UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

Diplomová práce

Bc. Lucie Prášilová

Badatelský přístup k matematickému vyučování na 2. stupni ZŠ

Olomouc 2016 vedoucí práce: doc. PhDr. Bohumil Novák, CSc.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně na základě uvedených pramenů a literatury.

V Olomouci dne ……………….. …………………………….

podpis autora práce

Mé poděkování patří doc. PhDr. Bohumilu Novákovi, CSc. za odborné vedení, věcné připomínky a vstřícnost při konzultacích a vypracování diplomové práce. Také děkuji všem žákům, kteří se zúčastnili empirického šetření, především Mgr. Miroslavě Poláchové za ochotné jednání, spolupráci a umožnění empirického šetření.

Dále děkuji Mgr. Lucii Rychtové za češtinářskou kontrolu, Kristině Suchanové za anglický překlad anotace.

Velké poděkování náleží mé rodině za podporu poskytnutou po celou dobu mého studia.

OBSAH

ÚVOD

„Nevěřte všemu, co se vám k věření předkládá: Zkoumejte vše a přesvědčujte se o všem sami!“ (J. A. Komenský)

Kdysi dávno, přibližně ve 4. století př. n. l., řecký filosof Aristotelés předložil výrok: *„Člověk je tvor společenský.“* Zajisté měl pravdu, každý z nás ke svému životu potřebuje sociální sdílení. Ač si to často neuvědomujeme nebo nepřipouštíme, vnímáme kolem sebe neustále promluvy v podobě mluveného nebo psaného slova, kterými na nás působí od nejútlejšího věku rodina, vrstevníci, s příchodem školního věku učitelé a v současnosti značně masová média. Ti všichni se podílejí na utváření naší osobnosti.

„Můžeme ale věřit všemu, co je nám předkládáno?“
„Nebo máme o sdílených informacích pochybovat, kriticky se ptát a následně činit závěry?“

Napříč dějinami lidstva se v závislosti na vývoji lidského myšlení vyvíjely představy o tom, jakým způsobem má být člověk vychováván a co si má klást výchova za cíl. Při značném zjednodušení můžeme říci, že v jednom čase byl důraz kladen především na osvojení si velkého množství poznatků, předaných v hotové podobě žákovi, tudíž spíše než na žáka byl cíl výchovy zaměřen na její obsah. Současné trendy směřují svou pozornost k rozvoji schopnosti žáka být otevřený poznání, tj. přijímat podněty z vnějšku, pochybovat o nich, podrobovat je otázkám a zároveň hledat, objevovat a samostatně dojít k poznání pravdy. Necháváme se snad poučit historií? Už Sókratés, přibližně v 5. století př. n. l., zapojoval své posluchače do procesu poznání a vedl je svými vhodně kladenými otázkami k samostatnému odhalení pravdy. Ne nadarmo se říká, že život je nikdy nekončící koloběh.

Tématem diplomové práce je badatelský přístup k matematickému vyučování na 2. stupni ZŠ, jenž vychází z konstruktivistického pojetí výuky usilující o žákovo samostatné objevování jemu nových skutečností a aktivní konstruování poznání. Hlavním cílem diplomové práce je na základě prostudované literatury charakterizovat badatelsky orientované vyučování (BOV) jako vyučovací metodu a pokusit se o reflexi průběhu odučených hodin, ve kterých byly zařazeny vybrané a zpracované náměty pro badatelsky orientované vyučování matematice (BOVM).

Prvním dílčím cílem je zpracovat náměty pro BOVM (s metodickými komentáři) do podoby pracovních listů a následně je kvalitativně ověřit v edukačním prostředí ZŠ, tj. jejich odučením získat záznamy a poznatky z vyučovací hodiny. Druhým dílčím cílem je na základě analýzy pracovních listů vypracovaných jednotlivými žáky zhodnotit jejich efektivnost a případně představit některé interpretace výsledků žákova bádání. Třetím dílčím cílem je pomocí dotazníkového šetření zjistit postoje žáků k průběhu vyučovací hodiny, které se zúčastnili.

Pro dosažení uvedených cílů je třeba přijmout následující strukturu diplomové práce, která je rozdělena na teoretickou a praktickou část. V teoretické části shledáváme potřebným se okrajově zmínit o teoretických východiscích BOV a následně blíže zpřesnit charakteristické znaky transmisivního a konstruktivistického pojetí výuky. Dále vymezit podstatu BOV s ohledem na jeho aktuální stav zkoumání a specifika ve výchovně-vzdělávacím procesu. Z pohledu aktuálního kurikula pro základní školu pak uchopit využití BOVM v pedagogické praxi a nabídnout stručný přehled sedmi podob BOVM.

Vstup do empirické části tvoří tři zpracované náměty pro BOVM s metodickými komentáři pro učitele. V úvodu empirického šetření jsou stanoveny cíle, jim odpovídající metody a podmínky empirického šetření. Podstatnou částí šetření je reflexe průběhu vyučovacích hodin, ve kterých byly zařazeny zpracované náměty *Figurální čísla, Eulerova věta* a *Cesta za pokladem*, doplněná o zpracované odpovědi z dotazníkového šetření do grafické podoby tak, aby mohl čtenář porovnat hodnocení jednotlivých vyučovacích hodin s rozdílnými náměty. Výstupem empirické části je shrnutí empirického šetření a doporučení pro pedagogickou praxi.

1 Teoretická část

1.1 Kde se vzalo badatelsky orientované vyučování?

I když se domníváme, že je badatelsky orientované vyučování relativně novou metodou, o které se hovoří až v posledním desetiletí, projevy tzv. *bádání*, v angličtině *inquiry*, se objevily již v době antické řecké filosofie. Byl to Sókratés (asi 469 -399 př. n. l.), který se proslavil tzv. „krátkými řečmi" neboli dialogy, jimiž vedl své posluchače k poznání pravdy. Svou metodou, která se stala předchůdkyni heuristických metod, chtěl aktivizovat jedince v samostatném poznání tak, aniž by mu byly systematicky přinášeny znalosti (Štverák, 1983).

Studiu a podpoře procesů *bádání* se věnovalo ve svých pracích mnoho pedagogických a psychologických myslitelů, kterými jsou např. J. Piaget, L. S. Vygotsky, P. Freire, D. Ausubel a další. Východiskem jejich prací se stal konstruktivismus. Žádný z nich však bezprostředně nepoužíval termín *bádání* (srov. Dostál, 2013, Janík a Stuchlíková, 2010). Jako pedagogický pojem se *bádání* prvně objevuje v práci J. Deweyho, amerického filosofa a pedagoga, s jehož myšlenkami bývá často spojován teoretický základ badatelsky orientovaného vyučování:

„Bádání je kontrolovaná nebo řízená transformace neurčité situace v situaci, která je určitá do té míry, nakolik to vyžaduje zařazení prvků původní situace do nějakého jednotného celku" (J. Dewey, 1938 cit In: Samková, 2014, s. 188).

Do české komunity pedagogů a psychologů se termín *inquiry* dostal relativně brzy poté, co začal být používán v zahraničí. V roce 1999 se objevil termín *inquiry teaching*, v českém překladu *vyučování bádáním, objevováním*, v anglicko-českém pedagogickém slovníku Jiřího Mareše a Petera Gavora. Nicméně místo tohoto termínu se v rovině různých výukových metod používaly termíny *heuristická metoda, metoda řešení problémů, projektová výuka apod.*, které do určité míry zachycovaly to, co se děje při *inguiry*. Učení objevováním bylo z hlediska výukových metod spojováno s konstruktivistickou metodou a z hlediska výukových forem s kooperativním učením (Janík a Stuchlíková, 2010).

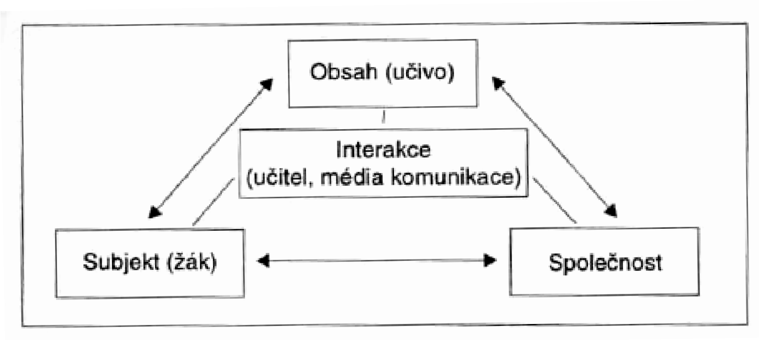
1.1.1 Rozum a smyslová zkušenost v procesu „bádání"

Podle Dostála (2015) může být *bádání* žáka, z hlediska filosofické disciplíny gnozeologie, jež zkoumá vznik a průběh lidského poznání, založeno na mnoha poznávacích metodách vycházejících především z empirismu, resp. z něj odvozeného senzualismu, dále racionalismu a nověji pak konstruktivismu. Hlavním zdrojem poznání v empirismu je smyslová zkušenost, která zejména v přírodovědných předmětech při pozorování, měření, experimentování apod. hraje významnou roli. Vedle smyslové zkušenosti má na žákově poznání svůj podíl také rozum a jemu odpovídající myšlenkové procesy, tj. indukce, dedukce, analýza, syntéza. Již I. Kant přišel se závěry, že lidské poznání je výsledkem souhry smyslového poznání a rozumu. Rozum a zkušenost tedy nejsou při realizaci badatelsky orientované výuky ve střetu, ale naopak se vzájemně doplňují. Klíčové východisko badatelsky orientované výuky však shledáváme v konstruktivistických teoriích, speciálně v kognitivním konstruktivismus, který předpokládá, že *„poznávání se děje konstruováním tak, že poznávající subjekt spojuje jednotlivé fragmenty informací z vnějšího prostředí do smysluplných struktur, rekonstruuje stávající struktury a provádí s nimi mentální operace podmíněné odpovídající úrovni jeho kognitivního vývoje“* Dostál (2015, s. 23).

1.1.2 Soudobé teorie vzdělávání jako obecné východisko „konstruktivismu“

Současná pedagogika nabízí mnoho různých teorií vzdělávání, které se během dějin lidstva podílely na úvahách o podobě a roli vzdělávání. Bertrand (1998, s. 13) navrhuje jejich klasifikaci, jež rozvrhuje do sedmi kategorií. Jedná se o tzv. *spiritualistické, personalistické, kognitivně psychologické, technologické, sociokognitivní, sociální* a *akademické teorie*. Klasifikace je vytvořena na základě čtyř faktorů (viz obr. 1), ovlivňujících edukační procesy:

1. *„subjekt (žák),*
2. *obsah (předmět, disciplína),*
3. *společnost (druzí lidé, svět, okolí, univerzum),*
4. *pedagogické interakce mezi těmito třemi póly (učitel, média a technologie komunikace)“.*



Obrázek 1: Čtyři složky teorií vzdělávání

Každá z výše uvedených teorií náleží jednomu z pólů. Zdůrazněme *kognitivně psychologické teorie*, v jejichž základu stojí interakce mezi „subjektem, společností a obsahem“ a *personalistické teorie*, často označovány jako *humanistické*, soustřeďující se kolem pólu „subjektu“ (Bertrand, 1998).

1.1.2.1 Kognitivně psychologické teorie

Na přelomu padesátých a šedesátých let 20. století se v rámci chystané reformy kurikula a v návaznosti na předválečné psychologické práce J. Piageta, E. Tolmana a dalších prosazuje „kognitivní paradigma“ odmítající „behaviorální modely“. E. L. Thorndike (1874 – 1949), průkopník behaviorismu, svými teoriemi poskytl teoretický základ i dnes převládajícímu přístupu k vyučování: *„učivo se systematicky rozčlení na malé jednotky, ty se předají žákovi, jejich zapamatování se zpevňuje opakováním při procvičování a zkoušení“.* (Kalhous a Obst, 2002, s. 24).

Tehdy se zrodila potřeba „*zaměřit pedagogické úsilí na subjektivní dynamiku dítěte a žáka“* (Bertrand, 1998, s. 42). Jak píše Kalhous a Obst (2002, s. 27), „kognitivní paradigma“ přišlo s přesvědčením, že *„vzdělávací procesy nelze zredukovat na otázku vhodného uspořádání prostředí jedince, protože učení je aktivní – v každém okamžiku je člověk zahrnován mnoha podněty, z nichž aktivně vybírá a filtruje svým předchozím poznatkovým rámcem“.*

Předmětem studií *kognitivně psychologických teorií* se stal rozvoj kognitivních procesů žáků, tj. usuzování, analýza, řešení problémů, vytváření mentálních obrazů atd. Do popředí těchto teorií, směřujících svou pozornost k vnitřním psychickým procesům žáka a jeho stavu dosavadního poznání, jsou stavěny *konstruktivistické teorie*, jež vyzdvihují samostatné a aktivní konstruování poznatků učícím se subjektem. J. Piaget a G. Bachelard jsou osobnosti pojící se s počátky konstruktivistických výzkumů učení (Bertrand, 1998).

J. Piaget a G. Bachelard

Jean Piaget (1896 – 1980), švýcarský filosof, přírodní vědec a psycholog, který se zasloužil o zásadní pokroky ve vývojové psychologii, na sklonku svého života shrnuje svůj dosavadní postoj ke konstruktivistickému pojetí výuky:

„Padesát let experimentování nás naučilo, že neexistuje žádné poznání, které by bylo výsledkem pouhého zaznamenávání pozorovaného a jež by nebylo strukturováno aktivitou subjektu.“ (Bertrand, 1998, s. 65-66)

Podle J. Piageta je učení „*aktivita jedince, kterou se vyrovnává se svou biologicky danou, zákonitým způsobem se vyvíjející strukturou mysli a prostředím, do nějž se narodil* *a jemuž se snaží porozumět"*. Základními procesy této interakce jsou tzv. *asimilace* (nové poznatky se zařazují do existujících struktur) a *akomodace* (nové poznatky vedou k přetváření stávajících struktur nebo ke vzniku nových struktur) (Kalhous a Obst, 2002, s. 24).

Jeho teorie tedy byla vnímána ze dvou hledisek: *„Za prvé podle interakcí, jimiž subjekt konstruuje své poznání a rozvíjí se v celkovém procesu autoregulace a adaptace na své okolí, a za druhé podle stádií vývoje dítěte."* (Bertrand, 1998, s. 66). Totiž při plánování badatelských aktivit je třeba reflektovat, ve kterém ze čtyř stadií kognitivního vývoje se dítě nachází. Děti školního věku se nachází ve stadiu *konkrétních operací*, které je charakteristické osvojováním si pojmů. Podstatné je, aby žák pochopil významy těchto pojmů, což v přírodovědných a technicky orientovaných předmětech přináší zvýšený požadavek na realizaci badatelských aktivit (Dostál, 2015).

Gaston Bachelard, francouzský filosof a spisovatel, ve své publikaci *Utváření vědeckého myšlení* z roku 1983 zdůrazňuje, že by učitelé měli respektovat fakt, že žák do hodiny přichází s již hotovými empirickými poznatky, tzv. *prekoncepty*, které získal dříve. Učitel by měl vědět, s jakými *prekoncepty* žák vstupuje do výuky a jakými způsoby zpracovává informace. Už tehdy upozorňoval na potenciální vznik „epistemologického konfliktu" mezi vědeckým poznáním prezentovaným ve škole a dosavadními poznatky žáka (Bertrand, 1998).

1.1.2.2 Personalistické teorie

Šedesátá léta minulého století v reakci na vlnu společenských bouří západních zemí volající po větší sociální angažovanosti školy přináší vznik humanistické psychologie a s ní princip tzv. *osobností výuky* (Kalhous a Obst, 2002). *Humanistické,* resp. *personalistické teorie*, zdůrazňující osobnost žáka, se tedy zrodily jako reakce na systém vzdělávání, jenž upřednostňoval metodu předávání předem stanovených obsahů velkým skupinám žáků, u kterých nebyly respektovány jejich potřeby, touhy a pudy (Bertrand, 1998). Podle Kalhouse a Obsta (2002, s. 28) šlo ve výuce zaměřené na žáka především o to, aby byla *„iniciativa na straně učícího se subjektu; i tehdy, kdy podnět přichází zvenku, má učící se pocit aktivního objevování a chápání"*. Předním představitelem humanistické psychologie byl C. Rogers.

C. Rogers

Carl Rogers (1902 – 1987), americký psycholog a psychoterapeut, který se proslavil novým přístupem k psychoterapii, tzv. nedirektivním - orientovaným na klienta (osobu), byl jedním z kritiků tehdejšího systému vzdělávání a navrhovatelem jeho změny. Ve své koncepci kladl důraz na osobnost žáka, kterému by měla být v procesu učení ponechána svoboda. Podle C. Rogerse by každý žák měl v závislosti na svých zájmech a cílech získávat poznatky sám. Zároveň zdůrazňuje, že je velmi podstatné, aby žák důvěřoval vlastním zkušenostem, v této souvislosti mluví o tzv. zkušenostním učení. V podstatě má žák učit sám sebe. Otázkou však je, jakou roli má sehrávat učitel, aby zajistil žákovi dostatečný a svobodný prostor ve vzdělávání. Podle C. Rogerse je učitel velmi podstatným spolutvůrcem klimatu ve třídě. Měl by být oporou žákům při volbě vlastních cílů a plánů, které by jim měl pomáhat realizovat a dosahovat. Je jistým *„zprostředkovatelem zkušeností a rádcem"*. Měl by zajišťovat učební pomůcky, vybavení a jiné zdroje (např. kompetentní osoby). V neposlední řadě by měl vést žáka k seberealizaci a k samostatnému řízení svého vzdělávání. Paradoxem *personalistických teorií* je snaha ponechat pedagogiku jako direktivní a zároveň nedirektivní, tzn. svobodu žáka orientovat i neorientovat. Díky těmto teoriím se v praxi začali učitelé více přiklánět ke kooperativnímu učení, které v podobě skupinové práce ponechává prostor žákům a naopak odmítá zásahy vyučujícího (Bertrand, 1998, s. 50).

1.2 Didaktické přístupy ke vzdělávání

Napříč dějinami lidstva mnozí vědci a filosofové, jako byli například Aristotelés, Galileo nebo také Einstein, již upozornili na to, že výsledkem poznávacích procesů je poznání, resp. znalost. Znalost je východiskem a výsledkem učení žáka (Švec, 2006). Jak ale žák dospěje k tomu, co zná? Existuje více cest, které vedou k poznání? Která z těchto cest je nejefektivnější a nejpřirozenější? Má volba cesty vliv na trvanlivost poznání?

Na takto stále častěji kladené otázky v oblasti pedagogického vzdělávání odpovídají soudobé trendy, které se vyznačují změnou způsobu získávání a osvojování nových poznatků. V podstatě reagují na vzdělávání charakteristické osvojením si již hotových poznatků, které jsou byť s využitím nejmodernějších didaktických prostředků v různé podobě předkládány žákovi (Dostál, 2013). Hlásí se k tzv. *konstruktivismu*, který se svou představou o způsobu vyučování a učení často vymezuje jako snaha o překonání *tradičního*, resp. *transmisivního vyučování* (Kalhous a Obst, 2002).

1.2.1 Transmisivní pojetí výuky

Dříve, než se pokusíme vymezit *transmisivní vyučování*, shledáváme podstatným předložit charakteristiku *tradičního vyučování*. Pro *tradiční vyučování* je charakteristické, že se pedagog soustředí především na učební osnovy a samotný obsah vyučování. Do pozadí se staví žák se svými schopnostmi, potřeby, motivy a potížemi. Nejčastěji využívanou metodou v *tradičním vyučování* je metoda výkladu, prostřednictvím které učitel předkládá žákovi hotové poznatky. Tato metoda bývá mnohdy příčinou vzniku neočekávaných překážek a obtíží, kdy učitel např. použije slova, kterým žáci nerozumí nebo nevědomky ztiší hlas či je ve třídě/venku hluk a žáci neslyší učitele. Taková situace pak bývá často důvodem vzniku žákovy nepozornosti. V případě použití tradičních metod učitel stěží zjišťuje, zdali žák správně porozuměl probranému učivu. V *tradičním vyučování* učitel volí pro všechny stejné tempo, odpovídající tempu průměrných nebo slabších žáků (Okoň, 1966).

V mnoha ohledech se *tradiční vyučování* blíží k *transmisivnímu*, případně *instruktivnímu vyučování*. O vzdělávání primárně orientovaném na transmisi (přenos), tedy na předávání definitivních vzdělávacích obsahů - vědomostí, pravidel, vzorců, algoritmů aj. žákům, kteří jsou jejich pouhými pasivními příjemci, se v současnosti začíná hojně diskutovat. *Transmisivní vyučování* se zaměřuje převážně na výsledky, tj. vyžaduje po žácích mechanické osvojení a zapamatování si učiva ve formě dobře zapamatovatelných pouček, schémat, tabulek, grafů, obrázků, přehledů a návodů, jeho opětovné vybavení a bezchybné použití v nadcházejících didaktických situacích (Novák). Kalhous a Obst (2002, s. 49) přirovnávají v *transmisivním pojetí* vyučování k *„přidávání zboží (znalostí) do skladu (žákovy mysli), kde příliš nezáleží, co už je v sousedních oddělených skladištích"*. Tedy *transmisivní vyučování* spíše nerespektuje žákovy *prekoncepty*, tj. vědomosti, dovednosti, postoje, se kterými žák vstupuje do výuky. Nositelem poznání je učitel, učebnicový či jiný text, případně média. Ti prezentují, konstatují a instruují učivo. *Transmisivní způsob* výkladu, který má charakter instrukce, nazýváme *instruktivní* (Novák). Dle Peciny (2009) má výsadní postavení v *transmisivním vyučování* metoda výkladu, která se zpravidla vyskytuje v pedagogické praxi současně s metodami názorně demonstračními (předvádění a pozorování, práce s obrazem, instruktáž). Z organizačních forem je nejčastěji uplatňována frontální výuka.

Hejný a Kuřina (2009, s. 193) si pokládá zásadní otázku: *„Jak můžeme při transmisivním přístupu k vyučování naučit aplikovat poznatky?"* Totiž mnohdy narážíme na žákovu neschopnost použít naučené v praxi či v analogických úlohách. Podle Hejného a Kuřiny pravděpodobně existuje jen jediná cesta a to *„dát vzory a poskytnout instrukce"*. Ač se jedná o cestu rychlou, poměrně snadnou a přijatelnou pro větší část populace, není cestou příliš ideální, neboť může vést k paradoxní situaci, kdy žák úlohu na základě imitace vzoru, poskytnutého učitelem, učitelovy instrukce, nápodoby nebo analogie vyřeší, aniž by jí porozuměl. Na druhou stranu podle Kuřiny (2009, s. 201) nemůže žák *„porozumět pouze tomu, co sám objeví či vytvoří"*, a tak *transmisivní pojetí výuky* nemůžeme v jeho podstatě zcela zavrhnout. Pecina (2009) předkládá situace, ve kterých se *transmisivní výučování* doporučuje:

- v případě zprostředkování složitého učiva, které si vyžaduje širší mezioborové znalosti
- v případě zprostředkování abstraktního učiva
- a při výuce jazyků, v nichž je zapotřebí zprostředkování pouček a pravidel.

Při *transmisivním vyučování* má pak žák výsledky učení utříděné v uceleném systému dosavadních znalostí.

1.2.2 Konstruktivistické pojetí výuky

Konstruktivistické vyučování klade důraz na „význam“ a „smysl“ získaných a osvojených faktů, které nemohou být nikdy předány (transmitovány) mluveným či psaným slovem. Významy a porozumění smyslu žáci sami konstruují při aktivní práci s předloženými informacemi a zkušenostmi, do které vstupují s již získanými vědomostmi, dovednostmi, postoji a zkušenostmi (Kalhous a Obst a kol., 2002). *„Charakterem takto pojatého vzdělávání je vytváření vhodných situací, které žákovi umožní jemu nové skutečnosti samostatně objevovat a poznání aktivně konstruovat“* (Dostál, 2013, s. 82). Poskytnutí příležitosti žákovi pracovat s učivem lze považovat za počátek výstavby poznání, který předpokládá aktivní úlohu žáka. Jeho činnosti (aktivity) bývají zpočátku fyzické, kdy žák manipuluje a pracuje s různými předměty, později přechází v mentální operace, tj. probíhají v žákově mysli (Kalhous a Obst, 2002).

Právě kultivace žákova duševního světa by měla být podle Hejného a Kuřiny (2009) hlavním cílem každého vzdělávání. Realizace takovéto kultivace předpokládá během poznávacího procesu vzájemnou interakci mezi učitelem a žákem a mezi žáky samotnými. Učitel má motivovat žáky k výše uvedeným aktivitám různými způsoby, v matematice nejčastěji vhodně položenými otázkami, problémy, paradoxy, výsledky. Je-li v této fázi učitel úspěšný, započíná konstruktivní poznávací proces u žáků, kteří si vytvářejí vlastní představy (názory, nápady, námitky aj.) a budují vlastní poznatkovou strukturu. Proces konstrukce poznání prochází dvěma fázemi. První fáze, ve které dochází ke zkoumání nového objektu či myšlenky, může vést k nerovnováze, tj. žákovy dosavadní zkušenosti a znalosti se neslučují s novými informacemi. Druhá fáze pak řeší tento poznávací konflikt, čímž obnovuje rovnováhu. Aby byl tento konflikt[1] rozřešen, musí žák konstruovat nebo objevovat nová řešení (Hejný, 2009).

Hejný ve spolupráci s Kuřinou (2009, s. 194-195) předkládají zásady, na nichž jsou vystavěny principy *konstruktivistického vyučování*: *„aktivita, řešení úloh, konstrukce poznatků, zkušenosti, podnětné prostředí, interakce, reprezentace a strukturování, komunikace, vzdělávací proces, formální poznání"*. Jednotlivé znaky *konstruktivistického vyučování* uvedení autoři upřesňují. Pro *konstruktivistické vyučování matematice* je charakteristické přijímat matematiku jako *„specifickou lidskou aktivitu"*, nikoliv jako výsledek formulovaný pouze do podoby definic, vět a důkazů. Aktivitou v matematice se myslí *„hledání souvislostí, řešení úloh a problémů, zobecňování tvrzení a jejich dokazování"*. Vzhledem k faktu, že konstruování poznatků probíhá v mysli konkrétního žáka, získané a osvojené poznatky jsou jemu vlastní. Do vytvořeného prostředí podněcující tvořivost žák vstupuje s vlastními zkušenostmi. Podstatným spolutvůrcem prostředí je *„tvořivý učitel, dostatek vhodných podnětů a sociální klima třídy příznivé tvořivosti"*. K rozvoji konstrukce poznatků přispívá *„sociální interakce ve třídě"* v podobě diskuse, srovnání výsledků, argumentace apod. Nejen pro *konstruktivistické vyučování* v matematice je podstatný její jazyk, kterým aktéři vyjadřují vlastní myšlenky a naopak rozumí ostatním aktérům. Vzdělávací proces v matematice prochází nejméně třemi fázemi. V prvé řadě se jedná o *„porozumění matematice"*. Tréninkem, případně zapamatováním si důležitých pravidel, vzorců a algoritmů dochází k rozvoji druhé fáze vzdělávacího procesu, tzv. *„zvládnutí matematického řemesla"*. Třetí fází matematiky je její aplikace, která nemusí být nutně pouhým vyvrcholením vzdělávacího procesu, ale také jeho motivačním začátkem.

Důležité je podle Hejného a Kuřiny (2009, s. 196), *„zda se v průběhu vzdělávacího procesu v myslích žáků rodí s porozuměním matematika ukotvená na již zažitá matematická témata"*. Je-li *konstruktivní přístup* k vyučování realizován dobře, nebezpečí formalismu je zmírněno. Formalismus ve vzdělávání podle týchž autorů (2009) vzniká při *transmisivním*, případě *instruktivním vyučování*, které však nelze zcela vyloučit při *konstruktivním vyučování*. Totiž bez počátečních instrukcí nelze řešit zadané úlohy.

Kuřina (2009, s. 203) zdůrazňuje, že *„podstatnou složkou procesu učení je porozumění, prozření, pochopení, že tak to tedy je"*. I přesto, že se v praxi mylně lidé domnívají, že se porozuměním proces učení ukončí, je podle téhož autora (2009) nutné

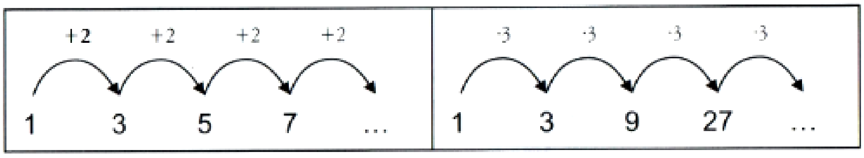
---

[1] V této souvislosti již mluvil G. Bachelard o tzv. „epistemologickém konfliktu", viz str. 11.

připomenout, že porozuměním může učení často začít. Pro ilustraci uvádí (2009, s. 206-207) konstrukční úlohu:

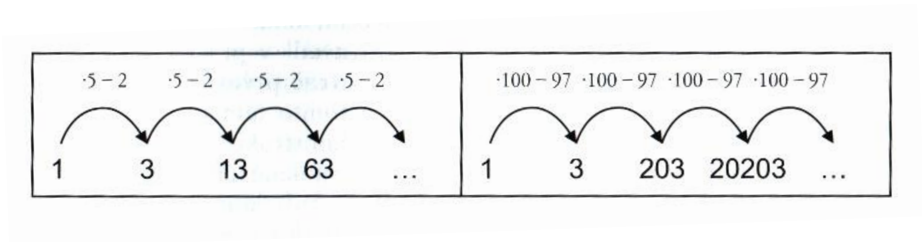
„Jak bude pokračovat řada čísel, která začíná takto: 1, 3…?“

Úloha má nekonečně mnoho řešení. Zprvu řešitele nejspíše napadnou dvě řešení uvedené na obr. 2. Lze ale nalézt další možnosti, jak pokračovat v řadě 1, 3… Pomocí početních operací je možné získat z čísla 1 číslo 3, tak jak ukazuje obr. 3 (Kuřina, 2009).



