PS}$ není kolmá k ℓ, potom jeden z úhlů $\angle APS$ a $\angle CPS$ je ostrý. Předpokládejme, že $\angle APS$ je ostrý, tedy $\angle CPS$ je tupý a platí $AD < PS < CF$. Což je spor s tím, že $\overline{AD} \cong \overline{CF}$. Musí tedy platit $\overline{PS} \perp \ell$. Proto

$$\angle APS \cong \angle PAD \quad \text{a} \quad \overline{PS} \cong \overline{AD}.$$

Případ 2. Nyní předpokládejme, že $P \in \ell$, ale $P \notin \overline{AC}$. Nechť Q je jediný bod z ℓ, pro který $P - A - Q$ a $\overline{AQ} \cong \overline{PA}$. Nechť T je pata kolmice z bodu Q na ℓ' (Obr.6.6). $\triangle PAD \cong \triangle QAD$ podle věty *sus*. $\triangle PDS \cong \triangle QDT$. Proto $\overline{PS} \cong \overline{QT}$.
Podobně nechť R je jediný bod na ℓ, pro který platí $P - C - R$ a $\overline{PC} \cong \overline{CR}$ a nechť U je pata kolmice z bodu R na ℓ'. Potom $\overline{PS} \cong \overline{RU}$. Proto $P,\ Q,\ R$ jsou tři body na ℓ, které jsou stejně vzdálené od ℓ'. Protože platí $P - A - Q$, potom podle případu 1 je $\overline{AD} \cong \overline{PS}$ protože A je mezi dvěma ze tří bodů $P,\ Q,\ R$, které jsou stejně vzdálené od ℓ'. Proto pro všechna P platí $\overline{PS} \cong \overline{AD}$ a ℓ je ekvidistanta ℓ'.



Obrázek 6.6:

6.8 Kritická funkce

Věta 6.8.1 *Nechť ℓ je přímka v neutrální geometrii a $P \notin \ell$. Nechť D je pata kolmice k ℓ jdoucí bodem P. Potom $\overrightarrow{PC} \cap \ell = \emptyset$ vždy, když $m(\angle DPC) \geq 90$.*

Důkaz: Jestliže $m(\angle DPC) = 90$ potom $\overleftrightarrow{PC} \parallel \ell$, a tedy věta je pravdivá. Jestliže $m(\angle DPC) > 90$, potom bod A leží na stejné straně od $\overleftrightarrow{PD}$ jako C, takže $m(\angle DPA) = 90$. Potom $\overleftrightarrow{PA} \parallel \ell$ a $int(\overrightarrow{PC})$ leží na opačné straně od $\overleftrightarrow{PA}$ než D. Protože všechny body ℓ leží na stejné straně od $\overleftrightarrow{PA}$, platí $\overrightarrow{PC} \cap \ell = \emptyset$.

Definice 6.8.1 Nechť $\mathcal{M}$ je množina reálných čísel, potom $r \in \mathbb{R}$ je nejmenší horní mez $\mathcal{M}$ (píšeme $r = lub\ \mathcal{M}$), jestliže

(i) $b \leq r$ pro $\forall b \in \mathcal{M}$,

(ii) pro $\forall s < r$ potom existuje prvek $b_s \in \mathcal{M}$ takový, že $s < b_s$.

Definice 6.8.2 Nechť ℓ je přímka v neutrální geometrii a P je bod, $P \notin \ell$. Jestliže D je pata kolmice na ℓ jdoucí bodem P a nechť platí

$$K(P,\ell) = \{r \in \mathbb{R}, \quad \text{pro která existuje} \quad \overrightarrow{PC} \quad \text{taková, že} \quad \overrightarrow{PC} \cap \ell = \emptyset \quad \text{a} \quad r = m(\angle DPC)\}.$$

Kritickým číslem pro P a ℓ je

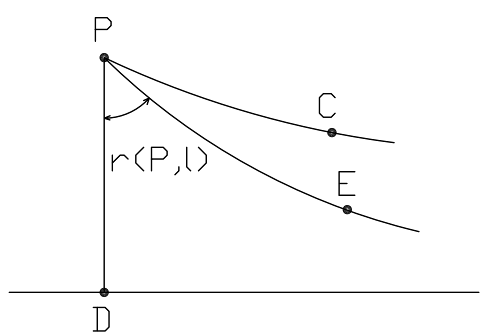
$$r(P,\ell) = lub\{K(P,\ell)\}.$$

Věta 6.8.2 *V neutrální geometrii, nechť $P \notin \ell$ a nechť D je pata kolmice z bodu P na ℓ. Jestliže $m(\angle DPC) \geq r(P,\ell)$, potom $\overrightarrow{PC} \cap \ell = \emptyset$,*
jestliže $m(\angle DPC) < r(P,\ell)$, potom $\overrightarrow{PC} \cap \ell \neq \emptyset$.

Důkaz: Nejprve předpokládejme, že $m(\angle DPC) = r(P,\ell)$. Chceme ukázat, že $\overrightarrow{PC} \cap \ell = \emptyset$. Předpokládejme sporem, že $\overrightarrow{PC}$ protíná ℓ v nějakém bodě R a nechť S je nějaký bod, pro který platí $D - R - S$. Potom $R \in int(\angle DPS)$, takže

$$m(\angle DPS) > m(\angle DPR) = m(\angle DPC) = r(P,\ell).$$

Ale $\overrightarrow{PS} \cap \ell = S$, takže $m(\angle DPS) \in K(P,\ell)$, což je spor s tím, že $r(P,\ell)$ je nejmenší horní mez $K(P,\ell)$. Proto jestliže $m(\angle DPC) = r(P,\ell)$, musí platit $\overrightarrow{PC} \cap \ell = \emptyset$. Poznamenejme, že pokud $B - P - C$, potom $m(\angle DPB) \geq 90$ a podle věty 6.8.1 $\overrightarrow{PB} \cap \ell = \emptyset$. Proto pokud $m(\angle DPC) = r(P,\ell)$, potom $\overleftrightarrow{PC} \parallel \ell$.



Obrázek 6.7:

Dále předpokládejme, že $m(\angle DPC) > r(P,\ell)$. Nechť E je bod na stejné straně od $\overleftrightarrow{PD}$ jako C a platí $m(\angle DPE) = r(P,\ell)$ (Obr. 6.7), tedy $\overleftrightarrow{PE} \parallel \ell$. Tedy $int(\overrightarrow{PC})$ a ℓ leží na opačných stranách od $\overleftrightarrow{PB}$. Proto $\overrightarrow{PC} \cap \ell = \emptyset$ jestliže $m(\angle DPC) > r(P,\ell)$.

Konečně předpokládejme, že $m(\angle DPC) < r(P,\ell)$. Chceme ukázat, že $\overrightarrow{PC} \cap \ell \neq \emptyset$. Podle definice nejmenší dolní meze existuje číslo $s = m(\angle DPF) \in K(P,\ell)$, pro které $m(\angle DPC) < s$. Protože $s \in K(P,\ell)$, $\overrightarrow{PF}$ protíná ℓ v nějakém bodě A. Jestliže A je na stejné straně od $\overleftrightarrow{PD}$ jako C, potom $C \in int(\angle DPF)$, takže podle "křížové věty" $\overrightarrow{PC}$ protíná $\overline{DA}$ a proto $\overrightarrow{PC} \cap \ell \neq \emptyset$. Jestliže A je na opačné straně od $\overleftrightarrow{PD}$ než C, nechť A' je jediný bod, pro který $A - D - A'$ a $\overline{AD} \cong \overline{DA'}$. Potom podle věty *sus* platí $\angle DPA' \cong \angle DPA$. $C \in int(\angle DPA')$ a $\overrightarrow{PC}$ protíná $\overline{DA'}$ a proto protíná také ℓ. Jestliže tedy $m(\angle DPC) < r(P,\ell)$, potom $\overrightarrow{PC} \cap \ell \neq \emptyset$.

Důsledek 6.8.1 *Nechť ℓ je přímka v neutrální geometrii a P je bod, $P \notin \ell$. Potom existuje více než jedna přímka jdoucí bodem P rovnoběžná s ℓ právě tehdy, když $r(P,\ell) < 90$.*

Věta 6.8.3 *Nechť P, P' jsou body v neutrální geometrii a nechť ℓ, ℓ' jsou přímky takové, že platí $P \notin \ell$, $P' \notin \ell'$. Jestliže*

$$d(P,\ell) = d(P',\ell'), \quad \text{potom} \quad r(P,\ell) = r(P',\ell').$$

Důkaz: Chceme ukázat, že $K(P,\ell) = K(P',\ell')$. To implikuje, že

$$r(P,\ell) = lub\ \{K(P,\ell)\} = lub\ \{K(P',\ell')\} = r(P',\ell').$$

Nechť D je pata kolmice z bodu P k ℓ a nechť D' je pata kolmice z P' k ℓ'. Podle předpokladu

$$\overline{DP} \cong \overline{D'P'}.$$

Jestliže $s \in K(P,\ell)$, potom existuje bod $C \in \ell$, pro který $m(\angle DPC) = s$. Zvolíme bod $C' \in \ell'$ tak, aby platilo $\overline{DC} \cong \overline{D'C'}$. Potom $\triangle PDC \cong \triangle P'D'C'$ podle věty *sus*, takže

$$m(\angle DPC) = m(\angle D'P'C').$$

Proto $s \in K(P',\ell')$ takže $K(P,\ell) \subset K(P',\ell')$. Podobně $K(P',\ell') \subset K(P,\ell)$, takže

$$K(P,\ell) = K(P',\ell').$$

A tedy

$$r(P,\ell) = r(P',\ell').$$

Definice 6.8.3 Kritická funkce v neutrální geometrii je funkce

$$\Pi : \{t, t > 0\} \longrightarrow \{r; 0 < r < 90\}$$

dána předpisem

$$\Pi(t) = r(P,\ell),$$

kde ℓ je přímka a P bod, jehož vzdálenost od ℓ je rovna t.

Věta 6.8.4 *V neutrální geometrii je kritická funkce nerostoucí (pro $t' > t$ je $\Pi(t') \leq \Pi(t)$).*

Důkaz: Nechť ℓ je přímka, $D \in \ell$ a nechť P, P' jsou body, pro něž platí

$$P' - P - D, \quad \overline{P'D} \perp \ell, \quad P'D = t' \quad \text{a} \quad PD = t$$

Zvolíme body C, C' na stejné straně od $\overleftrightarrow{PD}$ tak, že

$$m(\angle DPC) = m(\angle DP'C') = \Pi(t).$$

Podle důkazu věty 7.3.3 $\overleftrightarrow{PC} \parallel \ell$. Protože také $\overleftrightarrow{P'C'} \parallel \overleftrightarrow{PC}$. Dále protože P' a D leží na opačných stranách od $\overleftrightarrow{PC}$, $\overleftrightarrow{P'C'} \cap \ell = \emptyset$. Tudíž $\overleftrightarrow{P'C'} \parallel \ell$, takže

$$\Pi(t') = r(P',\ell) \leq m(\angle DP'C') = \Pi(t).$$

Věta 6.8.5 *V neutrální geometrii, jestliže* $\Pi(a) < 90$*, potom*

$$\Pi\left(\frac{a}{2}\right) < 90.$$

Důkaz: Nechť ℓ je přímka a $D \in \ell$, zvolíme body P, P' tak, aby platilo

$$P - P' - D, \quad \overline{PD} \perp \ell, \quad PP' = P'D = a/2.$$

Zvolíme bod C, pro který $m(\angle DPC) = \Pi(a) < 90$. Konečně nechť ℓ' je jediná přímka jdoucí bodem P', která je kolmá k $\overline{PD}$. Pak mohou nastat dvě možnosti; buď

$$\overrightarrow{PC} \cap \ell' \neq \emptyset \quad \text{nebo} \quad \overrightarrow{PC} \cap \ell' = \emptyset.$$

Nejprve předpokládejme, že $\overrightarrow{PC} \cap \ell' = A$. Zvolíme bod B, aby platilo $P - A - B$. Protože $\angle DP'A$ je pravý úhel a $B \in int(\angle DP'A)$, $m(\angle DP'B) < 90$. Chceme ukázat, že

$$\Pi(a/2) < m(\angle DP'B).$$

Ukážeme, že $\overrightarrow{P'B} \cap \ell = \emptyset$. Protože $m(\angle DPA) = \Pi(a)$ a $\overrightarrow{PA} \cap \ell = \emptyset$. Proto P a B jsou na stejné straně od ℓ. Protože platí $P - P' - D$, jsou P a P' na stejné straně od ℓ. Proto P' a B jsou také na stejné straně od ℓ a $\overline{P'B} \cap \ell = \emptyset$.
Jestliže $P' - B - E$, potom P' a E jsou na opačných stranách od $\overleftrightarrow{PC}$. Tudíž D a E jsou na opačných stranách od $\overleftrightarrow{PC}$. Proto $\overrightarrow{BE} \cap \ell = \emptyset$, takže $\overrightarrow{P'B} \cap \ell = \emptyset$. To znamená, že

$$\Pi(a/2) = r(P', \ell) \leq m(\angle DP'B) < 90.$$

Obráceně jestliže $\overrightarrow{PC} \cap \ell' = \emptyset$, potom

$$\Pi(a/2) = r(P, \ell') \leq m(\angle P'PC = \Pi(a) < 90.$$

V obou případech $\Pi(a/2) < 90$.

Věta 6.8.6 *V neutrální geometrii, jestliže* $\Pi(a) < 90$ *pro několik různých reálných čísel a, potom* $\Pi(t) < 90$ *pro všechna* $t > 0$.

Důkaz: Pro všechna kladná celá čísla n nechť

$$a_n = \frac{a}{2^n}.$$

Potom podle předchozí věty $\Pi(a_1) < 90$ protože $\Pi(a) < 90$. Indukcí $\Pi(a_n) < 90$ pro každé n. Nyní předpokládejme, že t bylo dáno. Zvolíme-li dostatečně velké n tak, aby

$$a_n = \frac{a}{2^n} < t.$$

Potom podle předchozí věty platí

$$\Pi(t) \leq \Pi(a_n) < 90.$$

Věta 6.8.7 *("všechno nebo nic"): Jestliže v neutrální geometrii existuje jedna přímka* ℓ' *a jeden bod* P', $P' \notin \ell'$ *tak, že existuje jediná přímka jdoucí bodem* P' *rovnoběžná s* ℓ'*, pak tato geometrie splňuje Eukleidovu vlastnost rovnoběžek.*

Důkaz: Protože existuje jediná přímka rovnoběžná s ℓ' jdoucí bodem P', $r(P', \ell') = 90$. Tudíž

$$\Pi(a) = 90 \quad \text{pro} \quad a = d(P', \ell').$$

Podle předchozí věty $\Pi(t) = 90$ pro všechna $t > 0$. Proto $r(P, \ell) = 90$ pro všechny přímky ℓ a všechny body $P \notin \ell$. Tudíž existuje pouze jedna přímka jdoucí bodem P, která je rovnoběžná s ℓ.

Definice 6.8.4 Neutrální geometrie splňuje hyperbolickou vlastnost rovnoběžek, jestliže pro každou přímku ℓ a každý bod $P \notin \ell$ existuje více než jedna přímka jdoucí bodem P, která je rovnoběžná s přímkou ℓ.

