

**UNIVERZITA PALACKÉHO V OLMOUCI**

**PEDAGOGICKÁ FAKULTA**

Katedra matematiky

**Bakalářská práce**

Marek Turoň

**Použití určitého integrálu v matematice**

Vedoucí práce:

Doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.

Olomouc 2015

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci vypracoval samostatně za použití literatury a pramenů uvedených v závěru práce.

V Olomouci dne 19. dubna 2015

.....

Chtěl bych poděkovat paní Doc. RNDr. Jitce Laitochové, CSc., vedoucí práce, za její cenné rady, připomínky a podněty, které mi pomohly při zpracování této práce.

## OBSAH

Úvod.....	7
1 Historie integrálu.....	8
1.1 Matematika ve starověku.....	8
1.1.1 Egypt a Mezopotámie.....	8
1.1.2 Řecko.....	9
1.2 Vznik a vývoj infinitezimálního počtu .....	11
1.2.1 Období přechodu od starověku k renesanci .....	11
1.2.2 Kepler a Cavalieri a jejich výpočty obsahů a objemů .....	12
1.2.3 Pokračovatelé Cavalieriho.....	14
1.3 Newton a Leibniz – zakladatelé infinitezimálního počtu .....	15
1.3.1 Isaac Newton .....	15
1.3.2 Gottfried Wilhelm Leibniz .....	16
1.3.3 Srovnání přístupu Newtona a Leibnize .....	18
1.4 Matematická analýza v 18. století .....	18
1.4.1 Leonhard Euler .....	19
1.5 Určitý integrál.....	20
1.5.1 Augustin-Louis Cauchy.....	20
1.5.2 Bernhard Riemann.....	22
1.5.3 Gaston Darboux.....	23
2 Neurčitý integrál.....	24
2.1 Primitivní funkce .....	24
2.1.1 Definice .....	24
2.1.2 Integrační konstanta .....	24
2.2 Neurčitý integrál .....	25
2.2.1 Definice .....	25
2.3 Základní vzorce .....	26

2.4	Pravidla pro výpočet integrálu.....	26
2.5	Integrace per partes.....	27
2.5.1	Věta .....	27
2.5.2	Příklad .....	27
2.6	Integrace substitucí.....	28
2.6.1	Věta .....	28
2.6.2	Příklad .....	28
2.7	Integrace racionální (lomené) funkce .....	28
2.7.1	Jednoduchý rozklad.....	29
2.7.2	Rozklad na parciální zlomky.....	29
3	Určitý integrál .....	33
3.1	Newtonův integrál .....	33
3.2	Integrální součty .....	33
3.2.1	Dolní součet.....	34
3.2.2	Horní součet .....	34
3.2.3	Integrální součet .....	34
3.3	Riemannův určitý integrál .....	34
3.3.1	Definice .....	35
3.3.2	Vlastnosti Riemannových integrálů .....	35
3.3.3	Metody výpočtu Riemannova integrálu .....	36
4	Aplikace určitého integrálu .....	39
4.1	Určení obsahu rovinné oblasti .....	39
4.1.1	Rovinná oblast vymezená funkcí $f$ a osou $x$ .....	39
4.1.2	Rovinná oblast vymezená více funkcemi.....	40
4.2	Určení délky křivky .....	41
4.3	Určení povrchu rotačního tělesa .....	43
4.4	Určení objemu rotačního tělesa .....	46

.....	47
5 Sbíрка příkladů .....	48
5.1 Řešené příklady .....	48
5.1.1 Příklady na výpočet obsahu rovinného obrazce .....	48
5.1.2 Příklady na výpočet objemu rotačních těles.....	51
5.1.3 Příklady na výpočet délky křivky.....	53
5.1.4 Příklady na výpočet obsahu pláště rotačních těles .....	55
5.2 Neřešené příklady .....	57
5.2.1 Příklady na výpočet obsahu rovinného obrazce .....	57
5.2.2 Příklady na výpočet objemu rotačních těles.....	58
5.2.3 Příklady na výpočet délky křivky.....	59
5.2.4 Příklady na výpočet obsahu pláště rotačních těles .....	60
Závěr.....	61
Seznam obrázků .....	62
Seznam grafů.....	63
Použitá literatura .....	64
Anotace.....	66

## Úvod

Tato bakalářská práce by měla čtenářům ukázat základy určitého integrálu a jeho aplikace v matematice. Zajímavá je především pasáž zabývající se historií, která se na školách běžně nevyučuje, a považuji ji za velmi poučnou a přínosnou.

Učivo integrálu mne zaujalo už na střední škole, kde jsme se jím zabývali jen okrajově. Na vysoké škole jsem si tyto znalosti a vědomosti prohloubil a zjistil jsem, jak velké využití může integrál mít, což mne také vedlo k tomu, abych si toto téma zvolil.

Práci jsem rozdělil do pěti kapitol. V první kapitole zmiňuji hlavní historické události, které se podílely na vzniku určitého integrálu. Nejprve vznikala potřeba počítat základní geometrické útvary (políčka, sýpky), které byly postupem času složitější a nároky na matematiku stále stoupaly. Velmi mne zaujala matematika starověku, především matematika Egypťanů, která už v 19. stol. př. n. l. byla na vysoké úrovni. V kapitole druhé nastiňuji problematiku neurčitého integrálu, který je úzce spjat s pojmem primitivní funkce. Primitivní funkce se používá také při výpočtu určitého integrálu, proto jsem tuto kapitolu nemohl vynechat. Ve třetí kapitole už se zabývám určitým integrálem a jeho způsoby výpočtu. Pro lepší transparentnost zde uvádím také jednoduché příklady. V kapitole čtvrté již zmiňuji aplikace určitého integrálu s několika řešenými příklady.

A v poslední, páté kapitole, jsem vytvořil sbírku řešených i neřešených příkladů, které by měly posloužit jako cvičný materiál pro čtenáře.

# 1 Historie integrálu

V této kapitole se věnuji jednomu z nejkrásnějších vědních oborů – historii. V historii jsou zapsány poznatky našich předků, jejich úspěchy a vítězství, ale také jejich chyby, zklamání a prohry. Díky historii se můžeme z těchto chyb poučit, a tvořit tak lepší budoucnost. Matematika je krásným důkazem toho, že chybné úvahy a tvrzení daly vzniku úvahám přesným a správným. Je možné, že až bude dnešní doba historií, budou naše úvahy a výpočty také brány jako banální nebo nepřesné. V této kapitole jsem se snažil shrnout zásadní události, které měly podíl na vzniku infinitezimálního počtu.

Předlohou pro psaní této kapitoly mi byla především kniha Malý průvodce historií integrálu<sup>1</sup> od Štefana Schwabika a Petry Šarmanové. Tato kniha je velmi čtivá a jsou v ní vystihnuty zásadní události, které daly vzniku určitému integrálu.

## 1.1 Matematika ve starověku

Různé kultury se v tomto období vyvíjely samostatně, takže naše dnešní znalosti o jejich matematických vědomostech jsou závislé na množství a kvalitě zachovaných písemných památek. V Číně a Indii se psalo na kůru a bambus, které rychle podléhaly zkáze, proto tedy známe především egyptskou a mezopotámskou matematiku. V Mezopotámii se psalo na hliněné destičky, které byly vypalovány. V Egyptě na papyrus, který byl v jejich suchém podnebí zachován. K obrovskému rozvoji matematiky došlo až v Řecku, kde byly k praktickým výpočtům přidány i logické úvahy a důkazy. Ve 3. stol. před n. l. bylo v podstatě dovršeno budování základů geometrie, teorie čísel, učení o kuželosečkách a antická forma integrálních a diferenciálních metod. (Schwabik, Šarmanová, 1996)

### 1.1.1 Egypt a Mezopotámie

Většina našich znalostí pochází ze dvou papyrů. Tzv. Moskevský papyrus, který pochází z 19. stol. př. n. l. byl značně poškozen. Druhý, Londýnský papyrus, obsahuje 85 úloh s řešeními, kde se asi 20 úloh zabývá výpočtem ploch polí a objemu sýpek. Řešení problému je vždy v konkrétních číslech, neboť proměnná veličina byla v tomto období ještě pojem neznámý. Zajímavé na řešení úloh výpočtu obsahů je to, že Egyptané plochu rozdělili na trojúhelníky, které vypočítali podle dnes známého vzorce  $S_{\Delta} = \frac{a}{2} * v_a$  (součin poloviny základny a její výšky) a jednotlivé trojúhelníky následně sečetli. Řešení obsahu kruhu je

---

<sup>1</sup> SCHWABIK, Štefan a ŠARMANOVÁ, Petra. *Malý průvodce historií integrálu*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1996, 95 s. ISBN 80-7196-038-1.



v Rhindově papyru uvedeno jako  $S = (d - \frac{d}{9})^2$ , což by vedlo k hodnotě  $\pi = \frac{256}{81} = 3,1605$ . Najdeme zde také mnoho formulí pro výpočet objemů různých těles, např. krychle, rovnoběžnostěnu nebo kruhového válce, které se používaly v konkrétních případech, především pro výpočet objemu nádob k uchovávání obilí. V Moskevském papyru se nachází jedna z nejpozoruhodnějších matematických úloh Egyptanů, ve kterém počítají objem kolmého komolého jehlanu se čtvercovou základnou, tzn. objem pyramidy. U příkladu je náčrt a matematický popis, který se shoduje s dnešním vztahem pro objem  $V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$ . Je třeba podotknout, že z tehdejší doby není žádný doklad o znalosti Pythagorovy věty, kromě nepodložených pověstí o „napínačích lan“, kteří měli natáhnout lano rozdělené na části dlouhé v poměru 3:4:5, a vytvořit tak pravý úhel. O vysokém stupni znalostí Egyptanů svědčí i pyramidy, kanály, přehrady a vodní nádrže, pro jejichž stavbu bylo třeba vysokých znalostí v oblasti matematiky a geometrie. Řecký matematik a historik Hérodotos (asi 484 – 430 před n. l.) napsal, že zemská daň okolo Nilu, byla vybírána podle velikosti plochy půdy. Každoroční záplavy však část půdy odnesly a geometrové měli za úkol zbývající část zjistit. Je možné si představit, o jak nepravidelnou část se muselo jednat. Současně s egyptskou matematikou se vyvíjela matematika v Mezopotámii. Nalezené hliněné tabulky svědčí o vysoké úrovni jak aritmeticko-algebraických, tak geometrických znalostí. Tabulky měly usnadňovat výpočet kalendáře, řízení sklizní, organizaci veřejných staveb a vybírání daní. (Schwabik, Šarmanová, 1996)

### 1.1.2 Řecko

Soubor tvůrčích děl, který dnes nazýváme „řeckou matematikou“, vznikl od roku 350 do roku 200 př. n. l., tedy v relativně krátkém období. Nejstarším zachovaným dílem řecké matematiky jsou Základy od **Eukleida**, ve kterých shrnul doposud téměř všechny matematické poznatky. Za zmínku stojí rovněž **Thalés z Miletu** (asi 624-543 př. n. l.), který se na cestách přes Babylonii a Egypt seznámil s matematikou a astronomií. Jsou mu přisuzovány výsledky, že průměr dělí kruh na dvě poloviny, vrcholové úhly jsou shodné, všechny obvodové úhly sestavené nad průměrem kružnice jsou pravé (Thaletova kružnice), úhly při základně rovnoramenného trojúhelníka jsou shodné nebo že dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se stranou a přilehlými úhly. Nevíme však, zda tyto výsledky zformuloval, či dokázal. Víme pouze, že dobře ovládal podobnosti trojúhelníků, které využíval například k měření výšky pyramid, ale také k měření vzdálenosti lodí na moři. (Schwabik, Šarmanová, 1996)

Další významnou skupinu filozofů byli **Pythagorejci**, kteří tvrdili, že každé dvě úsečky jsou souměřitelné. Toto tvrzení však vyvrátili na konci 5. stol. př. n. l., když zjistili, že strana a úhlopříčka čtverce jsou nesouměřitelné, tj. že jejich poměr nelze vyjádřit přirozeným číslem. Po tomto zjištění přestala být čísla chápána jako přirozená či racionální a začaly být chápány jako délky, obsahy a objemy. Také vznikl tzv. zákon homogenity, kdy bylo možné sčítat a odčítat pouze délky s délkami, obsahy s obsahy, objemy s objemy. Součinem délky s délkou byl obsah a součinem obsahu s délkou byl objem apod. (Schwabik, Šarmanová, 1996)

Problémem nekonečnosti se začali zabývat také filozofové, jedním z představitelů byl **Zénón z Eleje**, který koncipoval známé problémy např.: Achilles a želva, letící šíp, Dichotomie a Stadion, ve kterých poukazuje na rozpor mezi smyslovým vnímáním a logickým výkladem. Další řecký matematik zabývající se problematikou obsahů a objemů byl **Hippokrates**, který se snažil vyřešit problém kvadratury kruhu a zdvojení krychle pouze použitím pravítka a kružítka. Tvrdil, že objem kužele je jedna třetina válce s toutéž základnou a výškou, což ale nikdy nedokázal. Problematikou obsahů a objemů se v té době zabýval také **Démokritos** z Abdér, který vycházel z toho, že těleso je tvořeno z atomů, které mají konečný objem. Věděl, že trojboký jehlan může být doplněn na hranol se stejnou základnou a výškou. Tento hranol se pak skládá ze tří stejných jehlanů s toutéž základnou a výškou. Toto tvrzení rozvinul a zobecnil větu pro kužel a válec – objem kužele je jedna třetina objemu válce o stejné základně a výšce. Řekové počítali plochu neznámých obrazců pomocí mnohoúhelníků, kterými obrazec postupně vyčerpávali. Tuto metodu zpracoval významný matematik **Eudoxos** z Kindu. Jednalo se o Eudoxovu exhaustivní (vyčerpávající) metodu, která umožňovala poměrně přesné výpočty obsahů a objemů. Metoda funguje na nekonečném dělení veličiny. Tímto způsobem Eudoxos dokázal, že obsah kruhu lze s přesností aproximovat obsahem pravidelného mnohoúhelníku vepsaného do kruhu. Eudoxovi patří také důkazy vět, které vyslovil, ale nedokázal Démokritos. V helénistickém období dospívá matematika na nejvyšší stupeň rozvoje, jaký kdy byl ve starověku. (Schwabik, Šarmanová, 1996)

**Eukleides**, o kterém jsem se již zmiňoval výše, je jeden z nejvýznamnějších matematiků všech dob. Jeho dílo – Základy, mělo třináct knih a je nejvýznamnějším a současně nejstarším zcela zachovaným dílem řecké matematiky. Základy jsou po Bibli pravděpodobně nejvíce tištěnou a studovanou knihou západního světa. Výklad knihy je budován axiomaticky, nejsou zde výpočty obsahů nebo objemů konkrétních těles, neboť tyto výpočty byly považovány za praktickou, nikoliv teoretickou geometrii. Euklidova tvrzení se týkají srovnávání obsahů nebo objemů dvou útvarů, nikoliv jednotlivých výpočtů. Další

matematik helénistického období je **Archimédes**, s jehož jménem je spojováno mnoho legend. Archimédes údajně vyběhl z vany na ulici, zcela nahý a vykřikl: „Nalezl jsem!“ (Heuréka), poté co objevil zákon o vztlaku ponořeného tělesa do kapaliny. K slavným výroky také patří: „Dejte mi pevný bod, a pohnu zemí“, který pronesl při objevu zákona páky. Během svého života proslul vynálezy, které byly využity při obraně Syrakus před Římany.



Obrázek 1: Archimédes [10, s. 15]

Nejvýznamnější přínos matematice však daly tyto práce: Měření kruhu, Kvadratura paraboly, O kouli a válci, O spirálách, O konoidech a sféroidech a Metoda. Archimédes rozvíjí exhaustivní metodu na řadě problémů, které jsou dnes typickými aplikacemi integrálního počtu. Archimédes se orientoval stále více k proměnným a zavádí do geometrie pohyb, čím se liší např. od Eukleida. Rovněž rozvinul metody určování obsahů a objemů, ale také metody stanovení tečen ke křivkám a určení extrémů. Kromě vepsaných mnohoúhelníků zavádí Archimédes mnohoúhelníky opsané a dále s nimi pracuje – zabývá se tedy horními i dolními součty. (Schwabik, Šarmanová, 1996)

## 1.2 Vznik a vývoj infinitezimálního počtu

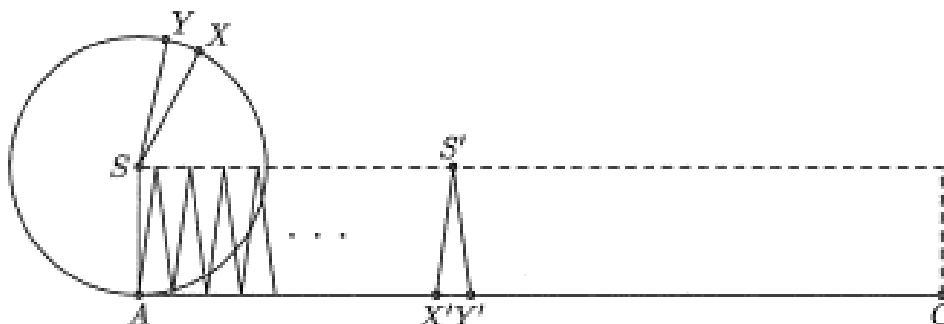
### 1.2.1 Období přechodu od starověku k renesanci

Po rozpadu římské říše byla Evropa velmi zaostalá. Pracovalo se pouze s minimem astronomie a základní praktickou aritmetikou, která by vystačovala pro obchod a zeměměřičství. Tento úpadek se především připisuje křesťanské církvi, která lpěla na nevědeckých dogmatech a původně se snažila o naprosté vymýcení řecké a římské kultury. Po mnoho let však zůstávaly křesťanské kláštery jediným místem, kde se alespoň částečně udržovala vzdělanost. Situace se změnila až v 11. a 12. stol., kdy došlo k rozvoji výroby a obchodu. Obnovily se obchodní styky s Východem a tedy i rozšíření řecké literatury. V 12. a 13. stol. bylo přeloženo obrovské množství prací z arabštiny do latiny. Byly překládány jednak arabská díla, ale především řecká díla existující v arabštině. Pro rozvoj evropské matematiky se základem staly díla Eukleida, Archiméda, Apollónia nebo Ptolemaia. V Evropě stále více docházelo k rozvoji řemesel, obchodu a peněžnictví. Obchodníci putovali na daleké cesty, při kterých poznávali umění a vědu jiných národů. Tyto poznatky sepsal **Leonardo Pisánský**, zvaný Fibonacci, ve svých knihách Liber Abaci a Practica Geometriae. V druhé polovině 15. stol. začíná období renesance, kdy dochází k rozvoji trigonometrie a algebry. K rozšíření matematiky přispívá vynález knihtisku, který zpřístupňuje literaturu