Obrázek 2: Řešení konstrukční úlohy (a)

Při této úloze *„výchozími podmínkami není vymezen charakter výsledku. Podmínky jsou pouhými podněty pro tvorbu.“* Úloha tak dává vznik *„lidskému poznání a myšlení, pro utvoření představ a pojmů v lidském vědomí a jejich ukotvení v existující pojmové struktuře člověka“* (Kuřina, 2009, s. 208). Jedná se o „individuální konstrukty“, které již v roce 1993 Kuřina v nejspíše první české publikaci věnující se *konstruktivismu* nazval tzv. „mlhavými“ konstrukcemi.



Obrázek 3: Řešení konstrukční úlohy (b)

V této souvislosti mluví také o tzv. „tvrdých“ a „měkkých“ úlohách[2]. K „tvrdým“ úlohám řadí tradiční úlohy školské matematiky: odpovězte na otázky, vypočtěte, sestrojte, změřte apod. Pro tento typ úlohy je charakteristické, že *„výchozími podmínkami je určen výsledek“*. Pro „měkké“ konstrukce platí, že *„výchozími podmínkami není výsledek určen, máme provést konstrukci, která není s výchozími podmínkami v rozporu, ale množina výsledků není podrobněji vymezena“*. Výsledky „tvrdých“ úloh jsou již stanoveny, zatímco výsledky „měkkých“ úloh jsou ve velké míře závislé na tvůrčí činnosti jejich řešitele. Je však nezbytné dodat, že k výsledkům „tvrdých“ úloh většinou dospějeme na základě nějaké myšlenky, tedy na základě „mlhavých“, případně „měkkých“ konstrukcí (Kuřina, 2009, s. 207).

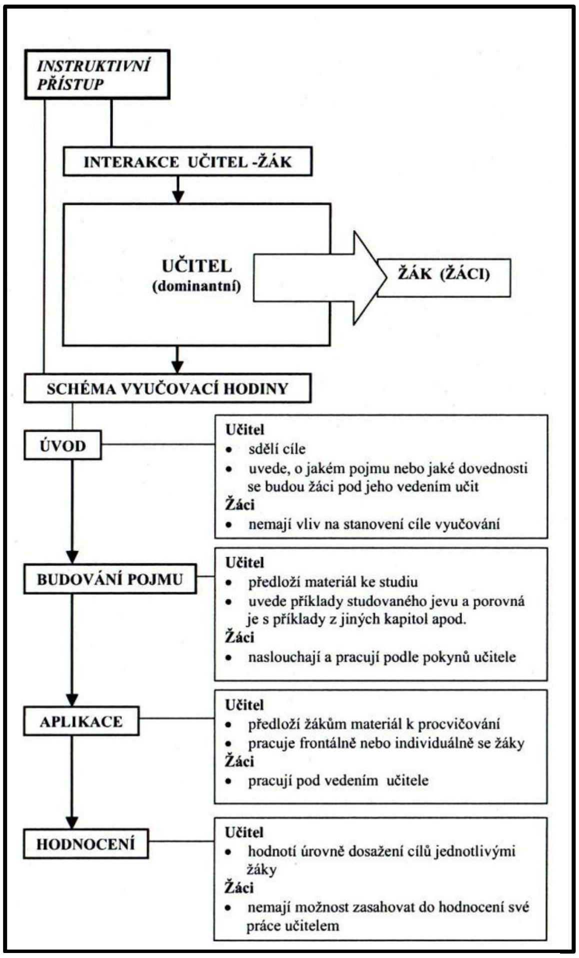
[2] V publikaci *Dítě, škola a matematika* Kuřina (2009, s. 203-206) nabízí podněty a inspirace k uvedeným dvěma typům konstrukce.

1.2.3 Srovnání transmisivního a konstruktivistického pojetí výuky

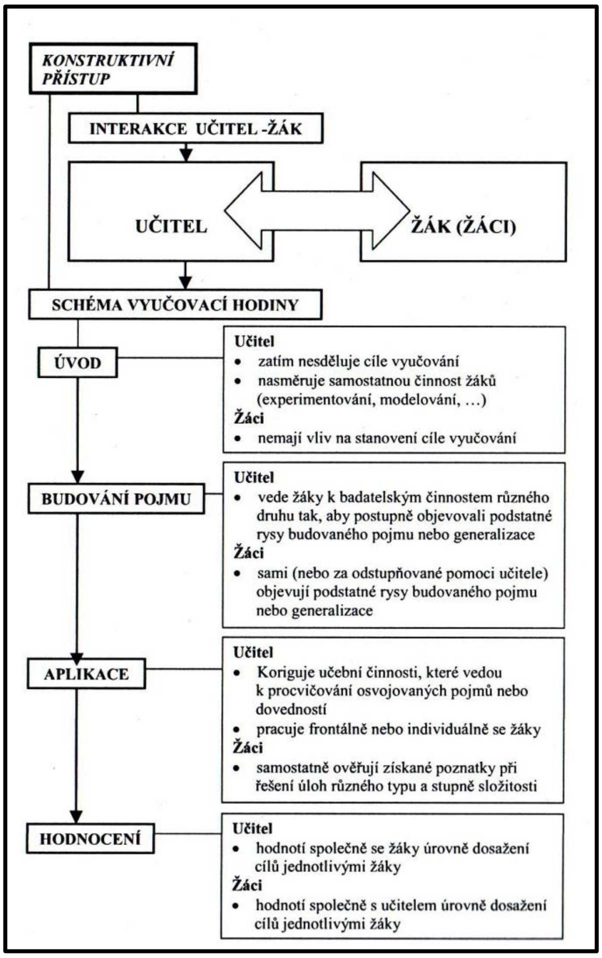
Značně zjednodušené, ale přehledné porovnání *transmisivního* a *konstruktivistického vyučování* předkládá Hejný a Stehlíková (1999, s. 33), viz tabulka 1.

Polaritní dipól	Konstruktivistické vyučování	Transmisivní vyučování
hodnota poznání	kvalita	kvantita
motivace	vnitřní	vnější
trvanlivost poznání	dlouhodobá	krátkodobá
vztah učitel-žák	partnerský	submisivní
klima	důvěry	strachu
nositel aktivity	žák	učitel
činnost žáka	tvořivá	imitativní
poznatek žáka	produktivní	reproduktivní
nosná otázka	Co? A proč?	Jak?

Tabulka 1: Srovnání transmisivního a konstruktivistického vyučování



Obrázek 5: Instruktivní přístup ve vyučování



Obrázek 4: Konstruktivní přístup ve vyučování

Lze však nahradit jeden přístup tím druhým? Jak by na takovou změnu reagovala současná praxe? Splnilo by *konstruktivisticky pojaté vzdělávání* očekávání mnoha jeho zastánců? Nebo by negativně ovlivnilo studijní výsledky žáků? Otázkami jsme v této kapitole začali, otázkami také končíme. Nelze říci, kterému z přístupů by měli učitelé v pedagogické praxi dát přednost. Z výsledků prozatím realizovaných výzkumných šetření vyplývá, že *tradiční výuka,* tedy *transmisivní pojetí výuky* spíše zajistí vyšší úroveň studijních výsledků a naopak *konstruktivistické pojetí výuky* rozvíjí u žáka tvořivost, zvídavost, samostatnost a pozitivní vztah k učení a škole, více viz kapitola *Současný stav empirických šetření zaměřených na BOV*. Proto jsou v současnosti oba přístupy vnímány jako doplňující se strategie vzdělávání.

Na obr. 4 a 5 může čtenář porovnat roli učitele a roli žáka v jednotlivých fázích vyučovací hodiny při volbě instruktivního nebo konstruktivního přístupu. Učitel by měl sám posoudit, který z přístupů je vhodný pro jeho žáky a v jaké míře. Ve svém posouzení by měl mít vždy na paměti, že každé vzdělání by mělo mít smysl, mělo by být užitečné a mělo by žákům přinášet uspokojení a radost (Hejný a Kuřina, 2009).

1.3 Charakteristika badatelsky orientovaného vyučování (BOV)

1.3.1 Terminologické vymezení pojmu BOV a jeho rozbor

Do české literatury pojem *badatelsky orientované vyučování* (BOV) pronikl z anglického termínu *inquiry based education* (IBE), kde *inquiry*, jak uvádí Janík a Stuchlíková (2010) znamená *bádání*, *zkoumání*, ale také *hledání pravdy*. S termínem *inquiry based science education* (IBSE) se setkáváme v přírodních vědách. V jazycích pedagogů bývá IBE často zkracováno na pouhé *inquiry* (Papáček, 2010). Tento termín se podle Janíka a Stuchlíkové (2010, s. 21) na jedné straně *„stal mimořádně populárním pro označení žádoucích změn ve vzdělávání“*, na straně druhé existují jisté *„pochybnosti o tom, zda tento pojem označuje něco opravdu nového v procesu učení a vyučování, nebo jen jiným způsobem zdůrazňuje aspekty něčeho, co pedagogická praxe de facto dlouhou dobu realizuje“*. Jak již vyplývá z textu kapitoly: *Kde se vzalo badatelsky orientované vyučování*, není BOV z hlediska jeho podstaty zcela novým přístupem ve vzdělávání. Dostál (2015, s. 27) konstatuje, že s badatelsky orientovanou výukou více či méně souvisí celá řada modelů vzdělávání, které jsou již v pedagogické praxi zaběhlé. Jedná se např. o *„problémové učení, transformativní učení, zážitkové učení, zkušenostní učení, aktivní učení, učení založené na příkladech nebo kooperativní učení“*. V důsledku šíře pojmu badatelsky orientovaná výuka existují podle Dostála (2015) rozdílné tendence v chápání tohoto pojmu.

1.3.1.1 Badatelsky orientovaná výuka jako řešení problémů

V tomto pojetí je v domácích i zahraničních publikacích podle Dostála (2015, s. 35) badatelsky orientovaná výuka vymezována v užším slova smyslu a je *„téměř ekvivalentní k problémové výuce“*. Podstatu badatelsky orientované výuky vidí autoři v řešení problémů, tj. v *„analýze problémů, hledání potřebných informací, formulaci hypotéz, jejich testování a následné potvrzování nebo vyvracení“*. Uveďme formulaci, která takto pojímá badatelsky orientovanou výuku (Papáček, 2010, s. 146):

„Badatelsky orientované vyučování je jednou z účinných aktivizujících metod problémového vyučování a vychází z konstruktivistického přístupu ke vzdělávání. Učitel nepředává učivo výkladem v hotové podobě, ale vytváří znalosti cestou řešení problému a systémem kladených otázek (komunikačního aparátu). Má funkci zasvěceného průvodce při řešení problému a vede přitom žáka postupem obdobným, jaký je běžný při reálném výzkumu. Od formulace hypotéz, přes konstrukci metod řešení, přes získání výsledků zjištěných metodikou, na které se žáci s učitelem dohodli, a jejich diskusi až k závěrům. To umožňuje žákovi relativně samostatně a v kooperaci se spolužáky formulovat problém, navrhnout metodu jeho řešení, vyhledávat informace, řešit problém prodiskutovaným způsobem, a tak aktivně získávat potřebné kompetence, znalosti, dovednosti a komunikační schopnosti.“

1.3.1.2 Badatelsky orientovaná výuka jako pojetí výuky

Mnoho autorů nahlíží na badatelsky orientovanou výuku jako na pojetí výuky, v jejímž základu stojí proces řešení problémů. Své chápání však neomezují jen na oblast problémové výuky, odlišující se od badatelsky orientované výuky svými cíli, ale badatelsky orientovanou výuku chápou v širších souvislostech přesahující rámec pouhého řešení problémů (Dostál, 2015). Uveďme formulaci Nezvalové (2010, s. 56), která badatelsky orientovanou výuku vymezuje ve vztahu k učení a vyučování:

„Ve vztahu k vyučování je badatelsky orientované vyučování chápáno jako vyučování, kdy žáci formují výuku ve třídě, učitel je facilitátorem. Ve vztahu k učení žáka je badatelsky orientované učení aktivní proces, reflektující přístupy vědců ke zkoumání a bádání v přírodě. Zahrnuje zkušenost, důkaz, experimentování a konstrukci poznatkové struktury. Je tedy konzistentní s konstruktivistickým přístupem k učení.“

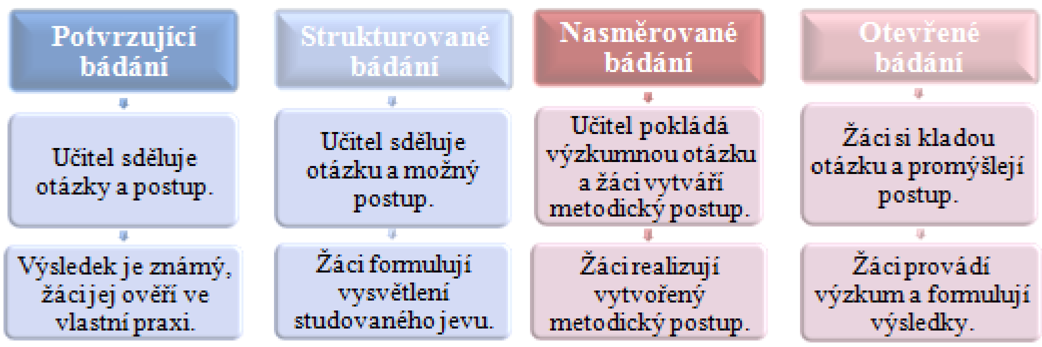
Setkáváme se se snahou vymezit pojmy *badatelsky orientované vyučování* a *badatelsky orientované učení*, avšak opomíjíme pojem *badatelsky orientovaná výuka*, ta je chápána podle Dostála (2013, s. 86) jako *„činnost učitele a žáka zaměřená na rozvoj znalostí,* *dovedností a postojů na základě aktivního a relativně samostatného poznávání skutečností žákem, kterou se sám učí objevovat a objevuje"*. Smyslem takto pojaté výuky není pouze samostatně objevit skutečnosti, které si má žák osvojit, ale také naučit se nové skutečnosti aktivně poznávat, neboli naučit se badatelsky myslet.

Badatelsky orientovaná je výuka zaměřená na bádání, včetně vlastního bádání, mající problémový, ale i neproblémový charakter (viz níže např. potvrzující bádání). Nelze tedy říci bez výjimky, že by byla badatelsky orientovaná výuka založena pouze na řešení problémů, viz obr. 6 (Dostál, 2015).

Obrázek 6: Vztah badatelsky orientované výuky a problémové výuky

1.3.1.3 Pojem „bádání"

Bádání je aktivní činnost žáka, při které samostatně a nezprostředkovaně poznává skutečnosti (Dostál, 2015). Jistě se nejedná se o pasivní příjem informací, jenž stojí v základu transmisivního či instruktivního pojetí výuky. Na obr. 7 lze porovnat různé typy bádání (Rezba, Auldridge, Rhea, 1999 cit In: Dostál, 2015, s. 36):



Obrázek 7: Potvrzující, strukturované, nasměrované a otevřené bádání

Potvrzující bádání

Výuka, v níž je realizováno potvrzující bádání, je charakteristická přímým řízením učitele, kde žáci pracují podle učitelova návodu. Poskytuje žákovi ve srovnání s ostatními typy bádání nejvíce vstupních informací a předpokládá, že žák ověří již stanovené zákonitosti a teorie. Cílem výuky je rozvinout pozorovací, experimentální a analytické dovednosti žáků. Vede k osvojení si konkrétních badatelských dovedností, tj. příprava techniky pro sběr materiálu, zaznamenávání a vyhodnocování získaných dat (Dostál, 2015).

Strukturované bádání

Také ve strukturovaném bádání sehrává učitel významnou roli. Od potvrzujícího bádání se strukturované odlišuje tím, že jeho podstatou je již řešení problému, které se žáci teprve učí. Postup bádání je pomocí navádějících otázek stanoven, ale řešení není předem známo. Do popředí vstupuje tvůrčí aktivita žáků, která je však regulována učitelovými instrukcemi. Tento typ bádání je předstupněm vyšší úrovně bádání (Dostál, 2015).

Nasměrované bádání

Nasměrované bádání staví učitele do role aktivního průvodce žákova bádání. Společně s žáky stanovuje výzkumné otázky (problémy). Postupy pro jejich ověření žáci stanovují sami. Ač během realizace bádání učitel poskytuje žákům potřebné rady, jejich samostatnost je mnohem vyšší než v předchozích dvou typech bádání (Dostál, 2015).

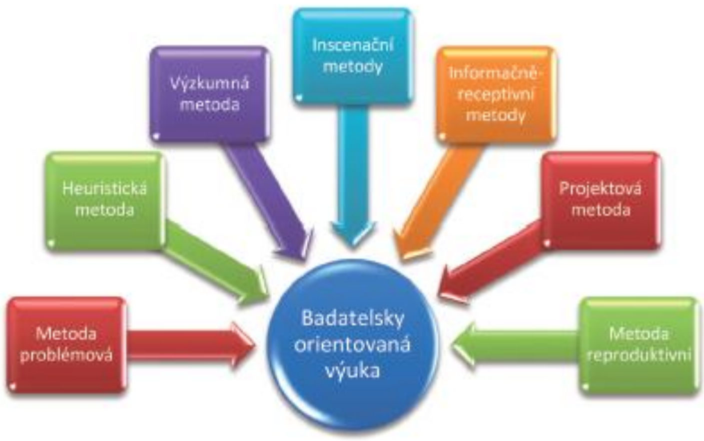
Otevřené bádání

Otevřené bádání se považuje za nejvyšší úroveň bádání ve srovnání s potvrzujícím bádáním, které je nejnižší úrovní bádání. V podstatě se velmi blíží k vědeckému bádání. Prostor je ponechán žákovi, který je schopný na základě pozorování a popisu skutečností formulovat problém, sestavit výzkumné otázky, stanovit metody a postupy bádání, zaznamenat a analyzovat získaná data a z důkazů vyvodit závěry, které následně obhájí (Dostál, 2015).

1.3.2 Specifika BOV

1.3.2.1 Výukové metody související s BOV

Metodu problémového výkladu, jež spočívá ve vytyčení problému (učební úlohy) učitelem a dopracování se k odpovědi na učební úlohu žákem, chápeme jako přípravu na vlastní bádání. Při *heuristické metodě* dochází u žáků ke strukturovanému a nasměrovanému bádání. Předpokladem funkčnosti metody je rovnováha mezi aktivitou učitele a žáka. Učitel stanovuje dílčí problémy a buďto sám, nebo ve spolupráci s žáky vytyčuje dílčí kroky řešení problému (srov. Kalhous a Obst, 2002, Dostál, 2015). Vlivnou a blížící se k BOV je *metoda objevování a řízeného objevování*[3], která usiluje o žákovo samostatné odhalení skutečností často však s určitou cizí pomocí, případně po speciální přípravě (srov. Petty, 1996, Dostál, 2015). Jistá souvislost existuje mezi otevřeným bádáním a *výzkumnou metodou* vyžadující po žákovi samostatné a celostní řešení problémového úkolu, při kterém učitelova aktivita ustupuje do pozadí (srov. Kalhous a Obst, 2002, Dostál, 2015). Někteří autoři ztotožňují badatelsky orientovanou výuku s metodou, jiní, např. Dostál (2015, s. 40) píše, že *„badatelsky orientovaná výuka je více nežli metoda“*, při které učitel využívá různé metody (viz obr. 8) a žáci realizují různé úrovně bádání, od potvrzujícího až k otevřenému.



Obrázek 8: Znázornění metodické různorodosti v rámci badatelsky orientované výuky

1.3.2.2 Nároky kladené na žáka

V závislosti na uplatnění jednoho ze tří typů bádání[4] učitel vytváří vhodné podmínky pro vznik problémové situace, kterou předkládá žákovi. Aby žák začal uvažovat o problému, musí v prvé řadě problém vnímat. V podstatě prožívá pocit obtíže doplněný o pocit zvídavosti a je schopný specifikovat zdroj rozporu, který problémovou situaci vyvolává. Velmi důležitá je také ochota žáka se problémem zabývat a následně jej řešit. Zjistí-li žák, že nemá dostatečné množství výchozích údajů pro řešení problémové situace a je takřka nemožné tyto údaje získat, pak není ochotný problém řešit. Ochotu zabývat se problémem a řešit problém může učitel podpořit vhodnými prostředky a postupy, tedy žáka motivovat. Z šetření PISA

[3] V publikaci PETTY, G. *Moderní vyučování*. Praha: Portál, 1996, s. 228-230. ISBN 80-7178-070-7 přehled zásad pro účinné použití metody objevování.

[4] Strukturované, nasměrované a otevřené bádání. Ve srovnání s uvedenými typy bádání není podstatou potvrzujícího bádání řešení problému.

2012 byly vymezeny činnosti vykonávané žáky při řešení problémů: *„zkoumání a porozumění, znázorňování a formulování, plánování a provádění, sledování a posuzování“*. Během těchto činností by se měl žák kriticky dotazovat, tj. formulovat otázky, které se vztahují k problémové situaci (Dostál, 2015, s. 75).

Obrázek 9: Charakteristiky badatelsky orientované výuky

Není tedy překvapivé, že se ve srovnání s transmisivním, případně instruktivním pojetím výuky mění v pojetí badatelsky orientované výuky role žáka. Požadujeme-li po žákovi, aby se ochotně účastnil procesu objevování, generoval myšlenky a nápady ve formě stanovených hypotéz, které propojoval s myšlenkami a nápady předchozími, navrhoval způsoby jejich verifikace a společně s učitelem a žáky o nich diskutoval, musí nutně dojít ke změně role učitele, který pro tyto činnosti vytváří vhodné prostředí (srov. Samková, 2015, Nezvalová, 2010). Na obr. 9 je znázorněna badatelsky orientovaná výuka jako *„průnik čtyř charakteristik: záměrů kurikula, žákovských a učitelových aktivit specifických pro takto zaměřenou výuku a kultury vyučování“* (Samková, 2015, s. 97).

1.3.2.3 Nároky kladené na učitele

Z výzkumu J. Dostála (2015, s. 109) vyplynulo, že *„oborové didaktiky v současnosti postrádají obecný kompetenční model učitele ve vztahu k badatelsky orientované výuce, který by mohl být v rámci jednotlivých didaktik dále rozpracován a aplikován“*. Aby učitel úspěšně realizoval BOV, musí nezbytně disponovat kompetencemi, jež se odlišují od kompetencí potřebných pro realizaci transmisivního, příp. instruktivního vyučování. Na základě dlouhodobého výzkumného šetření byly vymezeny kompetence, jež jsou členěny do tří oblastí představujících návrh kompetenčního modelu (Dostál, 2015, s. 109-111):

- *kompetence k plánování a přípravě badatelsky orientované výuky,*
- *kompetence k provádění badatelsky orientované výuky,*
- *kompetence k rozvoji žáka prostřednictvím badatelsky orientované výuky.*

Je důležité, aby učitel *„posoudil vhodnost zařazení badatelských aktivit do výuky“* a v návaznosti na toto zjištění naplánoval a ideálně zařadil účelné badatelské aktivity do výuky s ohledem na získané materiální prostředky a v souladu s právními předpisy a nařízeními, resp. s kurikulárními dokumenty tak, aby propojil teorii s praxí a zároveň respektoval jeden ze základních poslání edukačního procesu – individualizaci. Učitel má využívat badatelských aktivit, které realizuje na vědeckém základě a v návaznosti na dosavadní znalosti žáků, pro motivaci k učení, expozici, fixaci nového učiva a diagnostiku osvojeného učiva. Prostřednictvím badatelských aktivit má učitel rozvíjet žákovo vnímání, myšlení, představivost, samostatné objevování, zájmy, spolupráci, schopnost prezentovat vlastní výsledky práce, ale také utvářet pojmy a formovat profesní orientaci žáků. Mimo to také zhodnotit průběh a výsledky badatelských aktivit.

Na učitele jsou při realizaci BOV kladeny vysoké nároky, které se vážou jak k přípravě badatelských aktivit, tak také k průběhu jejich realizace v samotné vyučovací jednotce. Učitel musí být kreativní a flexibilní, tzn. schopný pohotově reagovat na překážky znemožňující naplnění stanoveného cíle a neočekávané otázky nebo návrhy žáků (Papáček, 2010).

1.3.2.4 Motivace jako úspěšný start procesu „bádání“

Klíčovou roli v našem konstruktivistickém pojetí výuky hraje motivace. Nebude-li žák dostatečně motivován, nebude mít o učení zájem a ochotu se vůbec učit, nenastartuje úspěšný start procesu učení, resp. bádání, neboť je k tomu zapotřebí jeho aktivity (Hejný a Kuřina, 2009). Motivaci lze chápat *„jako souhrn podnětů, důvodů k určitému jednání. Na rozdíl* *od člověka, který žádnou vlastní motivaci nemá a jen plní příkazy, bude se motivovaný člověk navíc snažit sám odstraňovat překážky a hledat nové cesty k cíli.“*(Sokol, 1998, s. 326)

V současné pedagogické praxi bývá nejčastějším motivem žáka snaha získat dobrou známku, případně pochvalu ze strany učitele nebo rodiče. Žáci jsou tak k učení motivováni spíše zevnějšku nežli zevnitř, tj. potřebou poznávat a seberealizovat se (Hejný a Kuřina, 2009). O vnitřní motivaci mluvíme, když se učí žák proto, že ho zaujalo např. učivo, prostředek, metoda nebo forma výuky, nikoliv vnější odměna (Kalhous a Obst, 2002). Silným motivačním faktorem je žákův úspěch, který zvyšuje jeho sebevědomí podporující zájem a ochotu pokračovat v procesu poznávání (Petty, 1996). Již z tabulky 1 na str. 17 vyplývá, že prostřednictvím badatelských aktivit, vycházejících z konstruktivistického přístupu ke vzdělávání, lze v žákovi probudit vnitřní motivaci. Pak úspěch v matematice pro žáka znamená, když samostatně objeví řešení úlohy, algoritmus početních operací, případně vzorec nebo pravidlo, aniž by byl odměněn zevnějšku.

1.3.3 Současný stav empirických šetření zaměřených na BOV

Dostál (2015) provádí analýzu vědeckých studií publikovaných v časopisech v letech 1950-2014 a zjišťuje, že prvotně byly tyto studie charakteristické kvalitativními popisy BOV. Postupem času se vedle kvalitativních výzkumů začaly objevovat empirické studie kvantitativního charakteru zkoumající rozdíly mezi *tradičním* a *badatelsky orientovaným vyučováním*. Efekty, které přináší *tradiční* a *badatelsky orientované vyučování,* jsou v těchto šetření často posuzovány podle míry rozvoje žáků v poznatkové struktuře. Autoři některých šetření, porovnáním výsledků před a po uplatnění BOV, zjistili, že žáci, kterým bylo umožněno poznatky samostatně konstruovat, měli větší znalostní zisk. Naproti tomu, někteří autoři studií upozorňují na zanedbatelný nebo i záporný vliv BOV, kdy žák může dojít k mylným závěrům svého poznání (Dostál, 2015). Dostál (2015, s. 19) se však domnívá, že zaměřit se především a jen na znalostní výsledky žáků není správné, protože badatelsky orientovaná výuka je *„stěžejní v rozvoji myšlení, tvořivosti a řešení problémů“*.

Předpokládá se, že BOV zvýší zájem žáků o přírodovědné předměty a matematiku. Významné je toto pojetí výuky především proto, že usiluje o rozvoj kompetencí žáků zaměřených na řešení problémů. Výsledky výzkumného šetření PISA v oblasti řešení problémových úloh žáky z roku 2003, kdy k šetření došlo poprvé, a výsledky výzkumného šetření z roku 2012, které prozatím považujeme za nejnovější šetření PISA, jsou téměř srovnatelné, tj. výsledky českých žáků byly v porovnání s ostatními zeměmi mírně nadprůměrné (Dostál, 2015). Dostál (2015, s. 11) si pokládá otázku, *„v jaké míře a zda* *v současné podobě realizovaná badatelsky orientovaná výuka poskytuje požadované efekty, které by se mj. pozitivně projevily ve výsledcích testů PISA"*. Příčiny dosažení lehce nadprůměrných výsledků mohou být různé. Což také vychází z některých výzkumů zaměřených na podmínky a předpoklady pro uskutečnění BOV. I přesto, že se učitelé staví k BOV kladně, což vychází např. z mezinárodního výzkumného šetření TALIS 2013, nemají dostatek materiálních didaktických prostředků, nebo jim v cestě realizace BOV stojí nevyhovující osnovy, případně vysoký počet žáků apod. Paradoxní je zjištění, že ač učitelé zaujímají pozitivní postoj k realizaci BOV, jejich přesvědčení se nemusí vždy shodovat s jejich skutečně uplatňovanými vyučovacími postupy. Proto se v současnosti pozornost přesouvá na učitele, především na jeho kvality a kompetence, které jsou klíčové při realizaci kvalitního BOV (Dostál, 2015).

