Pedagogická fakulta
Faculty of Education

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Matematické hry jako nástroj rozvoje matematického myšlení žáků ZŠ

Mathematical games as a tool for the development of mathematical thinking of elementary school students

Diplomová práce

Vypracovala: Bc. Hana Boublíková

Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc.

České Budějovice 2023

Na tomto místě bych ráda poděkovala panu prof. RNDr. Pavlovi Tlustému, CSc. za skvělé vedení mé diplomové práce, mnoho cenných rad, jeho trpělivost a ochotu, s jakou se mi při zpracovávání práce věnoval.

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma Matematické hry jako nástroj rozvoje matematického myšlení žáků ZŠ jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské/diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích dne 6. července 2023.

. . . .

Hana Boublíková

Abstrakt

Tato diplomová práce se zabývá problematikou vybraných matematických her a jejich praktickým využitím v hodinách matematiky na základních školách. Cílem práce je představit tyto hry, pomocí různých metod nalézt jejich vítězné strategie a srozumitelně je vysvětlit. Z teoretické části pak vychází i praktické výzkumné šetření se žáky základních škol, na základě něhož hodnotíme vhodnost využití matematických her ve výuce a jejich potenciál.

Abstract

This master's thesis is concerned with the issue of selected mathematical games and with their practical use in mathematics lessons at elementary schools. The aim of the thesis is to introduce these games, find their winning strategies using various methods and explain them understandably. The practical research with primary school students is based on the theoretical part, through which we evaluate the appropriateness use of mathematical games in education and their potential.

Obsah

1 Úvod

Cílem této diplomové práce je seznámit čtenáře s problematikou vybraných matematických her, zejména pak s jejich praktickým využitím na základních školách. V teoretické části budou představeny základní pojmy z teorie her a především konkrétní matematické hry pro dva hráče včetně jejich vlastností a metod hledání vítězných strategií. Praktická část práce vychází z výzkumného šetření, které proběhlo se žáky I. i II. stupně základních škol za účelem vyzkoušení vybraných matematických her v praxi. Z výsledků šetření následně vyhodnotíme vhodnost a užitečnost těchto her pro žáky.

První kapitola práce se zabývá obecnou teorií matematických her. Podíváme se na definici teorie her i hry jako takové, dále na rozdíl mezi didaktickými, matematickými a kombinatorickými hrami a v neposlední řadě zazní pojmy, které se budou v práci často objevovat – strategie, vítězná strategie, vyhrávající a prohrávající pozice.

Ve druhé kapitole se budeme věnovat matematickým hrám z pohledu pedagogiky. Představíme základní funkce her, které mohou přispět k rozvoji některých klíčových kompetencí žáků. Jedná se tedy o kapitolu, kde se čtenáři dozví, v čem tkví přínos využití matematických her ve výuce. Kromě toho se zmíníme i o tom, jaké náležitosti by měly matematické hry obsahovat.

Další kapitola seznámí čtenáře s vybranými metodami hledání vítězných strategií matematických her. Tyto strategie budou názorně vysvětlené, neboť z nich budeme vycházet i v další části práce.

Následovat bude obsáhlá kapitola, ve které budou uvedeny konkrétní příklady matematických her, jejich strategie podrobně vysvětlíme (často pomocí ilustrací). Z tohoto přehledu her budeme následně vybírat hry, které využijeme pro naše výzkumné šetření.

V páté kapitole proběhne seznámení čtenářů s výzkumným šetřením, které proběhlo v červnu a červenci 2022 se dvěma skupinami žáků – staršími ze II. stupně

ZŠ F. L. Čelakovského ve Strakonicích a mladšími z převážně I. stupně různých škol, kteří se sešli na příměstském táboře v Českých Budějovicích. Všichni žáci si vyzkoušeli několik stejných matematických her, které byly klíčovou součástí šetření. Starší žáci si kromě toho zahráli i několik her navíc. Tato kapitola bude popisovat nejen plánování výzkumných šetření a jejich průběh, ale především podrobné vyhodnocení dotazníků, které žáci vyplnili, a formulaci závěrů o vhodnosti a užitečnosti těchto her a o jejich případném vlivu na pochopení některých témat v matematice, případně na oblíbenost matematiky mezi žáky.

Všechny ilustrace byly vytvořeny v programech CorelDRAW a GeoGebra Classic a celá práce byla vysázena v popisovacím jazyce LaTeX v programu TeXmaker.

2 Základní pojmy z teorie her

Nejprve si vysvětlíme základní obecné pojmy z teorie her, jako jsou didaktické, matematické a kombinatorické hry, jejich strategie a vyhrávající a prohrávající pozice. Také se zaměříme na různé metody hledání vítězných strategií matematických her. Začneme tím, co to vlastně teorie her je.

2.1 Teorie her

Teorie her jakožto matematická disciplína byla založena v roce 1944 Johnem von Neumannem. „Zabývá se rozhodováním v konfliktních situacích. To jsou takové situace, ve kterých výsledek nezávisí jenom na tom, jak se zachováme my, ale i na tom, jak se zachovají ostatní hráči“ (Skálová 2014a, s. 11). Příkladem jsou známé hry kámen-nůžky-papír, piškvorky nebo třeba šachy. Teorii her ale můžeme spatřit i v běžných životních situacích, např. při volbě nejrychlejší cesty při jízdě autem, při plánování politické předvolební kampaně, nebo třeba při vymýšlení strategie pro výhru ve sportovní soutěži.

Výstižně popsal teorii her Chvoj (2013, s. 16). Podle něj ji „lze chápat jako můstek mezi reálnými každodenními problémy, ve kterých je potřeba učinit nějaké rozhodnutí, a teoretickou matematikou, v níž se často zdá, že se skutečným světem nemá nic společného.“ Můžeme tedy říci, že cílem teorie her je popsat běžné situace jako hry s matematickým pozadím.

2.2 Hry didaktické, matematické a kombinatorické

Hry jsou nedílnou součástí našeho života už od brzkého věku a zabýváme se jimi v podstatě denně. Velmi často mají rekreační formu. Mohou rozvíjet naši fantazii a tvořivost, prohlubovat naše sociální vazby s dalšími účastníky her, podporovat naši motivaci k účasti ve hře a rozvíjet naši soutěživost. Kromě toho je řada her doprovázená procvičováním již dříve nabytých znalostí a zkušeností, popř. poznáváním něčeho nového. Při hraní her prožíváme různé emoce, čehož může být využito i v diagnostice, terapii apod.

Vališová a Valenta (2011, s. 209) hru v obecném pojetí chápou jako „soubor seberealizačních aktivit jedinců nebo skupin, které jsou vázány danými a smluvenými pravidly a jejichž primárním cílem není materiální zájem a užitek.“ Hra se od soutěže liší tím, že primárním cílem hry bývá určitá činnost sama o sobě, kdežto primárním cílem soutěže je dosáhnout co nejlepšího umístění. Mnoho her, a týká se to i matematických her, kterými se zabýváme v této práci, kombinuje oba tyto cíle. Primární je samotná herní činnost, ale zároveň se hráč snaží hru vyhrát. Hovoříme tedy o soutěžních hrách.

Hry se rozlišují na spontánní a didaktické. Ve spontánní hře si účastníci sami vymýšlí námět, pravidla a vybírají pomůcky. „Didaktická hra obsahuje nějaký výchovně-vzdělávací cíl. Je zdrojem motivace, zvyšuje aktivitu myšlení a rozumové úsilí, zlepšuje koncentraci pozornosti. Uvolňuje a rozvíjí tvořivý způsob uvažování, často cvičí představivost, paměť, kombinační a logický úsudek, umožňuje hledat taktické a strategické postupy. Obsahuje prvky napětí a soutěživosti, nezřídka též moment překvapení, a tím podněcuje k větší iniciativě i jinak pasivnější jedince“ (Krejčová, Volfová 1994, cit. v Šilhánová 2010, s. 11). Učitel ji zařazuje do své výuky za jasným účelem, který žáci nemusejí znát. Vždy by však měla být žákům vysvětlena jasně stanovená pravidla hry.

Speciální kategorií didaktických her jsou matematické hry, u kterých si mohou hráči dopočítat, jak by měly vypadat jejich tahy, aby vyhráli. Podle Vávrové a kol. (2006, s. 33) „matematické hry přispívají k rozšíření vnímání složitosti reálného světa a jeho porozumění a k rozvíjení zkušenosti s matematickým modelováním (matematizací reálných situací).“

Mezi matematické hry patří i hry kombinatorické. Pro ty platí několik pravidel. Hrají je vždy dva hráči proti sobě, kteří se pravidelně střídají ve svých tazích, přičemž nesmějí tah nikdy vynechat. Možné tahy jsou jednoznačně určeny pravidly hry, nejsou ovlivněny žádnou náhodou. Kombinatorické hry mají konečný počet tahů a končí výhrou nebo prohrou jednoho z hráčů. Hry, které končí výhrou hráče, jenž provedl poslední tah, nazývá Bulant (2008, s. 7) normální, a hry, které končí naopak prohrou hráče s posledním tahem, nazývá nuzné. Některé hry mohou skončit i remízou (např. hra Obtahování čtverečků).

2.3 Strategie, vyhrávající a prohrávající pozice

Pojem strategie provází celou teorii her. Jedná se o postup hráče, v jakém provádí jednotlivé tahy. Skálová (2014, s. 13) uvádí, že „přesněji lze strategii definovat jako funkci, která každé možné pozici přiřadí tah hráče.“

Racionálně smýšlející hráč se samozřejmě snaží hrát co nejlépe, tzn. používat co nejvhodnější strategii. V ideálním případě takovou, která mu zajistí výhru. Takzvaná „vítězná (nebo také vyhrávající, či výherní) strategie je postup, který hráči zajišťuje výhru bez ohledu na to, jaké tahy zvolí protivník“ (Vávrová a kol. 2006, s. 34). U matematických her vždy existuje nějaká vítězná strategie, kterou se hráči snaží objevit.

Podobně jako vítěznou strategii si můžeme definovat i vyhrávající pozici. Pro hráče ve vyhrávající pozici „existuje aspoň jeden pravidly povolený tah, který soupeře dostane do prohrávajícího postavení“ (Chytrý, Kroufek, Janovec 2015, s. 75). Do vyhrávající pozice je možné se dostat i na úplném začátku hry a za vyhrávající se pak považují i všechny další pozice, do nichž se během hry tento hráč dostane, udrží-li si vítěznou strategii.

Předpokládáme, že soupeř zná vítěznou strategii. Jedinou možností, jak se může dostat do prohrávající pozice, je tedy jeho chybně provedený tah, čehož můžeme případně využít. Pak by se jednalo o „ukradení strategie“, z dosud vyhrávajícího hráče by se stal prohrávající a naopak.

3 Matematické hry z pohledu pedagogiky

Hry obecně mají pro děti velký význam. Matematické hry se ve škole dají využít jako jakási přirozená forma vzdělávání. Děti se při hraní mohou naučit nejen novým znalostem, ale i různým osobnostním dovednostem (např. férovosti, umění prohrávat). „Hraní her posiluje vztahy mezi žáky navzájem. Hry, u nichž vítězství závisí na náhodě, umožňují slabým žákům zažít pocit úspěchu a vítězství“ (Jančařík 2007, s. 2). Celkově můžeme říci, že matematické hry mohou zvýšit myšlenkovou aktivitu žáků, mohou jim pomoci k lepší koncentraci, vzbudit v žácích zájem o objevování nových poznatků, vést je ke zdravé soutěživosti.

Dále se podíváme na základní funkce matematických her. Uvedeme si klíčové kompetence, které u žáků při hraní her prohlubujeme. Řekneme si i něco o tom, jaké náležitosti by měla hra mít a jak bychom žákům měli správně hry zadávat.

3.1 Funkce matematických her

Podle Vávrové a kol. (2006, s. 2-3) mají matematické hry čtyři základní funkce - motivační, instrumentální, diagnostickou a existenciální.

Motivační funkce hry se u žáků projevuje obvykle nejprve v podobě vnější motivace, například jako radost z rychlejšího nalezení strategie než protihráč. Postupně se může u žáků objevit i vnitřní motivace v podobě zájmu o nalezení řešení, nabytí nových dovedností apod. Podle Jančaříka (2007, s. 3) se „děti neučí jen při hře, ale učí se i pro hru.“ Dále uvádí příklad sedmiletého chlapce, který se „naučil počítat procenta, protože si ve hře Monopoly chtěl sám spočítat, jakou bude platit daň.“ Důležité ovšem je, aby byl každý žák aspoň někdy ve hře úspěšný, jinak by u něho mohlo být hraní spíše demotivující.

Instrumentální funkce her znamená, že žáci během hry získají nějaké nové zkušenosti, které si následně zafixují. Dochází tedy k procesu učení, ale jak už bylo zmíněno, přirozeně.

O diagnostické funkci hry hovoříme ve chvíli, kdy je žák schopen kriticky posoudit, v čem se během hry jeho schopnosti rozvinuly a kde má ještě prostor pro zlepšení. Ovšem nejen že každý žák může diagnostikovat sám sebe, ale i pro nás učitele mohou být matematické hry významným diagnostickým nástrojem, neboť se při jejich hraní lépe projeví povaha žáků.

Existenciální funkcí hry je myšlen kupříkladu rozvoj žákovy osobnosti a tvořivosti při hraní, nebo přijetí nových sociálních norem.

3.2 Klíčové kompetence

„Klíčové kompetence představují souhrn vědomostí, dovedností, schopností, postojů a hodnot důležitých pro osobní rozvoj a uplatnění každého člena společnosti“ (MŠMT 2021, s. 10). K osvojování různých kompetencí žáky dochází dlouhodobě v průběhu celého procesu vzdělávání i následně v běžném životě. MŠMT (2021, s. 10) uvádí v etapě základního vzdělávání tyto klíčové kompetence: k učení, k řešení problémů, komunikativní, sociální a personální, občanské, pracovní a digitální. K plnění některých z nich dochází i při hraní matematických her.

Kompetence k učení

Kompetence k učení znamená schopnost žáka naplánovat si proces vlastního učení, vybrat vhodnou metodu, třídit vyhledané informace, pochopit je a efektivně je využít. Žák by měl být rovněž schopen propojovat nabyté poznatky v širších souvislostech, kriticky je posuzovat a vyvozovat z nich závěry. Měl by mít pozitivní vztah k učení, umět posoudit vlastní pokrok a naplánovat si, jak se ještě více zdokonalit.

Při opakovaném hraní matematických her dochází u žáka k používání různých metod hledání vítězných strategií. Žák třídí získané informace a postupně objevuje, které tahy jsou pro něj výhodné a které ne. Snaží se pochopit principy, na kterých jsou hry založeny, na základě svých poznatků plánuje svou taktiku a používá ji. Dokáže zhodnotit svůj pokrok, může si všimnout, kolik času mu zabralo najít vhodnou strategii. Mnoho žáků si pak na základě všech zjištěných poznatků zkouší vymýšlet vlastní verze her a objevovat jejich vítězné strategie.

Kompetence k řešení problémů

Žák je kompetentní k řešení problémů, dokáže-li vnímat problémové situace, pochopit jejich podstatu a na základě svých poznatků a zkušeností přemýšlet nad způsobem vyřešení problémů. Měl by být schopen vyhledat potřebné informace k řešení, nenechat se odradit při nezdaru a zvládnout problém vyřešit samostatně pomocí různých logických, matematických a empirických postupů. Po použití nějakého řešení by měl žák umět zhodnotit efektivnost svého postupu, obhájit si své názory a zároveň naslouchat názorům druhých.

Matematické hry jsou skvělým příkladem aktivity, při které dochází k rozvoji kompetence k řešení problémů u žáků. Zadáme-li žákům nějakou matematickou hru, kterou dosud neznali, můžeme sledovat postupný vývoj žákovské kompetence k vyřešení hry. Při prvních hrách žáci pozorují vlastnosti hry, snaží se do ní nahlédnout a přemýšlejí nad vhodnými strategiemi. Ve svých tazích zkouší různé možnosti a posuzují, které jsou pro ně vhodné. Může se jednat o jakousi zkoušku trpělivosti, někteří žáci jsou možná běžně zvyklí na problémy rezignovat, aniž by se nad nimi déle zamysleli. U hraní matematických her mohou pracovat na odstranění této negativní vlastnosti, když se nechají strhnout k soutěživosti a jsou motivováni k vyřešení problému. Po určitém čase může proběhnout hromadná diskuze o strategiích, kdy budou mít žáci možnost vysvětlit své myšlenkové pochody při hledání strategií a zamyslet se i nad strategiemi spolužáků.