široké vrstvě obyvatelstva. Malíř a zároveň matematik **Leonardo da Vinci** (1452-1519) využíval Archimédovu metodu pro výpočet těžišť obrazců a k určení obsahu elipsy. Tato metoda se začala běžně využívat až v 17. století. Počátkem 16. stol. překračuje evropská matematika rámec znalostí, který tvořilo dědictví antického Řecka. Období matematiky konstantních veličin končilo a začínalo období veličin proměnných. Studium řeckých děl se brzy dosáhlo takové úrovně, že se začaly rozvíjet nové a jednodušší metody výpočtu obsahů a objemů. Na rozdíl od matematiky v Archimédových dílech se tato matematika zajímala více o rychlý výsledek, než o přesný důkaz. Tento obrovský rozvoj matematiky měl za důsledek vznik diskusních kroužků a jejich vzájemná komunikace, ale také vznik akademií a univerzit. (Schwabik, Šarmanová, 1996)

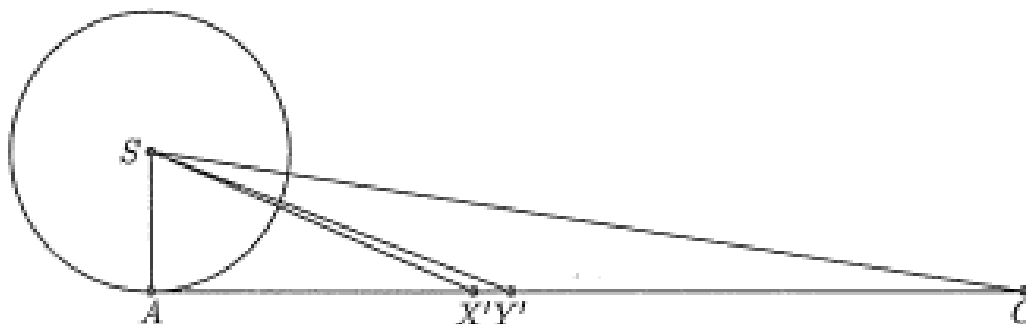
### 1.2.2 Kepler a Cavalieri a jejich výpočty obsahů a objemů

**Johannes Kepler** (1571-1630) ve svém díle *Nová stereometrie vinných sudů* (1615) počítal objemy těles, které vznikly rotací částí kuželoseček kolem osy v jejich rovině. Kepler při svých výpočtech rozděluje těleso na nekonečně mnoho nekonečně malých částí, jejichž objem se dá snadno určit. Této úvaze se říká infinitezimální (=nekonečně malý). Známa je úvaha ve které Kepler určuje obsah kruhu. „Každou z (nekonečně malých) částí ohraničující kružnice považuje za základnu rovnoramenného trojúhelníka s vrcholem ve středu kruhu. Obsah kruhu je pak roven součtu obsahů všech takových trojúhelníků. Představme si, že kružnice se středem  $S$  je rozvinuta do úsečky  $AC$  (její délka je rovna délce obvodu  $O$  kruhu) tak, že poloměr  $SA$  je k ní kolmý. Nekonečně malému  $XY$  na kružnici odpovídá dílek  $X'Y'$  na úsečce  $AC$ . Trojúhelníky  $XYS$ ,  $X'Y'S'$  mají výšku  $i$  základnu stejné délky, a tedy mají stejný obsah (Kepler zde považuje délku oblouku  $XY$  a délku jemu odpovídající úsečky  $X'Y'$  za stejné).



Obrázek 2: Keplerův výpočet obsahu kruhu [10, s. 24]

Tyto trojúhelníky lze zaměnit jinými, se stejnými základnami a výškou, přičemž vrcholy všech trojúhelníků se posunou do středu kružnice  $S$ . Takto vzniklé trojúhelníky mají stejné obsahy jako původní trojúhelníky a dohromady vyplňují trojúhelník  $ACS$ .



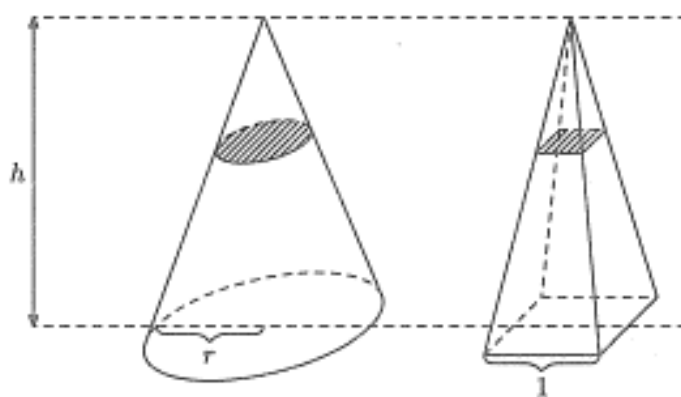
Obrázek 3: Keplerův výpočet obsahu kruhu [10, s. 24]

Obsah kruhu je tedy roven obsahu pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami  $AC$  a  $AS$ , kde velikost strany  $AC$  je rovna velikosti obvodu  $O$  kruhu. Odtud plyne

$$S = \frac{1}{2}rO = \frac{1}{2}r * 2\pi r = \pi r^2.$$

Kepler podobných úvah použil k výpočtům objemů velkého množství těles používaných v praxi.<sup>2</sup>

Keplerovo dílo bylo ve své době velmi kritizováno za nepřesnosti. **Bonaventura Cavalieri** (1598-1647), žák a pokračovatel Galilea Galileie, ve svém díle *Geometria indivisibilibus continuorum* (1635) vykládá jednoduchou formou metodu výpočtu objemů těles. Je znám především pro „Cavalieriho princip“, jehož výklad zní takto: „Když dvě tělesa mají stejnou výšku a když řezy rovinami, které jsou rovnoběžné s jejich podstavami a mají od nich stejnou vzdálenost, jsou takové, že poměr jejich obsahů je vždy stejný, potom objemy těles mají týž poměr.“<sup>3</sup> Cavalieriho princip lze vidět na obrázku č. 4. Zde určuje objem kužele s poloměrem podstavy  $r$  a s výškou  $h$ , který srovnává s jehlanem o výšce  $h$  se čtvercovou



Obrázek 4: Cavalieriho princip [10, s. 26]

<sup>2</sup> SCHWABIK, Štefan a ŠARMANOVÁ, Petra. *Malý průvodce historií integrálu*. Praha: Prometheus, 1996, s. 24.

<sup>3</sup> Tamtéž, s. 26.

podstavou, jejíž strana má délku 1. Roviny, které jsou rovnoběžné s podstavami obou těles, protínají tělesa ve stejné vzdálenosti od jejich podstav. Vzniká tak kruh, resp. čtverec, jejichž obsahy jsou v konstantním poměru  $\pi r^2$ : 1. Podle Cavalieriho principu tedy platí, že  $\frac{V_k}{V_j} = \pi r^2$ , tedy  $V_k = \pi r^2 V_j$ , kde  $V_j$  je objem jehlanu, který je  $V_j = \frac{1}{3}h$ . Odtud tedy plyne, že objem kužele je roven  $V_k = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ . I přes některé nedostatky měla Cavalieriho metoda velký vliv na jeho současníky i matematiky budoucího období. Nespornou výhodou tohoto principu je jeho praktické využití, kde Cavalieri odvozuje správné formule pro výpočet obsahů a objemů, aniž by využíval postupy, které dnes nazýváme výpočtem limity. (Schwabik, Šarmanová, 1996)

### 1.2.3 Pokračovatelé Cavalieriho

Po vydání Cavalieriho knihy se věnovala pozornost studiu matematických problémů za využití infinitezimálních veličin. K stávajícím problémům, tzn. určování objemů, obsahů a těžišť, přibyla úloha zabývající se problémem tečen. Při těchto úvahách se matematika rozdělila na dva směry – algebraický a geometrický. Následovníci Cavalieriho – především Torricelli a Newtonův učitel Isaac Barrow, používali řecké metody spočívající v geometrických úvahách. Fermat, Descartes a Wallis se vydali druhým směrem, směrem algebraickým. Vývoj infinitezimálního počtu značně urychlil **René Descartes** (1596-1650), když vydal knihu *Géométrie* (1637), která pojednávala o geometrických problémech, které řešil algebraickými prostředky – vzniká analytická geometrie. (Schwabik, Šarmanová, 1996)



Obrázek 5: Pierre de Fermat [10, s. 30]

**Pierre de Fermat** měl poněkud blíže k „dnešnímu pojetí“ analytické geometrie, protože už pracoval s pravoúhlým osovým systémem a zavedl i rovnice přímek a kuželoseček. Knihu o analytické geometrii vybudoval dokonce dříve než Descartes, ta však byla zastíněna, protože užíval starší, topornou symboliku, zatímco Descartes využíval symboliku stručnou a efektivní. Fermat byl advokát, který se studiu matematiky věnoval jen ve volném čase, avšak jeho přínos matematice a fyzice je nesporný. Vytvořil základy analytické geometrii, teorii pravděpodobnosti, ale také zasáhl do teorie čísel nebo do optiky. Fermat se rovněž zabýval kvadraturami hyperbol, kdy nepoužíval nekonečně malé veličiny, jako Kepler nebo Cavalieri, ale používal obdélníky s nekonečně malou šířkou. Fermat převádí geometrickou úlohu na úlohu algebraickou, kterou řeší pomocí geometrické řady. (Schwabik, Šarmanová, 1996)

## 1.3 Newton a Leibniz – zakladatelé infinitezimálního počtu

V 17. a 18. století období začíná růst nová matematika, když matematikové překračují hranice dochovaných vědomostí starých Řeků. Mezi nejvýznamnější matematiky tohoto období patří **Isaac Newton** (1642-1727) a **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716). Newton rozeznal, že určování plochy tělesa souvisí s problémem určení tečny ke křivce. Jinými slovy se dá říct, že Newton poznal jako první, že integrování je inverzní operací k derivování. Leibniz se přestál bát nekonečna a začal sčítat nekonečně mnoho nekonečně malých veličin, při čemž vytvořil symboliku využívanou dodnes. Newton s Leibnizem, i přes jejich rozsáhlé vzájemné spory, vytvořili aparát moderní matematické analýzy.<sup>4</sup>

Za zmínku stojí i dobové matematické problémy, jimiž se vědci už několik let zabývali. Šlo především o zkoumání plošných i prostorových křivek, tvarů čoček a zrcadel s požadovanými vlastnostmi a mnoho dalších objektů. Dále se studovaly konstrukce tečen ke křivkám, obsahy úsečí, objemy a povrchy rotačních těles. Významnou část tvořilo také studium dráhy pohybujících se bodů, rychlosti, zrychlení, dráhy, času a vznikaly tak základní představy o proměnných veličinách a funkcích. Bylo odvozeno několik pravidel pro výpočty derivací a rozvíjely se i metody související s nekonečnými řadami. Jednotný systém však k dispozici nebyl. Chyběla zde symbolika, která by umožnila vzniku pravidel. Teprve Newton a Leibniz sjednotili infinitezimální počet a dali mu pevný řád a výpočetní algoritmy. Oba našli propojení derivací s integrálem, každý z nich však jinou cestou. (Schwabik, Šarmanová, 1996)

### 1.3.1 Isaac Newton

#### 1.3.1.1 Život

Isaac Newton žil v letech 1643 až 1727 a pocházel z rodiny venkovského šlechtice z hrabství Lincolnshire. Studoval v Cambridge, kde se roku 1669 stal nástupcem I. Barrowa na Lucasově katedře. Barrow pronesl, že „*uvolnil své místo schopnějšímu*“. Newton na tomto místě setrval bezmála 30 let. Byl zároveň fyzikem, matematikem a astronomem. (Schwabik, Šarmanová, 1996)



Obrázek 6: Isaac Newton [10, s. 36]

<sup>4</sup> *Matematika v 19. století: sborník přednášek z letních škol : historie matematiky*. 1.vydání. Editor Jindřich Bečvář, Eduard Fuchs. Praha: Prometheus, 1996, 143 s. ISBN 80-7196-019-5.

### 1.3.1.2 Newtonův integrál

Pokud uijeme dnešní symboliky, tak Newton tvrdil, že pokud lze nějakým způsobem můžeme určit  $F$ , pro niž platí, že  $F'(x) = f(x)$  na intervalu  $[a, b]$ , pak lze také určit velikost plošného útvaru vymezeného grafem funkce  $f$  na intervalu  $[a, b]$ , osou  $x$  a přímkami  $x = a$ ;  $x = b$ , tj. integrál  $\int_a^b f(x)dx$ . V této situaci platí, že  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ . Podle Newtonovy úvahy tedy docházíme ke znění dnešní definice:

„Je-li  $f: [a, b] \rightarrow R$  funkce, která má primitivní funkci  $F: [a, b] \rightarrow R$ , tj. platí-li  $F'(x) = f(x)$  pro každé  $x \in [a, b]$ , pak existuje Newtonův integrál (N)  $\int_a^b f(x)dx$  funkce  $f$  v intervalu  $[a, b]$  a je definován vztahem

$$(N) \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

A tak Newton odvodil formuli, která svazuje integrál s derivací a dává do souvislosti problémy kvadratur s určováním tečen ke křivkám.“<sup>5</sup>

Tato úvaha se však dá použít pouze pro spojité funkce, které jsou definované na intervalu  $[a, b]$ . Newton si tento nedostatek uvědomoval, ale nedokázal se s ním vyrovnat. S tímto problémem si až později poradil Bernhard Riemann. Newton dále rozpracoval substituční metodu výpočtu integrálu a vypracoval tabulky integrálů. (Schwabik, Šarmanová, 1996)

## 1.3.2 Gottfried Wilhelm Leibniz

### 1.3.2.1 Život



Obrázek 7: Gottfried Wilhelm Leibniz [10, s. 40]

Tento německý filozof, jazykovědec, historik, teolog a matematik se narodil v Lipsku roku 1646. Vystudoval logiku, filozofii a právo. K matematice ho přivedl až Christiaan Huygens, když byl Leibniz v Paříži kvůli diplomatickému posláni. Po návratu do Německa roku 1676 se stal knihovníkem a kancléřem hannoverského knížete. Leibniz byl profesionální diplomat a právník, v matematice byl naprostý samouk, jeho povolání mu však umožňovalo mnoho cestovat a číst. Velmi rychle se tak seznámil s pracemi Descarta, Pascala nebo Barrowa a začal samostatně rozvíjet infinitezimální počet.

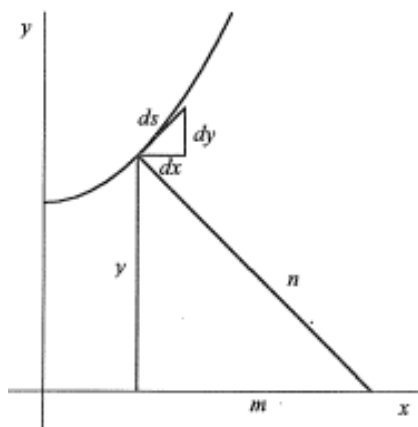
<sup>5</sup> SCHWABIK, Štefan a ŠARMANOVÁ, Petra. *Malý průvodce historií integrálu*. Praha: Prometheus, 1996, s. 38-39.



Na své pracovní pozici setrval až do své smrti, tj. do roku 1716. (Schwabik, Šarmanová, 1996)

### 1.3.2.2 Leibnizův charakteristický trojúhelník

„Necht' je dána křivka pomocí funkce  $y = f(x)$  a necht' je na ní dán bod  $A$ , kterým prochází tečna ke grafu zmíněné funkce. Utvořme pravouhlej trojúhelník  $ABC$ , jehož jeden vrchol je dán bodem  $A$ , přepona  $ds$  je dána úsečkou s krajním bodem  $A$  a leží na tečně ke křivce ( $ds = |AC|$ ), odvěsny  $dx$  a  $dy$  jsou rovnoběžné s odpovídajícími osami souřadnic ( $dx = |AB|$ ,  $dy = |BC|$ ). V bodě dotyku  $A$  tečny ke křivce uvažujeme kolmici k této tečně. Touto kolmicí, osou  $x$  a přímkou procházející bodem  $A$ , která je rovnoběžná s osou  $y$ , je vytvořen pravouhlej trojúhelník  $APR$  ( $|AP| = y$ ,  $|PR| = m$  a  $|AR| = n$ ), který je podobný trojúhelníku  $ABC$ .“<sup>6</sup>



Obrázek 8: Leibnizův charakteristický trojúhelník [10, s. 41]

Z podobnosti těchto trojúhelníků Leibniz došel ke vztahu:

$$\frac{m}{y} = \frac{dy}{dx} \text{ neboli } mdx = ydy.$$

Jeho představa vycházela z toho, že je trojúhelník infinitezimální, tj. že např.  $dx$  je nekonečně malé. Tuto situaci si představil v každém bodě křivky a veličiny vystupující na obou stranách vztahu sečetl. Těmto nekonečně mnoha součtům nekonečně malých veličin říkal integrál a dospěl ke vztahu:

$$\int mdx = \int ydy.$$

### 1.3.2.3 Leibnizův pohled na integrál

Některé „Leibnizovské“ úvahy jsou z dnešního pohledu nepřesné, avšak kladl velký důraz na symboliku, která měla za úkol usnadnit pochopení těchto úvah. V Paříži dne 29. října 1675 napsal: „bude užitečné místo „součtu všech  $l$ “ psát od nynějška  $\int l$  (znak  $\int$  je odvozen od prvního písmene slova *summa*), a že vzniká nový druh počtu, nová početní operace, která odpovídá sčítání a násobení. Druhý druh počtu vzniká, když z výrazu  $\int l = a$  získáme  $l = a \frac{\nu}{d}$  ( $d$  je první písmeno slova *differentia*). Jako totiž operace  $\int$  zvětšuje rozměr, tak jej  $d$  zmenšuje. Znak  $\int$  znamená pak součet,  $d$  diferenci. Svou symboliku Leibniz neustále

<sup>6</sup> SCHWABIK, Štefan a ŠARMANOVÁ, Petra. *Malý průvodce historií integrálu*. Praha: Prometheus, 1996, s. 41.

vylepšoval, např. už v dopise z 11. Listopadu 1675 změnil  $\frac{y}{d}$  na  $dy$ .<sup>7</sup> Na podzim roku 1675 zformuloval Leibniz základy svého infinitezimálního počtu, předložil pravidla pro řešení úloh tečen a kvadratur, a dospěl ke vztahu mezi integrováním a derivováním. V roce 1686 už užívá zápisu, který je velmi blízký dnešnímu, kdy píše: „...jestliže  $\int x dx = \frac{x^2}{2}$ , pak  $d\left(\frac{x^2}{2}\right) = x dx$ ...“<sup>8</sup>. Leibniz na křivky nahlížel jako na mnohoúhelník sestavený z nekonečně mnoha nekonečně malých úseček: „...nalézt tečnu ke křivce, to znamená vést přímku spojující dva body křivky, jejichž vzdálenost je nekonečně malá nebo též prodloužit stranu nekonečně úhlového mnohoúhelníka, který je pro nás s křivkou totožný...“<sup>9</sup>

### 1.3.3 Srovnání přístupu Newtona a Leibnize

Oba tito matematikové dospěli k infinitezimálnímu počtu nezávisle na sobě, na jejich přístupech lze pozorovat rozdíly. Například Leibniz se snaží vytvořit obecné metody a algoritmy a snaží se sjednotit přístupy k různým problémům, zatímco Newton řeší především úlohy praktického charakteru a soustředí se na konkrétní výsledky. Leibniz se snaží vytvořit jednotnou a vhodně zvolenou symboliku, kdežto Newton je k symbolice lhostejný. I přes jejich rozsáhlé vzájemné spory, vytvořili aparát moderní matematické analýzy. Ten byl základem matematického uvažování a během 18. stol. se bouřlivě rozvíjel. (Schwabik, Šarmanová, 1996)

## 1.4 Matematická analýza v 18. století

Osmnácté století se neslo ve znamení matematické ofenzívy v oblasti matematické analýzy, které bychom dnes nazývali aplikace matematiky. Matematikové 17. a 18. století byli zároveň fyziky a byla to právě fyzika, která přicházela s potřebou rozšířit pojmy v oblasti integrálu. Problémem konce 17. století bylo, že matematici přijali infinitezimální veličiny jako skutečné a bez pochybností tuto vědu využívali pro praktické výpočty, proti čemuž se však ozvaly i kritické ohlasy, jak v řadách odpůrců Newtona, tak v řadách odpůrců Leibnize. Tyto spory pokračovaly mezi matematiky celé 18. století. Někteří se tak snažili vyhýbat použití nekonečně malých veličin a pracovali jen s konečnými přírůstky. Mezi takové patřil Newtonův následovník **Brook Taylor**, známý především publikací o rozvoji funkcí do mocninných řad, tzv. Taylorovou řadou:

---

<sup>7</sup> SCHWABIK, Štefan a ŠARMANOVÁ, Petra. *Malý průvodce historií integrálu*. Praha: Prometheus, 1996, s. 43.