Definice 6.8.5 Neutrální geometrie splňující Eukleidovu vlastnost rovnoběžek je eukleidovská geometrie. Neutrální geometrie splňující hyperbolickou vlastnost rovnoběžek je hyperbolická geometrie.

Kapitola 7

Hyperbolická geometrie

V této kapitole budeme pokračovat ve studiu teorie rovnoběžek a budeme zkoumat základní důsledky toho, že daná geometrie splňuje hyperbolickou vlastnost rovnoběžek.

7.1 Modely hyperbolické geometrie

Dosud jsme si uvedli pouze Poincarého polorovinný modele hyperbolické geometrie. Existuje však celá řada dalších modelů. Nyní se seznámíme se dvěma: Poincarého kruhovým modelem a modelem Beltrami-Kleinovým.

Oba modely jsou budovány ve vnitřku kruhu, ale v každém z nich jsou uvažovány odlišné množiny přímek.

7.1.1 Beltrami-Kleinův model

Definice 7.1.1 Nechť $\mathbb{D} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$ je vnitřek jednotkového kruhu. K-přímka v $\mathbb{D}$ je průnik $\mathbb{D}$ a eukleidovské přímky $\ell \subset \mathbb{R}^2$.

Věta 7.1.1 *Jestliže $\mathcal{L}_K$ je množina všech K-přímek v $\mathbb{D}$, potom $\{\mathbb{D},\ \mathcal{L}_K\}$ je (Beltrami-Kleinovým) modelem incidenční geometrie.*

7.1.2 Poincarého kruhový model

Definice 7.1.2 Řekneme, že dvě kružnice $k_1(P,r)$ a $k_2(C,s)$ jsou kolmé, jestliže se protínají ve dvou bodech A a B a $\angle PAC$ i $\angle PBC$ jsou pravé úhly.

Definice 7.1.3 P-přímka v $\mathbb{D}$ je průnik $\mathbb{D}$ a eukleidovské přímky jdoucí bodem (0,0) nebo $\mathbb{D}$ a eukleidovské kružnice k, která je kolmá ke kružnici $\{(u,v) \mid u^2 + v^2 = 1\}$.

Věta 7.1.2 *Jestliže $\mathcal{L}_D$ je množina všech P-přímek, pak $\{\mathbb{D},\ \mathcal{L}_D\}$ je (Poincarého kruhovým) modelem abstraktní geometrie.*

7.2 Asymptotické polopřímky a trojúhelníky

Definice 7.2.1 Nechť A, B, C, D jsou navzájem různé body neutrální geometrie a žádné tři z nich nejsou kolineární, C a D leží na stejné straně od $\overleftrightarrow{AB}$ a $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. Potom množinu

$$\triangle\ DABC = \overrightarrow{AD} \cup \overline{AB} \cup \overrightarrow{BC}$$

nazveme otevřený trojúhelník.

Definice 7.2.2 Nechť $\triangle DABC$ je otevřený trojúhelník. Řekneme, že $\overrightarrow{BC}$ je ryze asymptotická k $\overrightarrow{AD}$, jestliže pro všechna $E \in int(\angle ABC)$, $\overrightarrow{BE}$ protíná $\overrightarrow{AD}$.

Definice 7.2.3 Dvě polopřímky $\overrightarrow{PQ}$ a $\overrightarrow{RS}$ v hyperbolické geometrii jsou ekvivalentní (píšeme $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{RS}$), jestliže platí

$$\overrightarrow{PQ} \subset \overrightarrow{RS} \quad \text{nebo} \quad \overrightarrow{RS} \subset \overrightarrow{PQ}.$$

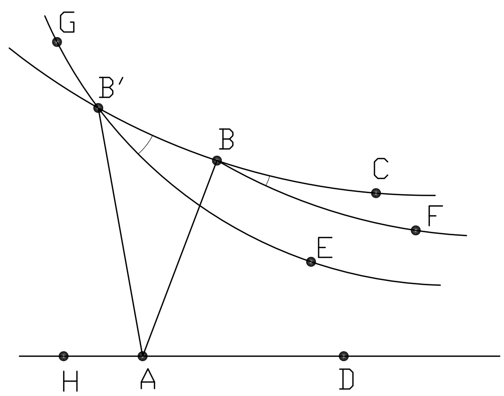
Polopřímka $\overrightarrow{BC}$ je asymptotická k polopřímce $\overrightarrow{AD}$ (píšeme $\overrightarrow{BC} \mid \overrightarrow{AD}$), jestliže je buď $\overrightarrow{BC}$ ryze asymptotická k $\overrightarrow{AD}$ nebo platí

$$\overrightarrow{BC} \sim \overrightarrow{AD}.$$

Věta 7.2.1 *V neutrální geometrii platí: jestliže $\overrightarrow{BC} \sim \overrightarrow{B'C'}$ a $\overrightarrow{BC} \mid \overrightarrow{AD}$, pak $\overrightarrow{B'C'} \mid \overrightarrow{AD}$.*

Důkaz: Definovaná relace být ekvivalentní je relací ekvivalence. Proto jestliže $\overrightarrow{BC} \sim \overrightarrow{AD}$, potom $\overrightarrow{B'C'} \sim \overrightarrow{AD}$, tedy také $\overrightarrow{B'C'} \mid \overrightarrow{AD}$. Můžeme tedy předpokládat, že $\overrightarrow{BC} \nsim \overrightarrow{AD}$; to znamená, že $\overrightarrow{BC}$ je ryze asymptotická k $\overleftrightarrow{AD}$.

Případ 1. Předpokládejme, že $\overrightarrow{BC} \subset \overrightarrow{B'C'}$. Jestliže $B = B'$, potom $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$, a tím je platnost věty dokázána.



Obrázek 7.1:

Nyní se budeme zabývat případem, kdy $B \neq B'$. Bude tedy platit $B' - B - C$, takže $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{B'C}$. Podle předpokladu je $\overrightarrow{BC}$ ryze asymptotická k $\overrightarrow{AD}$. Nechť $E \in int(\angle AB'C)$. Musíme ukázat, že $\overrightarrow{B'E} \cap \overrightarrow{AD} \neq \emptyset$. Sporem předpokládejme, že $\overrightarrow{B'E} \cap \overrightarrow{AD} = \emptyset$. Budeme požadovat, aby $\overleftrightarrow{B'E} \parallel \overleftrightarrow{AD}$ a bod G ležel na opačné straně od $\overleftrightarrow{B'C}$ než body A a D (Obr 7.1). Jestliže platí $H - A - D$, potom $\overrightarrow{B'E} \cap \overrightarrow{AH} = \emptyset$, protože E a H leží na opačných stranách od $\overleftrightarrow{AB'}$. Tedy

$$\overleftrightarrow{B'E} \cap \overleftrightarrow{AD} = (\overrightarrow{B'E} \cap \overrightarrow{AD}) \cup (\overrightarrow{B'E} \cap \overrightarrow{AH}) \cup (\overrightarrow{B'G} \cap \overleftrightarrow{AD}) = \emptyset \quad \text{a} \quad \overleftrightarrow{B'E} \parallel \overleftrightarrow{AD}.$$

Podle věty o vnějším úhlu pro $\triangle B'BA$ platí

$$\angle CBA > \angle CB'A > \angle CB'E,$$

takže existuje jediný bod $F \in int(\angle CBA)$ takový, že $\angle CBF \cong \angle CB'E$. Potom $\overleftrightarrow{BF} \parallel \overleftrightarrow{B'E}$. Tudíž $\overrightarrow{BF}$ leží celá na téže straně od $\overleftrightarrow{B'E}$ jako $\overrightarrow{AD}$. Protože body B a A jsou na opačných

stranách od $\overleftrightarrow{B'E}$, $\overrightarrow{BF} \cap \overrightarrow{AD} = \emptyset$.
To je ale spor s předpokladem, že $\overrightarrow{BC} \mid \overrightarrow{AD}$, takže $\overrightarrow{B'E} \cap \overrightarrow{AD} \neq \emptyset$. Proto $\overrightarrow{B'C} \mid \overrightarrow{AD}$.

Případ 2. Nyní předpokládejme $\overrightarrow{B'C'} \subset \overrightarrow{BC}$ a $B \neq B'$. Potom $B - B' - C'$ a $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC'}$. Nechť $E \in int(\angle AB'C')$. Musíme ukázat, že $\overrightarrow{B'E} \cap \overrightarrow{AD} = \emptyset$. Nyní můžeme tvrdit podobně jako v případě 1, že $\overleftrightarrow{B'E} \parallel \overleftrightarrow{AD}$. Nejprve máme ukázat, že $E \in int(\angle ABC')$.
Protože $E \in int(\angle AB'C')$, E a A jsou na stejné straně od $\overleftrightarrow{B'C'} = \overleftrightarrow{BC'}$. E a C' jsou na stejné straně od $\overleftrightarrow{AB'}$. Protože $B - B' - C'$, E a B jsou na opačných stranách od $\overleftrightarrow{AB'}$, tudíž $\overrightarrow{B'E} \cap \overrightarrow{AB} = \emptyset$. $\overrightarrow{B'E}$ leží na stejné straně od $\overleftrightarrow{AD}$, protože $\overleftrightarrow{B'E} \parallel \overleftrightarrow{AD}$. Body B a B' leží na stejné straně od $\overleftrightarrow{AD}$. Pokud tedy platí $B - A - Q$, pak $\overrightarrow{B'E}$ leží na opačné straně od $\overleftrightarrow{AD}$ než bod Q. Proto $\overrightarrow{B'E} \cap \overrightarrow{AQ} = \emptyset$.
Z toho vyplývá, že $\overrightarrow{B'E} \cap \overleftrightarrow{AB} = \emptyset$, takže body B' a E leží na stejné straně od $\overleftrightarrow{AB}$. Tudíž E a C' leží na stejné straně od $\overleftrightarrow{AB}$, a tedy $E \in int(\angle ABC')$.
Nyní zvolíme bod F tak, aby platilo $B - E - F$. Jestliže $\overline{BE} \cap \overrightarrow{AD} \neq \emptyset$, pak $\overleftrightarrow{AD}$ protíná podle Paschovy věty buď $\overline{BB'}$ nebo $\overline{B'E}$. To ale nemůže nastat, protože $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BB'}$ a $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{B'E}$. Proto $\overline{BE} \cap \overrightarrow{AD} = \emptyset$.
Protože $E \in int(\angle ABB')$, $\overrightarrow{BE}$ protíná $\overline{AB'}$ v nějakém bodě R. Protože $E \in int(\angle AB'C')$, body E a B leží na opačných stranách od $\overleftrightarrow{AB'}$, takže platí $B - R - E - F$. Body A a R leží na stejné straně od $\overleftrightarrow{B'E}$, zatímco R a F leží na opačných stranách od $\overleftrightarrow{B'E}$. Proto také F a A leží na opačných stranách od $\overleftrightarrow{B'E}$. A protože $\overleftrightarrow{B'E} \parallel \overleftrightarrow{AD}$, musí být $\overrightarrow{EF} \cap \overrightarrow{AD} = \emptyset$.
Dále z platnosti

$$\overline{BE} \cap \overrightarrow{AD} = \emptyset \quad \text{a} \quad \overrightarrow{EF} \cap \overrightarrow{AD} = \emptyset \quad \text{a} \quad B - E - F,$$

dostáváme

$$\overrightarrow{BE} \cap \overrightarrow{AD} = \emptyset.$$

Což je ale spor s tím, že $\overrightarrow{BC'} \mid \overrightarrow{AD}$. To znamená, že předpoklad $\overrightarrow{B'E} \cap \overrightarrow{AD} = \emptyset$ je nesprávný. Proto když $E \in int(\angle AB'C')$, musí platit $\overrightarrow{B'C} \cap \overrightarrow{AD} \neq \emptyset$. Takže $\overrightarrow{B'C'} \mid \overrightarrow{AD}$.

Věta 7.2.2 *V neutrální geometrii platí: jestliže $\overrightarrow{AD} \sim \overrightarrow{A'D'}$ a $\overrightarrow{BC} \mid \overrightarrow{AD}$, pak $\overrightarrow{B'C'} \mid \overrightarrow{A'D'}$.*

Věta 7.2.3 *V neutrální geometrii platí: jestliže $\overrightarrow{AD} \sim \overrightarrow{A'D'}, \overrightarrow{BC} \sim \overrightarrow{B'C'}$ a $\overrightarrow{BC} \mid \overrightarrow{AD}$, pak $\overrightarrow{B'C'} \mid \overrightarrow{A'D'}$.*

Platnost vyplývá z předcházejících vět.

Věta 7.2.4 *Nechť je v neutrální geometrii dána polopřímka $\overrightarrow{AD}$ a bod $B \notin \overleftrightarrow{AD}$, potom existuje jediná polopřímka $\overrightarrow{BC}$ taková, že $\overrightarrow{BC} \mid \overrightarrow{AD}$.*

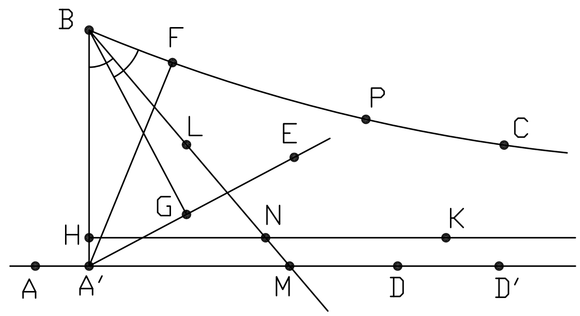
Důkaz: Nechť A' je pata kolmice z bodu B k $\overleftrightarrow{AD}$, zvolíme bod $D' \in \overrightarrow{AD}$ tak, aby $\overrightarrow{A'D'} \sim \overrightarrow{AD}$. $\overrightarrow{BC}$ může být asymptotická k $\overrightarrow{AD} \sim \overrightarrow{A'D'}$ jedině tehdy, když C a D' leží na stejné straně od $\overleftrightarrow{AB}$. Jestliže toto platí, pak podle definice kritické funkce $\overrightarrow{BC} \mid \overrightarrow{A'D'}$ právě tehdy, když

$$m(\angle\, A'BC) = \Pi(BA') = r(B, \overleftrightarrow{AD}).$$

Protože existuje jediná polopřímka $\overrightarrow{BC}$ taková, že bod C leží na stejné straně od $\overleftrightarrow{A'B}$ jako D' a platí $m(\angle A'BC) = \Pi(BA')$, je platnost věty zřejmá.

Věta 7.2.5 *Jestliže v neutrální geometrii platí $\overrightarrow{BC} \mid \overrightarrow{AD}$, potom také $\overrightarrow{AD} \mid \overrightarrow{BC}$.*

Důkaz: Můžeme předpokládat, že $\overrightarrow{BC}$ je ryze asymptotická k $\overrightarrow{AD}$. Jestliže $\Pi(t) = 90$ pro nějaké t, potom je splněna Eukleidova vlastnost rovnoběžek podle věty "všechno nebo nic" a platnost této věty je zřejmá.
Dále předpokládejme, že $\Pi(t) < 90$ pro všechna $t > 0$. Nechť A' je pata kolmice z bodu B k $\overleftrightarrow{AD}$. Zvolíme $D' \in \overrightarrow{AD}$ tak, aby platilo $\overrightarrow{A'D'} \sim \overrightarrow{AD}$. Nechť F je pata kolmice z A' k $\overleftrightarrow{BC}$ (Obr. 7.2 Nyní $m(\angle A'BC) = \Pi(A'B) < 90$, takže $F \in int(\overrightarrow{BC})$.