Komunikativní kompetence

Komunikativní kompetenci pozorujeme u žáků, kteří dokáží srozumitelně formulovat a vyjádřit své myšlenky a názory založené na logickém úsudku. Tito žáci jsou také schopni naslouchat názorům druhých, reagovat na ně a vhodně argumentovat v diskuzi. Nemusí se jednat jen o ústní projevy, ale i například obrázky, grafy, schémata, které mohou pomoci žákům demonstrovat jejich myšlenky. Tuto kompetenci mohou žáci rozvíjet v následné diskuzi o matematických hrách. Nejen že se pokusí srozumitelně popsat své zvolené strategie při hraní her, ale také je mohou svým spolužákům předvést na jednoduchých obrázcích a schématech.

Kompetence sociální a personální

K rozvoji sociální a personální kompetence dochází při vzájemné spolupráci žáků, při společném vytváření pravidel práce a na základě přijímání nových rolí. Žáci dosahují těchto kompetencí i utvářením příjemné atmosféry, vyjadřováním své úcty ke spolužákům a upevňováním dobrých vzájemných vztahů. Žáci si mohou v případě potřeby vzájemně poskytovat pomoc a spolupracovat při řešení problému. Měli by se rovněž naučit oceňovat druhé a jejich myšlenky, respektovat jiné názory a na druhou stranu mít také přiměřenou sebedůvěru a dostatek sebeúcty. Při hraní matematických her je mezi protihráči rozvíjena i tato kompetence.

3.3 Náležitosti her

Každá hra zadávaná žákům by měla obsahovat:

- název hry
- seznam pomůcek a případné nároky na úpravu prostředí
- stručná a srozumitelná pravidla
- pedagogický cíl
- způsob zakončení hry a hodnocení
- případné další herní varianty
- reflexi hry.

Případnými nároky na úpravu prostředí je myšlen například zasedací pořádek, způsob zakončení hry pak většinou vyplývá z herních pravidel. Co se týče reflexe hry, Vališová (2011, s. 211) uvádí, že by po skončení hraní měla proběhnout „diskuze se žáky a zasazení hry do rámce teoretického učiva“. Do bodu reflexe hry řadíme i diskuzi o použití vhodných strategií. „Při této diskuzi se žáci učí nejen srozumitelně vyjadřovat své myšlenky, klást otázky a odpovídat na ně, ale právě zde má učitel větší možnost diagnostikovat případné neporozumění pojmům nebo algoritmům.

Diskuze rozvíjí schopnost žáků kriticky hodnotit předkládané informace, obhajovat vlastní názory, věcně argumentovat a přijímat nebo vyvracet názory jiných.“ (Novotná 2004, s. 381).

Mezi náležitosti her by mohla patřit i časová náročnost. V této práci se ale věnuji krátkým hrám, které trvají nejvýše pár minut. Obecně bychom měli matematické hry s žáky hrát v hodině opakovaně, aby měli dostatek času a příležitostí zkusit odhalit vítězné strategie. Časová náročnost je tedy velmi individuální.

Učitel zadávající žákům matematickou hru by si měl rovněž promyslet pedagogické cíle hry, kterých chce jejím prostřednictvím u žáků dosáhnout. Obvykle využívá hru ve výuce jako podporu pro rozvoj matematického myšlení.

4 Metody hledání vítězných strategií

Existuje několik metod hledání vítězných strategií v matematických hrách. Postupně si představíme ty nejznámější. Pro každou hru může být vhodná jiná metoda.

4.1 Metoda zpětného rozboru

Metoda „je založena na rozboru vyhrávajících a prohrávajících pozic“ (Skálová 2014b, s. 4). V této metodě postupujeme tak, že se hru snažíme řešit od konce. Představíme si, jak vypadá poslední tah ve hře v situaci, kdy vyhráváme a náš protihráč prohrává, a zamyslíme se nad tím, co mohlo předcházet této pozici. Jak se nám povedlo dostat protihráče do prohrávající pozice? Jakým tahem jsme si zařídili výhru? A pokud už známe odpověď, věnujeme se ještě dřívější pozici, která předcházela právě řešené situaci. Jaký jsme měli provést tah, abychom si udrželi vítěznou strategii, a mohli jsme navázat už dříve řešeným tahem? Je důležité umět si zodpovědět tyto otázky. Postupně se můžeme dobrat až úplného začátku hry. Díky zpětnému rozboru tedy víme, jak bychom měli od začátku až do konce hry postupovat, abychom si zajistili výhru.

4.2 Metoda „kradení strategií“

Skálová (2014, s. 5) mluví o metodě „kradení strategií“. Podle mého názoru se nejedná metodu v úplném slova smyslu, neboť metody vedou k nějakému cíli. Autorka sama uvádí, že se „na rozdíl od ostatních metod jedná o nekonstruktivní metodu – umožňuje nám sice zjistit, kdo z hráčů má vyhrávající strategii, ale vůbec nám neřekne, jak taková strategie vypadá“ (Skálová 2014a, s. 18). Metoda je založena na využití chyby soupeře a na následném prohození prohrávajících a vyhrávajících pozic. Protihráči přitom „krademe“ metodu zpětného rozboru, metodu symetrie nebo jinou.

4.3 Metoda symetrie

Tuto metodu můžeme využít v takových hrách, kde si můžeme nějakým způsobem představit symetrii. Ta nám umožní kopírovat soupeřovy tahy. Základní myšlenka této techniky se dá vyjádřit slovy „dokud může hrát soupeř, mohu i já“ (Skálová 2014a, s. 20). Jedná-li se o hru, v níž jsou uspořádány předměty do nějakého geometrického tvaru, můžeme např. využít vlastností osové či středové souměrnosti. Mělo by jít o hry normální, tedy hry, v nichž vítězí hráč, který provedl poslední tah.

4.4 Metoda párování a obarvování

Párování a obarvování funguje na stejném principu jako metoda symetrie. Podle Skálové (2014a, s. 21) jde opět o to „dát hráči do ruky odpověď na každý protihráčův tah.“ Tentokrát ale nezvládneme využít vlastnosti souměrnosti, abychom vyrovnali počet odebraných předmětů. Místo toho se zaměříme na myšlené rozdělení pozic do párů. Abychom vyrovnali to, co zahraje soupeř, zareagujeme zahráním pozice, která je s pozicí protihráče v páru.

4.5 Metoda převodu pozic do binární soustavy

Podstatou této metody je převod počtu sirek do binární soustavy. Máme-li sirky na více hromádkách (hry typu NIM), převedeme počet sirek na každé hromádce do binární soustavy zvlášť, a následně sečteme jednotlivé cifry bez přenosu do vyššího řádu. To znamená, že nepřipočítáváme cifry do vyššího řádu, jako jsme tomu zvyklí při klasickém písemném sčítání. Pro srovnání se podívejme na jednoduchý příklad $3 + 5$. Číslo 3 v binární soustavě odpovídá číslu 11_2, číslo 5 pak číslu 101_2. Jak víme, výsledkem příkladu $3 + 5$ je 8, kterou zapisujeme 1000_2. Tento výsledek skutečně vychází při klasickém písemném sčítání s převodem cifer do vyšších řádů:

$$\begin{array}{r} 11_2 \\ 101_2 \\ \hline 1000_2 \end{array}$$

Při použití metody převodu pozic do binární soustavy k odhalení vítězné strategie matematické hry však cifry do vyšších řádů nepřenášíme. Výsledkem sčítání bez přenosu řádů je číslo 110_2 (což odpovídá číslu 6).

$$\begin{array}{r} 11_2 \\ 101_2 \\ \hline 110_2 \end{array}$$

Mějme zadáno, že hráči smí v každém tahu z jedné hromádky odebrat jednu, dvě nebo tři sirky. Pokud vyhrává hru hráč, který provede poslední tah, budeme se ve svých tazích snažit upravit počet sirek tak, aby součet vycházel nulový. V našem případě, kdy máme na jedné hromádce tři sirky a na druhé pět sirek, existují tři vyhrávající pozice.

První možností je upravit počet sirek tak, aby po našem tahu zbyly na protihráče na jedné hromádce tři sirky a na druhé také tři sirky, neboť binární součet bez přenosu řádů vychází 00_2:

$$\begin{array}{r} 11_2 \\ 11_2 \\ \hline 00_2 \end{array}$$

Jiná vyhrávající pozice je ta, kdy protihráči necháme na stole v obou hromádkách po dvou sirkách:

$$\begin{array}{r} 10_2 \\ 10_2 \\ \hline 00_2 \end{array}$$

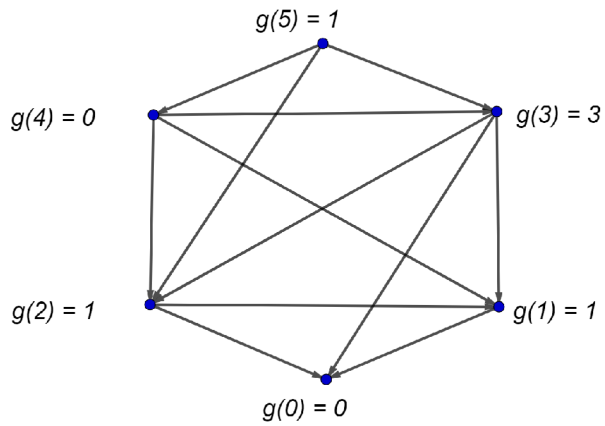
Stejně dobře bude fungovat i strategie, ve které protihráči necháme na stole v každé hromádce jednu sirku:

$$
\begin{array}{r}
1_2 \\
1_2 \\
\hline
00_2
\end{array}
$$

Klíčem k odhalení vyhrávajících pozic je tedy binární součet počtu sirek v jednotlivých hromádkách bez přenosu řádů. Počty sirek v hromádkách pak upravujeme tak, aby tento součet vycházel nulový.

4.6 Metoda založená na Sprague-Grundyho funkci

Vítězné strategie her můžeme hledat i pomocí grafů, kde vrcholy představují jednotlivé pozice a šipky vedoucí mezi nimi naznačují, kam je možné se dostat jedním tahem. Sprague-Grundyho věta říká, že „the player who secures a position n with *g(n) = 0* has a winning strategy.“ Neboli hráč, který si zajistí koncovou pozici, má vítěznou strategii (Yiu 2003, s. 503).



Obrázek 4.1: *Příklad metody založené na Sprague-Grundyho funkci znázorněný pomocí grafu*

Abychom lépe pochopili princip této metody, ukážeme si její použití na jednoduchém příkladu. Mějme hru *Jedenáct sirek III.*, která bude podrobněji popsána níže. Dva hráči v ní střídavě odebírají jednu, dvě nebo tři sirky ze stolu. Vyhrává hráč, který provede poslední tah a na stole tak nezbude žádná sirka. Řekněme, že na stole už nyní zbylo jen pět sirek. Možnosti, jak může v takovém případě závěr hry vypadat, vidíme na obr. 4.1.

5 Příklady matematických her

Dále uvádíme vybrané matematické hry, z nichž jsme některé zvolili do našeho výběrového šetření se žáky. U každé hry je zpracovaná i její vítězná strategie.

5.1 Kdo dřív řekne 100?

Pomůcky: žádné

Pravidla:

Hráč řekne libovolné přirozené číslo od 1 do 10. Druhý hráč k oznámenému číslu přičte další libovolné přirozené číslo od 1 do 10 a oznámí jejich společný součet. Takto se hráči pravidelně střídají. Vyhrává hráč, který oznámí součet 100.

Vítězná strategie:

Na obr. 5.1 je znázorněno poslední kolo hry. Červená barva odpovídá prohrávajícím pozicím, zelená vyhrávajícím. Aby hráč A vyhrál a v posledním kole oznámil součet 100, musí v předchozím kole oznámit součet 89. Následné možné tahy druhého hráče B jsou na obr. 5.1 vyznačeny červeně a na ně pak reagují možné tahy hráče A obarvené zeleně. „Ať hráč B přičte k číslu 89 jakékoli číslo od 1 do 10, jeho nejvyšší součet bude moci být 99, a tak si hráč A zajistí ještě jedno možné číslo k přičtení a zvítězí“ (Boublíková 2021, s. 10).

... 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

Obrázek 5.1: *Vyhrávající pozice hráče A v posledním kole hry (zeleně)*

... 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89

Obrázek 5.2: *Vyhrávající pozice hráče A v předposledním kole hry (zeleně)*

Použijeme-li tuto úvahu i pro předposlední kolo hry, zjistíme, že hráč A si zajistí součet 89 pro sebe, pokud v předposledním kole oznámí součet 78, jak nám znázorňuje obr. 5.2.

Vyhrávající pozice jsou členy aritmetické posloupností s diferencí 11. Hodnota diference vzniká jako součet nejvyššího a nejnižšího možného odečítaného čísla v jednom tahu, neboť v jednom kole každý hráč zahraje jeden tah. Přičte-li první hráč číslo 10, druhý hráč přičte 1, aby byla zachovaná hodnota diference 11. Přičte-li první hráč číslo 9, druhý hráč přičte 2 atd.

Metodou zpětného rozboru dojdeme k tomu, že vyhrávající pozice jsou 12, 23, (...), 78, 89 a 100. Na vítěznou strategii je ale možné přistoupit až v průběhu hry, pokud náš protihráč strategii nezná a nemusíme se tak obávat, že na ni sám přistoupí.

Nyní se podívejme na obecnou verzi této hry.

5.1.1 Kdo dřív řekne n?

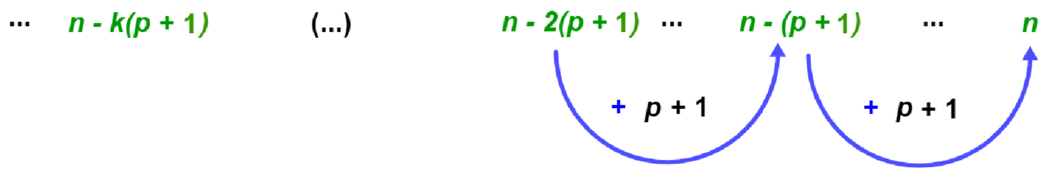
Pomůcky: žádné

Pravidla:

Hráč řekne libovolné přirozené číslo od 1 do p. Druhý hráč k oznámenému číslu přičte další libovolné číslo od 1 do p a oznámí jejich společný součet. Takto se hráči pravidelně střídají. Vyhrává hráč, který oznámí součet n.

Vítězná strategie:

Metodou zpětného rozboru se podívejme na poslední kolo hry. Hráč A dosáhne vítězného součtu n tak, že v předchozím kole oznámí součet $n-(p+1)$. Tomuto součtu předchází součet ve vyhrávající pozici $n-2(p+1)$ a tak dále, jak znázorňuje obr. 5.3. Vítězné pozice jsou od sebe oddělené podle aritmetické posloupnosti s diferencí $p+1$.



Obrázek 5.3: *Vyhrávající pozice v obecné verzi hry*

5.2 Jedenáct sirek

Jedná se o hru založenou na stejném principu jako *Kdo dřív řekne n?*, pouze s tím rozdílem, že zde nehrajeme slovně, ale s konkrétními předměty. Další rozdíl je ve změně pravidel v I. a II. verzi hry, neboť ve hře *Kdo dřív řekne 100?* vyhrává hráč, který oznamuje poslední součet, zatímco v následujících dvou hrách hráč v posledním tahu prohrává.

5.2.1 Jedenáct sirek I.

Pomůcky: sirky

Pravidla:

Na stole leží 11 sirek, dva hráči se pravidelně střídají v odebírání jedné, dvou nebo tří sirek v každém tahu. Prohrává hráč, který odebere ze stolu poslední sirku.

Vítězná strategie:

Metodou zpětného rozboru můžeme dospět k tomu, že aby na našeho protihráče zbyla na stole poslední sirka, měli bychom v našem předchozím tahu nechat protihráči sirek 5, čemuž by předcházelo nechat protihráči na stole sirek 9. Jedná se o počty v aritmetické posloupnosti s diferencí 4, což je, jak už víme, součet nejvyššího a nejnižšího možného odebíraného počtu sirek.

5.2.2 Jedenáct sirek II.

Pomůcky: sirky

Pravidla:

Na stole leží 11 sirek, dva hráči se pravidelně střídají v odebírání jedné nebo dvou sirek v každém tahu. Prohrává hráč, který odebere ze stolu poslední sirku.

Vítězná strategie:

Tentokrát nás k vítězné strategii dovede aritmetická posloupnost s diferencí 3. Počet sirek, které je pro nás výhodné po našem tahu nechat na stole pro protihráče, je podle zpětného rozboru 1, 4, 7 a 10. Stále ale platí, že na vítěznou strategii můžeme přistoupit až v průběhu hry, pokud ji náš protihráč sám nezná.