<sup>8</sup> Tamtéž, s. 44.

<sup>9</sup> Tamtéž, s. 44.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

Další významnou osobností byl **Jean Baptiste Le Rond d'Alembert**, který se pokusil definovat derivaci jako limitu poměru přírůstků veličin, což bylo prvním krokem k dnešní definici derivace pomocí limity. Jeho myšlenky by se daly zapsat vztahem:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow \infty} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Mezi významné osobnosti přelomu 17. a 18. stol. patří také bratři **Jakob a Johann Bernoulli**, kteří se stali následovníky Leibnize. Společně s výpočty integrálů se věnovali problematice nekonečných řad, které využívali při výpočtu integrálů složitých algebraických a transcendentních funkcí. Dokázali najít součty mnoho řad, např.:  $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ ,  $\sum \frac{1}{n^2-1}$ , problémem se však stala řada  $\sum \frac{1}{n^2}$ , kterou se jim sečíst nepodařilo. Tento problém vyřešil až Leonhard Euler. Johann Bernoulli nastupuje po smrti svého bratra Jakoba na jeho profesorské místo na univerzitě v Basileji, kde vyučuje mladého markýze de l'Hospitala a později mu předává své výsledky. **Markýz Guillaume François de l'Hospital** publikuje první učebnici diferenciálního a integrálního počtu. Kniha je dnes známá především kvůli Bernoulliho výsledku, tzv. „l'Hospitalovu pravidlu“, pomocí kterého lze dospět k určení limity podílu dvou funkcí, v němž se jak čítec, tak jmenovatel blíží nule. Tím se dostáváme k největšímu matematikovi 18. století, kterým byl **Leonhard Euler**. (Schwabik, Šarmanová, 1996)

## 1.4.1 Leonhard Euler

### 1.4.1.1 Život

Euler žil v letech 1707-1783 a byl žákem Johanna Bernoulliho. Celý svůj život se věnoval matematice a jeho celkový počet děl a prací dosahuje čísla 886. I přes úplnou ztrátu zraku pokračoval ve své práci, své objevy diktoval. (Schwabik, Šarmanová, 1996)



Obrázek 9: Leonhard Euler [10, s. 51]

### 1.4.1.2 Matematický přínos

Euler jako první definoval logaritmus jako exponent a zavedl známé Eulerovo číslo, jako základ přirozeného logaritmu. Toto číslo následně vyčíslil na 23 desetinných míst pomocí nekonečné řady. Zajímavé je především jak Euler derivuje nekonečné řady a funkce. Stejně jako matematikové 17. století zanedbává diferenciály vyšších řádů  $(dx)^2$ ,  $(dx)^3$ , ... (Schwabik, Šarmanová, 1996)

Příklad 1. Derivace funkce  $y = x^n$ :

$$dy = (x + dx)^n - x^n = \left( x^n + nx^{n-1}dx + \frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}(dx)^2 + \dots \right) - x^n$$

$$dy = nx^{n-1}dx \text{ a odtud } y' = \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}.$$

Euler přišel na plný význam Taylorova rozvoje, když ho použil ve své knize o diferenciálním počtu. Jedním z důkazů jeho skvělé manipulace s řadami, byl nepochybně součet řady  $\sum \frac{1}{n^2}$ , kdy jako první dochází k výsledku  $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$ . (Schwabik, Šarmanová, 1996)

## 1.5 Určitý integrál

Jak již bylo zmíněno, 18. století bylo obdobím velkého množství poznatků, které však neměly pevný základ. Nejasnosti vznikaly především kolem nekonečně malých veličin, konvergencí řad, výpočtů limit, ale i kolem derivací a integrálů. V 18. století bylo integrování považováno za inverzní operaci k derivování a funkce se integrovaly podle Newtonova fundamentálního vztahu. Eudoxova exhaustivní metoda se občas používala pro aproximaci velikosti plochy pod křivkou, avšak pouze v případě, že k dané funkci nebylo možné určit primitivní funkci. V 19. století nastává zpřesňování matematické analýzy. Byly rozlišeny pojmy konvergence a absolutní konvergence řad, konvergence a stejnoměrná konvergence posloupností funkcí, spojitost a stejnoměrná spojitost funkcí apod. V matematické analýze se věnovalo zvýšené pozornosti kvantifikátorům, které sloužily k objasnění těchto pojmů v definicích. Jedním z matematiků, kteří se věnovali upřesnění pojmu integrál, byl A. - L. Cauchy. (Schwabik, Šarmanová, 1996)

### 1.5.1 Augustin-Louis Cauchy



Obrázek 10: Augustin-Louis Cauchy [10, s. 54]

Význam Cauchyho díla spočívá především v tom, že položil základy matematické analýzy v dnešní podobě. V roce 1823 formuloval novou definici integrálu a zajímal se jeho existencí pro širokou škálu funkcí. Snažil se určit obsah plochy vymezené osou  $x$ , přímkami  $x = a, x = b$  a grafem funkce  $f$ .

„Pro spojitou funkci  $f: [a, b] \rightarrow R$  postupoval Cauchy takto:

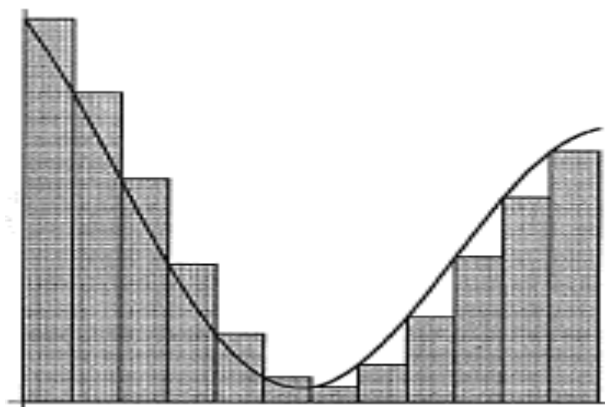
Rozdělil interval  $[a, b]$  na  $n$  částí pomocí bodů

$$a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b.$$

Tomuto dělení  $D$  intervalu  $[a, b]$  přiřadil aproximující součet

$$(1) \quad S = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}),$$

Kterým vyjádřil součet obsahů obdélníků se základnou  $[x_{i-1}, x_i]$  a výškou, která je dána funkční hodnotou  $f(x_{i-1})$ . Cauchyovým úmyslem bylo definovat integrál  $\int_a^b f(x)dx$  jako limitu součtů tvaru (1), když maximum délek „dělicích“ intervalů  $[x_{i-1}, x_i]$  bude konvergovat k nule. Jde tedy o aproximaci integrálu, tj. obsahu výše vymezené plochy v rovině, pomocí součtu ploch obdélníků. Za pozornost stojí i ta skutečnost, že při vytváření součtu  $S$  použil Cauchy pro interval  $[x_{i-1}, x_i]$  funkční hodnoty funkce  $f$  v levém bodě tohoto intervalu. Podobně lze použít funkční hodnoty  $f(x_i)$  v pravém koncovém bodě. Obdobné pojmy se užívají dodnes pod názvem levý resp. pravý Cauchyův integrál.“ K tomuto poznamenal, že „... když délky dělicích intervalů jsou velmi malé a jejich počet  $n$  velmi velký, bude mít způsob rozdělení pouze neznatelný vliv na hodnotu  $S$ .“<sup>10</sup>



Obrázek 11: Cauchyho integrální součet [10, s. 54]

Cauchy se potom snažil o zjemnění normy dělení  $D$ , kde každou část intervalu  $[x_{i-1}, x_i]$  rozdělil dalším dělením  $D'$ . Takto rozdělil všechny intervaly vzniklé dělením  $D$  a následně konstatoval, že hodnota  $S$  vypočítaná za pomoci intervalů vzniklých dělením  $D$  se zmatelně nezmění, když přejdeme k jinému způsobu výpočtu, kde se každý interval  $[x_{i-1}, x_i]$  rozdělí do mnoha dalších. Cauchy zde správně usoudil, že pokud bude dělení  $D$  dost jemné, bude mít jeho zjemnění opravdu minimální vliv na výslednou hodnotu  $S$ . Avšak přehlédl zde fakt, že toto tvrzení platí pouze pro stejnoměrně spojité funkce na daném intervalu, tj. že ke každému  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  tak, že pro  $x', x'' \in [a, b]$ ,  $|x' - x''| < \delta$  platí  $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ . S tímto nedostatkem se až v pozdějších letech vyrovnal Bernhard Reimann. (Schwabik, Šarmanová, 1996)

<sup>10</sup> SCHWABIK, Štefan a ŠARMANOVÁ, Petra. *Malý průvodce historií integrálu*. Praha: Prometheus, 1996, s. 55-56.

## 1.5.2 Bernhard Riemann

### 1.5.2.1 Život

Bernhard Riemann se narodil 17. září 1826 ve vesnici Breselenz, která se nachází poblíž Dannenburgu v Německu. Roku 1846 nastoupil na univerzitu v Göttingenu, kde studoval filologii a teologii, k čemuž ho vedl jeho otec, který byl kazatel. Riemann ve svém volném čase chodil navštěvovat matematické přednášky od Sterna (numerické řešení rovnic, určité integrály), Goldschmidta (zemský magnetismus) nebo Gausse (metoda nejmenších čtverců). Nakonec shledal, že jeho sklon k matematice je veliký a požádal



Obrázek 12: Bernhard Riemann [10, s. 58]

otce, aby se jí mohl věnovat zcela. Od roku 1847 studoval v Berlíně, kde poslouchal například Dirichleta (teorie čísel, teorie určitých integrálů a parciálních diferenciálních rovnic) nebo Jacobiho (analytická mechanika, vyšší algebra). Riemann získal dokonce uznání v očích Gausse, když přednesl svou práci O hypotézách, které jsou základem geometrie. Po Gaussově smrti (22. února 1855), měl být Riemann jmenován mimořádným profesorem. Do Göttingenu byl však povolán Peter Gustav Lejeune Dirichlet a tyto snahy byly bezvýsledné. Profesorem se tak stal až o čtyři roky později, po Dirichletově smrti. (Bečvář, Fuchs, 1996)

### 1.5.2.2 Riemannův integrál

Riemann v roce 1854 znovu nastoluje otázku, co je vlastně integrál  $\int_a^b f(x)$ . Ptá se, jak se má chápat to, s čím se už více než jedno století běžně pracovalo ve fyzice. Riemannovy slovy: „Abychom toto stanovili, zvolme mezi  $a$  a  $b$  seřazenou dle velikosti řadu hodnot  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  a označme kvůli krátkosti  $x_1-a$  znakem  $\delta_1$ ,  $x_2-x_1$  znakem  $\delta_2, \dots, b-x_{n-1}$  znakem  $\delta_n$  a buď  $\varepsilon$  kladný pravý zlomek. Potom hodnota součtu  $S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1 \delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2 \delta_2) + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3 \delta_3) + \dots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n \delta_n)$  bude záviset na volbě intervalů  $\delta$  a veličin  $\varepsilon$ . Bude-li nyní mít (ten součet) tu vlastnost, že ať jsou zvoleny  $\delta$  a  $\varepsilon$  jakkoli, bude se nekonečně blížit k pevné hranici  $A$  jakmile budou všechna  $\delta$  nekonečně malá, pak se tato hodnota (tj.  $A$ ) nazývá  $\int_a^b f(x)dx$ .

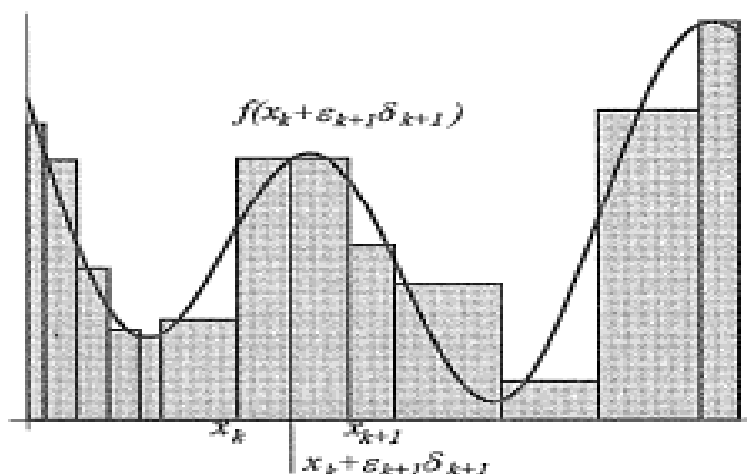
Když tuto vlastnost nemá, pak nemá  $\int_a^b f(x)dx$  význam. <sup>11</sup>

<sup>11</sup> SCHWABIK, Štefan a ŠARMANOVÁ, Petra. *Malý průvodce historií integrálu*. Praha: Prometheus, 1996, s. 59.

Tato definice je velice podobná té, kterou známe z novodobých učebnic. Je však zajímavé ji srovnat s Cauchyovou definicí. Riemann definuje integrál takto:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

kde  $\delta$  znamená maximum délek  $\delta_i$  intervalů  $[x_{i-1}, x_i]$  v dělení  $D$ . Zde, je možné usoudit, že jednotlivé definice se liší pouze tím, že Riemann volí libovolný bod  $\xi_i = x_{i-1} + \varepsilon_i \delta_i$  v  $i$ -tém intervalu  $[x_{i-1}, x_i]$  v dělení  $D$  intervalu  $[a, b]$ , kdežto Cauchy počítá s levou, resp. pravou funkční hodnotou na  $i$ -tém intervalu. Riemann tedy ještě více zobecnil Cauchyho integrál tím, že už integrovaný interval funkce nemusel splňovat požadavek stejnoměrné spojitosti. (Schwabik, Šarmanová, 1996)



Obrázek 13: Riemannův integrální součet [10, s. 60]

### 1.5.3 Gaston Darboux

Pouze ve stručnosti zmíním úvahy francouzského matematika Gastona Darboux, který dal vznik hornímu a dolnímu integrálnímu součtu. Pracuje s pojmy supremum<sup>12</sup> a infimum<sup>13</sup>. Potvrdil, že pokud horní a dolní integrál mají stejnou hodnotu, jedná se o Riemannův integrál funkce  $f$  od  $a$  do  $b$ . Pokud se hodnoty dolního a horního integrálu liší, říkáme, že Riemannův integrál funkce  $f$  neexistuje. Tato definice se stala základem výkladu o Riemannově integrálu. (Bečvář, Fuchs, 1996)

<sup>12</sup> Nejmenší horní závora (majorita), pokud má množina maximum, tak je zároveň i supremem.

<sup>13</sup> Největší dolní závora (minorita), pokud má množina minimum, tak je zároveň infimem.

## 2 Neurčitý integrál

Tato práce se zabývá problematikou určitého integrálu, takže kapitola o neurčitém integrálu bude obsahově stručná. Považuji ale za podstatné se o neurčitém integrálu alespoň zmínit, uvést základní vzorce a pravidla pro výpočet, které se používají při výpočtu primitivní funkce a tedy i Newtonova určitého integrálu.

### 2.1 Primitivní funkce

#### 2.1.1 Definice

„Nechť  $f(x)$  je funkce definovaná v intervalu  $I$ . Každá funkce  $F(x)$ , která je diferencovatelná (má derivaci) v intervalu  $I$  a splňuje na něm rovnost

$$F'(x) = f(x),$$

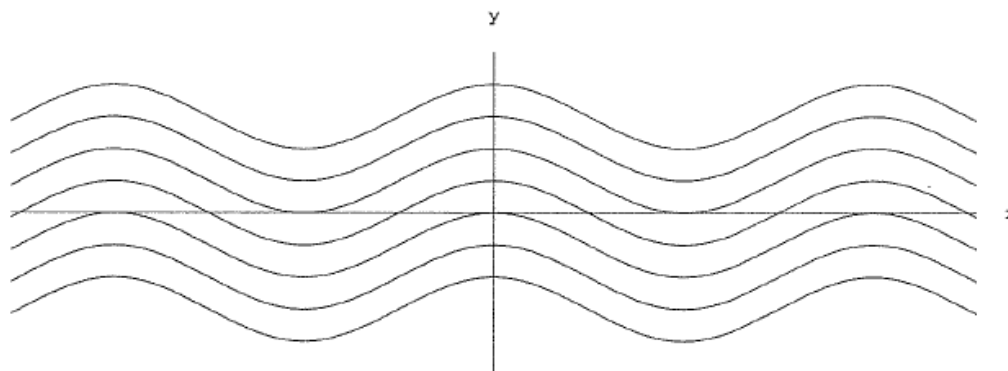
se nazývá primitivní funkce k funkci  $f(x)$  v intervalu  $I$ .“<sup>14</sup>

#### 2.1.2 Integrační konstanta

Z definice je jasné, že hledání primitivní funkce je hledání inverzní funkce k derivování. Pokud vezmeme v potaz, že derivace konstanty je nula, musíme s tím počítat i u integrování. Proto se zavádí tzv. **integrační konstanta**, která se při výpočtech často opomíná nebo vynechává z důvodu úspory místa, avšak i přes její absenci s ní počítáme. Píšeme:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Z toho můžeme usoudit, že integrování není jednoznačná operace jako derivování. Nedá se jednoznačně určit graf funkce, protože integrační konstanta  $C$  může být jakákoliv. Budeme tedy znát tvar grafu, tzv. **integrální křivky**, ale konstanta  $C$  tuto křivku může posunout ve směru osy  $Y$ . Vzniká tak množina všech primitivních funkcí. (Slavík, Dvořáková, 2007)



Obrázek 14: Primitivní funkce k funkci  $f(x) = \cos x$  [11, s. 6]

<sup>14</sup> LAITCHOVÁ, Jitka. *Matematická analýza 2: integrální počet : (pro distanční studium)*. 1. vydání. Olomouc: Univerzita Palackého, 2001, s. 9.