Obrázek 7.2:

Nechť $E \in int(\angle D'A'B)$. Musíme ukázat, že $\overrightarrow{A'E} \cap \overrightarrow{BC} \neq \emptyset$. Vyjdeme z toho, že $\overrightarrow{AD}$ je ryze asymptotická k $\overrightarrow{BC}$. Jsou tři možnosti, kde může ležet bod E. Jestliže $E \in int(\angle BA'F)$, potom $\overrightarrow{A'E}$ protíná $\overline{BF}$ (podle "křížové věty" aplikované na $\triangle A'BF$). Protože $\overline{BF} \subset \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC}$, musí být $\overrightarrow{A'E} \cap \overrightarrow{BC} \neq \emptyset$.
Druhý případ je $E \in int(\overrightarrow{A'F})$. V tomto případě $\overrightarrow{A'E} \cap \overrightarrow{BC} = F$.
Třetí možnost nastane, pokud $E \in int(\angle D'A'F)$. Nechť G je pata kolmice z bodu B na $\overrightarrow{A'E}$. Protože $\angle BA'G$ je ostrý, $G \in \overrightarrow{A'E}$. Jestliže $G \notin int(\angle A'BC)$, potom buď $G \in \overrightarrow{BC}$ nebo G je na opačné straně od $\overleftrightarrow{BC}$ než bod A'. Tedy polopřímka $\overrightarrow{A'E}$ protíná $\overrightarrow{BC}$ a $\overrightarrow{A'D'} \mid \overrightarrow{BC}$. Proto $\overrightarrow{AD} \mid \overrightarrow{BC}$.
Obráceně, jestliže $G \in int(\angle A'BC)$, potom platí $BG < BA'$, a tedy existuje jediný bod H, pro který $B - H - A'$ a $\overline{BH} \cong \overline{BG}$. Zvolíme bod K na stejné straně od $\overleftrightarrow{BA'}$ jako D' takový, že $\overleftrightarrow{HK} \perp \overleftrightarrow{BA'}$. Zvolíme bod L na stejné straně od $\overleftrightarrow{BA'}$ jako C tak, aby platilo $\angle HBL \cong \angle GBC < \angle A'BC$. Protože $\overrightarrow{BC} \mid \overrightarrow{A'D'}$, musí $\overrightarrow{BL}$ protnout $\overrightarrow{A'D'}$ v nějakém bodě M.
Protože platí $\overleftrightarrow{HK} \parallel \overleftrightarrow{A'D'}$, aplikací Paschovy věty na $\triangle BA'M$ dostaneme $\overleftrightarrow{HK} \cap \overline{BM} = \{N\}$ pro nějaké N. Nechť $P \in \overrightarrow{BC}$ je takový bod, že platí $\overline{BP} \cong \overline{BN}$. Potom $\triangle NBH \cong \triangle PBG$ podle věty *sus*. To znamená, že $\angle BGP \cong \angle BHN$, a protože $\angle BHN$ je pravý úhel, musí být pravý také $\angle BGP$. A proto $P \in \overleftrightarrow{A'E}$. Protože P a E jsou na stejné straně od $\overleftrightarrow{A'B}$ (a sice na té straně, kde leží také bod D'), platí $P \in \overrightarrow{A'E}$. Tudíž $\overrightarrow{A'E} \cap \overrightarrow{BC} \neq \emptyset$ a $\overrightarrow{A'D'} \mid \overrightarrow{BC}$. Protože $\overrightarrow{AD} \sim \overrightarrow{A'D'}$, dostáváme $\overrightarrow{AD} \mid \overrightarrow{BC}$.

Věta 7.2.6 *Nechť $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ a $\overleftrightarrow{EF}$ jsou různé přímky v neutrální geometrii a platí $\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{CD}$ a $\overrightarrow{CD} \mid \overrightarrow{EF}$, potom existuje přímka ℓ, která protíná všechny tři tyto dané přímky.*

Důkaz: Protože tyto tři přímky jsou různé, polopřímky nemohou být ekvivalentní. Tudíž $\overrightarrow{AB}$ je ryze asymptotická k $\overrightarrow{CD}$ a $\overrightarrow{CD}$ je ryze asymptotická k $\overrightarrow{EF}$. Jestliže A a E leží

na opačných stranách od $\overleftrightarrow{CD}$, potom $\overline{AE}$ protíná $\overleftrightarrow{CD}$. Proto v tomto případě může být $\ell = \overleftrightarrow{AE}$.
Nyní předpokládejme, že body A a E leží na stejné straně od $\overleftrightarrow{CD}$. Jestliže $A \in \overleftrightarrow{CE}$, může být $\ell = \overleftrightarrow{CE}$ a důkaz je hotov.
Proto předpokládejme $A \notin \overleftrightarrow{CE}$. Nyní $D \notin \overleftrightarrow{CE}$, nebo jinak $\overleftrightarrow{EF} \cap \overleftrightarrow{CD} \neq \emptyset$, což je spor s $\overrightarrow{CD} \mid \overrightarrow{EF}$. Tudíž A a D musí ležet buď oba na stejné straně od $\overleftrightarrow{CE}$ nebo na jejích opačných stranách.
Jestliže jsou na stejné straně, potom $A \in int(\angle DCE)$. Protože $\overrightarrow{CD} \mid \overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{CA} \cap \overrightarrow{EF} \neq \emptyset$ a dostáváme $\ell = \overleftrightarrow{CA}$.
Dále chceme ukázat, že $\ell = \overleftrightarrow{CE}$ je společná příčka. $\overline{AD}$ protíná $\overleftrightarrow{CE}$ v bodě G. Zvolíme bod H tak, aby platilo $C-D-H$, takže $\overrightarrow{DH} \sim \overrightarrow{CD}$, a tudíž $\overrightarrow{DH} \mid \overrightarrow{AB}$. Podle věty o vnějším úhlu je $\angle HDG > \angle DCG$. Proto můžeme najít bod $J \in int(\angle HDG)$ takový, že $\angle HDJ \cong \angle DCG$. Potom $\overleftrightarrow{DJ} \parallel \overleftrightarrow{CE}$. $\overrightarrow{DJ}$ protíná $\overrightarrow{AB}$ v bodě K, protože $\overrightarrow{DH} \mid \overrightarrow{AB}$.
Aplikujeme Paschovu větu na trojúhelník $\triangle ADK$. Protože $\overleftrightarrow{CE}$ protíná $\overline{AD}$, musí protínat také $\overline{AK}$ (protože $\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{DK}$). Tudíž $\overleftrightarrow{CE}$ protíná $\overleftrightarrow{AB}$ a dostáváme, že $\ell = \overleftrightarrow{CE}$.

Věta 7.2.7 *Jestliže v neutrální geometrii platí $\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{CD}$ a $\overrightarrow{CD} \mid \overrightarrow{EF}$, pak $\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{EF}$.*

Důkaz: Jestliže každé dvě polopřímky jsou ekvivalentní, je platnost věty zřejmá. Proto předpokládejme, že tři přímky $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ a $\overleftrightarrow{EF}$ jsou různé. Podle předchozí věty existuje přímka ℓ, která protíná všechny tři přímky. Dané polopřímky můžeme nahradit s nimi ekvivalentními polopřímkami, jejichž koncové body leží na ℓ. Můžeme předpokládat, že A, C, E leží na přímce ℓ. Takže platí

$$A - C - E \quad \text{nebo} \quad C - A - E \quad \text{nebo} \quad A - E - C.$$

Předpokládejme nejprve, že platí $A - C - E$ a $G \in int(\angle EAB)$. Protože $\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{CD}$, protíná $\overrightarrow{AG}$ polopřímku $\overrightarrow{CD}$ v nějakém bodě H. Zvolíme bod I, pro který platí $C - H - I$ a bod J, aby platilo $A - H - J$. $\overrightarrow{HI} \mid \overrightarrow{EF}$ podle věty 7.2.1. Protože $J \in int(\angle EHI)$ protíná $\overrightarrow{HJ}$ polopřímku $\overrightarrow{EF}$. Ale $\overrightarrow{HJ} \subset \overrightarrow{AG}$, takže $\overrightarrow{AG}$ protíná $\overrightarrow{EF}$. Jestliže $A - C - E$, pak $\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{EF}$.
Nyní předpokládejme, že platí $C - A - E$. Bodem E prochází jediná polopřímka $\overrightarrow{EG}$ taková, že $\overrightarrow{EG} \mid \overrightarrow{AB}$. Dostáváme tedy $\overrightarrow{CD} \mid \overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{EG}$ a $C - A - E$. Podle prvního případu platí $\overrightarrow{CD} \mid \overrightarrow{EG}$ a dále $\overrightarrow{EG} \mid \overrightarrow{CD}$. Potom existuje jediná polopřímka jdoucí bodem E, která je asymptotická k $\overrightarrow{CD}$. Označíme ji $\overrightarrow{EF}$. Proto $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EG}$ a $\overrightarrow{EF} \mid \overrightarrow{AB}$, a tudíž $\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{EF}$ podle věty 7.2.5.
Konečně předpokládejme platnost $A - E - C$. To je stejný případ jako $C - A - E$ uvedený v předchozím odstavci, ale se záměnou $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{EF}$. Proto platí $\overrightarrow{EF} \mid \overrightarrow{AB}$, takže $\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{EF}$.

Definice 7.2.4 Otevřený trojúhelník $\triangle DABC$ se nazývá asymptotický, jestliže $\overrightarrow{AD} \mid \overrightarrow{BC}$.

Věta 7.2.8 *(o kongruenci asymptotických trojúhelníků): Jestliže $\triangle DABC$ a $\triangle SPQR$ jsou dva asymptotické trojúhelníky v neutrální geometrii a platí:*

$$\overline{AB} \cong \overline{PQ} \quad \text{a} \quad \angle ABC \cong \angle PQR,$$

potom

$$\angle BAD \cong \angle QPS.$$

Důkaz: Jestliže úhly nejsou kongruentní, potom jeden z nich je menší než druhý. Můžeme předpokládat, že $\angle BAD > \angle QPS$. Zvolíme bod $E \in int(\angle BAD)$, pro který platí $\angle BAE \cong \angle QPS$. Protože $\overrightarrow{AD} \mid \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AE}$ protíná $\overrightarrow{BC}$ v nějakém bodě F. Nechť $T \in \overrightarrow{QR}$ a $\overline{QT} \cong \overline{BF}$. Potom $\triangle ABF \cong \triangle PQT$ podle věty *sus*, takže $\angle BAF \cong \angle QPT$. Ale protože $T \in int(\angle QPS)$, musí platit $\angle QPT < \angle QPS$, a tedy

$$\angle QPS \cong \angle BAE \cong \angle QPT < \angle QPS,$$

což je spor. Tudíž platí $\angle BAD \cong \angle QPS$.

Definice 7.2.5 Dvě přímky ℓ a ℓ' nazveme asymptotické (píšeme $\ell \mid \ell'$), jestliže existují polopřímky $\overrightarrow{AD} \subset \ell$ a $\overrightarrow{BC} \subset \ell'$ takové, že $\overrightarrow{AD} \mid \overrightarrow{BC}$.

Věta 7.2.9 *V neutrální geometrii, která splňuje hyperbolickou vlastnost rovnoběžek, platí: jestliže dvě různé přímky ℓ a ℓ' mají společnou kolmici, pak jsou rovnoběžné, ale ne asymptotické.*

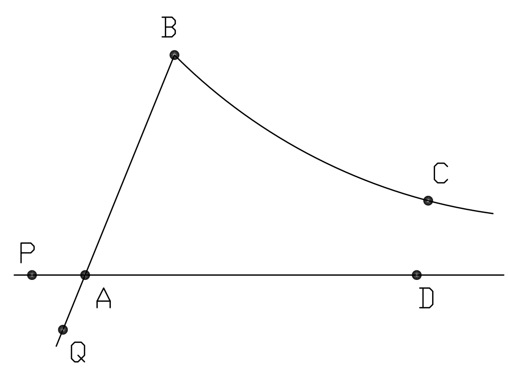
Důkaz: Předpokládejme, že $\overleftrightarrow{AB}$ je společná kolmice k ℓ a ℓ', která prochází body A a B. Podle věty 6.6.2 platí $\ell \parallel \ell'$. Protože předpokládáme splnění hyperbolické vlastnosti rovnoběžek, ℓ nemůže obsahovat polopřímku asymptotickou s ℓ'. Tedy ℓ není asymptotická k ℓ'.

7.3 Součet úhlů a defekt trojúhelníka

Definice 7.3.1 Nechť $\triangle ABC$ je trojúhelník ve shodnostní geometrii, jeho defektem nazveme číslo

$$\delta(\triangle ABC) = 180 - (m(\angle CAB) + m(\angle ABC) + m(\angle BCA)).$$

Definice 7.3.2 Nechť $\triangle DABC$ je otevřený trojúhelník a P a Q jsou body v neutrální geometrii takové, že platí $P - A - D$ a $Q - A - B$. Potom oba úhly $\angle PAB$ a $\angle QAD$ jsou vnější úhly trojúhelníka $\triangle DABC$, jejichž příslušným vnitřním úhlem je úhel $\angle ABC$ (Obr. 7.3).



Obrázek 7.3:

Věta 7.3.1 *V hyperbolické geometrii je vnější úhel v otevřeném trojúhelníku vždy větší než jemu příslušný vnitřní úhel.*

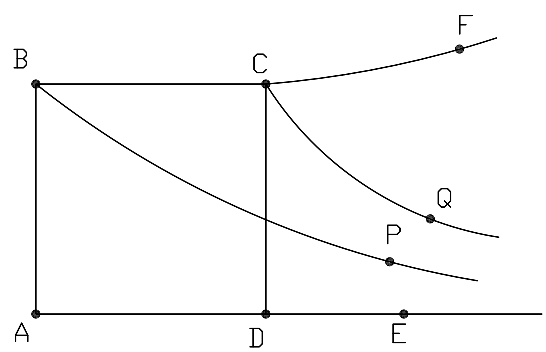
Důkaz: Nechť $\triangle DABC$ je asymptotický trojúhelník. Zvolme bod P tak, aby platilo $P - A - D$. Musíme ukázat, že $\angle PAB > \angle ABC$. Zvolíme bod E na stejné straně od $\overleftrightarrow{AB}$ jako C, pro který dále platí $\angle ABE \cong \angle PAB$. Podle věty 6.6.1 existuje přímka kolmá k oběma přímkám $\overleftrightarrow{AD}$ i $\overleftrightarrow{BE}$. Dále podle věty 7.2.9 platí $\overleftrightarrow{BE} \parallel \overleftrightarrow{AD}$, ale $\overleftrightarrow{BE} \nmid \overleftrightarrow{AD}$.
Proto $\overrightarrow{BE} \cap \overrightarrow{AD} = \emptyset$, takže $E \notin int(\angle ABC)$. Protože $\overrightarrow{BC} \mid \overrightarrow{AD}$, platí $E \notin int(\overrightarrow{BC})$. Protože oba body C a E leží na stejné straně od $\overleftrightarrow{AB}$, $C \in int(\angle ABE)$, takže $\angle ABC < \angle ABE \cong \angle PAB$.