5.2.3 Jedenáct sirek III.

Pomůcky: sirky

Pravidla:

Na stole leží 11 sirek, dva hráči se pravidelně střídají v odebírání jedné, dvou nebo tří sirek v každém tahu. Hráč, který vezme ze stolu poslední sirku, vyhrává.

Vítězná strategie:

Hra se od předchozích dvou verzí liší tím, kdo vyhrává. Výše jsme se zabývali verzemi hry *Jedenáct sirek*, ve kterých hráč vykonávající poslední tah prohrál, zatímco v této hře takový hráč vyhrává. Jinak je vítěznou strategii možno nalézt opět metodou zpětného rozboru. Stejně jako ve verzi *Jedenáct sirek I.* odhalíme aritmetickou posloupnost s diferencí 4. Tu tentokrát neodpočítáváme od 1 sirky na stole v posledním kole, nýbrž od 0 sirek, neboť protihráči po našem posledním tahu už nechceme na stole nechat žádnou sirku. Proto budou vyhrávající pozice odpovídat počtu sirek, které necháváme na stole pro protihráče po našem tahu, od úplného závěru hry 0, 4 a 8.

5.2.4 Hra s n sirkami

Pomůcky: sirky

Pravidla:

Na stole leží n sirek, dva hráči se pravidelně střídají v odebírání jedné, dvou až p sirek v každém tahu. Hráč, který vezme ze stolu poslední sirku, prohrává.

Vítězná strategie:

Stejně jako u hry *Kdo dřív řekne 100?* se i tady můžeme zabývat obecnou verzí hry. Počty sirek, které chceme nechat na stole pro protihráče po našem tahu, odpovídají hodnotám aritmetické posloupnosti s diferencí $p+1$. Od závěru hry se bude jednat o pozice s 1 sirkou na stole, předtím s $p+2$ sirkami na stole, $2p+3$ sirkami na stole a tak dále, dokud se nedostaneme k úplnému začátku hry.

Kdybychom pravidla změnili tak, že by hráč odebírající ze stolu poslední sirku vyhrával, posunuly by se nám počty sirek ve vyhrávajících pozicích na hodnoty $p+1$, $2p+2$ a tak dále.

5.3 Hra NIM

Pomůcky: sirky

Pravidla:

Na stole leží tři hromádky sirek, první obsahuje pět, druhá šest a třetí sedm sirek. Dva hráči se střídají v odebíraní vždy jedné až tří sirek, přičemž sirky smí v jednom tahu odebírat jen z jedné hromádky. Vyhrává hráč, který udělá poslední tah.

Vítězná strategie:

Abychom zjistili, jak se dostat do vyhrávajících pozic, použijeme metodu převodu počtu sirek v hromádkách z desítkové do binární soustavy. Ukážeme si to na úvodních počtech, kdy máme v první hromádce pět, ve druhé šest a ve třetí sedm sirek.

$$5 = 101_2$$
$$6 = 110_2$$
$$7 = 111_2$$

Nyní všechny tři výsledky sečteme, aniž bychom při tom převáděli jednotlivé cifry do vyšších řádů.

$$\begin{array}{c} 101_2 \\ 110_2 \\ 111_2 \\ \hline 100_2 \end{array}$$

Abychom byli ve vyhrávající pozici, potřebujeme, aby součet vycházel 000_2. Máme tři varianty, jak toho v této situaci dosáhnout. První možností je snažit se upravit počet sirek v první hromádce tak, aby tam zbyla jen jedna sirka, neboť pak to odpovídá zápisu 001_2 a celkově platí:

$$\begin{array}{c} 001_2 \\ 110_2 \\ 111_2 \\ \hline 000_2 \end{array}$$

Další variantou je úprava počtu sirek ve druhé hromádce na dvě. Číslo 2 v binární soustavě zapíšeme jako 010_2. Můžeme si ověřit, že součet pak skutečně vychází, jak potřebujeme:

$$\begin{array}{c} 101_2 \\ 010_2 \\ 111_2 \\ \hline 000_2 \end{array}$$

Poslední možností je upravit počet sirek ve třetí hromádce, aby tam zbyly jen tři, neboť $3 = 011_2$. Tím pádem je součet:

$$\begin{array}{c} 101_2 \\ 110_2 \\ 011_2 \\ \hline 000_2 \end{array}$$

Samozřejmě není nutné vítěznou strategii dodržovat od prvního kola hry. Pokud náš protihráč vítěznou strategii nezná, můžeme na ni přistoupit až později v průběhu hry a vypočítat si, které pozice jsou vítězné, až bude na stole méně sirek. Navíc uvedené možnosti umožňují hráči znajícímu vítěznou strategii ve stejné „pozici" hry volit různé postupy. Tím totiž komplikuje druhému hráči, který strategii nezná, její nalezení.

5.4 Piškvorky

Pomůcky: čtverečkovaný papír, tužka

Pravidla:

Oba hráči si zvolí nějakou svou značku (nejčastěji křížek a kolečko). „Hraje se na ploše 7×6 čtverečků. Hráči se střídají v zakreslování své značky do políček, která jsou ještě prázdná; první, komu se podaří vyznačit sérii čtyř stejných značek vodorovně, svisle nebo úhlopříčně, vyhrává" (Angiolino 2000, s. 53).

Vítězná strategie:

Argument o kradení strategie nám říká, že „na omezené i neomezené hrací ploše existuje neprohrávající strategie pro začínajícího hráče“ (Beck 2011, cit. v Wikiwand 2022). Můžeme to dokázat sporem.

Nechť má druhý hráč vítěznou strategii. Bude-li si ji chtít začínající hráč ukrást, v prvním tahu zakreslí svou značku na libovolné pole (tzv. zahozený tah). Potom bude každý další tah odpovídat vyhrávající strategii druhého hráče ve hře, která by proběhla bez úvodního zahozeného tahu. „Pokud hráč strategie určí zahrát do zahozeného tahu, hráč zahraje na libovolné neobsazené pole a tento tah si dále pamatuje jako zahozený“ (Beck 2011, cit. v Wikiwand 2022). Jestliže byla strategie druhého hráče vítězná, musí být vítězná i pozměněná strategie. Ale protože nemohou mít oba hráči vítěznou strategii, jedná se o spor. Dokázali jsme, že začínající hráč má neprohrávající strategii.

5.5 Kruh

Hru *Kruh* si rozdělíme na dvě verze. Ve hře *Kruh I.* budeme hrát se sudým počtem fazolí, ve hře Kruh II. si počet fazolí upravíme tak, aby byl na začátku hry lichý.

5.5.1 Kruh I.

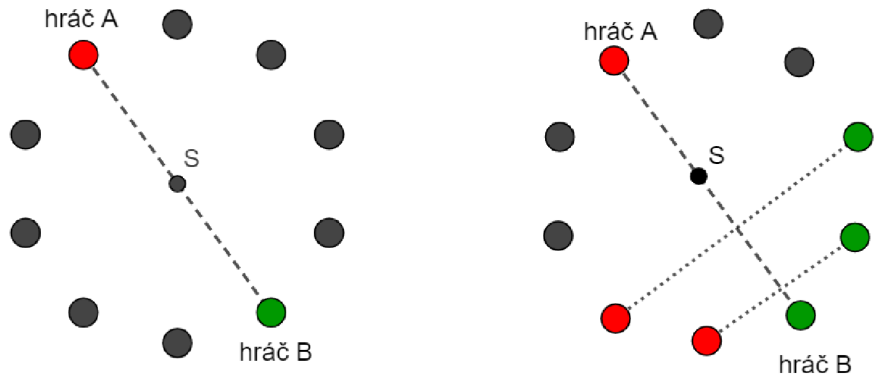
Pomůcky: fazole

Pravidla:

Dva hráči na stole uspořádají deset fazolí po obvodu kruhu. Z něho pak střídavě odebírají jednu nebo dvě sousední fazole, mezi kterými není žádná jiná fazole ani již vzniklá mezera. Hru vyhrává hráč, který odebere ze stolu poslední fazoli.

Vítězná strategie:

V této hře existuje vítězná strategie druhého hráče založená na metodě symetrie. Bude-li druhý hráč kopírovat tahy začínajícího hráče použitím středové nebo osové souměrnosti, zajistí si tím, že na něho v posledním tahu určitě zbude jedna fazole, nebo dvě fazole, které budou ležet vedle sebe, a když je ze stolu odebere, vyhraje. Na obr. 5.4 můžeme vidět tah druhého hráče B (zobrazený zeleně) vlevo v prvním kole hry podle středové souměrnosti, vpravo pak ve druhém kole hry podle osové souměrnosti s využitím osy vzniklé v místě odebraných fazolí v prvním kole.



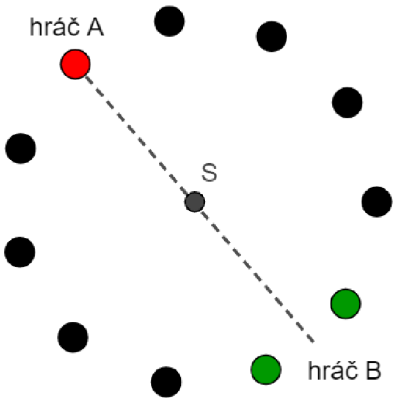
Obrázek 5.4: *Metoda symetrie prostřednictvím využití středové a osové souměrnosti v prvním dvou kolech ve hře Kruh I.*

5.5.2 Kruh II.

Pomůcky: fazole

Pravidla:

Dva hráči na stole uspořádají jedenáct fazolí po obvodu kruhu. Z něho pak střídavě odebírají jednu nebo dvě sousední fazole, mezi kterými není žádná jiná fazole ani již vzniklá mezera. Hru vyhrává hráč, který odebere ze stolu poslední fazoli.



Obrázek 5.5: *Příklad prvního kola hry Kruh II.*

Vítězná strategie:

Stejně jako v první verzi hry i tady může druhý hráč vyhrát, využije-li k tomu středovou nebo osovou souměrnost. Jediný rozdíl oproti předchozí hře je v tom, že druhý hráč by měl v prvním tahu odebrat takový počet fazolí, aby po skončení jeho tahu byl počet fazolí na stole sudý. V následujících tazích už postupuje stejně jako ve hře *Kruh I.*. Příklad této hry v prvním kole vidíme na obr. 5.5.

5.6 Obtahování čtverečků

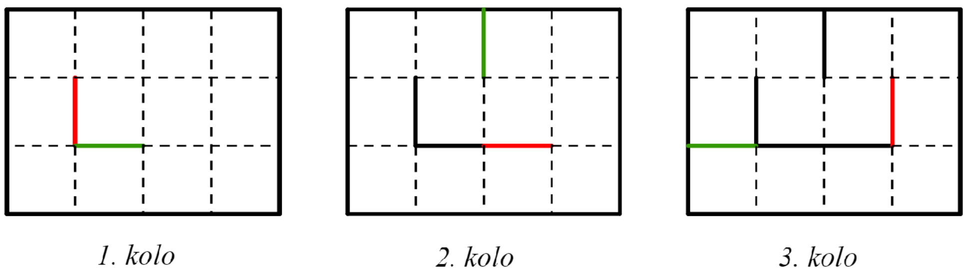
Pomůcky: hrací kartička (obdélník 3 × 4 čtverečky), tužka

Pravidla:

Dva hráči střídavě obtahují tužkou strany vnitřních čtverečků hrací kartičky, vnější strany obdélníku se považují za již obtažené. V jednom tahu může hráč obtáhnout pouze jednu stranu jednoho čtverečku. Obtáhne-li poslední zbývající stranu čtverečku, označí si čtvereček svým symbolem a pokračuje ještě jedním tahem. Hru vyhrává hráč, který obsadí nejvíce čtverečků.

Vítězná strategie:

Tuto hru je možné nejen vyhrát, ale i v ní remizovat, neboť námi zvolené hrací pole obsahuje celkem dvanáct čtverečků, což je sudý počet. Je tedy možné, že každý z hráčů obsadí šest čtverečků. Podívejme se ale na to, jak hru vyhrát a obsadit co nejvyšší počet čtverečků.



Obrázek 5.6: *Ukázka tvorby kanálu ve hře Obtahování čtverečků*

Předem promyšlenými tahy můžeme hrací plochu upravit do podoby tzv. kanálu, příklad jehož tvorby vidíme na obr. 5.6. Tahy začínajícího hráče jsou vyznačeny červeně, tahy druhého hráče zeleně. Druhý hráč se bude pochopitelně snažit, aby nám svými tahy nenahrál a nezískali jsme žádný čtvereček. My můžeme jeho tahy využít a vytvořit kanál, jenž je naznačený na obrázku *3. kola* uzavřením z jedné strany (zelený tah druhého hráče). My následně obsadíme všechny čtverečky, aniž bychom ještě protihráči dali prostor hrát.

5.7 Tři v řadě

Pomůcky: papír, tužka

Pravidla:

Dva hráči si na papír nakreslí patnáct koleček v řadě. Střídají se ve škrtání vždy jednoho kolečka v každém tahu. Vyhrává hráč, který jako první vytvoří tři sousedící přeškrtnutá kolečka bez ohledu na to, kdo přeškrtl dvě předešlá (Boublíková 2021, s. 34).

Vítězná strategie:

Pro začátek se podívejme na to, jak vypadají prohrávající pozice. Přeškrtneme-li kolečko přímo sousedící s již přeškrtnutým kolečkem, nebo kolečko sousedící ob jedno s přeškrtnutým kolečkem, náš protihráč bude moci vytvořit trojici přeškrtnutých koleček, a my tak prohrajeme.

Začínáme-li hrát jako první, proveďme libovolný tah. Záležet pak bude až na našem následujícím tahu, kterým zareagujeme na to, co zahrál protihráč. Měli bychom škrtnout kolečko ležící o tři místa vedle něho, tzn. mezi námi škrtnutým a protihráčem škrtnutým kolečkem zůstanou dvě kolečka prázdná. Po tomto tahu budou existovat ještě dvě možnosti pro škrtnutí koleček, aby se hráč nedostal do prohrávající pozice, neboli aby opět zůstala mezi škrtnutými kolečky dvě prázdná. Protihráč zvolí jednu tuto možnost, my druhou a jemu pak nezbude nic jiného, než škrtnout nějaké kolečko umístěné blíže k již přeškrtnutému, čehož využijeme a vyhrajeme.

Jsme-li druhým hráčem, přeškrtněme nejprve kolečko umístěné o pět míst vedle kolečka, které přeškrtl první hráč. Tak vznikne mezi dvěma přeškrtnutými kolečky mezera o čtyřech prázdných kolečkách. Poté už přistoupíme na strategii popsanou výše a budeme dodržovat pravidlo dvou prázdných koleček mezi těmi škrtnutými. Tímto způsobem jsme využili metodu kradení strategií, a ačkoli jsme nebyli původně začínajícím hráčem, který měl výhodu, podaří se nám i přesto vyhrát.

6 Praktická realizace výběrových šetření

Některé matematické hry jsme vyzkoušeli v praxi. Abychom měli co nejširší statistický soubor, rozhodli jsme se realizovat výběrové šetření ve dvou etapách - se staršími žáky z II. stupně při příležitosti konání projektových dnů a následně i s mladšími žáky převážně z I. stupně v rámci příměstského tábora.

6.1 I. etapa šetření - starší žáci

Do I. etapy výzkumu se zapojili žáci II. stupně ZŠ F. L. Čelakovského ze Strakonic, a to celkem ve čtyřech dnech od 6. do 9. června 2022. Z II. stupně bylo vybráno celkem 48 žáků na základě jejich matematických schopností a dovedností. Žáci přijížděli každý den na Pedagogickou fakultu Jihočeské univerzity, kde jsme pro ně na čtyřech katedrách měli připravený program. Kromě katedry matematiky se na akci podílely ještě katedra biologie, katedra fyziky a techniky a katedra informatiky. Každý den se výběrového šetření zúčastnilo 12 žáků, ostatní zatím byli zapojeni do programu na dalších katedrách. Šetření probíhalo vždy ráno. Začínali jsme hned, jak žáci přijeli na fakultu, tedy přibližně okolo 8:15, a přestávku jsme zahajovali v 9:30. Po ní už následoval jiný program. Celkem jsme se tedy s každou skupinou žáků zabývali hraním matematických her přibližně 75 min.

Protože se budeme v průběhu výzkumného šetření setkávat se situacemi, kdy bude potřeba od sebe odlišit jednotlivé skupiny starších žáků podle toho, který den se skupiny výzkumu zúčastnily, označíme si je písmeny. Výzkumné šetření se skupinou A probíhalo 6. června, se skupinou B 7. června, se skupinou C 8. června a se skupinou D 9. června.