1.3.4 Projekty zaměřené na podporu BOV v přírodních vědách a matematice

Termín BOV se dostal do povědomí českého vzdělávání především *„prostřednictvím mezinárodních projektů zaměřených na badatelsky orientované vzdělávání financovaných ze Sedmého rámcového evropského výzkumného programu"*. V prvé řadě vznikaly projekty pro přírodovědné předměty (partneři uvedených projektů jsou mj. české univerzity): S-TEAM[5], realizovaný v letech 2009-2011, ESTABLISH[6], realizovaný v letech 2010-2014, PROFILES[7] a PRI-SCI-NET[8], realizované v letech 2011-2014. Poté začaly vznikat projekty kombinující přírodovědné projekty a matematiku: FIBONACCI[9], realizovaný v letech 2010-2013, v České republice od září roku 2011 nebo projekty, které běží doposud (2016) od roku 2013: ASSIST-ME[10] a MaSciL[11] (Samková, 2015, s. 95).

1.4 Badatelsky orientované vyučování matematice (BOVM)

Předpokládá se, že v matematickém vzdělávání BOV podpoří žákovo badatelské myšlení a zároveň zajistí porozumění matematickým pojmům a postupům. Proto se o BOV mluví jako o cestě, ale i o cíli matematického vzdělávání (Samková, 2015). Rozmanitosti zdrojů matematického bádání při uplatnění BOVM se meze nekladou. Právě matematika

[5] www.s-teamproject.eu
[6] www.establish-fp7.eu
[7] www.profiles-project.eu
[8] www.prisci.net
[9] www.fibonacci-project.eu
[10] www.assistme.ku.dk
[11] www.mascil-project.eu

by měla poskytnout žákovi prostor k porozumění světu přírody, techniky i umění (srov. Artigue, 2012, Kuřina, 2009).

1.4.1 Využití BOVM z pohledu aktuálního kurikula pro ZŠ

Dvoustupňové kurikulum, na úrovni státní: *rámcové vzdělávací programy* (RVP) a školní: *školní vzdělávací programy* (ŠVP) zpracované podle RVP, umožňuje všem školám jistou samostatnost v organizaci výchovně-vzdělávacího procesu. Totiž jedním z principů rámcového vzdělávacího program pro základní vzdělávání (RVP ZV) je, že *„předpokládá volbu různých vzdělávacích postupů, odlišných metod, forem výuky a využití všech podpůrných opatření ve shodě s individuálními potřebami žáků"* (RVP ZV, 2013, s. 6).

Autoři RVP ZV se domnívají, že již základní vzdělávání na 1. stupni *„svým činnostním a praktickým charakterem a uplatněním odpovídajících metod motivuje žáky k dalšímu učení, vede je k učební aktivitě a k poznání, že je možné hledat, objevovat a nalézat vhodnou cestu řešení problémů"* (RVP ZV, 2013, s. 9). Jedním z cílů základního vzdělávání je vést žáky k tvořivosti, logickému myšlení a k řešení problémů, jedné z klíčových kompetencí nové strategie vzdělávání (RVP ZV, 2013). Jaké postupy a aktivizační metody však každá škola k dosažení stanoveného cíle zvolí, je individuální. Domníváme se, že na tomto poli je efektivně realizovatelné BOVM.

V rámci vzdělávacího oboru *Matematika a její aplikace* poskytuje tematický okruh *Nestandardní aplikační úlohy a problémy* prostor pro uplatnění BOVM. Při určité míře zjednodušení v podstatě existují úlohy „standardní", k jejichž řešení dospějeme užitím osvojeného algoritmu či postupu, a „nestandardní", jež předpokládají určitou míru tvořivosti řešitele, který hledá a objevuje postup řešení. Stupeň náročnosti nestandardních aplikačních úloh a problémů se v dosti velké míře odvíjí od kompetencí, kterými disponuje jejich řešitel (Novák, 2010).

1.4.2 Sedm podob BOVM

L. Samková, F. Roubiček, M. Tichá a A. Hašpesová (2014) vychází při roztřídění badatelských úloh, tj. úloh podněcující bádání, z Deweyho definice[12] bádání. Jak již bylo řečeno, v jádru BOV stojí didaktická situace založena na bádání. Vytvořit takovou situaci lze prostřednictvím úloh (problémů) poskytujících žákovi určitou míru vstupních informací, jež obsahují něco neznámého. Vstupní informace by měla žáka podněcovat, být zajímavá

[12] Viz str. 8.

a zároveň přiměřeně náročná. Podle charakteru vstupních informací pak uvedení autoři rozlišují a pojmenovávají různé podoby BOVM:

1. Podoba minimalistická
2. Podoba gradující
3. Podoba dynamická
4. Podoba kompaktní (informačně nutná)
5. Podoba vizualizovaná (daná obrázkem)
6. Podoba daná prostředím
7. Podoba daná strukturou slovních úloh[13].

Podoba minimalistická

První podoba BOVM předpokládá minimální množství vstupních informací v zadání badatelské úlohy, např.: *„Objem neznámého předmětu je 64* cm^2*. Jak by tento předmět mohl vypadat?"* Jediná informace o objemu neznámého předmětu je pro žáka jistým impulsem k pouhému zopakování si vzorečků pro objem základních geometrických těles. Nicméně může vést i k jinému typu řešení, kdy žák přemýšlí o možnostech modelace různých předmětů o objemu 64 cm^2. Neurčitost vstupní informace tohoto typu badatelské úlohy nabízí mnoho způsobů, jak ji vyřešit. Skrývá v sobě velký badatelský potenciál (Samková, 2014, s. 189). Do této podoby BOVM jsou taktéž zařazovány badatelské úlohy rozvíjející finanční gramotnost nebo úlohy propedeutiky statistiky (Samková, 2015).

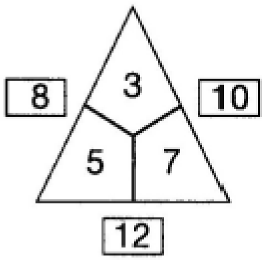
Podoba gradující

U souboru badatelských úloh, jejichž vstupní informace mají gradující podobu, *„se řešení jedné úlohy stává vstupem úlohy další"* (Samková, 2014, s. 190). Námětem gradující podoby BOVM mohou být *číselné trojúhelníky*, kde výstupní informace v podobě pravidla pro doplnění čísel se stává nutnou vstupní informací pro další otázky (Tichá a Hošpesová, 2014, s. 217-218):

1. *Najděte a popište pravidlo, podle kterého se čísla doplňují.*
2. *Co se stane, když v obdélníčkách budou čísla 6, 13, 14?*
3. *Rozhodněte, které z následujících tvrzení je pravdivé, a své rozhodnutí odůvodněte:*
   Součet vnějších čísel se rovná součtu vnitřních čísel.

[13]Podrobněji vymezena v článku: TICHÁ, M., HOŠPESOVÁ, A. *Sedm podob badatelsky orientovaného vyučování matematice III*. In Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů kol 2014, Plzeň: Vydavatelský servis, 2014, s. 219-221.

Součet všech tří vnějších čísel může být číslo sudé i liché.



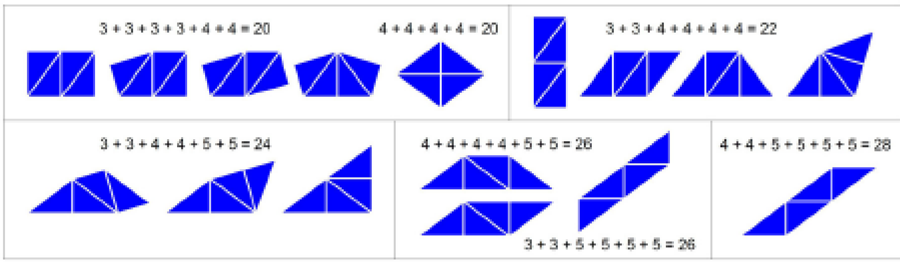
Obrázek 10: Číselný trojúhelník

Podoba dynamická

Třetí podobu BOVM lze realizovat prostřednictvím experimentování s běžně dostupnými školními pomůckami či matematickými objekty nebo pomocí matematických programů v počítači. Při řešení např. úlohy: *„Jaký je vztah mezi úhly v trojúhelníku?“* je účelné využít program dynamické geometrie, jako je např. GeoGebra nebo Cabri, který umožní zkonstruovat libovolné trojúhelníky a také jejich následnou manipulaci, tedy zvětšit, resp. zmenšit tvar trojúhelníku, přesunout trojúhelník na jiné místo apod. Při změně tvaru trojúhelníku se mění také jeho velikosti vnitřních úhlů. V závislosti na těchto změnách je třeba prozkoumat vztah mezi těmito úhly. Úloha je jistě badatelská. Protože však experimentujeme s velikostmi úhlů trojúhelníku v podobě trojic čísel, nejedná se o bádání geometrické, přestože je zadání úlohy geometrické. Pokud bychom chtěli experiment přetvořit tak, aby se jednalo o geometrické bádání, museli bychom odstranit veškeré aritmetické atributy, tj. velikosti úhlů vyjádřené čísly, a používali bychom pouze geometrické úpravy, např. nanesení vnitřních úhlů trojúhelníku do jedné přímky k jednomu společnému vrcholu. Při tomto experimentu je jednodušší manipulace s papírovými modely nežli počítačové provedení (Samková, 2014, s. 190).

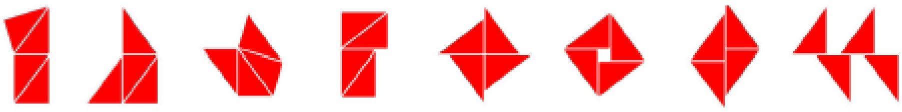
Podoba kompaktní (informačně hutná)

V porovnání s podobou minimalistickou, je didaktická situace této podoby BOVM popsána kompaktně, neboli celistvě, tj. nabízí žákovi informačně hutné zadání úlohy: *„Jaký obvod má mnohoúhelník, který je sestaven ze čtyř shodných pravoúhlých trojúhelníků s délkami stran 3, 4, 5?“*



Obrázek 11: Konvexní mnohoúhelníky sestavené ze čtyř shodných pravoúhlých trojúhelníků

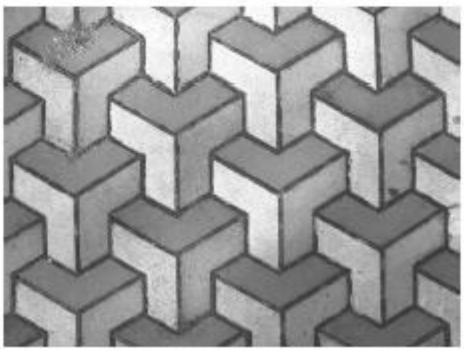
Pokud bychom vynechali informaci „pravoúhlý“, zadání trojúhelníku by zůstalo stále jednoznačné vzhledem k popsaným délkám jeho stran. I přes několik určujících informací je žákovi ponechán prostor pro vlastní způsob řešení a úloha nabízí různý rozsah oblasti jeho bádání. Uvažujeme-li pouze konvexní mnohoúhelníky, existuje konečný počet takových mnohoúhelníků sestavených dle instrukcí v zadání (viz obr. 11) s obvodem 20, 22, 24, 26 nebo 28. Uvažujeme-li však nekonvexní mnohoúhelníky, existuje nekonečně mnoho variant, a tak hodnota obvodu leží v intervalu ⟨20,48), viz obr. 12 (Roubíček, 2014, s. 170).



Obrázek 12: Nekonvexní mnohoúhelníky sestavené ze čtyř shodných pravoúhlých trojúhelníků

Podoba vizualizovaná (daná obrázkem)

Podoba vizualizovaného BOVM předkládá prostřednictvím úlohy vstupní informaci v podobě obrázku, kterou vnímáme a zpracováváme odlišným způsobem než informaci v podobě textu. Vizualizovaná vstupní informace bývá často součástí zadání geometrických úloh a *„sama o sobě nevede k uplatnění badatelských postupů, podstatná je otázka, která vymezí neurčitost situace a cíl bádání“*. Uveďme konkrétní zadání: *„Prohlédni si dlažbu chodníku na fotografii. Jak lze vytvořit takovou mozaiku?“*



Obrázek 13: Fotografie dláždění chodníku

Žák charakterizuje, analyzuje a popíše geometrickou mozaiku (dlažbu) na obrázku, která je sestavena ze shodných dlaždic určitého geometrického tvaru tvořících pravidelný geometrický vzor[14] a poskytuje žákovi velké množství důležitých informací (Roubíček, 2014, s. 172).

Podoba daná prostředím

Specifičnost prostředí, ve kterém je řešena badatelská úloha, je jistě další možný typ vstupní informace. Takových prostředí existuje mnoho. Výše uvedené úlohy o mnohoúhelnících vytvořených v trojúhelníkové mozaice nebo o dlažbě chodníku na fotografii jsou řešeny v geometrickém prostředí. Příkladem aritmetického prostředí mohou být výše uvedený číselný trojúhelník. Jiné prostředí může být specifické prací s různými stavebnicemi (využití sady Polydron, Geomag apod.) nebo řešením badatelské úlohy v pravidelné čtvercové nebo méně obvyklé trojúhelníkové síti. Uveďme úlohu z geometrického prostředí, jejímž výstupem je *„aritmetické, případně algebraické vyjádření změny velikosti obrazce“* (viz obr. 14): *„Sestav různé obrazce tvořené shodnými rovnostrannými trojúhelníky ze třech párátek. Kolik párátek je potřeba k sestavení nějakého většího obrazce?“* Protože úloha přesně nespecifikuje, jakým způsobem má žák rozšiřovat obrazce, vede žáka k badatelské aktivitě. (Roubíček, 2014, s. 173).

Obrázek 14: Zvětšování obrazců vytvořených v trojúhelníkové síti

[14] Podrobněji rozpracováno v článku: ROUBÍČEK, F. *Geometrické konstrukce a pravidelné mozaiky*. In: Matematika 6. Matematické vzdělávání v primární škole – tradice a inovace. Olomouc: Univerzita Palackého, 2014, s. 227-231.

2 Empirická část

2.1 Zpracované náměty pro BOVM s metodickými komentáři

2.1.1 Figurální čísla

Popis aktivity, potřebné pomůcky a pracovní podmínky

Objektem zkoumání je objevování *figurálních čísel* a vzorců pro určení *n-tých figurálních čísel*. Zarovnáním přirozených čísel do geometrických útvarů v rovině s počtem řádků 2 žáci ověří *aritmetické vlastnosti sudých a lichých čísel* (Bečvář, 1993). Problematiku lze ve zpracovaném zadání zařadit do výuky na 2. stupni ZŠ. K uskutečnění experimentu a jeho záznamu je vhodný pracovní list (viz příloha 1) a kamínky (popřípadě papírové kruhy, čtverce), které žáci využijí k uspořádání přirozených čísel do geometrických útvarů v rovině. Experiment lze realizovat v běžné třídě v rámci jedné výukové jednotky.

Výukové cíle

Žák určí první čtyři *čtvercová, obdélníková a trojúhelníková čísla*. Žák odvodí vzorec pro *n*-té *čtvercové, obdélníkové a trojúhelníkové číslo* a ověří jeho platnost. Žák názorně ověří tvrzení, že součet dvou sudých (lichých) čísel je číslo sudé a součet sudého a lichého čísla je číslo liché.

Předpokládané znalosti žáků

Žák čte a zapisuje přirozená čísla, provádí početní operace s přirozenými čísly zpaměti a písemně. Vyjádří přirozené číslo ve tvaru druhé mocniny. Aplikuje vzorec pro obsah čtverce, obdélníku a trojúhelníku.

Struktura a organizace (průběh) objevování

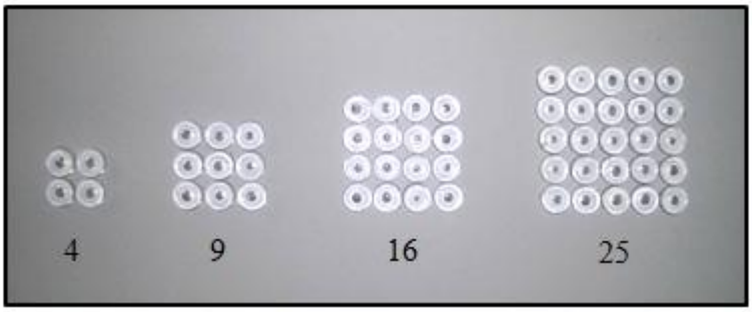
1. ***Zadání úlohy***

Před mnoha lety žili, byli významní matematici, kterým se říkalo Pythagorejci. O světě tvrdili, že je matematicky uspořádán, a důraz kladli především na pojem „číslo“. Totiž číslem se podle Pythagorejců dá vyjádřit cokoliv. Středem jejich zájmu se stala čísla přirozená (1, 2, 3, 4, …), přičemž číslo 1 chápali jako základní stavební kámen. *„Co bychom mohli o takových číslech říct,“* pokládali si otázku. A tak je začali více studovat. Nahradili je hromádkami kamínků, které uspořádali do různých geometrických útvarů. Mysli si třeba, že jsi jeden z Pythagorejců, a objev to, co objevili oni v 6. století př. n. l., tzv. figurální čísla.

2. *Metodické poznámky k realizaci experimentu a jeho záznamu*

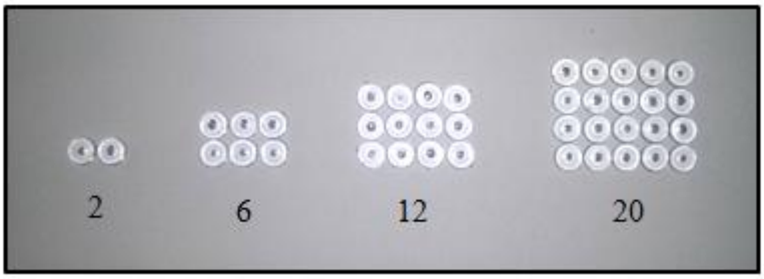
Každý žák obdrží pracovní list a určitý počet kamínků. Jeden z žáků přečte zadání. Dále se žáci řídí pokyny učitele a pracovním listem, jenž je pomocí připravených otázek povede v jejich objevování. Žáci mohou spolupracovat (radit se) ve dvojici a s učitelem, který jim pokládá navádějící otázky typu: *„Kolik potřebujeme minimálně kamínků, abychom je uspořádali do tvaru čtverce?“*, vyžaduje po žácích odpovědi a dohlíží na jejich práci během realizace experimentu.

Nejprve učitel směřuje žáky k objevení tzv. *čtvercových čísel*. I když učitel žáky upozorní na to, že se o číslu 1 diskutuje jako o *číslu čtvercovém, trojúhelníkovém,* nikoliv však *obdélníkovém,* budou jej žáci podobně jako Pythagorejci považovat za základní stavební kámen, tedy nebudou jej řadit mezi *figurální čísla*. Žáci znázorní pomocí kamínků několik *čtvercových čísel* (viz obr. 15), první čtyři (4, 9, 16, 25) překreslí do pracovního listu. Dále se řídí otázkami v pracovním listě. *Čtvercová čísla* lze zapsat ve tvaru druhé mocniny $(4 = 2^2, 9 = 3^2, 16 = 4^2, 25 = 5^2)$, který nápadně připomíná vzorec pro obsah čtverce. Tato skutečnost povede žáka k objevení vzorce pro *n-té čtvercové číslo*.



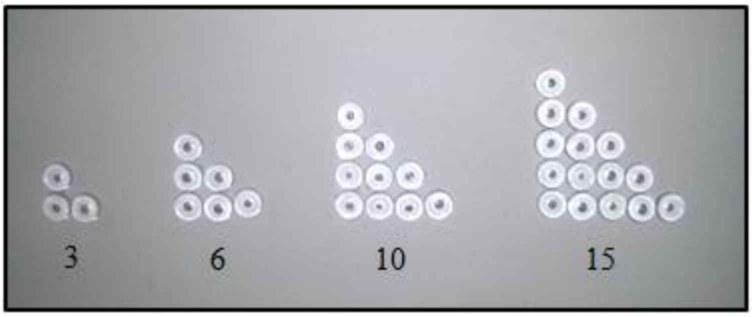
Obrázek 15: Čtvercová čísla (4, 9, 16, 25)

Obdobně žáci objevují tzv. *obdélníková a trojúhelníková* (3, 6, 10, 15,…) *čísla*, viz obr. 16 a 17. Především věnují pozornost *číslům obdélníkovým*, která se tvarově blíží *číslům čtvercovým* (2, 6, 12, 20,…). Vzorec pro *n-té obdélníkové číslo* odvodí ze součinu počtu řádků a sloupců ve znázorněných obrazcích (2=1·2, 6=2·3, 12=3·4, 20=4·5).



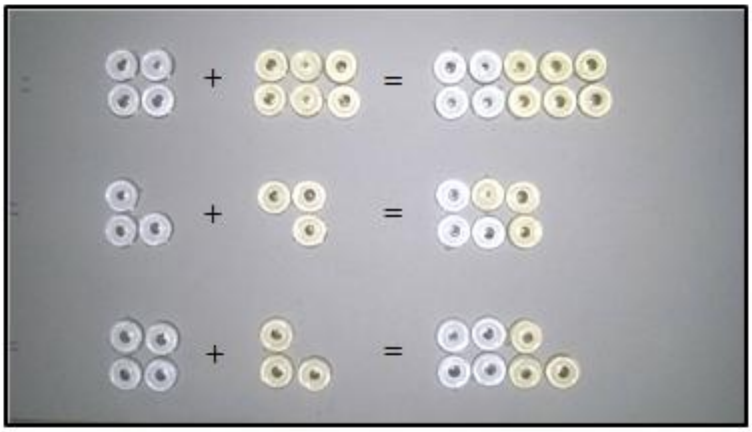
Obrázek 16: Obdélníková čísla (2, 6, 12, 20)

Vzorec pro *n-té trojúhelníkové číslo* odvodí ze vzorce pro *n-té obdélníkové číslo* (totiž *trojúhelníkové číslo* 3 je polovinou *obdélníkového čísla* 6, *trojúhelníkové číslo* 6 je polovinou *obdélníkového čísla* 12, apod.). Aplikují znalosti o vzorcích pro obsah obdélníku a trojúhelníku.



Obrázek 17: Trojúhelníková čísla (3, 6, 10, 15)

V posledním cvičení pracovního listu žáci vychází z tvrzení, že sudé číslo můžeme vždy zarovnat do obdélníku s počtem řádků 2, jak již během zkoumání *obdélníkových čísel* zjistí. U lichého čísla tak učinit nelze. Vždy nám bude jeden kamínek přebývat, nebo chybět. Žáci zvolí dvě sudá a dvě lichá čísla, která znázorní pomocí kamínků. Mohou se nechat inspirovat logem pracovního listu. Názorně ověří tvrzení, že součet dvou sudých (lichých) čísel je číslo sudé a součet sudého a lichého čísla je číslo liché, viz obr. 18.



Obrázek 18: Ověření aritmetických vlastností sudých a lichých čísel

3. *Formulace hypotézy žáky, případně s pomocí učitele:*

Vzorec pro *n-té čtvercové číslo* je n^2, vzorec pro *n-té obdélníkové číslo* je $n \cdot (n+1)$, vzorec pro *n-té trojúhelníkové číslo* je $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$. Součet dvou sudých (lichých) čísel je číslo sudé, součet sudého a lichého čísla je číslo liché.

4. *Verifikace hypotézy:*

Použitím vzorce pro *n-té čtvercové číslo* žáci zpaměti určí další *čtvercová čísla*, např. $6^2 = 36$ a 36 kamínků uspořádají do tvaru čtverce. Odpoví na otázku: *„Je číslo 51 číslem čtvercovým? Pokud ne, jaké největší čtvercové číslo sestavím z 51 kamínků?“* Pokusí se 51 kamínků uspořádat do tvaru čtverce, snadno zjistí, že přebývají dva kamínky. Největší *čtvercové číslo* sestavené z 51 kamínků je číslo 49, které lze zapsat ve tvaru druhé mocniny 7^2.

Použitím vzorce $n \cdot (n + 1)$ žáci objeví další *obdélníkové číslo* 30 a uspořádají 30 kamínků do tvaru obdélníka. Ověření vzorce pro *n-té trojúhelníkové číslo* proběhne formou odpovědi na otázku: *„Je číslo 21 trojúhelníkové, když víš, že 42 je číslo obdélníkové?“* Žáci již budou vědět, že každé *trojúhelníkové číslo* je polovinou *čísla obdélníkového*, uspořádají-li 21 kamínků do tvaru trojúhelníku, ověří tak vzorec *pro n-té trojúhelníkové číslo*.

Tvrzení, že součet dvou sudých (lichých) čísel je číslo sudé a součet sudého a lichého čísla je číslo liché, mohou žáci ověřit na dalších konkrétně zvolených sudých a lichých číslech.

2.1.2 Eulerova věta

Popis aktivity, potřebné pomůcky a pracovní podmínky

Objektem zkoumání je objevení vztahu mezi počtem vrcholů, hran a stěn konvexních mnohostěnů (Kopka, 2007). Problematiku lze ve zpracovaném[15] zadání v rámci učiva prostorová tělesa (konvexní mnohostěny) zařadit do výuky na 2. stupni ZŠ. K uskutečnění experimentu a jeho záznamu je vhodný pracovní list (viz příloha 2) a sada Polydron nebo Geomag či jiná sada, která žákům umožní modelaci prostorových těles. Experiment lze realizovat v běžné třídě v rámci jedné výukové jednotky.

Výukové cíle

Žák vytvoří modely pravidelného čtyřstěnu, krychle, pravidelného pětibokého hranolu, pravidelného čtyřbokého a šestibokého jehlanu pomocí dílů sady Polydron. Žák určí a zapíše počet vrcholů, hran a stěn jednotlivých konvexních mnohostěnů do připravené tabulky. Žák objeví vztah mezi počtem vrcholů, hran a stěn konvexních mnohostěnů, který aplikuje na dalším modelu konvexního mnohostěnu.

Předpokládané znalosti žáků

Žák rozpozná, pojmenuje a charakterizuje základní konvexní mnohostěny. Žák správně používá pojmy podstava, stěna, hrana, vrchol.

Struktura a organizace (průběh) objevování

1. ***Zadání úlohy***

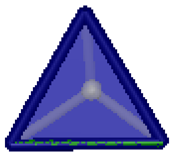
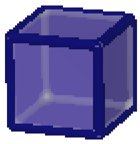
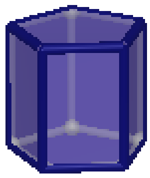
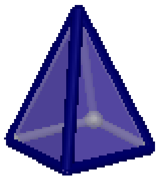
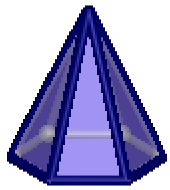
Vytvořte modely pravidelného čtyřstěnu, krychle, pravidelného pětibokého hranolu, pravidelného čtyřbokého jehlanu a pravidelného šestibokého jehlanu. Pokuste se nalézt vztah mezi počtem vrcholů, hran a stěn v uvedených konvexních mnohostěnech.

2. ***Realizace experimentu (objevování) a jeho záznam s pomocí učitele***

Žáci vymodelují uvedené konvexní mnohostěny. Své modely porovnají s obrázky v pracovním listě (vytvořeny v programu Cabri 3D v2) a provedou jejich kontrolu. Do tabulky vytvořené v pracovním listě zapíší počty jejich vrcholů, hran a stěn, viz tabulka 2. Dále se řídí pracovním listem, který žáky pomocí navádějících otázek povede v jejich objevování. Učitel pouze dohlíží na průběh hodiny a práci žáků, pomáhá v případě potřeby. Navádějící otázky vedou žáka k různým zjištěním. Největším číslem jsou vyjádřeny počty

[15] Inspirováno zpracovaným námětem *Eulerova věta* v dosud nepublikovaném článku B. Nováka: *BOVM v teorii a praxi*.

hran. Pokud mají žáci ve sloupci sečíst vždy dvě menší čísla, jde o součet počtu vrcholů a stěn. Rozdíl tohoto součtu a počtu hran je v každém sloupci 2. Odtud je již krůček k odhalení Eulerova vztahu.

Konvexní mnohostěny	**Pravidelný čtyřstěn**	**Krychle**	**Pravidelný pětiboký hranol**	**Pravidelný čtyřboký jehlan**	**Pravidelný šestiboký jehlan**
					
Počet vrcholů (v)	4	8	10	5	7
Počet stěn (s)	4	6	7	5	7
Počet hran (h)	**6**	**12**	**15**	**8**	**12**
v + s	**8**	**14**	**17**	**10**	**14**

Tabulka 2: Konvexní mnohostěny a počty jejich vrcholů, stěn a hran

3. *Formulace hypotézy žáky, případně s pomocí učitele:*

Eulerův vztah $v + s = h + 2$, kde v je počet vrcholů, h počet hran a s počet stěn prostorového útvaru, platí pro libovolný konvexní mnohostěn.