Věta 7.3.2 *V hyperbolické geometrii je kritická funkce vždy klesající.*

Důkaz: Máme ukázat, že pokud $0 < a < b$, potom $\Pi(a) > \Pi(b)$. Nechť $B - A - C$ a $AC = a,\ BC = b$. Zvolme body $P,\ Q,\ R$ všechny na stejné straně od $\overleftrightarrow{BC}$ tak, aby platilo $m(\angle CBP) = \Pi(b)$, $m(\angle CAQ) = \Pi(a)$ a $m(\angle ACR) = 90$. Potom $\overrightarrow{BP} \mid \overrightarrow{CR}$ a $\overrightarrow{AQ} \mid \overrightarrow{CR}$. V poslední části ukážeme, že $\mid$ je relace ekvivalence, tedy že $\overrightarrow{BP} \mid \overrightarrow{AQ}$. $\triangle QABP$ je proto asymptotický. Podle předchozí věty $\angle CAQ > \angle CBP$, takže

$$\Pi(a) = m(\angle CAQ) > m(\angle CBP) = \Pi(b).$$

Věta 7.3.3 *V hyperbolické geometrii jsou úhly při horní základně Saccheriho čtyřúhelníka vždy ostré.*



Obrázek 7.4:

Důkaz: Nechť je dán Saccheriho čtyřúhelník $\square ABCD$ a zvolme E a F tak, aby platilo $A-D-E$ a $B-C-F$. Dále zvolíme bod P na stejné straně od $\overleftrightarrow{AB}$ jako E a bod Q na stejné straně od $\overleftrightarrow{CD}$ jako E tak, aby platilo $\overrightarrow{BP} \mid \overrightarrow{AE}$ a $\overrightarrow{CQ} \mid \overrightarrow{AE}$ (Obr. 7.4). Protože $\overrightarrow{BP} \mid \overrightarrow{CQ}$, je $\triangle PBCQ$ asymptotický trojúhelník. Navíc $Q \in int(\angle DCF)$. Protože $\overline{AB} \cong \overline{DC}$, dostáváme

$$m(\angle ABP) = \Pi(AB) = \Pi(DC) = m(\angle DCQ).$$

Podle věty 8.2.1 je $\angle QCF > \angle PBC$, takže

$$m(\angle ABC) = m(\angle BCD) = 180 - m(\angle DCF) = 180 - (m(\angle DCQ) + m(\angle QCF)) =$$

$$= 180-(\Pi(CD)+m(\angle QCF)) < 180-(\Pi(AB)+m(\angle PBC)) = 180-(m(\angle ABP)+m(\angle PBC)) =$$

$$= 180 - m(\angle ABC).$$

Proto $2m(\angle ABC) < 180$ neboli $m(\angle ABC) < 90$.

Věta 7.3.4 *V hyperbolické geometrii je součet měr všech vnitřních úhlů v trojúhelníku vždy menší než 180.*

Věta 7.3.5 *(o sčítání defektů): nechť je ve shodnostní geometrii dán trojúhelník $\triangle ABC$ a platí $A - D - C$, potom*

$$\delta(\triangle ABC) = \delta(\triangle ABD) + \delta(\triangle DBC).$$

Důkazy těchto vět najde čtenář v literatuře.

Věta 7.3.6 *Nechť jsou v hyperbolické geometrii dány trojúhleníky $\triangle ABC$ a $\triangle DEF$. Jestliže*

$$\angle CAB \cong \angle FDE, \quad \angle ABC \cong \angle DEF \quad \text{a} \quad \angle BCA \cong \angle EFD,$$

potom

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF.$$

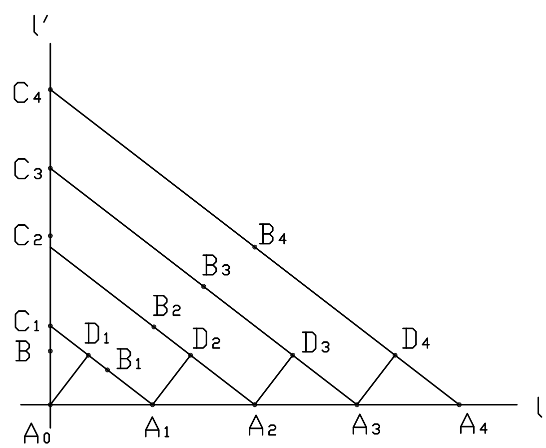
Důkaz: Jestliže dané trojúhelníky nejsou kongruentní, jedna strana jednoho trojúhelníka je kratší než odpovídající strana druhého trojúhelníka. Můžeme předpokládat například $\overline{DE} < \overline{AB}$. Zvolíme bod $G \in \overline{AB}$ tak, aby platilo $\overline{GB} \cong \overline{DE}$. Zvolíme bod H na stejné straně od $\overleftrightarrow{AB}$ jako C, aby $\angle BGH \cong \angle EDF$. Potom $\overleftrightarrow{GH} \parallel \overleftrightarrow{AC}$. Podle Paschovy věty $\overrightarrow{GH}$ musí protnout $\overline{BC}$ v bodě K, protože $\overleftrightarrow{GH} \cap \overleftrightarrow{AC} = \emptyset$. Tedy $\triangle GBK \cong \triangle DEF$ podle věty *usu*.
Proto $\delta(\triangle GBK) = \delta(\triangle DEF)$.

Věta 7.3.7 *V hyperbolické geometrii platí $lim_{x\to\infty}\Pi(x) = 0$.*

Důkaz: Protože $\Pi(x)$ je klesající, nezáporná funkce, může nastat jen jediný případ, kdy by tvrzení věty neplatilo, a to pokud by existovalo kladné číslo r takové, že $\Pi(x) > r$ pro všechna x. Chceme ukázat, že tento předpoklad by vedl k existenci trojúhelníka s defektem větším než 180, což nemůže nastat. Tento trojúhelník najdeme jako největší trojúhelník, jehož vnitřek obsahuje největší počet kongruentních trojúhelníků (které mají stejný defekt). Nechť ℓ je přímka. Pro každé celé $n \geq 0$ zvolíme bod A_n na ℓ tak, aby platilo

$$A_n - A_{n+1} - A_{n+2} \quad \text{a} \quad d(A_n, A_{n+1}) = 1.$$

Nechť $\ell' = \overleftrightarrow{A_0B}$ je jediná kolmice k ℓ jdoucí bodem A_0. Pro všechna $n > 0$ nechť B_n je bod na stejné straně od ℓ jako B a platí $m(\angle A_0A_nB_n) = r$ (Obr. 7.5).



Obrázek 7.5:

Jestliže $\Pi(n) > r$ pro všechna n, pak $\overrightarrow{A_nB_n}$ protíná $\overrightarrow{A_0B}$ v bodě C_n a $r(A_n, \ell') = \Pi(n)$. Pro každé $n > 0$ nechť D_n je pata kolmice z bodu A_{n-1} k $\overleftrightarrow{A_nC_n}$. Platí $A_0 - C_1 - C_2 - C_3 \ldots$.

$$\triangle A_0A_1D_1 \cong \triangle A_1A_2D_2 \cong \triangle A_2A_3D_3$$

a tak dále. Tudíž pro každé $n \geq 0$, každý z pravoúhlých trojúhelníků $\triangle A_nA_{n+1}D_{n+1}$ má stejný defekt. Tento defekt je $\delta(\triangle A_0A_1D_1) = a > 0$.
Nyní porovnejme defekty trojúhelníků $\triangle A_0A_nC_n$ a $\triangle A_0A_{n+1}C_{n+1}$.
Podle věty o sčítání defektů platí

$$\delta(\triangle A_0A_{n+1}C_{n+1}) = \delta(\triangle A_0A_nC_{n+1}) + \delta(\triangle A_nC_{n+1}A_{n+1}) =$$

$$= \delta(\triangle A_0A_nC_n) + \delta(\triangle A_nC_nC_{n+1}) + \delta(\triangle A_nC_{n+1}D_{n+1}) + \delta(\triangle A_nA_{n+1}D_{n+1}) >$$

$$> \delta(\triangle A_0A_nC_n) + \delta(\triangle A_nA_{n+1}D_{n+1}) =$$

$$= \delta(\triangle A_0A_nC_n) + a.$$

Nechť $d_n = \delta(\triangle A_0A_{n+1}C_{n+1})$ pro $n \geq 0$. Potom předchozí nerovnost je $d_n > d_{n-1} + a$ pro všechna $n \geq 1$.
Opakovaným použitím dostaneme
$d_1 > d_0 + a$
$d_2 > d_1 + a > d_0 + 2a$
$d_3 > d_2 + a > d_0 + 3a$ atd.
Celkem tedy $d_n > d_0 + n.a$.
Jestliže n je dostatečně velké, pak $n.a > 180$, takže $\delta(\triangle A_0A_{n+1}C_{n+1}) = d_n > 180$, což není možné. Proto předpoklad, že $\Pi(x) > r$ pro všechna x, je nesprávný, a tedy platí $lim_{x\to\infty}\Pi(x) = 0$.

Věta 7.3.8 *Jestliže je v hyperbolické geometrii* $0 < r < 90$*, potom existuje jediné číslo* t*, pro které* $\Pi(t) = r$*.*

Věta 7.3.9 *Jestliže je v hyperbolické geometrii* $0 < r < 180$*, potom existuje trojúhelník, jehož defekt je roven* r*.*

Důkaz najde čtenář v literatuře.

7.4 Vzdálenost rovnoběžných přímek

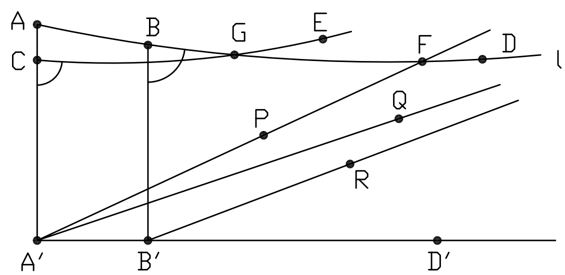
Definice 7.4.1 Dvě přímky v hyperbolické geometrii nazveme divergentně rovnoběžné, jestliže jsou rovnoběžné, ale ne asymptotické.

Věta 7.4.1 *V hyperbolické geometrii jsou dvě přímky divergentně rovnoběžné právě tehdy, když mají společnou kolmici.*

Důkaz: Podle věty 7.2.9 je vidět, že pokud mají dvě přímky společnou kolmici, potom nejsou asymptotické a tudíž jsou divergentně rovnoběžné. Proto předpokládejme, že ℓ a ℓ' jsou divergentně rovnoběžné a ukážeme, že potom mají společnou kolmici. Základem důkazu je nalezení Saccheriho čtyřúhelníku, jehož základny jsou částmi ℓ a ℓ'.
Nechť A a B jsou body na ℓ a A', B' jsou paty kolmic spuštěných z bodů A a B na ℓ'. Jestliže $\overline{AA'} \cong \overline{BB'}$, potom $\square A'ABB'$ je hledaný Saccheriho čtyřúhelník a můžeme přistoupit ke kroku 3. Jinak můžeme předpokládat, že $\overline{AA'} > \overline{BB'}$.

Krok 1: Zvolíme bod C, pro který platí $A - C - A'$ a $\overline{CA'} \cong \overline{BB'}$, zvolíme bod D tak, aby platilo $A - B - D$ a zvolíme D', aby $A' - B' - D'$. Konečně nechť $\overrightarrow{CE}$ je jediná polopřímka

taková, že $\angle A'CE \cong \angle B'BD$, a bod E leží na stejné straně od $\overleftrightarrow{AA'}$ jako B (Obr. 7.6).
V prvním kroku chceme ukázat, že $\overrightarrow{CE} \cap \overrightarrow{AD} \neq \emptyset$. Chceme nalézt polopřímku $\overrightarrow{A'P}$, která je asymptotická k $\overrightarrow{CE}$ a protíná $\overrightarrow{AD}$. Nechť $\overrightarrow{A'P}$ je jediná polopřímka jdoucí bodem A', která je asymptotická k $\overrightarrow{CE}$. Nechť $\overrightarrow{A'Q}$ prochází bodem A' a je asymptotická k $\overrightarrow{AD}$ a nechť $\overrightarrow{B'R}$ je polopřímka jdoucí bodem B' asymptotická k $\overrightarrow{AD}$. Nyní $\triangle PA'CE$ a $\triangle RB'BD$ jsou asymptotické trojúhelníky, ve kterých $\overline{CA'} \cong \overline{BB'}$ a $\angle A'CE \cong \angle B'BD$. Proto $\angle CA'P \cong \angle BB'R$ a podle věty 7.2.8 $P \notin \overrightarrow{A'D'}$ a $R \notin \overrightarrow{A'D'}$.
Tudíž existují $\angle PA'D'$ a $\angle RB'D'$ a jsou kongruentní. Protože $\overrightarrow{A'Q} \mid \overrightarrow{AD}$ a $\overrightarrow{B'R} \mid \overrightarrow{AD}$, dostáváme $\overrightarrow{A'Q} \mid \overrightarrow{B'R}$. Podle věty 7.3.1 platí $\angle QA'D' < \angle RB'D'$. Protože $\angle PA'D' \cong \angle RB'D'$, je také $\angle QA'D' < \angle PA'D'$. Vidíme, že $\angle AA'Q > \angle AA'P$ a $P \in int(\angle AA'Q)$. Protože platí $\overrightarrow{A'Q} \mid \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A'P}$ protíná $\overrightarrow{AD}$ v bodě F.



Obrázek 7.6:

Body A' a F leží na stejné straně od $\overleftrightarrow{CE}$, zatímco body A' a A leží na opačných stranách od $\overleftrightarrow{CE}$. Tudíž A a F leží na opačných stranách od $\overleftrightarrow{CE}$ a $\overline{AF}$ protíná $\overleftrightarrow{CE}$ v nějakém bodě G. Protože G leží na stejné straně od $\overleftrightarrow{AA'}$ jako bod F, leží G na $\overrightarrow{CE}$. Tudíž $\overrightarrow{CE}$ protíná $\overrightarrow{AB}$ v bodě G.

Krok 2: Nyní musíme zkonstruovat Saccheriho čtyřúhelník s využitím bodu G. Nechť H je jediný bod na $\overrightarrow{BD}$, pro který platí $\overline{CG} \cong \overline{BH}$. Nechť G' a H' jsou paty kolmic z bodů G a H k přímce ℓ'. $\triangle A'CG \cong \triangle B'BH$ podle věty *sus*, takže $\overline{A'G} \cong \overline{B'H}$ a $\angle CA'G \cong \angle BB'H$. Tudíž $\angle GA'G' \cong \angle HB'H'$ a $\triangle GA'G' \cong \triangle HB'H'$. Proto $\overline{GG'} \cong \overline{HH'}$ a $\square G'GHH'$ je Saccheriho čtyřúhelník.

Krok 3: Nyní máme Saccheriho čtyřúhelník, jehož dolní základna je částí ℓ' a horní základna je částí ℓ. Existuje přímka, která prochází středem obou základen Saccheriho čtyřúhelníka, a je kolmá k oběma. Proto existuje přímka kolmá k ℓ i ℓ'.

Definice 7.4.2 Nechť $\mathcal{M}$ je množina reálných čísel, potom $s \in \mathbb{R}$ je největší dolní mez množiny $\mathcal{M}$ (píšeme $s = glb\ \mathcal{M}$), jestliže

(i) $s \leq b$ pro $\forall b \in \mathcal{M}$

(ii) jestliže $r > s$, potom existuje prvek $b_r \in \mathcal{M}$ takový, že $b_r < r$.