6.1.1 Příprava před výběrovým šetřením starších žáků

Se žáky II. stupně jsem plánovala vyzkoušet všechny tři verze hry *Jedenáct sirek*, obě verze hry *Kruh* a dále hry *Obtahování čtverečků*, *Tři v řadě* a *NIM*, přičemž nejvíce času jsem chtěla věnovat hlavně úvodním hrám.

Zároveň jsem pro žáky připravila dotazník, který obsahoval kolonky pro zvolenou značku dvojice a datum realizace. Dále byla v dotazníku připravena tabulka k vyplnění. Pro každou z her jsem vyčlenila jeden řádek. Do prvního sloupečku žáci vyplňovali počet svých výher v příslušné hře a do druhého sloupečku celkový počet odehraných her bez ohledu na to, kdo danou hru vyhrál. Následovaly otázky, ve kterých si někdy žáci mohli odpověď vybrat, u otevřených otázek byla připravena krátká linka pro vepsání odpovědi.

Nejprve měli žáci odpovědět, zda z dřívějška znali některou hru, nebo jí podobnou. Pokud ano, jakou, a zajímalo mě také, zda si u ní pamatovali vítěznou strategii. Následovaly otázky na konkrétní hry. Vždy měli odpovědět, zda se jim podařilo ve hrách odhalit nějakou vítěznou strategii. Nabídla jsem žákům tři možnosti: *ano, samostatně*, *ano, po nápovědě* a *ne*. U her *Jedenáct sirek* jsem se ještě dotazovala, zda pro žáky byly II. a III. verze hry jednodušší, pokud odhalili vítěznou strategii už v I. verzi hry. Tady jsem nabídla pouze odpovědi *ano* a *ne*. U hry *Obtahování čtverečků* mě zajímalo, zda žáci objevili nějaký výhodný postup. Mohli si opět vybrat z odpovědí *ano* a *ne*. Také měli odpovědět, kolik nejvíce políček se jim podařilo v jedné hře označit. Stejným způsobem jako u her *Jedenáct sirek* a *Kruh* jsem se žáků i u hry *Tři v řadě* tázala, jestli odhalili nějaký výhodný postup, a zase si vybírali jednu z odpovědí *ano, samostatně*, *ano, po nápovědě* a *ne*. U hry *NIM* jsem nepředpokládala, že bychom s žáky měli dostatek času se jí hlouběji zabývat, proto jsem jim k ní položila jen otázku, zda se jim podařilo nějakou výhodnou pozici zaznamenat. Připravila jsem odpovědi *ano* a *ne*. Tuto hru jsme nicméně s žádnou ze skupin hrát nestihli.

Na závěr dotazníku jsem žákům dala trochu více prostoru k odpovědím na otázky, jaké jsou jejich celkové dojmy z matematických her a která hra je zaujala nejvíce.

6.1.2 Průběh výběrového šetření se staršími žáky

Každou příchozí skupinu starších žáků jsem ráno po jejich příchodu poprosila, aby se posadili ve dvojicích naproti sobě celkem do šesti lavic, na kterých už bylo připraveno 11 sirek, 10 fazolí a lístečky s hrací plochou pro hry *Obtahování čtverečků* a *Tři* *v řadě*. Poté jsem žákům krátce vysvětlila téma, kterým se společně budeme zabývat, a princip vyplňování dotazníků. Žáci dostali chvilku na to, aby si ve dvojici vymysleli nějakou značku, kterou použijí, díky čemuž pak můžu dotazníky snáze spárovat.

Jedenáct sirek I.

Jako první jsem žákům představila hru *Jedenáct sirek*. Podrobně jsem vysvětlila zadání a poté dala žákům několik minut na to, aby si hru vyzkoušeli. Po jejich uplynutí jsem se žáků dotázala, zda si někdo ve hře všiml nějaké výhodné pozice, která vede k výhře. Kdykoli se někdo přihlásil, šla jsem k němu a tiše jsme se o tom pobavili, abychom to ještě neprozradili ostatním.

V každé skupině starších žáků byla více než polovina účastníků, kteří zvládli sami odhalit, že když nechají soupeři na stole po svém tahu 5 sirek, vyhrají. Zároveň se vždy objevilo několik špatných dedukcí, nejčastěji žáci tvrdili, že soupeř prohraje vždy, když mu na stole nechají 4 sirky. A v každé skupině zhruba třetina žáků zatím ve hře nic neodhalila.

Žáci, kteří správně odhalili počet 5 sirek na stole pro protihráče, měli tendenci s hrou končit. Já jsem jim však říkala, že ještě neodhalili celou vítěznou strategii, a aby se zkusili nyní zaměřit na to, jak si ve hře zařídit, aby 5 sirek nevyšlo na ně samotné, ale na jejich protihráče. Žákům, kteří předtím špatně vydedukovali počet sirek pro protihráče ve vítězné strategii, jsem radila, aby si to vždy názorně ověřili, tzn. nechali si na stole 4 sirky a ukázali si všechny tři možnosti příštího tahu. Obvykle brzy pochopili, proč se nejedná o vítěznou strategii, a že jejich protivník v této pozici může vyhrát. A nakonec žáky, kteří si zatím ničeho nevšimli, jsem se snažila přivést k nalezení vítězné strategie návodnými radami a otázkami, např. „všímejte si hlavně počtu sirek na stole v předposledním a posledním kole“, „kolik sirek necháváte na stole protihráči po svém tahu?“ a „zkuste si dopředu promýšlet své tahy, vždy máte jen 3 možnosti, co v jednom tahu udělat.“

Konec hraní jsem obvykle vyhlašovala přibližně po 15 minutách. Tou dobou bylo v každé skupině aspoň několik žáků, kteří odhalili kompletní vítěznou strategii. Během hraní se téměř všichni žáci posunuli blíže k nalezení vítězné strategie, takže když jsem se na konci hraní žáků ptala, kdo přišel aspoň na něco, zvedla ruku většina z nich. Poprosila jsem žáky, kteří si myslí, že nějakou vítěznou strategii odhalili, aby se o ni s námi podělili. Většinou správně odpověděli, že vyhrává ten hráč, který nechá v předposledním kole svému protihráči na stole 5 sirek. V některých skupinách rovnou dodali a v jiných jsem se musela doptávat, že 5 sirek pro protihráče si zařídí tak, že mu v předchozím kole nechají na stole 9 sirek. K tomu zvládla bez nápovědy dojít většina úspěšných hráčů, ale někteří si mysleli, že tento počet bude 8. Počty sirek, které žáci říkali, jsem znázorňovala křídou na tabuli, a spolu s ostatními žáky jsme zkoušeli vždy odebírat jednu, dvě, nebo tři sirky, a všímali jsme si, co se následně děje a kdo vyhrává. Tím se princip strategie osvětlil i pro ty, kteří to ve hře předtím sami tak úplně neodhalili.

Na tabuli jsem pak napsala počty sirek, které má ve svých tazích hráč v prohrávající pozici. Ptala jsem se žáků, jaká je mezi nimi souvislost. Nad tím se do té doby zamyslelo jen několik málo žáků, kteří při hraní odhalili strategii velmi brzy a pak se nudili - navedla jsem je tedy k tomu, aby si všímali souvislostí. Většina žáků si toho začala všímat až nyní, kdy byly počty sirek napsané na tabuli. Byla tam tedy čísla 1, 5 a 9. Často žáci říkali, že se jedná o lichá čísla. „To je sice pravda, ale fungovalo by to pro všechna lichá čísla?“ A když si to žáci vyzkoušeli, uvědomili si, že ne. Potom si obvykle už někdo povšiml, že je mezi čísly 9 a 5 a mezi čísly 5 a 1 rozdíl 4. Tím jsme se dostali k aritmetické posloupnosti. Žákům jsem stručně vysvětlila pojem posloupnost a používali jsme ho. Ještě jsem chtěla, aby se žáci zamysleli nad tím, proč jdou hodnoty počtu sirek, které zbývají na hráče v prohrávající pozici, po čtyřech. V každé skupině zvládli vždy aspoň jeden nebo dva žáci odpovědět bez nápovědy, že je to kvůli tomu, že při čtyřech sirkách se stihnou vystřídat v tahu vždy přesně dva hráči. Poté jsme vše krátce shrnuli a vydali jsme se hrát další verzi hry.

Jedenáct sirek II.

Nyní jsem žákům trochu pozměnila zadání původní verze hry, tentokrát směli hráči odebírat v jednom tahu nejvýše dvě sirky. Žáci potřebovali na odhalení jedné pozice z vyhrávající strategie méně času, než tomu bylo u první hry. Někteří měli problém se dopočítat k dalším pozicím z vyhrávající strategie a po pár minutách jim bylo opět potřeba pomoci návodnými radami a otázkami, stejnými jako v první hře. Celkově nám hraní této verze hry zabralo kratší čas.

V této hře téměř všichni žáci odhalili aspoň jednu z prohrávajících pozic, nejčastěji 4 sirky na stole. Po ukončení hraní jsme s žáky společně rozebrali vítěznou strategii. Žáci říkali, na co kdo přišel, a společně zvládli dát dohromady všechny počty sirek odpovídající prohrávajícím pozicím. V některých skupinách to bylo pro žáky snadné, některá tvrzení jsem musela trochu poopravit, resp. dovést žáky k uvědomění si chyb a k opravení se. Otázkou „jaká je souvislost mezi počty sirek, které jsme si tu napsali?“ jsem se žáky snažila přivést k určení rozdílu tří sirek mezi pozicemi. Ve třech skupinách žáci vůbec nepotřebovali návodné otázky a byli schopní vysvětlit strategii sami, především na základě zkušeností z předchozí verze hry.

Jedenáct sirek III.

Opět jsem pozměnila zadání, hráči směli zase odebírat v jednom tahu nejvýše tři sirky jako v první verzi hry, ale nyní vyhrával hráč, který provedl poslední tah. Hraní nám i v tomto případě už nezabralo tolik času, ale přeci jen chvilku trvalo, než si žáci poradili se změnou pravidla vítězství ve hře. Po uplynutí několika minut jsem žákům dávala nápovědy týkající se promýšlení tahů dopředu a kladla jsem důraz na to, aby si žáci uvědomili, že v tomto případě chtějí sami být tím, kdo odebere ze stolu poslední sirku.

Když některé dvojice hráčů odhalily celou nebo alespoň část strategie, ukončila jsem hraní a na tabuli jsme si zase rozkreslili vítěznou strategii. Nechala jsem žáky, aby vyjmenovali počty sirek, které podle nich odpovídají prohrávajícím pozicím, do nichž je ve hře výhodné svého protihráče dostat. Občas někdo řekl špatnou hodnotu, často odpovídající té v první verzi hry. V takovém případě jsem znovu připomněla, že se nám změnila pravidla, kdo vyhrává. Postupovali jsme odzadu. Většina skupin kromě jedné měla tendenci říci poslední počet sirek, který je pro ně výhodné nechat na stole pro protihráče, 4. Dotazovala jsem se žáků, jaký počet sirek zbývá na stole pro protihráče po opravdu posledním tahu vyhrávajícího hráče. Pak už žáci odpovídali, že 0. Postupně se nám tak na tabuli objevila čísla 0, 4 a 8.

Pro žáky už pak bylo většinou snadné vysvětlit souvislost mezi těmito čísly a proč to jsou zrovna tyto hodnoty.

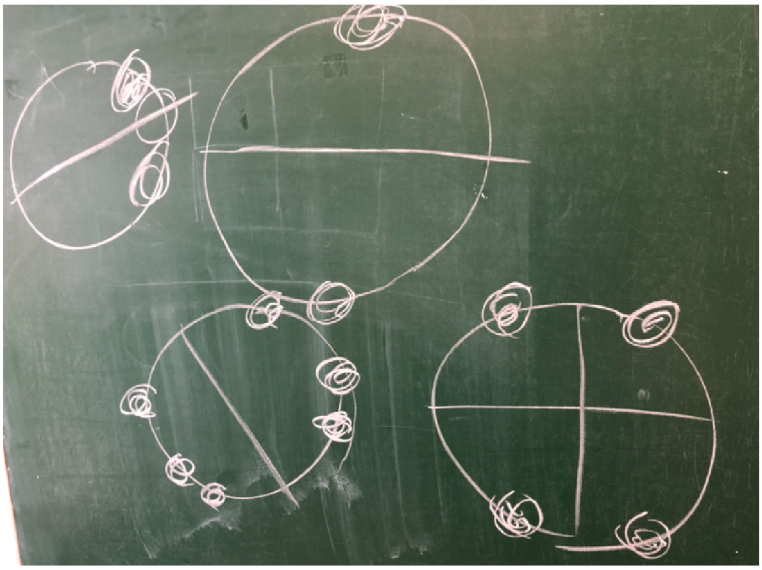
Následně jsme shrnuli všechny tři verze hry *Jedenáct sirek* a poprosila jsem žáky o stručné vyplnění druhé otázky v dotazníku.

Kruh I.

Další typ hry, kterou jsem žákům představila, je hra *Kruh*. Mezi první a druhou verzí dochází jen k malé změně zadání, ale aby se to žákům v dotazníku nepletlo, rozhodla jsem hru opět rozdělit. Pro každou dvojici žáků jsem na stůl připravila deset fazolí rozmístěných po obvodu kruhu. Vysvětlila jsem pravidla, nakreslila na tabuli schémata, jak mohou a jak naopak nesmějí vypadat jednotlivé tahy, a pak se žáci pustili do hraní. Ještě jsem je však upozornila, že v této hře ani tak nejde o počet fazolí jako tomu bylo u předchozích her se sirkami, nýbrž bychom si měli všímat spíše rozmístění fazolí na hrací ploše. Hráči dostali k dispozici i papír k případným poznámkám, aby si mohli znázorňovat některé pozice, na které v průběhu hry narazí a budou se domnívat, že jsou vyhrávající.

Během hraní se často někdo z žáků přihlásil s domněnkou, že na něco přišel. Ve většině případů mi pak ukázal jednu z vyhrávajících pozic. Takového žáka jsem pochválila, ale zároveň jsem mu řekla, že se nejedná o jedinou vyhrávající pozici, a aby jich zkusil najít co nejvíce. Občas se přihlásil i někdo, kdo mi ukázal pozici, která ve skutečnosti vyhrávající nebyla. Pak jsem hráči ukázala nějaký tah, po kterém už nemohl vyhrát, aby si lépe uvědomil svou mýlku.

Po uplynutí zhruba deseti minut jsem hraní ve skupinách starších žáků zastavila a zeptala jsem se, komu se podařilo ve hře odhalit nějaké výhodné pozice a jaké. Poprosila jsem je, aby nám je vždy přišli znázornit na tabuli (obr. 6.1). Načrtli vždy rozložení zbývajících fazolí na stole a s ostatními žáky jsme tyto pozice rozebrali a zkontrolovali, jestli jsou opravdu pro hráče vyhrávající. Když už bylo na tabuli třeba osm náčrtů, zadala jsem žákům, aby mezi nimi zkusili najít souvislost. Několik hráčů opravdu souvislost spatřilo a objevily se odpovědi jako „zbývající fazole jsou v hromádkách přesně napůl“ nebo „zbývající počet fazolí je lichý“, což nebyly přesné odpovědi, ale alespoň se blížily odhalení vítězné strategie. Všem skupinám pak po-mohlo, když jsme si na tabuli načrtli deset fazolí v kruhu a zahráli jsme si společně jednu hru, kdy jsme škrtali fazole, které jsme odebírali. Nechala jsem žáky, aby začínali, a oni si pak téměř ihned povšimli mé strategie. Následně už pro ně nebyl problém ji popsat. Ukázali jsme si, že je v této hře výhodnější být druhým hráčem, ale hrajeme-li s někým, kdo vítěznou strategii nezná, můžeme vyhrát, i když hru začínáme.



Obrázek 6.1: *Tabule, na kterou starší žáci znázorňovali objevené vyhrávající pozice*

Kruh II.

Mezi první a druhou verzí hry *Kruh* dochází jen ke drobné změně, proto stačilo k odhalení vítězné strategie hry *Kruh II.* všem skupinám žáků jen pár minut.

Pozice, které byly podle žáků vyhrávající, jsme si opět znázornili na tabuli, a v každé skupině se našel aspoň jeden žák, který byl schopen samostatně svým spolužákům vysvětlit, jak vypadá vítězná strategie a jak se změnila oproti původní hře. V každé skupině bylo zároveň několik žáků, pro které bylo vysvětlení nesrozumitelné, proto jsem to pak vysvětlila všem ještě jednou a zase jsme si na tabuli předvedli názorný příklad hry s použitím vítězné strategie od samého začátku. Pokud žáci chápali strategii u předchozí verze hry, stačilo jim jen ukázat nutnost se zbavit přebytečné liché fazole, aby mohli svými tahy vytvářet žádoucí souměrné hromádky fazolí.