4. *Verifikace hypotézy:*

Platnost Eulerova vztahu žáci ověří na dalších konvexních mnohostěnech, např. vymodelují libovolný osmistěn (pravidelný osmistěn, pravidelný šestiboký hranol,…). Rychlejší žáci mohou vytvořit modely dalších konvexních mnohostěnů (kvádr, pravidelný pětiboký jehlan,…) a přesvědčit se o platnosti Eulerova vztahu.

2.1.3 Cesta za pokladem

Popis aktivity, potřebné pomůcky a pracovní podmínky

Objektem zkoumání je objevení konečného počtu různých cest vedoucích ve čtvercové síti od jednoho místa k druhému. V matematice jsou úlohy známy pod označením *cesty ve čtvercové síti* (Kirkby, 1986. cit. In: Kopka, 1999). Zadání úlohy je možné formulovat do podoby příběhu, který může žáky motivovat v procesu bádání. Problematiku lze ve zpracovaném[16] zadání zařadit do výuky na 1. a 2. stupni ZŠ. K uskutečnění experimentu a jeho záznamu je vhodný pracovní list (viz příloha 3) a připravené čtvercové sítě (plány – viz příloha 4 a 5), do nichž si žáci mohou zakreslovat jednotlivé cesty. Experiment lze realizovat v běžné třídě v rámci jedné výukové jednotky.

Výukové cíle

Žák určí počet cest vedoucích ve čtvercové síti od jednoho místa k druhému různými způsoby.

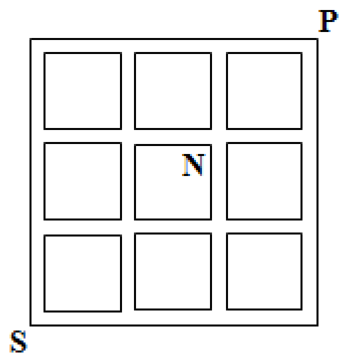
Předpokládané znalosti žáků

Žák je schopen zakreslit cestu ve čtvercové síti. Úloha se může stát motivací pro žáky, jejichž výsledky v matematice nejsou uspokojivé. Předpokládá pouze žákův zájem objevovat nové skutečnosti. Může nápomoci k rozvoji pozitivního vztahu k matematice. Nadaní žáci mohou úlohu vnímat jako netradiční (nestandardní aplikační) úlohu, která rozšíří jejich dosavadní znalosti z matematiky.

Struktura a organizace (průběh) objevování

1. ***Zadání úlohy***

Pouť z místa startu (S) na místo pokladu (P) může vést různými cestami. Křižovatka (N) je místo nápovědy pro poutníka. **Vaším úkolem je zjistit, kolika různými způsoby (cestami) můžete podniknout pouť za pokladem?** Po cestě se nesmíte vracet, ale pohybovat se pouze dopředu, tedy v plánu pouze nahoru (na sever) nebo doprava (na východ).



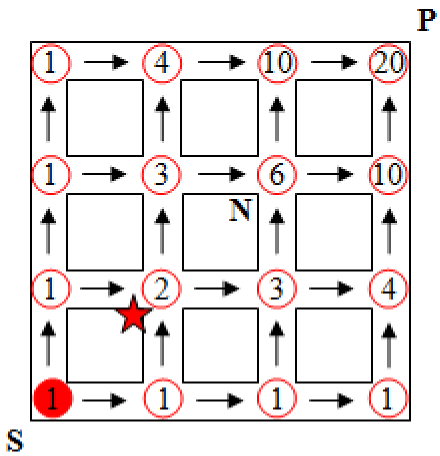
Obrázek 19: Plán pouti za pokladem

[16] Inspirováno zpracovaným námětem *Cesta do ško2ly (procházka městem)* v dosud nepublikovaném článku B. Nováka: *BOVM v teorii a praxi*.

2. ***Realizace experimentu (objevování) a jeho záznam s pomocí učitele***

Žákovo bádání probíhá za pomoci připraveného pracovního listu sestávajícího se z navádějících otázek typu: *„Kolik různých cest vede k místu nápovědy? Kolik úseků (vzdálenost mezi každými dvěma nejbližšími křižovatkami) musíš projít při výběru jedné z cest?“* Učitel je spíše pasivním pozorovatelem, který zajišťuje vhodné podmínky pro uskutečnění experimentu a administrativní záležitosti (rozdání plánů). Veškerá aktivita je přenesena na žáka.

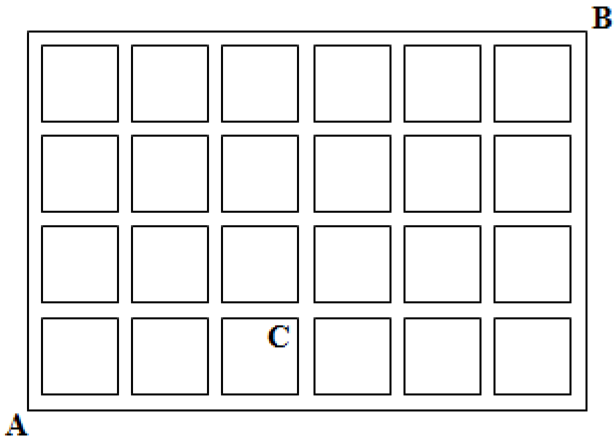
Předpokládá se, že jako nejčastější způsob objevování jednotlivých cest volí žáci jejich barevné odlišení a zakreslení do čtvercové sítě. Hned v prvním cvičení je k uvedenému způsobu navádí první otázka, která je pouze startovacím momentem pro žáky, kteří nepochopí zadání nebo nevědí, jak začít. V druhém cvičení žáci obdrží plány (viz příloha 4), do kterých budou zakreslovat jednotlivé cesty vedoucí z místa startu (S) k místu nápovědy (N). Cest je celkem 6. Určí také počet úseků, kterými musí projít, aby se dostali k této křižovatce. Zvolí-li jakoukoli cestu z místa startu (S), budou muset projít 4 úseky, aby se dostali k místu nápovědy (N).



Obrázek 20: Počty cest vedoucích ke křižovatkám v plánu

Rychlejší žáci mohou pokračovat ve svém bádání a objevit počet cest vedoucích z místa startu (S) na místo pokladu (P). Obdrží plány (viz příloha 5), do kterých mohou opět zakreslovat různými barvami cesty. Každý žák volí svůj způsob objevování. Cílem hodiny je dospět ke způsobu řešení, který umožní žákům určit počet cest vedoucích z jednoho místa k druhému ve čtvercových sítích, v nichž by bylo obtížné každou z cest zakreslovat. Do kroužků, umístěných v křižovatkách plánu, žáci zapíší počty cest, jež vedou ke všem křižovatkám na sever, na východ, ke křižovatce označené hvězdičkou a ke křižovatce, kde se nachází nápověda (N). Bystřejší žáci si možná všimnou, že počet cest vedoucích ke křižovatce se rovná součtu počtu cest vedoucích ke křižovatkám předchozím, viz obr. 20. K místu pokladu vede 20 různých cest, poutník musí projít 6 úseky.

V závěru pracovního listu mohou žáci hypotézu aplikovat v úloze, jejíž zadání zní: *Kolik různých cest vede v následujícím plánu z místa (A) do místa (B), jestliže se lze pohybovat pouze nahoru a doprava? Aplikuj způsob hledání cest, který jsi objevil.*



Obrázek 21: Zadání - plán cest

Cest je celkem 210, úseků 10. Pracovní list obsahuje také bonusovou úlohu: *Kolik různých cest vede v plánu z místa (A) do místa (B), přičemž tyto cesty musí procházet místem (C)? Opět platí podmínky pohybu pouze nahoru a doprava.* K místu (C) vedou přesně 4 cesty. Z místa (C) do místa (B) vede přesně 20 cest. Z místa (A) do místa (B) vede v případě, že cesty musí procházet místem (C) a jsou splněné výše uvedené podmínky pohybu, přesně $4 \cdot 20 = 80$ cest.

3. ***Formulace hypotézy žáky, případně s pomocí učitele:***

Počet cest vedoucích ke křižovatce se vypočte jako součet počtu cest vedoucích ke křižovatkám předchozím.

4. ***Verifikace hypotézy:***

Ke křižovatce označené hvězdičkou se poutník dostane podle hypotézy (1 + 1) dvěma způsoby. Žáci již na počátku vyplňování pracovního listu obě cesty objeví. Podobně se k místu nápovědy (N) poutník dostane z místa startu (S) (3 + 3) šesti způsoby. Všech šest cest žáci zakreslí a barevně odliší v plánech.

2.2 Empirické šetření

Základem empirického šetření je kvalitativní ověření zpracovaných pracovních listů v edukačním prostředí ZŠ. Odučením vybraných námětů pro BOVM, zpracovaných do podoby pracovního listu, byly získány poznatky o průběhu vyučovací hodiny, zjištěny postoje žáků k průběhu vyučovací hodiny a zhodnoceny jejich písemné záznamy. Výsledkem empirického šetření je shrnutí získaných zkušeností a doporučení pro pedagogickou praxi.

2.2.1 Cíle a dílčí cíle empirického šetření

Hlavním cílem empirické části je reflexe průběhu jednotlivých vyučovacích hodin, ve kterých byly zařazeny vybrané náměty pro BOVM zpracované do podoby pracovních listů. Dílčí cíle empirické části jsou:

- získat poznatky o průběhu vyučovacích hodin jejich odučením,
- zjistit postoje žáků k průběhu vyučovací hodiny, které se zúčastnili,
- ověřit a zhodnotit efektivnost vytvořených pracovních listů.

Dílčím cílem empirické části je také zpracování námětů pro BOVM s metodickými komentáři.

2.2.2 Metody empirického šetření

K získání empirických materiálů a dat jsme využili metodu pedagogického pozorování, dotazníkového šetření a analýzy pedagogických dokumentů. Poznatky o průběhu vyučovací hodiny byly získány přímým a zjevným pozorováním vyučujícího hodiny. Zápis z pozorování byl proveden dodatečně po skončení vyučovací hodiny. V této souvislosti jsme si byli plně vědomi nebezpečí zkreslení popisu průběhu vyučovací hodiny. Proto ke snadnějšímu vybavení didaktických situací a důvěryhodnějšímu popisu jsme použili fotoaparát.

Z časových důvodů nebylo možné uskutečnit se všemi žáky rozhovor, kterým by byly zjištěny jejich postoje k průběhu hodiny. Žáci mohli své postřehy a názory uvést v dotazníku, skládajícího se z uzavřených a polouzavřených otázek, jež měly podobu polynomických výběrových otázek. Pokud nebylo stanoveno jinak, vybírali vždy jednu odpověď. Zkoumané jevy dotazníku se z hlediska respondenta vztahovaly k vnitřním dějům (postoje žáků k matematice jako k předmětu), ale také k vnějším (postoje žáků ke způsobu vedení hodiny, její obtížnosti a případnému zájmu o metodu BOVM).

V rámci empirického šetření jsme využili metodu analýzy pedagogických dokumentů, resp. analýzy pracovních listů vypracovaných jednotlivými žáky. Cílem analýzy nebylo vyhodnocení správnosti žákova řešení, ale především ověření a zhodnocení efektivnosti zpracovaných pracovních listů, případně představení některých interpretací výsledků žákova bádání.

2.2.3 Podmínky empirického šetření

Empirické šetření proběhlo v edukačním prostředí na 2. stupni základní školy Stupkova v Olomouci, fakultní školy pedagogické fakulty Univerzity Palackého. Zúčastnili se ho žáci sedmé a deváté třídy s rozšířenou výukou matematiky. Oproti běžným třídám mají tyto třídy vyšší hodinovou dotaci matematiky. Sedmá a devátá třída má 6 hodin matematiky týdně. Jak uvádí na webových stránkách samotná škola[17], v důsledku vyšší hodinové dotace jsou do výuky matematiky zařazovány poznatky nad rámec osnov běžných tříd základní školy. Učitelé usilují o rozvoj logického myšlení žáků a vhodným výběrem metod poskytují žákovi možnost získat dovednost řešit úlohy pomocí matematického aparátu. Z uvedeného lze předpokládat, že vztah žáků k matematice bude pozitivní a BOVM nebude pro žáky obtížné zvládnout také proto, že učitel v hodinách matematiky uplatňuje aktivizační metody.

2.2.4 Reflexe průběhu vyučovací hodiny

2.2.4.1 Figurální čísla (pracovní list 1)

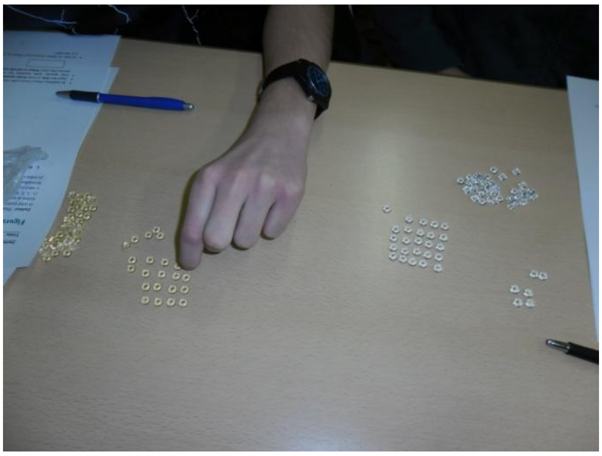
K realizaci experimentu byli vybráni žáci 7. třídy základní školy. Celkem bylo ve třídě 25 žáků, 19 chlapců a 6 dívek. Experiment byl uskutečněn během první a části druhé hodiny v běžné třídě.

Obrázek 22: Uspořádávání kamínků do tvaru čtverce (a)

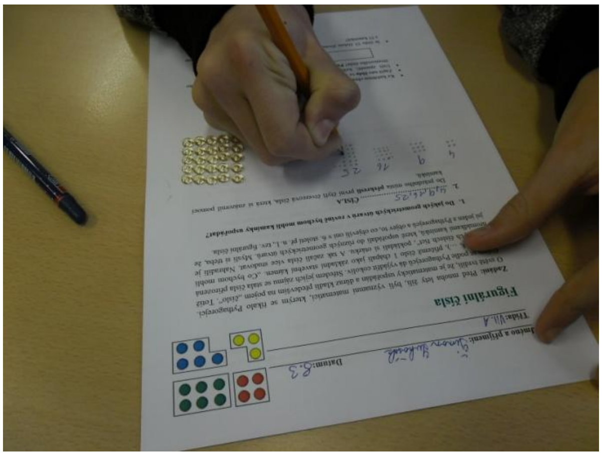
Obrázek 23: Uspořádávání kamínků do tvaru obdélníka

[17] http://www.zs-stupkova.cz/tridy_rvmi/

Během realizace experimentu se mnou žáci spolupracovali, živě a spontánně reagovali na mé pokyny, v případě, že neporozuměli zadání, vyžadovali vysvětlení, pracovali s pomůckami a zaznamenávali průběh svého bádání do připravených pracovních listů. Ve své práci byli precizní, což dokládají jejich překreslené obrazce v pracovních listech, viz obr. níže.

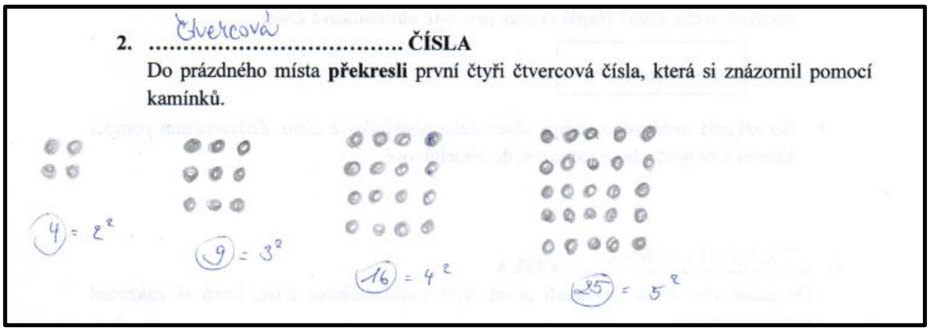


Obrázek 24: Uspořádání kamínků do tvaru čtverce (b)

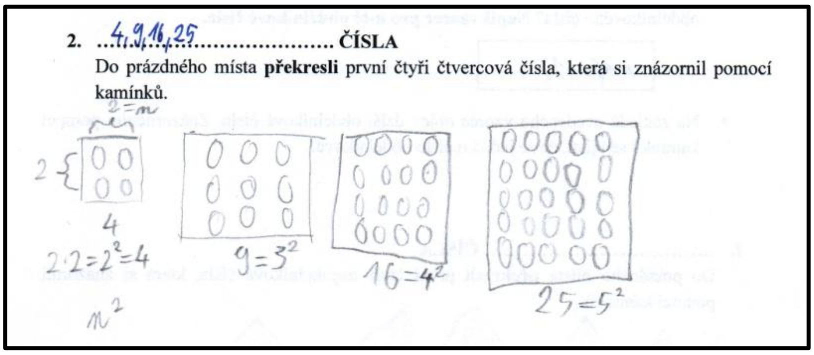


Obrázek 25: Překreslování obrazců do pracovního listu

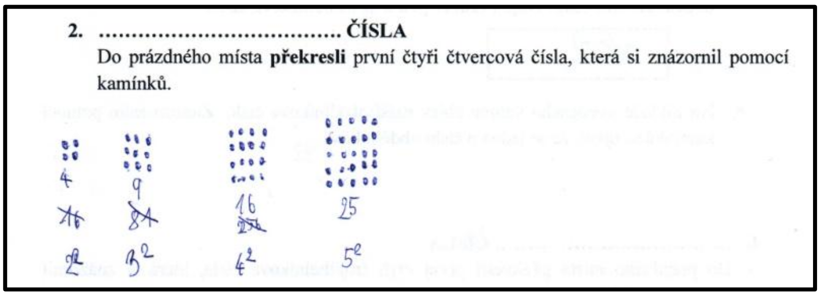
Poté, co jsme si společně s žáky přečetli zadání v pracovním listě (viz příloha 1), jim byla položena otázka: *„Co si představujete pod pojmem figurální čísla?“* Protože si pod tímto pojmem neuměli představit nic určitého, měli odpovědět na první otázku v pracovním listě. Správně odpověděli, že kamínky lze uspořádat do tvaru čtverce, obdélníku, trojúhelníku, přímky, kruhu a jeden z žáků zmínil pětiúhelník. Na otázku, kolik potřebujeme minimálně kamínků, abychom je uspořádali do tvaru čtverce, spontánně většina vykřikla: *„Čtyři.“* V této fázi hodiny žáci objevovali *čtvercová čísla*. Objevování, uspořádávání kamínků (žáci samovolně využívali pravítka k co nejpřesnějšímu uspořádání) do geometrických útvarů v rovině a překreslování obrazců do pracovního listu žákům nečinilo problém. Problém shledávali v odvození vzorce pro *n-té čtvercové číslo*. Položila jsem žákům otázku: *„Kolik řádků a sloupců je ve znázorněném obrazci čtvercového čísla 4?“* Žáci správně odpověděli: *„2 řádky a 2 sloupce.“* Dále pokračovali: *„Ve znázorněném obrazci čtvercového čísla 9 jsou 3 řádky a 3 sloupce kamínků, ve znázorněném obrazci čtvercového čísla 16 jsou 4 řádky a 4 sloupce kamínků atd.“* Zjistili, že každé *čtvercové číslo* dostaneme součinem počtu řádků a sloupců ve znázorněném obrazci. Následovala otázka: *„Kolik kamínků bychom tedy potřebovali ke znázornění n-tého čtvercového čísla?“* Právě nahrazení konkrétních čísel proměnnou *n* činilo žákům potíž. Nejspíše proto, že pojem *proměnná* se podle tematického plánu ZŠ zavádí do učiva matematiky až v 8. ročníku. Pokusila jsem se navést žáky k objevení vzorce jiným způsobem. Na tabuli jsme měli překreslené obrazce znázorněných prvních čtyř *čtvercových čísel* a pod každým z nich zapsaný počet kamínků potřebný k uspořádání do tvaru čtverce. To vše již měli zaznamenáno také žáci ve svých pracovních listech (viz obr. 26 - 28). Tato čísla, vyjádřena ve tvaru druhé mocniny[18], jsem na tabuli zakroužkovala a zeptala se: *„Co se v daných číslech mění a co naopak zůstává nezměněné?“* Žáci odpověděli: *„Ta dvojka je pořád stejná a mění se 2, 3, 4, 5.“* Tedy exponent (mocnitel) zůstává nezměněný a mění se vždy základ mocniny (mocněnec). Odtud již snadněji odvodili vzorec pro *n-té čtvercové číslo*, n^2. Ač za *n* dosadili jakékoli přirozené číslo kromě 1 a umocnili jej na druhou, dostali *čtvercové číslo*. Určili, že také $6^2 = 36$ je *číslo čtvercové*, a 36 kamínků skutečně uspořádali do tvaru čtverce. Vykřikovali, že je to také $7^2 = 49$, $8^2 = 64$ apod. A tak si odpověděli na otázku: *„Jaké největší čtvercové číslo sestavíme z 51 kamínků?“*



Obrázek 26: Ukázka žákova řešení v pracovním listě - čtvercová čísla (a)



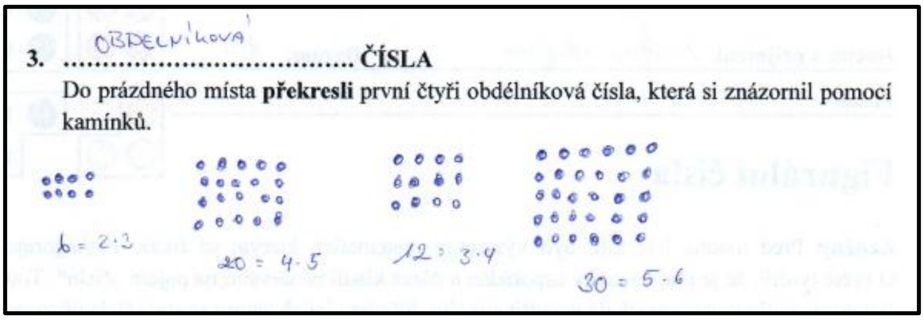
Obrázek 27: Ukázka žákova řešení v pracovním listě - čtvercová čísla (b)



Obrázek 28: Ukázka žákova řešení v pracovním listě - čtvercová čísla (c)

[18] Někteří žáci nevyjádřili číslo ve tvaru druhé mocniny, ale umocnili dané číslo na druhou (viz obr. 28).

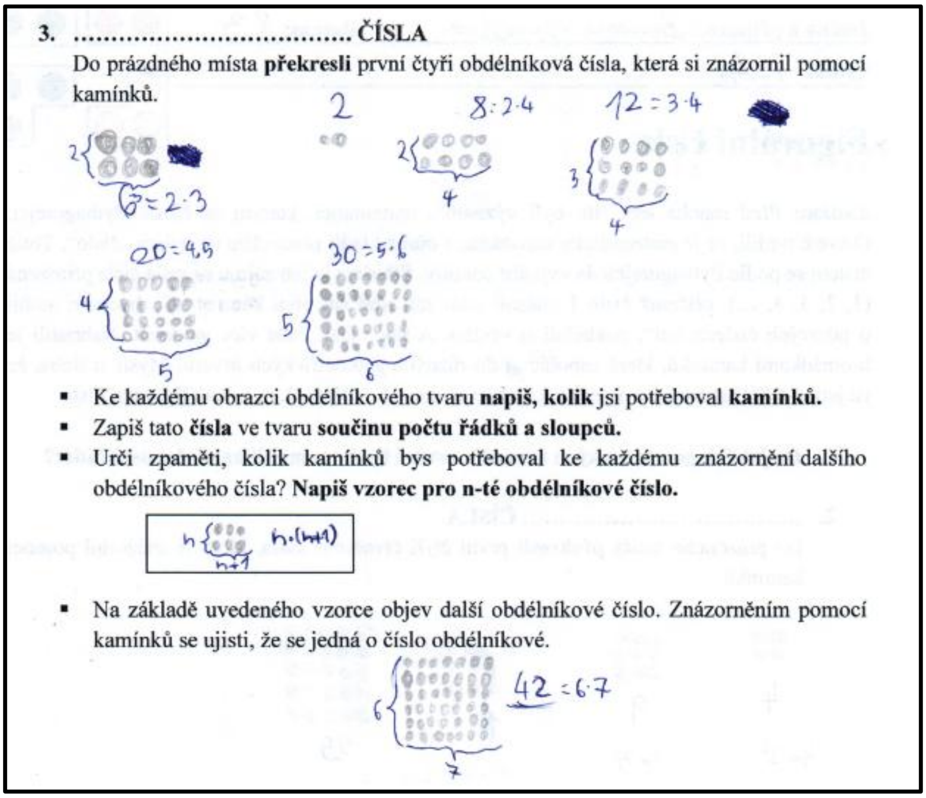
Ve druhé fázi hodiny žáci postupovali při objevování *obdélníkových čísel* podobně jako při objevování *čísel čtvercových*. O většině čísel (kromě 3), které žáci objevili (2,3,6,8,10,…), správně řekli, že jsou čísla sudá, a tak odvodili tvrzení, že pravděpodobně každé sudé číslo lze zarovnat do tvaru obdélníka. Nelze však říci, že každé *obdélníkové číslo* je číslo sudé. Protože jsme se podobně jako Pythagorejci zaměřili na *obdélníková čísla* blížící se k *číslům čtvercovým*, obrazce žáků v pracovním listě vypadaly tak, jak ukazují obr. 29 - 31. Tentokrát již pomocí součinu počtu řádků a sloupců odvodili žáci vzorec[19] *pro n-té obdélníkové číslo*, *n · (n+1)*. Všimli si, že počet řádků se od počtu sloupců liší vždy o 1. Počet řádků nahradili proměnnou *n* a snadno odvodili, že pro počet sloupců platí *n+1*.


3. OBDELNÍKOVÁ .... **ČÍSLA**

Do prázdného místa **překresli** první čtyři obdélníková čísla, která si znázornil pomocí kamínků.

6 = 2·3 20 = 4·5 12 = 3·4 30 = 5·6

Obrázek 29: Ukázka žákova řešení v pracovním listě - obdélníková čísla (a)


3. .... **ČÍSLA**

Do prázdného místa **překresli** první čtyři obdélníková čísla, která si znázornil pomocí kamínků.

6 = 2·3 2 8 = 2·4 12 = 3·4 20 = 4·5 30 = 5·6

- Ke každému obrazci obdélníkového tvaru **napiš, kolik** jsi potřeboval **kamínků.**
- Zapiš tato **čísla** ve tvaru **součinu počtu řádků a sloupců.**
- Urči zpaměti, kolik kamínků bys potřeboval ke každému znázornění dalšího obdélníkového čísla? **Napiš vzorec pro n-té obdélníkové číslo.**

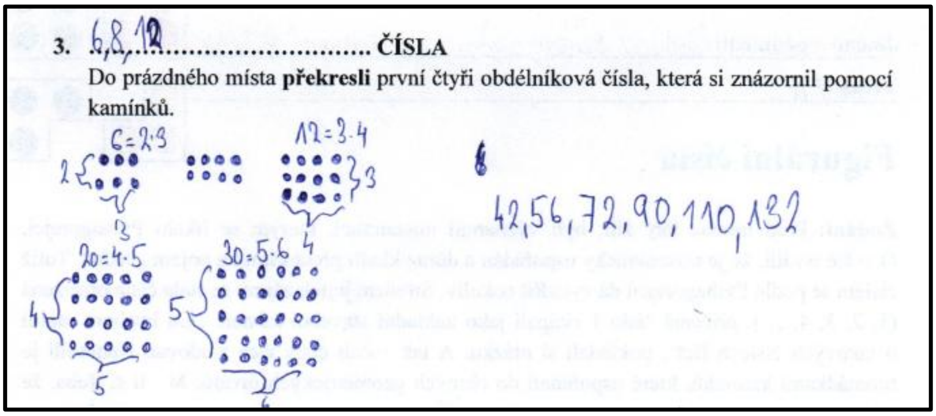
n·(n+1)

- Na základě uvedeného vzorce objev další obdélníkové číslo. Znázorněním pomocí kamínků se ujisti, že se jedná o číslo obdélníkové.

42 = 6·7

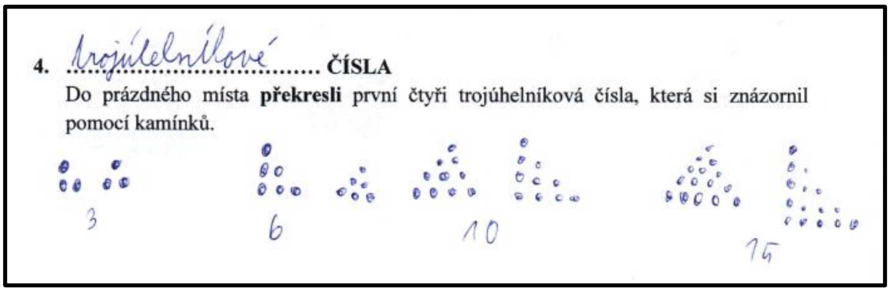
Obrázek 30: Ukázka žákova řešení v pracovním listě - obdélníková čísla (b)

[19] Někteří žáci zapsali vzorec pro *n-té obdélníkové číslo* tímto způsobem: *n·n+1*, tedy bez příslušné závorky. Na chybu byli upozorněni.