Definice 7.4.3 V metrické geometrii je vzdálenost bodu P od přímky ℓ

$$d(P, \ell) = glb\ \{d(P, Q) \mid Q \in \ell\}.$$

Vzdálenost dvou přímek ℓ a ℓ' je

$$d(\ell, \ell') = glb\ \{d(P, Q) \mid P \in \ell,\ Q \in \ell'\}.$$

Věta 7.4.2 *Nechť ℓ a ℓ' jsou divergentně rovnoběžné přímky v hyperbolické geometrii. Jestliže $A \in \ell$ a $A' \in \ell'$ jsou body, pro které $\overline{AA'}$ je kolmá na obě přímky ℓ i ℓ', potom*

$$d(\ell, \ell') = d(A, A').$$

Navíc pokud $B \in \ell$ a $C \in \ell$ a platí $A - B - C$, potom

$$d(B, \ell') < d(C, \ell').$$

Důkaz: Protože $d(A, \ell') = d(A, A')$. Nechť B je další bod z ℓ a nechť B' je pata kolmice z bodu B k ℓ'. Tudíž $\square B'A'AB$ má pravý úhel při vrcholech B', A' a A a platí $AA' \leq BB'$. Tudíž

$$d(A, \ell') = AA' \leq BB' = d(B, \ell').$$

Proto podle rovnosti

$$d(\ell', \ell) = glb\ \{d(P, \ell) \mid P \in \ell'\} = glb\ \{d(Q, \ell') \mid Q \in \ell\}$$

dále platí

$$d(\ell, \ell') = glb\ \{d(P, \ell') \mid P \in \ell\} = d(A, \ell') = d(A, A').$$

Nyní předpokládejme, že $A - B - C$ a nechť C' je patou kolmice z bodu C na ℓ'. Protože $\angle ABB'$ je ostrý, je $\angle CBB'$ tupý. Musíme ukázat, že $BB' < CC'$. Úhel $\angle BCC' = \angle ACC'$, což je ostrý úhel. Proto $\angle CBB' > \angle BCC'$, takže $\overline{BB'} < \overline{CC'}$.

Věta 7.4.3 *Nechť je dán v neutrální geometrii $\triangle ABC$ s pravým úhlem při vrcholu B. Jestliže C' je bod, pro který platí $A - C - C'$ a $\overline{AC} \cong \overline{CC'}$. Je-li B' pata kolmice z bodu C' na přímku $\overleftrightarrow{AB}$, potom*

$$B'C' \geq \quad \text{a} \quad 2BCAB' \leq 2AB.$$

Důkaz: Nechť D je pata kolmice z bodu C' na $\overleftrightarrow{BC}$. Potom $\angle ACB \cong \angle C'CD$, a tak $\triangle ACB \cong \triangle C'CD$. Proto $\overline{CB} \cong \overline{CD}$ a $\overline{AB} \cong \overline{C'D}$. $\square B'BDC$ je čtyřúhelník se třemi pravými úhly a platí $B'C' \geq BD$ a $DC' \geq BB'$. Tudíž

$$B'C' \geq BD = BC + CD = 2BC \quad \text{a} \quad AB' = AB + BB' \leq AB + DC' = 2AB.$$

Věta 7.4.4 *(Aristotelova): Jestliže $\angle ABC$ je úhel v neutrální geometrii a $r > 0$, pak existuje bod $E \in \overrightarrow{BC}$, pro který $d(E, \overleftrightarrow{AB}) > r$.*

Důkaz: Jestliže $\angle ABC$ je pravý úhel, pak $d(E, \overleftrightarrow{AB}) = d(E, B)$. Jestliže $\angle ABC$ je tupý, pak $A' - B - A$. Je-li $\angle A'BC$ ostrý, platí $\overleftrightarrow{A'B} = \overleftrightarrow{AB}$. Proto stačí uvažovat případ, kdy $\angle ABC$ je ostrý. Zvolíme body $C_1 = C,\ C_2,\ C_3$... takové, že $B - C_1 - C_2 - C_3 - \dots$ a

$$\overline{BC_1} \cong \overline{C_1C_2},\ \overline{BC_2} \cong \overline{C_2C_3}, \dots$$

Nechť D_i je pata kolmice z bodu C_i k $\overleftrightarrow{AB}$. Podle první části věty 7.4.3 platí

$$C_{n+1}D_{n+1} \geq 2C_nD_n.$$

Indukcí dostaneme

$$C_{n+1}D_{n+1} \geq 2^n C_1 D_1$$

jestliže $n \geq 1$.
Jestliže n je dostatečně velké ($n > log_2(r/C_1D_1)$), potom $2^n C_1 D_1 > r$, takže

$$C_{n+1}D_{n+1} > r.$$

Označíme $E = C_{n+1}$ a dostaneme

$$d(E, \overleftrightarrow{AB}) = d(C_{n+1}D_{n+1}) = C_{n+1}D_{n+1} > r.$$

Věta 7.4.5 *Jestliže přímky ℓ a ℓ' jsou v hyperbolické geometrii divergentně rovnoběžné a $r > 0$, pak existuje bod $P \in \ell$ takový, že $d(P, \ell') > r$.*

Důkaz: Nechť $\overleftrightarrow{AA'}$ je společná kolmice k ℓ a ℓ' a platí $A \in \ell$, $A' \in \ell'$. Nechť B je další bod na ℓ a nechť B' je pata kolmice z bodu B k ℓ'. Nechť $\overrightarrow{AE}$ je jediná polopřímka jdoucí bodem A taková, že platí $\overrightarrow{AE} \mid \overrightarrow{A'B'}$. Protože $E \in int(\angle A'AB)$, je $\angle BAE$ ostrý. Podle předchozí věty existuje jediný bod $P \in \overrightarrow{AB}$, pro který $d(P, \overleftrightarrow{AE}) > r$. Nechť G je pata kolmice z bodu P k $\overleftrightarrow{AE}$, a nechť P' je pata kolmice z bodu P k ℓ'.
Nyní aplikujeme "křížovou větu" na $\angle A'AP$ a vidíme, že $\overrightarrow{AE} \cap \overline{A'P} \neq \emptyset$. Aplikací Paschovy věty na $\triangle A'PP'$, dostaneme $\overleftrightarrow{AE} \cap \overline{PP'} \neq \emptyset$. (Protože $\overleftrightarrow{AE} \mid \overleftrightarrow{A'B'}$, musí platit $\overleftrightarrow{AE} \cap \overline{A'P'} = \emptyset$.) Dále protože $\overline{PP'}$ je na stejné straně od $\overleftrightarrow{AA'}$ jako E, je $\overrightarrow{AE} \cap \overline{PP'} \neq \emptyset$. Proto $\overrightarrow{AE} \cap \overline{PP'} = \{F\}$ pro nějaké F, pro které $P - F - P'$. Tudíž

$$d(P, \ell') = d(P, P') > d(P, F) > d(P, G) = d(P, \overleftrightarrow{AE}) > r.$$

Věta 7.4.6 *Nechť $\overrightarrow{AB}$ je v hyperbolické geometrii ryze asymptotická k $\overrightarrow{CD}$, potom*

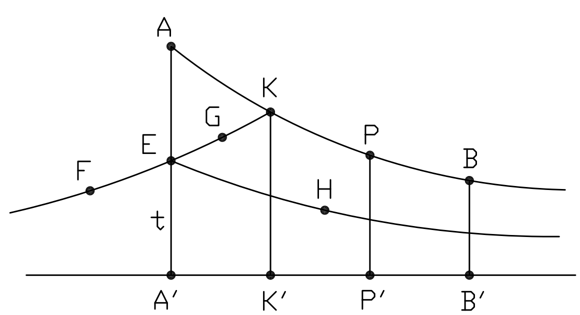
$$d(A, \overleftrightarrow{CD}) > d(B, \overleftrightarrow{CD}).$$

Důkaz: Nechť A' a B' jsou paty kolmic z bodů A a B k $\overleftrightarrow{CD}$. Zvolíme bod $E \in \overrightarrow{B'B}$, pro který $\overline{AA'} \cong \overline{EB'}$. Takže $\square A'AEB'$ je Saccheriho čtyřúhelník a $\overleftrightarrow{AE}$ je divergentně rovnoběžná s $\overleftrightarrow{A'B'} = \overleftrightarrow{CD}$. Protože $\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{A'B'}$, platí $\angle A'AB < \angle A'AE$. Proto $B' - B - E$ a $AA' = EB' > BB'$. Tudíž

$$d(A, \overleftrightarrow{CD}) = AA' > BB' = d(B, \overleftrightarrow{CD}).$$

Věta 7.4.7 *Jestliže v hyperbolické geometrii platí $\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{CD}$ a $t > 0$, potom existuje bod $P \in \overrightarrow{AB}$ takový, že $d(P, \overleftrightarrow{CD}) \leq t$.*

Důkaz: Nechť A' a B' jsou paty kolmic z bodů A a B k $\overleftrightarrow{CD}$. Můžeme předpokládat, že $t < AA'$. (Pokud by to neplatilo, bylo by $0 < t^* < AA'$ a nalezneme $P \in \overrightarrow{AB}$, pro který $d(P, \overleftrightarrow{CD}) \leq t^* < t$.) Zvolíme bod E na $\overline{AA'}$ tak, že platí $A'E = t$, a zvolíme bod F na opačné straně od $\overleftrightarrow{AA'}$ než B' (Obr. 7.7). Dále musí platit $m(\angle A'EF) = \Pi(t)$. Jestliže $F - E - G$, $\overrightarrow{EG}$ protíná $\overrightarrow{AB}$.



Obrázek 7.7:

Nechť H je na stejné straně od $\overleftrightarrow{AA'}$ jako B' a platí $\angle A'EH \cong \angle A'EF$. Potom $\overrightarrow{EH} \mid \overrightarrow{A'B'}$ a $\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{A'B'}$, takže $\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{EH}$. Protože $G \in int(\angle AEH)$, platí $\overrightarrow{EG} \cap \overrightarrow{AB} = \{K\}$ pro nějaké K.

Nechť K' je pata kolmice z bodu K na $\overleftrightarrow{A'B'}$. Platí tedy $\overrightarrow{KE} \mid \overrightarrow{K'A'}$. Nechť P je bod na $\overrightarrow{AB}$ takový, že platí $A - K - P$ a $\overline{KE} \cong \overline{KP}$. Protože $\overrightarrow{KP} \mid \overrightarrow{A'B'}$, je $\angle K'KE \cong \angle K'KP$. Proto $\triangle K'KE \cong \triangle K'KP$ podle věty *sus*. Nechť P' je pata kolmice z bodu P na $\overleftrightarrow{A'B'}$, pak $\overline{EK'} \cong \overline{PK'}$ a $\angle EK'A' \cong \angle PK'P'$. Proto $\triangle EK'A' \cong \triangle PK'P'$ a $\overline{EA'} \cong \overline{PP'}$. Tedy platí

$$d(P, \overleftrightarrow{CD}) = d(P, P') = d(E, A') = t.$$

Důsledek 7.4.1 *Vzdálenost asymptotických polopřímek je v hyperbolické geometrii rovna nule.*

Kapitola 8

Eukleidovská geometrie

8.1 Věty ekvivalentní s Eukleidovou vlastností rovnoběžek

Věta 8.1.1 *Neutrální geometrie splňuje Eukleidovu vlastnost rovnoběžek (dále jen EVR) právě tehdy, když v ní existuje trojúhelník, jehož defekt je roven 0.*
Navíc, pokud jeden trojúhelník má defekt roven 0, potom mají nulový defekt všechny trojúhelníky dané geometrie.

Důkaz: Nejprve předpokládejme, že je splněna EVR. Defekt každého trojúhelníka je tedy roven nule podle Eukleidovy věty o součtu úhlů.
Obráceně předpokládejme, že defekt jednoho trojúhelníka je roven nule. Potom nemůže být splněna hyperbolická vlastnost rovnoběžek (dále jen HVR) (protože věta 7.3.4 říká, že defekt každého trojúhelníka v hyperbolické geometrii je větší než nula). Podle věty "všechno nebo nic" musí být splněna EVR.

Věta 8.1.2 *Neutrální geometrie splňuje EVR právě tehdy, když každé dvě rovnoběžné přímky ℓ a ℓ' mají příčku t takovou, že každá dvojice střídavých úhlů je kongruentní.*

Důkaz: Nejprve předpokládejme, že je splněna EVR, tedy každá dvojice střídavých úhlů je kongruentní. Obráceně předpokládejme, že pro každou dvojici rovnoběžných přímek $\ell \parallel \ell'$ a každou jejich příčku t, dvojice střídavých úhlů je kongruentní. Pokud by byla splněna HVR, existovaly by přímky ℓ a ℓ', které by byly ryze asymptotické (a tedy rovnoběžné). Nechť $L \in \ell$ a t je kolmice z bodu Q k ℓ'. Podle věty 7.2.9 není příčka t kolmá k ℓ. Proto střídavé úhly nejsou kongruentní. To je spor s předpokladem, a tedy musí být splněna EVR.

Věta 8.1.3 *Neutrální geometrie splňuje EVR, jestliže existuje pravoúhelník.*

Důkaz: Nejprve předpokládejme, že je splněna EVR. Nechť $\square ABCD$ je Saccheriho čtyřúhelník, potom $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{AD}$. Protože $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{AB}$ je příčka k $\overleftrightarrow{AD}$ a $\overleftrightarrow{BC}$ a každá dvojice střídavých úhlů musí být kongruentní, platí $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$. Je tedy $\angle BAD \cong \angle ABC$. Protože $\angle ABC \cong \angle BCD$, dostáváme, že $\angle BAD, \angle ABC, \angle BCD$ a $\angle CDA$ jsou pravé úhly. Proto $\square ABCD$ je pravoúhelník.
Nyní předpokládejme, že $\square ABCD$ je pravoúhelník. Platí tedy $\overline{AB} \cong \overline{DC}$, takže $\square ABCD$ je Saccheriho čtyřúhelník. Pokud by byla splněna HVR, pak $\angle ABC$ by musel být ostrý, což je spor s předpokladem, že $\square ABCD$ je pravoúhelník. A proto je podle věty "všechno nebo

nic" splněna EVR.

Důsledek 8.1.1 *Neutrální geometrie splňuje EVR právě tehdy, když každý Saccheriho čtyřúhelník je pravoúhelník.*

Definice 8.1.1 Množinu přímek nazveme "sbíhající se", jestliže existuje bod P, který leží na každé přímce dané množiny. Říkáme, že přímky se protínají v bodě P.