Žáky jsem poté poprosila, aby zodpověděli v dotazníku otázku č. 3 týkající se obou verzí hry *Kruh*.

Obtahování čtverečků

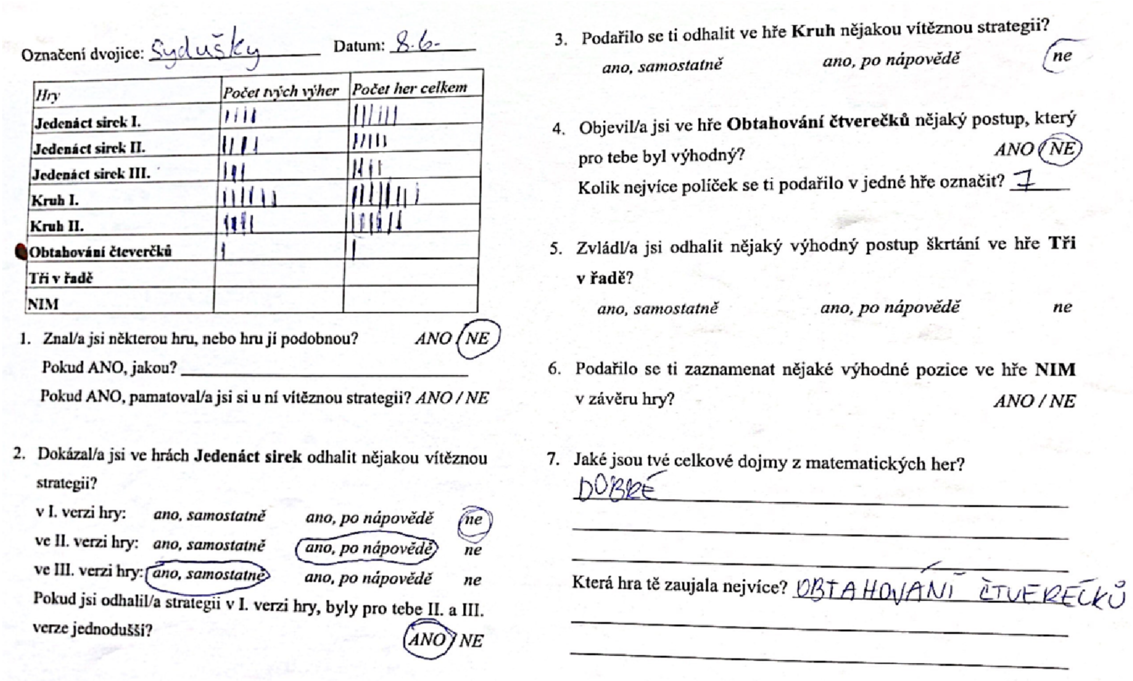
K této hře jsme se dostali jen s prvními třemi skupinami starších žáků, s žáky ze skupiny D už ne. Pro každou dvojici jsem měla k dispozici pět malých tabulek o 3×4 políčkách a pro každého hráče ze dvojic jinak barevný fix. V dotaznících hráči znázornili, kterou barvu používají, a zároveň si zvolili nějaký svůj symbol, kterým označovali svá políčka. Některé dvojice hráčů stihly her více a proto pak používaly tabulky i z rubové strany, kam si samy čtverečky načrtly. Hraní této hry jsme věnovali maximálně pět minut, během nichž nebyly obvykle žádné dotazy.

Vítěznou strategii jsme v této hře prodiskutovali s žáky velmi snadno a rychle. V každé skupině žáků bylo alespoň několik jedinců, kterým se podařilo odhalit strategii používání „kanálu“. To mi jako odpověď stačilo. Dotyční žáci představili tuto strategii svým spolužákům, případně někomu i ukázali tabulku, kde tuto strategii použili. Hráči v dotazníku zodpověděli otázku č. 4 a pak jsem jim představila další hru.

Tři v řadě

Hru *Tři v řadě* jsme si stihli zahrát jen se skupinou B. Dvojice ode mě dostaly lístečky s řadou 15 koleček a stejně barevnými fixami jako v předchozí hře prováděli škrty koleček. Zbývalo nám už málo času, proto jsem žáky nechala si hru zahrát jen párkrát a pak jsem vyhlásila konec. Vítěznou strategii jsme tentokrát nestihli podrobně prodiskutovat, pouze jsem požádala ty, co si mysleli, že na něco přišli, aby se o to s ostatními podělili.

Na závěr jsem žáky poprosila o krátké shrnutí dojmů v dotazníku a žáci dostali velkou přestávku. Výzkum s žáky II. stupně tedy trval s každou ze čtyř skupin přibližně 75 minut. Dotazník jedné žákyně ze skupiny C vidíme na obr. 6.2.



Označení dvojice: Sydušky Datum: 8.6.

Hry	Počet tvých výher	Počet her celkem
Jedenáct sirek I.	IIII	IIIIIII
Jedenáct sirek II.	IIII	IIIII
Jedenáct sirek III.	III	IIII
Kruh I.	IIIIIII	IIIIIIIII
Kruh II.	IIII	IIIIIII
Obtahování čtevrčků	I	I
Tři v řadě		
NIM		

1. Znal/a jsi některou hru, nebo hru jí podobnou? *ANO / NE*
   Pokud ANO, jakou? __________
   Pokud ANO, pamatoval/a jsi si u ní vítěznou strategii? *ANO / NE*

2. Dokázal/a jsi ve hrách **Jedenáct sirek** odhalit nějakou vítěznou strategii?
   v I. verzi hry: *ano, samostatně* *ano, po nápovědě* *ne*
   ve II. verzi hry: *ano, samostatně* *ano, po nápovědě* *ne*
   ve III. verzi hry: *ano, samostatně* *ano, po nápovědě* *ne*
   Pokud jsi odhalil/a strategii v I. verzi hry, byly pro tebe II. a III. verze jednodušší? *ANO / NE*

3. Podařilo se ti odhalit ve hře **Kruh** nějakou vítěznou strategii?
   ano, samostatně *ano, po nápovědě* *ne*

4. Objevil/a jsi ve hře **Obtahování čtverečků** nějaký postup, který pro tebe byl výhodný? *ANO / NE*
   Kolik nejvíce políček se ti podařilo v jedné hře označit? 7

5. Zvládl/a jsi odhalit nějaký výhodný postup škrtání ve hře **Tři v řadě**?
   ano, samostatně *ano, po nápovědě* *ne*

6. Podařilo se ti zaznamenat nějaké výhodné pozice ve hře **NIM** v závěru hry? *ANO / NE*

7. Jaké jsou tvé celkové dojmy z matematických her?
   DOBRÉ

Která hra tě zaujala nejvíce? OBTAHOVÁNÍ ČTVEREČKŮ

Obrázek 6.2: *Ukázka vyplněného dotazníku starší žákyně ze skupiny C*

6.2 II. etapa šetření - mladší žáci

Výzkum s mladšími žáky se konal 15. července 2022 na příměstském táboře S výlety v učebně M-Tesu v Českých Budějovicích, kde jsem pracovala jako hlavní vedoucí skupiny 28 žáků ve věku od 6 do 13 let. Matematické hry jsem zahrnula do dopoledního programu posledního dne tábora a hraní nám trvalo přibližně 60 minut. Věnovali jsme se jen hrám *Jedenáct sirek* a *Kruh*, protože to mladší žáky brzy přestalo bavit a začali být nepozorní. Na táboře převažovali žáci ve věku odpovídajícímu 3. a 4. třídě ZŠ, většina těchto žáků utvořila dvojice mezi sebou. Ostatní pak podle svých preferencí, např. sourozenci společně. Zajímavostí je, že se výzkumu zúčastnila i jedenáctiletá slečna ze zahraničí, která uměla jen velmi špatně česky. Byla na táboře se svou šestiletou českou sestřenicí a dvojici tvořily spolu. Mladší ze slečen však nebyla příliš ochotná se do aktivit zapojovat a občas jsem si povšimla, že si obě dívky pravidla her upravovaly podle sebe. Hru *Kruh II.* už jsem nechala dobrovolnou a zahrála si ji tedy jen část žáků.

6.2.1 Příprava před výběrovým šetřením mladších žáků

Pro mladší žáky jsem nepřipravovala dotazník, ale pouze tabulku, kam stejně jako starší žáci zaznamenávali hráči počet svých výher a počet her celkem. Žáci, kterým se podařilo odhalit vítěznou strategii nebo její velkou část, ode mě vždy dostali pokyn, aby vedle řádku příslušné hry v tabulce vyznačili fajfku. Zároveň jsem žáky poprosila, aby k tabulce napsali svůj věk, a sama jsem pak doplnila i pohlaví.

6.2.2 Průběh výběrového šetření s mladšími žáky

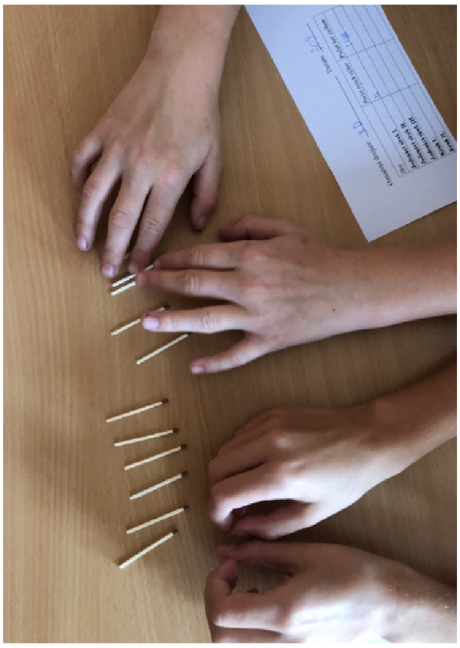
Šetření s mladšími žáky probíhalo v učebně, jejíž velikost a uspořádání lavic v řadách vedle sebe nám bohužel neumožňovaly posadit žáky ve dvojicích naproti sobě a jednotlivé dvojice dále od sebe. Přesto si myslím, že se podařilo docílit toho, aby se dvojice vždy věnovaly jen svým hrám a nerozhlížely se po ostatních hráčích. Rozdala jsem žákům tabulky, poprosila dvojice hráčů o nějaké označení, aby zůstali anonymní, a vysvětlila jsem jim celý koncept hraní her. Kolegyně mi pomohla připravit pro každou dvojici jedenáct sirek. Aby u fazolí v kruhu žáci lépe rozlišovali, kde vznikly mezery, připravila jsem pro každou dvojici jednoduchou herní podložku, na níž byla z jedné strany místa pro deset fazolí a z druhé strany pro jedenáct. Po tomto krátkém úvodu jsme začali hrát.

Jedenáct sirek I.

S mladšími žáky vypadalo hraní této hry podobně jako se staršími. Dávala jsem jim ale více času, aby mělo vícero žáků šanci vítěznou strategii odhalit. Bylo několik žáků, především chlapců, kterým stačilo si hru zahrát jen dvakrát, třikrát, a už se hlásili, že něco odhalili. Občas se někdo zmýlil a pozice, kterou mi ukazoval jako výhodnou, pro něj ve skutečnosti výhodná nebyla, ale vždy jsme si to snadno předvedli na příkladu a hráči strategie zkoumali dál.

Na rozdíl od starších žáků zhruba třetina dvojic mladších žáků neodhalila vůbec nic. S těmi, co něco odhalili, jsme postupovali podobně jako se staršími žáky. Na tabuli jsme si znázornili pozice, které hráči označili za prohrávající, a postupně jsme společně došli k odhalení vítězné strategie. Postupovali jsme pomalu, aby stihli princip, na kterém je vítězná strategie založená, pochopit všichni žáci.

Ukázku průběhu hry se sirkami v jedné dvojici mladších žáků vidíme na obr. 6.3.



Obrázek 6.3: *Průběh hraní se sirkami se skupinou mladších žáků*

Jedenáct sirek II.

Odhalování vítězné strategie hry *Jedenáct sirek II.* na táboře s mladšími žáky nám trvalo o pár minut déle než se staršími, ale žáci si poradili poměrně dobře. V této verzi hry zvládla aspoň jednu z prohrávajících pozic odhalit více než polovina hráčů, což považuji za úspěch.

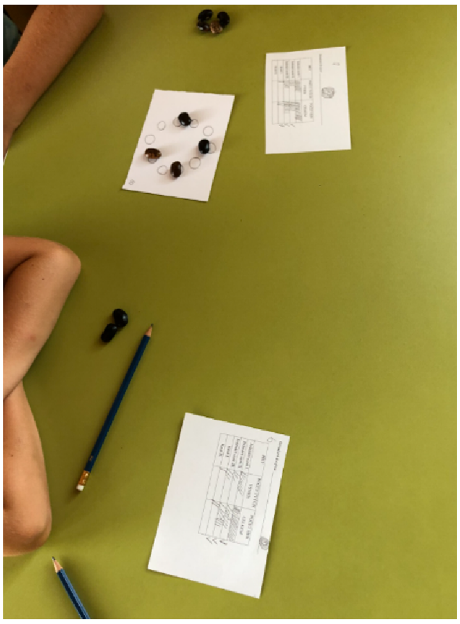
Jedenáct sirek III.

Tato verze hry byla pro mladší žáky trochu obtížnější než předchozí a úspěšnost odhalování vítězných strategií opět o něco málo poklesla. Stejně jako u starších žáků i tady bylo potřeba několikrát zopakovat, že se nám změnila pravidla. Žáky, kteří byli blízko, jsem se snažila k odhalení strategie navnadit otázkami jako „kolik sirek zbývá protihráči na stole po tvém vítězství a kolik bych jich pro protihráče mělo na stole zůstávat v předposledním kole hry?“. Nakonec jsme společně strategii rozebrali na tabuli, dvě dvojice hráčů odhalily kompletní strategie, a tak jsem je nechala, aby je ostatním vysvětlili sami a jen jsem žáky občas doplnila. Závěrem jsme si shrnuli obecnou strategii pro tento typ her.

Kruh I.

Někteří žáci na táboře měli problém pochopit, že v této hře existuje vyhrávajících pozic více. Několikrát jsem musela zdůrazňovat, ať pokračují v hledání co nejvíce takových pozic, které jsou pro ně výhodné, neboť několik žáků mělo tendenci v hraní už nepokračovat, když jednu z vyhrávajících pozic odhalili.

Dala jsem jim o něco více času než starším žákům a pak jsme si společně hru rozebrali stejným způsobem jako se staršími žáky. Žáci chodili na tabuli načrtávat jednotlivé vyhrávající pozice a všichni se mezi nimi snažili najít souvislost. Chybovalo se zde o trochu více, než tomu bylo u starších žáků, asi tři náčrtky byly totiž sporné a nepředstavovaly vyhrávající pozice. Žáci měli nějaké domněnky, ale nikdo je nedokázal zcela přesně formulovat. Několik hráčů nicméně vědělo, jak hrát, proto jsem jednu takovou hráčku poprosila, aby si zahrála na tabuli s někým, kdo strategii neodhalil, a předvedla nám ji. Zopakovali jsme to ještě u jedné hry, aby vítěznou strategii vypozorovali všichni.

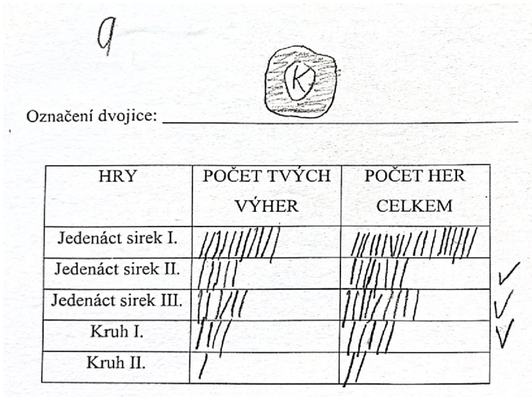


Obrázek 6.4: *Ukázka hraní s fazolemi ve skupině mladších žáků*

Na to, jak vypadalo hraní s fazolemi ve dvojicích mladších žáků, se můžeme podívat na obr. 6.4.

Kruh II.