## 2.2 Neurčitý integrál

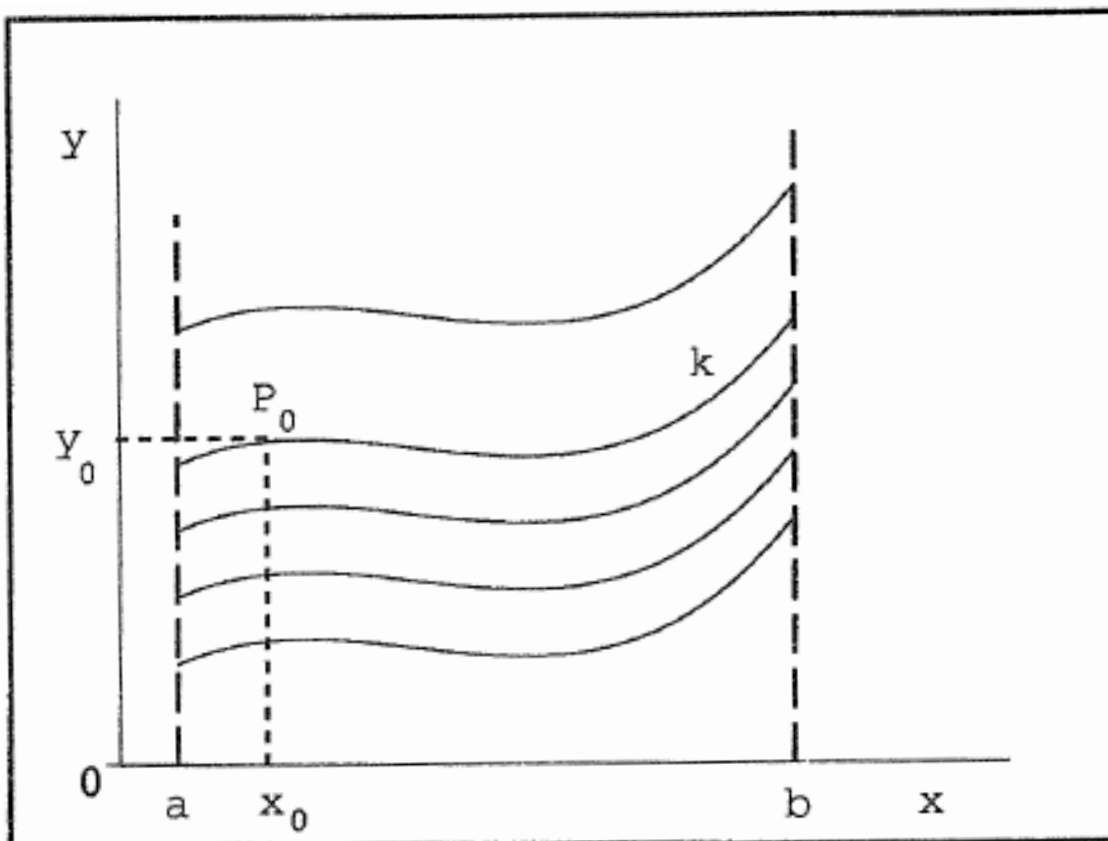
### 2.2.1 Definice

„Množinu všech primitivních funkcí k dané funkci  $f(x)$  nazýváme **neurčitým integrálem** k dané funkci, krátce **integrálem**, a značíme podle Leibnize symbolem

$$\int f(x)dx$$

a čteme **integrál**  $f(x)dx$ .“<sup>15</sup>

Z této množiny primitivních funkcí si potom vybereme jednu, pokud požadujeme, aby křivka procházela daným bodem  $P_0(x_0, y_0)$ . Tyto jednoznačné funkce, např.:  $F(x) - 2$  nebo  $F(x)$ , nazýváme **partikulární integrály** a funkce nejednoznačné  $F(x) + C$  nazýváme **obecný integrál** funkce  $f(x)$ . (Laitochová, 2001)



Obrázek 15: Integrální křivky [5, s. 10]

<sup>15</sup> LAITOVÁ, Jitka. *Matematická analýza 2: integrální počet : (pro distanční studium)*. 1. vydání. Olomouc: Univerzita Palackého, 2001, s. 9.

## 2.3 Základní vzorce

Ze známých vztahů pro derivace plynou tyto vzorce:

$$\begin{aligned}\int k dx &= kx + c \\ \int x^r dx &= \frac{x^{r+1}}{r+1} + c; \text{ pro } r \neq -1 \\ \int \frac{1}{x} dx &= \ln|x| + c; \text{ pro } x \neq 0 \\ \int e^x dx &= e^x + c \\ \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + c \\ \int \sin x dx &= -\cos x + c \\ \int \cos x dx &= \sin x + c \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \operatorname{tg} x + c \\ \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\operatorname{cotg} x + c \\ \int \frac{1}{x^2 + 1} dx &= \operatorname{arctg} x + c = -\operatorname{arccot} x + c \\ \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \operatorname{arc} \sin x + c = -\operatorname{arc} \cos x + c \\ \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx &= \ln|f(x)| + c\end{aligned}$$

(Došlý, Zemánek, 2011)

Z praktického použití těchto vztahů – výpočtů, je třeba poukázat na nejčastější chyby. Především se chybí v zapisování integrační konstanty  $C$ , na kterou se lehce pozapomene. Mezi další nejčastější chyby patří výpočet  $\int 0 dx$ , jehož výsledek je právě tato integrační konstanta  $C$ . Jako třetí a poslední častou chybu bych uvedl výpočet integrálu  $\int dx = \int 1 dx$ , kdy ve zkráceném zápisu (jednička se nepíše) láká studenty představa, že v integrálu nic není, takže si tam představí nulu. Dále bych rád uvedl několik pravidel pro výpočet integrálů.

## 2.4 Pravidla pro výpočet integrálu

Nyní si uvedeme tři základní pravidla, která využíváme při počítání s integrály.

$$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$$

Slovy lze můžeme zapsat: „Integrál součtu dvou funkcí se rovná součtu integrálů těchto funkcí“

$$\int (f_1(x) - f_2(x))dx = \int f_1(x)dx - \int f_2(x)dx$$

Slovy lze můžeme zapsat: „Integrál rozdílu dvou funkcí se rovná rozdílu integrálů těchto funkcí“

$$\int c_1 f_1(x)dx = c_1 \int f_1(x)dx$$

Slovy lze můžeme zapsat: „Integrál součinu konstanty  $c_1$  a funkce  $f_1(x)$  se rovná součinu konstanty  $c_1$  a integrálu funkce  $f_1(x)$ .“ (Laitochová, 2001)

## 2.5 Integrace per partes

Integrace per partes neboli integrace po částech. Tato metoda se používá při složitějších integrálech, např. když se integrál skládá ze součinu dvou funkcí, nebo se skládá z jedné funkce, kterou nelze integrovat pomocí tabulky.

### 2.5.1 Věta

„Nechť funkce  $u(x)$  a  $v(x)$  mají v intervalu  $I$  spojité derivace  $u'$  a  $v'$ . Potom platí

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx. \text{"}^{16}$$

Při výpočtech se využívá pro přehlednost a efektivitu zápis:

$$\int uv' dx = \left| \begin{array}{ll} u = u(x) & v' = v'(x) \\ u' = u'(x) & v = v(x) \end{array} \right| = uv - \int u'v dx.$$

### 2.5.2 Příklad

$$\int x \sin x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = \sin x \\ u' = 1 & v = -\cos x \end{array} \right| = x(-\cos x) - \int -\cos x dx$$

Z čehož vyplývá, že:

$$\underline{\underline{\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x + C.}}$$

---

<sup>16</sup> LAITOCHOVÁ, Jitka. *Matematická analýza 2: integrální počet : (pro distanční studium)*. 1. vydání. Olomouc: Univerzita Palackého, 2001, s. 16.

## 2.6 Integrace substitucí

V následující větě je ukázáno, jak vypočítat integrály, když zavedeme proměnlivou substituci  $x = \varphi(t)$ . Tuto substituci využíváme při výpočtu obtížných příkladů, které jsou velmi složité při využití tabulky integrálů nebo podle ní nejsou řešitelné vůbec. Obtížnost této metody bývá v nalezení vhodné substituce.

### 2.6.1 Věta

„Nechť  $f(x)$  je spojitá funkce v intervalu  $(a, b)$  a nechť

$$\int f(x) dx = F(x).$$

Nechť dále  $x = \varphi(t)$  je spojitá funkce v intervalu  $(\alpha, \beta)$ , která zde splňuje nerovnosti  $a < \varphi(t) < b$  a má spojitou derivaci  $\varphi'(t)$ . Složená funkce  $F[\varphi(t)]$  má potom v intervalu  $(\alpha, \beta)$  derivaci

$$F'[\varphi(t)] \varphi'(t) = f[\varphi(t)] \varphi'(t),$$

neboť  $F'(x) = f(x)$ , takže

$$\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = F[\varphi(t)].$$

Porovnáme-li tyto dva vztahy dostaneme

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt,$$

přičemž  $x = \varphi(t)$  a tedy  $dx = \varphi'(t) dt$ .<sup>17</sup>

### 2.6.2 Příklad

$$\begin{aligned} \int \frac{2x}{x^2 + 2} dx &= \text{Substituce} \left| \begin{array}{l} t = x^2 + 2 \\ dt = 2x dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \text{Dosazení} \left| \begin{array}{l} t = x^2 + 2 \\ dt = 2x dx \end{array} \right| \\ &= \ln|x^2 + 2| + C \end{aligned}$$

## 2.7 Integrace racionální (lomené) funkce

Tuto metodu využíváme při integrování racionálních funkcí. Víme, že každá racionální funkce je podílem dvou polynomů, které můžeme rozložit na součet polynomu a konečného počtu parciálních (částečných) zlomků. Potom už jen stačí integrovat polynom a jednotlivé parciální zlomky.

---

<sup>17</sup> LAITCHOVÁ, Jitka. *Matematická analýza 2: integrální počet : (pro distanční studium)*. 1. vydání. Olomouc: Univerzita Palackého, 2001, s. 18.

## 2.7.1 Jednoduchý rozklad

Na příkladech č. 1 a č. 2 si ukážeme jednoduchý rozklad funkce, který známe ze základní školy. Jednotlivé polynomy jednoduše vydělíme a dostaneme polynom, který budeme integrovat.

### 2.7.1.1 Příklad 1

Racionální funkci upravíme

$$\frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x^2 - 1} = x^2 + 1,$$

nyní už stačí pravou stranu rovnice integrovat

$$\int (x^2 + 1) dx = \frac{x^3}{3} + x + C.$$

### 2.7.1.2 Příklad 2

Racionální funkci upravíme

$$\frac{x + 1}{x^2 - 1} = \frac{x + 1}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{1}{x - 1},$$

nyní už stačí pravou stranu rovnice integrovat

$$\int \frac{1}{x - 1} dx = \left| \frac{t = x - 1}{dt = 1 dx} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x - 1| + C.$$

## 2.7.2 Rozklad na parciální zlomky

Víme, že racionální funkce, kde je stupeň čitatele  $L(x)$  větší než stupeň jmenovatele  $M(x)$ , rozložíme jednoduše tak, že vydělíme čítec jmenovatelem a dostáváme rozklad

$$\frac{L(x)}{M(x)} = P(x) + \frac{Q(x)}{M(x)},$$

kde  $P(x)$  je součet mnohočlenu a  $\frac{Q(x)}{M(x)}$  je racionální funkce, ve které  $Q(x)$  je nižšího stupně

než  $M(x)$ . Tuto racionální funkci můžeme rozložit na jednoduché, neboli parciální zlomky.

Tyto parciální zlomky mohou být dvojího typu

$$(1) \frac{A}{(x - a)^n}; \quad A, a \in R; \quad n \in N,$$

$$(2) \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n}; \quad A, B, p, q \in R; \quad p^2 - 4q < 0; \quad n \in N.$$

Podmínka, že  $p^2 - 4q < 0$  znamená, že polynom  $x^2 + px + q$  nemá reálný kořen. Rozklad racionální funkce na součet polynomu a parciálních zlomků je jednoznačná operace.

Koeficienty v čitatelích polynomu určujeme například sestavením soustavy lineárních rovnic. Ukážeme si na příkladu č. 1. (Tkadlec, 2004)

### 2.7.2.1 Příklad 1

Vypočítejte

$$\int \frac{x^3 - 7x + 24}{x^2 - 2x - 8} dx.$$

Racionální funkci nejprve částečně vydělíme

$$\frac{x^3 - 7x + 24}{x^2 - 2x - 8} = x + 2 + \frac{5x - 8}{x^2 - 2x - 8}.$$

Nyní rozložíme jmenovatel na součin kořenových činitelů

$$x + 2 + \frac{5x - 8}{(x + 2)(x - 4)}.$$

Tuto funkci rozepíšeme na součet polynomu a parciálních zlomků

$$x + 2 + \frac{A}{(x + 2)} + \frac{B}{(x - 4)}.$$

Porovnáme rozkládanou ryze lomenou funkci s těmito parciálními zlomky

$$\frac{A(x - 4) + B(x + 2)}{(x - 4)(x + 2)} = \frac{5x - 8}{(x + 2)(x - 4)}.$$

Znásobíme obě strany společným jmenovatelem a dostáváme

$$5x - 8 = Ax - 4A + Bx + 2B$$

Porovnáme koeficienty a dostáváme soustavu

$$x^1: 5 = A + B$$

$$x^0: -8 = -4A + 2B$$

Řešení této soustavy tedy je

$$A = 3; B = 2$$

Po dosazení nám tedy vyjde

$$\frac{x^3 - 7x + 24}{x^2 - 2x - 8} = x + 2 + \frac{3}{(x + 2)} + \frac{2}{(x - 4)}.$$

Nyní už nezbyvá nic jiného než vypočítat integrál tohoto polynomu a těchto parciálních zlomků

$$\int \left( x + 2 + \frac{3}{(x + 2)} + \frac{2}{(x - 4)} \right) dx = \frac{x^2}{2} + 2x + 3 \ln|x + 2| + 2 \ln|x - 4| + C.$$

### 2.7.2.2 Příklad 2

Postupujeme analogicky jako u prvního příkladu, proto budu, pro lepší přehlednost, vynechávat některé kroky.

Vypočítejte

$$\int \frac{3x^2 - 5x + 12}{x(x^2 + 1)}.$$

Řešení

$$\frac{3x^2 - 5x + 12}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

$$3x^2 - 5x + 12 = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx$$

$$x^2: A + B = 3$$

$$x^1: C = -5$$

$$x^0: A = 12$$

$$A = 12; B = -9; C = -5$$

Tedy

$$\int \frac{3x^2 - 5x + 12}{x(x^2 + 1)} dx = \int \left( \frac{12}{x} - \frac{9x + 5}{x^2 + 1} \right) dx = 12 \int \frac{dx}{x} - 9 \int \frac{x}{x^2 + 1} dx - 5 \int \frac{dx}{x^2 + 1}$$

$$\int \frac{3x^2 - 5x + 12}{x(x^2 + 1)} dx = 12 \ln|x| - \frac{9}{2} \ln|x^2 + 1| - 5 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C.$$

### 2.7.2.3 Příklad 3

Vypočítejte

$$\int \frac{5x^3 + 2x^2}{(x - 1)^2}.$$

Řešení

$$\frac{5x + 2}{(x - 1)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2}$$

$$5x + 2 = Ax - A + B$$

$$x^1: A = 5$$

$$x^0: B - A = 2$$

$$A = 5; B = 7$$

Tedy

$$\int \frac{5x^3 + 2x^2}{(x - 1)^2} = \int \left( \frac{5}{x - 1} + \frac{7}{(x - 1)^2} \right) dx = \int \frac{5}{x - 1} dx + \int \frac{7}{(x - 1)^2} dx$$

$$\int \frac{5x^3 + 2x^2}{(x-1)^2} = 5 \ln|x-1| - \frac{7}{(x-1)} + C.$$



### 3 Určitý integrál

V této kapitole se budeme zabývat Newtonovým a Riemannovým určitým integrálem a způsoby jejich výpočtu. Abychom byli schopni definovat Riemannův určitý integrál, je třeba si také vysvětlit pojem integrální součet.

#### 3.1 Newtonův integrál

Historicky nejstarší definice Newtonova integrálu velmi úzce souvisí s pojmem primitivní funkce. Newtonův integrál lze využít, pokud pro každé  $x \in (a, b)$  platí  $F'(x) = f(x)$  a pokud je funkce  $F$  na tomto intervalu spojitá. Potom můžeme tvrdit, že platí:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Pokud tedy k dané funkci známe její primitivní funkci, Newtonův integrál můžeme snadno spočítat podle této definice. Dále bych se rád věnoval Riemannovu integrálu, nejdříve je ale třeba definovat si integrální součty. (Daněček, Dlouhý, Příbyl, 2007)

#### 3.2 Integrální součty

Nechť je funkce  $f(x)$  definovaná a ohraničená na uzavřeném intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Tento interval  $\langle a, b \rangle$  rozdělíme dělicími body  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  tak, že

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Rozdělení na tyto tzv. **částečné intervaly**  $\Delta x_k = \langle x_{k-1}, x_k \rangle$ , kde  $k = 1, 2, \dots, n$ , budeme nazývat **dělení intervalu**  $\langle a, b \rangle$ . Označení  $\Delta x_k$  současně využijeme k označení délky intervalu  $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$ . Je tedy zřejmé, že platí

$$\sum_{k=1}^n \Delta x_k = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n = b - a.$$

Délku největšího z intervalů  $\Delta x_k, k = 1, 2, \dots, n$ , označíme  $\delta_n$  a nazýváme **norma dělení**. (Laitochová, 2001)

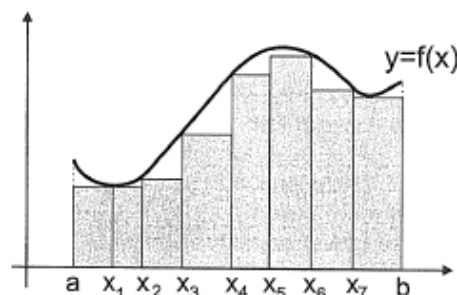
Nechť  $m$  je infimum funkce na celém intervalu  $\langle a, b \rangle$  a  $M$  je supremum funkce na celém intervalu  $\langle a, b \rangle$ . V každém z částečných intervalů určíme infimum  $m_k$  funkce  $f$ . A číslo  $m_k(x_k - x_{k-1})$  vyjadřuje obsah obdélníků sestrojeného nad intervalem  $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$  o výšce  $m_k$  a  $\sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1})$  je tedy obsah mnohoúhelníku, který je sjednocením těchto obdélníků. Podobně pokud  $M_k$  je supremum funkce  $f$  na intervalu  $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$ , je  $M_k(x_k - x_{k-1})$  obsah obdélníku o základně  $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$  a výšce  $M_k$  a  $\sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1})$  je obsah mnohoúhelníku, který je sjednocením všech těchto obdélníků. (Novák, 2005)

Nechť  $c_k \in \Delta x_k, k = 1, 2, \dots, n$ , je libovolně zvolený bod tohoto částečného intervalu. Utvoříme následující tři součty. (Laitochová, 2001)

### 3.2.1 Dolní součet

Dolní součet budeme značit  $s_n$  a platí pro něj

$$s_n = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n.$$

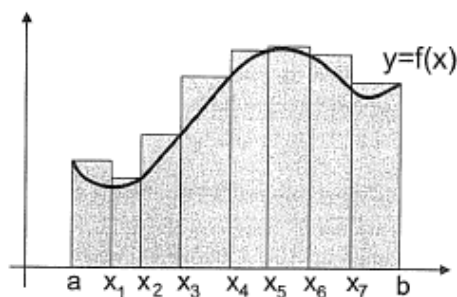


Obrázek 16: Dolní součet [9, s. 34]

### 3.2.2 Horní součet

Horní součet budeme značit  $S_n$  a platí pro něj

$$S_n = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n.$$

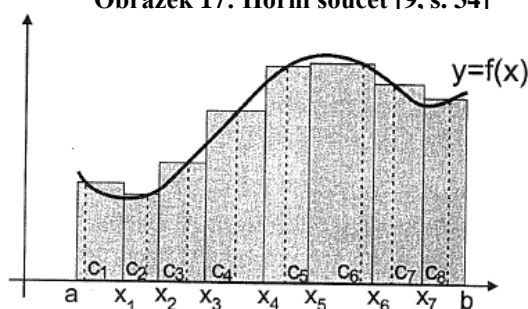


Obrázek 17: Horní součet [9, s. 34]

### 3.2.3 Integrální součet

Integrální součet budeme značit  $\sigma_n$  a platí pro něj

$$\sigma_n = f(c_1) \Delta x_1 + f(c_2) \Delta x_2 + \dots + f(c_n) \Delta x_n.$$



Obrázek 18: Integrální součet [9, s. 41]

Pro jednotlivé tři součty platí, že

$$m(b - a) \leq s_n \leq \sigma_n \leq S_n \leq M(b - a),$$

protože

$$m \leq m_k \leq f(c_k) \leq M_k \leq M.$$

Jednotlivé součty tedy závisí na volbě dělicích bodů  $x_1, x_2, \dots, x_n$  a integrální součet  $\sigma_n$  navíc na volbě bodů  $c_1, c_2, \dots, c_n$ . (Laitochová, 2001)

## 3.3 Riemannův určitý integrál

Uvažujeme posloupnost  $n = 1, 2, \dots$ . Tato posloupnost se bude nazývat **normální posloupnost dělení intervalu  $\langle a, b \rangle$** , pokud bude  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ . Toto tvrzení říká, že když se počet dílků, kterými rozdělíme interval  $\langle a, b \rangle$ , bude limitně blížit nekonečnu, bude se jejich velikost limitně blížit nule. (Laitochová, 2001)

### 3.3.1 Definice

„Jestliže posloupnost  $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$  příslušná k libovolné normální posloupnosti dělení intervalu  $\langle a, b \rangle$  je konvergentní, a to vždy k téže limitě  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$  nezávisle na volbě dělicích bodů  $x_k$  a bodů  $c_k$ , pak tu limitu nazýváme **Riemannovým určitým integrálem** funkce  $f(x)$  od  $a$  do  $b$  a značíme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \int_a^b f(x) dx.$$

Znak  $\int$  má připomínat sčítání v součtu  $\sigma_n = \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$ . Existuje-li integrál  $\int_a^b f(x) dx$ , pak se funkce  $f(x)$  nazývá **integrovatelná** (integrabilní, integrace schopná) v intervalu  $\langle a, b \rangle$  podle Riemanna.<sup>18</sup>

Z této definice je jasné, že počítat integrál podle Riemanna by bylo velice pracné. Riemannův integrál ve většině případů počítáme pomocí Newtonova, protože pokud je funkce  $f$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$  spojitá, jsou si tyto integrály rovny. Pokud funkce  $f$  bude neohraničená na intervalu  $\langle a, b \rangle$  se užívají tzv. nevlastní integrály, kdy se využívá výpočet pomocí limit. Například integrál

$$\int_a^{\infty} f(x) dx,$$

kde  $a \in \mathbb{R}$ , funkce  $f$  je ohraničená a integrovatelná v každém bodě intervalu  $\langle a, b \rangle$ , který je ale podintervalem  $\langle a, \infty \rangle$ . Tento interval tedy budeme definovat jako

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Analogický postup se zavádí i pro funkci neohraničenou v intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Pokud je limita konečná, říkáme, že tento nevlastní integrál konverguje. Pokud tato vlastní limita neexistuje, říkáme, že nevlastní integrál diverguje. (Daněček, Dlouhý, Příbyl, 2007)

### 3.3.2 Vlastnosti Riemannových integrálů

U počítání určitých integrálů je třeba opatrnosti vzhledem k mezím integrálu. Uvedu proto pár pravidel pro meze integrálu. V integrálu  $\int_a^b f(x) dx$  nazýváme číslo  $a$  dolní mez a číslo  $b$  horní mez.

---

<sup>18</sup> LAITTOCHOVÁ, Jitka. *Matematická analýza 2: integrální počet : (pro distanční studium)*. 1. vydání. Olomouc: Univerzita Palackého, 2001, s. 45.

### 3.3.2.1 Pravidla pro meze integrálu

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$
$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

Je-li funkce  $f(x)$  integrovatelná a pokud  $a < c < b$  v intervalu  $\langle a, b \rangle$ , potom

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

### 3.3.2.2 Vlastnosti pro výpočet určitých integrálů

Jsou-li funkce  $f(x)$  a  $g(x)$  integrovatelné v intervalu  $\langle a, b \rangle$ , potom platí:

1. Počítání s konstantou

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx,$$

kde  $k$  je libovolná konstanta.

2. Součet a rozdíl integrálů

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

3. Je-li  $f(x) \leq g(x)$  pro  $\forall x \in \langle a, b \rangle$ , potom

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

4. Protože  $|f(x)|$  je také integrovatelná na intervalu  $\langle a, b \rangle$ , je

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

5. Je-li  $m \leq f(x) \leq M$  pro všechna  $x \in \langle a, b \rangle$ , potom

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a).$$

(Laitochová, 2001)

## 3.3.3 Metody výpočtu Riemannova integrálu

### 3.3.3.1 Základní věta integrálního počtu

„Nechť  $f(x)$  je spojitá funkce na intervalu  $\langle a, b \rangle$  a  $F(x)$  je její primitivní funkce na uvedeném intervalu. Pak je

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \text{"}^{19}$$

Často používáme zkrácený zápis

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b,$$

především pro úsporu místa a větší přehlednost.

Jedná se o Newtonův určitý integrál, který se definuje pro spojitě funkce, protože jediné takto můžeme zajistit existenci primitivní funkce k dané funkci. Lze tedy usoudit, že pokud je funkce  $f(x)$  spojitá a známe její primitivní funkci  $F(x)$ , jsou si Riemannův a Newtonův integrál rovny. (Laitochová, 2001)

Př.:

$$\int_1^2 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \left[ \frac{2^3}{3} \right] - \left[ \frac{1^3}{3} \right] = \frac{8-1}{3} = \frac{7}{3}$$

### 3.3.3.2 Integrace metodou per partes

„Nechť funkce  $u(x)$  a  $v(x)$  mají v intervalu  $\langle a, b \rangle$  spojitě derivace  $u'(x)$  a  $v'(x)$ . Potom platí

$$\int_a^b uv' dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'v dx. \text{"}^{20}$$

Př.:

$$\int_0^1 xe^x dx = \left| \begin{matrix} u = x & v' = e^x \\ u' = 1 & v = e^x \end{matrix} \right| [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - [e - 1] = 1$$

### 3.3.3.3 Integrace substitucí

„Nechť funkce  $f(x)$  je spojitá na množině hodnot funkce  $x = \phi(t)$ , která je spojitá a má spojitou derivaci na intervalu  $\langle \alpha, \beta \rangle$ . Nechť  $a = \phi(\alpha)$ ,  $b = \phi(\beta)$ . Potom

$$\int_a^b f(x) = \int_\alpha^\beta f[\phi(t)] \phi'(t) dt. \text{"}^{21}$$

Integrace substitucí je u určitého integrálu podobná jako u neurčitého, ovšem nesmíme zapomenout, že pokud chceme počítat pomocí substituce, musíme také vypočítat nové meze. Ukážeme si na příkladu.

<sup>19</sup> LAITOVÁ, Jitka. *Matematická analýza 2: integrální počet : (pro distanční studium)*. 1. vydání. Olomouc: Univerzita Palackého, 2001, s. 59-60.

<sup>20</sup> Tamtéž, s. 60.

<sup>21</sup> Tamtéž, s. 61.

Př.:

$$\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx = \text{substituce} \left| \begin{array}{l} x^2+2x+3=t \\ (x+1)dx = \frac{dt}{2} \end{array} \right| = \text{meze} \left| \begin{array}{l} t_1 = 1+2+3 = 6 \\ t_2 = 0+0+3 = 3 \end{array} \right|$$
$$= \frac{1}{2} \int_3^6 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} [\ln t]_3^6 = \frac{1}{2} [\ln 6 - \ln 3] = \frac{1}{2} \ln \frac{6}{3} = \frac{1}{2} \ln 2$$

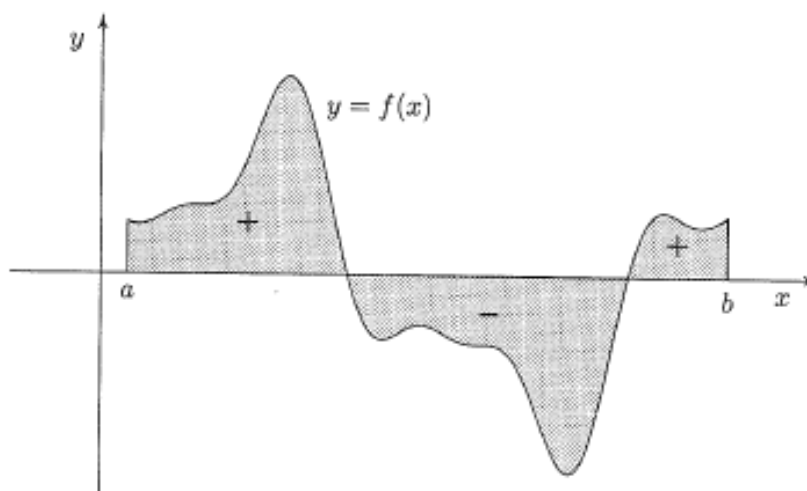
Nové meze se spočítají dosazením původních mezí do funkce, kterou chceme nahradit – jedná se o tzv. **transformaci**. (Laitochová, 2001)

## 4 Aplikace určitého integrálu

V této kapitole se budeme zabývat geometrickými aplikacemi určitého integrálu. U jednotlivých aplikací najdeme příklady, na kterých jsou demonstrovány metody výpočtu.

### 4.1 Určení obsahu rovinné oblasti

Z předchozích tvrzení a úvah je zřejmé, že pokud je funkce  $f$  spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$  a integrovatelná, hodnota Riemannova integrálu udává velikost plochy mezi osou  $x$  a grafem funkce  $f$ . Je však třeba ještě doplnit, že pokud je graf funkce  $f$  nad osou  $x$ , počítáme jeho integrál s kladným znaménkem a pokud je pod osou  $x$ , počítáme se znaménkem záporným.



Obrázek 19: Znázornění znamének funkční hodnoty [2, s. 136]

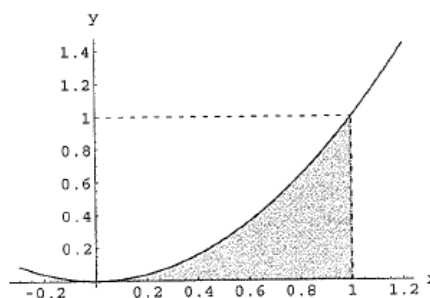
Na obrázku č. 19 je znázorněno chápání plochy vymezené funkcí  $f$  při počítání integrálů. Pokud bychom na tuto skutečnost nebrali ohled a počítali integrál funkce na celém intervalu  $\langle a, b \rangle$ , plochy vymezené funkcí  $f$ , které by byly pod osou  $x$ , by se odečítaly od ploch, které jsou nad touto osou. U některých grafů funkcí v této kapitole jsem využil programu Maple. (Dontová, 2001)

#### 4.1.1 Rovinná oblast vymezená funkcí $f$ a osou $x$

##### 4.1.1.1 Příklad

##### Zadání

Vypočítejte obsah rovinné oblasti funkce  $f(x) = x^2$  na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ .



Obrázek 20: Graf funkce  $f(x) = x^2$  [8, s. 72]

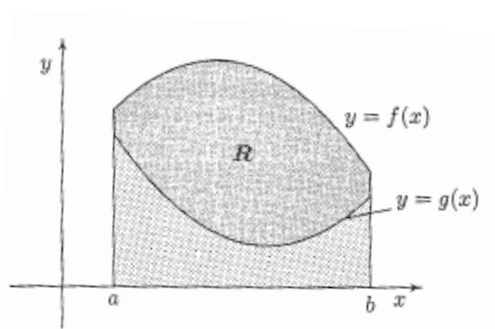
## Řešení

$$S = \int_0^1 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \left[ \frac{1}{3} - 0 \right] = \frac{1}{3}.$$

### 4.1.2 Rovinná oblast vymezená více funkcemi

Nechť  $f$  a  $g$  jsou spojité funkce na intervalu  $\langle a, b \rangle$  takové, že  $g(x) \leq f(x)$  pro všechna  $x \in \langle a, b \rangle$ . Je-li navíc  $g \geq 0$  (je nad osou  $x$ ), pak můžeme z předchozího tvrzení vyvodit, že velikost plochy, která je ohraničená těmito funkcemi a body  $a, b$ , lze zapsat jako

$$P = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$



Obrázek 21: Oblast omezená dvěma funkcemi [2, s. 137]

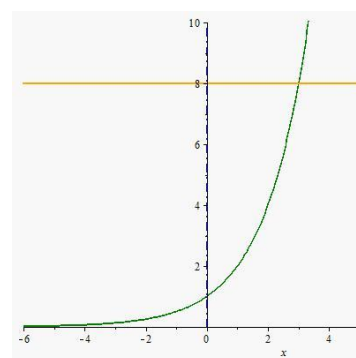
#### 4.1.2.1 Příklad 1

##### Zadání

Vypočítejte obsah rovinné oblasti ohraničené funkcemi  $f(x) = 2^x$  a  $g(x) = 8$  na intervalu  $\langle 0, 3 \rangle$ .

##### Řešení

$$S = \int_0^3 (8 - 2^x) dx = \left[ 8x - \frac{2^x}{\ln 2} \right]_0^3 = \left[ 24 - \frac{8}{\ln 2} - 0 + \frac{1}{\ln 2} \right] = \left( 24 - \frac{7}{\ln 2} \right).$$



Graf 1:  $f(x) = 2^x$  a  $g(x) = 8$

Pokud se však zamyslíme, zjistíme, že i pokud funkce  $g < 0$  (bude pod osou  $x$ ), bude předchozí tvrzení platit. Také se často setkáváme s příklady, které jsou zadány dvěma funkcemi, které plochu vymežují jejich průnikem. Proto pokud chceme vypočítat celou plochu, kterou vymežují, je u nich možné vypočítat meze tak, že spočítáme jejich průsečíky.

#### 4.1.2.2 Příklad 3

##### Zadání

Vypočítejte obsah rovinné oblasti ohraničené funkcemi  $f(x) = x^2 - 4x - 5$  a  $g(x) = 7 - 2x - x^2$ .



## Řešení

V grafu vidíme, že jako první musíme určit průniky těchto funkcí.

$$\begin{aligned}x^2 - 4x - 5 &= 7 - 2x - x^2 \\2x^2 - 2x - 12 &= 0\end{aligned}$$

Pomocí kvadratické rovnice jsme zjistili kořeny

$$x_1 = -2; x_2 = 3$$

Proto budeme počítat obsah v intervalu  $\langle -2, 3 \rangle$ . Stačí pouze

určit, která funkce je větší. Vzhledem ke spojitosti obou zadaných funkcí stačí zjistit jednotlivé funkční hodnoty pro jeden bod uvnitř intervalu a zjistíme, která funkce je v tomto intervalu větší. Proto

$$\begin{aligned}f(0) &= 0 - 0 - 5 = -5 \\g(0) &= 7 - 0 - 0 = 7\end{aligned}$$

vidíme, že

$$g(x) \geq f(x) \text{ na intervalu } \langle -2, 3 \rangle$$

z čehož vyplývá, že obsah plochy bude

$$\begin{aligned}S &= \int_{-2}^3 (g(x) - f(x)) dx = \int_{-2}^3 (7 - 2x - x^2 - x^2 + 4x + 5) dx = \int_{-2}^3 (12 + 2x - 2x^2) dx \\&= \left[ 12x + \frac{2x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} \right]_{-2}^3 = \left[ 36 + 9 - 18 + 24 - 4 - \frac{16}{3} \right] = \frac{125}{3}.\end{aligned}$$

## 4.2 Určení délky křivky

V případě, že je rovnice zadána parametricky, kde  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \Psi(t)$ ,  $t \in \langle a, b \rangle$ , je délka křivky dána vztahem

$$l = \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\Psi'(t)]^2} dt.$$

Ukážeme si na příkladech.

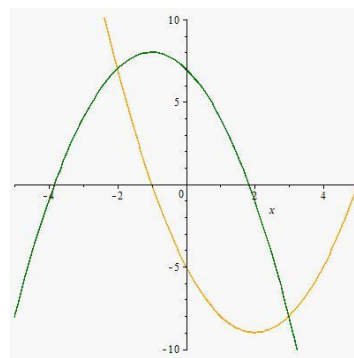
(Daněček, Dlouhý, Příbyl, 2007)

### 4.2.1.1 Příklad 1

#### Zadání

Spočítejte obvod kružnice o poloměru  $r = 5 \text{ cm}$  pomocí integrálu, pokud je její rovnice zadána parametricky:

$$x = \varphi(t) = r * \cos t \Rightarrow \varphi'(t) = r * (-\sin t)$$



**Graf 2:**  $f(x) = x^2 - 4x - 5$  a  $g(x) = 7 - 2x - x^2$

$$y = \Psi(t) = r * \sin t \Rightarrow \Psi'(t) = r * \cos t$$

$$0 < t < 2\pi$$

### Řešení

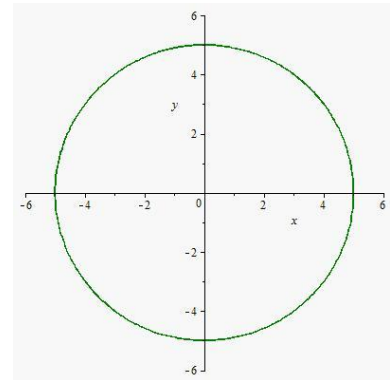
Dosadíme do rovnice

$$l = \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\Psi'(t)]^2} dt,$$

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{[r * (-\sin t)]^2 + [r * \cos t]^2} dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} dt = r \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt =$$

$$r \int_0^{2\pi} \sqrt{1} dt = r \int_0^{2\pi} 1 dt = r[x]_0^{2\pi} = 2\pi r.$$



Graf 3: Kružnice

Právě jsme si odvodili obecný vzorec pro obvod kruhu, do kterého už nám stačí pouze dosadit

$$O = l = 2\pi r = 2\pi * 5 = 10\pi \text{ cm.}$$

Ve speciálních případech bývá křivka zadána i explicitně, kde  $y = f(x)$ ,  $x \in \langle a, b \rangle$  a derivace  $f'(x)$  je konečná na intervalu  $\langle a, b \rangle$ , pak pro výpočet délky křivky platí

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

(Daněček, Dlouhý, Příbyl, 2007)

#### 4.2.1.2 Příklad 2

##### Zadání

Vypočítejte délku křivky  $f(x) = x\sqrt{x}$  na intervalu  $\langle 1, 5 \rangle$ .

##### Řešení

Určíme si derivaci

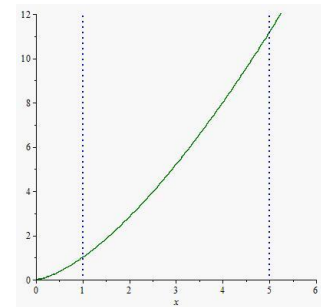
$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

Dosadíme do vzorce

$$l = \int_1^5 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2} dx = \int_1^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx =$$

$$\int_1^5 \sqrt{\frac{4 + 9x}{4}} dx = \frac{1}{2} \int_1^5 \sqrt{4 + 9x} dx =$$

$$\text{substituce } \left| \begin{array}{l} 4 + 9x = t^2 \\ dx = \frac{2t}{9} dt \end{array} \right| = \text{meze } \left| \begin{array}{l} t_1 = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \\ t_2 = \sqrt{4 + 45} = 7 \end{array} \right| = \frac{1}{9} \int_{\sqrt{13}}^7 t\sqrt{t^2} dt =$$



Graf 4:  $f(x) = x\sqrt{x}$

$$= \frac{1}{9} \int_{\sqrt{13}}^7 t^2 dt = \frac{1}{9} \left[ \frac{t^3}{3} \right]_{\sqrt{13}}^7 = \frac{343 - 13\sqrt{13}}{27}.$$

### 4.3 Určení povrchu rotačního tělesa

Povrch pláště rotačního tělesa zjistíme tak, že necháme rotovat křivku kolem osy  $x$ . Využijeme při tom úvahy z předešlé kapitoly. Pokud bude křivka zadána parametricky tak, že  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \Psi(t)$ ,  $\varphi'(t) \neq 0$ ,  $\Psi(t) \geq 0$ ,  $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$  potom pro výpočet povrchu pláště platí

$$S_x = 2\pi \int_a^b \Psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\Psi'(t)]^2} dt.$$

Analogicky můžeme odvodit, že pokud bude křivka rotovat kolem osy  $y$  a upravíme podmínky tak, že  $\varphi(t) \geq 0$ ,  $\Psi'(t) \neq 0$ , tak bude platit

$$S_y = 2\pi \int_a^b \varphi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\Psi'(t)]^2} dt.$$

(Laitochová, 2001)

#### 4.3.1.1 Příklad 1

##### Zadání

Odvoďte vzorec pro výpočet povrchu koule pomocí integrálu – rotace kolem osy  $x$ . Povrch koule spočítáme tak, že necháme rotovat kružnici. Víme, že parametrické rovnice kružnice jsou:

$$x = \varphi(t) = r * \cos t \Rightarrow \varphi'(t) = r * (-\sin t)$$

$$y = \Psi(t) = r * \sin t \Rightarrow \Psi'(t) = r * \cos t$$

##### Řešení

Z podmínek  $\varphi'(t) \neq 0$ ,  $\Psi(t) \geq 0$ ,  $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$  určíme meze

$$0 < t < \pi$$

Dosadíme do rovnice

$$S_x = 2\pi \int_a^b \Psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\Psi'(t)]^2} dt,$$

$$S_x = 2\pi \int_0^\pi r * \sin t \sqrt{[r * (-\sin t)]^2 + [r * \cos t]^2} dt$$

$$= 2\pi \int_0^\pi r * \sin t \sqrt{r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} dt$$

$$= 2\pi r^2 \int_0^\pi \sin t \sqrt{(\sin^2 t + \cos^2 t)} dt = 2\pi r^2 \int_0^\pi \sin t dt = 2\pi r^2 [-\cos t]_0^\pi$$

$$= 2\pi r^2 [1 + 1] = 4\pi r^2$$

### 4.3.1.2 Příklad 2

#### Zadání

Odvoďte vzorec pro výpočet povrchu koule pomocí integrálu – rotace kolem osy  $y$ , pokud víme, že parametrické rovnice kružnice jsou:

$$x = \varphi(t) = r * \cos t \Rightarrow \varphi'(t) = r * (-\sin t)$$

$$y = \Psi(t) = r * \sin t \Rightarrow \Psi'(t) = r * \cos t$$

#### Řešení

Z podmínek  $\varphi(t) \geq 0$ ,  $\Psi'(t) \neq 0 \in \langle \alpha, \beta \rangle$  určíme meze

$$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

Dosadíme do rovnice

$$\begin{aligned} S_y &= 2\pi \int_a^b \varphi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\Psi'(t)]^2} dt, \\ S_x &= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r * \cos t \sqrt{[r * (-\sin t)]^2 + [r * \cos t]^2} dt \\ &= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r * \cos t \sqrt{r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} dt = \\ &= 2\pi r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r * \cos t \sqrt{(\sin^2 t + \cos^2 t)} dt = 2\pi r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r * \cos t dt = \\ &= 2\pi r^2 [\sin t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi r^2 [1 + 1] = 4\pi r^2 \end{aligned}$$

Stejně jako u výpočtu délky křivky, tak u výpočtu povrchu pláště, může být zadána křivka i explicitně tak, že  $y = f(x)$ ,  $x \in \langle a, b \rangle$  a  $f(x) \geq 0$ . Potom při rotaci křivky kolem osy  $x$  platí

$$S_x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

(Laitochová, 2001)

### 4.3.1.3 Příklad 3

#### Zadání

Odvoďte vzorec pro výpočet povrchu válce o výšce  $v$  a poloměru  $r$ .

## Řešení

Nejprve si musíme uvědomit, že povrch pláště válce spočítáme tak, že necháme rotovat přímku rovnoběžnou s osou rotace. Volíme proto meze  $0 < x < v$  a integrovaná funkce bude  $f(x) = r$ .

$$S_x = 2\pi \int_0^v r\sqrt{1+r'^2} dx = 2\pi \int_0^v r\sqrt{1+0} dx = 2\pi r \int_0^v 1 dx = 2\pi r[x]_0^v = 2\pi r v.$$

Vidíme, že jsme spočítali povrch pláště, musíme pouze přičíst obsahy podstav, tento vzorec už známe, tedy

$$S = 2\pi r v + 2\pi r^2 = 2\pi r(v + r).$$

Při rotaci kolem osy  $y$  budeme muset nejdříve změnit označení pro lepší přehlednost, tedy pokud  $x = g(y)$ ,  $y \in (c, d)$  a  $g(y) \geq 0$ , pak

$$S_y = 2\pi \int_c^d g(y)\sqrt{1+[g'(y)]^2} dy.$$

(Laitochová, 2001)

### 4.3.1.4 Příklad 4

#### Zadání

Určete povrch poháru sklenice na víno, která je vysoká 10 cm.

#### Řešení

První si musíme uvědomit, že budeme pracovat s funkcí  $y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$ .

Určíme derivaci

$$f'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

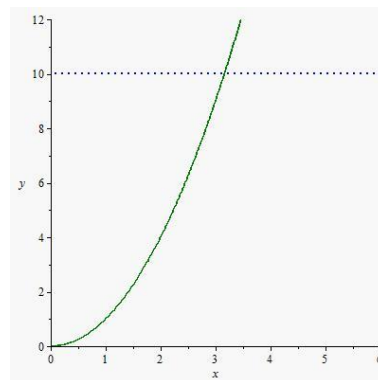
$$S_y = 2\pi \int_0^{10} \sqrt{y} \sqrt{1 + \left[\frac{1}{2\sqrt{y}}\right]^2} dy$$

$$2\pi \int_0^{10} \sqrt{y} \sqrt{1 + \frac{1}{4y}} dy = 2\pi \int_0^{10} \sqrt{y} \sqrt{\frac{4y+1}{4y}} dy = \pi \int_0^{10} \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}} \sqrt{4y+1} dy =$$

$$= \pi \int_0^{10} \sqrt{4y+1} dy = \text{substituce} \left| \begin{array}{l} 4y+1 = t \\ dy = \frac{dt}{4} \end{array} \right| = \text{meze} \left| \begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_2 = 41 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_1^{41} \sqrt{t} dt = \frac{2\pi}{12} [t\sqrt{t}]_1^{41} = \frac{1\pi}{6} [41\sqrt{41} - 1] = \frac{41\sqrt{41}\pi - \pi}{6}.$$

Povrch poháru na víno o výšce 10 cm bude asi  $137 \text{ cm}^2$ .



Graf 5:  $x = \sqrt{y}$

## 4.4 Určení objemu rotačního tělesa

Pokud chceme vypočítat objem rotačního tělesa, stačí nechat rotovat rovinnou oblast. Zvolíme  $y = f(x)$ ,  $x \in \langle a, b \rangle$  a  $f(x) \geq 0$ , která je spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$ , pak pro výpočet objemu tělesa, které necháme rotovat kolem osy  $x$  platí

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

(Laitochová, 2001)

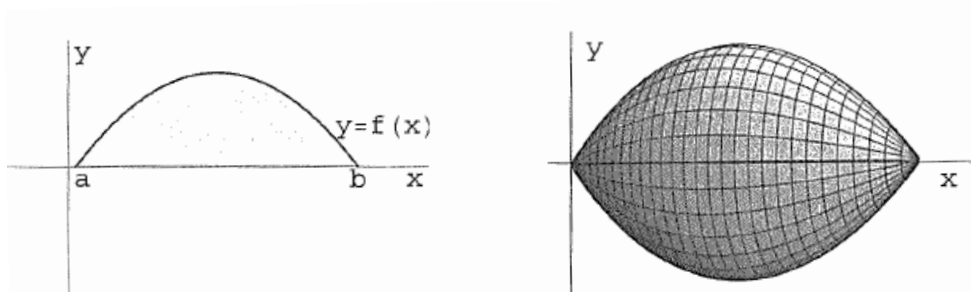
### 4.4.1.1 Příklad 1

#### Zadání

Určete objem tělesa, které vznikne rotací obrazce ohraničeného grafem funkce  $f(x) = \sin x$ ,  $x \in \langle 0, \pi \rangle$  a osou  $x$ . Na obrázku č. 22 je znázorněn graf této funkce i těleso, které vznikne jeho rotací.

#### Řešení

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \pi \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\right) dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \left[ x - \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} [\pi - 0 - 0 + 0] = \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$



Obrázek 22: Rotace funkce  $f(x) = \sin x$  [11, s. 46]

Obdobně pokud necháme rotovat kolem osy  $y$  spojitou funkci  $x = g(y)$  na intervalu  $y \in \langle a, b \rangle$  a pokud platí, že  $g(y) \geq 0$ , pak

$$V_y = \pi \int_a^b g^2(y) dy.$$

(Laitochová, 2001)

#### 4.4.1.2 Příklad 2

##### Zadání

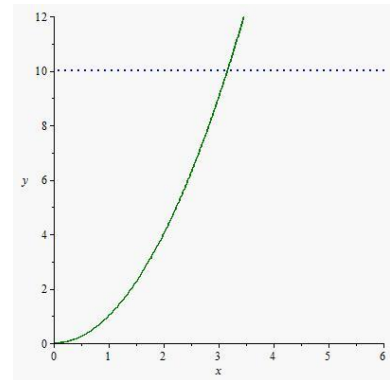
Určete objem poháru sklenice na víno, která je vysoká 10 cm.

##### Řešení

Budeme pracovat s funkcí  $y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$ .

$$V_y = \pi \int_0^{10} \sqrt{y}^2 dy = \pi \int_0^{10} y dy = \frac{\pi}{2} [y^2]_0^{10} = 50\pi.$$

Objem poháru na víno o výšce 10 cm bude asi  $157 \text{ cm}^3$ .



Graf 6:  $x = \sqrt{y}$

## 5 Sbírka příkladů

V této kapitole je zpracována sbírka příkladů na aplikaci určitého integrálu. V první části jsou zde příklady řešené a ve druhé části jsou zde příklady neřešené.

### 5.1 Řešené příklady

V této podkapitole jsem vybíral neřešené příklady na aplikaci určitého integrálu, které jsem následně vyřešil. Příklady jsem vybíral ze sbírky Cvičení z matematické analýzy: Integrální počet v  $\mathbf{R}^{22}$  od Jiřího Haška. U některých příkladů jsou i grafy funkcí, které jsem vykresloval v programu Maple.

#### 5.1.1 Příklady na výpočet obsahu rovinného obrazce

##### 5.1.1.1 Příklad 1

###### Zadání

Určete obsah rovinného obrazce omezeného křivkami:

$$y^2 = 2x + 1; x - y - 1 = 0$$

###### Řešení

Průsečíky:

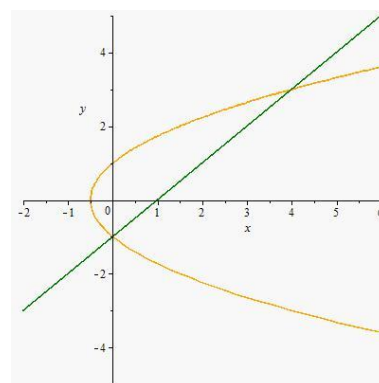
$$\begin{aligned}\sqrt{2x + 1} &= x - 1 \\ 2x + 1 &= x^2 - 2x + 1 \\ x^2 - 4x &= 0 \\ x(x - 4) &= 0 \\ x_1 = 0; x_2 &= 4\end{aligned}$$

Určení větší funkce:

$$\begin{aligned}f_1(2) &= \sqrt{5} \\ f_2(2) &= 1 \\ f_1(x) &\geq f_2(x) \text{ na intervalu } \langle 0, 4 \rangle\end{aligned}$$

Výpočet:

$$\begin{aligned}\int_0^4 \sqrt{2x + 1} dx - \int_0^4 x - 1 dx &= \int_1^9 \sqrt{t^2} \frac{dt}{2} - \left[ \frac{x^2}{2} - x \right]_0^4 = \left[ \frac{\sqrt{t^3}}{3} \right]_1^9 - [8 - 4] \\ &= \frac{9 * 3}{3} - \frac{1}{3} - 8 + 4 = \frac{27 - 1 - 24 + 12}{3} = \frac{14}{3}.\end{aligned}$$



**Graf 7:**  $y^2 = 2x + 1$  a  
 $x - y - 1 = 0$

<sup>22</sup> HÁJEK, Jiří. Cvičení z matematické analýzy: integrální počet v  $\mathbf{R}$ . 1. vydání. Brno: Masarykova univerzita, 2000, 102 s. ISBN 80-210-2263-9.



### 5.1.1.2 Příklad 2

#### Zadání

Určete obsah rovinného obrazce omezeného křivkami:

$$y = x^2 + 2x - 3; y = 0$$

#### Řešení

Průsečíky:

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x_1 = -3; x_2 = 1$$

Určení větší funkce:

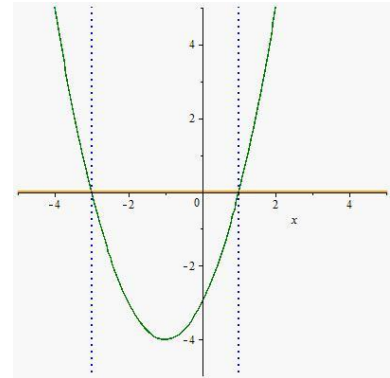
$$f_1(0) = -3$$

$$f_2(0) = 0$$

$$f_1(x) \leq f_2(x) \text{ na intervalu } \langle -3, 1 \rangle$$

Výpočet:

$$\int_{-3}^1 (0 - x^2 - 2x + 3) dx = \left[ -\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 3x \right]_{-3}^1 = \left[ -\frac{1}{3} - 1 + 3 - \frac{27}{3} + 9 + 9 \right] = \frac{32}{3}$$



Graf 8:  $y = x^2 + 2x - 3$

$$y = 0$$

### 5.1.1.3 Příklad 3

#### Zadání

Určete obsah rovinného obrazce omezeného křivkami:

$$f_1(x) = \ln(x + 2); f_2(x) = 2 \ln x; f_3(x) = 0$$

#### Řešení

Průsečíky:

$$\underline{f_1(x) \text{ a } f_2(x)}$$

$$x + 2 = x^2$$

$$x_{a1} = -1; x_{a2} = 2$$

$$\underline{f_1(x) \text{ a } f_3(x)}$$

$$x + 2 = a^0$$

$$x + 2 = 1$$

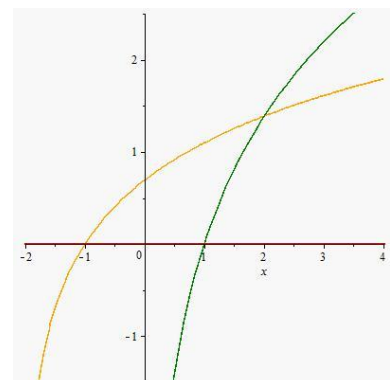
$$x_{b1} = -1$$

$$\underline{f_2(x) \text{ a } f_3(x)}$$

$$x^2 = a^0$$

$$x^2 = 1$$

$$x_{c1} = -1; x_{c2} = 1$$



Graf 9:  $f_1(x) = \ln(x + 2)$  a

$$f_2(x) = 2 \ln x$$

Určení větší funkce:

$f_1(x)$  a  $f_2(x)$

$$f_1(1) = \ln 3$$

$$f_2(1) = \ln 1$$

$f_1(x) \geq f_2(x)$  na intervalu  $\langle -1, 2 \rangle$

$f_1(x)$  a  $f_3(x)$

$$f_1(1) = \ln 3$$

$$f_3(1) = 0$$

$f_1(x) \geq f_3(x)$  na intervalu  $\langle -1, \infty \rangle$

$f_2(x)$  a  $f_3(x)$

$f_2(0) = v$  bodě 0 má asymptotu jdoucí k  $-\infty$

$$f_3(0) = 0$$

$f_2(x) \leq f_3(x)$  na intervalu  $\langle -1, 1 \rangle$

Výpočet:

Z vypočítaných hodnot a grafu vidíme, že musíme nejprve počítat oblast, která vznikne mezi funkcemi  $f_1(x)$  a  $f_3(x)$  na intervalu  $\langle -1, 1 \rangle$  a následně k ní přičíst oblast, která vznikne mezi funkcemi  $f_1(x)$  a  $f_2(x)$  na intervalu  $\langle 1, 2 \rangle$ .

$f_1(x)$  a  $f_3(x)$  na intervalu  $\langle -1, 1 \rangle$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \ln(x+2) dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln(x+2) \quad v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x+2} \quad v = x \end{array} \right| = [x \ln(x+2)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{x}{x+2} dx \\ &= [x \ln(x+2)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{x+2-2}{x+2} dx \\ &= [x \ln(x+2)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 1 dx + 2 \int_{-1}^1 \frac{dx}{x+2} \\ &= [x \ln(x+2) - x + 2 \ln(x+2)]_{-1}^1 \\ &= [\ln 3 - 1 + 2 \ln 3 - (-\ln 1 + 1 + 2 \ln 1)] = \\ &= \underline{\underline{3 \ln 3 - 2.}} \end{aligned}$$

$f_1(x)$  a  $f_2(x)$  na intervalu  $\langle 1, 2 \rangle$

$$\int_1^2 \ln(x+2) dx - \int_1^2 (2 \ln x) dx$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \ln(x+2) dx &= [x \ln(x+2) - x + 2 \ln(x+2)]_1^2 \\ &= [2 \ln 4 - 2 + 2 \ln 4 - (\ln 3 - 1 + 2 \ln 3)] \\ &= [2 \ln 4 - 2 + 2 \ln 4 - \ln 3 + 1 - 2 \ln 3] = 4 \ln 4 - 3 \ln 3 - 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 (2 \ln x) dx &= \left[ \begin{array}{l} u = \ln x \quad v' = 2 \\ u' = \frac{1}{x} \quad v = 2x \end{array} \right] = [2x \ln x]_1^2 - 2 \int_1^2 1 dx = [2x \ln x - 2x]_1^2 \\ &= [4 \ln 2 - 4 - 2 \ln 1 + 2] = 4 \ln 2 - 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \ln(x+2) dx - \int_1^2 (2 \ln x) dx &= 4 \ln 4 - 3 \ln 3 - 1 - 4 \ln 2 + 2 = \\ &= \underline{\underline{4 \ln 2 - 3 \ln 3 + 1.}} \end{aligned}$$

Nyní sečteme obě součásti, které jsme počítali zvlášť:

$$\begin{aligned} 3 \ln 3 - 2 + 4 \ln 2 - 3 \ln 3 + 1 &= \\ &= \underline{\underline{4 \ln 2 - 1.}} \end{aligned}$$

## 5.1.2 Příklady na výpočet objemu rotačních těles

### 5.1.2.1 Příklad 1

#### Zadání

Vypočítejte objem tělesa ohraničeného křivkami  $y = x^2$ ;  $x = y^2$ , vytvořeného rotací kolem osy  $x$ .

#### Řešení

Průsečíky:

$$\begin{aligned} x^2 &= \sqrt{x} \\ x(x^3 - 1) &= 0 \\ x_1 &= 0; x_2 = 1 \end{aligned}$$

Určení větší funkce:

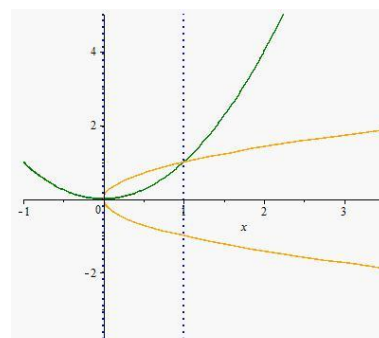
$$f_1(0,5) = 0,25$$

$$f_2(0,5) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f_1(x) \leq f_2(x) \text{ na intervalu } (0,1)$$

Výpočet:

$$\pi \int_0^1 \sqrt{x^2} dx - \pi \int_0^1 x^{2^2} dx = \pi \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{5-2}{10} \pi = \frac{3\pi}{10}.$$



Graf 10:  $y = x^2$  a  $x = y^2$

### 5.1.2.2 Příklad 2

#### Zadání

Vypočítejte objem tělesa ohraničeného křivkami  $2y = x^2$ ;  $2x + 2y - 3 = 0$ , vytvořeného rotací kolem osy  $x$ .

#### Řešení

Průsečíky:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{2} &= \frac{3 - 2x}{2} \\ x^2 + 2x - 3 &= 0 \\ x_1 &= -3; x_2 = 1\end{aligned}$$

Určení větší funkce:

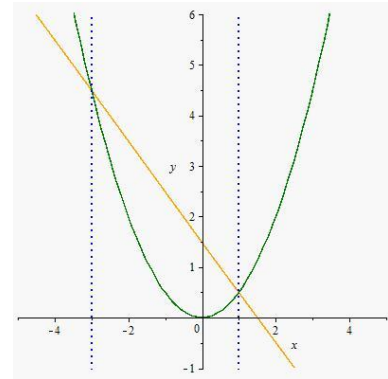
$$f_1(0) = 0$$

$$f_2(0) = \frac{3}{2}$$

$$f_1(x) \leq f_2(x) \text{ na intervalu } \langle -3, 1 \rangle$$

Výpočet:

$$\begin{aligned}\pi \int_{-3}^1 \left(\frac{3-2x}{2}\right)^2 dx - \pi \int_{-3}^1 \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 dx &= \pi \int_{-3}^1 \frac{9-12x+4x^2}{4} dx - \pi \int_{-3}^1 \frac{x^4}{4} dx \\ &= \pi \left[ \frac{9x}{4} - \frac{12x^2}{8} + \frac{4x^3}{12} - \frac{x^5}{20} \right]_{-3}^1 \\ &= \pi \left[ \frac{9}{4} - \frac{12}{8} + \frac{4}{12} - \frac{1}{20} + \frac{27}{4} + \frac{108}{8} + \frac{108}{12} - \frac{243}{20} \right] = \frac{272}{15} \pi.\end{aligned}$$



**Graf 11:**  $2y = x^2$  a

$$2x + 2y - 3 = 0$$

### 5.1.2.3 Příklad 3

#### Zadání

Vypočítejte objem tělesa ohraničeného křivkami  $y = x$ ;  $y = x + \sin^2 x$ , vytvořeného rotací kolem osy  $x$  na intervalu  $\langle 0, \pi \rangle$ .

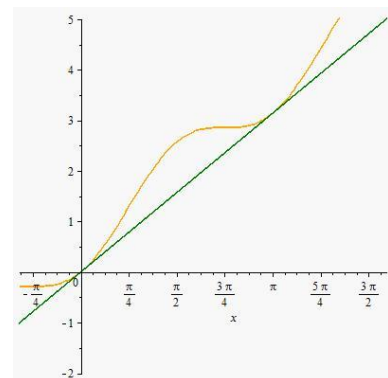
#### Řešení

Určení větší funkce:

$$f_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$f_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + 1$$

$$f_1(x) \leq f_2(x) \text{ na intervalu } \langle 0, \pi \rangle$$



**Graf 12:**  $y = x$  a  $y = x + \sin^2 x$

Výpočet:

$$\begin{aligned} \pi \int_0^{\pi} (x + \sin^2 x)^2 dx - \pi \int_0^{\pi} x^2 dx &= \pi \int_0^{\pi} (x^2 + 2x \sin^2 x + \sin^4 x) dx - \pi \int_0^{\pi} x^2 dx \\ &= \pi \int_0^{\pi} (x^2 + 2x \sin^2 x + \sin^4 x - x^2) dx = \pi \int_0^{\pi} (2x \sin^2 x + \sin^4 x) dx \\ &= \left| \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \right| = \pi \int_0^{\pi} \left( x(1 - \cos 2x) + \frac{1}{4}(1 - \cos 2x)^2 \right) dx \\ &= \pi \int_0^{\pi} \left( x - x \cos 2x + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos^2 2x \right) dx \\ &= \left| \cos^2 2x = \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) \right| \\ &= \pi \int_0^{\pi} \left( x - x \cos 2x + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cos 4x \right) dx \\ &= \pi \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x \sin 2x}{2} - \frac{\cos 2x}{4} + \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} \right]_0^{\pi} \\ &= \pi \left[ \frac{\pi^2}{2} - 0 - \frac{\cos 2\pi}{4} + \frac{3\pi}{8} - 0 + 0 - (0 - 0 + \frac{\cos 0}{4} + 0 - 0 + 0) \right] = \pi \left[ \frac{\pi^2}{2} - \frac{1}{4} + \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{4} \right] \\ &= \frac{4\pi^3 + 3\pi^2 - 4\pi}{8}. \end{aligned}$$

### 5.1.3 Příklady na výpočet délky křivky

#### 5.1.3.1 Příklad 1

**Zadání**

Vypočítejte délku oblouku křivky:

$$y^2 = (x + 1)^3; x = 4$$

$$f: y = \sqrt{(x + 1)^3}; g: y = -\sqrt{(x + 1)^3}$$

**Řešení**

Určení mezí:

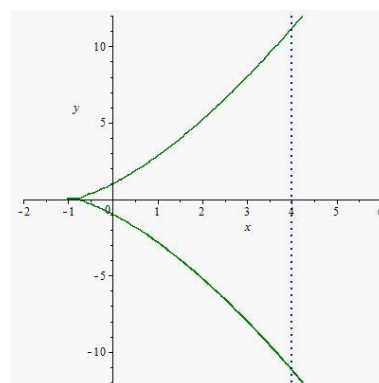
$$x_1 = -1$$

$$x_2 = 4$$

Derivace funkce:

$$f: (\sqrt{(x + 1)^3})' = \frac{3}{2} \sqrt{(x + 1)}$$

$$g: (-\sqrt{(x + 1)^3})' = -\frac{3}{2} \sqrt{(x + 1)}$$



**Graf 13:**  $y^2 = (x + 1)^3$

Výpočet:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^4 \sqrt{1 + \left[ \frac{3}{2} \sqrt{x+1} - \left( -\frac{3}{2} \sqrt{x+1} \right) \right]^2} dx &= \int_{-1}^4 \sqrt{1 + [3\sqrt{x+1}]^2} dx \\ &= \int_{-1}^4 \sqrt{1 + 9(x+1)} dx = \int_{-1}^4 \sqrt{4 + 9(x+1)} dx = \int_{-1}^4 \sqrt{9x + 13} dx \\ &= \frac{2}{9} \int_2^7 \sqrt{t^2} t dt = \frac{2}{9} \left[ \frac{t^3}{3} \right]_2^7 = \frac{2}{9} \left[ \frac{343 - 8}{3} \right] = \frac{670}{27}.\end{aligned}$$

### 5.1.3.2 Příklad 2

#### Zadání

Vypočítejte délku oblouku křivky:

$$y = \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}, \text{ mezi průsečíky s osou } x$$

#### Řešení

Určení mezí (průsečíků s osou  $x$ ):

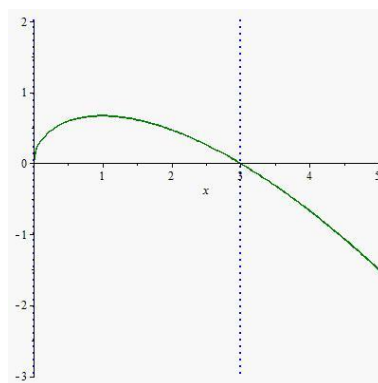
$$0 = (3-x)\sqrt{x}$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 3$$

Derivace funkce:

$$\left( x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} \right)' = \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2} \right) = \frac{1-x}{2\sqrt{x}}$$



Graf 14:  $y = \frac{\sqrt{x}(3-x)}{3}$

Výpočet:

$$\begin{aligned}\int_0^3 \sqrt{1 + \left[ \frac{1-x}{2\sqrt{x}} \right]^2} dx &= \int_0^3 \sqrt{1 + \frac{1-2x+x^2}{4x}} dx = \int_0^3 \sqrt{\frac{1+2x+x^2}{4x}} dx \\ &= \int_0^3 \sqrt{\frac{(1+x)^2}{4x}} dx = \frac{1}{2} \int_0^3 \frac{1+x}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int_0^3 \left( x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ 2\sqrt{x} + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \right]_0^3 = \left[ \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x^3}}{3} \right]_0^3 = [\sqrt{3} + \sqrt{3} - 0 - 0] = 2\sqrt{3}.\end{aligned}$$

### 5.1.3.3 Příklad 3

#### Zadání

Vypočítejte délku oblouku křivky:

$$y = \frac{(e^x + e^{-x})}{2}, x \in \langle -1, 2 \rangle$$

#### Řešení

Derivace funkce:

$$\left(\frac{(e^x + e^{-x})}{2}\right)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$$

Výpočet:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 \sqrt{1 + \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]^2} dx &= \int_{-1}^2 \sqrt{1 + \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 \sqrt{e^{2x} + 2 + e^{-2x}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^2 \sqrt{(e^x + e^{-x})^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 (e^x + e^{-x}) dx = \frac{1}{2} [e^x - e^{-x}]_{-1}^2 \\ &= \frac{1}{2} [e^2 + e - e^{-2} - e^{-1}] \end{aligned}$$

## 5.1.4 Příklady na výpočet obsahu pláště rotačních těles

### 5.1.4.1 Příklad 1

#### Zadání

Vypočítejte obsah plochy vytvořené otáčením funkce okolo osy  $x$ :

$$y^2 = 4 + x, x = 2$$

#### Řešení

Derivace funkce:

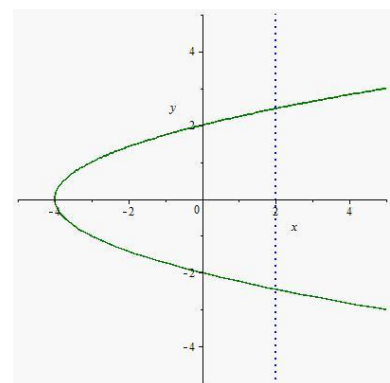
$$(\sqrt{4+x})' = \frac{1}{2\sqrt{4+x}}$$

Určení mezí:

$$0 = 4 + x$$

$$x_1 = -4$$

$$x_2 = 2$$



Graf 15:  $y^2 = 4 + x$

Výpočet:

$$2\pi \int_{-4}^2 \left[ \sqrt{4+x} \sqrt{1 + \frac{1}{4(4+x)}} \right] dx = \pi \int_{-4}^2 \left[ \sqrt{4+x} \frac{\sqrt{17+4x}}{\sqrt{4+x}} \right] dx =$$

$$= \pi \int_{-4}^2 \sqrt{17+4x} dx = \frac{\pi}{6} \left[ \sqrt{(17+4x)^3} \right]_{-4}^2 = \frac{\pi}{6} [125 - 1] = \frac{62\pi}{3}$$

### 5.1.4.2 Příklad 2

#### Zadání

Vypočtete obsah plochy vytvořené otáčením funkce okolo osy  $y$ :

$$x^2 = 2y, y = \frac{3}{2}$$

#### Řešení

Derivace funkce:

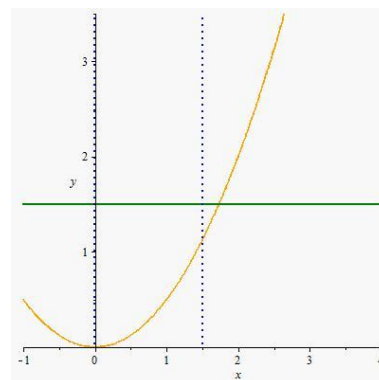
$$(\sqrt{2y})' = \frac{1}{\sqrt{2y}}$$

Určení mezí:

$$0 = 2y$$

$$y_1 = 0$$

$$y_2 = \frac{3}{2}$$



Graf 16:  $x^2 = 2y$

Výpočet:

$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^{\frac{3}{2}} \left[ \sqrt{2y} \sqrt{1 + \frac{1}{2y}} \right] dy &= 2\pi \int_0^{\frac{3}{2}} \left[ \sqrt{2y} \frac{\sqrt{2y+1}}{\sqrt{2y}} \right] dy = 2\pi \int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{2y+1} dy \\ &= \frac{2\pi}{3} \left[ \sqrt{(2y+1)^3} \right]_0^{\frac{3}{2}} = \frac{2\pi}{3} [8 - 1] = \frac{14\pi}{3} \end{aligned}$$

### 5.1.4.3 Příklad 3

#### Zadání

Vypočtete obsah plochy vytvořené otáčením funkce okolo osy  $x$ :

$$f_1(x) = y = \frac{1}{6}\sqrt{x}(x-12), \text{ mezi průsečíky s osou } x (f_2(x))$$

#### Řešení

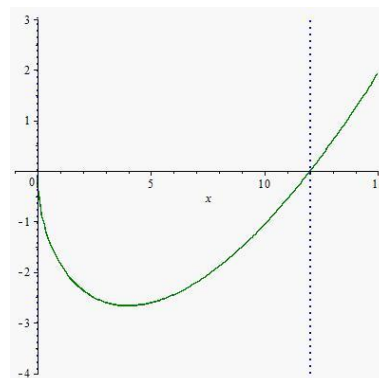
Derivace funkce:

$$\left( \frac{1}{6}\sqrt{x}(x-12) \right)' = \left( \frac{\sqrt{x}}{4} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$$

Určení mezí:

$$y_1 = 0$$

$$y_2 = 12$$



Graf 17:  $y = \frac{\sqrt{x}(x-12)}{6}$



Určení větší funkce:

$$f_1(9) = -\frac{3}{2}$$

$$f_2(9) = 0$$

$$f_1(x) \leq f_2(x) \text{ na intervalu } (0,12)$$

Výpočet:

$$\begin{aligned} & -2\pi \int_0^{12} \left[ \frac{x\sqrt{x} - 12\sqrt{x}}{6} \sqrt{1 + \left(\frac{x-4}{4\sqrt{x}}\right)^2} \right] dx \\ &= -2\pi \int_0^{12} \left[ \frac{\sqrt{x}(x-12)}{6} \sqrt{1 + \frac{x^2 - 8x + 16}{16x}} \right] dx \\ &= -2\pi \int_0^{12} \left[ \frac{\sqrt{x}(x-12)}{6} \frac{\sqrt{x^2 + 8x + 16}}{4\sqrt{x}} \right] dx \\ &= -\frac{\pi}{12} \int_0^{12} [(x-12)\sqrt{(x+4)^2}] dx = -\frac{\pi}{12} \int_0^{12} [x^2 - 8x - 48] dx \\ &= -\frac{\pi}{12} \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{8x^2}{2} - 48x \right]_0^{12} = -\frac{\pi(576 - 576 - 576)}{12} = 48\pi \end{aligned}$$

## 5.2 Neřešené příklady

V této podkapitole jsem vybral několik příkladů k procvičení, ke kterým jsem přiložil i výsledek, aby si čtenář mohl ověřit, zda problematiku aplikace určitého integrálu zvládnul. K některým příkladům jsem přiložil i graf, vypracovaný v programu Maple.

### 5.2.1 Příklady na výpočet obsahu rovinného obrazce

#### 5.2.1.1 Příklad 1

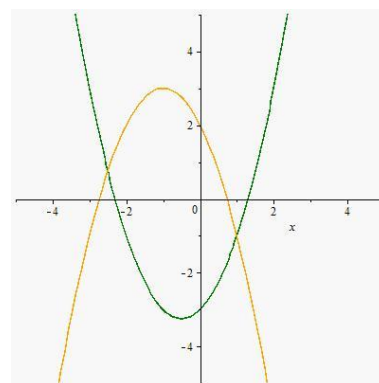
##### Zadání

Vypočítejte obsah množiny  $K$  ohraničené grafy funkcí  $g: y = x^2 + x - 3$  a  $f: y = -x^2 - 2x + 2$ .

##### Řešení

$$\left[ K = \frac{343}{24} \right]$$

(Mayerová, Kuben, Račková, 2006)



**Graf 18:**  $y = x^2 + x - 3$  a  $y = -x^2 - 2x + 2$

### 5.2.1.2 Příklad 2

#### Zadání

Vypočítejte obsah kruhu  $K$  o poloměru  $r > 0$ . Rovnice kružnice se středem v počátku je  $r^2 = x^2 + y^2$ . Načrtněte její graf.

#### Řešení

$$[K = \pi r^2]$$

(Mayerová, Kuben, Račková, 2006)

### 5.2.1.3 Příklad 3

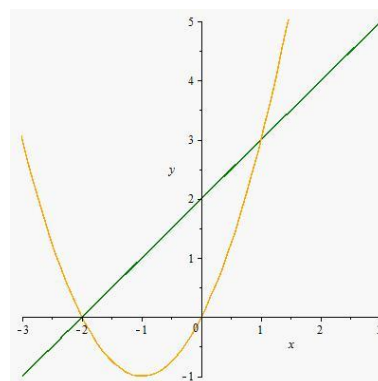
#### Zadání

Vypočítejte obsah obrazce  $K$  ohraničeného parabolou  $y = x^2 + 2x$  a přímkou  $x - y + 2 = 0$ .

#### Řešení

$$\left[ K = \frac{9}{2} \right]$$

(Hájek, 2000)



Graf 19:  $y = x^2 + 2x$  a

$$x - y + 2 = 0$$

## 5.2.2 Příklad na výpočet objemu rotačních těles

### 5.2.2.1 Příklad 1

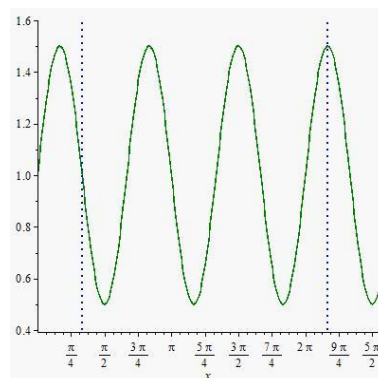
#### Zadání

Vypočítejte objem rotačního tělesa  $V$ , které vznikne rotací funkce  $y = 1 + \frac{1}{2} \sin 3x$  na intervalu  $\langle \frac{\pi}{3}, \frac{13\pi}{6} \rangle$ , kolem osy  $x$ .

#### Řešení

$$\left[ V = \frac{33\pi^2}{16} - \frac{\pi}{3} \right]$$

(Mayerová, Kuben, Račková, 2006)



Graf 20:  $y = 1 + \frac{1}{2} \sin 3x$

### 5.2.2.2 Příklad 2

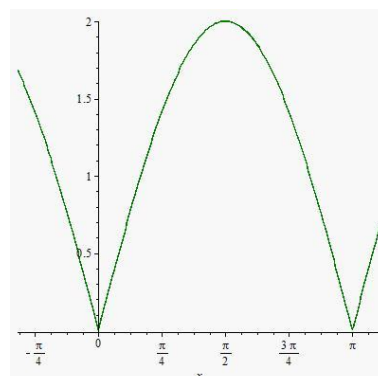
#### Zadání

Vypočítejte objem rotačního tělesa  $V$ , které vznikne rotací funkce  $y = 2|\sin x|$  na intervalu  $\langle 0, \pi \rangle$ , kolem osy  $x$ .

#### Řešení

$$[V = 4\pi^2]$$

(Mayerová, Kuben, Račková, 2006)



Graf 21:  $y = 2|\sin x|$

### 5.2.2.3 Příklad 3

#### Zadání

Vypočítejte objem koule  $V$ , které vznikne rotací funkce  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$  na intervalu  $\langle -r, r \rangle$ , kolem osy  $x$ .

#### Řešení

$$\left[ V = \frac{4\pi r^3}{3} \right]$$

(Mayerová, Kuben, Račková, 2006)

## 5.2.3 Příklady na výpočet délky křivky

### 5.2.3.1 Příklad 1

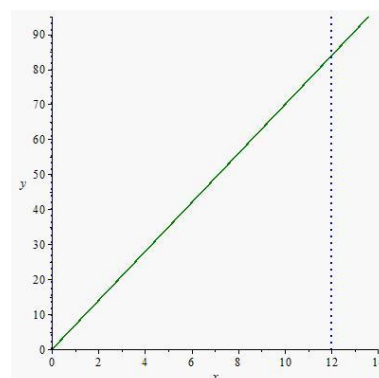
#### Zadání

Vypočítejte délku oblouku křivky  $L$  funkce  $y = 7x$  na intervalu  $\langle 0, 12 \rangle$ .

#### Řešení

$$\left[ L = 60\sqrt{2} \right]$$

(Slezáková, 2001)



Graf 22:  $y = 7x$

### 5.2.3.2 Příklad 2

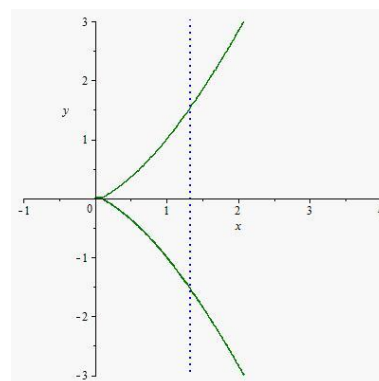
#### Zadání

Vypočítejte délku oblouku křivky  $L$  funkce  $y^2 = x^3$  na intervalu  $\langle 0, \frac{4}{3} \rangle$ .

#### Řešení

$$\left[ L = \frac{112}{27} \right]$$

(Slezáková, 2001)



Graf 23:  $y^2 = x^3$

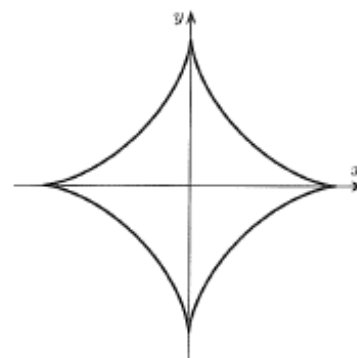
### 5.2.3.3 Příklad 3

#### Zadání

Vypočítejte délku asteroidy  $L$  na intervalu  $\langle 0, 2\pi \rangle$ . Pokud máme zadanou parametrizaci této křivky takto:

$$x'(t) = -3a \cos^2 t \sin t$$

$$y'(t) = 3a \sin^2 t \cos t$$



Obrázek 23: Asteroida [3, s. 120]

## Řešení

$$[L = 6a]$$

(Došlý, Zemánek, 2011)

### 5.2.4 Příklady na výpočet obsahu pláště rotačních těles

#### 5.2.4.1 Příklad 1

##### Zadání

Vypočítejte povrch koule  $S$ , které vznikne rotací křivky  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$  na intervalu  $\langle -r, r \rangle$ , okolo osy  $x$ .

##### Řešení

$$[S = 4\pi r^2]$$

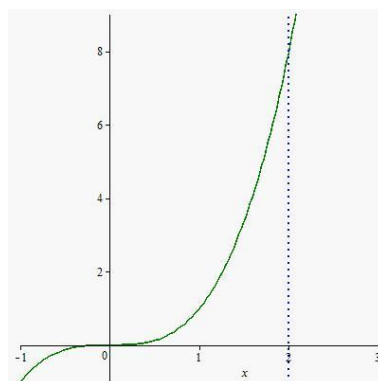
#### 5.2.4.2 Příklad 2

##### Zadání

Vypočítejte obsah plochy  $S$ , které vznikne rotací křivky  $y = x^3$  na intervalu  $\langle 0, 2 \rangle$ , okolo osy  $x$ .

##### Řešení

$$\left[ S = \frac{145\sqrt{145} - 1}{54} \right]$$



Graf 24:  $y = x^3$

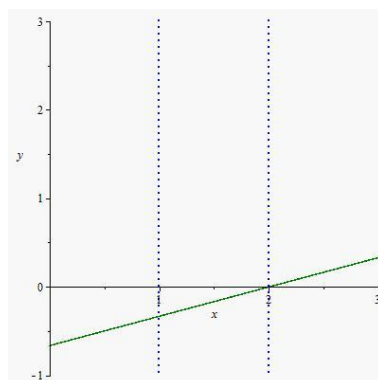
#### 5.2.4.3 Příklad 3

##### Zadání

Vypočítejte obsah plochy  $S$ , které vznikne rotací křivky  $x = 3y + 2$  na intervalu  $\langle 1, 2 \rangle$ , okolo osy  $y$ .

##### Řešení

$$\left[ S = \frac{7\sqrt{10}}{2} \right]$$



Graf 25:  $x = 3y + 2$

## Závěr

„A k čemu nám to bude? Vždyť to v životě nepoužiju!“ Tohle je notoricky známá a oblíbená věta většiny studentů základních a středních škol v hodinách matematiky. Cílem této práce bylo především všem čtenářům ukázat praktickou stránku matematiky. Myslím si, že určitý integrál je nádherným znázorněním spojení matematické přesnosti s praktickými potřebami lidstva v oblasti geometrie.

Dalším cílem bylo také čtenáře seznámit s historií integrálu. Historii jsem se snažil vystihnout v co možná největším rozsahu, protože tato práce byla psána především jako materiál pro studenty a učitele, a je tedy důležité, aby si čtenáři uvědomili, jak se postupem času matematika vyvíjela, než dospěla k integrálu.

V první kapitole jsem tedy zmínil historii. V kapitole druhé jsem pouze stručně nastínil problematiku neurčitého integrálu. Ve třetí kapitole jsem se již dostal k určitému integrálu a ve čtvrté kapitole jsem zmínil jeho aplikace v oblasti matematiky.

Stěžejním cílem mé bakalářské práce bylo vytvořit sbírku příkladů, které jsem uvedl v kapitole páté. Některé příklady jsou řešené a některé neřešené, aby si čtenář mohl vyzkoušet, zda problematiku určitého integrálu zvládnul.

## Seznam obrázků

Obrázek 1: Archimédes [10, s. 15].....	11
Obrázek 2: Keplerův výpočet obsahu kruhu [10, s. 24].....	12
Obrázek 3: Keplerův výpočet obsahu kruhu [10, s. 24].....	13
Obrázek 4: Cavalieriho princip [10, s. 26].....	13
Obrázek 5: Pierre de Fermat [10, s. 30].....	14
Obrázek 6: Isaac Newton [10, s. 36].....	15
Obrázek 7: Gottfried Wilhelm Leibniz [10, s. 40].....	16
Obrázek 8: Leibnizův charakteristický trojúhelník [10, s. 41].....	17
Obrázek 9: Leonhard Euler [10, s. 51].....	19
Obrázek 10: Augustin-Louis Cauchy [10, s. 54].....	20
Obrázek 11: Cauchyho integrální součet [10, s. 54].....	21
Obrázek 12: Bernhard Riemann [10, s. 58].....	22
Obrázek 13: Riemannův integrální součet [10, s. 60].....	23
Obrázek 14: Primitivní funkce k funkci $f(x) = \cos x$ [11, s. 6].....	24
Obrázek 15: Integrální křivky [5, s. 10].....	25
Obrázek 16: Dolní součet [9, s. 34].....	34
Obrázek 17: Horní součet [9, s. 34].....	34
Obrázek 18: Integrální součet [9, s. 41].....	34
Obrázek 19: Znázornění znamének funkční hodnoty [2, s. 136].....	39
Obrázek 20: Graf funkce $f(x) = x^2$ [8, s. 72].....	39
Obrázek 21: Oblast omezená dvěma funkcemi [2, s. 137].....	40
Obrázek 22: Rotace funkce $f(x) = \sin x$ [11, s. 46].....	46
Obrázek 23: Asteroida [3, s. 120].....	59

## Seznam grafů

Graf 1: $f(x) = 2x$ a $g(x) = 8$ .....	40
Graf 2: $f(x) = x^2 - 4x - 5$ a $g(x) = 7 - 2x - x^2$ .....	41
Graf 3: Kružnice .....	42
Graf 4: $f(x) = x\sqrt{x}$ .....	42
Graf 5: $x = \sqrt{y}$ .....	45
Graf 6: $x = \sqrt{y}$ .....	47
Graf 7: $y^2 = 2x + 1$ a .....	48
Graf 8: $y = x^2 + 2x - 3$ .....	49
Graf 9: $f(x) = \ln(x + 2)$ a .....	49
Graf 10: $y = x^2$ a $x = y^2$ .....	51
Graf 11: $2y = x^2$ a .....	52
Graf 12: $y = x$ a $y = x + \sin 2x$ .....	52
Graf 13: $y^2 = (x + 1)^3$ .....	53
Graf 14: $y = x(3 - x)^3$ .....	54
Graf 15: $y^2 = 4 + x$ .....	55
Graf 16: $x^2 = 2y$ .....	56
Graf 17: $y = x(x - 12)^6$ .....	56
Graf 18: $y = x^2 + x - 3$ a $y = -x^2 - 2x + 2$ .....	57
Graf 19: $y = x^2 + 2x$ a .....	58
Graf 20: $y = 1 + 12\sin 3x$ .....	58
Graf 21: $y = 2\sin x$ .....	58
Graf 22: $y = 7x$ .....	59
Graf 23: $y^2 = x^3$ .....	59
Graf 24: $y = x^3$ .....	60
Graf 25: $x = 3y + 2$ .....	60

## Použitá literatura

- [1] DANĚČEK, Josef, DLOUHÝ, Oldřich a PŘIBYL, Oto. *Matematika I*. Vydání. 1. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2007, 47 s. ISBN 978-80-7204-525-9.
- [2] DONTOVÁ, Eva. *Matematika II*. 2. Vydání. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2001, 260 s. ISBN 80-01-02295-1.
- [3] DOŠLÝ, Ondřej a ZEMÁNEK Petr. *Integrální počet v R*. 1. vydání. Brno: Masarykova univerzita, 2011, 214 s. ISBN 978-80-210-5635-0.
- [4] HÁJEK, Jiří. *Cvičení z matematické analýzy: integrální počet v R*. 1. vydání. Brno: Masarykova univerzita, 2000, 102 s. ISBN 80-210-2263-9.
- [5] LAITOCHOVÁ, Jitka. *Matematická analýza 2: integrální počet : (pro distanční studium)*. 1. vydání. Olomouc: Univerzita Palackého, 2001, 103 s. ISBN 80-244-0288-2.
- [6] *Matematika v 19. století: sborník přednášek z letních škol : historie matematiky*. 1. vydání. Editor Jindřich Bečvář, Eduard Fuchs. Praha: Prometheus, 1996, 143 s. ISBN 80-7196-019-5.
- [7] MAYEROVÁ, Šárka, KUBEN, Jaromír a RAČKOVÁ, Pavlína. *Integrální počet funkcí jedné proměnné*. 1. vyd. Ostrava: VŠB - Technická univerzita, 2006, 219 s. ISBN 80-248-1191-x.
- [8] MOC, Ondřej. *Sbírka úloh z matematiky: integrální počet funkcí jedné proměnné*. Vyd. 1. Ústí nad Labem: Univerzita Jana Evangelisty Purkyně v Ústí nad Labem, Fakulta sociálně ekonomická, 2008, v, 91 s. ISBN 978-80-7414-056-3.
- [9] NOVÁK, Vítězslav. *Integrální počet funkcí jedné reálné proměnné*. 1. vydání. Brno: Masarykova univerzita, 2005, 93 s. ISBN 80-210-3850-0.



- [10] SCHWABIK, Štefan a ŠARMANOVÁ, Petra. *Malý průvodce historií integrálu*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1996, 95 s. ISBN 80-7196-038-1.
- [11] SLAVÍK, Václav a DVOŘÁKOVÁ, Šárka. *Integrální počet*. Vydání. 1. Praha: NAROMA, 2007, 72 s. ISBN 978-80-903681-3-2.
- [12] SLEZÁKOVÁ, Jana. *Cvičení z matematické analýzy 2: integrální počet : (pro distanční studium)*. 1. vydání. Olomouc: Univerzita Palackého, 2001, 49 s. ISBN 80-244-0290-4.
- [12] TKADLEC, Josef. *Diferenciální a integrální počet funkcí jedné proměnné*. Vydání. 1. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2004, 164 s. ISBN 80-01-03039-3.

## Anotace

<b>Jméno a příjmení:</b>	Marek Turoň
<b>Katedra:</b>	Katedra matematiky Pedagogické fakulty UP
<b>Vedoucí práce:</b>	doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.
<b>Rok obhajoby:</b>	2015

<b>Název práce:</b>	Použití určitého integrálu v matematice
<b>Název v angličtině:</b>	Application of Definite Integrals in Mathematics
<b>Anotace práce:</b>	Cílem této práce je nahlédnout do problematiky určitého integrálu a jeho aplikací. Práce se zabývá historií integrálu, neurčitým integrálem a primitivní funkcí, určitým integrálem a jeho aplikacemi. Nezbytnou součástí práce je sbírka řešených i neřešených příkladů.
<b>Klíčová slova:</b>	Integrál, historie integrálu, určitý integrál, primitivní funkce.
<b>Anotace v angličtině:</b>	The goal of this work is to deal with the problematic of definite integral and its applications. The thesis is focused on the integral's history, indefinite integral and primitive function, definite integral and its applications. A collection of both solved and unsolved mathematical problems is included.
<b>Klíčová slova v angličtině:</b>	Integral, history of integral, definite integral, primitive function.
<b>Přílohy vázané v práci:</b>	
<b>Rozsah práce:</b>	66 stran
<b>Jazyk práce:</b>	Český jazyk