Věta 8.1.4 *V eukleidovské geometrii se osy stran trojúhelníka protínají v jednom bodě.*

Důkaz: Nechť ℓ je osa úsečky $\overline{AB}$ a ℓ' je osa úsečky $\overline{BC}$. Jestliže $\ell \parallel \ell'$, potom $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. To ale není možné, protože $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{BC} = \{B\}$. Proto ℓ musí protnout ℓ' v nějakém bodě O. Protože ℓ a ℓ' jsou osy úseček $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, musí platit

$$\overline{AO} \cong \overline{BO} \quad \text{a} \quad \overline{BO} \cong \overline{CO}.$$

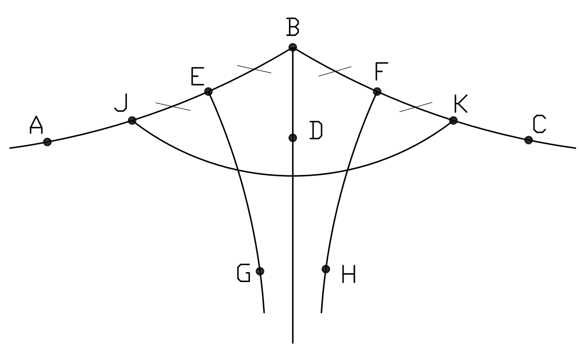
Proto také

$$\overline{AO} \cong \overline{CO},$$

a tedy O leží také na ose úsečky $\overline{AC}$. Proto je O společným bodem os všech tří stran trojúhelníka.

Věta 8.1.5 *V každé hyperbolické geometrii existuje trojúhelník, ve kterém jsou osy dvou jeho stran rovnoběžné.*

Důkaz: Máme ukázat, že ke každému trojúhelníku může být zkonstruován takový trojúhelník, který je rovnoramenný s jedním daným úhlem. Nechť je dán $\angle ABC$ a nechť $\overrightarrow{BD}$ je osa úhlu (takže $\angle ABD$ je ostrý). Protože $0 < m(\angle ABD) < 90$ a obrazem kritické funkce Π je interval $(0, 90)$, potom existuje číslo t, pro které $\Pi(t) = m(\angle ABD)$. Chceme sestrojit takový rovnoramenný trojúhelník $\triangle JBK$, jehož kongruentní strany mají délku $2t$ a platí $\angle JBK = \angle ABC$.



Obrázek 8.1:

Zvolíme $E \in \overrightarrow{BA}$ a $F \in \overrightarrow{BC}$, pro které platí $BE = BF = t$. Nechť G a H leží ve vnitřku úhlu $\angle ABC$ a platí $\overleftrightarrow{EG} \perp \overleftrightarrow{AB}$ a $\overleftrightarrow{FH} \perp \overleftrightarrow{BC}$ ($\overleftrightarrow{EG}$ a $\overleftrightarrow{FH}$ jsou osy dvou stran $\triangle JBK$). Protože $m(\angle EBD) = \Pi(EB) = \Pi(t)$ (Obr. 8.1) a $\overleftrightarrow{EB} \perp \overleftrightarrow{EG}$, z definice kritické funkce Π vyplývá, že $\overrightarrow{BD} \mid \overrightarrow{EG}$. Podobně $\overrightarrow{BD} \mid \overrightarrow{FH}$. Tudíž $\overrightarrow{EG} \mid \overrightarrow{FH}$ a speciálně $\overleftrightarrow{EG} \parallel \overleftrightarrow{FH}$. Konečně nechť J a K jsou takové body, že platí $J - E - B$, $B - F - K$ a $\overline{JE} \cong \overline{EB} \cong \overline{BF} \cong \overline{FK}$. Potom $\overleftrightarrow{EG}$ a $\overleftrightarrow{FH}$ jsou osy dvou stran $\triangle JBK$ a jsou rovnoběžné.

Důsledek 8.1.2 *Neutrální geometrie splňuje EVR právě tehdy, když se osy všech stran v každém trojúhelníku protínají v jednom bodě.*

Tvrzení je přímým důsledkem předchozí věty a věty "všechno nebo nic".

Věta 8.1.6 *Neutrální geometrie splňuje EVR právě tehdy, když pro každý ostrý úhel $\angle ABC$ a každý bod $P \in int(\angle ABC)$ existuje přímka ℓ jdoucí bodem P, která protíná obě polopřímky $\overrightarrow{BA}$ a $\overrightarrow{BC}$ v jejich vnitřních bodech.*

Důkaz: Nejprve předpokládejme, že je splněna EVR. Ukážeme, že kolmice k $\overleftrightarrow{AB}$ bodem P splňuje větu. Protože $\angle ABC$ je ostrý stejně jako $\angle ABP$, leží pata kolmice z bodu P k $\overleftrightarrow{AB}$ ve vnitřku $int(\overrightarrow{BA})$. Tuto kolmici označíme ℓ. Určitě $B \notin \ell$. Podle Eukleidova pátého postulátu ℓ protíná $\overrightarrow{BC}$, proto ℓ je hledanou přímkou. Nyní předpokládejme, že pro všechny body $P \in int(\angle ABC)$ existuje přímka ℓ jdoucí bodem P, která protíná obě $int(\overrightarrow{BA})$ a $int(\overrightarrow{BC})$. Jestliže není splněna EVR, potom musí být splněna HVR. Předpokládejme tedy splnění HVR. Zvolíme bod D tak, že $\overrightarrow{BD}$ půlí úhel $\angle ABC$. Jako v předchozích případech víme, že existuje kladné číslo t, pro něž $\Pi(t) = m(\angle ABD)$. Zvolíme $P \in \overrightarrow{BD}$ tak, že $BP = t$. Potom přímka ℓ' jdoucí bodem P kolmá k $\overleftrightarrow{BP}$ je asymptotická k oběma polopřímkám $\overrightarrow{BA}$ a $\overrightarrow{BC}$ podle definice Π. Poznamenejme, že $\overrightarrow{BA}$ a $\overrightarrow{BC}$ leží na stejné straně od ℓ'. Máme ukázat, že předpoklad existence přímky ℓ jdoucí bodem P, která protíná $int(\overrightarrow{BA})$ i $int(\overrightarrow{BC})$, vede ke sporu.
Protože ℓ' neprotíná $\overrightarrow{BA}$ a ℓ ji protíná, musí platit $\ell' \neq \ell$. Proto existuje bod $R \in \ell$, který je na stejné straně od ℓ' jako A. Zvolíme S na ℓ, pro který $R - P - S$. Potom S leží na opačné straně od ℓ' než $\overrightarrow{BA}$ (a také $\overrightarrow{BC}$). Proto $\overrightarrow{PS}$ neprotíná buď $\overrightarrow{BA}$ nebo $\overrightarrow{BC}$.
Obráceně, $int(\overrightarrow{PR})$ leží na jedné straně od $\overleftrightarrow{BD}$, takže nemůže protínat obě polopřímky $\overrightarrow{BA}$ a $\overrightarrow{BC}$. Tudíž $\ell = \overleftrightarrow{PR} = \overleftrightarrow{PS}$ neprotíná obě polopřímky $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{BC}$, a to je spor. Proto neplatí HVR a musí tedy být splněna EVR.

Věta 8.1.7 *Neutrální geometrie splňuje EVR právě tehdy, když existuje dvojice různých trojúhelníků $\triangle ABC$ a $\triangle DEF$, pro které platí*

$$\angle CAB \cong \angle FDE,\ \angle ABC \cong \angle DEF \quad \text{a} \quad \angle BCA \cong \angle EFD.$$

Důkaz: Nejprve předpokládejme, že je splněna EVR a $\triangle ABC$ je libovolný trojúhelník. Nechť E je středem úsečky $\overline{AB}$ a nechť ℓ je jediná přímka jdoucí bodem E rovnoběžná s $\overleftrightarrow{BC}$. Podle Paschovy věty ℓ protíná $\overline{AC}$ v nějakém bodě F a platí $\angle AEF \cong \angle ABC$. Podobně $\angle AFE \cong \angle ACB$. Potom $\triangle ABC$ a $\triangle AEF$ jsou různé nekongruentní trojúhelníky. Nyní předpokládejme, že existuje dvojice nekongruentních trojúhelníků $\triangle ABC$ a $\triangle DEF$, jejichž odpovídající si úhly jsou kongruentní. Jestliže je splněna HVR, potom podle věty 7.3.6 jsou trojúhelníky kongruentní, což je spor. Tedy musí být splněna EVR.

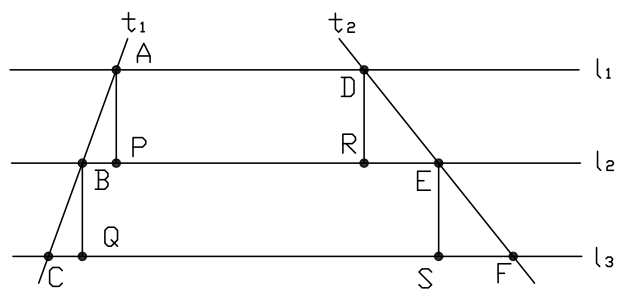
8.2 Teorie podobnosti

Věta 8.2.1 *V eukleidovské geometrii, nechť ℓ_1, ℓ_2 a ℓ_3 jsou navzájem různé rovnoběžné přímky. Nechť t_1 protíná přímky ℓ_1, ℓ_2 a ℓ_3 v bodech A, B, C (v tomto pořadí) a přímka t_2 protíná přímky ℓ_1, ℓ_2 a ℓ_3 v bodech D, E, F (v tomto pořadí). Jestliže $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, pak $\overline{DE} \cong \overline{EF}$.*

Důkaz: Musíme rozlišit, zda jsou přímky $t_1,\ t_2$ kolmé k daným přímkám nebo ne. Nejprve předpokládejme, že t_1 i t_2 jsou kolmé k $\ell_1,\ \ell_2$ a ℓ_3. Protože $AB = BC$ a $\ell_1 \neq \ell_3$, musí být $A \neq C$ a $A - B - C$. Protože rovnoběžné přímky v eukliedovské geometrii jsou ekvidistantní, musí platit $AB = DE,\ BC = EF$. Podle předpokladů věty platí $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, tedy $\overline{DE} \cong \overline{EF}$.

Nyní předpokládejme, že jedna z přímek (například t_1) je kolmá k $\ell_1,\ \ell_2$ a ℓ_3 a druhá k nim kolmá není. Označíme R patu kolmice z bodu D na ℓ_2 a S patu kolmice z bodu E na ℓ_3. Ze stejného důvodu jako v předchozí části musí platit $AB = DR$ a $BC = ES$. Protože $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, platí také $\overline{DR} \cong \overline{ES}$. Dále protože $\angle EDR \cong \angle FES$ a $\angle DRE \cong \angle ESF$, je $\triangle DER \cong \triangle EFS$ podle věty *usu*, a tedy platí $\overline{DE} \cong \overline{EF}$.

Nakonec předpokládejme, že t_1 ani t_2 nejsou kolmé k daným přímkám. Ponechme označení z předchozí části důkazu a dále označíme P patu kolmice z bodu A k ℓ_2 a Q patu kolmice z bodu B k ℓ_3 (Obr. 8.2). Protože $\angle ABP \cong \angle BCQ$, shodují se $\triangle ABP$ a $\triangle BCQ$ v přeponě a jednom úhlu a jsou tedy kongruentní, takže $\overline{AP} \cong \overline{BQ}$. Protože rovnoběžky jsou v eukleidovské geometrii ekvidistantní, musí platit $\overline{AP} \cong \overline{DR}$ a $\overline{BQ} \cong \overline{ES}$. Protože $\angle DER \cong \angle EFS$, $\triangle DRE \cong \triangle ESF$ podle věty *suu*. Tudíž $\overline{DE} \cong \overline{EF}$.



Obrázek 8.2:

Věta 8.2.2 *Nechť $\ell_1,\ \ell_2$ a ℓ_3 jsou navzájem různé rovnoběžné přímky v Paschově geometrii. Nechť t_1 protíná přímky $\ell_1,\ \ell_2$ a ℓ_3 v bodech $A,\ B,\ C$ (v tomto pořadí) a přímka t_2 protíná přímky $\ell_1,\ \ell_2$ a ℓ_3 v bodech $D,\ E,\ F$ (v tomto pořadí). Jestliže platí $A{-}B{-}C$, pak $D{-}E{-}F$.*

Věta 8.2.3 *Nechť $\ell_1,\ \ell_2$ a ℓ_3 jsou navzájem různé rovnoběžné přímky v eukleidovské geometrii. Nechť t_1 a t_2 jsou příčky, které protínají přímky $\ell_1,\ \ell_2$ a ℓ_3 po řadě v bodech $A,\ B,\ C$ a $D,\ E,\ F$ a platí $A - B - C$, potom platí*

$$\frac{BC}{AB} = \frac{EF}{DE}.$$

Důkazy těchto vět najde čtenář v literatuře.

Důsledek 8.2.1 *Nechť $\triangle DEF$ je trojúhelník v eukleidovské geometrii. Jestliže platí*

$$D - G - E, \quad D - H - F \quad \text{a} \quad \overleftrightarrow{GH} \parallel \overleftrightarrow{EF},$$

potom

$$\frac{DG}{DE} = \frac{DH}{DF}.$$

Definice 8.2.1 Dva trojúhelníky ve shodnostní geometrii $\triangle ABC$ a $\triangle DEF$ jsou podobné (píšeme $\triangle ABC \sim \triangle DEF$), jestliže

$$\angle CAB \cong \angle FDE,\ \angle ABC \cong \angle DEF \quad \text{a} \quad \angle BCA \cong \angle EFD.$$

Věta 8.2.4 *V eukleidovské geometrii je konstantní poměr délek odpovídajících si stran podobných trojúhelníků. Pro $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ tedy platí*

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}.$$

Důkaz: Jestliže $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, potom $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ podle věty *usu* a podíl uvedený v závěru věty je roven 1. Tudíž můžeme předpokládat, že $AB \neq DE$. Předpokládejme, že $AB < DE$. Nechť G je bod z $\overline{DE}$ a platí $\overline{AB} \cong \overline{DG}$. Nechť ℓ je jediná přímka jdoucí bodem G a rovnoběžná s $\overleftrightarrow{EF}$. Podle Paschovy věty ℓ protíná $\overline{DF}$ v nějakém bodě H a platí.

$$\angle DGH \cong \angle DEF \cong \angle ABC.$$

Tudíž $\triangle ABC \cong \triangle DGH$ podle věty *usu*. Podle důsledku 8.2.1

$$\frac{DG}{DE} = \frac{DH}{DF}.$$

Protože

$$\overline{DG} \cong \overline{AB} \quad \text{a} \quad \overline{DH} \cong \overline{AC},$$

a dostáváme

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}.$$

Podobně

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}.$$

Věta 8.2.5 *V eukleidovské geometrii jsou dva trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle DEF$ podobné právě tehdy, když platí*

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}.$$

Důkaz: Je částečně obsažen v důkazu předchozí věty. Zbývá dokázat, že platnost rovnosti uvedené ve větě implikuje, že $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Jestliže $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, potom $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ podle věty *sss*. V tomto případě platí $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.
Předpokládejme, že $AB < DE$. Nechť G je bod na $\overline{DE}$, pro který $\overline{AB} \cong \overline{DG}$. Podle Paschovy věty přímka jdoucí bodem G a rovnoběžná s $\overleftrightarrow{EF}$ protíná $\overline{DE}$ v nějakém bodě H. A podle důsledku 8.2.1 platí

$$\frac{DG}{DE} = \frac{DH}{DF}.$$

Takže

$$\frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE} = \frac{DG}{DE} = \frac{DH}{DF}.$$

Tedy $\overline{AC} \cong \overline{DH}$.
Poznamenejme, že

$$\angle DGH \cong \angle DEF \quad \text{nebo} \quad \angle DHG \cong \angle EFD.$$

Protože $\overleftrightarrow{GH} \parallel \overleftrightarrow{EF}$ a geometrie je geometrií eukleidovskou. Tudíž

$$\triangle DGH \sim \triangle DEF,$$

takže

$$\frac{GH}{EF} = \frac{DG}{DE} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}.$$

Proto $\overline{BC} \cong \overline{GH}$ a $\triangle ABC \cong \triangle DGH$ podle věty *sss*. Tudíž

$$\triangle ABC \sim \triangle DGH \sim \triangle DEF.$$

A protože $\sim$ je relace ekvivalence, je platnost věty dokázána.

Věta 8.2.6 *(Pythagorova): V eukleidovské geometrii je trojúhelník $\triangle ABC$ pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu B právě tehdy, když platí*

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2.$$

Důkaz: Nejprve předpokládejme, že $\angle ABC$ je pravý úhel v $\triangle ABC$ a D je pata výšky z bodu B. Potom platí $\triangle ADB \sim \triangle ABC \sim \triangle BDC$. Podle věty 8.2.4

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB} \quad \text{a} \quad \frac{BC}{DC} = \frac{AC}{BC}.$$

Proto

$$(AB)^2 = (AC)(AD) \quad \text{a} \quad (BC)^2 = (AC)(DC).$$

Nyní $AC = AD + DC$, takže

$$(AC)^2 = (AC)(AD + DC) = (AC)(AD) + (AC)(DC) = (AB)^2 + (BC)^2.$$

Tedy rovnost $(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$ je pravdivá, pokud $\angle ABC$ je pravý.
Nyní předpokládejme, že $\triangle ABC$ splňuje $(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$. Musíme ukázat, že pak je $\angle ABC$ pravý. Nechť $\triangle PQR$ je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu Q a $\overline{PQ} \cong \overline{AB}$, $\overline{QR} \cong \overline{BC}$. Protože $\angle PQR$ je pravý, můžeme aplikovat rovnost $(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$ na $\triangle PQR$ a dostaneme

$$(PR)^2 = (PQ)^2 + (QR)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2.$$

Proto $\overline{PR} \cong \overline{AC}$ a $\triangle PQR \cong \triangle ABC$ podle věty *sss*. Ale to znamená, že $\angle ABC \cong \angle PQR$ a $\angle ABC$ je pravý.

Věta 8.2.7 *Neutrální geometrie splňuje EVR právě tehdy, když pro všechny pravoúhlé trojúhelníky $\triangle ABC$ s pravým úhlem při vrcholu B je splněna rovnost*

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2.$$

Důkaz: Potřebujeme pouze ukázat, že daná rovnost implikuje splnění EVR. Nechť $\triangle ABC$ je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu B a platí $\overline{AB} \cong \overline{BC}$. Chceme ukázat, že defekt $\triangle ABC$ je 0. (Neboli, že $m(\angle BAC) = m(\angle BCA) = 45$, což podle věty 8.1.1 implikuje splnění EVR.) Nechť D je střed úsečky $\overline{AC}$. Potom $\triangle BAD \cong \triangle BCD$ podle věty *sus* takže $\angle BDA \cong \angle BDC$. Proto $\angle BDA$ je pravý. Aplikujeme-li rovnost $(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$ na $\triangle ABC$, dostaneme

$$2(AB)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2 = (2.AD)^2 = 4(AD)^2,$$

takže $(AB)^2 = 2(AD)^2$. Můžeme tedy aplikovat rovnost $(AB)^2+(BC)^2 = (AC)^2$ na $\triangle ADB$, čímž dostaneme

$$(AB)^2 = (AD)^2 + (DB)^2,$$

takže

$$2(AD)^2 = (AB)^2 = (AD)^2 + (DB)^2 \quad \text{neboli} \quad AD = BD.$$

Tedy $\triangle ADB$ je rovnoramenný, stejně jako $\triangle CDB$ a

$$\angle DBA \cong \angle DAB \cong \angle DCB \cong \angle DBC.$$

Protože $m(\angle ABC) = 90,\ m(\angle DBA) = 45$. Tedy

$$\delta(\triangle ABC) = 180 - (45 + 90 + 45) = 0$$

a podle věty 8.1.1 je splněna EVR.

Věta 8.2.8 *Nechť $\triangle ABC$ je trojúhelník v eukleidovské geometrii. Nechť D je pata výšky z bodu A a E je pata výšky z bodu B. Potom*

$$(AD)(BC) = (BE)(AC).$$

Důkaz: Jestliže úhel u vrcholu C je pravý, potom $E = C = D$ a tvrzení je triviální. Jestliže $\angle BCA$ není pravý, potom $E \neq C$ a $D \neq C$. Protože $\triangle BEC \sim \triangle ADC$, dostáváme

$$\frac{BC}{AC} = \frac{BE}{AD}$$

takže

$$(AD)(BC) = (BE)(AC).$$

8.3 Klasické věty Eukleidovy geometrie

Věta 8.3.1 *V neutrální geometrii se všechny osy vnitřních úhlů trojúhelníka $\triangle ABC$ protínají v jednom bodě.*

Důkaz: Podle "křížové věty" osa úhlu $\angle CAB$ protíná $\overline{BC}$ v nějakém bodě D. Podobně osa úhlu $\angle ABC$ protíná $\overline{AD}$ v nějakém bodě I. Chceme ukázat, že I leží na osách všech úhlů.
Bod I náleží vnitřku úhlu $\angle CAB$ a vnitřku úhlu $\angle ABC$, proto leží také ve vnitřku $\angle BCA$. Nechť P, Q a R jsou paty kolmic z bodu I k $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AC}$ a $\overleftrightarrow{AB}$. $\triangle IQA \cong \triangle IRA$, protože mají shodnou přeponu a jeden úhel (kromě pravého), takže $\overline{IQ} \cong \overline{IR}$. Podobně $\triangle IQC \cong \triangle IPC$. Tedy $\angle ICQ \cong \angle ICP$ a I leží na ose úhlu $\angle BCA$. Všechny tři osy úhlů se tedy protínají v bodě I.

Definice 8.3.1 Těžnicí trojúhelníka nazýváme úsečku spojující vrchol trojúhelníka se středem jeho protější strany.

Věta 8.3.2 *V eukleidovské geometrii se těžnice v každém troúhelníku protínají v jednom bodě. Tento bod budeme nazývat těžiště trojúhelníka.*

Důkaz: Nechť $\overline{AP}, \overline{BQ}$ a $\overline{CR}$ jsou těžnice trojúhelníka $\triangle ABC$. Podle "křížové věty" $\overrightarrow{AP} \cap \overline{BQ} \neq \emptyset$ a $\overrightarrow{BQ} \cap \overline{AP} \neq \emptyset$, takže $\overline{AP}$ protíná $\overline{BQ}$ v nějakém bodě G. Musíme ukázat, že $G \in \overline{CR}$.
Nyní $\triangle QPC \sim \triangle ACB$ podle věty *sus*. Proto $\angle CQP \cong \angle CAB$, takže $\overleftrightarrow{QP} \parallel \overleftrightarrow{AB}$. Navíc

$$\frac{QP}{AB} = \frac{CQ}{CA} = \frac{1}{2}.$$

Podobně jestliže S a T jsou středy úseček $\overline{AG}$ a $\overline{BG}$, musí platit

$$\frac{ST}{AB} = \frac{1}{2},$$

což implikuje $\overline{QP} \cong \overline{ST}$. Protože $\overleftrightarrow{QP} \parallel \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{ST}$, je $\angle PQG \cong \angle STG$. Navíc $\angle QGP \cong \angle TGS$. Protože $\overline{QP} \cong \overline{ST}$, je $\triangle QGP \cong \triangle TGS$ podle věty *suu*. Proto bod G náleží $\overline{AP}$ a platí

$$PG = GS = \frac{1}{2}AG.$$

Podobně dokážeme, že $\overline{AP}$ a $\overline{CR}$ se protínají v bodě $G' \in \overline{AP}$ a platí

$$PG' = \frac{1}{2}AG'.$$

Ale existuje jen jeden bod $X \in \overline{AP}$, pro který platí $PX = 1/2.AX$, takže $G = G'$. Proto těžnice se protínají v jednom bodě G.

Věta 8.3.3 *V eukleidovské geometrii se osy všech stran trojúhelníka protínají v jednom bodě. Tento bod budeme nazývat střed kružnice opsané.*

Věta 8.3.4 *V eukleidovské geometrii se přímky, které jsou prodloužením výšek trojúhelníka, protínají v jednom bodě. Tento bod budeme nazývat ortocentrum.*

Důkaz: Chceme zkonstruovat $\triangle PQR$ takový, že prodloužení jeho výšek a os stran obsahuje výšky trojúhelníka $\triangle ABC$. Protože osy stran takového trojúhelníka jsou podle věty 8.3.3 prodloužením výšek $\triangle ABC$. Chceme ukázat postup konstrukce $\triangle PQR$.
Nechť ℓ_1 je jediná přímka jdoucí bodem A a rovnoběžná s $\overleftrightarrow{BC}$, ℓ_2 je jediná přímka jdoucí bodem B a rovnoběžná s $\overleftrightarrow{AC}$ a ℓ_3 jediná přímka jdoucí bodem C a rovnoběžná s $\overleftrightarrow{AB}$. Protože $\ell_1 \parallel \overleftrightarrow{BC}$ a $\ell_2 \cap \overleftrightarrow{BC} \neq \emptyset$, $\ell_1,\ \ell_2 \neq \emptyset$. Podobně $\ell_2 \cap \ell_3 \neq \emptyset$. Nechť body jejich průniku jsou P, Q a R.
Využijeme toho, že střídavé úhly jsou kongruentní a při běžném označení vidíme, že $\triangle CAR \cong \triangle ACB \cong \triangle QBC$ podle věty *usu*. Proto $\overline{CR} \cong \overline{QC}$ a C je středem $\overline{RQ}$. Protože $\overleftrightarrow{RQ} \parallel \overleftrightarrow{AB}$, výška z bodu C na $\overline{AB}$ je kolmá k $\overleftrightarrow{RQ}$. Proto prodloužení této výšky je osou strany $\overline{RQ}$. Podobně prodloužení ostatních výšek v $\triangle ABC$ jsou osy zbývajících stran $\triangle PQR$. Podle věty 8.3.3 se tyto přímky protínají v jednom bodě H. Proto přímky, na kterých leží výšky $\triangle ABC$ se také protínají v jednom bodě.

Věta 8.3.5 *V eukleidovské geometrii leží těžiště, střed kružnice opsané a ortocentrum daného trojúhelníka vždy na jedné přímce.*

Důkaz: Nechť H je průsečík výšek, G těžiště a O je střed kružnice opsané $\triangle ABC$.
Jestliže $\triangle ABC$ je rovnostranný, $H = G = O$ ($= I$ vnitřní střed) a tvrzení je triviální.
Jestliže je $\triangle ABC$ rovnoramenný (ale ne rovnostranný), předpokládejme, že $\overline{AC}$ je jeho základna. Označme D střed strany $\overline{AC}$. Osa strany $\overline{AC}$, výška z bodu B k $\overleftrightarrow{AC}$ a těžnice z bodu B na $\overline{AC}$ splynou v úsečku $\overline{BD}$. Protože G leží na průsečíku všech tří těžnic, tento průsečík musí ležet na $\overline{BD}$. Podobně pro body H a O. Všechny tři vyšetřované body tedy leží na jedné přímce.
Dále předpokládejme, že $\triangle ABC$ je obecný. Nejprve ukážeme, že v tomto případě $O \neq G$. Těžnice z A na $\overline{BC}$ není kolmá k $\overline{BC}$. Bod G nemůže ležet na ose strany $\overline{BC}$, protože G není střed $\overline{BC}$. Tudíž $G \neq O$.
Nechť $\ell = \overleftrightarrow{OG}$ a nechť H' je jediný bod na ℓ, pro který platí $O - G - H'$ a $GH' = 2GO$. Máme ověřit, že H' je průsečík výšek. Nechť P je střed $\overline{BC}$, takže $G \in \overline{AP}$.
Chceme nejprve ukázat, že $\overleftrightarrow{AH'} \parallel \overleftrightarrow{OP}$. Nyní $GA = 2GP$ a $GH' = 2GO$. Protože výškové úhly $\angle AGH'$ a $\angle PGO$ jsou kongruentní, $\triangle AGH' \sim \triangle PGO$ podle věty *sus*. Proto střídavé úhly $\angle GAH'$ a $\angle GPO$ jsou kongruentní, takže $AH' \parallel OP$.
Protože $\overleftrightarrow{OP} \perp \overleftrightarrow{BC}$, je $\overleftrightarrow{AH'} \perp \overleftrightarrow{BC}$. Tudíž $\overleftrightarrow{AH'}$ obsahuje výšku z bodu A k $\overline{BC}$. Tudíž přímka obsahující výšku z bodu A prochází bodem H'. Podobně přímky obsahující zbývající dvě výšky také procházejí bodem H'. Proto H' je průsečík výšek a body $O,\ G,\ H = H'$ jsou kolineární.

Definice 8.3.2 Přímka, na které leží těžiště, střed kružnice opsané a ortocentrum daného nerovnostranného trojúhelníka v eukleidovské geometrii, se nazývá Eulerova přímka. Ty tři význačné body, kterými prochází se nazývají Eulerovy body.

Věta 8.3.6 *(kružnice procházející devíti body): Nechť $\triangle ABC$ je trojúhelník v eukleidovské geometrii. Potom středy stran trojúhelníka, paty jeho výšek a Eulerovy body leží na jedné kružnici.*

Věta 8.3.7 *(Morleyova): Nechť $\triangle ABC$ je trojúhelník v eukleidovské geometrii. Potom tři body $P,\ Q,\ R$ z průniku sousedních třetin vnitřních úhlů $\triangle ABC$ jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníka.*

Důkazy těchto vět najde čtenář v literatuře.

Kapitola 9

Trojúhelníky v eukleidovské a hyperbolické geometrii

9.1 Porovnání vlastností trojúhelníků v eukleidovské a hyperbolické geometrii

V této kapitole si poukážeme na některé základní rozdíly mezi vlastnostmi trojúhelníků v eukleidovské a hyperbolické geometrii.

Úmluva: Pro jednoduchost budeme označovat eukleidovskou geometrii e-geometrie a geometrii hyperbolickou h-geometrie.

Součet měr všech vnitřních úhlů každého trojúhelníka v e-geometrii je roven 180, zatímco v h-geometrii je tento součet vždy menší než 180.

Výšky trojúhelníka (nebo jejich prodloužení) v e-geometrii se vždy protínají v jednom bodě. V h-geometrii se protínají v jednom bodě pouze výšky ostroúhlého trojúhelníka. Pro tupoúhlý trojúhelník toto tvrzení neplatí.

Těžnice trojúhelníka se protínají v jednom bodě v e-geometrii i v h-geometrii. V e-geometrii je každá těžnice tímto průsečíkem rozdělena v poměru 2:1, v h-geometrii není poloha průsečíku stálá.

Střední příčka v e-geometrii je rovnoběžná s protější stranou trojúhelníka a její délka je rovna polovině délky této strany. V h-geometrii platí pouze, že střední příčka je kolmá k ose protilehlé strany.

Osy stran trojúhelníka v e-geometrii se vždy protínají v jednom bodě. V h-geometrii toto tvrzení obecně neplatí, ale jestliže se v jednom bodě protínají osy dvou stran, pak také osa třetí strany prochází tímto bodem.

V e-geometrii existují shodné i podobné trojúhelníky (např. ty, které se shodují ve všech vnitřních úhlech). V h-geometrii jsou každé dva trojúhelníky, které mají stejné vnitřní úhly, shodné. V h-geometrii tedy platí, že velikostí úhlu v trojúhelníku je jednoznačně určena délka jeho protější strany.

Ke každému trojúhelníku v e-geometrii i v h-geometrii existuje kružnice vepsaná, která se dotýká všech jeho stran v jejich vnitřních bodech. V e-geometrii existuje vždy také kružnice trojúhelníku opsaná, která prochází všemi jeho vrcholy a její střed leží na průsečíku os stran. V h-geometrii nemusí kružnice opsaná vždy existovat, protože některé její body nemusí ležet v hyperbolické rovině.

9.2 Konstrukce trojúhelníků

V této části se budeme zabývat některými základními úlohami na konstrukci trojúhelníků.

Řešení těchto úloh v e-geometrii známe již ze školské matematiky. Některé typy úloh se řeší stejným způsobem také v h-geometrii, u jiných typů se naopak postup řešení výrazně odlišuje.

Pro demonstraci řešení úloh v h-geometrii zvolíme Beltrami-Kleinův model.

Označení: Označíme $\Theta(p)$ funkci, která vyjadřuje závislost míry úhlu na délce úsečky p. Dále označme Λ funkci inverzní k funkci Θ, která k dané míře úhlu přiřadí délku p.

9.2.1 Pravoúhlé trojúhelníky

Konstrukce v eukleidovské rovině

Uvažujme $\triangle ABC$ s pravým úhlem při vrcholu C. Jehož odvěsny mají délku a, b a přepona c, vnitřní úhly jsou α, β, γ, délky stran splňují trojúhelníkovou nerovnost a platí $m(\alpha) + m(\beta) = 90$. Ke konstrukci pravoúhlého trojúhelníka nám stačí znát dva z pěti údajů $a, b, c, m(\alpha), m(\beta)$.

Máme šest základních možností:

1. konstrukce ze dvou stran a, b
2. konstrukce ze dvou stran a, c $(a < c)$
3. konstrukce ze strany a a míry úhlu β
4. konstrukce ze strany c a míry úhlu α
5. konstrukce ze strany a a míry úhlu α
6. konstrukce z měr dvou úhlů α, β.

Prvních pět úloh lze v e-geometrii jednoznačně řešit. Poslední úloha má nekonečně mnoho řešení (všechny podobné trojúhelníky).

Konstrukce v hyperbolické rovině

Uvažujme $\triangle LKM$ s pravým úhlem při vrcholu K, jehož odvěsny mají délku l, m a přepona k, vnitřní úhly κ, λ, μ, délky stran splňují trojúhelníkovou nerovnost a platí $m(\lambda) + m(\mu) < 90$.

K sestrojení daného pravoúhlého trojúhelníka nám stačí znát dva z pěti údajů $k, l, m, m(\lambda), m(\mu)$.

Opět dostáváme šest základních úloh:

1. konstrukce ze dvou stran m, l

2. konstrukce ze dvou stran m, k $(m < k)$

3. konstrukce ze strany m a úhlu λ

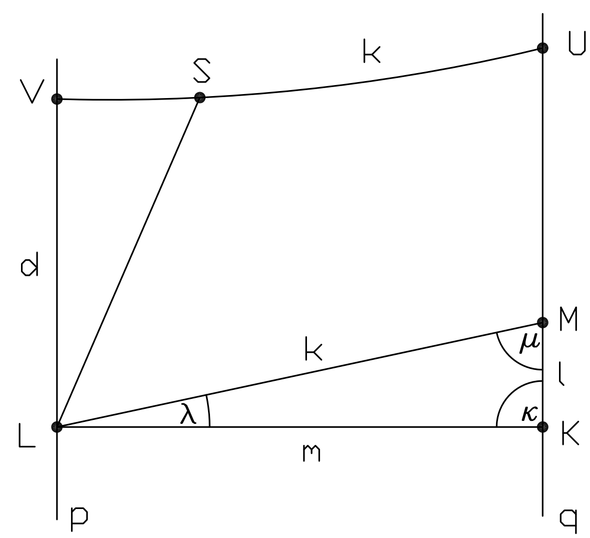
4. konstrukce ze strany k a úhlu μ

5. konstrukce ze strany m a úhlu μ

6. konstrukce ze dvou úhlů λ, μ.

Úlohy 1.-4. se řeší stejně jako v e-geometrii.
Úlohy 5. a 6. se řeší odlišně.

Uvedeme postup konstrukce trojúhelníka v úloze 5.
Nejprve sestrojíme čtyřúhelník $LKUV$ s pravými úhly při vrcholech L, K, V, ve kterém dále platí $m = LK$, $k = LM$, $\mu = \Theta(KU)$, $l = \Lambda(\mu)$. Trojúhelník $\triangle LKM$ sestrojíme jako asociovaný pravoúhlý trojúhelník k $LKUV$. Vypočítáme k danému úhlu μ velikost úsečky $a = \Lambda(\mu)$, kterou vezmeme jako velikost strany KU čtyřúhelníka $LKUV$.
Nyní známe velikosti stran $m = LK$ a $\Lambda(\mu) = KU$, můžeme tedy sestrojit čtyřúhelník $LKUV$. Nejdříve sestrojíme úsečku $m = AB$ a v jejích krajních bodech sestrojíme kolmice p, q $(L \in p,\ K \in q)$. Na kolmici q naneseme délku úsečky $\overline{KU}$ a získáme bod U. Poté sestrojíme Thaletovu kružnici na LU, její průsečík s přímkou p je bod V. Nakonec sestrojíme kružnici se středem v bodě A a poloměrem UV, která protne stranu KU v bodě M.



Obrázek 9.1:

9.2.2 Obecné trojúhelníky

Konstrukce v eukleidovské rovině

Nechť je dán $\triangle ABC$ s délkami stran a, b, c a vnitřními úhly α, β, γ. Délky stran musí splňovat trojúhelníkovou nerovnost a součet měr všech vnitřních úhlů musí být roven 180. K sestrojení obecného trojúhelníka stačí znát tři z těchto šesti údajů.

Vybereme-li ze všech možných kombinací pouze ty, které nejsou symetrické, dostáváme opět šest základních možností:

1. konstrukce ze tří stran a, b, c
2. konstrukce ze dvou stran a, b a úhlu ležícímu proti jedné z nich (např. α)
3. konstrukce ze dvou stran a, b a úhlu jimi sevřeného γ
4. konstrukce z jedné strany a a dvou úhlů k ní přilehlých β, γ
5. konstrukce z jedné strany a a dvou úhlů α, β
6. konstrukce ze tří úhlů α, β, γ

Prvních pět úloh lze v e-geometrii řešit jednoznačně. Poslední úloha má nekonečně mnoho řešení (všechny podobné trojúhelníky).

Konstrukce v hyperbolické rovině

Nechť je dán $\triangle LKM$ s délkami stran l, k, m a vnitřními úhly λ, κ, μ. Délky stran musí splňovat trojúhelníkovou nerovnost a součet měr všech vnitřních úhlů musí být menší než 180. K sestrojení obecného trojúhelníka opět stačí znát tři z těchto šesti údajů.

A ze všech kombinací dostaneme šest základních úloh:

1. konstrukce ze tří stran l, k, m
2. konstrukce ze dvou stran l, k a úhlu ležícímu proti jedné z nich (např. λ)
3. konstrukce ze dvou stran l, k a úhlu jimi sevřeného μ
4. konstrukce z jedné strany l a dvou úhlů k ní přilehlých κ, μ
5. konstrukce z jedné strany l a dvou úhlů λ, μ
6. konstrukce ze tří úhlů λ, κ, μ

Úlohy 1.-4. se řeší obdobně jako v e-geometrii, poslední dva typy úloh mají odlišný postup konstrukce.

Řešení úlohy 5.
Nechť v_k je výška na stranu k, její patu označíme Q. Výška KQ rozdělí $\triangle KLM$ na dva trojúhelníky $\triangle KQL$ a $\triangle KQM$. Sestrojíme (podle popisu v předchozí části) pravoúhlý

trojúhelník $\triangle KQM$, ve kterém známe délku strany l a úhel μ. Analogicky sestrojíme trojúhelník $\triangle KQM$, ve kterém opět známe délku KQ a úhel λ.

Řešení úlohy 6. (podle: [4], str. 244; upraveno)
Nechť ve zkoumaném trojúhelníku $\triangle KLM$ je největší úhel κ při vrcholu K. Pomocí výšky rozdělíme daný trojúhelník na dva pravoúhlé trojúhelníky

$$\triangle KLQ : (k_1, h, m, \lambda, \kappa_1)$$

$$\triangle KMQ : (k_2, h, l, \mu, \kappa_2)$$

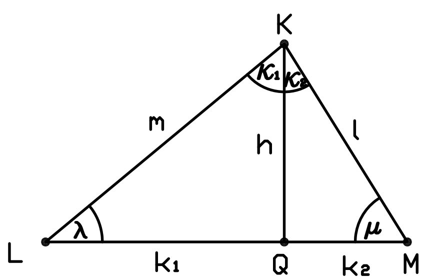
Údaje z těchto trojúhelníků využijeme k sestrojení pomocných pravoúhlých trojúhelníků z prvků:

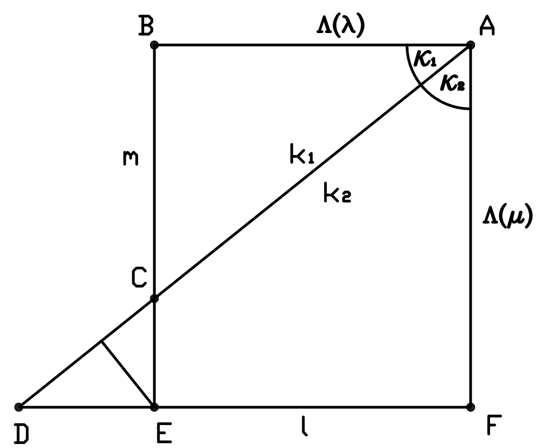
$$\triangle\Sigma_1 : k_1, \Lambda(\lambda), m, \kappa_1, 90 - \Theta(h)$$

$$\triangle\Sigma_2 : k_2, \Lambda(\mu), l, \kappa_2, 90 - \Theta(h).$$

Tyto pravoúhlé trojúhelníky lze sestrojit podle předchozího, protože známe stranu a jeden vnitřní úhel. Umístíme je v rovině $\mathbb{H}^2$ tak, aby měly společný vrchol A, u kterého jsou úhly κ_1, κ_2, a aby strany k_1, k_2 splynuly.

Prodloužení stran l a m se protínají v bodě E, čímž vznikne čtyřúhelník $ABEF$ se dvěma pravými úhly u vrcholů B a F, s úhlem κ u vrcholu A a dvěma stranami $\Lambda(\lambda)$ a $\Lambda(\mu)$ vycházejícími z vrcholu A. Přímka AD, která dělí úhel κ na úhly κ_1 a κ_2, svírá se stranami EB a EF čtyřúhelníka $ABEF$ úhel $90 - \Theta(h)$, takže trojúhelník $\triangle CDE$ je rovnoramenný. Osa vnějšího úhlu $\angle DEC$ je tedy kolmá k přímce AD. Platí tedy $\Sigma_1 = ABC$ a $\Sigma_2 = ADF$. Získali jsme velikosti stran $l = EF$ a $m = BC$ trojúhelníka $\triangle KLM$. Známe tedy velikosti dvou stran l, m a úhel jimi sevřený κ v $\triangle KLM$ a můžeme tento trojúhelník sestrojit.





Obrázek 9.2:

Závěr

Cílem práce bylo seznámit se základními vlastnostmi trojúhelníků v neutrální geometrii. Bylo však třeba nejdříve alespoň nastínit postup budování neutrální geometrie. Čtenář proto může v práci najít také stručně vybudovaný systém od abstraktní geometrie až po geometrii shodnostní.
Této problematice jsou věnovány první kapitoly práce. V této části jsou uvedeny pouze definice a matematické věty bez důkazů, protože vybudovat přesně celý systém geometrií by bylo nad rámec práce a ani to nebylo jejím hlavním cílem.

Při psaní práce jsem vycházela především z publikace [1]. Není totiž mnoho knih, které by se věnovaly výstavbě geometrie na metrickém principu, většinou se jedná spíše o syntetický přístup. Proto jsem mohla využít jen omezené množství zdrojů informací.

Údaje uvedené v knize [1] jsem podle potřeby přizpůsobila terminologii, která je běžně zavedená u nás. Dále bylo třeba dopracovat některé důkazy, protože autor této knihy předkládá často provedení alespoň části důkazu čtenáři jako problémovou úlohu.

Do této části jsem také doplnila několik obrázků (v kapitolách 6-8 jsou vyhotoveny podle knihy [1]). Tyto obrázky jsou doplněny u složitějších důkazů nebo při zavádění některých pojmů, v hyperbolické geometrii a mají sloužit pro lepší představu čtenáře. V ostatních případech si jistě čtenář dokáže potřebné náčrtky zhotovit sám. Obrázky v kapitole 9 jsou zpracovány podle diplomové práce [3] a upraveny.

Je mnoho možností, jak na práci navázat. Zaměřit se na problematiku jednotlivých modelů hyperbolické geometrie a ukázat transformace pomocí nichž je možné přejít od jednoho modelu k jinému nebo odvodit vztahy platné v jednom modelu a ověřit, zda v jiném platí stejné vztahy nebo se danou transformací také mění. Další možnost by byla zaměřit se na praktickou část a řešit složitější konstrukční úlohy v hyperbolické geometrii. Jistě by bylo také zajímavé věnovat se podrobně vlastnostnem čtyřúhelníků.

Při psaní této práce jsem musela překonat řadu problémů. Prvním z nich byla práce s anglickou literaturou. Neboť jsem dosud nezpracovávala tak rozsáhlý odborný text v cizím jazyce.
Dále také práce v programu $LaTeX$, kterým je práce vysázena, byla pro mne novinkou, proto mi některé úpravy práce zabraly poměrně více času.

Díky vytvoření této práce jsem se naučila mnoho nových věcí a měla jsem možnost doplnit si znalosti z absolvovaných kurzů matematiky na VŠ opět z jiného úhlu. Věřím, že přehled, který jsem tímto získala se mi bude hodit i do budoucna v mém učitelském povolání.

Pro mě samotnou tedy byla práce přínosem. Pokud bude užitečná i dalším čtenářům a bude moci být využita také jako studijní text pro kurzy neeukleidovské geometrie nebo axiomatické výstavby geometrie, pak splnila svůj cíl.

Literatura

[1] Millmann R.S., Parker G.D.:Geometry, A Metric Approach with models, Springer, 1993.

[2] Švrček J., Vanžura J.: Geometrie trojúhelníka, Praha, SNTL, 1998.

[3] Bureš J.: Úvod do geometrie torjúhelníka v Lobačevského rovině, diplomová práce, Ped F UK, Praha, 2005.

[4] Nestorovič N.M.: Geometričeskije postrojenija v ploskosti Lobačevskogo, Gosudarstvennoje vydavatělstvo techniko-teoretičeskoj literatury, Moskva, 1951.

[5] Kutuzov B.V.: Lobačevského geometrie a elementy základů geometrie, Nakl. Československé akademie věd, Praha, 1953.