Pro mladší žáky na táboře byla účast na této hře dobrovolná, zkusilo si ji šest dvojic z celkových čtrnácti. Když jsem přecházela po učebně mezi dvojicemi a pozorovala jednotlivé hry, několik hráčů používalo vyhrávající strategii, aniž by se přihlásili, že ji odhalili. Ukázalo se, že někomu se zdálo být pravidlo změny počtu fazolí na sudé číslo tak samozřejmé, že si nemysleli, že je to jediný rozdíl oproti první verzi hry. Se zbývajícími žáky jsme opět probrali vítězné strategie, tentokrát už to stačilo velmi krátce, a se skupinou mladších žáků na táboře tím výzkumné šetření skončilo. Ukázku vyplněného dotazníku od jednoho žáka vidíme na obr. 6.5. Číslo 9 představuje hráčův věk a fajfky vedle některých řádků znamenají, že žák odhalil u těchto her vítěznou strategii.


9

K

Označení dvojice:

HRY	POČET TVÝCH VÝHER	POČET HER CELKEM
Jedenáct sirek I.		
Jedenáct sirek II.		
Jedenáct sirek III.		
Kruh I.		
Kruh II.		

Obrázek 6.5: *Ukázka vyplněného dotazníku mladšího žáka*

6.3 Vyhodnocení výběrových šetření

Výběrových šetření hraní matematických her se zúčastnilo celkem 76 žáků ve věku od 6 do 15 let, z nichž bylo 36 dívek a 40 chlapců. Přesný počet dívek a chlapců mezi mladšími i staršími žáky je uvedený v následující tabulce.

Pohlaví hráčů	**Mladší žáci**	**Starší žáci**	**Žáci celkem**
Dívky	11	25	36
Chlapci	17	23	40

U starších žáků jsem si nevedla statistiky o věku, mezi mladšími žáky převažovali devítiletí (11 žáků), dále šestiletí a sedmiletí (po 4 žácích), osmiletí (3 žáci) a nakonec desetiletí, jedenáctiletí a třináctiletí (po 2 žácích), jak znázorňuje tabulka.

Mladší žáci	**6 let**	**7 let**	**8 let**	**9 let**	**10 let**	**11 let**	**12 let**	**13 let**
Dívky	2	1	0	6	0	1	0	1
Chlapci	2	3	3	5	2	1	0	1
Žáci celkem	4	4	3	11	2	2	0	2

Nyní se podívejme na průměrné počty odehraných her mezi dvojicemi hráčů, které uvádíme v následující tabulce. Ve sloupcích A, B, C a D jsou zaznamenány průměrné počty odehraných her mezi staršími žáky v jednotlivých dnech, následuje průměrný počet odehraných her za všechny skupiny starších žáků, za mladší žáky a za všechny žáky dohromady. Z tabulky vyplývá, že jsme s žáky nejvíce času průměrně věnovali hře *Jedenáct sirek I.* a nejméně času pak hrám *Kruh II.* a *Jedenáct sirek II.* Těmito hrami jsme se tolik zabývat nemuseli, protože se jedná jen o mírně upravené verze předchozích her, a žákům šlo odhalování strategií rychleji. Zároveň je v tabulce i dobře vidět, se kterými skupinami žáků jsme kterou hru nestihli. Zaměříme-li se jen na sloupeček D, vidíme, že ve hře *Jedenáct sirek* odehráli více kol než ostatní skupiny. Důsledkem toho jsme pak s dotyčnou skupinou starších žáků nestihli ani hru *Obtahování čtverečků*, jíž jsme se s ostatními staršími žáky v předchozích dnech věnovat stačili.

Průměrný počet her	***A***	***B***	***C***	***D***	**Starší ž.**	**Mladší ž.**	**Ž. celkem**
Jedenáct sirek I.	9	12	10	17	12	12	12
Jedenáct sirek II.	5	5	5	5	5	9	6
Jedenáct sirek III.	8	6	4	6	6	9	6
Kruh I.	14	12	8	8	10	7	10
Kruh II.	6	5	6	3	5	3	5
Obtahování čtverečků	4	6	2	-	-	-	-
Tři v řadě	-	4	-	-	-	-	-

Nyní se podíváme na úspěšnost žáků v jednotlivých hrách.

6.3.1 Jedenáct sirek

Hrám *Jedenáct sirek* jsme věnovali nejvíce času a vítězné strategie jsme s každou skupinou žáků rozebírali nejpodrobněji.

Zaměřme se nyní na to, jaká je souvislost mezi průměrnými počty žáky odehraných her všech tří verzí *Jedenácti sirek* a mezi jejich úspěšností v odhalování strategií. Porovnáním následujících tabulek zjistíme, která skupina žáků byla nejúspěšnější a která naopak nejméně úspěšná. Vycházíme z odpovědí, jaké uvedli žáci do dotazníků. Za úspěšné starší žáky považujeme ty, kteří zaškrtli možnosti, že zvládli vítězné strategie odhalit samostatně, nebo s nápovědou. Úspěšnými mladšími žáky jsou myšleni ti, kterým jsem dovolila si v dotazníku u příslušných her znázornit symbol fajfky, a to vždy poté, co jsem si ověřila, že skutečně odhalili vítěznou strategii.

Skupina A:

	Průměrný počet her	**Odhalení strategie**
Jedenáct sirek I.	9	92%
Jedenáct sirek II.	5	92%
Jedenáct sirek III.	8	83%

Skupina B:

	Průměrný počet her	**Odhalení strategie**
Jedenáct sirek I.	12	100%
Jedenáct sirek II.	5	100%
Jedenáct sirek III.	6	100%

Skupina C:

	Průměrný počet her	**Odhalení strategie**
Jedenáct sirek I.	10	58%
Jedenáct sirek II.	5	58%
Jedenáct sirek III.	4	83%

Skupina D:

	Průměrný počet her	**Odhalení strategie**
Jedenáct sirek I.	17	100%
Jedenáct sirek II.	5	100%
Jedenáct sirek III.	6	92%

Mladší žáci:

	Průměrný počet her	**Odhalení strategie**
Jedenáct sirek I.	12	43%
Jedenáct sirek II.	9	57%
Jedenáct sirek III.	9	54%

V hledání vítězných strategií všech tří verzí her byla podle předchozích tabulek nejúspěšnější skupina B, neboť všichni žáci z této skupiny v dotaznících u her se sirkami zaškrtli odpovědi, že odhalili vítěznou strategii, a to ať samostatně, nebo s nápovědou. Nejméně úspěšná byla skupina mladších žáků, u nichž se úspěšnost pohybovala v I. verzi hry pod 50%, v dalších verzích pak už nad hranicí 50%. Ze starších žáků byla nejméně úspěšná skupina C, jejíž úspěšnost se v I. a II. verzi hry pohybovala také nad hranicí 50%, v dalších verzích hry pak už dosáhli průměrné úspěšnosti 83%. Připisujeme to faktu, že v této skupině byly dvě žákyně, které odhalily strategie II. a III. verze hry ještě dříve, než většina jejich spolužáků stačila vůbec dohrát svou první hru. Vzhledem k tomu, že se svou úspěšností tyto žákyně netajily, ale daly ji hlasitě najevo, je možné, že ostatní žáci pak byli ve svém sebehodnocení vedle svých úspěšných spolužaček sebekritičtější.

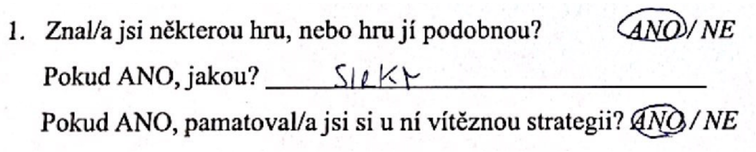
Podíváme-li se na souvislost mezi průměrným počtem odehraných her každé skupiny v *Jedenácti sirkách* a mezi úspěšným nalezením vítězných strategií, můžeme říci, že čím podrobněji se hráči věnovali I. verzi hry a čím častěji si ji zkusili zahrát, tím rychleji pak objevili vítěznou strategii i ve II. verzi hry, která se od původní lišila jen drobnou úpravou pravidel. To usuzujeme především z výsledků skupin starších žáků B a D, kteří si I. verzi hry zahráli průměrně vícekrát, a na odhalení strategie II. verze hry jim stačilo průměrně jen 5 her. Ve skupinách A. a C zůstala úspěšnost hráčů stejná a ve skupině mladších žáků se zvýšila. Všem žákům stačilo II. verzi hry věnovat méně času.

Starších žáků jsem se v dotazníku ptala, zda už znali hru *Jedenáct sirek* nebo jí podobnou. Záznamy o tom, kolik žáků takovou hru znalo a kolik z nich si u této hry pamatovalo princip, na kterém je postavena vítězná strategie, jsou uvedené v následující tabulce. Každý den byl přítomný aspoň jeden žák, který hru už znal. Většinou si takový žák i pamatoval, jak funguje vítězná strategie. Když jsem se žáků dotazovala při výběrovém šetření, jedna slečna odvětila, že už hrála tutéž hru se stejnými pravidly jako v I. verzi, kdy ale bylo na stole na začátku sirek třináct. I tyto verze her jsem chtěla, aby žáci započítali do odpovědí *ano*. Ukázku jedné z odpovědí, konkrétně z dotazníku žáka ze skupiny A, vidíme na obr. 6.6.

	A	***B***	***C***	***D***
Počet hráčů, kteří hru znali	2	1	2	1
Počet hráčů, kteří si pamatovali vítěznou strategii	2	1	1	0

Jedenáct sirek I.

Tuto hru si zahrálo všech 76 žáků, kteří se účastnili výběrového šetření. Každá dvojice hráčů si ji zahrála průměrně dvanáctkrát. V tabulce jsou pro každou skupinu žáků zaznamenané relativní počty výher úspěšnějších hráčů z každé dvojice. Logicky


1. Znal/a jsi některou hru, nebo hru jí podobnou? ANO / NE

Pokud ANO, jakou? SIRKY

Pokud ANO, pamatoval/a jsi si u ní vítěznou strategii? ANO / NE

Obrázek 6.6: *Ukázka odpovědi z dotazníku žáka ze skupiny A, který hru se sirkami už znal*

se hodnoty pohybují v rozpětí 50% až 100%, neboť kdyby byly nižší, hráč by nemohl být považován za úspěšnějšího. Hodnota 50% odpovídá situaci, kdy hráči ve dvojici vyhráli stejný počet her. Hodnota 100% pak odpovídá situaci, kdy jeden hráč vyhrál nad druhým ve všech odehraných hrách. Vidíme, že se úspěšnost hráčů pohybovala přibližně okolo 60%. Takový výsledek jsme očekávali, neboť většinou ve dvojicích byl jeden z hráčů úspěšnější, jen málokdy byly výsledky dvojic vyrovnané. Nejblíže vyrovnanému stavu byla skupina mladších žáků (59%), nejvyšších hodnot dosahovala skupina C (66%).

Zároveň si v tabulce můžeme povšimnout, že jen v jedné dvojici hráčů, konkrétně ze skupiny D, se podařilo jednomu z nich vyhrát každou hru *Jedenáct sirek I.*, kterou s protihráčem hráli. Odehráli mezi sebou ovšem jen čtyři hry, takže tomu nebudeme přikládat větší význam. Tři dvojice hráčů si spolu zahrály jen čtyři hry a jedna dvojice hráčů ze skupiny D. si zahrála hru třicet čtyřikrát, zdaleka nejvíce ze všech.

A	***B***	***C***	***D***	**Mladší žáci**
50%	50%	50%	53%	50%
54%	54%	60%	55%	50%
60%	58%	67%	55%	53%
67%	60%	71%	62%	55%
71%	68%	75%	63%	55%
80%	78%	75%	100%	57%
-	-	-	-	57%
-	-	-	-	58%
-	-	-	-	63%
-	-	-	-	63%
-	-	-	-	63%
-	-	-	-	67%
-	-	-	-	67%
-	-	-	-	69%
prům. 64%	**prům. 61%**	**prům. 66%**	**prům. 65%**	**prům. 59%**

Starších žáků jsem se dotazovala, zda se jim podařilo najít ve hře *Jedenáct sirek I.* vítěznou strategii, a pokud ano, zda ji dokázali najít samostatně, či s nápovědou. Jejich odpovědi jsou zaznamenané v následující tabulce. Vidíme, že nejkritičtější k sobě byli žáci ze skupiny C, naopak všichni žáci ze skupiny D odpověděli, že strategii našli samostatně. K tomuto tvrzení přistupujeme s rezervou, podle mého názoru bylo v této skupině hned několik žáků, kteří by spíše měli odpovědět, že našli vítěznou strategii s nápovědou, nicméně je pravda, že jsme hře věnovali více času než s předchozími skupinami, a tito žáci tak stihli do toho, jak hra funguje, proniknout hlouběji.

	A	***B***	***C***	***D***
Ano, samostatně	5	8	7	12
Ano, po nápovědě	6	4	0	0
Ne	1	0	5	0

Mladších žáků jsem se tázala pouze na to, zda strategii odhalili (ať už sami, nebo s nápovědou, zde jsem to nerozlišovala), a pokud ano, udělali vedle tabulky fajfku. Takto odpověděla necelá polovina mladších žáků, dvanáct z dvaceti osmi, jak dokládá i tabulka. Zde si myslím, že k sobě byli možná někteří zbytečně kritičtí, protože alespoň na jednu či dvě vyhrávající pozice přišla podle mého pozorování většina žáků. Zřejmě ale odpovídali kladně ti, kdo viděli mezi jednotlivými pozicemi souvislosti, což už většina žáků nebyla.

	Mladší žáci
Ano	12
Ne	16

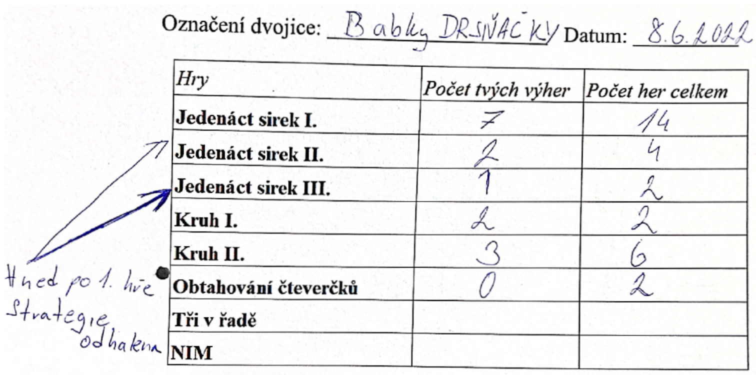
Jedenáct sirek II.

I hraní této hry se zúčastnili všichni žáci. Průměrně si ji všechny skupiny zahrály pouze šestkrát, zatímco I. verzi dvanáctkrát. Všem skupinám starších žáků stačilo pro odhalení vítězné strategii průměrně pět her, mladší žáci hru hráli devětkrát, než jsme se dostali k diskuzi o používaných strategiích. Hře bylo věnováno méně času než předchozím *Jedenácti sirkám I.* především proto, že se pravidla změnila jen nepatrně a pořád platilo, že hráč s posledním tahem prohrává, od čehož se odvíjí odhalení celé vítězné strategie.

V tabulce níže vidíme opět relativní počty výher z pohledu úspěšnějších hráčů. Úspěšnost hráčů se v této verzi hry pohybovala mezi 60% až 70%, což jsou podobné hodnoty jako v předchozí hře. Nejvyšší rozdíl v úspěšnosti hráčů ve dvojicích byl ve skupině D (69%), zatímco nejnižší rozdíl tentokrát nebyl u mladších žáků, ale u žáků ze skupiny B (61%). Stejný výsledek měla tato skupina žáků i v předchozí verzi hry.