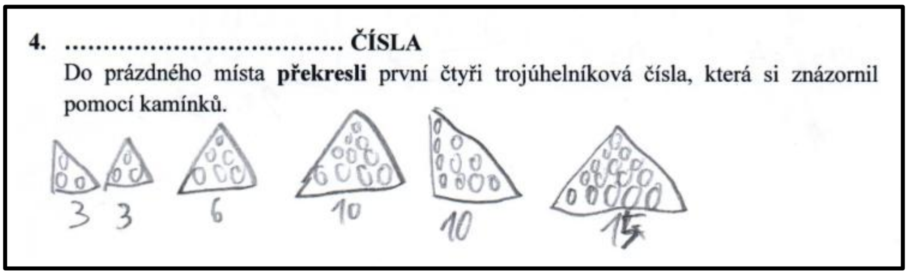


Obrázek 31: Ukázka žákova řešení v pracovním listě - obdélníková čísla (c)

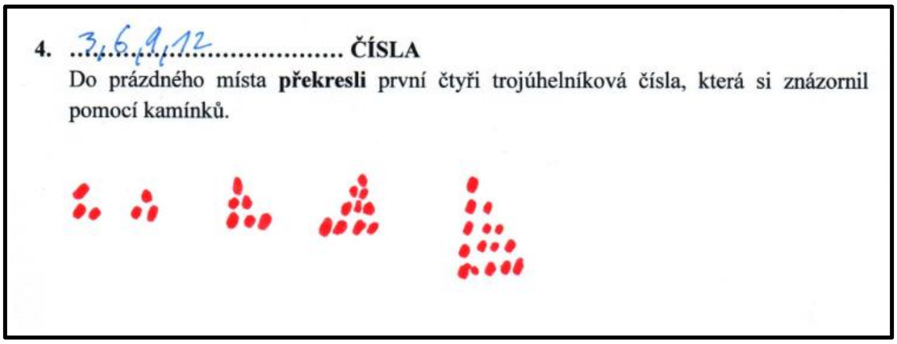
Ve třetí fázi hodiny žáci uspořádávali kamínky do tvaru pravoúhlého a někteří také rovnostranného trojúhelníka. Většina žáků překreslila, kromě 7 žáků, obrazce do pracovního listu (viz obr. 32 - 34). Na obr. 34 žák sice správně překreslil obrazce, ale zapsal chybně *obdélníková čísla*. S mou pomocí žáci odvodili vzorec pro *n-té trojúhelníkové číslo*, $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$. Položila jsem žákům otázku: *„Objevíte nějakou souvislost mezi obdélníkovým a trojúhelníkovými čísly?“* Jeden žák vykřikl: *„To je polovina*.“ Odpověděla jsem: *„Čeho polovina?“* A vybízela jej ke zvolení konkrétního příkladu. Žák řekl: *„No když udělám polovinu z 6, což je obdélníkové číslo, dostanu 3 a to je trojúhelníkového číslo, podobně polovina z 12 je 6, polovina z 20 je 10, 6 a 10 jsou trojúhelníková čísla.“* V případě, že by žáci neobjevili žádnou souvislost mezi *obdélníkovými a trojúhelníkovými čísly*, učitel je může navést tak, že je nechá sečíst vždy dvě stejná *trojúhelníková čísla* a to jak numericky, tak také znázorněním do obrazců.



Obrázek 32: Ukázka žákova řešení v pracovním listě - trojúhelníková čísla (a)



Obrázek 33: Ukázka žákova řešení v pracovním listě - trojúhelníková čísla (b)

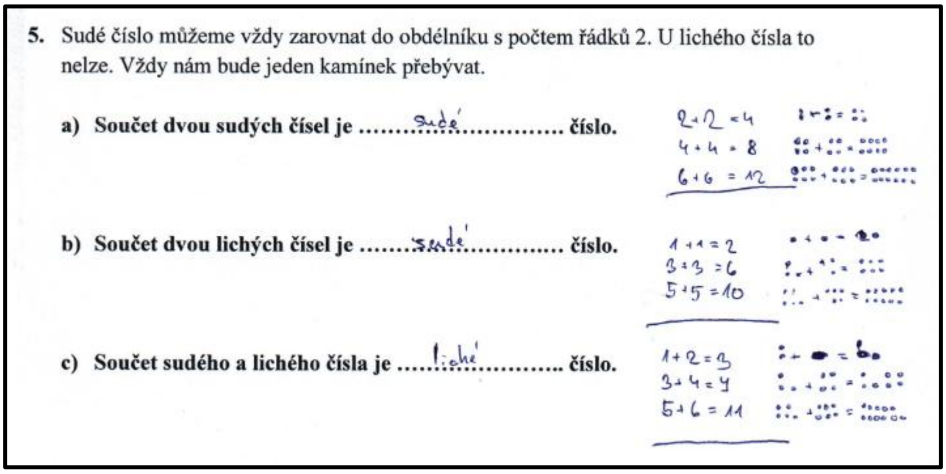


4. 3, 6, 9, 12 ČÍSLA

Do prázdného místa **překresli** první čtyři trojúhelníková čísla, která si znázornil pomocí kamínků.

Obrázek 34: Ukázka žákova řešení v pracovním listě - trojúhelníková čísla (c)

Poslední cvičení bylo pro žáky snadné. Věděli, že součtem dvou sudých (lichých) čísel je číslo sudé a součtem čísla sudého a lichého je číslo liché. Všichni své úvahy zaznamenali v pracovním listě. Žáci byli navedeni k tomu, aby jimi zvolená sudá a lichá čísla zarovnali do tvaru obdélníka s počtem řádků 2 a názorně provedli pomocí kamínků součet těchto čísel. Někteří své úvahy překreslili (viz obr. 35 - 37), jiní pouze uvedli součet zvolených konkrétní sudých a lichých čísel a někteří pouze dopsali správnou odpověď.



5. Sudé číslo můžeme vždy zarovnat do obdélníku s počtem řádků 2. U lichého čísla to nelze. Vždy nám bude jeden kamínek přebývat.

a) Součet dvou sudých čísel je sudé **číslo.**

2+2=4
4+4=8
6+6=12

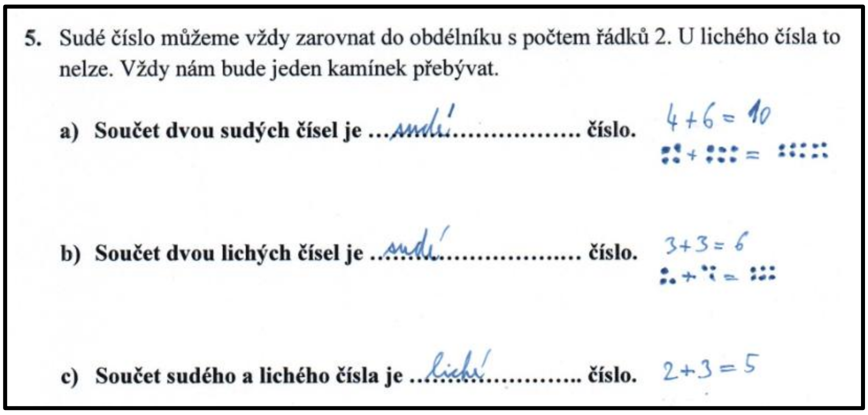
b) Součet dvou lichých čísel je sudé **číslo.**

1+1=2
3+3=6
5+5=10

c) Součet sudého a lichého čísla je liché **číslo.**

1+2=3
3+4=7
5+6=11

Obrázek 35: Ukázka žákova řešení v pracovním listě –
ověření aritmetických vlastností sudých a lichých čísel (a)



5. Sudé číslo můžeme vždy zarovnat do obdélníku s počtem řádků 2. U lichého čísla to nelze. Vždy nám bude jeden kamínek přebývat.

a) Součet dvou sudých čísel je sudé **číslo.**

4+6=10

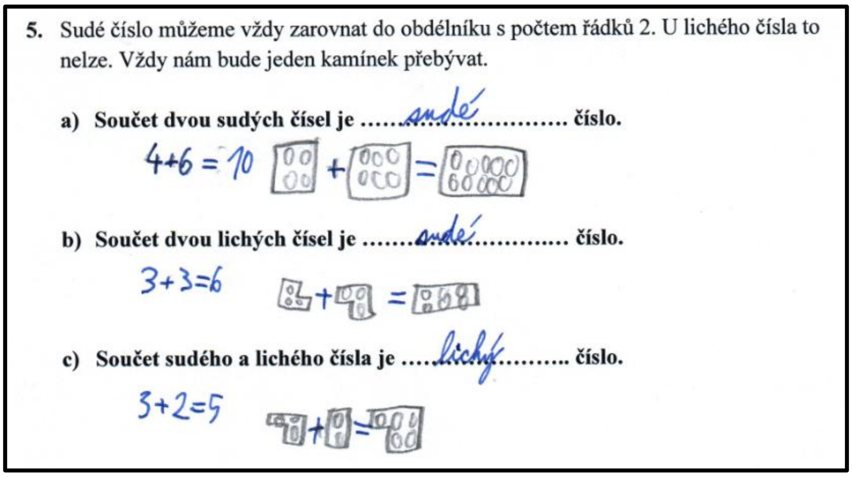
b) Součet dvou lichých čísel je sudé **číslo.**

3+3=6

c) Součet sudého a lichého čísla je liché **číslo.**

2+3=5

Obrázek 36: Ukázka žákova řešení v pracovním listě –
ověření aritmetických vlastností sudých a lichých čísel (b)



5. Sudé číslo můžeme vždy zarovnat do obdélníku s počtem řádků 2. U lichého čísla to nelze. Vždy nám bude jeden kamínek přebývat.

a) Součet dvou sudých čísel je ……sudé…… **číslo.**

4+6 = 10

b) Součet dvou lichých čísel je ……sudé…… **číslo.**

3+3=6

c) Součet sudého a lichého čísla je ……lichý…… **číslo.**

3+2=5

Obrázek 37: Ukázka žákova řešení v pracovním listě –
ověření aritmetických vlastností sudých a lichých čísel (c)

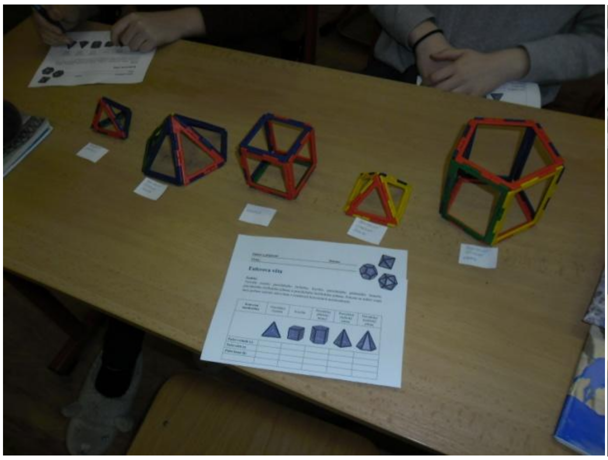
2.2.4.2 Eulerova věta (pracovní list 2)

K realizaci experimentu byli vybráni žáci 9. třídy základní školy. Před realizací experimentu se v hodinách matematiky seznámili s konvexními mnohostěny (jehlany a hranoly). Celkem bylo ve třídě 16 žáků, 10 chlapců a 6 dívek. Experiment byl uskutečněn během první vyučovací hodiny v běžné třídě. K modelování prostorových těles byla využita sada Polydron. Během hodiny žáci pracovali ve skupinách po třech (přičemž jednu skupinu tvořili 4 žáci) a nechali se vést jednotlivými kroky pracovního listu (viz příloha 2). V případě, že něčemu nerozuměli nebo si nebyli jistí úvahou, kterou provedli, jim byly poskytnuty doplňující informace nebo potvrzení správnosti jejich úvah. Vzhledem k uvedenému počtu žáků ve třídě nebylo obtížně se dostatečně věnovat všem pěti skupinám. Hodina měla spád a živé tempo.

Obrázek 38: Modelování prostorových těles pomocí dílů sady Polydron (a)

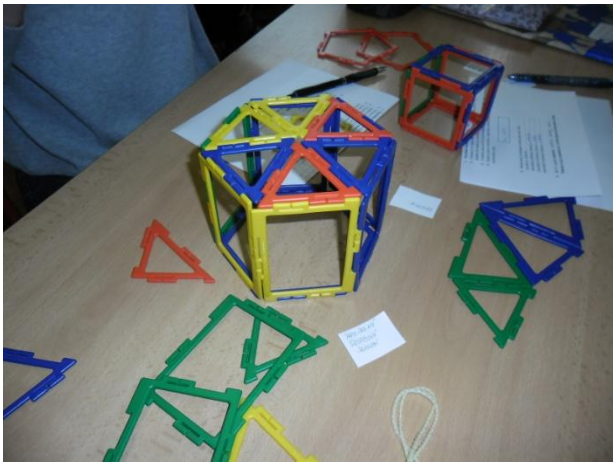
Obrázek 39: Modelování prostorových těles pomocí dílů sady Polydron (b)

Na začátku hodiny se žáci rozdělili do skupin a sesedli si k sobě vždy k jedné lavici, na které si udělali prostor pro modelování těles. Každá skupina obdržela stejný počet dílů, ze kterých měli vymodelovat tělesa tak, aby jim žádný z dílů nepřebýval ani nechyběl (viz obr. 38, 39). V nabídce obdržených dílů měli čtverce a obdélníky, rovnostranné a rovnoramenné trojúhelníky, pětiúhelníky a šestiúhelníky. K dílům obdrželi také kartičky s názvy konvexních mnohostěnů, jež měli vymodelovat (čtyřstěn, krychle, pravidelný pětiboký a čtyřboký jehlan a pravidelný šestiboký hranol). Žáci všech skupin vymodelovali uvedené konvexní mnohostěny bez problémů a správně (viz obr. 40, 41).



Obrázek 40: Vymodelované konvexní mnohostěny žáků (a)

Obrázek 41: Vymodelované konvexní mnohostěny žáků (b)



Obrázek 42: Pravidelný šestiboký hranol, jehož podstavu tvoří 6 rovnostranných trojúhelníků (úvaha žáků)

Každý žák dostal vlastní pracovní list, který byl přeložen tak, aby mohl přemýšlet o vztahu mezi počtem vrcholů, stěn a hran bez navádějících otázek uvedených v druhé části pracovního listu (viz obr. 40). Žáci se přesvědčili o správnosti vymodelovaných těles porovnáním modelů s obrázky v pracovním listě. Všichni správně vyplnili příslušnou tabulku. Většina žáků objevila Eulerův vztah bez pomoci navádějících otázek. Možná právě tito žáci uvedli v dotazníkovém šetření, že jim naváděcí otázky nepomohly, protože objevili vztah bez jejich využití. Zápisy Eulerova vztahu byly různé:

- $pv + ps = ph + 2$,
- $v + s = h + 2$,
- $v + s - 2 = h$.

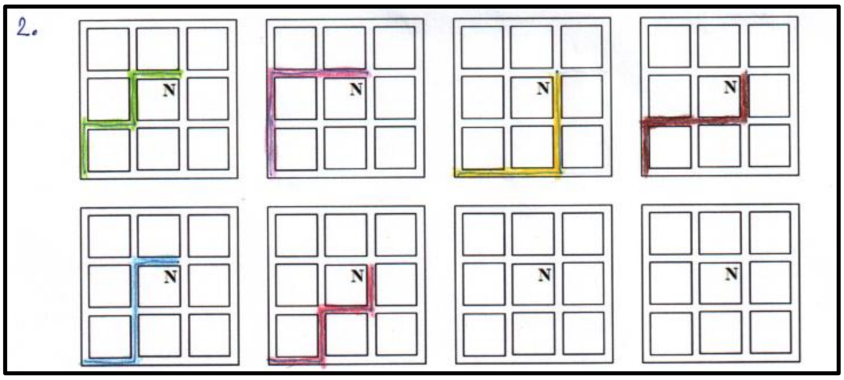
Žáci jedné skupiny zapsali, že platí $v \geq s < h$. Ve svém bádání se dále nechali vést instrukcemi v pracovním listě tak, aby objevili Eulerův vztah. K nahlédnutí jsou poskytnuty žáky vypracované pracovní listy v příloze 7 - 10.

Všichni žáci správně zapsali, že krychle je šestistěn, pravidelný pětiboký hranol je sedmistěn, pravidelný čtyřboký jehlan je pětistěn a pravidelný šestiboký jehlan je sedmistěn. Protože se žáci v předchozí hodině učili o jednom z Platónových těles, pravidelném osmistěnu, někteří z nich vytvořili model tohoto tělesa a na něm si ověřili platnost objeveného vztahu. Někteří žáci zaznamenali do pracovního listu, že osmistěn je např. pravidelný šestiboký hranol nebo sedmiboký jehlan, jiní uvedli obojí variantu. 2 žáci špatně uvedli, že osmistěn je deltoid nebo krystal. Žáci jedné skupiny vytvořili podstavu pravidelného šestibokého hranolu pomoci šesti rovnostranných trojúhelníků, protože nenašli díl pravidelného šestiúhelníku (viz obr. 42). Jeden žák také konstatoval, že nemusí jít vždy nutně o pravidelná tělesa, aby v nich platil Eulerův vztah.

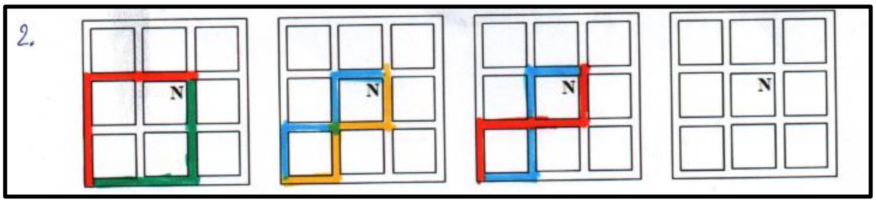
2.2.4.3 Cesta za pokladem (pracovní list 3)

K realizaci experimentu byli vybráni žáci 7. třídy základní školy. Celkem bylo ve třídě 23 žáků, 18 chlapců a 5 dívek. Experiment byl uskutečněn během třetí vyučovací hodiny v běžné třídě.

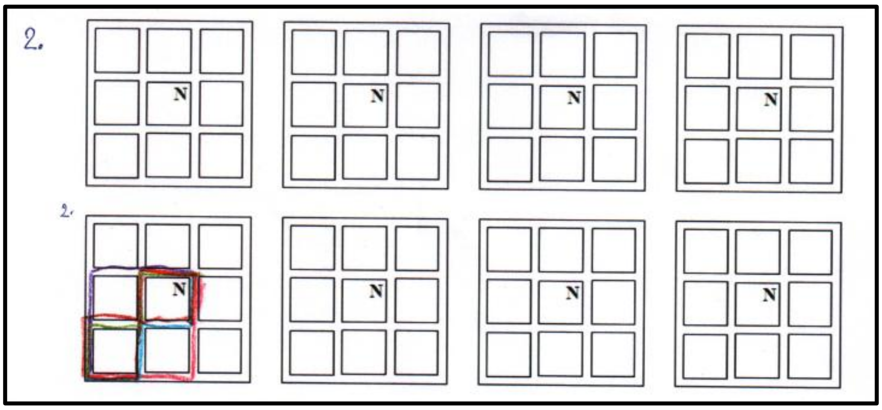
Na začátku hodiny každý žák dostal pracovní list (viz příloha 3) a předpřipravené plány, jež byly potřebné k zakreslování objevených cest. Společně s žáky jsme si přečetli zadání. V prvním cvičení pracovního listu si žáci ověřili, zdali správně pochopili zadání. Všichni správně určili, že z místa startu (S) vedou ke křižovatce označené „hvězdičkou“ přesně 2 cesty. Ve druhém cvičení pracovního listu žáci začali objevovat cesty vedoucí z místa startu (S) k místu nápovědy (N), k jejichž zakreslování využili předpřipravených plánů (viz příloha 4). Všech 6 cest objevilo a zakreslilo 21 žáků, vybrané úvahy žáků jsou k dispozici na obr. 43 - 45.



Obrázek 43: Úvaha žáka při zakreslování cest vedoucích z místa startu (S) k místu nápovědy (N) (a)



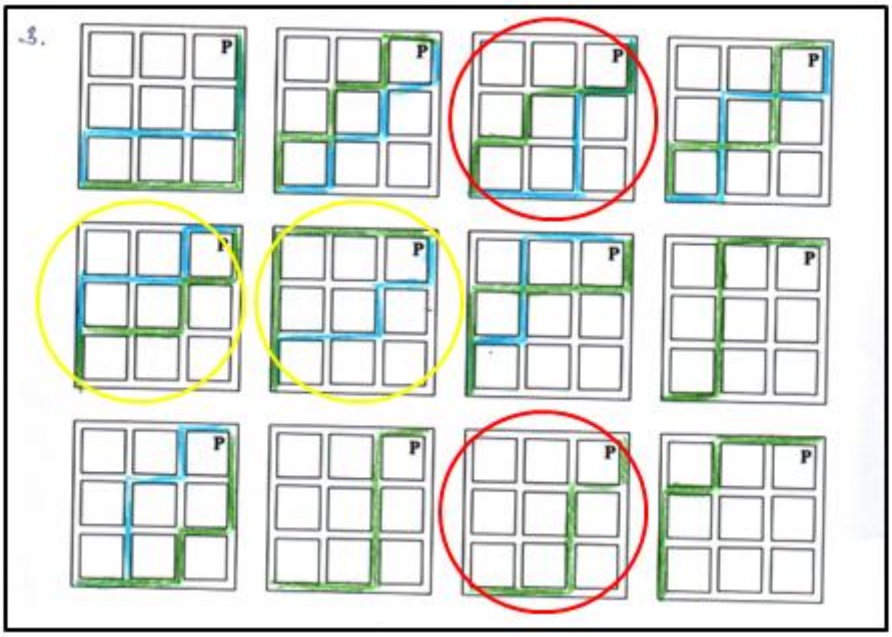
Obrázek 44: Úvaha žáka při zakreslování cest vedoucích z místa startu (S) k místu nápovědy (N) (b)



Obrázek 45: Úvaha žáka při zakreslování cest vedoucích z místa startu (S) k místu nápovědy (N) (c)

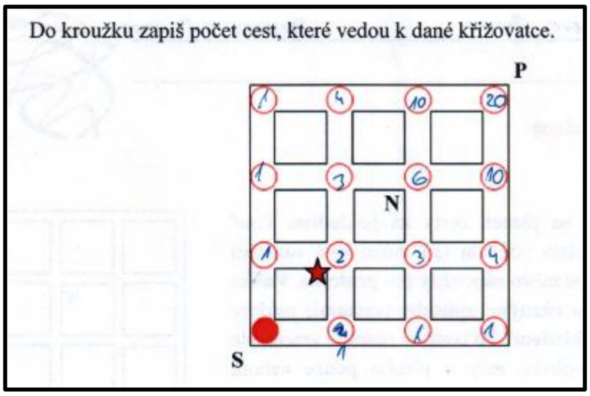
Obtížnější bylo pro žáky hledání cest, které vedou z místa startu (S) k místu, kde je uložen poklad (P). 3 žáci objevili a zakreslili do plánů (viz příloha 5) všech 20 cest, na obr. 46 je ukázka žákova řešení. V mnoha případech se stalo, že žáci objevili 20 cest, ale některé z nich se jim opakovaly, jak je vidět na obr. 47. Žáci objevovali samostatně, případně se radili ve dvojici. Protože je objevování cest patrně bavilo, nechtěli znát výsledek a vyžadovali dostatečný čas k bádání, resp. k objevení všech cest.

Obrázek 46: 20 cest vedoucích z místa startu (S) k místu, kde je uložen poklad (P) (úvaha žáka)

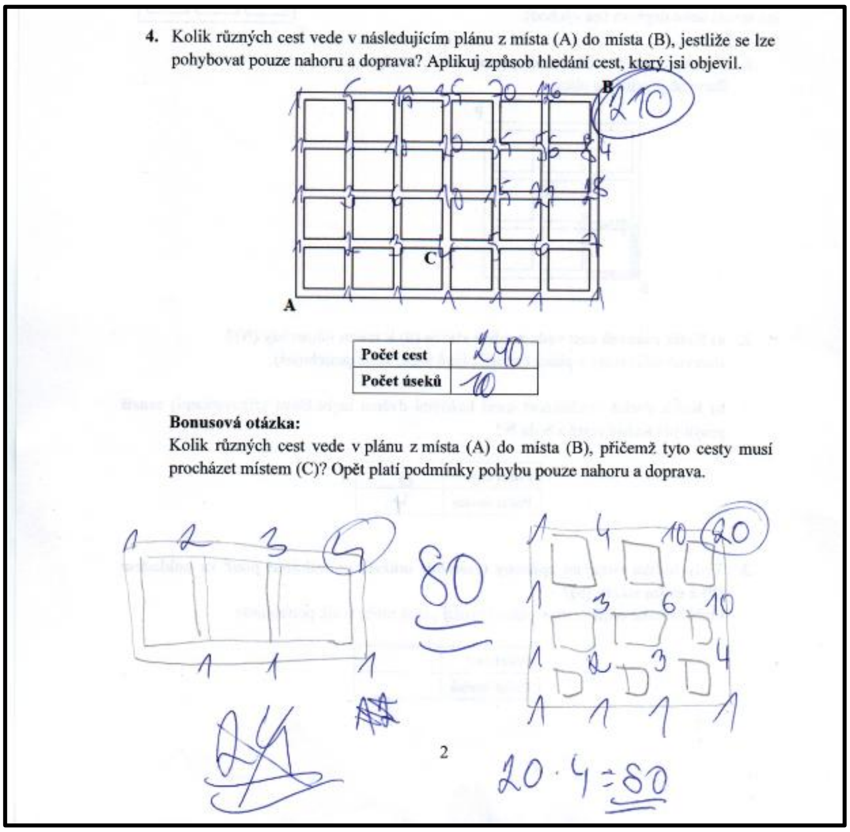


Obrázek 47: 18 cest vedoucích z místa startu (S) k místu, kde je uložen poklad (P) (úvaha žáka)

Před koncem hodiny jsme ukončili proces objevování cest a přesunuli se ke třetímu cvičení. Do kroužků umístěných v křižovatkách plánu měli žáci dopsat počty cest vedoucích k těmto křižovatkám (viz obr. 48). Větší plán některé žáky zmátl a neuvědomili si, že se jedná o tentýž plán, který měli v zadání. Z prvního cvičení již věděli, že ke křižovatce označené „hvězdičkou“ vedou přesně 2 cesty a k místu nápovědy (N) vede 6 cest. Zapsali také, že ke všem křižovatkám na sever a na východ z místa startu (S) se dostaneme vždy 1 cestou. Počty cest, které vedou k ostatním křižovatkám, měli žáci samostatně odhalit. Většina žáků úspěšně stanovila hypotézu, což dokazuje jejich správné řešení následující úlohy.

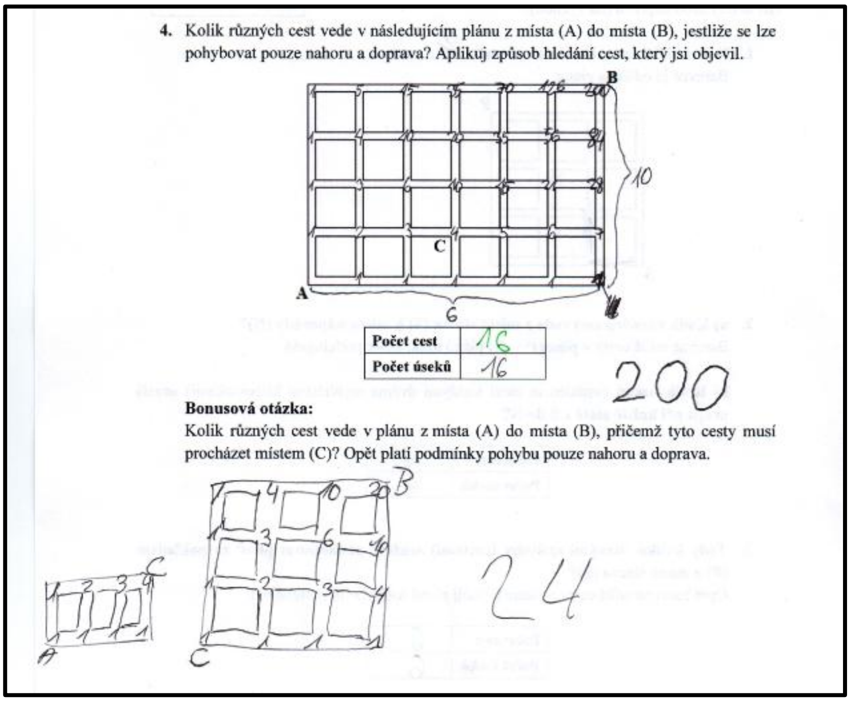


Obrázek 48: Počty cest vedoucích ke křižovatkám v plánu (úvaha žáka)



Obrázek 49: Aplikace hypotézy na úloze a bonusová úloha (úvaha žáka – správné řešení)

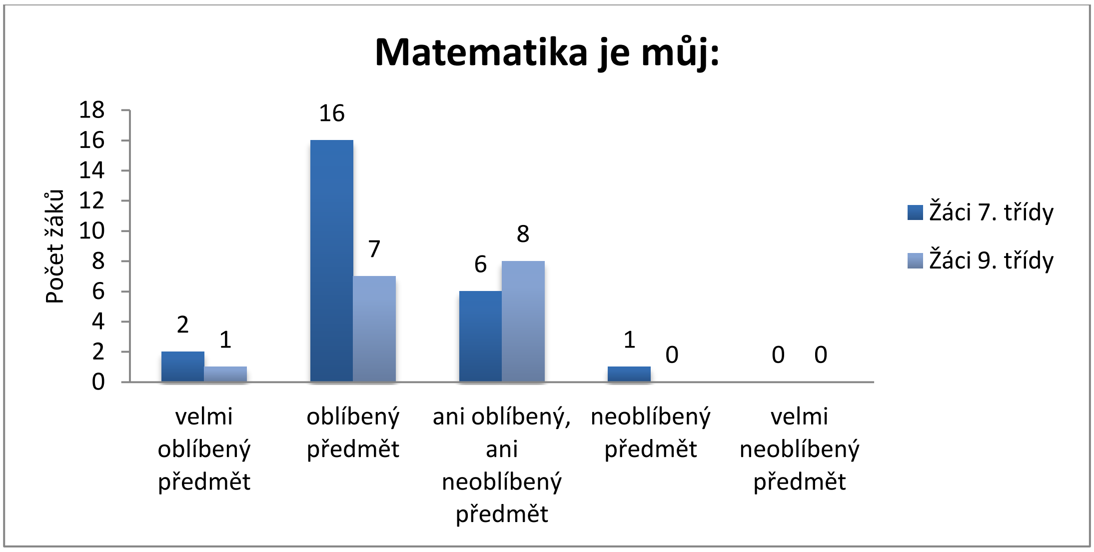
Čtvrté cvičení správně vyřešilo 20 žáků. Žáci zapisovali k jednotlivým křižovatkám počty cest, které k nim vedou (viz obr. 49, 50). Cest z místa (A) do místa (B) vede 210. 1 žák provedl špatný součet čísla 126 a 84, uvedl, že cest je 200 (viz obr. 50). Bonusovou otázku vyřešili 2 žáci, přičemž jeden žák svou úvahu vysvětlil přímo v hodině, druhý žák svou úvahu zapsal do pracovního listu (viz obr. 49). Cest, které vedou z místa (A) do místa (B) a zároveň prochází místem (C), je 80. Tři žáci uvedli počet 20, jeden žák počet 24 a jeden žák počet 206, ostatní bonusovou otázku neřešili.



Obrázek 50: Aplikace hypotézy na úloze a bonusová úloha (úvaha žáka - špatné řešení)

2.2.5 Postoje žáků k průběhu vyučovací hodiny

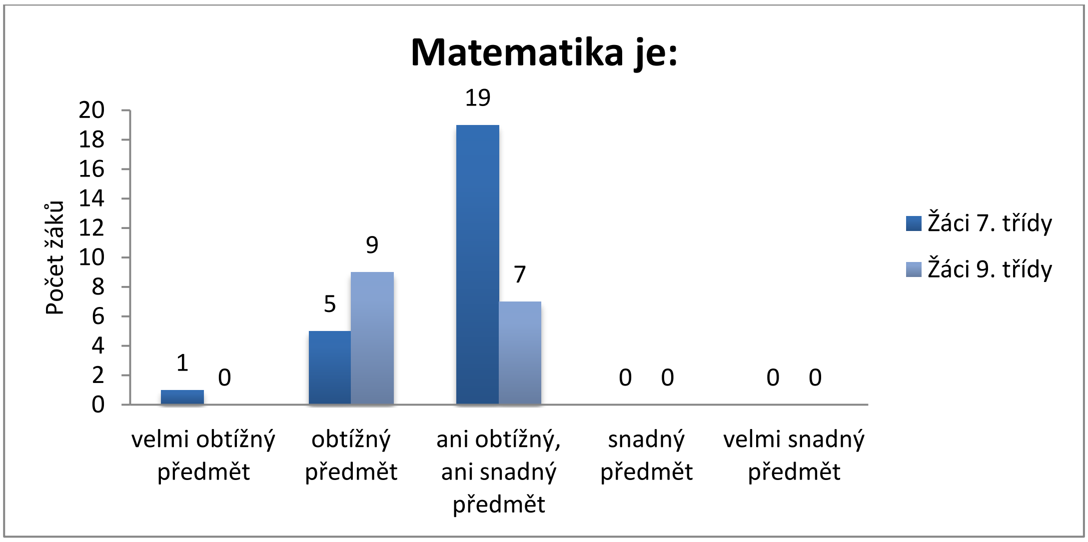
Každý žák obdržel po skončení vyučovací hodiny dotazník, který anonymně vyplnil. Náměty *Figurální čísla* (pracovní list 1) a *Cesta za pokladem* (pracovní list 3) byly zařazeny v různý den do výuky žáků 7. ročníku v rámci jedné třídy. Námět *Eulerova věta* (pracovní list 2) byl zařazen do výuky žáků 9. ročníku. Odpovědi týkající se postojů žáků 7. ročníku k matematice jako předmětu (1., 2. a 3. otázka v dotazníku) jsou v grafech zpracovány z dotazníkového šetření, kterého se účastnilo více žáků. Ostatní odpovědi na otázky jsou v grafech zpracovány tak, aby mohl čtenář porovnat hodnocení jednotlivých vyučovacích hodin s rozdílnými náměty (*Figurální čísla*, *Eulerova věta* a *Cesta za pokladem*), které jsou barevně odlišeny. Je třeba zohlednit rozdílný počet žáků ve třídách. Jeden dotazník žáka 7. třídy (námět vyučovací hodiny: *Cesta za pokladem*) byl z důvodu nevěrohodných výpovědí[20] vyřazen z empirického šetření.



Graf 1: Odpovědi na 1. otázku dotazníkového šetření

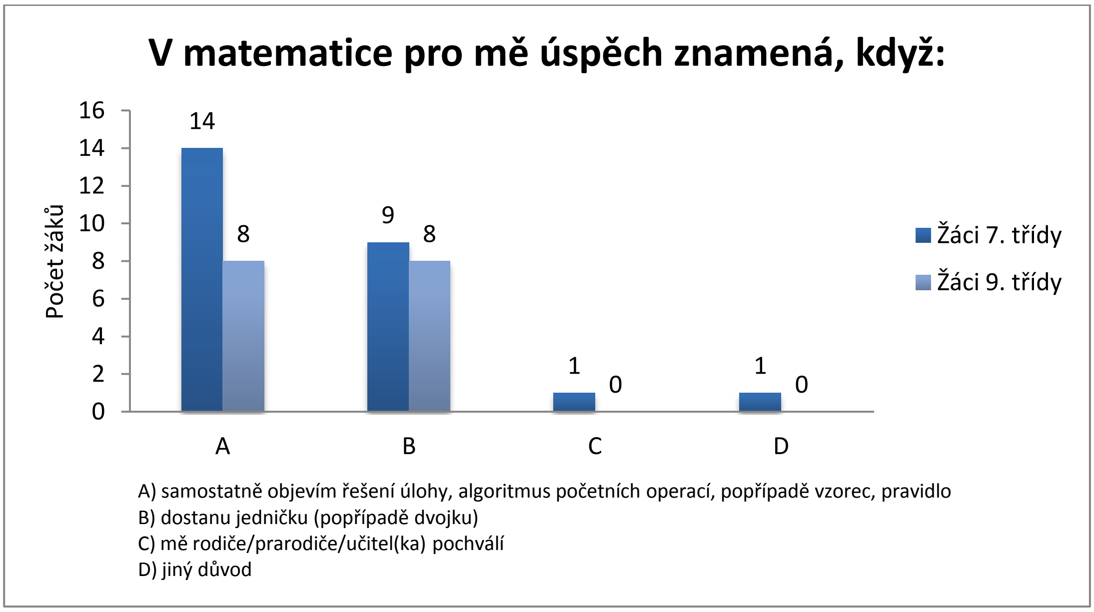
Pro 8% žáků 7. třídy a 6% žáků 9. třídy je matematika <u>velmi oblíbeným předmětem</u>. Pro 64% žáků 7. třídy a 44% žáků 9. třídy je matematika <u>oblíbeným předmětem</u>. Neutrální odpověď (<u>ani oblíbený, ani neoblíbený předmět</u>) volilo 24% žáků 7. třídy a 50% žáků 9. třídy. Pouhé 4 % žáků 7. třídy, tedy 1 žák, označilo matematiku jako <u>neoblíbený předmět</u>. Žádný z žáků neoznačil matematiku jako <u>velmi neoblíbený předmět</u>.

[20] I přesto, že žák zhodnotil, že jej hodina nebavila a označil hodinu za částečně obtížnou, protože nepochopil zadání, uvedl, že se naučil něco nového, má zájem se více informovat o učivu, spíše v něm hodina probudila zájem o matematiku a způsob vedení hodiny by uvítal občas.



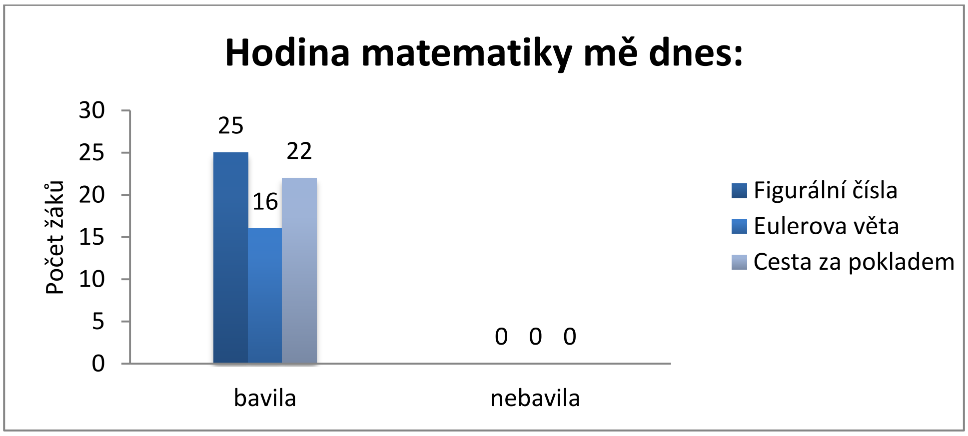
Graf 2: Odpovědi na 2. otázku dotazníkového šetření

Jako velmi obtížný předmět označil matematiku pouze 1 žák 7. třídy (4% žáků). 20 % žáků 7. třídy a 56% žáků 9. třídy označilo matematiku jako obtížný předmět. Ani obtížným, ani snadným předmětem je matematika pro 76% žáků 7. třídy a 44% žáků 9. třídy. Za snadný nebo velmi snadný předmět nepovažuje v našem empirickém šetření matematiku žádný z žáků 7. ani 9. třídy.



Graf 3: Odpovědi na 3. otázku dotazníkového šetření

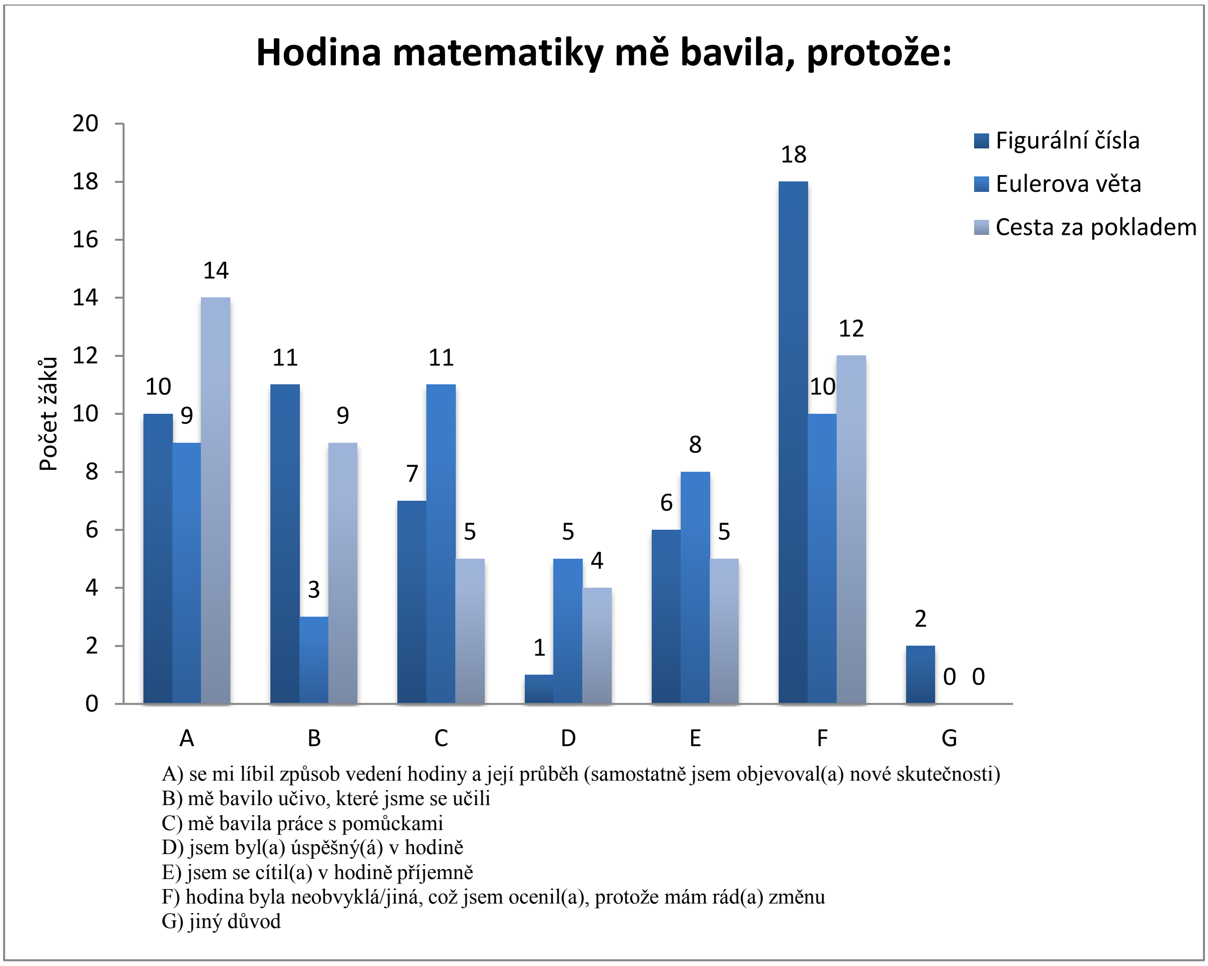
Pro 56% žáků 7. třídy a 50% žáků 9. třídy v matematice úspěch znamená, když samostatně objeví řešení úlohy, popřípadě algoritmus početních operaci či vzorec nebo pravidlo. Pro 36% žáků 7. třídy a 50% žáků 9. třídy je úspěchem, když dostanou jedničku, popřípadě dvojku[21]. Pro 4% žáků, tedy pro 1 žáka 7. třídy, znamená úspěch, když je rodič/prarodič/učitel(ka) pochválí. 4% žáků, tedy 1 žák 7. třídy, uvedlo jiný důvod, úspěch pro něj znamená, když pochopí učivo.



Graf 4: Odpovědi na první část 4. otázky dotazníkového šetření

Z uvedeného grafu je vidět, že všechny žáky, kteří se účastnili BOVM, ve které byly zařazeny náměty *Figurální čísla*, *Eulerova věta* nebo *Cesta za pokladem*, hodina bavila.

[21] 2 žáci 7. třídy, kteří zvolili odpověď B, škrtli dovětek *(popřípadě dvojku)*. Cílem položené otázky nebylo zjistit, který z obdržených stupňů známkování žák považuje za úspěch, ale zdali je žák v matematice motivován spíše vnitřně (úspěchem je pro něj samostatné objevení řešení úlohy apod.), nebo zevnějšku (úspěchem je pro něj známka či pochvala).



Graf 5: Odpovědi na druhou část 4. otázky dotazníkového šetření

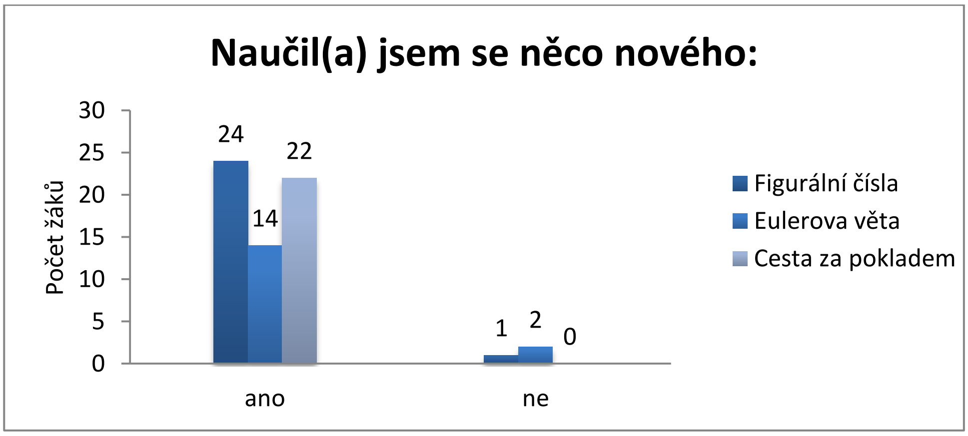
V rámci této otázky mohli žáci vybírat více odpovědí. Jejich výpovědi byly různorodé. Někteří nezvolili žádný z důvodů, kterým by vysvětlili, proč je hodina bavila, další označili pouze jediný důvod, jiní dva, tři, čtyři, pět nebo všechny. Zde je jejich rekapitulace[22]:

1. důvod (A) *„způsob vedení hodiny a její průběh (samostatně jsem objevoval(a) nové skutečnosti) se mi líbil“* zvolilo:
   - 18% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Figurální čísla*
   - 20% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Eulerova věta*
   - 29% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Cesta za pokladem*
2. důvod (B) *„bavilo mě učivo, které jsme se učili“* zvolilo:
   - 20% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Figurální čísla*
   - 6% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Eulerova věta*

[22] Jde o přehled odpovědí, které žáci volili jako důvody, proč je hodina bavila. Nelze tedy z uvedených záznamů vyvodit, že pokud např. 2% žáků 7. třídy, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Figurální čísla*, uvedla, že je bavila hodina, protože se cítili úspěšnými, skutečně úspěšnými byli. Z uvedeného nelze ani rozhodnout o tom, zda zbylých 98% žáků úspěšnými byli, nebo nebyli.

- 18% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Cesta za pokladem*

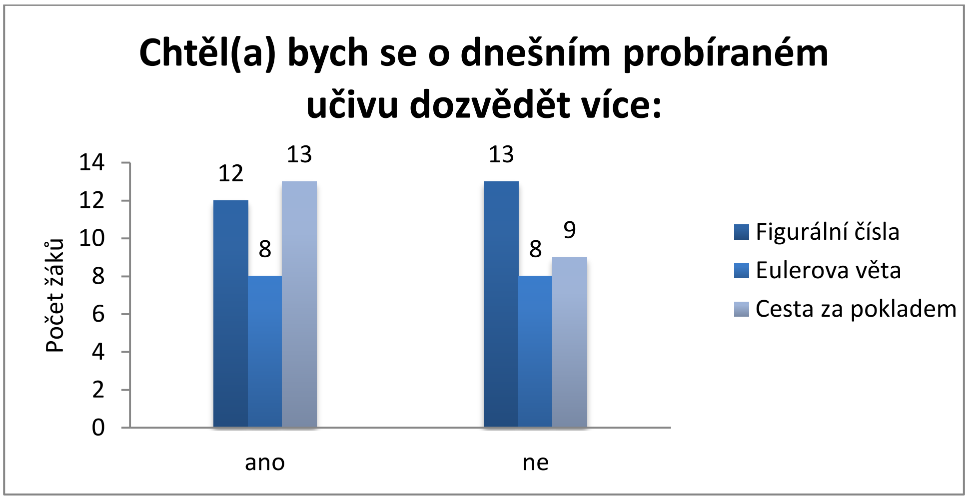
3. důvod (C) *„bavila mě práce s pomůckami“* zvolilo:
    - 13% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Figurální čísla*
    - 24% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Eulerova věta*
    - 10% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Cesta za pokladem*
4. důvod (D) *„byl(a) jsem úspěšný v hodině“* zvolilo:
    - 2% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Figurální čísla*
    - 11% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Eulerova věta*
    - 8% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Cesta za pokladem*
5. důvod (E) *„cítil(a) jsem se v hodině příjemně“* zvolilo:
    - 11% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Figurální čísla*
    - 17% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Eulerova věta*
    - 10% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Cesta za pokladem*
6. důvod (F) *„hodina byla neobvyklá/jiná, což jsem ocenil(a), protože mám rád(a) změnu“* zvolilo:
    - 33% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Figurální čísla*
    - 22% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Eulerova věta*
    - 25% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Cesta za pokladem*
7. jiný důvod (G) uvedlo 3% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Figurální čísla*. Jednalo se o dva žáky, kteří uvedli, že hodina byla volnější.



Graf 6: Odpovědi na 5. otázku dotazníkového šetření

96% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Figurální čísla*, 87% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Eulerova věta*, a všichni žáci, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Cesta za pokladem*, uvedli, že se v hodině <u>naučili</u> něco nového.

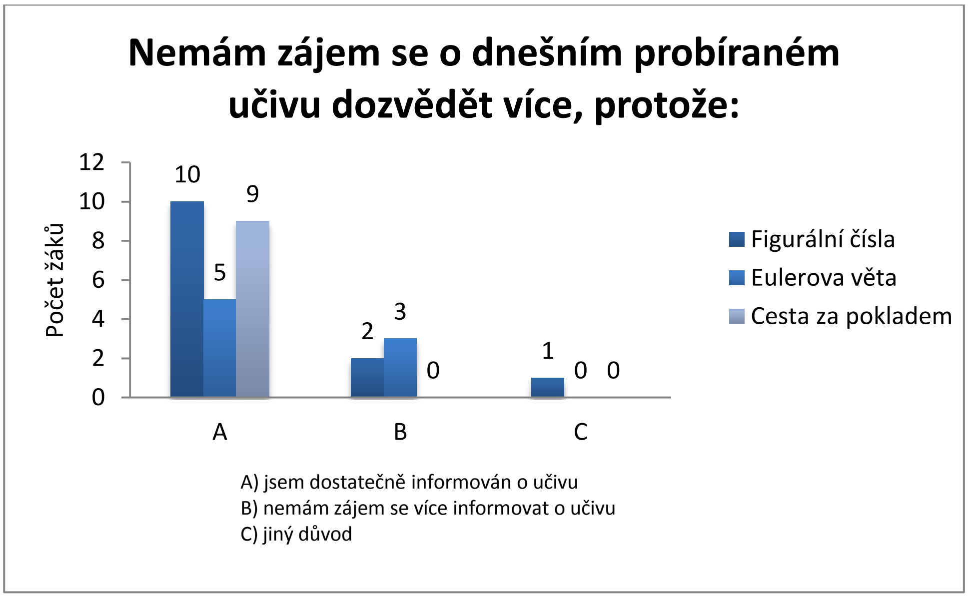
Pouze 4 % žáků, tedy 1 žák, který se účastnil vyučovací hodiny s námětem *Figurální čísla*, a 13 % žáků, tedy 2 žáci, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Eulerova věta*, uvedli, že se nenaučili nic nového.



Graf 7: Odpovědi na první část 6. otázky dotazníkového šetření

48% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Figurální čísla*, 50% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Eulerova věta*, a 59% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Cesta za pokladem*, by se chtělo dozvědět o probíraném učivu více.

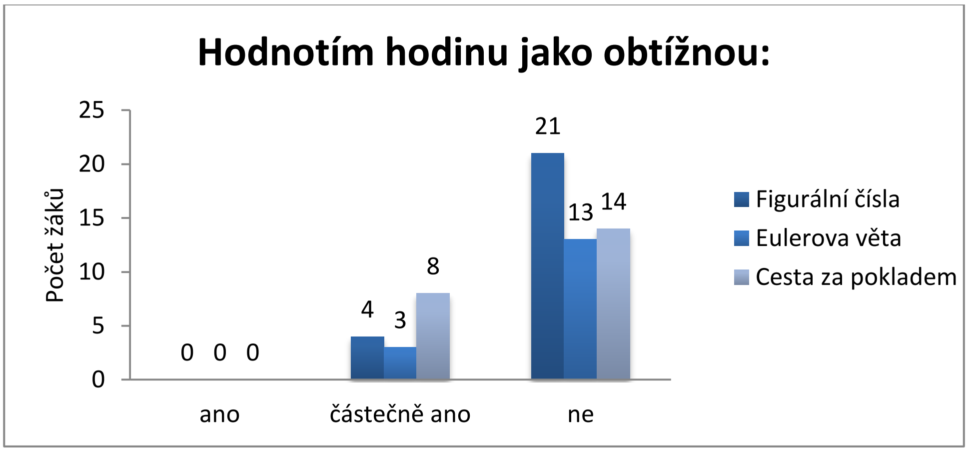
52% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Figurální čísla*, 50% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Eulerova věta*, a 41% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Cesta za pokladem*, by se nechtělo dozvědět o probíraném učivu více.



Graf 8: Odpovědi na druhou část 6. otázky dotazníkového šetření

Důvody, proč žáci nemají zájem se o probíraném učivu dozvědět více, jsou různé:

1. důvod (A) *„jsem dostatečně informován"* zvolilo:
   - 77% žáků, kteří se nechtějí o probíraném učivu dozvědět více a účastnili se vyučovací hodiny s námětem *Figurální čísla*
   - 62% žáků, kteří se nechtějí o probíraném učivu dozvědět více a účastnili se vyučovací hodiny s námětem *Eulerova věta*
   - všichni žáci, kteří se nechtějí o probíraném učivu dozvědět více a účastnili se vyučovací hodiny s námětem *Cesta za pokladem*
2. důvod (B) *„nemám zájem se více informovat o učivu"* zvolilo:
   - 15% žáků, kteří se nechtějí o probíraném učivu dozvědět více a účastnili se vyučovací hodiny s námětem *Figurální čísla*
   - 38% žáků, kteří se nechtějí o probíraném učivu dozvědět více a účastnili se vyučovací hodiny s námětem *Eulerova věta*
3. jiný důvod (C) uvedl pouze 1 žák (8% žáků), který se nechtěl o probíraném učivu dozvědět více a účastnil se vyučovací hodiny s námětem *Figurální čísla*. Učivo vnímal spíše jako zajímavost.



Graf 9: Odpovědi na 7. otázku dotazníkového šetření

Žádný z žáků v každé ze tří hodin nehodnotil hodinu jako obtížnou.

Jako částečně obtížnou ji hodnotilo 16% žáků, tedy 4 žáci, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Figurální čísla*. 2 žáci uvedli, že pro ně bylo obtížné objevit vzorce pro *n-té figurální čísla*, 1 žák uvedl, že neporozuměl zadání, a 1 žák uvedl, že pro něj bylo obtížné skládání kamínků do obrazců.

Částečně obtížná byla hodina pro 19% žáků, tedy pro 3 žáky, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Eulerova věta*. 2 žáci uvedli, že bylo pro ně obtížné sestavit modely těles z přiděleného počtu dílů tak, aby nepřebýval ani nezbyl žádný díl. 1 žák uvedl, že pro něj bylo obtížné objevit Eulerův vztah.

Částečně obtížná byla hodina pro 36% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Cesta za pokladem*. Žáci uvedli, že bylo pro ně obtížné objevení a zakreslení všech cest v plánech, časová náročnost, vyřešení bonusové úlohy nebo jen poznamenali, že někdy je obtížnější se naučit něco nového.

Pro 84% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Figurální čísla*, 81% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Eulerova věta*, a 64% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Cesta za pokladem*, nebyla hodina obtížná.

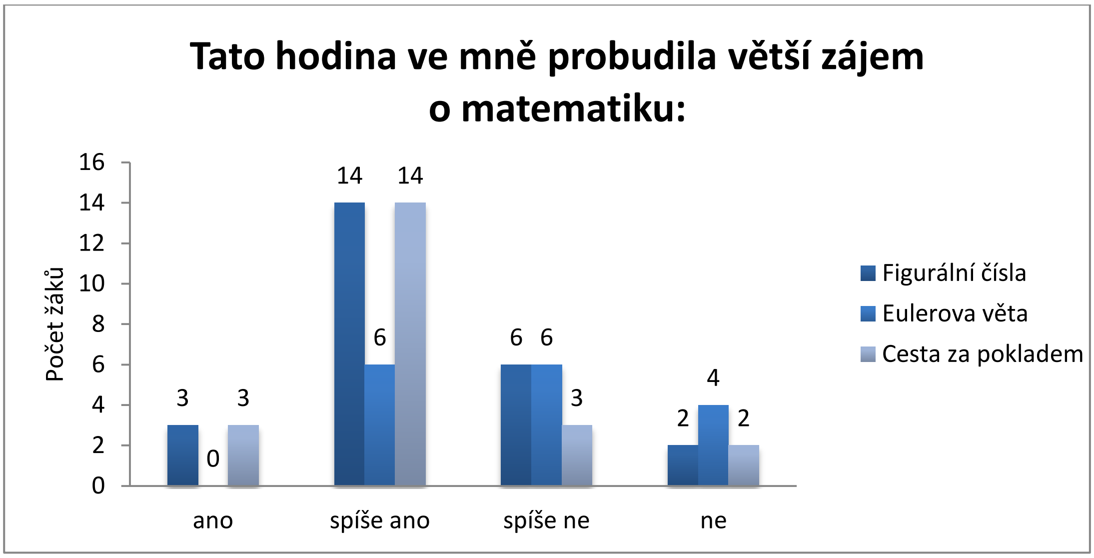
Graf 10: Odpovědi na 8. otázku dotazníkového šetření

Navádějící otázky v pracovním listě pomohly 8% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Figurální čísla*, 6% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Eulerova věta*, a 9% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Cesta za pokladem*.

Navádějící otázky v pracovním listě spíše pomohly 68% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Figurální čísla*, 25% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Eulerova věta*, a 73% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Cesta za pokladem*.

Navádějící otázky v pracovním listě spíše nepomohly 24% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Figurální čísla*, 38% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Eulerova věta*, a 18% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Cesta za pokladem*.

Navádějící otázky v pracovním listě nepomohly 31% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Eulerova věta*.



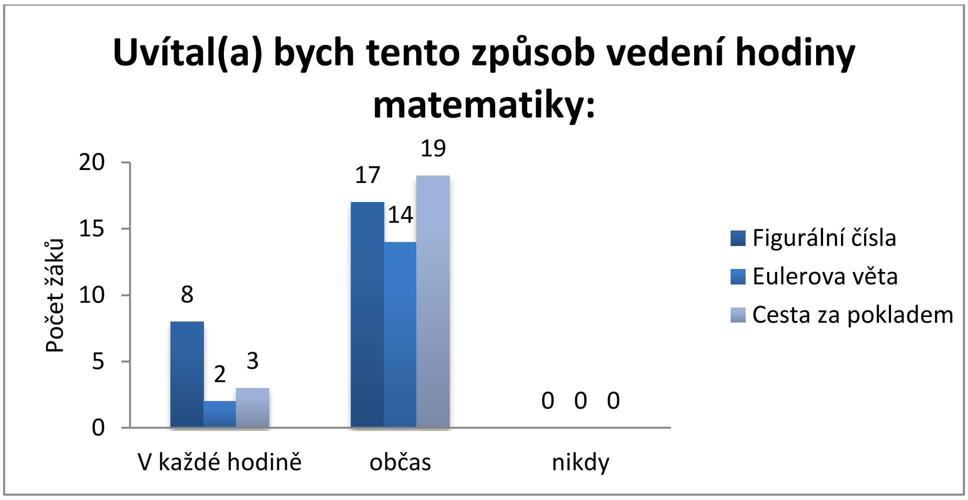
Graf 11: Odpovědi na 9. otázku dotazníkového šetření

U 12% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Figurální čísla*, a 14% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Cesta za pokladem*, probudila hodina větší zájem o matematiku.

U 56% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Figurální čísla*, 37% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Eulerova věta*, a 63% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Cesta za pokladem*, spíše probudila hodina větší zájem o matematiku.

U 24% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Figurální čísla*, 38% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Eulerova věta*, a 14% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Cesta za pokladem*, spíše neprobudila hodina větší zájem o matematiku.

U 8% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Figurální čísla*, 25% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Eulerova věta*, a 9% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Cesta za pokladem*, neprobudila hodina větší zájem o matematiku.



Graf 12: Odpovědi na 10. otázku dotazníkového šetření

32% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Figurální čísla*, 12% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Eulerova* věta, a 14% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Cesta za pokladem*, by uvítalo tento způsob vedení hodiny v <u>každé hodině</u>.

68% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Figurální čísla*, 88% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Eulerova* věta, a 86% žáků, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Cesta za pokladem*, by uvítalo tento způsob vedení hodiny <u>občas</u>.

Žádný z žáků neuvedl, že by způsob hodiny, kterým byly vedeny všechny vyučovací hodiny odlišující se vybranými náměty pro BOVM, již <u>nikdy</u> neuvítal.

2.2.6 Shrnutí empirického šetření a doporučení pro pedagogickou praxi

Na základě dotazníkového šetření, pedagogického pozorování průběhu vyučovací hodiny a analýzy jednotlivých žáky vypracovaných pracovních listů, které byly zpracovány k námětům *Figurální čísla, Eulerova věta* a *Cesta za pokladem*, lze sepsat určitá zjištění.

Postoje žáků k průběhu vyučovací hodiny:

- všichni respondenti uvedli, že je hodina matematiky bavila. Zajímalo nás, jak často by v závislosti na osobní zkušenosti žáci uvítali způsob vedení hodiny. Převážná většina odpověděla občas, nezávisle na tom, které ze tří hodin, navzájem se odlišujících zpracovanými náměty pro BOVM, se zúčastnila. Žádný z respondentů neuvedl, že by již nikdy neuvítal způsob vedení hodiny. V této souvislosti je třeba reflektovat fakt, že BOVM byla realizována nezáměrně ve třídách s rozšířenou výukou matematiky, kde je vztah žáků k matematice, jak jsme předpokládali, spíše kladný, a také skutečnost, že 56% žáků 7. třídy a 50% žáků 9. třídy uvedlo, že úspěch pro ně znamená, když samostatně objeví řešení úlohy, popřípadě algoritmus početních operací či vzorec nebo pravidlo. V procesu učení tak žáky stimuluje vnitřní motivace, která je podstatným znakem konstruktivistických směrů, z nichž vychází badatelsky orientovaná výuka.
- středem našeho zájmu se staly důvody, které evokovaly v žákovi kladný postoj k hodině. Z odpovědí žáků vyplývá, že především díky zařazení nestandardních aplikačních úloh do hodiny matematiky či změně týkající se výběru vzdělávací formy, metody nebo prostředku výuky hodina žáky bavila. Což potvrzuje fakt, že v rámci 4. otázky dotazníkového šetření žáci mnohdy s výběrem dalších odpovědí volili odpověď: *hodina byla neobvyklá/jiná, což jsem ocenil(a), protože mám rád(a) změnu*. Žáci, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Figurální čísla*, uváděli jako druhý nejčastější důvod: *bavilo mě učivo, které jsme se učili*. Žáci, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Eulerova věta*, uváděli jako první nejčastější důvod: *bavila mě práce s pomůckami*. Oproti ostatním hodinám měli žáci v této hodině spíše příležitost pracovat s učebními pomůckami (statické modely těles). Žáci, kteří se účastnili vyučovací hodiny s námětem *Cesta za pokladem*, uváděli jako první nejčastější důvod: *líbil se mi způsob vedení hodiny a její průběh (samostatné objevování nových skutečností)*. Uvedené zjištění odpovídá nadšení žáků při samostatném objevování cest. Konstatujeme, že každý ze zpracovaných námět v sobě skrývá vlastní potenciál (některý zaujme žáky svým učivem, jiný prací

s učebními pomůckami nebo možností samostatného objevování), jímž jsou žáci motivováni v procesu bádání, resp. ve výuce matematiky.

- podstatné bylo také v našem šetření zhodnocení, zdali byla pro žáky hodina přínosná. Z odpovědí žáků vyplývá, že se během vyučovací hodiny naučili něčemu novému, někteří by se rádi dozvěděli více o učivu a naopak někteří měli pocit, že jsou dostatečně informováni. Většina žáků nehodnotila hodinu jako obtížnou.

Zařazení námětů pro BOVM do pedagogické praxe:

- pouhým doporučením je rozdělení zpracovaného námětu *Figurální čísla* do několika částí tak, že objevování čtvercových, obdélníkových a trojúhelníkových čísel postupně učitel zařadí do úvodních (motivačních) částí hodin před probíráním tematického celku *dělitelnost přirozených čísel* nebo *algebraické výrazy s proměnnou*. Žák nahradí čísla hromádkami kamínků, které umí uspořádat do různých geometrických útvarů v rovině (čtverec, obdélník, trojúhelník). Zarovnáním čísla do obdélníku s různým počtem řádků objeví jeho dělitele. Diskuse v hodině může probíhat následovně (inspirováno: Lišková, 2006, s. 6):

  Učitel: *„Do kolika řad se dá uspořádat 6 kamínků?"*
  Žák: *„Do jedné, dvou, tří nebo šesti."*
  Učitel: *„Proč se vám nepodařilo uspořádat 6 kamínků do čtyř řad?"*
  Žák: *„Protože nám chybí kamínky."*
  Učitel: *„A proč nám chybí kamínky, ví to někdo?"*
  Žák: *„6 nejde dělit čtyřmi."*
  Učitel: *„Jak se říká číslům, kterými můžeme bez zbytku dělit?"*
  Žák: *„Dělitelé."*
  Učitel: *„Kolik a jaké dělitele tedy číslo 6 má?"*
  Žák: *„Celkem čtyři, dělitelé jsou 1, 2, 3, 6."*

  V didaktice matematiky je často diskutovanou otázkou zavádění pojmu *proměnná* do struktury již získaných žákových znalostí. Autoři učebnic matematiky zavádí proměnnou různými způsoby[23]. Někteří využívají geometrickou interpretaci, jiní budují pojem *výraz s proměnnou* na základě znalosti pojmu *číselný výraz*. V souvislosti s odvozováním vzorců pro *n-tá figurální čísla* je účelné zdůraznit význam zavádění pojmu *proměnná* v matematice. Protože se obecně ve vzorcích

[23] Podrobněji např. v bakalářské práci: PRÁŠILOVÁ, L. *Různé přístupy k propedeutice algebry*. Olomouc, 2014.

potkáváme s proměnnými, i v případě odvození vzorců pro *n-tá figurální čísla* musíme zavést pojem *proměnná*.

- námět *Eulerova věta* byl vhodně zařazen do 9. ročníku. Žáci uměli rozpoznat, pojmenovat a charakterizovat základní *konvexní mnohostěny*, a proto správně a bez problému vymodelovali zadaná prostorová tělesa. Eulerův vztah téměř všichni objevili bez pomoci navádějících otázek v pracovním listě. Ověření hypotézy lze provést také na tzv. Platónových tělesech, která jsou obvykle rozšiřujícím učivem ve výuce matematiky.
- zařazení námětu *Cesta za pokladem* do 7. ročníku se osvědčilo. Při výběru ročníků, zvláště tříd, je vhodné posoudit, zdali jsou žáci hraví, cílevědomí a mají zájem objevovat nové skutečnosti. Uvedenou zkušenost s žáky 7. třídy nelze aplikovat na všechny žáky 7. ročníku. Kromě toho může být experiment úspěšně realizován i v jiných ročnících 1. a 2. stupně ZŠ. Prostor pro výběr ročníků a tříd je ponechán učitelům, kteří posoudí schopnosti svých žáků.

Zpracování pracovních listů:

- v pracovním listě, jenž byl zpracován k námětu *Figurální čísla*, většina žáků nedoplnila názvy[24] figurálních čísel, která v daném cvičení pracovního listu objevovala, nebo nepřekreslila některá znázorněná figurální čísla. Protože hlavním cílem hodiny nebylo (korektní) vyplnění pracovního listu, ale objevení a ověření hypotézy při práci s pracovním listem, učitel přenechal aktivitu na straně žáků a nezasahoval do způsobu vyplňování pracovních listů. Je třeba také zohlednit fakt, že ve srovnání s hodinami, ve kterých byly realizovány náměty *Eulerova věta* a *Cesta za pokladem*, tato hodina probíhala spíše formou diskuse mezi učitelem a žáky. Tudíž velmi často žáci odpovídali na otázky položené v pracovním listě učiteli a svou odpověď do pracovního listu nezaznamenali. Doporučením pro pedagogickou praxi je uvážit, co vyžaduje učitel, aby bylo zaznamenáno v pracovním listě, včetně překreslení znázorněných obrazců a odpovědí na otázky.
- pracovní list zpracovaný k námětu *Eulerova věta* se prokázal jako praktický. Umožnil žákovi samostatně řídit průběh svého objevování. Učitel pouze dohlížel na práci žáků.
- podobně i pracovní list, včetně příloh v podobě předpřipravených plánů, zpracovaný k námětu *Cesta za pokladem*, byl užitečný pravé proto, že poskytl žákovi možnost

[24] V nadpisu jednotlivých cvičení pracovního listu nebyly záměrně nadepsány názvy figurálních čísel. Jedním z cílů hodiny bylo, aby žák samostatně objevil možnosti uspořádání kamínků do geometrických útvarů v rovině.

pracovat vlastním tempem. Protože kontrola zakreslených cest žáky je v hodině a také mimo vyučovací hodinu časově náročná, je třeba uvážit, zdali by učitel neměl mít přichystány čtvercové sítě se správně zakreslenými cestami, které by poskytl žákovi ke kontrole jeho zakreslených cest v plánech.

- většině žáků, kteří se účastnili hodiny s námětem *Figurální čísla* a *Cesta za pokladem*, pomohly v procesu bádání navádějící otázky v pracovním listě. Většina žáků, která se účastnila hodiny s námětem *Eulerova věta*, odhalila Eulerův vztah bez pomoci navádějících otázek, a proto nejspíše uvedla, že jí navádějící otázky v pracovním listě spíše nebo vůbec nepomohly. Hodnotíme jako užitečné, mít v pracovním listě přichystány navádějící otázky, aby v případě potřeby, v didaktických situacích, kdy žák neví, jak dále řešit problém, resp. při opakovaných neúspěšných pokusech, se jimi mohl nechat vést. Samozřejmě v takové situaci sehrává svou roli také učitel.

ZÁVĚR

Hlavním cílem diplomové práce na téma „Badatelský přístup k matematickému vyučování na 2. stupni ZŠ“ bylo na základě prostudované literatury charakterizovat badatelsky orientované vyučování (BOV) jako vyučovací metodu a pokusit se o reflexi průběhu odučených hodin, ve kterých byly zařazeny vybrané a zpracované náměty pro badatelsky orientované vyučování matematice (BOVM).

Při okrajovém uvedení relevantních existujících teorií, které stojí v počátcích BOV, jsme vyšli z klasifikace teorie vzdělávání Y. Bertranda. Středem našeho zájmu se staly personalistické teorie zdůrazňující osobnost žáka a kognitivně psychologické, resp. konstruktivistické teorie usilující o žákovo porozumění získaným a osvojeným poznatkům, jež sami aktivně konstruují. V naší práci vnímáme BOV jako pojetí výuky zaměřené na strukturované bádání, jehož podstatou je žákovo tvůrčí řešení problému, které mu není předem známo, i když je do jisté míry regulováno učitelovými instrukcemi.

K dosažení stanoveného cíle jsme zpracovali náměty *Figurální čísla, Eulerova věta* a *Cesta za pokladem* do podoby pracovních listů, které jsme ověřili v edukačním prostředí 7. a 9. třídy s rozšířenou výukou matematiky na 2. stupni ZŠ Stupkova v Olomouci. Každý ze tří zpracovaných námětů je charakteristický vstupní informací, podle které rozlišujeme různé podoby BOVM. Charakter vstupní informace námětu *Figurální čísla* značně inklinuje ke *gradující podobě*, charakter vstupní informace námětu *Eulerova věta* k *dynamické podobě* a vstupní informace námětu *Cesta za pokladem* je především charakteristická *prostředím*, ve kterém je daná úloha řešena, tj. v pravidelné čtvercové síti. K získání poznatků o průběhu vyučovací hodiny jsme využili metodu pedagogického pozorování. Analýzou pracovních listů vypracovaných jednotlivými žáky jsme zhodnotili jejich efektivnost a předložili některé interpretace výsledků žákova bádání při realizaci námětu *Figurální čísla* na str. 44-48, *Eulerova věta* v příloze 7-10 a *Cesta za pokladem* na str. 52-55. Z časových důvodů nebylo možné uskutečnit se všemi žáky rozhovor, kterým by byly zjištěny jejich postoje k průběhu vyučovací hodiny, které se zúčastnili. Proto jsme využili dotazníkového setření, jež jsme zpracovali do grafické podoby na str. 56-65.

Průběh jednotlivých hodin je podrobně popsán v rámci kapitoly *Reflexe průběhu vyučovací hodiny*. Doporučení pro zařazení zpracovaných námětů pro BOVM do pedagogické praxe je individuální, závislé na učitelově posouzení schopností svých žáků, více na str. 67-68, včetně doporučení k rozdělení námětu *Figurální čísla* do několika částí. Pracovní listy zpracované k námětům *Eulerova věta* a *Cesta za pokladem* jsme shledali užitečnými právě proto, že umožnily žákovi samostatně řídit průběh svého objevování, a tak poskytly každému žákovi možnost pracovat vlastním tempem. Vzhledem k faktu, že hodina s námětem *Figurální čísla* byla vedena spíše formou diskuze mezi učitelem a žáky, příslušný pracovní list sloužil spíše jen k zaznamenávání výsledků žákova bádání, více na str. 68-69.

Všichni respondenti empirického šetření uvedli, že je hodina matematiky bavila, a převážná většina by v závislosti na osobní zkušenosti BOV uvítala občas, nezávisle na tom, které ze tří hodin, navzájem se odlišujících zpracovanými náměty, se zúčastnila. Z odpovědí žáků vyplývá, že především díky zařazení nestandardních aplikačních úloh do hodiny matematiky či změně týkající se výběru vzdělávací formy, metody nebo prostředku výuky hodina žáky bavila. Konstatujeme, že každý ze zpracovaných námětů (*Figurální čísla, Eulerova věta, Cesta za pokladem*) v sobě skrývá vlastní potenciál (některý zaujme žáky svým učivem, jiný prací s učebními pomůckami nebo možností samostatného objevování), jímž jsou žáci motivováni v procesu bádání, resp. ve výuce matematiky. Hlavní cíl byl splněn.

V současnosti stoupá zájem o BOVM především z toho důvodu, že patrně může zkvalitnit žákovo učení a zajistit hlubší porozumění matematickým pojmům a postupům. Zároveň však přináší zvýšené nároky kladené na učitele zvláště při přípravě badatelských aktivit. Časová investice věnovaná tvorbě jednotlivých pracovních listů a vytvoření vhodných podmínek a pomůcek se nám vrátila v podobě zvýšené motivace žáka ve výuce matematiky. Protože je motivace zkušenými a začínajícími učiteli považována za *„předpoklad úspěšného učení"*, shledáváme výsledky našeho šetření jako úspěch naší práce (Petty, 1996, s. 40). Z našeho empirického šetření nelze kategoricky stanovit závěr, že je BOV nejefektivnější metoda využívaná v pedagogické praxi, ale téměř s jistotou lze říci, že příležitostná implementace BOV může u žáků zvýšit motivaci ve výuce matematiky.

SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

LITERATURA

ARTIGUE, M., BAPTIST, P. *Inquiry in Mathematics Education (Resources for Implementing Inquiry in Science and in Mathematics at School)*. 2012. Dostupné z: http://www.fibonacci-project.eu/.

BEČVÁŘ, J. *Hrdinský věk řecké matematiky.* In: BEČVÁŘ, J., FUCHS, E. *Historie matematiky.* I. Seminář pro vyučující na středních školách, Jevíčko, 19.8-22.8.1993, Sborník. (Czech). Brno: Jednota českých matematiků a fyziků, 1993, s. 20-107. Dějiny matematiky, 1. svazek. Dostupné z: http://dml.cz/dmlcz/400590.

BERTRAND, Y. *Soudobé teorie vzdělávání*. 1. vyd. Praha: Portál, 1998. Studium. ISBN 80-717-8216-5.

DOSTÁL, J. *Badatelsky orientovaná výuka: pojetí, podstata, význam a přínosy*. 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2015. ISBN 978-80-244-4393-5.

HEJNÝ, M., KUŘINA, F. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. 2. vyd. Praha: Portál, 2009. ISBN 978-80-7367-397-0.

HEJNÝ, M., STEHLÍKOVÁ, N. *Číselné představy dětí.* Praha: Pedagogická Fakulta Univerzity Karlovy v Praze, 1999.

HORÁK, F., CHRÁSKA, M. *Metodologie pedagogiky*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 1983.

KALHOUS, Z., OBST, O. a kol. *Školní didaktika*. Praha: Portál, 2002. ISBN 80-7178-253-X.

KAŠPÁRKOVÁ, S. *Konstruktivismus a jeho vliv na tvorbu kurikula*. In: NEZVALOVÁ, D. a kol. *Konstruktivismus a jeho aplikace v integrovaném pojetí přírodovědného vzdělávání*. 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2006. ISBN 80-244-1258-6.

KOPKA, J. *Výzkumný přístup při výuce matematiky*. 2. vyd. Ústí nad Labem: Univerzita Jana Evangelisty Purkyně, 2007. ISBN 978-80-7044-926-4.

KUŘINA, F. *Konstruktivistické vyučování a realita školy (Komentáře F. Kuřiny ke knize Dítě, škola a matematika po deseti letech)*. In: HEJNÝ, M., KUŘINA, F. *Dítě, škola a matematika:*

konstruktivistické přístupy k vyučování. 2. vyd. Praha: Portál, 2009. ISBN 978-80-7367-397-0.

LIŠKOVÁ, H. *Postoje žáka k matematice.* Studijní materiály k projektu: Operační program Rozvoj lidských zdrojů. 2006. Jednota českých matematiků a fyziků. Dostupné z: http://class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/FileDownload.aspx?FileID=107

MŠMT: *Upravený_RVPZV_s_barevně_vyznačenými_změnami.docx* [online]. Praha, 1. 9. 2013, 146 s. [cit. 2016-03-28]. Dostupné z: http://www.msmt.cz/vzdelavani/zakladni-vzdelavani/upraveny-ramcovy-vzdelavaci-program-pro-zakladni-vzdelavani.

NEZVALOVÁ, D. *Inovace v přírodovědném vzdělávání*. 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2010. ISBN 978-80-244-2540-5.

NOVÁK, B. *Nestandardní aplikační úloha, její reflexe a interpretace budoucími učiteli primární školy*. In: *Matematické vzdělávání v kontextu proměn primární školy (EME 2010). Acta Univ. Palack. Olomucensis, Fac. Paed., Mathematica VII – 2010, Matematika 4*. UHLÍŘOVÁ, M. (ed.) Olomouc: Vydavatelství UP 2010, s. 199 – 204. ISSN 0862-9765.

OKOŇ, W. K základům problémového vyučování. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1966.

PECINA, P., ZORMANOVÁ. L. *Metody a formy aktivní práce žáků v teorii a praxi*. Brno: Masarykova univerzita, 2009. ISBN 978-80-210-4834-8.

PETTY, G. *Moderní vyučování*. 1. vyd. Praha: Portál, 1996. ISBN 80-7178-070-7.

ROUBÍČEK, F. *Sedm podob badatelsky orientovaného vyučování matematice II*. In Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů kol 2014, Plzeň: Vydavatelský servis, 2014, s. 169-174.

SAMKOVÁ, L. *Sedm podob badatelsky orientovaného vyučování matematice I*. In Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů kol 2014, Plzeň: Vydavatelský servis, 2014, s. 187-192.

SOKOL, J. *Malá filosofie člověka a Slovník filosofických pojmů*. 3. rozš. vyd. Praha: Vyšehrad, 1998. ISBN 80-702-1253-5.

ŠTVERÁK, V. *Stručné dějiny pedagogiky.* 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1983.

ŠVEC, V. *Konstrukce poznání*. In: NEZVALOVÁ, D. a kol. *Konstruktivismus a jeho aplikace v integrovaném pojetí přírodovědného vzdělávání*. 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2006. ISBN 80-244-1258-6.

TICHÁ, M., HOŠPESOVÁ, A. *Sedm podob badatelsky orientovaného vyučování matematice III*. In Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů kol 2014, Plzeň: Vydavatelský servis, 2014, s. 217-223.

NEPUBLIKOVANÁ LITERATURA

NOVÁK, B. *Badatelsky orientované vyučování matematice (BOVM) v teorii a praxi*.

PERIODIKUM

DOSTÁL, J. *Badatelsky orientovaná výuka jako trend soudobého vzdělávání*. In: *e-Pedagogium.* 2013, č.3. s. 81 - 93. Dostupné z: http://www.pdf.upol.cz/fileadmin/user_upload/PdF/e-pedagogium/2013/epedagogium_3-2013.pdf.

JANÍK, T., STUCHLÍKOVÁ, I. *Oborové didaktiky na vzestupu: přehled aktuálních vývojových tendencí*. Scientia in educatione. 2010, roč. 1, č. 1, s. 5–32. ISSN 1804-7106. Dostupné z: http://scied.cz/index.php/scied/article/view/3.

PAPÁČEK, M. *Badatelsky orientované přírodovědné vyučování - cesta pro biologické vzdělávání generací Y, Z a alfa?* Scientia in educatione. 2010, roč. 1, č. 1, s. 33-49. ISSN 1804-7106. Dostupné z : http://scied.cz/index.php/scied/article/view/4.

SAMKOVÁ, L. a kol. *Badatelsky orientované vyučování matematice*. Scientia in educatione. 2015, roč. 6, č. 1, s. 91-122. ISSN 1804-7106. Dostupné z: http://scied.cz/index.php/scied/article/view/154.

SEKUNDÁRNÍ LITERATURA

KIRKBY, D.: *Investigation Bank Book 5, 7, 17*. Sheffield: Dickens & Son, 1986. Cit. In: KOPKA, J. *Hrozny problémů ve školské matematice*. 1. vyd. Ústí na Labem: Univerzita Jana Evangelisty Purkyně, 1999. ISBN 80-7044-247-6.

DEWEY, J. Logic: *The theory of inquiry*. New York: Holt, 1938. Cit. In: SAMKOVÁ, L. *Sedm podob badatelsky orientovaného vyučování matematice I*. In Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů kol 2014, Plzeň: Vydavatelský servis, 2014, s. 187-192.

REZBA, R. J., AULDRIDGE, T., RHEA, L. *Teaching & learning the basic science skills*. In: *Virginia*.gov [online]. 1999 [cit.2014-07-20]. Cit. In: DOSTÁL, J. *Badatelsky orientovaná výuka: pojetí, podstata, význam a přínosy*. 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2015. ISBN 978-80-244-4393-5.

ELEKTRONICKÉ ZDROJE

ZŠ Stupkova Olomouc. *Třídy RVMI* [online]. [cit. 2016-03-15]. Dostupné z: http://www.zs-stupkova.cz/tridy_rvmi/.

777 citátů nejen o lásce a životě [online]. [cit. 2016-04-12]. Dostupné z: http://azcitaty.cz/.

SEZNAM OBRÁZKŮ

SEZNAM GRAFŮ

SEZNAM TABULEK

SEZNAM ZKRATEK

aj. - a jiné

apod. - a podobně

atd. – a tak dále

BOV – badatelsky orientované vyučování

BOVM – badatelsky orientované vyučování matematice

č. - číslo

IBE – inquiry based education

IBSE – iquiry based science education

mj. – mimo jiné

např. – například

obr. - obrázek

PISA - Programme for International Student Assesment (Program pro mezinárodní hodnocení žáků)

resp. – respektive

RVP – Rámcový vzdělávací program

RVP ZV – Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání

srov. – srovnání

TALIS - Teaching And Learning International Survey (Mezinárodní výzkum o vyučování a učení)

tj.- to jest

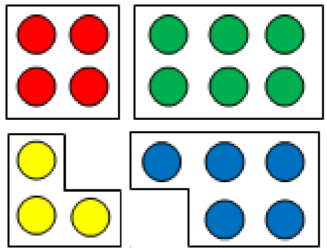
ZŠ – základní škola

SEZNAM PŘÍLOH

Příloha č. 1 – Pracovní list k námětu *Figurální čísla*

Jméno a příjmení: **Datum:**

Třída:



Figurální čísla

Zadání:

Před mnoha lety žili, byli významní matematici, kterým se říkalo Pythagorejci. O světě tvrdili, že je matematicky uspořádán, a důraz kladli především na pojem „číslo“. Totiž číslem se podle Pythagorejců dá vyjádřit cokoliv. Středem jejich zájmu se stala čísla přirozená (1, 2, 3, 4, …), přičemž číslo 1 chápali jako základní stavební kámen. „Co bychom mohli o takových číslech říct,“ pokládali si otázku. A tak začali čísla více studovat. Nahradili je hromádkami kamínků, které uspořádali do různých geometrických útvarů. Mysli si třeba, že jsi jeden z Pythagorejců, a objev to, co objevili oni v 6. století př. n. l., tzv. figurální čísla.

1. **Do jakých geometrických útvarů v rovině bychom mohli kamínky uspořádat?**

2. **……………………………… ČÍSLA**

   Do prázdného místa **překresli** první čtyři čtvercová čísla, která si znázornil pomocí kamínků.

- Ke každému obrazci čtvercového tvaru **napiš, kolik** jsi potřeboval **kamínků.**
- Zapiš tato **čísla** ve tvaru **druhé mocniny.**
- Urči zpaměti, kolik kamínků bys potřeboval ke každému znázornění dalšího čtvercového čísla? **Pokus se odvodit vzorec pro n-té čtvercové číslo.**

- Je číslo 51 číslem čtvercovým? Pokud ne, jaké největší čtvercové číslo sestavíme z 51 kamínků?..

3. ………………………………. ČÍSLA

Do prázdného místa **překresli** první čtyři obdélníková čísla, která si znázornil pomocí kamínků.

- Ke každému obrazci obdélníkového tvaru **napiš, kolik** jsi potřeboval **kamínků.**
- Zapiš tato **čísla** ve tvaru **součinu počtu řádků a sloupců.**
- Urči zpaměti, kolik kamínků bys potřeboval ke každému znázornění dalšího obdélníkového čísla? **Napiš vzorec pro n-té obdélníkové číslo.**

- Na základě uvedeného vzorce objev a uveď další obdélníkové číslo. Znázorněním pomocí kamínků se ujisti, že se jedná o číslo obdélníkové. ………………………….

4. ……………………………… ČÍSLA

Do prázdného místa **překresli** první čtyři trojúhelníková čísla, která si znázornil pomocí kamínků.

- Ke každému obrazci trojúhelníkového tvaru **napiš, kolik** jsi potřeboval **kamínků.**
- **Napiš vzorec pro n-té trojúhelníkové číslo.**

- Je číslo 21 trojúhelníkové, když víš, že 42 je číslo obdélníkové? Proč? ....

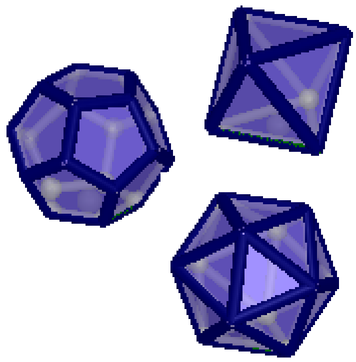
5. Sudé číslo můžeme vždy zarovnat do obdélníku s počtem řádků 2. U lichého čísla to nelze. Vždy nám bude jeden kamínek přebývat nebo chybět.

a) Součet dvou sudých čísel je ……………………….. číslo.

b) Součet dvou lichých čísel je ……………………..… číslo.

c) Součet sudého a lichého čísla je ………………….. číslo.

Příloha č. 2 – Pracovní list k námětu *Eulerova věta*



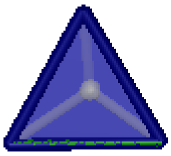
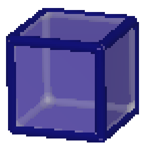
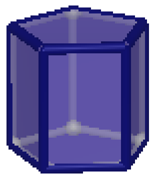
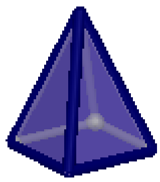
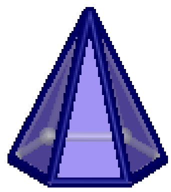
Jméno a příjmení: **Datum:**

Třída:

Eulerova věta

Zadání:

Vytvořte modely pravidelného čtyřstěnu, krychle, pravidelného pětibokého hranolu, pravidelného čtyřbokého jehlanu a pravidelného šestibokého jehlanu. Pokuste se nalézt vztah mezi počtem vrcholů, stěn a hran v uvedených konvexních mnohostěnech.

Konvexní mnohostěny	Pravidelný čtyřstěn	Krychle	Pravidelný pětiboký hranol	Pravidelný čtyřboký jehlan	Pravidelný šestiboký jehlan
					
Počet vrcholů (v)					
Počet stěn (s)					
Počet hran (h)					

1. **Největším číslem** jsou vyjádřeny ……………………………………………………
2. Chceme-li ve sloupci **sečíst** vždy **dvě menší čísla**, musíme sečíst …………………....., doplňte tyto součty do posledního řádku tabulky.
3. Výsledné součty se liší od počtu hran (h). V každém sloupci **o kolik**…………………?
4. Zapište pomocí symboliky vztah mezi počtem vrcholů, stěn a hran vymodelovaných mnohostěnů, platí:

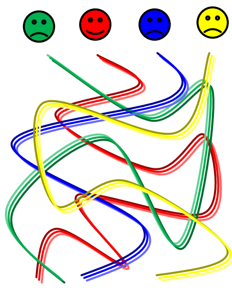
$$\boxed{}$$

5. Mnohostěny rozlišujeme podle počtu stěn, tedy:
   krychle je……………………………………………………,
   pravidelný pětiboký hranol je……………………………….,
   pravidelný čtyřboký jehlan je……………………………….,
   pravidelný šestiboký jehlan je……………………………….
6. Jak by vypadal **osmistěn**? ………………………………………
   Pokuste se jej vymodelovat a ověřte platnost nalezeného vztahu.

Příloha č. 3 – Pracovní list k námětu *Cesta za pokladem*

Jméno a příjmení: ______________________________ **Datum:** __________

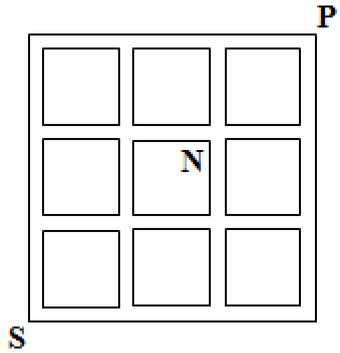
Třída: ____



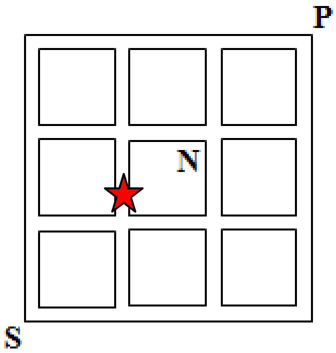
Cesta za pokladem

Zadání:

Pouť z místa startu (S) na místo pokladu (P) může vést různými cestami. Křižovatka (N) je místo nápovědy pro poutníka. **Vaším úkolem je zjistit, kolika různými způsoby (cestami) můžete podniknout pouť za pokladem?** Po cestě se nesmíte vracet, ale pohybovat se pouze dopředu, tedy v plánu pouze nahoru (na sever) nebo doprava (na východ).



1. K první křižovatce (★) vedou přesně ……… **cesty**.
   Barevně je odliš na plánu.



2. **a) Kolik různých cest vede z místa startu (S) k místu nápovědy (N)?**
   Barevně odliš cesty v plánu (využij plánů tolik, kolik potřebuješ).

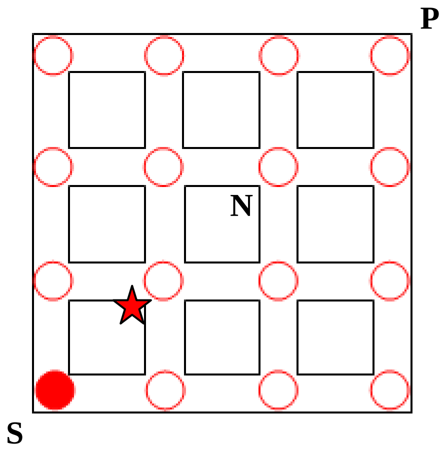
   b) Kolik úseků (vzdálenost mezi každými dvěma nejbližšími křižovatkami) **musíš projít při každé cestě z S do N?**

Počet cest	
Počet úseků	

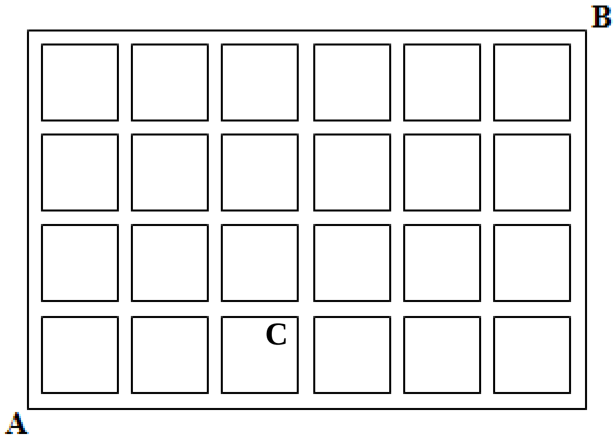
3. **Tedy kolika různými způsoby (cestami) můžete podniknout pouť za pokladem (P) z místa startu (S)?**
   Opět barevně odliš cesty v plánu (využij plánů tolik, kolik potřebuješ).

Počet cest	
Počet úseků	

Do kroužku zapiš počet cest, které vedou k dané křižovatce.



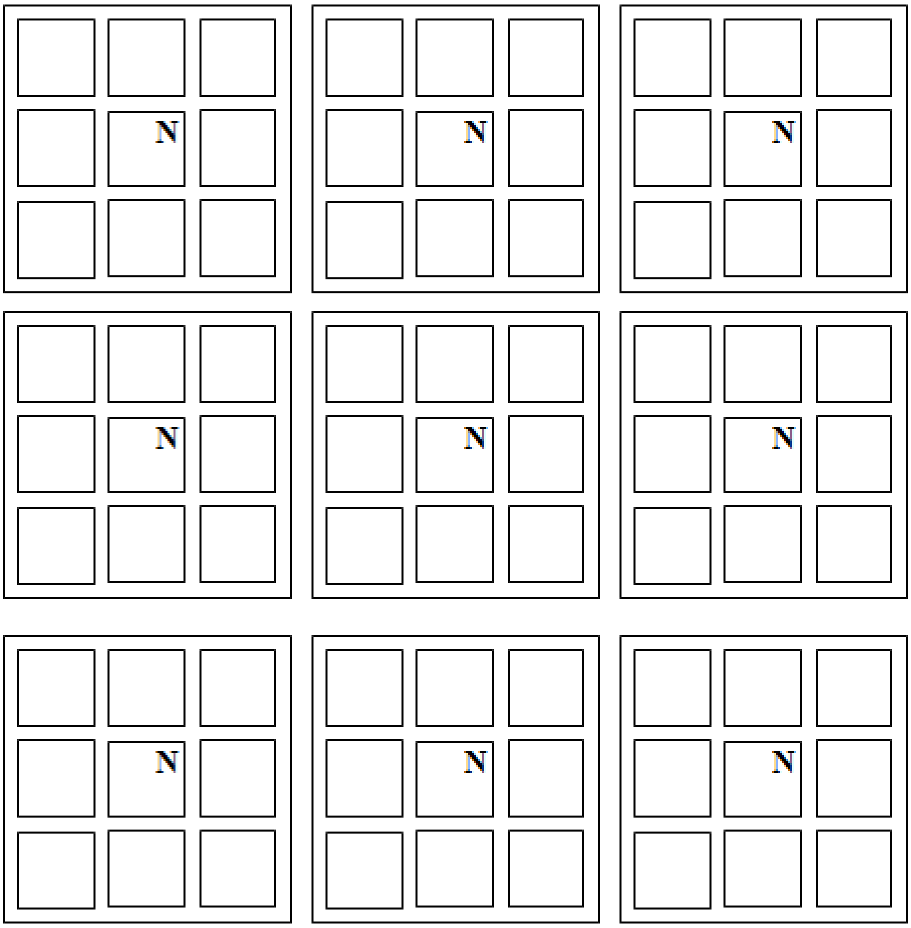
4. Kolik různých cest vede v následujícím plánu z místa (A) do místa (B), jestliže se lze pohybovat pouze nahoru a doprava? Aplikuj způsob hledání cest, který jsi objevil.



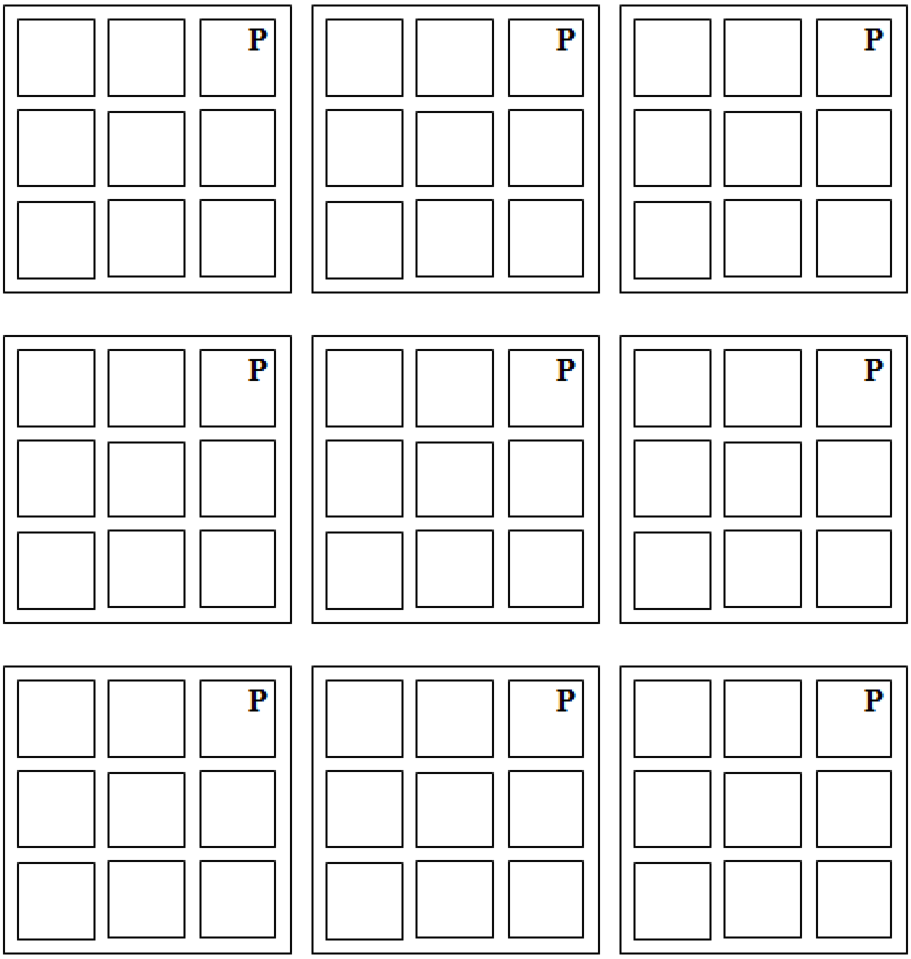
Počet cest	
Počet úseků	

Bonusová otázka:
Kolik různých cest vede v plánu z místa (A) do místa (B), přičemž tyto cesty musí procházet místem (C)? Opět platí podmínky pohybu pouze nahoru a doprava.

Příloha č. 4 – Plány k otázce č. 2 v pracovním listě k námětu *Cesta za pokladem*



Příloha č. 5 – Plány k otázce č. 3 v pracovním listě k námětu *Cesta za pokladem*



Příloha č. 6 – Dotazník

Milí žáci a žákyně,
prosím vás o vyplnění dotazníku. Vyberte vždy jednu odpověď, pokud není stanoveno jinak. Zvolenou odpověď **zakroužkujte**. Děkuji.

☐ **Chlapec** ☐ **Dívka**

1. Matematika je můj:
a) velmi oblíbený předmět
b) oblíbený předmět
c) ani oblíbený, ani neoblíbený předmět
d) neoblíbený předmět
e) velmi neoblíbený předmět

2. Matematika je:
a) velmi obtížný předmět
b) obtížný předmět
c) ani obtížný, ani snadný předmět
d) snadný předmět
e) velmi snadný předmět

3. V matematice pro mě úspěch znamená, když:
a) samostatně objevím řešení úlohy, algoritmus početních operací, popřípadě vzorec, pravidlo
b) dostanu jedničku (popřípadě dvojku)
c) mě rodiče/prarodiče/učitel(ka) pochválí
d) jiný důvod:……………………………………………………………………………..

4. Hodina matematiky mě dnes:
a) bavila
Protože *(můžeš vybrat více odpovědí)*:

- se mi líbil způsob vedení hodiny a její průběh (samostatně jsem objevoval(a) nové skutečnosti)
- mě bavilo učivo, které jsme se učili
- mě bavila práce s pomůckami
- jsem byl(a) úspěšný(á) v hodině
- jsem se cítil(a) v hodině příjemně
- hodina byla neobvyklá/jiná, což jsem ocenil(a), protože mám rád(a) změnu
- jiný důvod:……………………………………………………………………….............

a) nebavila
Protože *(můžeš vybrat více odpovědí)*:

- se mi nelíbil způsob vedení hodiny a její průběh
- mě nebavilo učivo, které jsme se učili
- jsem nebyl(a) úspěšný(á) v hodině
- upřednostňuji vyučování, ve kterém mi učitel(ka) sděluje vědomosti, algoritmy početních operací a vzorce, které se naučím nazpaměť a následně je aplikuji
- jiný důvod:……………………………………………………………………………….

5. Naučil(a) jsem se něco nového:
a) ano
b) ne

6. Chtěl(a) bych se o dnešním probíraném učivu dozvědět více:
a) ano, mám zájem se více informovat o učivu
b) ne
Protože:
- jsem dostatečně informován o učivu
- nemám zájem se více informovat o učivu
- jiný důvod:…………………………………………………………………………....

7. Hodnotím hodinu jako obtížnou:
a) ano
Protože *(můžeš vybrat více odpovědí)*:
- jsem neporozuměl(a) zadání
- neměl(a) jsem dostatek času na plnění zadaných úloh (případně na zápis do pracovního listu)
- nebylo jednoduché plnit (některé) zadané úlohy, uveď které:.…………………………. ………………………………………………………………………………………...
- nemám rád(a) matematiku
- mě aktivita nebavila
- jiný důvod:…………………………………………………………………………

b) částečně ano
V čem byla hodina pro tebe obtížná *(napiš alespoň jednu věc)*:
……………………………………...
....
c) ne

8. Při objevování nových skutečností mi pomohly navádějící otázky v pracovním listě:
a) ano
b) spíše ano
c) spíše ne
d) ne

9. Tato hodina ve mně probudila větší zájem o matematiku:
a) ano
b) spíše ano
c) spíše ne
d) ne

10. Uvítal(a) bych tento způsob vedení hodiny matematiky:
a) v každé hodině
b) občas
c) nikdy

Příloha č. 7 – Ukázka vyřešeného pracovního listu (námět *Eulerova věta*)

Jméno a příjmení: **Datum:** 10. 3. 2016

Třída: 9. A

Eulerova věta

Zadání:
Vytvořte modely pravidelného čtyřstěnu, krychle, pravidelného pětibokého hranolu, pravidelného čtyřbokého jehlanu a pravidelného šestibokého jehlanu. Pokuste se nalézt vztah mezi počtem vrcholů, stěn a hran v uvedených konvexních mnohostěnech.

Konvexní mnohostěny	Pravidelný čtyřstěn	Krychle	Pravidelný pětiboký hranol	Pravidelný čtyřboký jehlan	Pravidelný šestiboký jehlan
					
Počet vrcholů (v)	4	8	10	5	7
Počet stěn (s)	4	6	7	5	7
Počet hran (h)	6	12	15	8	12

1. **Největším číslem** jsou vyjádřeny ……počty hran……
2. Chceme-li ve sloupci **sečíst** vždy **dvě menší čísla**, musíme sečíst …počet vrcholů a stěn, doplňte tyto součty do posledního řádku tabulky.
3. Výsledné součty se liší od počtu hran (h). V každém sloupci **o kolik**……2……?
4. Zapište pomocí symboliky vztah mezi počtem vrcholů, stěn a hran vymodelovaných mnohostěnů, platí:

   $\boxed{v \geqq s < h}$ $v + s = h + 2$

5. Mnohostěny rozlišujeme podle počtu stěn, tedy:
   krychle je……šestistěn……,
   pravidelný pětiboký hranol je……sedmistěn……,
   pravidelný čtyřboký jehlan je……pětistěn……,
   pravidelný šestiboký jehlan je……sedmistěn……
6. Jak by vypadal **osmistěn**? …pravidelný šestiboký hranol, pravidelný osmistěn
   Pokuste se jej vymodelovat a ověřte platnost nalezeného vztahu.

prav. šestiboký hranol
v 12
s 8
h 18 $v + s = h + 2$ ✓

pravidelný osmistěn
v 6
s 8
h 12 $v + s = h + 2$ ✓

Příloha č. 8 – Ukázka vyřešeného pracovního listu (námět *Eulerova věta*)

Jméno a příjmení: **Datum:** 10.3.

Třída: IX.A.

Eulerova věta

Zadání:

Vytvořte modely pravidelného čtyřstěnu, krychle, pravidelného pětibokého hranolu, pravidelného čtyřbokého jehlanu a pravidelného šestibokého jehlanu. Pokuste se nalézt vztah mezi počtem vrcholů, stěn a hran v uvedených konvexních mnohostěnech.

Konvexní mnohostěny	Pravidelný čtyřstěn	Krychle	Pravidelný pětiboký hranol	Pravidelný čtyřboký jehlan	Pravidelný šestiboký jehlan
					
Počet vrcholů (v)	4	8	10	5	7
Počet stěn (s)	4	6	7	5	7
Počet hran (h)	6	12	15	8	12
	8	14	17	10	14

−2

1. **Největším číslem** jsou vyjádřeny ……počty hran……
2. Chceme-li ve sloupci **sečíst** vždy **dvě menší čísla**, musíme sečíst …počet vrcholů a stěn… doplňte tyto součty do posledního řádku tabulky.
3. Výsledné součty se liší od počtu hran (h). V každém sloupci **o kolik**……o 2……?
4. Zapište pomocí symboliky vztah mezi počtem vrcholů, stěn a hran vymodelovaných mnohostěnů, platí:

$$\boxed{pv + ps = ph + 2}$$

5. Mnohostěny rozlišujeme podle počtu stěn, tedy:
   krychle je……šestistěn……,
   pravidelný pětiboký hranol je……sedmistěn……,
   pravidelný čtyřboký jehlan je……pětistěn……,
   pravidelný šestiboký jehlan je……sedmistěn……
6. Jak by vypadal **osmistěn**? …hranol s podstavou šestiúhelníku
   Pokuste se jej vymodelovat a ověřte platnost nalezeného vztahu.

18 hran, 12 vrcholů, 8 stěn

$12 + 8 = 18 + 2$

$k = p$

Příloha č. 9 – Ukázka vyřešeného pracovního listu (námět *Eulerova věta*)

Jméno a příjmení: **Datum:** 10. 3

Třída: 9A.

Eulerova věta

Zadání:

Vytvořte modely pravidelného čtyřstěnu, krychle, pravidelného pětibokého hranolu, pravidelného čtyřbokého jehlanu a pravidelného šestibokého jehlanu. Pokuste se nalézt vztah mezi počtem vrcholů, stěn a hran v uvedených konvexních mnohostěnech.

Konvexní mnohostěny	Pravidelný čtyřstěn	Krychle	Pravidelný pětiboký hranol	Pravidelný čtyřboký jehlan	Pravidelný šestiboký jehlan
					
Počet vrcholů (v)	4	8	10	5	7
Počet stěn (s)	4	6	7	5	7
Počet hran (h)	6	12	15	8	12
(V+S)-2=h					

1. **Největším číslem** jsou vyjádřeny hran
2. Chceme-li ve sloupci **sečíst** vždy **dvě menší čísla**, musíme sečíst V a S, doplňte tyto součty do posledního řádku tabulky.
3. Výsledné součty se liší od počtu hran (h). V každém sloupci **o kolik**…………………?
4. Zapište pomocí symboliky vztah mezi počtem vrcholů, stěn a hran vymodelovaných mnohostěnů, platí:

$$\boxed{V+S-2=h}$$

5. Mnohostěny rozlišujeme podle počtu stěn, tedy:
   krychle je šestistěn,
   pravidelný pětiboký hranol je sedmistěn,
   pravidelný čtyřboký jehlan je pětistěn,
   pravidelný šestiboký jehlan je sedmi stěn
6. Jak by vypadal **osmistěn?** pravidelný šestiboký hranol
   Pokuste se jej vymodelovat a ověřte platnost nalezeného vztahu.

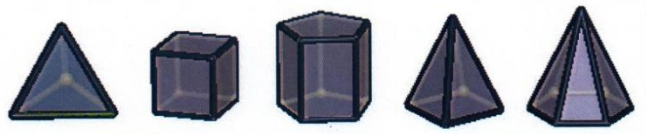
Příloha č. 10 – Ukázka vyřešeného pracovního listu (námět *Eulerova věta*)

Jméno a příjmení: **Datum:** 10. 3. 2016

Třída: 9A

Eulerova věta

Zadání:
Vytvořte modely pravidelného čtyřstěnu, krychle, pravidelného pětibokého hranolu, pravidelného čtyřbokého jehlanu a pravidelného šestibokého jehlanu. Pokuste se nalézt vztah mezi počtem vrcholů, stěn a hran v uvedených konvexních mnohostěnech.

Konvexní mnohostěny	Pravidelný čtyřstěn	Krychle	Pravidelný pětiboký hranol	Pravidelný čtyřboký jehlan	Pravidelný šestiboký jehlan
					
Počet vrcholů (v)	4	8	10	5	7
Počet stěn (s)	4	6	7	5	7
Počet hran (h)	6	12	15	8	12
	8	14	17	10	14

1. **Největším číslem** jsou vyjádřeny ..hrany..
2. Chceme-li ve sloupci **sečíst** vždy **dvě menší čísla**, musíme sečíst .stěny..a..vrcholy...., doplňte tyto součty do posledního řádku tabulky.
3. Výsledné součty se liší od počtu hran (h). V každém sloupci **o kolik**.......2..........?
4. Zapište pomocí symboliky vztah mezi počtem vrcholů, stěn a hran vymodelovaných mnohostěnů, platí:

$$\boxed{(v+s)-2=h}$$

5. Mnohostěny rozlišujeme podle počtu stěn, tedy:
   krychle je..šestistěn...,
   pravidelný pětiboký hranol je..sedmistěn....................,
   pravidelný čtyřboký jehlan je...pětistěn.......................,
   pravidelný šestiboký jehlan je..sedmistěn.....................
6. Jak by vypadal **osmistěn**? ..$s=8$ ..... $v=6$ ..... $h=12$ .... = deltoid, (krystal)
   Pokuste se jej vymodelovat a ověřte platnost nalezeného vztahu.

ANOTACE

Jméno a příjmení:	Bc. Lucie Prášilová
Katedra:	Katedra matematiky, Pedagogická fakulta UP v Olomouci
Vedoucí práce:	doc. PhDr. Bohumil Novák, CSc.
Rok obhajoby:	2016

Název práce:	Badatelský přístup k matematickému vyučování na 2. stupni ZŠ
Název v angličtině:	Inquiry approach to the mathematical teaching at junior high school
Anotace práce:	Diplomová práce se zabývá badatelsky orientovaným vyučováním matematice v edukačním prostředí ZŠ. Hlavním cílem diplomové práce je na základě prostudované literatury charakterizovat badatelsky orientované vyučování (BOV) jako vyučovací metodu a pokusit se o reflexi průběhu odučených hodin, ve kterých byly zařazeny vybrané a zpracované náměty pro badatelsky orientované vyučování matematice (BOVM). V teoreticko-literární části se okrajově zmíníme o teoretických východiscích BOV, s ohledem na aktuální stav zkoumané problematiky vymezíme podstatu a specifika BOV. S oporou o současné kurikulum pro ZŠ uchopíme využití BOVM a stručně popíšeme jeho podoby. Empirická část nabídne zpracované náměty *Figurální čísla, Eulerova věta, Cesty ve čtvercových sítích* (s metodickými komentáři) do podoby pracovních listů, které kvalitativně ověříme na 2. stupni ZŠ, tj. jejich odučením získáme záznamy a poznatky z vyučovací hodiny včetně postojů žáků k průběhu vyučovací hodiny.
Klíčová slova:	Teorie vzdělávání, kognitivně psychologické teorie, personalistické teorie, konstruktivní pojetí výuky, transmisivní pojetí výuky, BOV, BOVM, podoby BOVM, problémová výuka, bádání, poznání, matematika a její aplikace, nestandardní aplikační úlohy a problémy, metoda, učitel, žák, motivace, RVP ZV, Figurální čísla, Eulerova věta, Cesty ve

	čtvercových sítích, projekty, základní škola.
Anotace v angličtině:	The thesis deals with an inquiry approach to the mathematical teaching in an educative background of a junior high school. Based on the studied literature, the main goal of the thesis is to characterize an inquiry based education (IBE) as a teaching method and to try to reflect a progression of taught classes in which selected and elaborated topics for inquiry approach to the mathematical teaching were included. In theoretical-literary part I will briefly mention theoretical datums of IBE and regarding the actual state of researched problematics I will define the principles and specifics of IBE. With reference to contemporary curriculum for junior high schools I will handle usage of inquiry approach to the mathematical teaching and briefly describe its forms. The empiric part will offer topics *Figured numbers, Euler´s theorem, Travels in square networks* (with methodic comments) elaborated into worksheets which will be qualitatively verified at junior high school, i.e. by teaching we will recieve records and knowledge from the class including the approach of students towards the course of the class.
Klíčová slova v angličtině:	Education theory, cognitive psychological theories, personalistic theories, constructive approach to teaching, transmissive approach to teaching, IBE, inquiry approach to the mathematical teaching, form of inquiry approach to the mathematical teaching, problem teaching, inquiry, knowledge, mathematics and its applications, nonstandard application workloads and problems, method, teacher, student, motivation, RVP ZV, Figured numbers, Euler's theorem, Travels in square networks, projects, junior high school.
Přílohy vázané v práci:	**Příloha č. 1 –** Pracovní list k námětu *Figurální čísla* **Příloha č. 2 –** Pracovní list k námětu *Eulerova věta* **Příloha č. 3 –** Pracovní list k námětu *Cesta za pokladem* **Příloha č. 4 –** Plány k otázce č. 2 v pracovním listě k námětu

	Cesta za pokladem **Příloha č. 5 –** Plány k otázce č. 3 v pracovním listě k námětu *Cesta za pokladem* **Příloha č. 6 –** Dotazník **Příloha č. 7** – Ukázka vyřešeného pracovního listu (námět *Eulerova věta*) **Příloha č. 8** – Ukázka vyřešeného pracovního listu (námět *Eulerova věta*) **Příloha č. 9** – Ukázka vyřešeného pracovního listu (námět *Eulerova věta*) **Příloha č. 10 –** Ukázka vyřešeného pracovního listu (námět *Eulerova věta*)
Rozsah práce:	81
Jazyk práce:	Český jazyk