A	***B***	***C***	***D***	**Mladší žáci**
50%	50%	50%	50%	50%
50%	50%	50%	50%	50%
57%	50%	50%	60%	53%
67%	60%	67%	75%	54%
80%	78%	70%	80%	55%
100%	80%	80%	100%	58%
-	-	-	-	60%
-	-	-	-	63%
-	-	-	-	67%
-	-	-	-	67%
-	-	-	-	75%
-	-	-	-	75%
-	-	-	-	83%
-	-	-	-	88%
prům. 67%	**prům. 61%**	**prům. 61%**	**prům. 69%**	**prům. 64%**

Ve II. verzi hry *Jedenáct sirek* byli starší žáci, co se týče odhalování vítězné strategie, úspěšnější než v té předchozí. Plyne to z následující tabulky, která udává, kolik starších žáků v jednotlivých dnech šetření dokázalo strategii ve hře *Jedenáct sirek II.* najít samostatně, kolik s nápovědou a kolik žáků vítěznou strategii nenašlo. Porovnáme-li ji s výše uvedenou tabulkou vztahující se k I. verzi hry, vidíme, že ve všech čtyřech skupinách starších žáků došlo k navýšení úspěšnosti v hledání strategií. Ve skupině A se objevil jeden žák, který zvládl strategii v I. verzi hry objevit s nápovědou a v této verzi už samostatně, odpovědi ostatních zůstaly stejné. Mezi žáky ze skupiny B se objevili hned dva takoví jedinci, kteří se v tabulce pomyslně přesunuli o tentýž řádek výše a ve skupině C došlo k asi největšímu zlepšení, neboť z původních pěti žáků, kteří neodhalili vítěznou strategii v I. verzi hry, jsou nyní už jen dva takoví. Dvěma žákům se podařilo strategii nalézt s nápovědou a samostatných úspěšných řešitelů bylo nyní osm. V této skupině se zároveň objevily dvě žákyně (ze stejné dvojice), které odhalily v této a ještě následující verzi hry



Označení dvojice: Babky DRSŇÁCKY Datum: 8.6.2022

Hry	Počet tvých výher	Počet her celkem
Jedenáct sirek I.	7	14
Jedenáct sirek II.	2	4
Jedenáct sirek III.	1	2
Kruh I.	2	2
Kruh II.	3	6
Obtahování čteverčků	0	2
Tři v řadě		
NIM		

Hned po 1. hře strategie odhalena

Obrázek 6.7: *Odhalení vítězné strategie her Jedenáct sirek II. a Jedenáct sirek III. starší žákyní ze skupiny C hned po prvním kole hry*

Jedenáct sirek strategii ihned po zahrání jedné hry. Obě žákyně jsem poprosila, aby mi to zapsaly do dotazníku. Ukázku z dotazníku jedné z dotyčných žákyň můžeme vidět na obr. 6.7. Skupina *D* zůstává 100% úspěšnou, ačkoli jak jsem již uváděla u předchozí verze hry, žáci této skupiny podle mého názoru při vyplňování dotazníku své prokázané schopnosti trochu nadsadili.

	A	***B***	***C***	***D***
Ano, samostatně	6	10	8	12
Ano, po nápovědě	5	2	2	0
Ne	1	0	2	0

Úspěšnost v nalezení vítězné strategie se oproti předchozí hře zvýšila i u mladších žáků, jak můžeme vidět v odpovídající níže uvedené tabulce. Oproti předchozí verzi hry už v tomto případě vítěznou strategii odhalila více než polovina žáků. Čtyři žáci, kteří byli v první verzi hry v pokusu o nalezení strategie neúspěšní, tentokrát uspěli, a celkově tak strategii odhalilo šestnáct z dvaceti osmi mladších žáků.

	Mladší žáci
Ano	16
Ne	12

Jedenáct sirek III.

Starší žáci si tuto verzi hry zahráli průměrně šestkrát, zatímco mladší průměrně devětkrát. Vítěznou strategii odhalilo 83% starších žáků ze skupiny A., 100% ze skupiny B., 83% ze skupiny C., 92% ze skupiny D a 54% mladších žáků. Jedná se tedy o horší výsledky, než jaké byly zaznamenány u verze *Jedenáct sirek II.* Mírné zhoršení úspěšnosti v odhalování strategie můžeme připsat tomu, že se tato verze hry od předchozích dvou lišila změnou zadání, který hráč vyhrává, což žáci při hledání svých herních strategií často nebrali v potaz.

Relativní počty výher úspěšnějších hráčů v této verzi hry vidíme v následující tabulce. Tentokrát se úspěšnost hráčů vyšplhala nejvýše na 68% ve skupině C a nejnižší byla s 59% ve skupině A. To nás nijak nepřekvapilo, jedná se o podobné hodnoty jako v předchozích dvou verzích hry.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{C}$	$\boldsymbol{D}$	**Mladší žáci**
50%	50%	50%	60%	50%
55%	56%	50%	60%	50%
57%	57%	60%	67%	50%
57%	60%	71%	67%	53%
63%	60%	75%	67%	58%
75%	100%	100%	71%	58%
-	-	-	-	60%
-	-	-	-	67%
-	-	-	-	67%
-	-	-	-	67%
-	-	-	-	67%
-	-	-	-	75%
-	-	-	-	86%
-	-	-	-	100%
prům. 59%	**prům. 64%**	**prům. 68%**	**prům. 65%**	**prům. 65%**

Tabulka níže nám udává, kolik starších žáků odhalilo výherní strategii v Jedenácti sirkách III. samostatně, kolik po nápovědě a kolik ji neodhalilo. Nejúspěšnější byla skupina žáků B, kde vítěznou strategii odhalili všichni, z toho jedenáct hráčů samostatně a jeden po nápovědě. Naopak nejméně úspěšná byla pondělní skupina A, z níž vítěznou strategii samostatně odhalila polovina žáků (šest hráčů), po nápovědě čtyři hráči a vůbec ji neodhalili dva hráči. Vycházíme z dat, která hráči uvedli v dotaznících.

	A	***B***	***C***	***D***
Ano, samostatně	6	11	9	7
Ano, po nápovědě	4	1	1	4
Ne	2	0	2	1

Z mladších žáků odhalilo vítěznou strategii patnáct z nich, třináct ji neodhalilo. V předchozí verzi hry bylo úspěšných šestnáct hráčů, můžeme tedy říci, že jeden z nich nyní v odhalení vítězné strategie neuspěl.

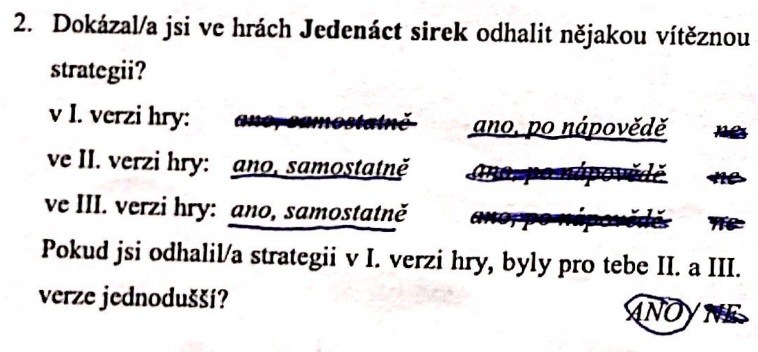
	Mladší žáci
Ano	15
Ne	13

Shrnutí her *Jedenáct sirek*

Jak již bylo řečeno výše, všechny skupiny žáků si zahrály vícekrát hru *Jedenáct sirek I.* než hry *Jedenáct sirek II.* a *III.*. Tím, že měli žáci dostatek času si první verzi hry vyzkoušet, snáze pak odhalovali vítězné strategie i u dalších verzí, které považovaly za snazší skupiny starších žáků A a B, přičemž u žáků ze skupin C a D dopadla anketa, zda byly tyto verze hry jednodušší, nerozhodně.

	A	***B***	***C***	***D***
Ano	8	11	6	6
Ne	4	1	6	6

Ukázku, jak odpovídala jedna ze starších žákyň na otázky vztahující se ke hrám *Jedenáct sirek*, vidíme na obr. 6.8.



2. Dokázal/a jsi ve hrách **Jedenáct sirek** odhalit nějakou vítěznou strategii?

v I. verzi hry: ~~ano, samostatně~~ ano, po nápovědě ~~ne~~

ve II. verzi hry: ano, samostatně ~~ano, po nápovědě~~ ~~ne~~

ve III. verzi hry: ano, samostatně ~~ano, po nápovědě~~ ~~ne~~

Pokud jsi odhalil/a strategii v I. verzi hry, byly pro tebe II. a III. verze jednodušší? ANO / ~~NE~~

Obrázek 6.8: *Ukázka odpovědi z dotazníku žákyně ze skupiny B na otázky ohledně her Jedenáct sirek*

6.3.2 Kruh

Hru *Kruh* si opět vyzkoušeli starší i mladší žáci. Nejvíce času jejich hraním strávily první dvě skupiny starších žáků. Někteří mladší žáci už měli potíže s udržením pozornosti, proto si několik dvojic zahrálo jen první verzi hry.

Kruh I.

Hra *Kruh I.* je poslední hrou, kterou si zahrálo všech 76 žáků účastnících se výzkumu. V tabulce jsou opět pro každou skupinu žáků uvedeny relativní počty výher úspěšnějších hráčů z celkového počtu odehraných her příslušných dvojic. Úspěšnost hráčů se pohybovala mezi 61% až 82%, což jsou vyšší hodnoty, než jakých dosáhli úspěšní hráči ve hrách *Jedenáct sirek*. Nižší hodnoty znamenají, že byli hráči ve dvojicích vyrovnanější, naopak vyšší hodnota vypovídá o tom, že ve dvojicích byl značný nepoměr mezi úspěšností hráčů. Ve skupině C byl průměrný výsledek u starších žáků 82%. Když se podíváme na příslušný sloupeček, vidíme, že mezi třemi dvojicemi v tomto dni ve všech hrách *Kruh I.* zvítězil jeden hráč. Protože jsem žáky vedla k tomu, aby se pravidelně střídali v tom, kdo odebírá fazole ze stolu jako první, můžeme z těchto výsledků vyvodit závěr, že ve skupině C byli tři hráči, kteří dokonale prohlédli vítěznou strategii a dařilo se jim nad svými protihráči vítězit bez ohledu na to, kdo ve hře začínal.

A	***B***	***C***	***D***	**Mladší žáci**
52%	50%	50%	50%	50%
56%	54%	67%	57%	50%
60%	55%	75%	57%	57%
63%	60%	100%	57%	63%
68%	70%	100%	67%	63%
79%	100%	100%	75%	63%
-	-	-	-	64%
-	-	-	-	67%
-	-	-	-	77%
-	-	-	-	80%
-	-	-	-	100%
-	-	-	-	100%
-	-	-	-	100%
-	-	-	-	100%
prům. 63%	**prům. 65%**	**prům. 82%**	**prům. 61%**	**prům. 72%**

Kruh II.

Tuto hru už hrálo jen 60 žáků. Vyrovnal se tím počet dvojic hráčů ve starších skupinách a mladší skupině. Tentokrát nebylo hře věnováno tolik času jako její předchozí verzi, nebylo to potřeba. Vítězná strategie u této hry je totiž totožná s předchozí, žáci si pouze museli uvědomit, že v jednom tahu bylo nutné upravit počet odebíraných fazolí tak, aby zbýval na stole sudý počet namísto lichého. Jak můžeme vidět v následující tabulce, úspěšnost se tady pohybovala od 67% do 74%, úspěšnější hráči tedy průměrně vyhráli v necelých třech čtvrtinách odehraných her.

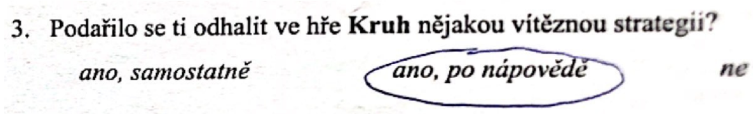
A	*B*	*C*	*D*	**Mladší žáci**
57%	50%	50%	50%	50%
57%	50%	50%	57%	50%
60%	50%	50%	60%	67%
63%	60%	60%	75%	67%
63%	100%	100%	100%	80%
67%	68%	72%	74%	69%
prům. 63%	**prům. 65%**	**prům. 82%**	**prům. 61%**	**prům. 72%**

Shrnutí her *Kruh*

Starším žákům se podařilo najít vítěznou strategii samostatně nejvíce ve skupině A, kde bylo takových hráčů devět, dva hráči odhalili vítěznou strategii s nápovědou a jen jeden ji nenašel. I skupině B se dařilo, zde našlo vítěznou strategii bez nápovědy osm žáků, s nápovědou tři a nenašel ji opět jen jeden hráč. Mezi skupinami C a D už bylo úspěšných hráčů, kteří nalezli strategii bez nápovědy, méně. V oba tyto dny byli neúspěšní čtyři hráči, tedy vždy třetina skupiny. To dokládá i tabulka níže.

	A	*B*	*C*	*D*
Ano, samostatně	9	8	5	6
Ano, po nápovědě	2	3	3	2
Ne	1	1	4	4

Ukázku toho, jak hráči odpovídali na otázku ohledně úspěšnosti v odhalení vítězné strategie ve hře *Kruh*, vidíme na obr. 6.9.


3. Podařilo se ti odhalit ve hře **Kruh** nějakou vítěznou strategii?

ano, samostatně *ano, po nápovědě* *ne*

Obrázek 6.9: *Ukázka odpovědi žáka ze skupiny B na otázku ohledně odhalení vítězné strategie ve hře Kruh*

6.3.3 Obtahování čtverečků

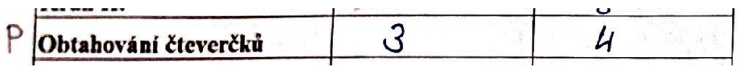
Další hru už si zkoušely zahrát jen tři skupiny starších žáků. Neměli jsme čas se hře věnovat delší dobu. Skupina A si hru zahrála třikrát až čtyřikrát, ve skupině B jedna dvojice dokonce osmkrát a skupina C nejvýše třikrát. V tabulce máme u každé skupiny žáků celkem tři sloupečky – první je pro počet výher úspěšnějších hráčů, druhý pro počet remíz a třetí pro celkový počet odehraných her ve dvojici. Nejvíce se dařilo remizovat skupinám A a B, naopak ve skupině C byla zaznamenána jediná remíza, ovšem zřejmě proto, že tato skupina celkově odehrála hru *Obtahování čtverečků* nejméněkrát.

A			***B***			***C***		
výher	remíz	celkem her	výher	remíz	celkem her	výher	remíz	celkem her
2	0	3	2	0	3	1	0	1
2	0	4	3	1	5	1	0	2
2	0	4	2	1	5	2	0	2
2	1	4	2	2	5	2	0	3
2	1	4	5	0	7	2	0	3
2	1	4	6	0	8	2	1	3

I u této hry žáci v dotaznících uváděli, jak byli úspěšní v odhalování vítězné strategie, kterou zvládlo podle tabulky odhalit ve skupině A celkem deset z nich, v dalších dvou skupinách po sedmi hráčích. Vezmeme-li v potaz, jak málo času bylo hře věnováno, jedná se o dobré výsledky. Hra se zdála být pro žáky poměrně intuitivní a často odhalili strategii kanálu, kterou pak úspěšně používali.

	A	***B***	***C***
Ano	10	7	7
Ne	2	5	5

Žáci, kteří si vyzkoušeli tuto hru, mi k dotazníkům odevzdávali i své herní kartičky se čtvercovými poli. Každý z hráčů ve dvojici používal pro obtahování čtverečků a tvorbu symbolů jinou barvu fixu. Abych věděla, který dotazník patří k jaké barvičce, ale zároveň zůstal hráč anonymní, zapisovali mi zvolený symbol nebo používanou barvičku do dotazníku, jako vidíme na obr. 6.10.



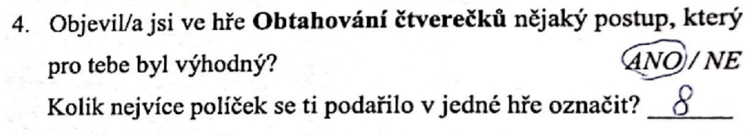
P	Obtahování čteverčků	3	4

Obrázek 6.10: *Ukázka označení symbolu žákyně ze skupiny A používaného ve hře Obtahování čtverečků v dotazníku*

V tabulce níže je zaznamenán počet hráčů, kolika se v rámci každé skupiny povedlo označit nejvyšší počet políček. Vidíme, že žáci ve skupině A byli v označování poměrně úspěšní a nejhorší výsledek byl osm označených políček, který měli dva žáci. Skupině B se také nevedlo špatně, zde byl nejhorší výsledek jednoho žáka sedm označených políček, zatímco ostatním žákům se alespoň jednou podařilo označit si deset, jedenáct nebo rovnou dvanáct políček. Nejhůře dopadli žáci ze skupiny C, mezi nimiž byl i takový, který označil nejvýše jedno políčko. Z toho nevyvozujme, že by tato skupina žáků byla v odhalování strategie méně šikovná než ostatní. Velkou roli zde hraje fakt, že tato skupina měla na hraní nejméně času.

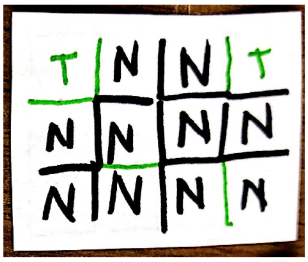
	A	***B***	***C***
0 políček	-	-	1
1 políčko	-	-	-
2 políčka	-	-	-
3 políčka	-	-	1
4 políčka	-	-	1
5 políček	-	-	-
6 políček	-	-	1
7 políček	-	1	2
8 políček	5	-	2
9 políček	-	-	1
10 políček	2	2	1
11 políček	3	6	-
12 políček	2	3	2
prům.	**10**	**11**	**7**

Ke hře *Obtahování čtverečků* se v dotazníku vztahovala otázka zjišťující, zda se hráči povedlo ve hře odhalit nějakou vítěznou strategii, a kolik políček zvládl nejvíce označit. Odpovědi hráčů jsem poté kontrolovala s odpovídajícími herními poli. Ukázku toho, jak na otázky žáci odpovídali, vidíme na obr. 6.11.

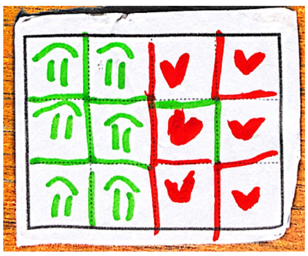

4. Objevil/a jsi ve hře **Obtahování čtverečků** nějaký postup, který pro tebe byl výhodný? ANO / NE
Kolik nejvíce políček se ti podařilo v jedné hře označit? 8

Obrázek 6.11: *Ukázka odpovědi žáka ze skupiny C na otázky ohledně hry Obtahování čtverečků v dotazníku*

Příklad hry, kde s deseti označenými poli zvítězila žákyně používající symbol *N*, vidíme na obr. 6.12. Hry někdy skončily i remízou, na jednu takovou se můžeme podívat na obr. 6.13.

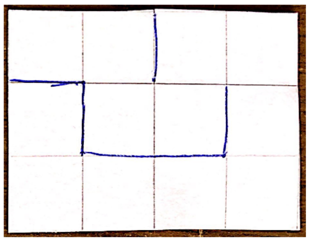


Obrázek 6.12: *Ukázka výhry žákyně N ze skupiny B ve hře Obtahování čtverečků*



Obrázek 6.13: *Ukázka remízy dvou žákyň ze skupiny C ve hře Obtahování čtverečků*

Po uplynutí několika minut jsme s žáky začali společně rozebírat vítěznou strategii. Protože ji někteří neodhalili, nechávala jsem ty, kteří strategii vymysleli, aby ji svým spolužákům vysvětlili. Ukázku náčrtku v hracím poli, pomocí kterého vysvětloval jeden ze žáků zeškupiny *A* strategii ostatním, vidíme na obr. 6.14. Příslušný hráč použil metodu kanálu.

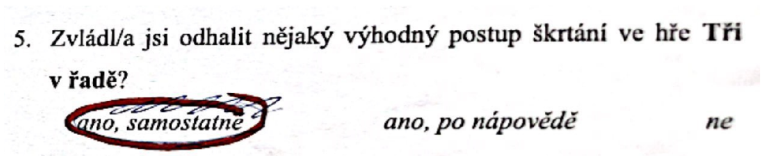


Obrázek 6.14: *Ukázka použití metody kanálu ve hracím poli hry Obtahování čtverečků hráčem při vysvětlování strategie svým spolužákům*

6.3.4 Tři v řadě

Hru *Tři řadě* si stačila zahrát pouze skupina B, z níž si jedna dvojice zahrála sedm her, jedna dvojice pouze jednu hru a ostatní tři až pět her. Počet výher úspěšnějších hráčů z celkového počtu odehraných her byl v relativních číslech průměrně 77%, neboli úspěšnější hráči vyhrávali přibližně ve třech čtvrtinách her, jak dokládá následující tabulka.

B
67%
67%
71%
75%
80%
100%
prům. 77%



5. Zvládl/a jsi odhalit nějaký výhodný postup škrtání ve hře Tři v řadě?

ano, samostatně *ano, po nápovědě* *ne*

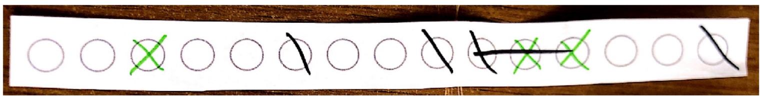
Obrázek 6.15: *Ukázka odpovědi žáka ze skupiny B na otázku ohledně hry Tři v řadě v dotazníku*

Dotazník zahrnoval otázku i pro tuto hru. Hráči měli odpovědět, zda ve hře odhalili nějaký výhodný postup. Tentokrát jsem do dotazníku záměrně neuvedla, zda odhalili vítěznou strategii, protože jsem počítala s tím, že nebude příliš prostoru se hře věnovat a nestihneme s žáky probrat strategii do detailů. Ukázku toho, jak jedna z odpovědí vypadala, můžeme vidět na obr. 6.15.

Výsledky odpovědí jsou zaznamenány v tabulce. Deset žáků uvedlo, že výhodný postup ve hře odhalili samostatně, jeden žák ho odhalil po nápovědě a jeden žák ho neodhalil vůbec. To jsou výborné výsledky, berme ovšem v potaz, že jsme se ptali na výhodný postup, ne na vítěznou strategii. V takovém případě by bylo úspěšných hráčů pravděpodobně méně.

B	
Ano, samostatně	10
Ano, po nápovědě	1
Ne	1

Stejně jako ke hře *Obtahování čtverečků*, i k této hře mám od žáků uschované herní lístečky. Příklad jednoho z nich, kde si můžeme povšimnout, že vyhrál hráč používající černou fixu, vidíme na obr. 6.16.



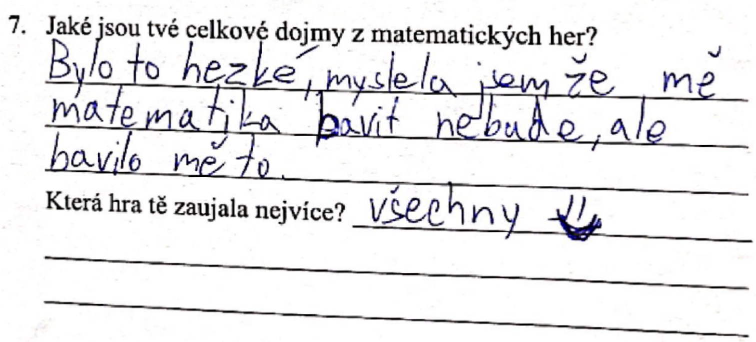
Obrázek 6.16: *Ukázka výhry žákyně ze skupiny B s černou barvou ve hře Tři v řadě*

6.3.5 Zpětná vazba od starších žáků

V závěru dotazníku pro starší žáky jsem se ptala, jaké jsou jejich celkové dojmy z matematických her. Následují vybrané odpovědi:

- „Bylo to hezké, myslela jsem, že mě matematika bavit nebude, ale bavilo mě to."
- „Je to zábavné i na přemýšlení, takže to i naučí a zabavím se. Obecně mě to bavilo."
- „Je to dobrý, ale něco mi vůbec nešlo."

- „Je to celkem sranda.“
- „Baví mě, naše škola by je mohla začít.“
- „Jo, bylo to dobrý, objevil jsem nové hry.“
- „Zábavné, rychle to uteklo.“
- „Moc je nehraju.“


7. Jaké jsou tvé celkové dojmy z matematických her? Bylo to hezké, myslela jsem že mě matematika bavit nebude, ale bavilo mě to.

Která hra tě zaujala nejvíce? všechny

Obrázek 6.17: *Ukázka odpovědí jedné z žákyň ze skupiny C na závěrečné otázky*

Kromě celkových dojmů jsem se žáků tázala i na to, která hra je zaujala nejvíce. Nejčastěji odpovídali, že nejzajímavější byly hry se sirkami (celkem jedenáctkrát), dále hra *Obtahování čtverečků* (osmkrát) a hra s fazolemi (čtyřikrát). Řada žáků nechala otázku nezodpovězenou, protože byla dobrovolná.

6.4 Využití matematických her

Na základě zpracované teoretické části i výzkumného šetření a jeho vyhodnocení lze konstatovat, že matematické hry mají potenciál pro rozvoj logického myšlení žáků. Lze je zařazovat do školní výuky i volnočasových aktivit, neboť většinu žáků zaujmou díky možnosti uplatnit zde jejich soutěživost. V rámci školní výuky je možné využít matematické hry jako úvodní aktivity, které vytvoří prekoncepty pro nové učivo (např. hra *Kruh* před probíráním osové a středové souměrnosti), nebo je učitel může v hodinách aplikovat jako motivující prostředky, či zařadit jako odpočinkovou nenáročnou činnost. Jak jsme se přesvědčili ve výzkumném šetření, matematické hry je možné hrát i s žáky I. stupně ZŠ. Procvičí si při tom jednoduché počty. Navíc můžeme pravidla libovolně obměňovat a vytvářet žákům zadání odpovídající oblastem, které je potřeba u žáků rozvíjet.

7 Závěr

V rámci této diplomové práce jsme se zaměřili na problematiku vybraných matematických her a na jejich praktické využití se žáky z I. i II. stupně základních škol. Našimi cíli bylo prokázat vhodnost a užitečnost těchto her ve výuce a zjistit, zda mohou posloužit jako nástroj rozvoje matematického myšlení žáků.

V teoretické části práce jsme si nejprve představili základní pojmy z teorie her a konkrétní příklady matematických her pro dva hráče, včetně jejich vlastností a metod hledání vítězných strategií. Kromě toho jsme se zabývali i tím, jaký význam mají matematické hry z pohledu pedagogiky, a ukázali jsme si, jak mohou tyto hry přispět k rozvoji klíčových kompetencí žáků.

Jako výzkumné šetření byl proveden experiment se žáky základních škol ve věku od 6 do 15 let. Žáci si vyzkoušeli několik typů matematických her a vyplňovali přitom námi vytvořené dotazníky. Na každou hru dostali žáci čas, aby si ji opakovaně vyzkoušeli zahrát, a následně jsme společně rozebírali vítězné strategie. Na základě tohoto rozboru a také na základě vyhodnocení dotazníků jsme získali důležité informace o vhodnosti a užitečnosti těchto vybraných matematických her pro žáky.

Po podrobném zkoumání vlivu matematických her na rozvoj logického myšlení žáků můžeme konstatovat, že při vhodném využití se matematické hry mohou stát velmi vhodným nástrojem v hodinách matematiky, neboť se žáci přirozeným způsobem učí promýšlet herní strategie. Hry je rovněž možné využít i ke zvýšení pozornosti žáků a jejich zaujmutí. Naše zjištění naznačují, že matematické hry mají pozitivní vliv na pochopení matematických konceptů. Během výzkumného šetření jsme se opakovaně setkávali nejprve s nevolí některých žáků, kteří neměli k matematice vybudovaný kladný vztah, ale kteří po pár zahraných hrách začali matematiku vidět z jiného úhlu pohledu a motivoval je nově získaný pocit, že v matematice konečně vynikají. Matematické hry tedy zároveň přispívají k vyšší oblíbenosti matematiky mezi žáky.

Celkově lze říci, že matematické hry mají potenciál stát se efektivním nástrojem ve výuce matematiky na základních školách. Vyučující, kteří se rozhodnou matematické hry žákům představit, by měli dbát na vhodnou volbu her a předem si promyslet, kdy (popř. jak často) hry do výukového procesu zařazovat.

V této diplomové práci jsme se snažili přispět k rozšíření poznatků o využití matematických her ve výuce na základních školách a nabídnout pedagogům doporučení a příklad toho, jak hry efektivně ve výuce využít. Doufáme, že se nám podařilo motivovat čtenáře k dalšímu výzkumu v oblasti problematiky matematických her, neboť se jedná o vhodný nástroj rozvoje matematického myšlení žáků a v jeho využití vidíme velký potenciál.

8 Seznam použité literatury a zdrojů

ANGIOLINO, A. (2000): Hry s čtverečkovaným papírem a tužkou. Portál, Praha.

BECK, J. (2011): Combinatorial Games: Tic-Tac-Toe. Rutgers University, New Jersey.

BOUBLÍKOVÁ, H. (2021): Matematické hry. Bakalářská práce. Pedagogická fakulta, Jihočeská univerzita, České Budějovice.

BULANT, M. (2008): Kombinatorické hry. Výuková prezentace. Ústav matematiky a statistiky, PřF MU, Brno.

CHVOJ, M. (2013): Pokročilá teorie her ve světě kolem nás. Grada, Praha.

CHYTRÝ, V., KROUFEK R., JANOVEC, J. (2015): Hra NIM jako nástroj pro výuku specifických oblastí matematiky a programování. Acta Mathematica Nitriensia, vol. 1, no. 2, 74-82.

JANČAŘÍK, A. (2007): Hry v matematice. Pedagogická fakulta UK, Praha.

KREJČOVÁ, E., VOLFOVÁ, M. (1994): Didaktické hry v matematice. Gaudeamus, Hradec Králové.

MŠMT (2021): Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, $https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcovy-vzdelavacici-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv/$ (cit. 11. 12. 2022).

NOVOTNÁ, J. (2004): Hry a soutěže a jejich vliv na motivační a komunikační klima ve třídě. In: Hejný, M. (ed.): Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky. PedF UK, Praha, 379-390.

SKÁLOVÁ, A. (2014a): Teorie her pro nadané žáky středních škol. Diplomová práce. Katedra didaktiky matematiky, Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha.

SKÁLOVÁ, A. (2014b): Kombinatorické hry. Přednáška z cyklu Kurzy pro nadané žáky. MFF UK, Praha.

ŠILHÁNOVÁ, L. (2010): Tandemat - didaktická hra pro výuku matematiky na střední škole. Diplomová práce. Katedra matematiky a didaktiky matematiky PedF UK, Praha.

VALIŠOVÁ, A., VALENTA, J. (2011): Metody vyučování a jejich modernizace. In: Купšová, A. (ed.): Pedagogika pro učitele. Grada, Praha, 191-212.
VÁVROVÁ, A. a kol. (2006): Hry ve vyučování matematice jako významná strategie vedoucí k rozvoji klíčových kompetencí žáků. Projekt Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP. JČMF, Praha.
VOPRAVIL, V. (2009): Impartial Games,
$http://www.wopravil.cz/cgt\_g\_impartial.html$ (cit. 10. 12. 2022).
WIKIWAND (2022): Piškvorky, https://www.wikiwand.com/cs/Pi%C5%A1kvorky (cit. 11. 2. 2023).
YIU, P. (2003): Recreational Mathematics. Department of Mathematics, Atlantic University, Florida.

Přílohy

Dotazník pro žáky:

Označení dvojice: ____________________ Datum: _________

Hry	*Počet tvých výher*	*Počet her celkem*
Jedenáct sirek I.		
Jedenáct sirek II.		
Jedenáct sirek III.		
Kruh I.		
Kruh II.		
Obtahování čteverčků		
Tři v řadě		
NIM		

1. Znal/a jsi některou hru, nebo hru jí podobnou? *ANO / NE*

   Pokud ANO, jakou? ________________________________

   Pokud ANO, pamatoval/a jsi si u ní vítěznou strategii? *ANO / NE*

2. Dokázal/a jsi ve hrách **Jedenáct sirek** odhalit nějakou vítěznou strategii?

   v I. verzi hry: *ano, samostatně* *ano, po nápovědě* *ne*

   ve II. verzi hry: *ano, samostatně* *ano, po nápovědě* *ne*

   ve III. verzi hry: *ano, samostatně* *ano, po nápovědě* *ne*

   Pokud jsi odhalil/a strategii v I. verzi hry, byly pro tebe II. a III. verze jednodušší? *ANO / NE*

3. Podařilo se ti odhalit ve hře **Kruh** nějakou vítěznou strategii?

   ano, samostatně *ano, po nápovědě* *ne*

4. Objevil/a jsi ve hře **Obtahování čtverečků** nějaký postup, který pro tebe byl výhodný? *ANO / NE*

   Kolik nejvíce políček se ti podařilo v jedné hře označit? ______

5. Zvládl/a jsi odhalit nějaký výhodný postup škrtání ve hře **Tři v řadě**?

   ano, samostatně *ano, po nápovědě* *ne*

6. Podařilo se ti zaznamenat nějaké výhodné pozice ve hře **NIM** v závěru hry? *ANO / NE*

7. Jaké jsou tvé celkové dojmy z matematických her?

   ____

   ____

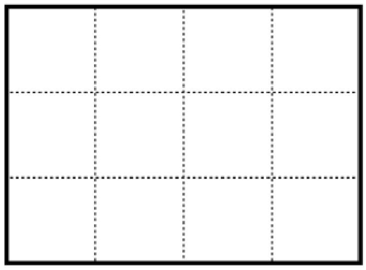
   ____

   Která hra tě zaujala nejvíce? ______________________

   ____

   ____

Hrací pole pro hru *Obtahování čtverečků*:



Hrací pole pro hru *Tři v řadě*: