



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

MODELOVÁNÍ INTERAKCE MEZI HMOTOVÝM MODELEM HLASIVKY A TEKUTINOU

MODELING OF INTERACTION BETWEEN LUMPED ELEMENT MODEL OF THE VOCAL FOLD AND FLUID FLOW

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Ivana Řeřuchová

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Petr Hájek, Ph.D.

BRNO 2024

Zadání diplomové práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Studentka:	Bc. Ivana Řeřuchová
Studijní program:	Inženýrská mechanika a biomechanika
Studijní obor:	Biomechanika
Vedoucí práce:	Ing. Petr Hájek, Ph.D.
Akademický rok:	2023/24

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Modelování interakce mezi hmotovým modelem hlasivky a tekutinou

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Interakce mezi modely hlasivek nejrůznější úrovně a prouděním je jedním z aktuálních a zároveň nejsložitějších problémů ve výzkumu hlasu. Na základní úrovni se hlasivka může modelovat soustavou hmotných bodů a proudění Bernoulliho rovnicí. Navržený model může sloužit k výzkumu povahy interakce mezi zmíněnými dvěma prostředími.

Cíle diplomové práce:

- 1) Proveďte rešerši hmotových modelů hlasivek v interakci s tekutinou.
- 2) Stručně popište anatomii a fyziologii hlasivek a vokálního traktu.
- 3) Popište vznik lidského hlasu.
- 4) Proveďte simulaci hmotového modelu hlasivky v interakci s tekutinou.

Seznam doporučené literatury:

ISHIZAKA, K. a J. L. FLANAGAN, 1972. Synthesis of Voiced Sounds From a Two-Mass Model of the Vocal Cords. Bell System Technical Journal [online]. 51(6), 1233–1268. ISSN 00058580. Dostupné z: doi:10.1002/j.1538-7305.1972.tb02651.x

TITZE, Ingo R., 2006. The Myoelastic Aerodynamic Theory of Phonation. Denver and Iowa City: National Centre for Voice and Speech. ISBN 978-0-87414-156-6.

TITZE, Ingo R., 1994. Principles of Voice Production. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc. ISBN 0-13-717893-X.

JULIŠ, Karel a Rudolf BREPTA, 1987. Mechanika II. díl Dynamika. Praha: Státní nakladatelství technické literatury. Dynamika – Díl II. Dynamika.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2023/24

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jiří Hlinka, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Diplomová práce spadá do oblasti biomechaniky lidského hlasu a bioakustiky. Zabývá se modelováním hmotových modelů hlasivek v interakci s proudícím vzduchem a vokálním traktem. Konkrétně se jedná o dvouhmotový a tříhmotový body-cover model. Interakce je řešena pomocí metody konečných diferencí, kmitání hlasivek je zprostředkováno pohybovými rovnicemi, proudění je simulováno Bernoulliho rovnicí a akustika je zde zavedena pomocí elektro-akustické analogie jako akustický obvod. Práce také obsahuje základy anatomie hrtanu, fyziologie lidského hlasu a přehled doposud publikovaných hmotových modelů hlasivek, tedy modelů s nízkým počtem stupňů volnosti.

Klíčová slova

Biomechanika lidského hlasu, dvouhmotový model hlasivek, tříhmotový model hlasivek body-cover, hmotové modely, modelování fonace, metoda konečných diferencí, fluidně-strukturně-akustická interakce.

Abstract

The thesis belongs to the branch of biomechanics of human voice and bioacoustics. It deals with the modelling of the vocal cords in interaction with the air flow and the vocal tract. Specifically, it involves two-mass and three-mass body-cover models. The interaction is solved using the finite-difference method, the vocal cord oscillation is represented by the equations of motion, the flow is simulated by Bernoulli's equation, and the acoustics is implemented using an electro-acoustic analogy as an acoustic circuit. The thesis also includes the basics of laryngeal anatomy, the physiology of the human voice, and a review of previously published material models of the vocal cords, i.e., models with a low number of degrees of freedom.

Keywords

Biomechanics of the human voice, two-mass model of the vocal folds, three-mass body-cover model of the vocal folds, phonation modelling, finite-difference method, fluid-structural-acoustic interaction.

Bibliografická citace

ŘEŘUCHOVÁ, Ivana. *Modelování interakce mezi hmotovým modelem hlasivky a tekutinou*. Brno, 2024. Dostupné také z: <https://www.vut.cz/studenti/zav-prace/detail/156566>. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce Petr Hájek.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně pod vedením Ing. Petra Hájka, Ph.D. a s použitím uvedené literatury.

V Brně dne 22. května 2024

Bc. Ivana Řeřuchová

Poděkování

Chtěla bych poděkovat své rodině za nezištnou podporu během celého mého studia, svému příteli za rozptylování v příhodných chvílích, spolužákům za zpříjemnění společného studia, kamarádům za inspiraci a podporu. Největší poděkování ale patří mému vedoucímu Petru Hájkovi za čas, který mi věnoval, za jeho ochotu a rychlou pomoc ve chvílích, kdy se mi zrovna nedařilo, a také za cenné připomínky při zpracování této práce.

Obsah

Úvod	10
1 Biomechanika lidského hlasu	11
1.1 Vznik hlasu	11
1.1.1 Teorie zdroje a filtru	12
1.1.2 Myoelasto-aerodynamická teorie	13
1.2 Anatomie hrtanu	14
1.2.1 Kostra hrtanu	14
1.2.2 Svalstvo hrtanu	15
1.2.3 Dutina hrtanu	16
1.2.4 Struktura hlasivek	17
1.3 Vlastnosti hlasivek	18
1.3.1 Pohyby hlasivek	20
1.4 Charakteristika hlasu	20
1.4.1 Tvorba hlásek	21
2 Výpočtové modely hlasivek	23
2.1 Jednohmotový model	23
2.2 Dvouhmotový model	24
2.2.1 Modifikace dvouhmotového modelu	25
2.3 Tříhmotové modely	26
2.4 Vícehmotové modely	27
2.5 Další hmotové modely	28
2.5.1 Hladké modely	28
2.5.2 Model slizniční vlny	28
2.5.3 Aeroelastický model	29
2.5.4 Modely hlasivek jako Port-Hamiltoniánské systémy	29
3 Dvouhmotový model	30
3.1 Schéma simulace	31
3.2 Proudění mezi hlasivkami	32
3.3 Akustický obvod	33
3.4 Kmitání hlasivek	35
3.5 Simulace	37
3.6 Parametry modelu	41
3.7 Vyhodnocení výsledků	42
4 Tříhmotový model body-cover	46
4.1 Kmitání hlasivek	47
4.2 Simulace	48
4.3 Parametry modelu	52
4.4 Vyhodnocení výsledků	52

5	Citlivostní analýzy	54
5.1	Dvouhmotový model	54
5.2	Tříhmotový model body-cover	55
6	Závěr	57
	Literatura	59
	Seznam symbolů a zkratek	62
A	Dvouhmotový model – odvození rovnic	64
A.1	Tlaky podél hlasivek	64
A.2	Pohybové rovnice	65
A.3	Metoda konečných diferencí – objemové průtoky	67
B	Tříhmotový model body-cover – odvození rovnic	70
B.1	Pohybové rovnice	70
B.2	Metoda konečných diferencí – pohybové rovnice	72
C	Citlivostní analýzy – dvouhmotový model	82
C.1	Parametr P_S – statický tlak z plic	82
C.2	Parametr m_1 – hmotnost hmoty 1 při zachování celkové hmotnosti	83
C.3	Parametr d_1 – délka hmoty 1 při zachování celkové délky	84
C.4	Parametr k_1 – tuhost pružiny 1	85
C.5	Parametr k_2 – tuhost pružiny 2	86
C.6	Parametr k_c – tuhost pružiny mezi hmotami	87
C.7	Parametr h_1 – tuhost pružiny 1 při kontaktu	88
C.8	Parametr h_2 – tuhost pružiny 2 při kontaktu	89
D	Citlivostní analýzy – tříhmotový model	90
D.1	Parametr P_S – statický tlak z plic	90
D.2	Parametr m_3 – hmotnost hmoty 3 při zachování celkové hmotnosti	91
D.3	Parametr d_1 – délka hmoty 1 při zachování celkové délky	92
D.4	Parametr k_1 – tuhost pružiny 1	93
D.5	Parametr k_2 – tuhost pružiny 2	94
D.6	Parametr k_3 – tuhost pružiny 3	95
D.7	Parametr k_c – tuhost pružiny mezi hmotami	96
D.8	Parametr h_1 – tuhost pružiny 1 při kontaktu	97
D.9	Parametr h_2 – tuhost pružiny 2 při kontaktu	98

Úvod

Lidská řeč patří k základním dorozumívacím prostředkům, slouží ke komunikaci a předávání informací. Hlas je charakteristický pro každého jedince svým zabarvením a díky změnám intonace či výšky hlasu lze vyjadřovat různé emoce a pocity.

Proces vzniku hlasu je možné popsat jednoduše tak, že přes hlasivky umístěné v hrtanu proudí z plic vzduch a rozechvívá je. Díky pohybu hlasivek, které otevírají a uzavírají hlasivkovou štěrbinu, se dále do vokálního traktu šíří pulzy vzduchu, dochází k rezonanci v dutinách pod a nad hlasivkami a vzniká zvuk. Díky různému postavení mluvidel a vokálního traktu se tento zvuk mění na řeč.

Protože jsou hlasivky součástí lidského těla, mohou být vystaveny různým nemocem a poruchám. Ty jsou způsobeny širokou škálou faktorů, včetně bakterií, virů, nadměrného hlasového zatížení nebo třeba kouřením. Většina nemocí způsobuje pouze dočasnou ztrátu hlasu. To je sice pro postiženého pacienta nepříjemné, ale po nějaké době tento stav obvykle ustoupí. Závažnějším problémem jsou ovšem např. nádorová onemocnění hrtanu, která mohou vést až k jeho odstranění, a to včetně hlasivek. V takovém případě pacient přichází o hlas úplně, což je pro běžného člověka nejspíš těžko představitelné.

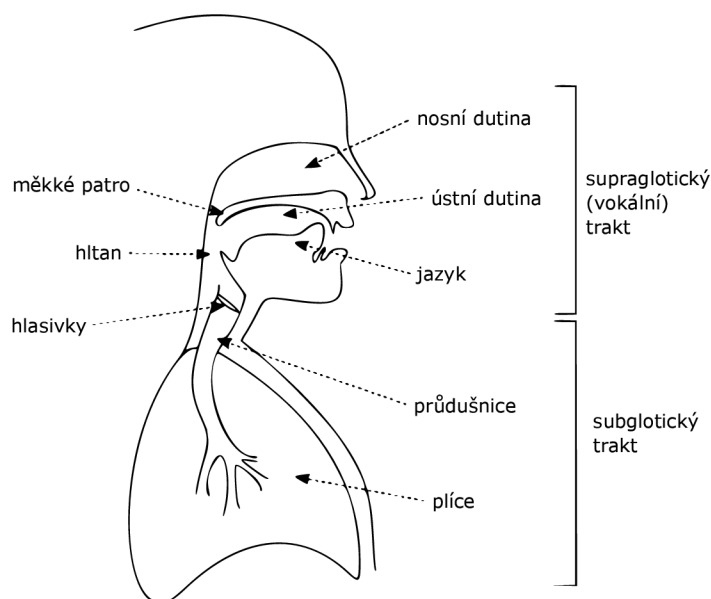
V dnešní době existuje několik způsobů, jak původní hlas nahradit. Žádný ale zatím není dostatečně kvalitní na to, aby postižené pacienty vrátil zpět do plnohodnotného života. Proces fonace se proto snaží vědci výpočtově modelovat na různé úrovni složitosti a komplexnosti.

Všechny výpočtové modely mají společnou podstatu. Ze složitého procesu vzniku hlasu se snaží vybrat podstatné jevy tak, aby bylo zároveň stále možné tento proces efektivně popsat. Modely hlasivek lze rozdělit na jednodušší a komplexnější dle počtu stupňů volnosti. Modely, které jsou charakterizovány nízkým počtem stupňů volnosti, lze označit jako tzv. hmotové modely či modely se soustředěnými parametry. Ty se vyznačují hmotnými, pružnými a tlumivými členy. Jejich řešení nevyžaduje extrémně složitý a časově náročný výpočet a charakterizují kmitání hlasivek jako celek. Modely s vysokým počtem stupňů volnosti jsou modelovány na principu mechaniky kontinua a jejich výpočet je nutné provádět pomocí numerických metod. Tyto modely obsahují geometrické detaily a více se podobají kmitání skutečných hlasivek. S jejich složitostí ovšem narůstá i výpočtový čas.

Vědci mají tedy za cíl najít kompromis mezi modely hlasivek tak, aby byl zachován co nejpřesnější fyzikální popis fonace při použití co nejjednoduššího modelu, který by vykazoval vysoké shody s chováním reálných hlasivek. Z tohoto důvodu se tato diplomová práce zabývá modelováním modelů s nízkým počtem stupňů volnosti. Pro tyto modely lze odvodit rovnice interakce mezi hlasivkami a proudícím vzduchem, a to konkrétně spojením pohybových rovnic pro pohyb modelu hlasivek a Bernoulliho rovnice pro proudění vzduchu v hlasivkové štěrbině a ve vokálním traktu. Tuto soustavu rovnic lze navíc doplnit akustickým obvodem pro hlasové ústrojí a vokální trakt vytvořeným dle elektro-akustické analogie.

1 Biomechanika lidského hlasu

Hlasivky jsou párový orgán, který je zodpovědný za tvorbu hlasu. Nacházejí se v hrtanu, jenž je součástí dýchacího ústrojí. Dýchací ústrojí zahrnuje plíce, průdušky, průdušnici, hrtan, hltan a ústní a nosní dutinu [1, 2]. V hltanu se dýchací cesty kříží trávicí soustavou, což je rozděluje na horní a dolní cesty dýchací [3]. V souvislosti s tvorbou hlasu lze dýchací cesty rozdělit na subglotální trakt, který se nachází pod hlasivkami, a supraglotální trakt, jenž se nachází nad hlasivkami [1, 4]. Schéma dýchacího ústrojí je zobrazeno na Obr. 1.1:



Obr. 1.1. Schéma dýchacího ústrojí, upraveno a převzato z [4].

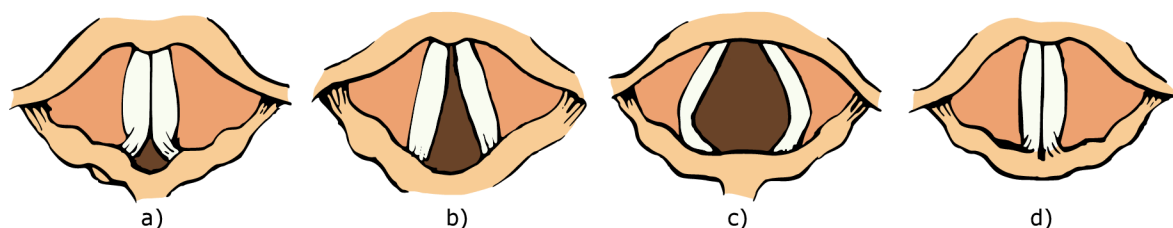
1.1 Vznik hlasu

Hrtan má dýchací a fonační funkci, podílí se ale také na dalších procesech jako polykání či vykašlávání [5]. Při dýchání je štěrbina mezi hlasivkami¹ rozevřena. V závislosti na intenzitě dýchání je poté možné rozlišit velikost tohoto rozevření. Při klidném dýchání a při šepotu je *glottis* otevřena jen minimálně (Obr. 1.2 a), při středně intenzivním dýcháním je rozevřena po celé délce (Obr. 1.2 b) a při usilovném dýchání jsou od sebe hlasivky oddáleny doširoka (Obr. 1.2 c) [5, 6].

Při fonaci jsou hlasivky přitisknuty k sobě (Obr. 1.2 d), čehož je dosaženo aktivací příslušných svalů. Ty se díky pohybům chrupavek, na kterých jsou uchyceny, napínají, a uzavírají tak hlasivkovou štěrbinu po celé své délce [5, 6].

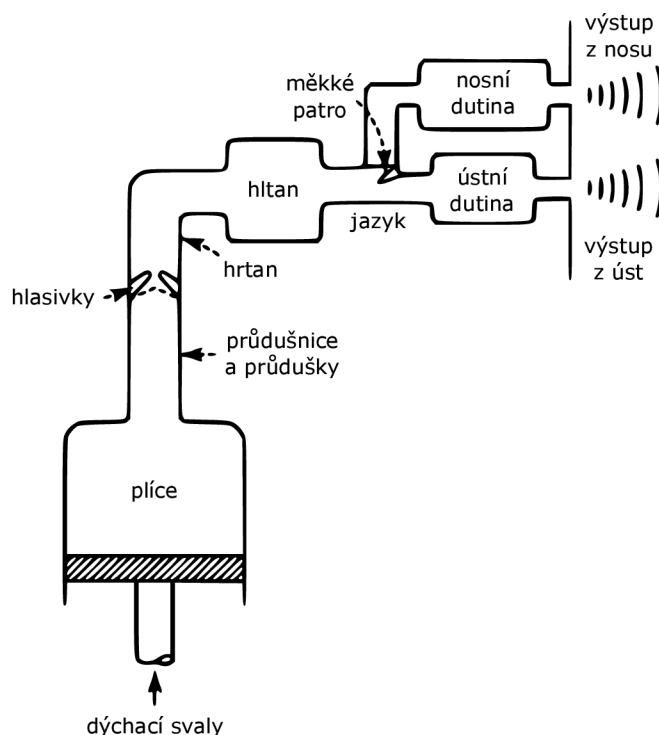
Samotný proces vzniku hlasu spočívá v proudění vzduchu z plic skrz hlasivkovou štěrbinu, čímž dochází k rozrazení hlasivek od sebe a následně k jejich samovolnému kmitání. Toto kmitání způsobuje periodické zhušťování a zředování vzduchu, a vzniká tak akustický signál. Tento akustický signál se poté šíří vokálním traktem (supraglotickým

¹Hlasivková štěrbina – *rima glottidis* neboli *glottis*.



Obr. 1.2. Fonační postavení hlasivek, upraveno a převzato z [5].

prostorem) jako podélné vlnění, které je vnímáno jako zvuk [2, 6]. Tento proces lze shrnout do schématu akustického systému, které je zobrazeno na Obr. 1.3:



Obr. 1.3. Schéma akustického hlasového systému, upraveno a převzato z [7].

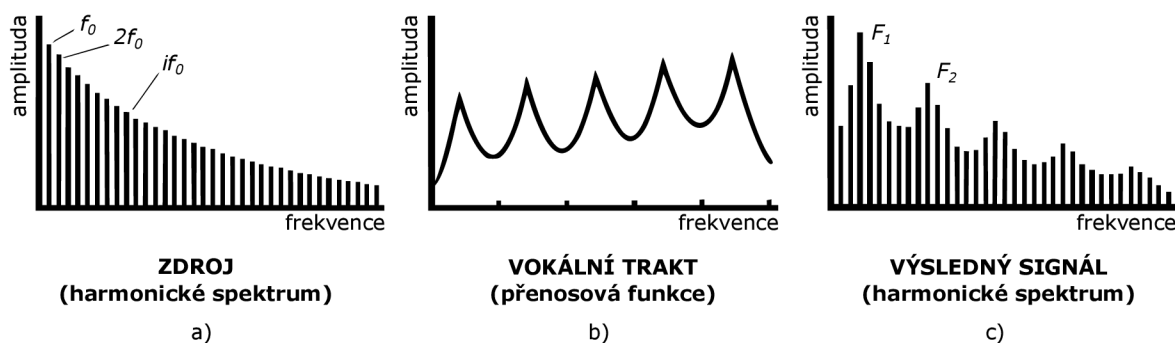
1.1.1 Teorie zdroje a filtru

Tvorbu hlasu, konkrétně samohlásek, lze nejjednodušeji popsat pomocí dvoustupňové teorie zdroje a filtru [8], viz Obr. 1.4. V prvním stupni proudí vzduch z plic skrz hlasivky, které představují zdroj. Kmitáním hlasivek je statický vzduch transformován na primární akustický signál [1, 2], který je velmi slabý a řezavý [3, 5]. Ve druhém stupni se tento signál šíří rezonančními (supraglotickými) dutinami, které představují filtr, a vytváří tak výsledný akustický signál [1, 2]. Zde získá hlas svou charakteristickou barvu, která je typická pro každého jedince. Artikulace pak probíhá primárně v dutině ústní, kde je vytvořena pomocí specifické kombinace postavení zubů, jazyka a rtů [3].



Obr. 1.4. Teorie zdroje a filtru, upraveno a převzato z [2].

Harmonické spektrum zdroje primárního akustického signálu je vidět na Obr. 1.5 a). V něm je obsažena základní frekvence kmitání f_0 a spousta jejích násobků s postupně klesající amplitudou [2, 9]. Vokální trakt modifikuje pomocí přenosové funkce (Obr. 1.5 b) spektrum původního tónu, a to tak, že některé frekvence zesílí a jiné naopak zeslabí. Důvodem jsou lokální maxima této přenosové funkce. Sečtením harmonického spektra zdroje a přenosové funkce vokálního traktu se získá výsledný akustický signál, viz Obr. 1.5 c) [2], s lokálními maximy, které jsou v literatuře označovány jako tzv. formanty F_1, F_2 atd. Oblasti, kde se formanty nacházejí, jsou typické pro každou samohlásku, protože postavení vokálního traktu se při jednotlivých samohláskách liší.



Obr. 1.5. Frekvenční spektrum hlasu, upraveno a převzato z [2].

1.1.2 Myoelasto-aerodynamická teorie

Teorie zdroje a filtru předpokládá lineární nezávislost zvuku a jeho filtru [8], což ale dostatečně nepopisuje vznik hlasu. V současnosti je uznávána myoelasto-aerodynamická teorie fonace [10–12], která vysvětluje vznik hlasu jako kombinaci myoelastických vlastností hlasivek a aerodynamiky mezi hlasivkami a ve vokálním traktu [9].

Protože jsou hlasivky na začátku fonace přitisknuty k sobě, vzniká pod nimi v subglottickém traktu lokální přetlak. Ten se postupně akumuluje a až dosáhne dostatečné velikosti, rozrazí hlasivky, a otevře tak hlasivkovou štěrbinu. Analogický děj mezitím probíhá i v supraglottickém traktu, kde ovšem vzniká naopak podtlak [12]. Gradient mezi těmito tlaky je v okamžiku otevřené *glottis* hnací silou pro pohyb vzduchu z plic do prostoru, a vznikají tak tlakové pulzy o vysoké frekvenci, které se projevují jako zvuk. Ve chvíli, kdy je *glottis* otevřená, se tlaky postupně vyrovnávají, následně vzniká mezi hlasivkami z důvodu proudění podtlak a hlasivková štěrbinu se uzavírá. Tento periodický jev má za následek vznik nestacionární nelineární dynamické soustavy [9, 11].

Na samotné kmitání hlasivek má větší vliv intraglotický tlak přímo mezi hlasivkami než tlakový gradient mezi průdušnicí a vokálním traktem. Na ten má kromě subglotického a supraglotického tlaku vliv i Bernoulliho tlak, přičemž jejich vzájemný poměr mezi hlasivkami se v čase mění [12] v závislosti na geometrii *glottis*. Tímto vzniká tzv. „push-pull“ efekt, který zprostředkovává přenos energie z proudícího vzduchu na pohyb hlasivek [12]. Hlasivky vykazují díky tomuto efektu tzv. samobuzené kmitání, které je označováno za pasivní děj, jelikož není vyvoláno aktivním pohybem svaloviny, ale prouděním vzduchu. Při otevírání *glottis* převažuje dle myoelasto-aerodynamické teorie zatížení od proudění a při jejím uzavírání převažuje zatížení od elastických sil v hlasivkách [11].

1.2 Anatomie hrtanu

Hrtan, *larynx*, je prvním oddílem dolních cest dýchacích. Strukturu tohoto nepárového orgánu lze rozdělit na tvrdou tkáň, kterou tvoří chrupavčitá kostra, a měkkou tkáň, kterou tvoří sliznice, vazy a svaly [3, 5].

1.2.1 Kostra hrtanu

Skelet hrtanu je tvořen několika chrupavkami. Patří k nim chrupavka štítná², chrupavka prstencová³, chrupavka hlasivková⁴, chrupavka příklopky hrtanové⁵ a několik dalších drobnějších chrupavek [1, 5]. Mezi kostru hrtanu lze zařadit i jazylku⁶, kost, na které je hrtan zavěšen [2]. Chrupavky jsou vzájemně spojeny pomocí kloubů, svalů a syndesmóz⁷. Tvrdá tkáň hrtanu je zobrazena na Obr. 1.6 a).

Největší chrupavkou hrtanu je **chrupavka štítná**. Tato nepárová chrupavka se skládá ze dvou plotének, jejichž spojení vepředu (tzv. „ohryzek“) je především u mužů dobře hmatatelné. Obě ploténky přecházejí vzadu v horní a dolní roh. Horními rohy je štítná chrupavka vazivově spojena s jazylkou, dolní rohy jsou kloubně spojeny s chrupavkou prstencovou [3, 5].

Chrupavka prstencová je nepárová chrupavka a má prstencový tvar. Nachází se pod chrupavkou štítnou a zespodu na ni navazují prstence průdušnice. Stejně jako s chrupavkou štítnou je chrupavka prstencová spojena kloubně s chrupavkou hlasivkovou, a to pomocí kloubních plošek v zadní části prstence [5].

Chrupavka hlasivková je párovou chrupavkou, která tvarem připomíná trojboký jehlan. Základnu tohoto jehlanu je spojena s chrupavkou prstencovou. Na výběžky základny se upínají svaly a hlasivkový vaz⁸ [1].

Nepárová **chrupavka příklopky hrtanové** lžícovitého tvaru je poslední z velkých hrtanových chrupavek. Stopkou je připojena shora ke štítné chrupavce. Tvoří základ

²Chrupavka štítná – *cartilago thyroidea*.

³Chrupavka prstencová – *cartilago cricoidea*.

⁴Chrupavka hlasivková – *cartilago arytenoidea*.

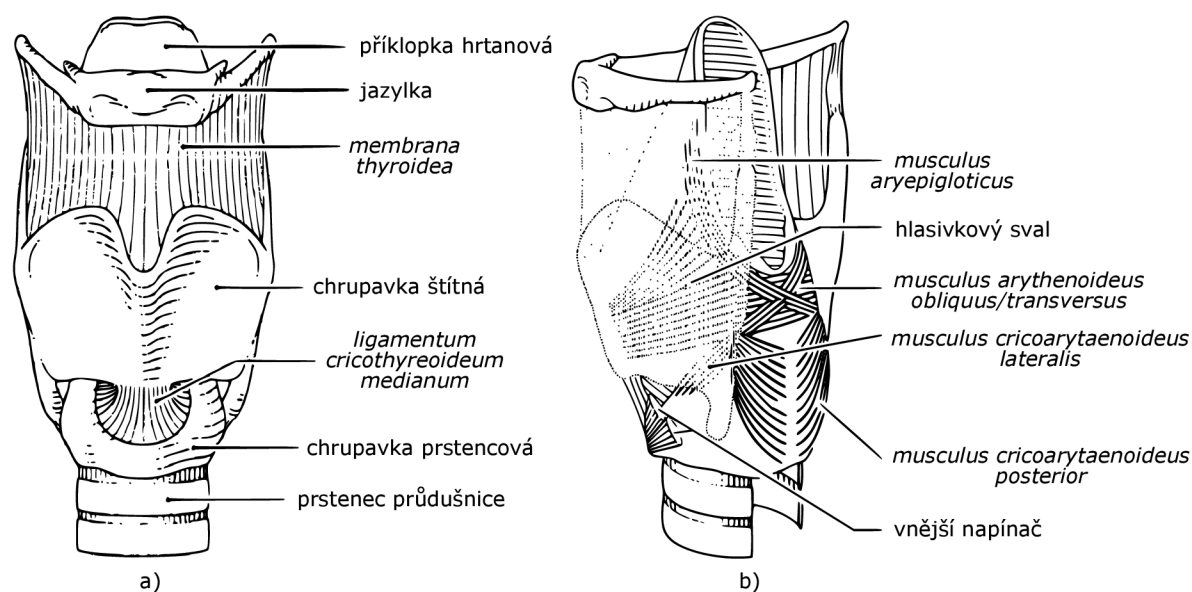
⁵Chrupavka příklopky hrtanové – *cartilago epiglottica*.

⁶Jazylka – *os hyoideum*.

⁷Syndesmóza – pevné vazivové spojení kostí.

⁸Hlasivkový vaz – *ligamentum vocale*.

pro hrtanovou příklopku⁹, která má důležitou funkci při polykání. Během dýchání zůstává otevřená a propouští vzduch do průdušnice, během polykání se zavírá, aby nedošlo k vdechnutí potravy či tekutin [3].



Obr. 1.6. a) Kostra hrtanu, b) Svalstvo hrtanu, upraveno a převzato z [1].

1.2.2 Svalstvo hrtanu

Pohyby mezi chrupavkami jsou zajištěny pomocí párových příčně pruhovaných svalů [5], které jsou zobrazeny na Obr. 1.6 b). Tyto svaly lze podle jejich polohy rozdělit na přední, postranní a zadní nebo podle funkce na vnitřní a vnější [5].

Vnější svaly zajišťují polohu *epiglottis* a spojují hrtan s okolními strukturami, a to především s jazykem a hrudní kostí [1, 2]. Mezi vnější svaly patří *m. thyroepiglotticus*¹⁰ a *m. aryepiglotticus*. První ze svalů odklápí *epiglottis* a rozšiřuje tak vstup do hrtanu, druhý ze svalů působí proti a naopak vstup do hrtanu uzavírá [3].

Vnitřní svalstvo zajišťuje polohu, délku a napětí hlasových vazů, a je tedy zodpovědné za respirační nebo fonační polohu hlasivek [3]. Vnitřní svaly lze rozdělit na abduktory, které rozšiřují *glottis* a staví hlasivky do respirační polohy, a adduktory, které *glottis* uzavírají a staví hlasivky do polohy fonace [2].

Nejsilnějším adduktorem je *m. arytaenoideus*, který na zadní straně hrtanu spojuje hlasivkové chrupavky. Skládá se ze dvou částí – *m. arytaenoideus transversus* a *m. arytaenoideus obliquus* [5]. Při kontrakci přitahuje hlasivkové chrupavky k sobě, a zužuje tak štěrbinu mezi hlasovými vazy (hlasivkami) [3], čímž ovlivňuje hlasovou intenzitu [13].

⁹Hrtanová příklopka – *epiglottis*.

¹⁰*M.* = *musculus* – sval; kromě svalů, které jsou zmíněny v textu, nemají názvy hrtanových svalů české ekvivalenty.

Naopak nejsilnějším abduktorem je *m. cricoarytaenoideus posterior*. Ten se upíná z jedné strany na prstencovou chrupavku a z druhé strany na zadní část chrupavky hlasivkové. Při své kontrakci rozšiřuje *glottis* tak, že rotuje a posouvá hlasivkovou chrupavku, čímž zároveň napíná hlasivky [1]. Smršťuje se při každém nádechu a jeho napětí převažuje ve spánku. Je tedy velmi důležitý pro respirační funkci a jeho narušení může vést ke značnému poškození fonace a k zúžení *glottis* pro volný průchod vzduchu, což může vést v krajním případě až k udušení [3, 5].

Antagonistou primárního abduktoru je *m. cricoarytaenoideus lateralis*, který se také upíná z jedné strany na prstencovou chrupavku a z druhé strany na hlasivkovou chrupavku, tentokrát však ale na její přední část [1]. Svým smrštěním rotuje hlasivkovou chrupavkou tak, že část, na kterou se upínají hlasivky, posouvá do středu a přikládá tak hlasivky k sobě, tedy do fonační polohy [2].

M. cricothyroideus, tzv. vnější napínač, je upnutý mezi štítnou a prstencovou chrupavkou [2]. Tento sval při kontrakci naklání štítnou chrupavku dopředu a napíná a prodlužuje tak hlasové vazy [3]. Hraje proto důležitou roli při změně frekvence hlasivek [13].

Proti pohybu vnějšího napínače působí *m. thyroarytaenoideus*, tzv. hlasivkový sval, který se upíná mezi chrupavkou štítnou a chrupavkou hlasivkovou [3]. Svou kontrakcí naklání štítnou chrupavku dozadu, a uvolňuje tak napětí hlasivek. Rozděluje se na dvě části – vnitřní část tvoří *m. thyroarytaenoideus internus*, který je někdy označován jako *m. vocalis* a který leží přímo u hlasových vazů, a vnější část tvoří *m. thyroarytaenoideus externus*, který leží dál od hlasivek [1]. *M. vocalis* mění tloušťku hlasivek a zajišťuje jemné nastavení hlasivkové štěrbině [1]. Hlasivkový sval je významný při ladění výšky tónu a při nastavování hlasových rejstříků [2].

Všechny svaly hrtanu jsou inervovány pomocí větví z *nervus vagus*. Jeho větev *n. laryngeus superior* inervuje *m. cricothyroideus* a větev *n. laryngeus inferior* inervuje všechny ostatní hrtanové svaly [3, 5].

1.2.3 Dutina hrtanu

Dutina hrtanu¹¹, zobrazená na Obr. 1.7, je vystlána načervenalou sliznicí a rozděluje se na tři části. Horní část se nazývá hrtanová předsíň¹², která navazuje na hrtanovou část hltanu a směrem dolů se nálevkovitě zužuje až po nepravé hlasové vazy¹³ [3, 5]. Dolní část, *cavitas infraglottica*, se naopak směrem dolů rozšiřuje. Shora je ohraničena hlasivkovou štěrbinou a zdola plynule navazuje na průdušnici [3].

V prostřední části má dutina nejužší část, kterou tvoří hlasivková štěrbině, *glottis*. V této části se nacházejí pravé hlasové vazy¹⁴. Ty jsou od nepravých hlasových vazů odděleny výchlipkem hrtanovým¹⁵ [1, 5], který slouží jako rezonanční dutina k zesilování hlasu [3].

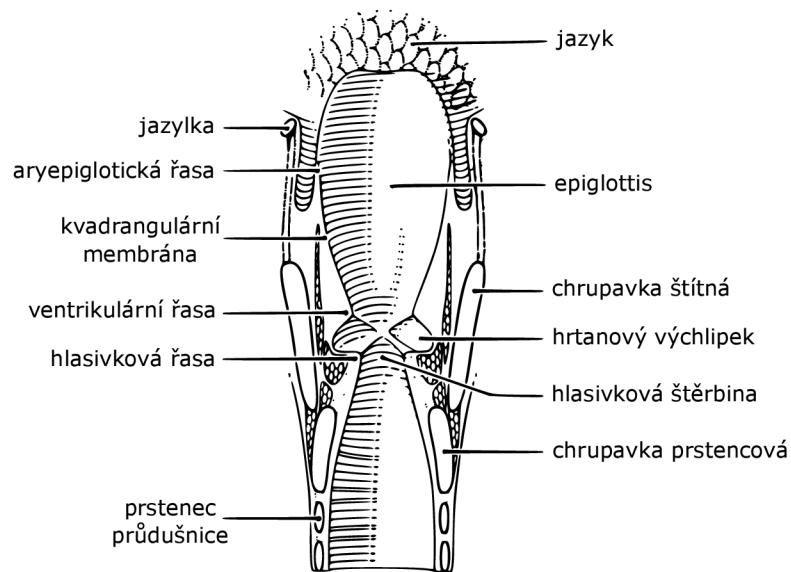
¹¹Dutina hrtanu – *cavitas laryngis*.

¹²Hrtanová předsíň – *vestibulum laryngis*.

¹³Nepravé hlasové vazy – *plicae ventriculares*, ventrikulární řasy.

¹⁴Pravé hlasové vazy – *plicae vocales*, hlasivkové řasy neboli hlasivky.

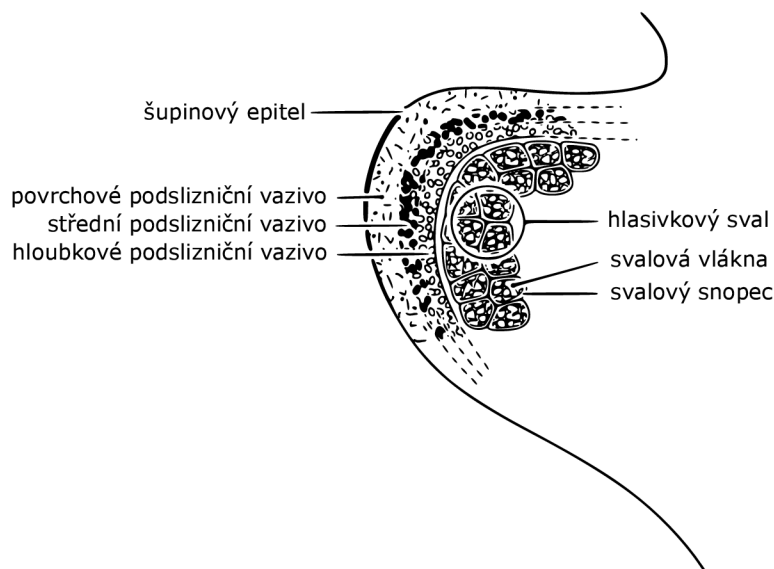
¹⁵Výchlipkem hrtanový – *ventriculus laryngis*.



Obr. 1.7. Dutina hrtanu, upraveno a převzato z [1].

1.2.4 Struktura hlasivek

Řez hlasivkou je zobrazen na Obr. 1.8. Na povrchu hlasivky se nachází tenký šupinový epitel o tloušťce 0.05 až 0.1 mm [14], pod kterým se nachází měkká tkáň vlastnostmi podobná tekutině [1].



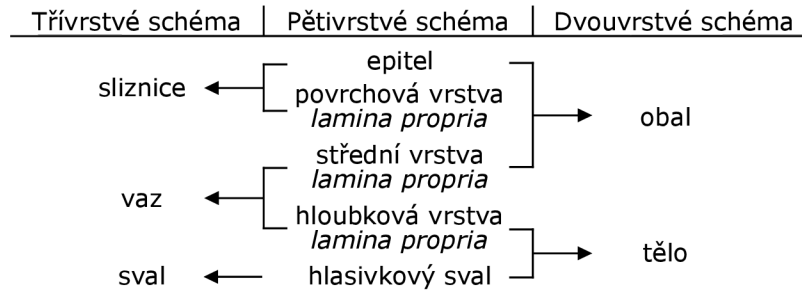
Obr. 1.8. Vrstvy hlasivky, upraveno a převzato z [1].

Střední vrstvu hlasivky tvoří nesvalový vrstevnatý systém *lamina propria*. Ten se skládá ze tří vrstev – povrchové, střední a hloubkové [2]. Povrchová vrstva je složena z neuspořádaných elastinových vláken obklopených tkáňovou tekutinou. Uprostřed hlasivky dosahuje tloušťky okolo 0.5 mm [15]. Ve střední vrstvě jsou elastinová vlákna mírně

uspořádaná v podélném směru. Navíc se zde vyskytuje i malé množství kolagenních vláken. Ty se ovšem primárně vyskytují v hloubkové vrstvě a díky své struktuře limitují prodloužení a dodávají hlasivce tuhost. Tloušťka střední a hloubkové vrstvy *lamina propria* je dohromady zhruba 1 až 2 mm [15].

Pod *lamina propria* se nachází hlasivkový sval, *m. thyroarytaenoideus*, popsáný v části kapitoly 1.2.2. Ten dosahuje tloušťky 7 až 8 mm [1], a tvoří tak největší část hlasivky.

Celkem je tedy rozlišováno pět vrstev hlasivky. Ty lze sdružovat do menších celků, a to do dvouvrstvého či třívrstvého schématu dle Obr. 1.9. Dvouvrstvé schéma rozděluje tělo a obal hlasivky, přičemž do spodní vrstvy patří hlasivkový sval a hloubková vrstva *lamina propria*. Epitel a zbylé dvě vrstvy *lamina propria* tvoří obal hlasivky [16]. Třívrstvé schéma rozlišuje sliznici, vaz a sval. Horní vrstvu, sliznici, tvoří epitel a povrchová vrstva *lamina propria*. Zbylé dvě vrstvy *lamina propria* tvoří vaz a vrstvu svalu tvoří hlasivkový sval [14, 17, 18].

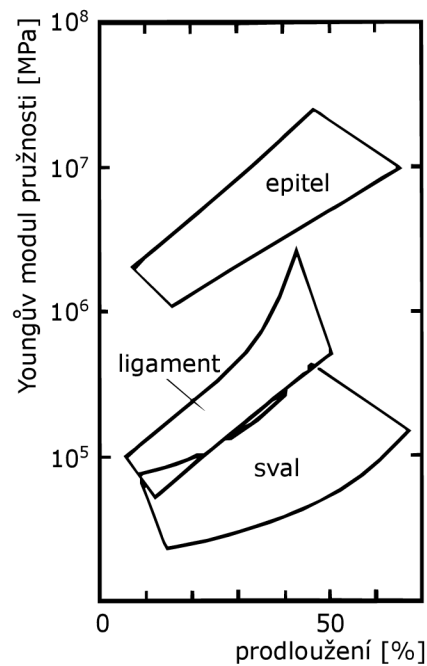


Obr. 1.9. Používaná schémata pro označování vrstev hlasivky, upraveno a převzato z [1].

1.3 Vlastnosti hlasivek

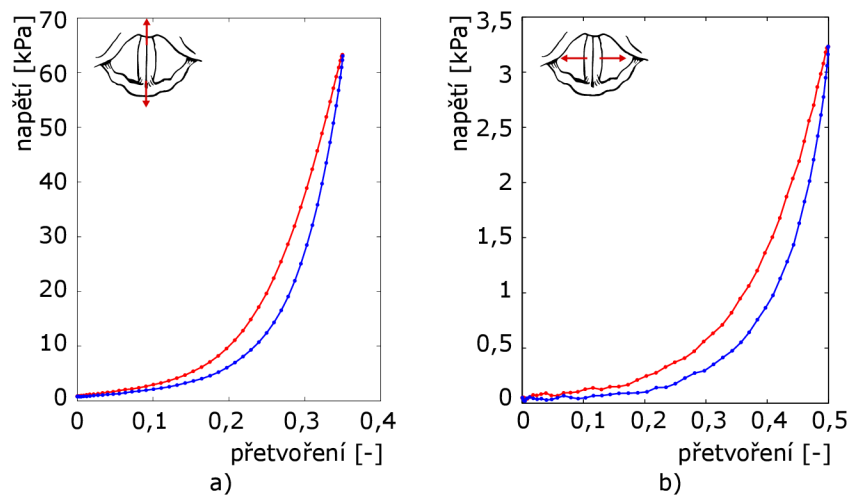
Vzhledem k tomu, že se hlasivky skládají z několika vrstev, lze u těchto vrstev rozlišovat i různé mechanické vlastnosti. Ty lze nejjednodušeji popsat pomocí Youngova modulu pružnosti a Poissonova poměru. Na Obr. 1.10 je zobrazen Youngův modul pružnosti pro jednotlivé vrstvy hlasivky (epitel, ligament a sval) naměřený v podélném směru na hr-tanech dospělých psů [19], které se dle měření příliš neliší od těch lidských [20]. Jak je vidět, hodnoty modulu pružnosti se ale liší u jednotlivých vrstev, přičemž jejich hodnota klesá ve směru od povrchu hlasivky k jejímu vnitřku. Tyto hodnoty jsou ale orientační, protože při měření měkkých tkání závisí na spoustě faktorů, jako je stáří vzorků, teplotní závislost, věk, pohlaví a další. U hlasivkového svalu se navíc hodnota Youngova modulu mění se svalovou aktivitou, která při aktivaci svalu vzrůstá [1, 21]. Poissonův poměr hlasivky se dle [22] blíží hodnotě 0.5, což znamená, že lze hlasivky považovat za téměř nestlačitelný materiál.

Na Obr. 1.11 jsou zobrazena měření závislosti napětí na přetvoření na celé hlasivce, a to v podélném směru (Obr. 1.11 a) a v příčném směru (Obr. 1.11 b). Je vidět, že zatěžovací křivka (červená) a odlehčovací křivka (modrá) se od sebe liší, což znamená, že hlasivky vykazují viskoelastické chování. Z grafů je také patrné, že závislost napětí a přetvoření je nelineární, což značí, že modul pružnosti se v průběhu zatěžování (respektive odlehčování) mění. Zároveň je vidět, že v podélném směru je tuhost hlasivek podstatně větší



Obr. 1.10. Youngův modul pružnosti pro jednotlivé vrstvy hlasivky v podélném směru, upraveno a převzato z [19].

než v příčném směru, ve kterém hlasivky primárně kmitají. Dle měření [23] se v podélném směru hodnota Youngova modulu pohybuje mezi 28 kPa (pro nižší hodnoty přetvoření) a 390 kPa (pro vyšší hodnoty přetvoření). V příčném směru se hodnoty Youngova modulu pohybují mezi 0.7 kPa a 15.5 kPa [23]. Tyto rozdílné hodnoty v jednotlivých směrech znamenají, že hlasivky vykazují anizotropní chování. Další podobná měření lze nalézt v [1, 21, 24–28]. Hustota hlasivek je po tloušťce zhruba konstantní v rozmezí 1.02 až 1.04 g/cm³ [29].

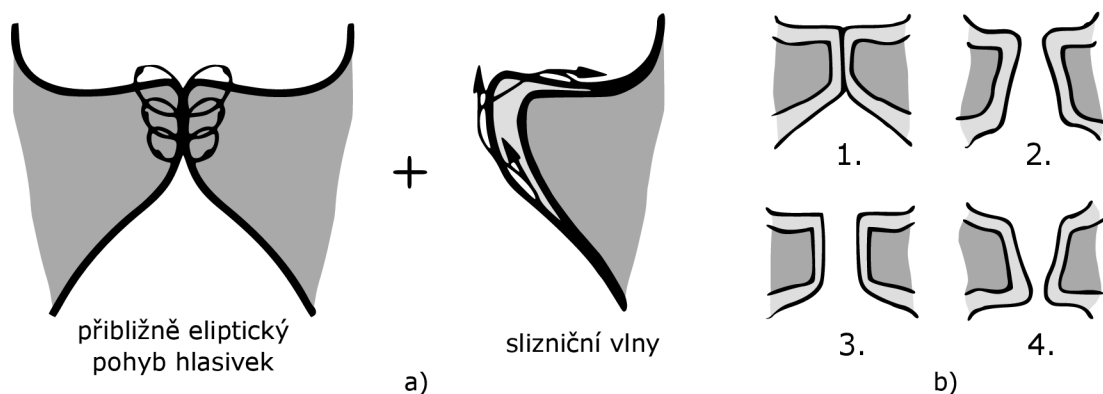


Obr. 1.11. Závislost napětí hlasivek na přetvoření a) v podélném směru, b) v příčném směru, upraveno a převzato z [23] s přidáním detailu z [5].

1.3.1 Pohyby hlasivek

Při kmitání konají hlasivky složený pohyb. Body hlasivek vytváří přibližně eliptické trajektorie, které jsou na povrchu hlasivky doplněny v důsledku interakce s proudem vzduchu o slizniční vlnu, která probíhá zdola nahoru [30], jak je vidět na Obr. 1.12 a) [2, 31]. Slizniční vlna by měla úměrně záviset na frekvenci kmitání hlasivek, tuhosti a také na pohlaví [9].

Na Obr. 1.12 b) jsou zobrazeny fáze pohybu hlasivek během jedné periody. V rámci jejího průběhu jsou hlasivky zhruba jednu polovinu periody otevřeny a druhou polovinu uzavřeny. Na začátku periody kmitu jsou hlasivky přitisknuty k sobě (fáze 1). Poté se od sebe vlivem proudícího vzduchu zespona oddělí spodní část hlasivek (fáze 2). Tento tvar se označuje jako konvergentní a *glottis* se v této fázi otevírá. Fáze 3 zobrazuje hlasivky v tzv. paralelním tvaru, kdy jsou horní a dolní okraje hlasivky přibližně rovnoběžné. Poté nastává fáze uzavírání *glottis* (fáze 4) a hlasivky se dostávají do divergentního tvaru [2, 31], až se opět přitisknou k sobě a celý cyklus se opakuje.



Obr. 1.12. Kmity hlasivek: a) rozložený pohyb hlasivek, upraveno a převzato z [2]; b) fáze pohybu, upraveno a převzato z [31].

1.4 Charakteristika hlasu

Kmitáním hlasivek vzniká primární akustický signál, který je do výsledného hlasu upravován vokálním traktem (viz kapitola 1.1). Pro každou hlásku má vokální trakt charakteristické postavení, proto je od sebe lze vzájemně odlišit. Příklady postavení vokálního traktu při samohláskách /a:/, /i:/ a /u:/ jsou zobrazeny na Obr. 1.13. Lidský hlas lze charakterizovat několika parametry – výškou, intenzitou, kvalitou a barvou [13].

Výška hlasu fyzikálně odpovídá frekvenci kmitání hlasivek. Odvíjí se od základní frekvence, která je dána fyziologicky, především délkou a napětím hlasivek, a udává výškový rozsah lidského hlasu [13]. Délka hlasivek závisí na pohlaví. U mužů se pohybuje okolo 17–25 mm a u žen okolo 13–19 mm [1]. Čím jsou tedy hlasivky kratší, tím vyšší je výsledný hlas. Základní frekvence hlasivek se také mění s věkem. U mužů dochází k rapidním změnám v adolescentním věku, u žen se může hlas začít měnit během klimakteria. K výrazným změnám poté dochází ve stáří. Zmenšuje se rozsah hlasu, jeho síla i vitální

kapacita plic. U mužů se hlas zvyšuje, u žen naopak prohlubuje, takže se k sobě výškou hlasu obě skupiny přibližují [13, 32]. Střední hodnota základní frekvence zdrojového hlasu u mužů odpovídá zhruba 110 Hz, u žen 220 Hz a u dětí zhruba 330 Hz [13].

Intenzita hlasu, tedy jeho hlasitost, závisí na množství a síle vydechovaného vzduchu. Čím více vzduchu je naráz vydechováno, tím širší je *glottis*. Hlasivky tím kmitají s větší amplitudou, a tím hlasitější je výsledný zvuk [32].

Kvalita hlasu je dána poměrem harmonických tónů v hlase vůči neharmonickým. Harmonické složky jsou dány amplitudami tzv. užitečných tónů a dalších frekvenčních složek, periodickými a ustálenými signály. Tyto složky jsou ovšem narušovány složkami neharmonickými. K nim patří akustický šum způsobený např. mluidly nebo nežádoucími frekvencemi [13].

Barvu hlasu utváří rezonanční dutiny, tedy hltan, dutina ústní, nosní a vedlejší dutiny nosní, ale také lebeční a lícní kosti nebo specifické postavení jazyka a rtů [33]. Díky charakteristickému zabarvení hlasu je každý jedinec unikátní a lze jej díky tomu rozpoznat od ostatních, stejně tak lze rozlišit různé nálady a rozpoložení konkrétního člověka [1].



Obr. 1.13. Tvary vokálního traktu pro samohlásky /a:/, /i:/ a /u:/, upraveno a převzato z [1].

1.4.1 Tvorba hlásek

Samotné hlásky (souhlásky a samohlásky) se tvoří tvarováním hltanu a v dutině ústní za pomoci jazyka, zubů, rtů a patra [2]. Jejich specifickou kombinací vzniká řeč. Samohlásky a souhlásky lze rozdělit podle toho, jakým způsobem se při jejich tvorbě chovají hlasivky. Jestliže hlasivky vibrují, jedná se o hlásky znělé. Pokud nevibrují, jde o hlásky neznělé [13, 32]. Samohlásky lze od souhlásek navíc odlišit tak, že při tvorbě samohlásek je vokální trakt otevřený a proud vzduchu není nikde přerušen, kdežto při tvorbě souhlásek (konsonantů) je tok vzduchu po délce vokálního traktu pozastaven některou z překážek (jazyk, zuby, rty) [4].

Při tvorbě neznělých hlásek se hlasivky na výsledném zvuku nepodílejí. Hlasivky jsou buď rozevřeny (např. při tvoření souhlásek /f/, /s/ nebo /š/), nebo naopak sblíženy, ale bez kmitání (např. souhlásky /p/, /t/ nebo /c/); nedochází k vibracím, a není tudíž generován zvuk [13, 34]. Specifickým způsobem tvoření hlasu je šepot, při kterém jsou tvořeny nezněle všechny hlásky. Hlasivky jsou při šeptání sevřeny, ale vytváří se mezi nimi úzký prostor pro proudění vzduchu [32].

Při formování znělých hlásek jsou naopak hlasivky na začátku fonace u sebe, během fonace vibrují, a vytvářejí tak akustický zdroj zvuku, jak bylo popsáno v předchozích kapitolách. Tímto způsobem se vytváří všechny samohlásky a některé souhlásky, např. /b/, /v/, /z/ nebo /g/ [13].

Souhlásky lze rozdělit i podle místa, kde jsou vytvářeny, na labiální (rty a zuby – např. /p/, /b/, /f/ a /m/), dentální (zuby a jazyk – např. /d/, /t/, /s/ a /n/), lingvální (jazyk a přední patro – např. /l/ a /š/) a guturální (jazyk a zadní patro – např. /k/ a /g/) [34].

2 Výpočtové modely hlasivek

Snaha o porozumění základům hlasové produkce a poskytnutí diagnostiky a léčby jedincům, kteří trpí různými hlasovými poruchami, pochází již z přelomu 19. a 20. století, kdy byl Ewaldem [35] publikován první mechanický model hlasivek. Tento model byl tvořen dvěma protiraznými jazýčky, které k sobě byly přitahovány pomocí pružin a odpuzovány proudem vzduchu proudícím mezi nimi. Ewald tento model vytvořil experimentálně, ale nedokázal jej matematicky popsat [2, 35].

Na Ewaldův model postupně navázala spousta vědců s modely hlasivek různé úrovně složitosti a komplexnosti. Všechny tyto modely mají společnou podstatu, a to zjednodušit složitý problém fonace na podstatné fyzikální základy tak, aby bylo možné tento jev co nejefektivněji popsat. Dalším důvodem, proč je proces lidské fonace modelován, je omezený prostor v hrtanu, kde se hlasivky nachází. To způsobuje zhoršený přístup přístrojů pro měření důležitých jevů. Vyšetření jsou navíc nutná provádět *in vivo* a s aktivní spoluprací pacienta. Dle myoelasto-aerodynamické teorie (popsané v kapitole 1.1.2) dochází k fluidně-strukturně-akustické interakci mezi hlasivkami a proudícím vzduchem. Vzniká tak složitý proces nestacionárního proudění v nelineárním dynamickém systému, který je nutné modelovat pomocí numerických výpočtových modelů [36].

Pro vytváření modelů je nutné najít rovnováhu mezi tím, aby byly modely dostatečně jednoduché na popis a řešení, a zároveň aby neztratily svou fyzikální podstatu [37]. Na základní úrovni lze hlasivky modelovat pomocí tzv. hmotových modelů. Ty jsou založeny na malém počtu vstupních parametrů a především na nízkém počtu stupňů volnosti. Lze je popsat pomocí soustav rovnic a slouží k základnímu popisu interakce mezi hlasivkami a proudícím vzduchem. Skládají se většinou pouze z hmotných, pružných a tlumících členů. Neobsahují téměř žádné geometrické detaily, které jsou přítomny na skutečných hlasivkách, a tím pádem nepopisují jejich podrobné chování. Naopak charakterizují kmitání hlasivek jako celek [36].

Detailnější chování hlasivek lze popisovat složitějšími modely o několika tisících až milionech prvků. Takové modely hlasivek se vyznačují velkým počtem stupňů volnosti, takže je nutné je řešit pomocí výpočtové techniky. Lze jimi modelovat podrobnější anatomické a fyziologické struktury nebo hlasové poruchy, vytvářet oscilační módy a spoustu dalších komplikovaných módů, které se vyskytují na skutečných hlasivkách [36].

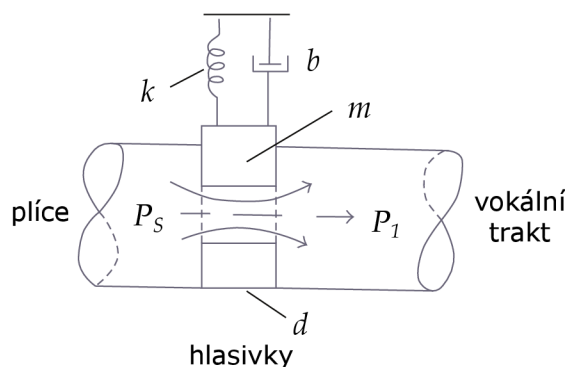
Nevýhodou složitých výpočtových modelů je dlouhý výpočtový čas. Ten se sice s rostoucími výkony počítačů snižuje, ovšem z hlediska rychlých a efektivních výpočtů je stále často využíváno i jednoduchých hmotových modelů. Vzhledem k tomu, že se tato práce zabývá hmotovými modely, bude následující přehled zaměřen právě na tento typ modelů.

2.1 Jednohmotový model

Na práci Ewalda [35] přímo navázali Flanagan a Landgrafová [38], jež v roce 1968 publikovali jednohmotový model hlasivek, který matematicky popisuje Ewaldův experiment. Tento experiment je modelován mechanickým oscilátorem s jednou hmotou, jednou pružinou a jedním tlumičem. Pružina definuje tuhost modelu a tlumič udává tlumení.

Model kmitá s jedním stupněm volnosti v laterálně-mediálním směru¹ a předpokládá symetrii, která odpovídá chování zdravých hlasivek. Stačí proto modelovat pouze jednu hlasivku, protože druhá hlasivka je zrcadlovým obrazem té první.

Fluidně-strukturní interakce jednohmotového modelu, zobrazená na Obr. 2.1, je definována výše zmíněnými diskrétními parametry hlasivek, jejichž kmitání je řízeno funkcí subglotického tlaku a Bernoulliho tlaku mezi hlasivkami [38]. Bernoulliho tlak vychází z Bernoulliho principu, který uvádí do souvislosti statický tlak v tekutině a rychlost proudění, přičemž součet jejich energií je v čase konstantní.



Obr. 2.1. Jednohmotový model, upraveno a převzato z [38, 39].

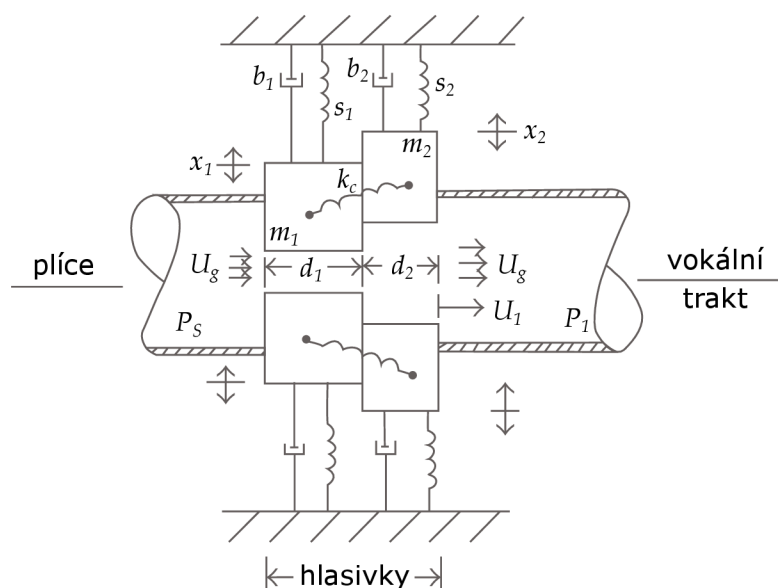
Takto definovaný jednohmotový model dostatečně popisuje průběhy objemové rychlosti vzduchu a příčný průřez *glottis*, jak bylo pozorováno při vysokorychlostních snímcích pohybu lidských hlasivek [40]. Z výsledků v [38] je také patrné, že akustická interakce mezi hlasivkami a tvarem vokálního traktu ovlivňuje průběh a periodu proudění vzduchu. Vzhledem k tomu, že je model tvořen pouze jednou hmotou, nedokáže dostatečně popsat základní fyziologické principy chování samotných hlasivek, tedy především pohyb slizniční vlny (viz kapitola 1.3.1), a simulovat samobuzené kmity hlasivek vyvolané proudícím vzduchem [4, 36, 40].

2.2 Dvouhmotový model

Na jednohmotový model navázali o 4 roky později Ishizaka s Flanaganem [40], kteří publikovali dvouhmotový symetrický model (viz Obr. 2.2). Tento model opět kmitá pouze v laterálně-mediálním směru, tentokrát se dvěma stupni volnosti. Model se skládá ze dvou hmot, přičemž obě jsou spojeny s pevnou podložkou (hlasivkovou chrupavkou, viz kapitola 1.2.1) vlastní pružinou a tlumičem, vzájemně jsou spojeny pomocí další pružiny. Hmoty jsou poskládány tak, že jedna hmota představuje dolní okraj hlasivky a druhá hmota horní okraj hlasivky. Díky tomu je model schopný simulovat jejich fázový rozdíl a modelovat pohyb slizniční vlny.

Slizniční vlna umožňuje díky proměnné hlasivkové geometrii vytvářet různé rozložení mezihlasivkových tlaků během otvírání a zavírání *glottis*, což má za následek účinný přenos

¹Laterální směr: směr od střední roviny těla; mediální směr: směr ke střední rovině těla.



Obr. 2.2. Dvuhmotový model, upraveno a převzato z [39, 40].

energie z proudu vzduchu na vibrující hlasivky. To umožňuje jejich samovolné kmitání, do kterého může i nemusí být zahrnut vokální trakt [13, 36].

Při produkci hlasu hraje základní roli aerodynamika systému. Ta je v tomto modelu charakterizována kvazistacionárním, nevazkým a lokálně nestlačitelným² proudem vzduchu skrz *glottis*, která je oproti průdušnici zúžená. Mezi hlasivkami proto dojde ke zrychlení proudění a vytvoření podtlaku [40]. Při určitých hodnotách parametrů, jako je rychlost proudění, šířka *glottis* a podélné napětí hlasivek, poté může dojít k samobuzenému kmitání hlasivek [13].

Proudění je popsáno Bernoulliho rovnicí a kmitání hlasivek vychází z pohybových rovnic mechaniky kontinua. Interakce mezi hlasivkami a vzduchem je zajištěna přes příčné průřezy *glottis* a aerodynamické síly, které působí jako budicí síly na hlasivky. Díky změnám geometrie vokálního traktu získali Ishizaka s Flanaganem příčné průřezy a objemové průtoky pro samohlásky /a:/, /e:/, /i:/, /o:/ a /u:/ [40].

Omezením dvuhmotového modelu je trvalý obdélníkový příčný průřez částí *glottis*, neexistuje žádná gradace při uzavírání nebo otevírání, hmoty jsou buď v kontaktu, nebo oddělené od sebe. To dle [41] dostatečně nepopisuje vibrační pohyb skutečných hlasivek během fonace. Model je ale jednoduchý a zároveň spolehlivě popisuje základní fyzikální principy fonace, proto je považován za jeden ze základních modelů hlasivek. Je často citován a dočkal se také několika modifikací [42–47].

2.2.1 Modifikace dvuhmotového modelu

Jednu z modifikací vytvořili Ishizaka a Isshiki [42]. Jejich dvuhmotový model je popsán lineárními tuhostmi pružin a je asymetrický, díky čemuž umožňuje zkoumat patologické

²Lokálně nestlačitelný proud vzduchu – hustota se v jednotlivých bodech považuje za konstantní a nedochází k významnému stlačení nebo zhuštění vzduchu při pohybu.

jevy. Interakce mezi hlasivkami a vzduchem je opět zprostředkována pomocí aerodynamických sil působících na hlasivky. Tento model poté dále modifikovali Steinecke a Herzel [43] pro studium nelineární dynamiky a bifurkace modelu hlasivek. Další modifikaci provedl Wurzbacher [44], jehož model kmital opět asymetricky, ale tentokrát nelineárně.

Koizumi a kol. [45] vytvořili hned tři nové dvouhmotové modely, které porovnávají s původním modelem Ishizaky a Flanagan. Jejich symetrické modely by měly sloužit k simulaci měkkého a přirozenějšího zvuku [45].

První Koizumiho model je popsán tak, že se dolní hmota může pohybovat nejen v laterálně-mediálním směru, ale navíc i v anteriorně-posteriorním směru³, takže kromě příčného směru kmitá tato hlasivková hmota i ve směru podélném. Horní hmota kmitá pouze v laterálně-mediálním směru, může ale měnit některé geometrické rozměry v závislosti na deformaci, což simuluje flexibilní, ale nestlačitelnou sliznici.

Druhý i třetí model Koizumiho a kol. navazuje na model první. Druhý model přidává navíc změnu hmotností horní a dolní hmoty při změně geometrie, přičemž celková hmotnost zůstává konstantní. Třetí model přidává oproti druhému modelu i druhý stupeň volnosti horní hmoty, která tedy kmitá ve stejných směrech jako hmota dolní [45]. Propojení hlasivek se vzduchem je zde modelováno stejně jako v původním dvouhmotovém modelu Ishizaky a Flanagan.

Další modifikace dvouhmotového modelu byla provedena Dreselem [46], který jej převedl na prostorový 3D model. Za zmínku stojí i Lucerův model [47], který modeluje hrudní a falzetový rejstřík pomocí změny hodnoty tuhosti pružin. Při překročení její kritické hodnoty dochází k rapidní změně kmitání hlasivek.

2.3 Tříhmotové modely

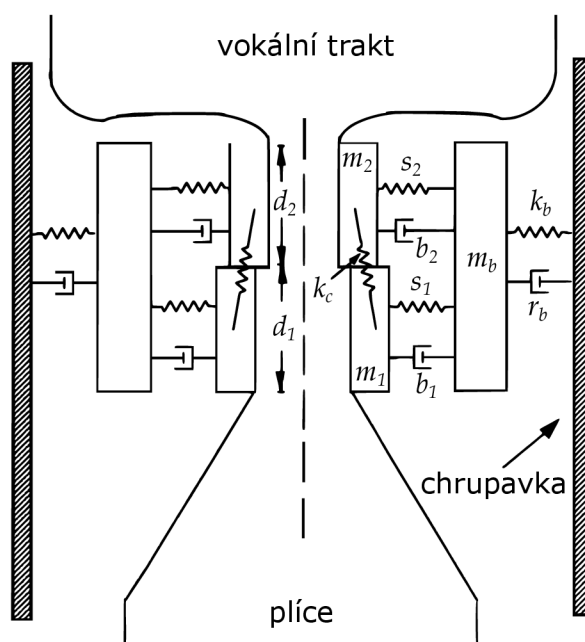
Rozšíření modelu Ishizaky a Flanagan realizovali Tokuda a kol. [48]. K dvouhmotovému modelu přidali třetí hmotný prvek, který stejně jako první dvě hmoty spojili pružinou a tlumičem s pevnou stěnou, takže se jejich tříhmotový model skládá ze tří hmot poskládaných za sebou v kraniálně-kaudálním směru⁴. Tyto hmoty se velikostně i hmotnostně směrem od plic zmenšují, což odpovídá fyziologickým předpokladům hlasivek. Hmoty kmitají pouze v laterálně-mediálním směru, takže model má tři stupně volnosti. Tokuda a kol. se snažili tímto modelem simulovat přechod mezi hrudním a falzetovým rejstříkem.

Další model, který navazuje na práci Ishizaky a Flanagan a přidává k jejich modelu třetí hmotu, je tzv. body-cover model Storyho a Titzeho [49]. Tento model přidává třetí hmotný prvek mezi dvě původní hmoty a pevnou stěnu. Respektuje tedy skutečnost, že se hlasivky skládají z více vrstev, konkrétně z těla (body) a obalu (cover), jak bylo zmíněno v kapitole 1.2.4. Dle Obr. 1.9 tento model odpovídá dvouvrstvému schématu. Body-cover model je zobrazen na Obr. 2.3. Je patrné, že tělo se skládá z jednoho prvku (hmota m_b) a obal ze dvou menších a méně hmotných prvků (hmoty m_1 a m_2).

Fluidně-strukturně-akustická interakce body-cover modelu zahrnuje kromě hlasivek i vokální a subglotický trakt a ústní a nosní dutinu. Rovnice proudění vychází z [50], kde

³Anterior: směr k břichu; posterior: směr k zádom.

⁴Kraniální směr: směr k hlavě; kaudální směr: směr k ocasu (ke kostrči).



Obr. 2.3. Tříhmotový model body-cover, upraveno a převzato z [49].

je interakce realizována na základě šíření a odrazu akustických vln v hlasovém ústrojí. Toho je dosaženo pomocí modelu přenosového vedení⁵ navrženého Kellym a Lochbaumem v [51]. Principem je vytvoření hlasového ústrojí (subglotického a supraglotického prostoru a hlasivek) jako sestavu diskretních prvků poskládaných za sebou a spojených prostředím. V tomto prostředí se poté šíří subglotická a supraglotická vlna, dochází k jejich vzájemné interakci a výsledkem je objemový průtok v *glottis* a odražená vlna pod a nad *glottis* [50]. Hodnoty vstupních i výstupních parametrů by měly být dle [36] v blízké shodě s fyziologickými měřeními a na rozdíl od dvouhmotových modelů by měla být u body-cover modelu přímá fyziologická korelace mezi tuhostí pružin a účinky svalové kontrakce.

Na body-cover model navázali Titze a Story v [52], kde definovali pravidla pro řízení parametrů tříhmotového modelu podle svalové aktivity. Ty úspěšně reprodukuje čtyři základní případy fonace, jak je definoval Hirano [17].

Body-cover model Titze později modifikoval na tzv. dvouhmotový body-plate model [53]. Zde byly zachovány tři stupně volnosti, ale obal hlasivky byl zredukován na jednu hmotu (plate, čili talíř) se dvěma stupni volnosti, a to s translací a rotací. S tímto modelem souvisí i model Liljencrantse [54]. Ten je složen pouze z jedné hmoty, která má dovolenou rotaci i translaci, tedy dva stupně volnosti.

2.4 Vícehmotové modely

Přidáváním hmotných prvků se modely přibližují reálné struktuře hlasivek. První, kdo představil vícehmotový model hlasivek, byl opět Titze [55, 56]. Tento model navazuje na dvouhmotový model Ishizaky a Flanagana [40] a skládá se ze 16 hmotových prvků

⁵Přenosové vedení – anglicky *transmission line theory*.

ve dvou řadách. Kmitání je umožněno ve dvou rovinách, a to v laterálně-mediálním směru a směru anterior-posterior, takže je simulováno vlnění hlasivky po její délce.

Titzeho 16hmotový model byl upraven Kobem [57], který pomocí modelu dokázal simulovat různé typy zpěvních hlasů, jako je soprán, baryton nebo bas.

Kombinací modelu Ishizaky a Flanagana a 16hmotového Titzeho modelu je 10hmotový Wongův model [58]. Ten má stejně jako Titzeho model po tloušťce hlasivky rozděleny hmoty do dvou řad, tentokrát po pěti prvcích po délce hlasivky. Model se využívá pro studium hlasových poruch.

Další modely hlasivek, které se skládají z většího počtu hmot, jsou např. šestihmotové 3D modely Schwarze a kol. [59] a Wurzbachera a kol. [60] či Yangův 25hmotový model [61]. Titze tyto modely poté zobecnil na $L \times M \times N$ model a současně publikoval model se 175 hmotnými prvky [11].

2.5 Další hmotové modely

2.5.1 Hladké modely

Myšlenku hladkých přechodů mezi hranami hmotných prvků hlasivek zavedl Childers [41]. Vytvořil jednohmotový model, který simuluje hlasové patologie. Hlasivky jsou designovány pomocí jedné elastické hmoty, která dokáže měnit svůj tvar v závislosti na zatížení a po odlehčení se vrátí do původní polohy.

Na tento model navázal Lous [62], který jej rozšířil o druhou hmotu a aplikoval jej na hlasovou protézu. Proudění mezi hlasivkami je zde aplikováno jako jednodimezionální, kvazistacionární a bez tření a je popsáno Bernoulliho rovnicí. Interakce s hlasivkami je opět zprostředkována pomocí aerodynamických sil a akustické impedance, pohyby hlasivek jsou vyjádřeny pohybovými rovnicemi. Akustika vokálního traktu je vytvořena jako soustava N cylindrických úseků s pevnou stěnou o dané délce a příčném průřezu.

2.5.2 Model slizniční vlny

Model slizniční vlny publikoval Titze [63]. Tento model vykazuje podobné chování jako dvouhmotový model Ishizaky a Flanagana, ale redukuje počet parametrů modelu. Skládá se pouze z jedné hmoty, která tvarem povrchu připomíná slizniční vlnu. Kromě parametru hmotnosti, tuhosti a tlumení obsahuje i parametr rychlosti slizniční vlny, která způsobuje fázové zpoždění pohybu horní části hmoty vůči pohybu její dolní části, což modeluje právě slizniční vlnu.

Tento model předpokládá kmitání hlasivek o malé amplitudě, přičemž oscilační pohyb odpovídá povrchové vlně šířící se ve směru proudění. Dynamika pohybu je popsána jako posuv středové polohy hmoty hlasivky a její rychlosti. Omezení modelu je právě v malých amplitudách kmitání, které umožňují oscilaci hlasivek pouze s mírně abdukovanými hlasivkami. I přesto lze na modelu demonstrovat mnoho jevů a základní principy dynamiky hlasivek, model je platný pro hrudní i falzetový rejstřík a také na tento model navázalo několik dalších studií [36].

2.5.3 Aeroelastický model

Aeroelastický model zveřejnili Horáček a kol. [64]. Tento model je tvořen pouze jednou hmotou, která má proměnnou tloušťku, takže tvarem kopíruje fyziologický tvar hlasivky. Hmota je spojena s pevnou stěnou pomocí pružného podloží, takže hlasivka dokáže kmitat ve dvou směrech. Tvar hlasivky se nemění v čase v závislosti na zatížení, nelze tedy simulovat pohyb slizniční vlny.

2.5.4 Modely hlasivek jako Port-Hamiltoniánské systémy

V posledních letech bylo zveřejněno několik modelů, které jsou založené na Hamiltonově formalismu, který je v matematice a fyzice používán k popisu dynamiky systémů. Modely hlasivek fungují jako tzv. Port-Hamiltoniánské systémy, ve kterých je klíčové zachování energie a struktura portů, které charakterizují rozhraní systému s jeho okolím [65]. Zachování energie vychází z její vyvážené výměny mezi proudem vzduchu a hlasivkami vyjádřené pomocí Hamiltonových diferenciálních rovnic, které popisují vývoj systému v čase. Porty umožňují tok energie, hmoty nebo jiných veličin mezi systémem a okolím.

Modely publikované na základě těchto principů jsou např. tříhmotové body-cover modely [66–68] nebo jednohmotový model s elastickým obalem [69].

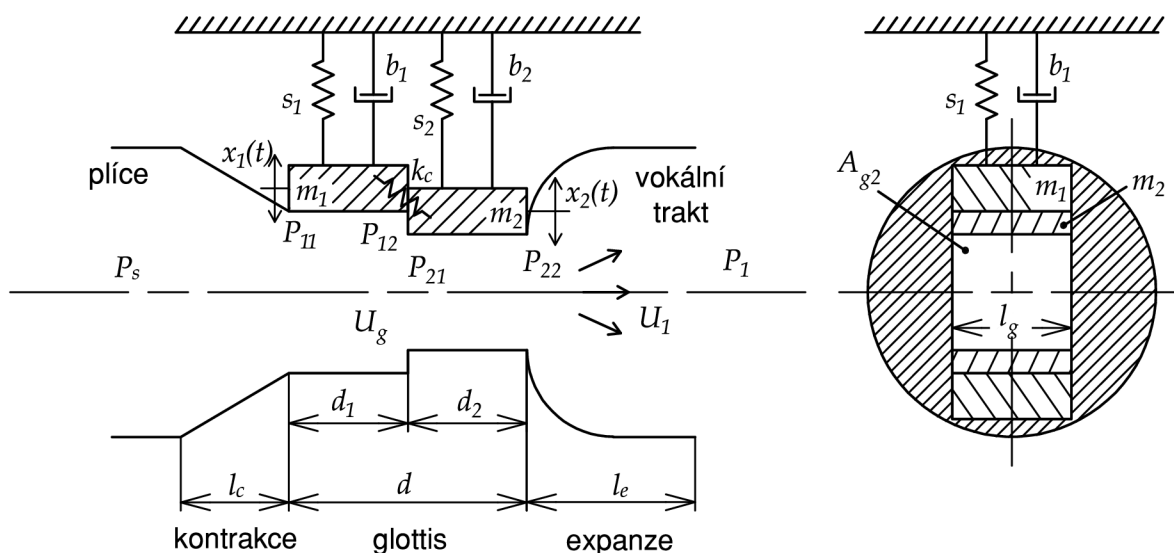
Obecně lze tedy říci, že kromě posledních zmíněných modelů je fluidně-strukturně-akustická interakce většiny hmotových modelů vyjádřena pomocí Bernoulliho rovnice, která jednoduchým matematickým popisem charakterizuje proudění, aerodynamických sil, které vychází z tlaků vzduchu a působí na hmotné prvky hlasivek jako buzení, pohybových rovnic, pomocí nichž jsou popisovány samotné kmity hlasivek, a akustické impedance, díky které s hlasivkami akusticky interaguje i vokální trakt.

Modely hlasivek, které jsou v této kapitole zmíněny, bezpochyby nejsou všechny, které kdy byly publikovány. Další hmotové modely lze najít např. v přehledech o modelech hlasivek s nízkým počtem stupňů volnosti, a to [36, 37, 39, 57].

3 Dvouhmotový model

Dvouhmotový model je realizován jako fluidně-strukturně-akustická interakce na základě modelu Ishizaky a Flanagana [40] z kapitoly 2.2. Interakce je modelována pomocí soustav rovnic, které jsou podrobněji přiblíženy v následujících podkapitolách, a poté numericky vyřešena pomocí programovacího jazyka *Python 3.9.7*. Tato práce částečně navazuje na bakalářskou práci [70]. Zde byly odvozeny a vyřešeny pohybové rovnice kmitání pro základní modely hlasivek s nízkým počtem stupňů volnosti, přičemž buzení bylo realizováno pomocí sil s harmonickým průběhem.

Na Obr. 3.1 je zobrazen dvouhmotový model vytvořený na základě modelu Ishizaky a Flanagana. Modeluje se jedna hlasivka, která se skládá ze dvou hmot m_1 a m_2 . Druhá hlasivka kmitá symetricky, není proto nutné ji modelovat. Hmotné prvky kmitají v laterálně-mediálním směru s výchylkami x_1 a x_2 , model má tedy dva stupně volnosti. Každá z hmot je přichycena k pevné stěně pomocí nelineární pružiny (s_1 a s_2) a tlumiče (b_1 a b_2), navzájem jsou hmoty spojeny pomocí pružiny k_c . Geometrie hmot je dána jejich délkami d_1 a d_2 v kraniálně-kaudálním směru a tloušťkou l_g ve směru anteriorně-posteriorním.



Obr. 3.1. Dvouhmotový model, vytvořeno dle [40].

Skrz hlasivky proudí vzduch, který je charakterizován tlakem a objemovým průtokem. Tlak se mění se změnou geometrie a podél hmot. Z plic přichází statický tlak P_S , mezi hlasivkami postupně klesá na tlaky P_{11} , P_{12} , P_{21} a P_{22} , poté přechází do vokálního traktu na hodnotu P_1 a na konci se vyrovnává s atmosférickým tlakem. Během změny tlaku dochází i ke změnám rychlosti, jež lze vztáhnout na příčný průřez, kterým aktuálně prochází, a charakterizovat je objemovým průtokem. V *glottis* je objemový průtok U_g , ve vokálním traktu poté U_1 . Příčné průřezy hmot A_{g1} a A_{g2} jsou dány vztahem:

$$A_{g1} = A_{g01} + 2l_g x_1, \tag{3.1a}$$

$$A_{g2} = A_{g02} + 2l_g x_2, \tag{3.1b}$$

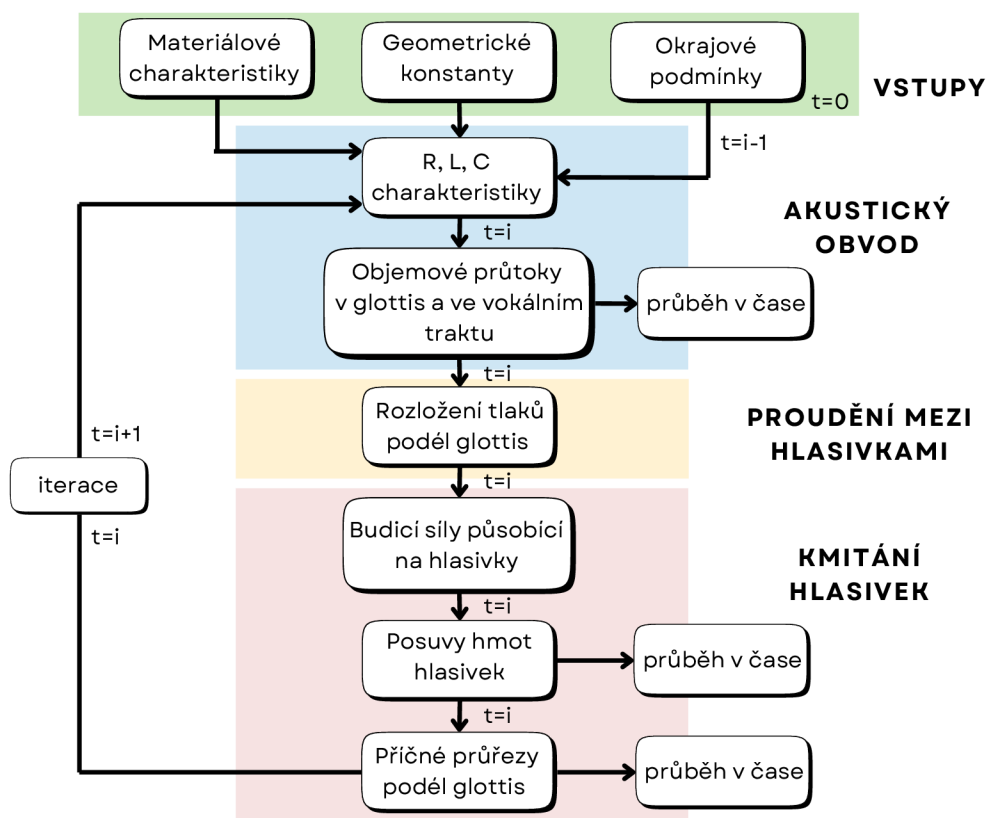
kde A_{g01} a A_{g02} jsou počáteční příčné průřezy, kdy jsou hmoty m_1 a m_2 v klidu.

3.1 Schéma simulace

Simulace interakce je schematicky znázorněna na Obr. 3.2, kde lze vidět rozdělení do čtyř oblastí – vstupy, akustický obvod, proudění mezi hlasivkami a kmitání hlasivek. Mezi vstupní veličiny patří materiálové charakteristiky hlasivek a vzduchu, geometrie hlasivek a vokálního traktu a počáteční a okrajové podmínky.

Tyto parametry jsou vstupními hodnotami pro výpočet charakteristik RLC obvodu, který je vytvořen na základě elektro-akustické analogie. Některé parametry obvodu R , L a C jsou odvozeny ze členů Bernoulliho rovnic pro průběh tlaků podél hmot hlasivek a vokálního traktu, ostatní jsou převzaty z literatury [40]. Z parametrů R , L , C se pomocí I. Kirchhoffova zákona určí objemové průtoky U_g v *glottis* a U_1 ve vokálním traktu, které v elektrickém obvodu odpovídají proudu. Vypočítané objemové průtoky se vloží zpět do Bernoulliho rovnic a určí se rozložení tlaků vzduchu podél *glottis*.

Z tlaků působících podél hlasivek lze určit síly, které vyvolávají kmitání hlasivek. Samotný pohyb hmot je poté určen z těchto budících sil a pohybových rovnic odvozených z Lagrangeových rovnic II. druhu. Nakonec se z výchylek kmitání hlasivek spočítají příčné průřezy podél hmot hlasivek, které jsou vstupními veličinami pro další časový krok, a celý proces se opakuje, dokud z plic proudí vzduch.



Obr. 3.2. Schéma simulace, vytvořeno na základě [40].

3.2 Proudění mezi hlasivkami

Díky malým rozměrům hlasivek v porovnání s vlnovou délkou a vysokým rychlostem proudění vzhledem k rychlostem pohybu hlasivek lze proudění považovat za kvazistatické a aproximovat jej pomocí jednodimenzionální Bernoulliho rovnice [40]. Obecný tvar této rovnice vypadá následovně:

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho u(x) = konst. \quad (3.2)$$

kde ρ je hustota tekutiny, v je okamžitá rychlost proudění, p je tlak v tekutině a $u(x)$ je potenciál vnějšího konzervativního pole objemové síly v daném bodě (v tíhovém poli se jedná o tíhovou sílu). Protože je uvažováno proudění podél jedné linie, není poslední člen levé strany rovnice uvažován.

Na Obr. 3.1 jsou vidět změny geometrie podél hlasivek a v prostorech nad a pod nimi. První změna tlaků nastává mezi statickým tlakem z plic P_S a tlakem P_{11} na okraji dolní hmoty hlasivky m_1 . Dochází zde ke zúžení příčného průřezu (kontrakci) a rozdíl tlaků je roven:

$$P_S - P_{11} = 1.37 \frac{\rho}{2} \left(\frac{U_g}{A_{g1}} \right)^2 + \int_0^{l_c} \frac{\rho}{A_c(x)} dx \cdot \frac{dU_g}{dt}, \quad (3.3)$$

kde první člen odpovídá prvnímu členu rovnice (3.2), přičemž $v = U_g/A_{g1}$. Faktor 1.37 je určen experimentálně dle [71] na odlitcích sádrových hrtanů a navýšení o 0.37 odpovídá naměřeným ztrátám. Druhý člen rovnice vyjadřuje změnu geometrie podél délky l_c při proměnném příčném průřezu A_c , dle [40] je ale zanedbatelný.

Další rozdíl tlaků nastává podél hmoty m_1 . Zde je pokles lineární a odpovídá ztrátám dle Hagen-Poiseuilleova zákona pro obdélníkový příčný průřez:

$$P_{11} - P_{12} = 12 \frac{\mu \cdot l_g^2 \cdot d_1}{A_{g1}^3} \cdot U_g + \frac{\rho \cdot d_1}{A_{g1}} \cdot \frac{dU_g}{dt}, \quad (3.4)$$

kde μ je dynamická viskozita. Na rozhraní hmot m_1 a m_2 dochází ke skokové změně geometrie. Mění se proto rychlost částic při zachování kontinuálního objemového průtoku U_g . Platí tedy rozdíl tlaků dle (3.2):

$$P_{12} - P_{21} = \frac{1}{2} \rho \cdot U_g^2 \left(\frac{1}{A_{g2}^2} - \frac{1}{A_{g1}^2} \right). \quad (3.5)$$

Podél hmoty m_2 platí vztah analogický ke vztahu (3.4):

$$P_{21} - P_{22} = 12 \frac{\mu \cdot l_g^2 \cdot d_2}{A_{g2}^3} \cdot U_g + \frac{\rho \cdot d_2}{A_{g2}} \cdot \frac{dU_g}{dt}. \quad (3.6)$$

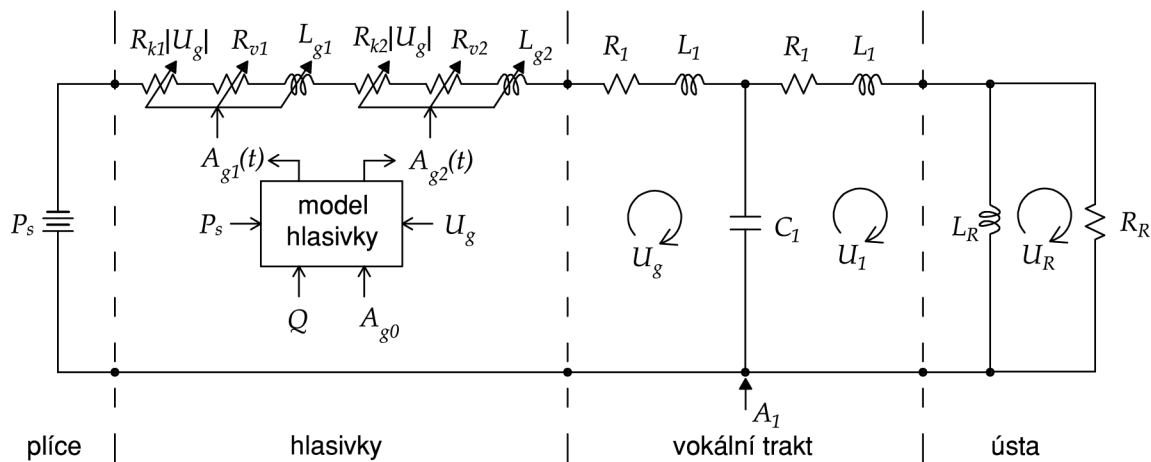
Nad horním koncem hlasivky dochází k expanzi do vokálního traktu a tlak se zvyšuje dle následujícího vztahu:

$$P_{22} - P_1 = -\frac{\rho}{2} \left(\frac{U_g}{A_{g2}} \right)^2 \cdot k_e, \quad k_e = 2 \frac{A_{g2}}{A_1} \left(1 - \frac{A_{g2}}{A_1} \right), \quad (3.7)$$

kde k_e je koeficient obnovy tlaku a A_1 je příčný průřez vokálního traktu.

3.3 Akustický obvod

Aby bylo možné spočítat tlaky podél hlasivek, je nutné nejdříve určit objemový průtok U_g . Ten lze spolu s objemovým průtokem U_1 ve vokálním traktu a U_R v ústech vyjádřit pomocí elektrického obvodu, který je zobrazen na Obr. 3.3, dle elektro-akustické analogie. Objemové průtoky zde představují proudy, které procházejí jednotlivými smyčkami obvodu.



Obr. 3.3. Akustický obvod pro dvouhmotový model, vytvořeno na základě [40].

Ve smyčkách se nacházejí elektrické odpory R , které jsou analogické akustickým a mechanickým odporům, čili ztrátám. Dále jsou zde cívky s indukčností L , které představují setrvačnost vzduchu či hmoty, a nakonec se zde nachází jeden kondenzátor s kapacitou C_1 , který je analogický poddajnosti, tedy převrácené hodnotě tuhosti. Tlak P_S představuje v obvodu elektrické napětí.

Parametry R_{k1} , R_{v1} a L_{g1} vycházejí z kmitání hmoty m_1 a jsou dány následujícími rovnicemi:

$$R_{k1} = \frac{0.19\rho}{A_{g1}^2}, \quad (3.8a)$$

$$R_{v1} = 12 \frac{\mu \cdot l_g^2 \cdot d_1}{A_{g1}^3}, \quad (3.8b)$$

$$L_{g1} = \frac{\rho \cdot d_1}{A_{g1}}. \quad (3.8c)$$

Pro parametry R_{v2} a L_{g2} hmoty m_2 platí analogické rovnice, pro parametr R_{k2} se rovnice liší:

$$R_{k2} = \frac{\rho}{A_{g2}^2} \left[0.5 - \frac{A_{g2}}{A_1} \left(1 - \frac{A_{g2}}{A_1} \right) \right], \quad (3.9a)$$

$$R_{v2} = 12 \frac{\mu \cdot l_g^2 \cdot d_2}{A_{g2}^3}, \quad (3.9b)$$

$$L_{g2} = \frac{\rho \cdot d_2}{A_{g2}}. \quad (3.9c)$$

Parametry R_{k1} a R_{k2} vycházejí z akustické impedance odvozené v [40]. Parametry R_{v1} , R_{v2} , L_{g1} a L_{g2} jsou odvozeny z Hagen-Poiseuilleova zákona v (3.4) a (3.6) odvozené v [7].

Vokální trakt může být modelován pomocí přenosového vedení jako soustava několika válců o různých průměrech a výškách poskládaných za sebou. Dle toho jsou poté rozlišovány jednotlivé samohlásky, protože ty jsou závislé právě na tvaru vokálního traktu, jak bylo zmíněno v kapitole 1.1. Zde je vokální trakt modelován jako jeden válec o konstantní výšce a konstantním průměru.

Parametry vokálního traktu R_1 , L_1 a C_1 jsou převzaty z [40] a [7] a jsou dány následujícími rovnicemi:

$$R_1 = \frac{S_1^2}{A_1^2} \sqrt{\rho \cdot \mu \cdot \omega / 2},^1 \quad (3.10a)$$

$$L_1 = \frac{\rho \cdot l_1}{2A_1}, \quad (3.10b)$$

$$C_1 = \frac{l_1 \cdot A_1}{\rho \cdot c^2}, \quad (3.10c)$$

kde $S_1 = 2\pi r = 2\pi \sqrt{A_1/\pi}$ je obvod podstavy válce vokálního traktu, A_1 je příčný průřez vokálního traktu, $\omega = \sqrt{k_1/m_1}$ je úhlová rychlost daná vlastní frekvencí dolní hmoty, l_1 je výška válce vokálního traktu, tedy jeho délka, a c je rychlost zvuku ve vzduchu.

Poslední smyčka akustického obvodu se týká úst, kde vokální trakt ústí do okolního prostředí. Rovnice pro R_R a L_R jsou odvozené z [40] a vyjádřené na základě [7]. Základní myšlenka je zde založena na tom, že příčné rozměry úst jsou ve srovnání s vlnovou délkou zvuku malé. To znamená, že rychlost proudění vzduchu je po průřezu rozložena zhruba konstantně a se stejnou fází. Dále lze ústa umístit do tzv. *baffle*², kterou představuje hlava aproximovaná koulí. Zde je opět uvažován předpoklad malých rozměrů úst a vokálního traktu v porovnání s rozměry hlavy. Díky tomu lze vyjádřit komplexní impedanci ústního otvoru kombinací zatížení vyzařování do prostoru R_R a zatížení vokálního traktu L_R [7] jako:

$$R_R = \frac{128 \rho \cdot c}{9 \pi^2 \cdot A_1}, \quad (3.11a)$$

$$L_R = \frac{8 \rho}{3 \pi \cdot \sqrt{\pi \cdot A_1}}.^3 \quad (3.11b)$$

Všechny parametry akustického obvodu na Obr. 3.3 jsou vysvětleny, lze tedy odvodit diferenciální rovnice jednotlivých smyček dle Kirchhoffových zákonů. Celkem jsou vytvořeny 3 smyčky – g-smyčka pro *glottis*, 1-smyčka pro vokální trakt a R-smyčka pro ústa.

¹Rovnice pro R_1 : veličina S_1 musí být umocněna na druhou, aby výraz vycházel správně jednotkově, i když v [40] umocnění chybí; vyplývá ale z [7].

²Anglický výraz *baffle* lze do češtiny přeložit jako „rozptylovou desku“ či přímo „baffle“; jedná se o pevnou překážku, která slouží k omezení nebo změně šíření zvuku.

³Rovnice pro L_R : zde musí být výraz pod odmocninou ve jmenovateli, aby opět vycházely správně jednotky; v [40] je rovnice zapsána nejednoznačně.

Odpory R jsou v příslušné smyčce násobené proudem (čili objemovým průtokem), cívký L jsou násobené derivací proudu podle času a kondenzátor C je násoben integrálem proudu v průběhu času. Rovnice s použitím RLC charakteristik vypadají následovně:

$$\begin{aligned} \mathbf{g\text{-smyčka:}} \quad & (R_{k1} + R_{k2}) \cdot |U_g| \cdot U_g + (R_{v1} + R_{v2})U_g + (L_{g1} + L_{g2}) \cdot \frac{dU_g}{dt} + \\ & + L_1 \cdot \frac{dU_g}{dt} + R_1 \cdot U_g + \frac{1}{C_1} \cdot \int_0^t (U_g - U_1) dx - P_S = 0, \end{aligned} \quad (3.12a)$$

$$\mathbf{1\text{-smyčka:}} \quad (L_1 + L_R) \cdot \frac{dU_1}{dt} + R_1 \cdot U_1 - L_R \cdot \frac{dU_R}{dt} + \frac{1}{C_1} \cdot \int_0^t (U_1 - U_g) dx = 0, \quad (3.12b)$$

$$\mathbf{R\text{-smyčka:}} \quad L_R \cdot \frac{d(U_R - U_1)}{dt} + R_R \cdot U_R = 0. \quad (3.12c)$$

Z těchto diferenciálních rovnic lze získat objemové průtoky U_g , U_1 a U_R , které slouží k výpočtu tlaků v rovnicích proudění (3.3) až (3.7).

3.4 Kmitání hlasivek

Pohyb hmotných prvků hlasivek je hnán tlaky, které na hmoty m_1 a m_2 působí. Tlaky podél hlasivek P_{11} , P_{12} , P_{21} a P_{22} lze vyjádřit z rovnic (3.3) až (3.6). Z těchto tlaků lze poté určit tlaky P_{m1} a P_{m2} působící na hmotné prvky jako zprůměrované hodnoty tlaků na začátku a na konci příslušné hmoty (celé odvození lze nalézt v příloze A.1):

$$P_{m1} = \frac{1}{2} (P_{11} + P_{12}) = P_S - 1.37 \frac{\rho}{2} \left(\frac{U_g}{A_{g1}} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(R_{v1} \cdot U_g + L_{g1} \cdot \frac{dU_g}{dt} \right), \quad (3.13a)$$

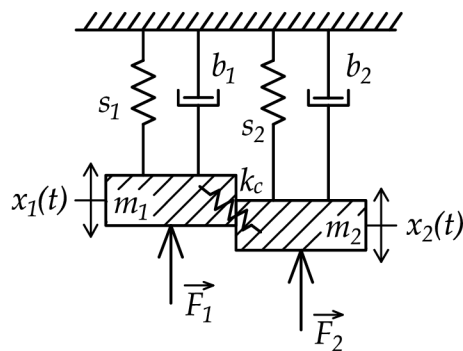
$$\begin{aligned} P_{m2} &= \frac{1}{2} (P_{21} + P_{22}) = \\ &= P_{m1} - \frac{1}{2} \left[(R_{v1} + R_{v2}) U_g + (L_{g1} + L_{g2}) \cdot \frac{dU_g}{dt} \right] - \frac{\rho}{2} \cdot U_g^2 \cdot \left(\frac{1}{A_{g2}^2} - \frac{1}{A_{g1}^2} \right). \end{aligned} \quad (3.13b)$$

Z těchto tlaků lze určit síly F_1 a F_2 , kterými jsou hmoty m_1 a m_2 poháněny. Schematicky je buzení znázorněno na Obr. 3.4, jenž vychází z Obr. 3.1. Budící síly lze z tlaků P_{m1} a P_{m2} vyjádřit následovně:

$$F_1 = P_{m1} \cdot l_g d_1, \quad (3.14a)$$

$$F_2 = P_{m2} \cdot l_g d_2. \quad (3.14b)$$

Tyto síly ovšem na hlasivky nepůsobí po celou dobu kmitání. Buzení hmot je závislé na otevřené, respektive uzavřené *glottis*. Pokud je hmota v kontaktu s hmotou protěžší hlasivky, *glottis* je po délce hmoty uzavřena a proud vzduchu je přerušen. Nulovými příčnými



Obr. 3.4. Dvuhmotový model – buzení hmot silami.

průřezy A_{g1} a A_{g2} lze stanovit hodnoty výchylek, které udávají přechod mezi stavem, kdy je nebo není hmota hlasivky v kontaktu. Ty lze odvodit z rovnic (3.1):

$$x_{1min} = -\frac{A_{g01}}{2l_g}, \quad (3.15a)$$

$$x_{2min} = -\frac{A_{g02}}{2l_g}. \quad (3.15b)$$

Mohou nastat celkem 4 případy, jak budou hlasivky během kmitu vypadat. Ty v podstatě odpovídají Obr.1.12 b) z kapitoly 1.2.4, přičemž ve druhém a čtvrtém případě bude horní, respektive dolní okraj hlasivky v kontaktu. Jakým způsobem jsou v těchto čtyřech případech hlasivky buzeny, je shrnuto v Tab. 3.1:

	x_1	x_2	$F_1/l_g d_1$	$F_2/l_g d_2$
m_1 i m_2 v kontaktu	$x_1 \leq x_{1min}$	$x_2 \leq x_{2min}$	P_S	0
m_2 v kontaktu	$x_1 > x_{1min}$	$x_2 \leq x_{2min}$	P_S	P_S
m_1 i m_2 bez kontaktu	$x_1 > x_{1min}$	$x_2 > x_{2min}$	P_{m1}	P_{m2}
m_1 v kontaktu	$x_1 \leq x_{1min}$	$x_2 > x_{2min}$	P_S	0

Tab. 3.1. Možnosti buzení hmotných prvků hlasivek.

Výchylky x_1 a x_2 a jejich rychlosti lze určit pomocí pohybových rovnic, které je třeba odvodit z Lagrangeových rovnic II. druhu. Ty představují efektivní nástroj analytické mechaniky právě při sestavování pohybových rovnic těles a systémů, proto jsou hojně používány. Jejich velkou výhodou je vyloučení všech vazbových sil, což je významné zejména u složitějších mechanických soustav, a také jsou nezávislé na volbě vztažného systému [72]. Lagrangeovy rovnice II. druhu vypadají následovně:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} + \frac{\partial E_d}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = \frac{\partial P}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad (3.16)$$

kde E_k , E_d a E_p představují kinetickou, disipativní a potenciální energii, P je výkon vnějších sil, W značí práci vnějších sil a t je čas. Veličina q_i se nazývá zobecněná souřadnice a \dot{q}_i je její derivace podle času. Pro translační pohyb představuje výchylku x_i , respektive rychlost \dot{x}_i , pro rotační pohyb vyjadřuje natočení φ_i , respektive úhlovou rychlost $\dot{\varphi}_i$. V případě dvoumotového modelu se dvěma stupni volnosti představují zobecněné souřadnice q_1 a q_2 translační pohyby x_1 a x_2 .

Pohybové rovnice pro dvoumotový model byly odvozeny v bakalářské práci [70]. Tehdy byly ovšem uvažovány pružiny s lineárním průběhem k_1 a k_2 , zde jsou uvažovány pružiny s_1 a s_2 s průběhem nelineárním. Ty jsou závislé kromě lineárních členů k_1 a k_2 také na zpevnujících členech η_{k1} a η_{k2} v případě, kdy hlasivky nejsou v kontaktu (3.17), a navíc na členech h_1 a h_2 v případě kontaktu (3.18), kdy se navyšuje i hodnota zpevnujících koeficientů η_{k1} a η_{k2} :

$$s_1(x_1) = k_1 \cdot (x_1 + \eta_{k1} \cdot x_1^3) \quad \text{pro } x_1 > x_{1min}, \quad (3.17a)$$

$$s_2(x_2) = k_2 \cdot (x_2 + \eta_{k2} \cdot x_2^3) \quad \text{pro } x_2 > x_{2min}, \quad (3.17b)$$

$$s_1(x_1) = k_1(x_1 + \eta_{k1} \cdot x_1^3) + h_1 \left[(x_1 - x_{1min}) + \eta_{k1}(x_1 - x_{1min})^3 \right] \quad \text{pro } x_1 \leq x_{1min}, \quad (3.18a)$$

$$s_2(x_2) = k_2(x_2 + \eta_{k2} \cdot x_2^3) + h_2 \left[(x_2 - x_{2min}) + \eta_{k2}(x_2 - x_{2min})^3 \right] \quad \text{pro } x_2 \leq x_{2min}. \quad (3.18b)$$

Koeficienty η_{k1} a η_{k2} představují zpevnění hmoty během vychýlení a díky třetí mocnině výchylky vrací při kmitání hmotu zpět do rovnovážné polohy. Parametry h_1 a h_2 jsou násobkem tuhostí k_1 a k_2 a způsobují další nárůst tuhosti při kontaktu hmoty hlasivky s protější hlasivkou.

Celé odvození pohybových rovnic je vyjádřeno v příloze A.2. Výsledné pohybové rovnice mají následující tvar:

$$m_1 \ddot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 + s_1(x_1) + k_c(x_1 - x_2) = F_1, \quad (3.19a)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + b_2 \dot{x}_2 + s_2(x_2) + k_c(x_2 - x_1) = F_2, \quad (3.19b)$$

kde $s_1(x_1)$ a $s_2(x_2)$ jsou dány dle (3.17), (3.18), síly F_1 a F_2 dle Tab. 3.1 a konstanty tlumení b_1 a b_2 jsou dány rovnicemi:

$$b_1 = 2\xi_1 \sqrt{m_1 \cdot k_1}, \quad (3.20a)$$

$$b_2 = 2\xi_2 \sqrt{m_2 \cdot k_2}, \quad (3.20b)$$

kde ξ_1 a ξ_2 jsou koeficienty tlumení závislé na otevřené, respektive uzavřené *glottis*. Výchylky x_1 a x_2 slouží pro určení aktuálních příčných průřezů A_{g1} a A_{g2} , které se opět spočítají z rovnice (3.1).

3.5 Simulace

Systém fluidně-strukturně-akustické interakce je popsán diferenciálními rovnicemi prvního řádu (3.12), (3.13) a druhého řádu (3.19). Jejich řešení v čase lze provést numerickými me-

todami, např. diskretizací diferenčních členů pomocí metody konečných diferencí a nahrazení integrálu Riemannovým součtem. Aproximace časové derivace 1. a 2. řádu a časového integrálu lze vyjádřit následovně:

$$\frac{df(t)}{dt} \cong \frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = \frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{T}, \quad (3.21a)$$

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2} \cong \frac{f(t_i) - 2 \cdot f(t_{i-1}) + f(t_{i-2})}{(t_i - t_{i-1})^2} = \frac{f(t_i) - 2 \cdot f(t_{i-1}) + f(t_{i-2})}{T^2}, \quad (3.21b)$$

$$\int_0^t f(t) dt \cong (t_i - t_{i-1}) \cdot \sum_{j=0}^{i-1} f(t_j) = T \cdot \sum_{j=0}^{i-1} f(t_j), \quad (3.21c)$$

kde $f(t_i)$ je funkce v i -tém časovém kroku a T je délka časového kroku. Aby bylo možné dostatečně přesně nahradit derivace a integrály, délka časového kroku musí být dostatečně malá.

Rovnice (3.12), (3.13) a (3.19) lze postupně zapsat ve tvaru konečných diferencí. Rovnice pro akustický obvod mají tvar:

$$\begin{aligned} \text{g-smyčka:} \quad & (R_{k1_i} + R_{k2_i}) \cdot |U_{g_i}| \cdot U_{g_i} + (R_{v1_i} + R_{v2_i})U_{g_i} + \\ & + (L_{g1_i} + L_{g2_i}) \cdot \frac{U_{g_i} - U_{g_{i-1}}}{T} + L_1 \cdot \frac{U_{g_i} - U_{g_{i-1}}}{T} + R_1 \cdot U_{g_i} + \\ & + \frac{T}{C_1} \cdot \sum_{j=0}^{i-1} (U_{g_j} - U_{1_j}) - P_S = 0, \end{aligned} \quad (3.22a)$$

$$\begin{aligned} \text{1-smyčka:} \quad & (L_1 + L_R) \cdot \frac{U_{1_i} - U_{1_{i-1}}}{T} + R_1 \cdot U_1 - L_R \cdot \frac{U_{R_i} - U_{R_{i-1}}}{T} + \\ & + \frac{T}{C_1} \cdot \sum_{j=0}^{i-1} (U_{1_j} - U_{g_j}) = 0, \end{aligned} \quad (3.22b)$$

$$\text{R-smyčka:} \quad L_R \cdot \frac{U_{R_i} - U_{R_{i-1}}}{T} - L_R \cdot \frac{U_{1_i} - U_{1_{i-1}}}{T} + R_R \cdot U_{R_i} = 0, \quad (3.22c)$$

kde:

$$R_{k1_i} = \frac{0.19\rho}{A_{g1_{i-1}}^2}, \quad (3.23a)$$

$$R_{k2_i} = \frac{\rho}{A_{g2_{i-1}}^2} \left[0.5 - \frac{A_{g2_{i-1}}}{A_{1_{i-1}}} \left(1 - \frac{A_{g2_{i-1}}}{A_{1_{i-1}}} \right) \right], \quad (3.23b)$$

$$R_{v1_i} = 12 \frac{\mu \cdot l_g^2 \cdot d_1}{A_{g1_{i-1}}^3}, \quad (3.23c)$$

$$R_{v2_i} = 12 \frac{\mu \cdot l_g^2 \cdot d_2}{A_{g2_{i-1}}^3}, \quad (3.23d)$$

$$L_{g1_i} = \frac{\rho \cdot d_1}{A_{g1_{i-1}}}. \quad (3.23e)$$

$$L_{g2i} = \frac{\rho \cdot d_2}{A_{g2i-1}}. \quad (3.23f)$$

Z rovnic (3.22) lze vyjádřit objemové průtoky U_{g_i} , U_{1_i} a U_{R_i} , přičemž celé odvození je sepsané v příloze A.3. Zde jsou sepsány pouze výsledné tvary. Pro U_{g_i} platí:

$$U_{g_{i1,2}} = \frac{-\left(R_{v1_i} + R_{v2_i} + R_1 + \frac{L_{g1_i} + L_{g2_i} + L_1}{T}\right) \pm \sqrt{D}}{2 \cdot (R_{k1_i} + R_{k2_i})}, \quad (3.24)$$

kde D je diskriminant kvadratické rovnice a má tento tvar:

$$D = \left(R_{v1_i} + R_{v2_i} + R_1 + \frac{L_{g1_i} + L_{g2_i} + L_1}{T}\right)^2 - 4 \cdot (R_{k1_i} + R_{k2_i}) \cdot \left[-\left(\frac{L_{g1_i} + L_{g2_i} + L_1}{T}\right) \cdot U_{g_{i-1}} + \frac{T}{C_1} \cdot \sum_{j=0}^{i-1} (U_{g_j} - U_{1_j}) - P_S\right]. \quad (3.25)$$

Pro U_{1_i} a U_{R_i} jsou rovnice následující:

$$U_{1_i} = \left(\frac{T}{L_R} \cdot R_R + 1\right) \cdot U_{R_i} + U_{1_{i-1}} - U_{R_{i-1}}, \quad (3.26a)$$

$$U_{R_i} = \frac{-R_1 \cdot U_{1_{i-1}} + \left(\frac{L_1}{T} + R_1\right) \cdot U_{R_{i-1}} - \frac{T}{C_1} \cdot \sum_{j=0}^{i-1} (U_{1_j} - U_{g_j})}{\frac{L_1}{L_R} \cdot R_R + \frac{L_1}{T} + R_R + R_1 \cdot R_R \cdot \frac{T}{L_R} + R_1}. \quad (3.26b)$$

Další rovnice, které je nutné převést na tvar konečných diferencí, jsou tlaky P_{m1} a P_{m2} , které působí jako buzení hlasivek:

$$P_{m1} = P_S - 1.37 \frac{\rho}{2} \left(\frac{U_{g_i}}{A_{g1_{i-1}}}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(R_{v1_i} \cdot U_{g_i} + L_{g1_i} \cdot \frac{U_{g_i} - U_{g_{i-1}}}{T}\right), \quad (3.27a)$$

$$P_{m2} = P_{m1} - \frac{1}{2} \left[(R_{v1_i} + R_{v2_i}) U_{g_i} + (L_{g1_i} + L_{g2_i}) \cdot \frac{U_{g_i} - U_{g_{i-1}}}{T}\right] - \frac{\rho}{2} \cdot U_{g_i}^2 \cdot \left(\frac{1}{A_{g2_{i-1}}^2} - \frac{1}{A_{g1_{i-1}}^2}\right). \quad (3.27b)$$

Z těchto tlaků lze jednoduše určit rovnice pro budící síly:

$$F_{1_i} = P_{m1} \cdot l_g d_1, \quad (3.28a)$$

$$F_{2_i} = P_{m2} \cdot l_g d_2, \quad (3.28b)$$

kteřé platí, jak bylo výše zmíněno, pouze v případě, že obě hmoty hlasivky nejsou v kontaktu, jinak platí Tab. 3.1. Poslední rovnice, které je nutné převést na konečné diference, jsou polybové rovnice. Jejich tvar je následující:

$$\frac{m_1}{T^2}(x_{1_i} - 2x_{1_{i-1}} + x_{1_{i-2}}) + \frac{b_1}{T}(x_{1_i} - x_{1_{i-1}}) + s_1(x_{1_i}) + k_c(x_{1_{i-1}} - x_{2_{i-1}}) = F_{1_i}, \quad (3.29a)$$

$$\frac{m_2}{T^2}(x_{2_i} - 2x_{2_{i-1}} + x_{2_{i-2}}) + \frac{b_2}{T}(x_{2_i} - x_{2_{i-1}}) + s_2(x_{2_i}) + k_c(x_{2_{i-1}} - x_{1_{i-1}}) = F_{2_i}, \quad (3.29b)$$

kde:

$$s_1(x_{1_i}) = k_1 \cdot (x_{1_i} + \eta_{k1} \cdot x_{1_{i-1}}^3) \quad \text{pro } x_{1_i} > x_{1min}, \quad (3.30a)$$

$$s_2(x_{2_i}) = k_2 \cdot (x_{2_i} + \eta_{k2} \cdot x_{2_{i-1}}^3) \quad \text{pro } x_{2_i} > x_{2min}, \quad (3.30b)$$

$$s_1(x_{1_i}) = k_1(x_{1_i} + \eta_{k1} \cdot x_{1_{i-1}}^3) + h_1 \left[(x_{1_i} - x_{1min}) + \eta_{k1}(x_{1_{i-1}} - x_{1min})^3 \right] \\ \text{pro } x_{1_i} \leq x_{1min}, \quad (3.30c)$$

$$s_2(x_{2_i}) = k_2(x_{2_i} + \eta_{k2} \cdot x_{2_{i-1}}^3) + h_2 \left[(x_{2_i} - x_{2min}) + \eta_{k2}(x_{2_{i-1}} - x_{2min})^3 \right] \\ \text{pro } x_{2_i} \leq x_{2min}. \quad (3.30d)$$

Z těchto rovnic je nutné vyjádřit výchylky x_{1_i} a x_{2_i} . Pro případ, že jsou obě hmoty hlasivky bez kontaktu, platí:

$$x_{1_i} = \frac{F_{1_i} + \left(\frac{2m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} - k_c \right) \cdot x_{1_{i-1}} - \eta_{k1} \cdot x_{1_{i-1}}^3 - \frac{m_1}{T^2} \cdot x_{1_{i-2}} + k_c \cdot x_{2_{i-1}}}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1}, \quad (3.31a)$$

$$x_{2_i} = \frac{F_{2_i} + \left(\frac{2m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} - k_c \right) \cdot x_{2_{i-1}} - \eta_{k2} \cdot x_{2_{i-1}}^3 - \frac{m_2}{T^2} \cdot x_{2_{i-2}} + k_c \cdot x_{1_{i-1}}}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2}. \quad (3.31b)$$

Pokud jsou obě hmoty hlasivky v kontaktu, rovnice výchylek vypadají následovně:

$$x_{1_i} = \frac{F_{1_i} + \left(\frac{2m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} - k_c \right) \cdot x_{1_{i-1}} - \eta_{k1} \cdot x_{1_{i-1}}^3 - \frac{m_1}{T^2} \cdot x_{1_{i-2}} + k_c \cdot x_{2_{i-1}}}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1} + \\ + \frac{h_1 x_{1_i} - h_1 \cdot \eta_{k1} (x_{1_{i-1}} - x_{1min})^3}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1}, \quad (3.32a)$$

$$x_{2_i} = \frac{F_{2_i} + \left(\frac{2m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} - k_c \right) \cdot x_{2_{i-1}} - \eta_{k2} \cdot x_{2_{i-1}}^3 - \frac{m_2}{T^2} \cdot x_{2_{i-2}} + k_c \cdot x_{1_{i-1}}}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2} + \\ + \frac{h_2 x_{2_i} - h_2 \cdot \eta_{k2} (x_{2_{i-1}} - x_{2min})^3}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2}. \quad (3.32b)$$

V případech, kdy je v kontaktu pouze jedna hmota hlasivky, platí kombinace rovnic. Pro hmotu m_1 v kontaktu platí rovnice (3.32a) a (3.31b), pro hmotu m_2 v kontaktu platí rovnice (3.31a) a (3.32b).

Z výchylek je třeba spočítat aktuální příčné průřezy, které slouží jako vstup do rovnic pro objemové průtoky a tlaky podél *glottis* v kroku $i+1$:

$$A_{g1_i} = A_{g01} + 2l_g x_{1_i}, \quad (3.33a)$$

$$A_{g2_i} = A_{g02} + 2l_g x_{2_i}. \quad (3.33b)$$

Pro řešení objemových průtoků a výchylek v čase je třeba všechny rovnice z této kapitoly sepsat do skriptu v programu *Python* 3.9.7. Je nutné zvolit vhodnou vzorkovací frekvenci, což je převrácená hodnota časového kroku T . Dle [40] je to pro hlasivky taková vzorkovací frekvence, která je mezi 10 kHz a 30 kHz. Vyzkoušeny zde byly obě krajní hodnoty, nakonec byla vzorkovací frekvence zvolena na 20 kHz. Pro všechny neznámé parametry měnící se v čase byly vytvořeny vektory s nulovými hodnotami, do kterých byly poté postupně pomocí `for` cyklu a vložených `if` podmínek zapisovány hodnoty na základě numericky vyřešených rovnic (3.22) až (3.32) dle schématu na Obr. 3.2. Všechny veličiny v i -tém časovém kroku vychází z i -tých hodnot ostatních veličin kromě příčných průřezů A_{g1} a A_{g2} , které jsou získávány z kroku $i-1$. Na začátku simulace byly nastaveny jako počáteční podmínky nulové rychlosti, tedy i objemové průtoky, a nulové výchylky kmitání.

3.6 Parametry modelu

Číselné parametry, které se během kmitání hlasivek nemění, byly převzaty z literatury [40]. Pro hlasivky jsou parametry shrnuty v následující tabulce:

Veličina	Hodnota	Veličina	Hodnota
m_1	0.125 g	$\xi_{1_{\text{otevřená}}}$	0.1 [–]
m_2	0.025 g	$\xi_{1_{\text{uzavřená}}}$	0.5 [–]
k_1	80 N/m	$\xi_{2_{\text{otevřená}}}$	0.6 [–]
k_2	8 N/m	$\xi_{2_{\text{uzavřená}}}$	1.0 [–]
k_c	25 N/m	d_1	0.25 cm
$\eta_{k1_{\text{otevřená}}} = \eta_{k2_{\text{otevřená}}} = \eta_{k0}$	100 [–]	d_2	0.05 cm
$\eta_{k1_{\text{uzavřená}}} = \eta_{k2_{\text{uzavřená}}} = \eta_{kc}$	500 [–]	$A_{g01} = A_{g02}$	0.05 cm ²
h_1	$3k_1 = 240$ N/m	l_g	1.4 cm
h_2	$3k_2 = 24$ N/m		

Tab. 3.2. Číselné parametry hlasivky dvouhmotového modelu.

Pro vokální trakt a vzduch jsou číselné parametry shrnuty ve druhé tabulce:

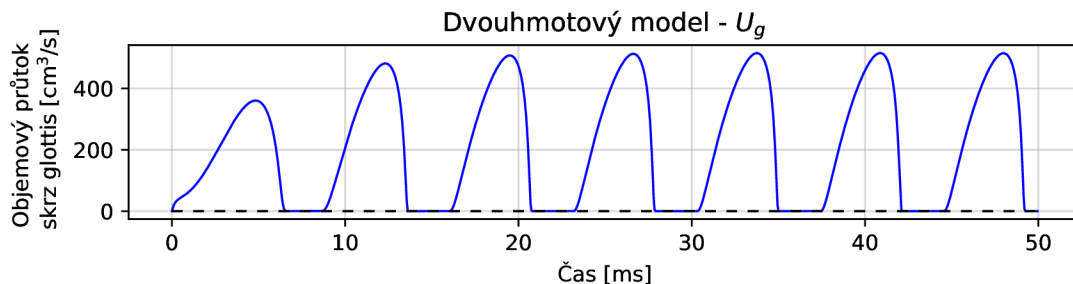
Veličina	Hodnota	Veličina	Hodnota
A_1	5 cm ²	μ	$1.84 \cdot 10^{-4}$ Pa · s
l_1	16 cm	ρ	1.3 kg/m ³
P_S	8 cm H ₂ O = 784.532 Pa	c	343 m/s

Tab. 3.3. Číselné parametry vokálního traktu a vzduchu.

3.7 Vyhodnocení výsledků

Numerické řešení dvouhmového modelu hlasivky řešeného v interakci s proudícím vzduchem na základě metody konečných diferencí modelované pomocí rovnic (3.22) až (3.32) a s vokálním traktem modelovaným jako válec je znázorněno v následujících grafech.

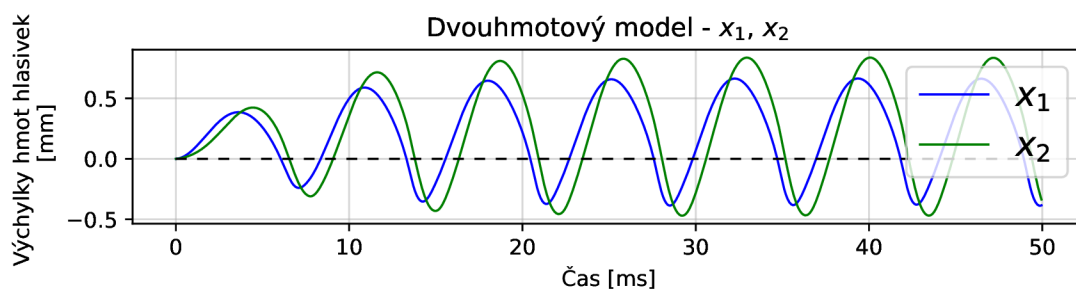
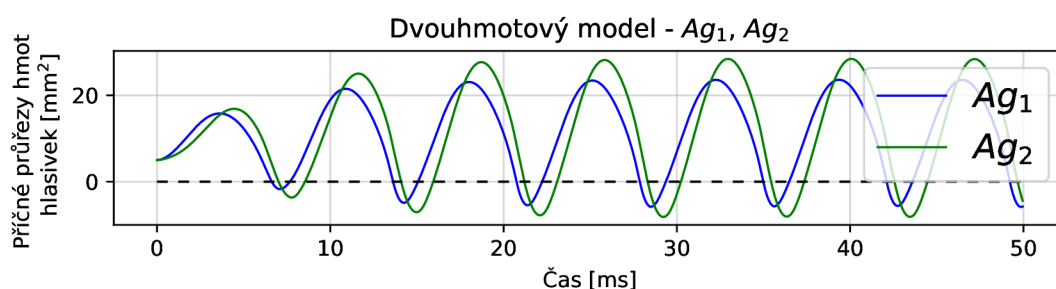
Na Obr. 3.5 je zobrazen průběh objemového průtoku v *glottis* během prvních 50 ms. Je patrné, že v prvních dvou cyklech má na výsledný průběh vliv přechodový děj, který poté vymizí, a objemový průtok se ustálí na hodnotách, které se pravidelně opakují. Maximální průtok odpovídá zhruba 500 cm³/s, což koresponduje s výsledky v [40]. Nulové hodnoty objemového průtoku označují fáze kmitu, kdy je alespoň jedna hmota hlasivky v kontaktu s protější hlasivkou. Fáze nárůstu objemového průtoku korespondují s fází otvírání *glottis*, během které jsou hlasivky v konvergentním tvaru (fáze 2 na Obr. 1.12 b), naopak pokles označuje fázi uzavírání *glottis*, kdy jsou hlasivky v divergentním tvaru (fáze 4 na Obr. 1.12 b).



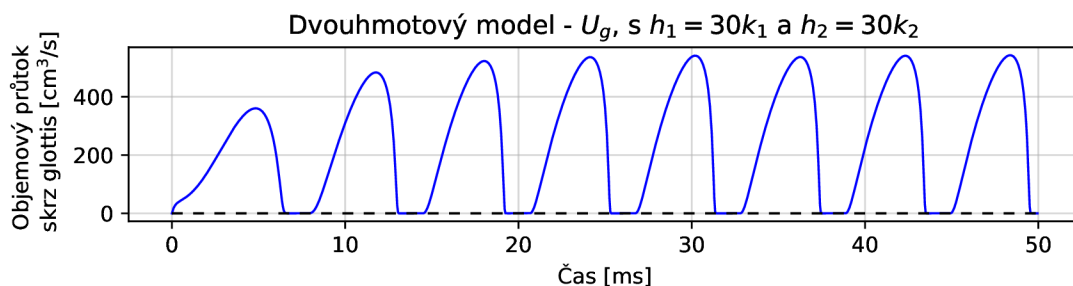
Obr. 3.5. Dvouhmový model – objemový průtok v *glottis*.

Obr. 3.6 a 3.7 mají totožný průběh. Jsou na nich zobrazeny výchylky x_1 a x_2 hmot m_1 a m_2 a příčné průřezy A_{g1} a A_{g2} v *glottis*, které těmto hmotám přísluší. Je zde opět vidět přechodový děj, který se po dvou cyklech ustálí na harmonickém kmitání. Hmota m_1 předchází hmotě m_2 , což odpovídá fázovému posuvu mezi dolní a horní částí hlasivky.

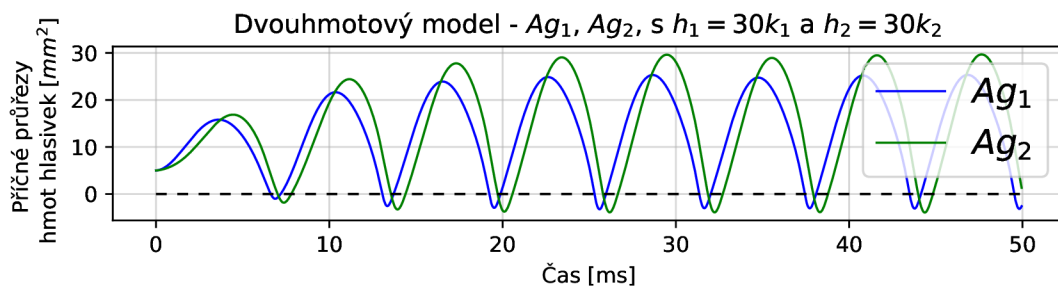
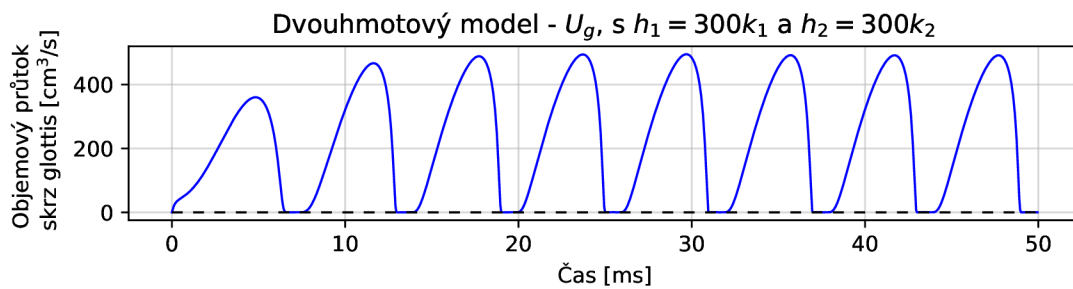
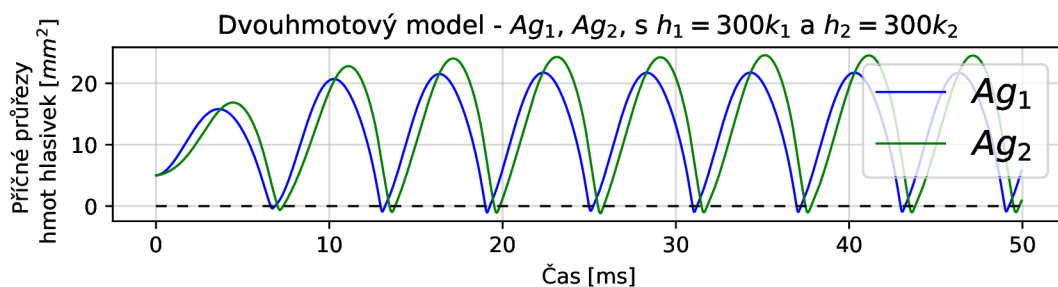
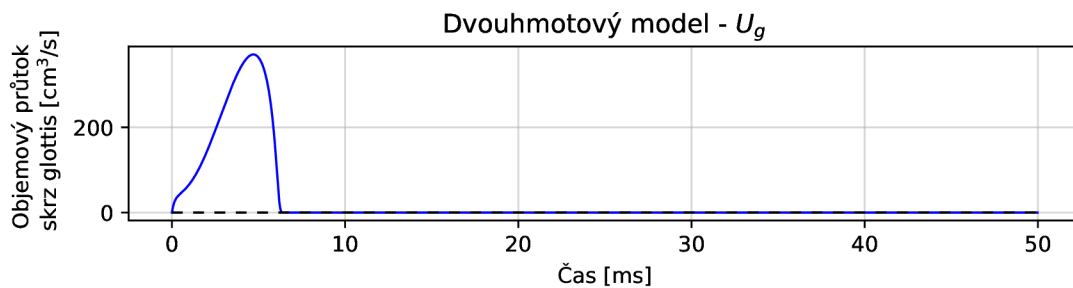
Z grafů je také patrné, že příčné průřezy nabývají i záporných hodnot, což by nemělo nastat, protože fyzikálně není možné, aby se hlasivky překrývaly. Matematicky je možné toho těmito simulacemi dosáhnout jen částečně. Lze pouze měnit tuhosti hlasivek při kontaktu, a zabránit tak většímu překrytí. Zvýšení tuhosti lze demonstrovat např. zvýšením parametrů h_1 a h_2 , a to z trojnásobku k_1 a k_2 na třicetnásobek, případně i třistanásobek.

Obr. 3.6. Dvouhmotový model – výchylky hmot m_1 a m_2 .Obr. 3.7. Dvouhmotový model – příčné průřezy v *glottis*.

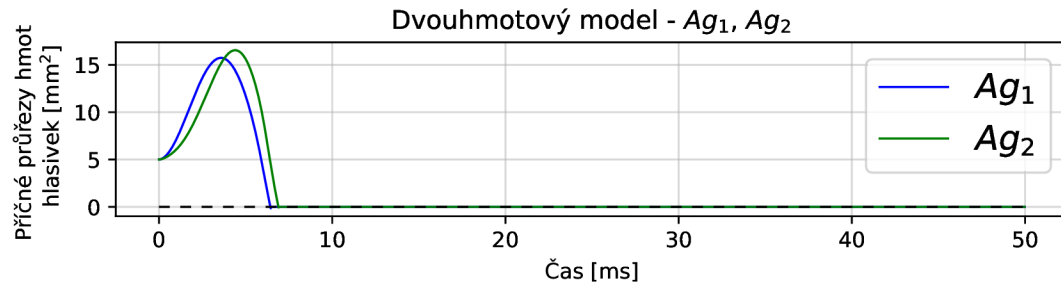
Objemový průtok a příčné průřezy při zvýšení parametrů h_1 a h_2 na třicetnásobek tuhostí k_1 a k_2 jsou zobrazeny na Obr. 3.8 a 3.9, na třistanásobek poté na Obr. 3.10 a 3.11. Jak je z průběhů vidět, minimalizuje se penetrace mezi hlasivkami a zároveň se zvyšuje frekvence kmitání. Frekvenci lze spočítat jako převrácenou hodnotu periody, která se určí z časových hodnot dvou po sobě následujících ustálených maxim kmitu. Pro nemodifikovanou verzi (Obr. 3.5 až 3.7) je frekvence kmitání rovna 139.9 Hz, pro zvýšenou tuhost při kontaktu se frekvence zvyšuje na 165.3 Hz pro třicetnásobek tuhostí a 166.6 Hz pro třistanásobek tuhostí. Při dostatečném navýšení tuhosti při kontaktu hlasivek se tedy již frekvence příliš nemění.

Obr. 3.8. Dvouhmotový model – objemový průtok v *glottis* za zvýšení tuhostí při kontaktu 30×.

Pokud by byla místo zvýšení tuhosti při kontaktu použita podmínka, aby zůstaly příčné průřezy nulové, jakmile je nulový objemový průtok, nastal by případ na Obr. 3.12

Obr. 3.9. Dvuhmotový model – příčné průřezy v *glottis* za zvýšení tuhostí při kontaktu 30×.Obr. 3.10. Dvuhmotový model – objemový průtok v *glottis* za zvýšení tuhostí při kontaktu 300×.Obr. 3.11. Dvuhmotový model – příčné průřezy v *glottis* za zvýšení tuhostí při kontaktu 300×.Obr. 3.12. Dvuhmotový model – objemový průtok v *glottis* za podmínky nulových příčných průřezů.

a 3.13. Hlasivky by jednou zakmitly a už by neexistoval způsob, jakým by se znova vybudily. Z tohoto důvodu je tedy nutné využít řešení z Obr. 3.5 až 3.11.

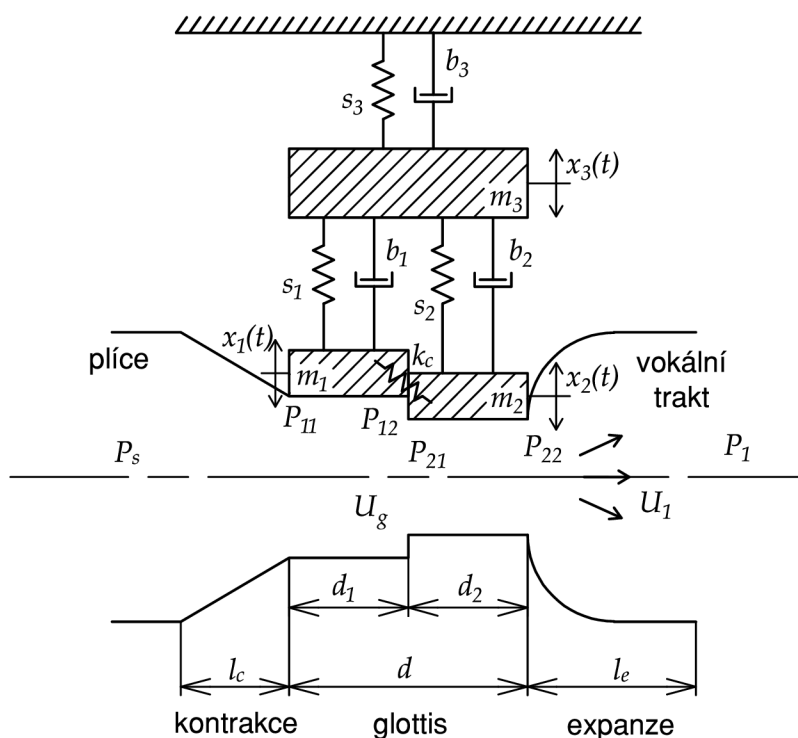


Obr. 3.13. Dvouhmotový model – příčné průřezy v *glottis* za podmínky nulových příčných průřezů.

4 Tříhmotový model body-cover

Další model, který je realizován jako fluidně-strukturně-akustická interakce mezi hlasivkami a proudícím vzduchem, je tříhmotový model body-cover. Tento model vychází z modelu Storyho a Titzeho a byl blíže popsán v kapitole 2.3. Interakce je modelována stejným způsobem jako dvouhmotový model v kapitole 3 a opět numericky vyřešena v programovacím jazyku *Python 3.9.7*.

Body-cover model je zobrazen na Obr. 4.1. Je vidět, že se obrázek velmi podobá Obr. 3.1, pouze je zde přidána hmota m_3 mezi původní dvě hmoty m_1 a m_2 a pevnou stěnu. Opět je modelována pouze jedna hlasivka, druhá hlasivka je při symetrickém kmitání zrcadlovým obrazem té první. Hlasivka se skládá ze tří hmotných prvků m_1 , m_2 a m_3 , které kmitají v laterálně-mediálním směru s výchylkami x_1 , x_2 a x_3 , model má proto tři stupně volnosti. Pružiny a tlumiče jsou realizovány stejně jako u dvouhmotového modelu. Nacházejí se zde nelineární pružiny s_1 , s_2 a s_3 , lineární spojovací pružina k_c a tlumiče b_1 , b_2 a b_3 . Délka hlasivek v kraniálně-kaudálním směru zůstává stejná, tedy $d_1 + d_2$, nemění se ani tloušťka l_g v anteriorně-posteriorním směru.

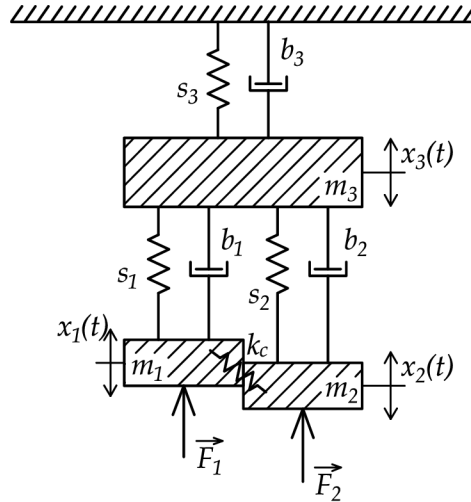


Obr. 4.1. Tříhmotový model body-cover, vytvořeno dle [49].

Proudění mezi hlasivkami je realizováno stejně jako u dvouhmotového modelu, protože v interakci se vzduchem jsou pouze hmoty m_1 a m_2 . Rovnice pro tlaky mezi hlasivkami a smyčky akustického obvodu proto odpovídají rovnicím (3.12) a (3.13). Nezměněné zůstávají i příčné průřezy A_{g1} a A_{g2} v *glottis* (rovnice (3.1)), protože i ty jsou dané posuvy hmot m_1 a m_2 .

4.1 Kmitání hlasivek

Pohyb hlasivek je iniciován budicími silami F_1 a F_2 , které se řídí Tab. 3.1, dle Obr. 4.2. Pohybové rovnice opět vychází z Lagrangeových rovnic II. druhu (3.16) a pro pružiny s lineárním průběhem byly odvozeny v bakalářské práci [70].



Obr. 4.2. Tříhmotový model – buzení hmot silami.

Zde jsou stejně jako u dvouhmotového modelu uvažovány pružiny s nelineárním průběhem s_1 , s_2 a s_3 , přičemž pro hmoty m_1 a m_2 se opět liší v závislosti na tom, zda je daná hmota v kontaktu s protější hlasivkou, nebo není. Pokud nejsou v kontaktu, jsou funkce nelineárních pružin následující:

$$s_1(x_1, x_3) = k_1 \cdot \left[(x_1 - x_3) + \eta_{ko} \cdot (x_1 - x_3)^3 \right] \quad \text{pro } x_1 > x_{1min}, \quad (4.1a)$$

$$s_2(x_2, x_3) = k_2 \cdot \left[(x_2 - x_3) + \eta_{ko} \cdot (x_2 - x_3)^3 \right] \quad \text{pro } x_2 > x_{2min}, \quad (4.1b)$$

pokud kontakt nastane u obou hmotných prvků:

$$s_1(x_1, x_3) = k_1 \left[(x_1 - x_3) + \eta_{kc} \cdot (x_1 - x_3)^3 \right] + \\ + h_1 \left[(x_1 - x_{1min}) + \eta_{kc} (x_1 - x_{1min})^3 \right] \quad \text{pro } x_1 \leq x_{1min}, \quad (4.2a)$$

$$s_2(x_2, x_3) = k_2 \left[(x_2 - x_3) + \eta_{kc} \cdot (x_2 - x_3)^3 \right] + \\ + h_2 \left[(x_2 - x_{2min}) + \eta_{kc} (x_2 - x_{2min})^3 \right] \quad \text{pro } x_2 \leq x_{2min}. \quad (4.2b)$$

Ve fázi kmitu hlasivky, kdy je v kontaktu pouze hmota m_1 , jsou rovnice nelineárních pružin kombinací (4.2a) a (4.1b). Pokud je v kontaktu pouze hmota m_2 , platí kombinace rovnic (4.1a) a (4.2b).

Případ, kdy by byla pružina s_3 v kontaktu, nemůže nastat, protože pružina není v přímém kontaktu s hmotou m_1 nebo m_2 , je proto dána vždy následující rovnicí:

$$s_3(x_3) = k_3 \cdot (x_3 + \eta_{ko} \cdot x_3^3). \quad (4.3)$$

Koeficienty η_{ko} a η_{kc} představují s třetí mocninou výchylky zpevnění během vychýlení z rovnovážné polohy, a to s otevřenou nebo uzavřenou *glottis*. Při kontaktu také přidávají tuhost parametry h_1 a h_2 , které jsou násobkem lineárních tuhostí k_1 a k_2 .

Pohybové rovnice mají následující tvar, který je odvozen v příloze B.1:

$$m_1 \ddot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 + s_1(x_1, x_3) + k_c(x_1 - x_2) = F_1, \quad (4.4a)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + b_2 \dot{x}_2 + s_2(x_2, x_3) + k_c(x_2 - x_1) = F_2, \quad (4.4b)$$

$$m_3 \ddot{x}_3 - b_1 \dot{x}_1 - b_2 \dot{x}_2 + (b_1 + b_2 + b_3) \ddot{x}_3 - s_1(x_1, x_3) - s_2(x_2, x_3) + s_3(x_3) = 0, \quad (4.4c)$$

kde $s_1(x_1, x_3)$ a $s_2(x_2, x_3)$ jsou dány (4.1), (4.2), $s_3(x_3)$ rovnicí (4.3), síly F_1 a F_2 dle Tab. 3.1 a konstanty tlumení b_1 , b_2 a b_3 jsou určeny následujícími vztahy:

$$b_1 = 2\xi_1 \sqrt{m_1 \cdot k_1}, \quad (4.5a)$$

$$b_2 = 2\xi_2 \sqrt{m_2 \cdot k_2}, \quad (4.5b)$$

$$b_3 = 2\xi_3 \sqrt{m_3 \cdot k_3}, \quad (4.5c)$$

kde koeficienty tlumení ξ_1 a ξ_2 závisí na otevřené nebo uzavřené *glottis*. Z pohybových rovnic se určí výchylky x_1 , x_2 a x_3 . Ty slouží k výpočtu příčných průřezů A_{g1} a A_{g2} , které jsou vstupy pro výpočet parametrů akustického obvodu a tlaků podél hlasivek.

4.2 Simulace

Stejně jako interakce mezi dvoumotovým modelem a proudícím vzduchem je i systém s třímotovým body-cover modelem popsán soustavou diferenciálních rovnic prvního a druhého řádu. Tyto rovnice lze opět aproximovat metodou konečných diferencí a Riemannovým součtem (3.21). Objemové průtoky v *glottis*, ve vokálním traktu a v ústech není třeba oproti dvoumotovému modelu upravovat. Platí pro ně stejné rovnice, tedy (3.24) pro U_{gi} , (3.26a) pro U_{1i} a (3.26b) pro U_{Ri} . Pro tlaky, které působí jako buzení na hlasivky, platí totéž, tedy rovnice (3.27).

Rovnice, které je nutné nově odvodit, jsou pohybové rovnice. Ty lze dle metody konečných diferencí převést z (4.4) na následující tvar:

$$\begin{aligned} \frac{m_1}{T^2}(x_{1i} - 2x_{1i-1} + x_{1i-2}) + \frac{b_1}{T}(x_{1i} - x_{1i-1}) - \frac{b_1}{T}(x_{3i} - x_{3i-1}) + s_1(x_{1i}, x_{3i}) + \\ + k_c(x_{1i-1} - x_{2i-1}) = F_{1i}, \end{aligned} \quad (4.6a)$$

$$\frac{m_2}{T^2}(x_{2i} - 2x_{2i-1} + x_{2i-2}) + \frac{b_2}{T}(x_{2i} - x_{2i-1}) - \frac{b_2}{T}(x_{3i} - x_{3i-1}) + s_2(x_{2i}, x_{3i}) + k_c(x_{2i-1} - x_{1i-1}) = F_{2i}, \quad (4.6b)$$

$$\frac{m_3}{T^2}(x_{3i} - 2x_{3i-1} + x_{3i-2}) - \frac{b_1}{T}(x_{1i} - x_{1i-1}) - \frac{b_2}{T}(x_{2i} - x_{2i-1}) + \frac{b_1 + b_2 + b_3}{T}(x_{3i} - x_{3i-1}) - s_1(x_{1i}, x_{3i})^* - s_2(x_{2i}, x_{3i})^* + s_3(x_{3i}) = 0, \quad (4.6c)$$

kde $s_1(x_{1i}, x_{3i})$ a $s_2(x_{2i}, x_{3i})$ závisí na tom, zda je hmota m_1 , respektive m_2 v kontaktu s protějšší hlasivkou. V rovnici (4.6c) jsou tyto funkce tuhosti pružin označeny *, protože hmota m_3 nemůže být v kontaktu. Platí pro ni z následujících rovnic pouze (4.7a) a (4.7b) a navíc rovnice (4.7e). Funkce pružin jsou ve formě metody konečných diferencí následující:

$$s_1(x_{1i}, x_{3i}) = k_1 \cdot \left[(x_{1i} - x_{3i}) + \eta_{ko} \cdot (x_{1i-1} - x_{3i})^3 \right] \quad \text{pro } x_{1i} > x_{1min}, \quad (4.7a)$$

$$s_2(x_{2i}, x_{3i}) = k_2 \cdot \left[(x_{2i} - x_{3i}) + \eta_{ko} \cdot (x_{2i-1} - x_{3i})^3 \right] \quad \text{pro } x_{2i} > x_{2min}, \quad (4.7b)$$

$$s_1(x_{1i}, x_{3i}) = k_1 \cdot \left[(x_{1i} - x_{3i}) + \eta_{kc} \cdot (x_{1i-1} - x_{3i})^3 \right] + h_1 \left[(x_{1i} - x_{1min}) + \eta_{kc}(x_{1i-1} - x_{1min})^3 \right] \quad \text{pro } x_{1i} \leq x_{1min}, \quad (4.7c)$$

$$s_2(x_{2i}, x_{3i}) = k_2 \cdot \left[(x_{2i} - x_{3i}) + \eta_{kc} \cdot (x_{2i-1} - x_{3i})^3 \right] + h_2 \left[(x_{2i} - x_{2min}) + \eta_{kc}(x_{2i-1} - x_{2min})^3 \right] \quad \text{pro } x_{2i} \leq x_{2min}, \quad (4.7d)$$

$$s_3(x_{3i}) = k_3 \cdot (x_{3i} + \eta_{ko} \cdot x_{3i}^3). \quad (4.7e)$$

Z pohybových rovnic je nutné vyjádřit výchylky x_{1i} , x_{2i} a x_{3i} . Celé odvození je uvedeno v příloze B.2. Pokud není ani jedna hmota v kontaktu s protějšší hlasivkou, lze rovnice pro výchylky x_{1i} a x_{2i} zapsat takto:

$$x_{1i} = \frac{\left(\frac{2m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} - k_c\right) \cdot x_{1i-1} - \frac{m_1}{T^2} \cdot x_{1i-2} + \left(\frac{b_1}{T} + k_1\right) \cdot x_{3i} - \frac{b_1}{T} \cdot x_{3i-1} + k_c \cdot x_{2i-1}}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1} + \frac{-k_1 \eta_{ko} \cdot (x_{1i-1} - x_{3i-1})^3 + F_{1i}}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1}, \quad (4.8a)$$

$$x_{2i} = \frac{\left(\frac{2m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} - k_c\right) \cdot x_{2i-1} - \frac{m_2}{T^2} \cdot x_{2i-2} + \left(\frac{b_2}{T} + k_2\right) \cdot x_{3i} - \frac{b_2}{T} \cdot x_{3i-1} + k_c \cdot x_{1i-1}}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2} + \frac{-k_2 \eta_{ko} \cdot (x_{2i-1} - x_{3i-1})^3 + F_{2i}}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2}. \quad (4.8b)$$

Pokud jsou obě hmoty v kontaktu, jsou rovnice následující:

$$x_{1_i} = \frac{\left(\frac{2m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} - k_c\right) \cdot x_{1_{i-1}} - \frac{m_1}{T^2} \cdot x_{1_{i-2}} + \left(\frac{b_1}{T} + k_1\right) \cdot x_{3_i} - \frac{b_1}{T} \cdot x_{3_{i-1}} + k_c \cdot x_{2_{i-1}}}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1} + \frac{-k_1 \eta_{kc} \cdot (x_{1_{i-1}} - x_{3_{i-1}})^3 + h_1 \cdot x_{1_{min}} - h_1 \cdot \eta_{kc} \cdot (x_{1_{i-1}} - x_{1_{min}})^3 + F_{1_i}}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1}, \quad (4.9a)$$

$$x_{2_i} = \frac{\left(\frac{2m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} - k_c\right) \cdot x_{2_{i-1}} - \frac{m_2}{T^2} \cdot x_{2_{i-2}} + \left(\frac{b_2}{T} + k_2\right) \cdot x_{3_i} - \frac{b_2}{T} \cdot x_{3_{i-1}} + k_c \cdot x_{1_{i-1}}}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2} + \frac{-k_2 \eta_{kc} \cdot (x_{2_{i-1}} - x_{3_{i-1}})^3 + h_2 \cdot x_{2_{min}} - h_2 \cdot \eta_{kc} \cdot (x_{2_{i-1}} - x_{2_{min}})^3 + F_{2_i}}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2}. \quad (4.9b)$$

Ve fázích, kdy je v kontaktu pouze jedna hmota, platí kombinace rovnic (4.9a) a (4.8b) pro m_1 v kontaktu a (4.8a) a (4.9b) pro m_2 v kontaktu. Pro výchylku x_{3_i} je nutné rozdělit rovnice na všechny čtyři případy – ani jedna hmota v kontaktu, v kontaktu pouze m_1 , v kontaktu pouze m_2 a v kontaktu obě hmoty. Protože jsou rovnice dlouhé, první tři případy jsou shrnuty v příloze B.2 v rovnicích (B.16) až (B.21). Poslední případ, tedy kontakt obou hmot, je nejnáročnější na vyjádření. Výchylka x_{3_i} má následující rovnici (pro přehlednost jsou stejně jako v příloze jednotlivé členy rovnice barevně odlišeny):

$$x_{3_i} = \frac{E_1 \cdot F_{1_i} + E_2 \cdot F_{2_i} - B_3 \cdot x_{3_{i-1}} - C_3 \cdot x_{3_{i-2}} - D_3 \cdot x_{3_{i-1}}^3}{A_3} + \frac{-B_1 \cdot x_{1_{i-1}} - C_1 \cdot x_{1_{i-2}} - D_1 \cdot (x_{1_{i-1}} - x_{3_{i-1}})^3}{A_3} + \frac{-B_2 \cdot x_{2_{i-1}} - C_2 \cdot x_{2_{i-2}} - D_2 \cdot (x_{2_{i-1}} - x_{3_{i-1}})^3}{A_3} + \frac{-G_1 \cdot (x_{1_{i-1}} - x_{1_{min}})^3 - H_1 \cdot x_{1_{min}} - G_2 \cdot (x_{2_{i-1}} - x_{2_{min}})^3 - H_2 \cdot x_{2_{min}}}{A_3}, \quad (4.10)$$

kde:

$$A_3 = \left[\left(\frac{m_3}{T^2} + \frac{b_1 + b_2 + b_3}{T} + k_1 + k_2 + k_3 \right) - \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right)^2}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1} - \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right)^2}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2} \right], \quad (4.11a)$$

$$B_3 = \left[\left(-\frac{2m_3}{T^2} - \frac{b_1 + b_2 + b_3}{T} \right) + \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right) \cdot \left(\frac{b_1}{T}\right)}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1} + \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right) \cdot \left(\frac{b_2}{T}\right)}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2} \right], \quad (4.11b)$$

$$C_3 = \frac{m_3}{T^2}, \quad (4.11c)$$

$$D_3 = k_3 \cdot \eta_{ko}, \quad (4.11d)$$

$$B_1 = \left[\frac{b_1}{T} - \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right) \cdot \left(\frac{2m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} - k_c\right)}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1} - \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right) \cdot k_c}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2} \right], \quad (4.11e)$$

$$C_1 = \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right) \cdot \left(\frac{2m_1}{T^2}\right)}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1}, \quad (4.11f)$$

$$D_1 = \left[-k_1 \cdot \eta_{kc} + \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right) \cdot (k_1 \cdot \eta_{kc})}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1} \right], \quad (4.11g)$$

$$B_2 = \left[\frac{b_2}{T} - \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right) \cdot \left(\frac{2m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} - k_c\right)}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2} - \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right) \cdot k_c}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1} \right], \quad (4.11h)$$

$$C_2 = \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right) \cdot \left(\frac{2m_2}{T^2}\right)}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2}, \quad (4.11i)$$

$$D_2 = \left[-k_2 \cdot \eta_{kc} + \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right) \cdot (k_2 \cdot \eta_{kc})}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2} \right], \quad (4.11j)$$

$$E_1 = \left[\frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right)}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1} \right], \quad (4.11k)$$

$$E_2 = \left[\frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right)}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2} \right], \quad (4.11l)$$

$$G_1 = \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right) \cdot (h_1 \cdot \eta_{kc})}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1}, \quad (4.11m)$$

$$H_1 = \left[-\frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right) \cdot h_1}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1} \right], \quad (4.11n)$$

$$G_2 = \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right) \cdot (h_2 \cdot \eta_{kc})}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2}, \quad (4.11o)$$

$$H_2 = \left[-\frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right) \cdot h_2}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2} \right]. \quad (4.11p)$$

V ostatních třech fázích dochází k drobným modifikacím rovnic: při otevřené *glottis* podél hmoty jsou odstraněny všechny tuhosti h příslušné hmoty, členy s x_{min} a z koeficientu η_{kc} se u příslušné hmoty stává η_{ko} . Stejně jako u dvouhmotového modelu, je třeba rovnice sepsat do skriptu v programu *Python 3.9.7*. Vzorkovací frekvence byla opět zvolena na 20 kHz a způsob vytvoření simulace zůstal totožný.

4.3 Parametry modelu

Číselné parametry, které během kmitání nemění svoji hodnotu, vycházejí z literatury [49] a byly upraveny dle [40] tak, aby byl body-cover model naladěn podobně jako dvouhmotový model v kap. 3.

Z [49] je převzat poměr hmotností jednotlivých hmotných prvků, ale celková hmotnost hlasivky zůstala stejná jako u dvouhmotového modelu. Zachovány dle Tab. 3.2 zůstaly i násobky tuhostí h_1 a h_2 při kontaktu a zpevňující koeficienty η_{ko} a η_{kc} . Nezměnila se ani geometrie hlasivky, tedy délky hmot d_1 a d_2 , tloušťka hlasivky l_g i klidové příčné průřezy A_{g01} a A_{g02} zůstaly stejné. Změny nastaly v tuhostech pružin a tlumicích koeficientech. Parametry vokálního traktu a vzduchu z Tab. 3.3 zůstaly nezměněny. Pro hlasivky tříhmotového body-cover modelu jsou parametry shrnuty v Tab. 4.1:

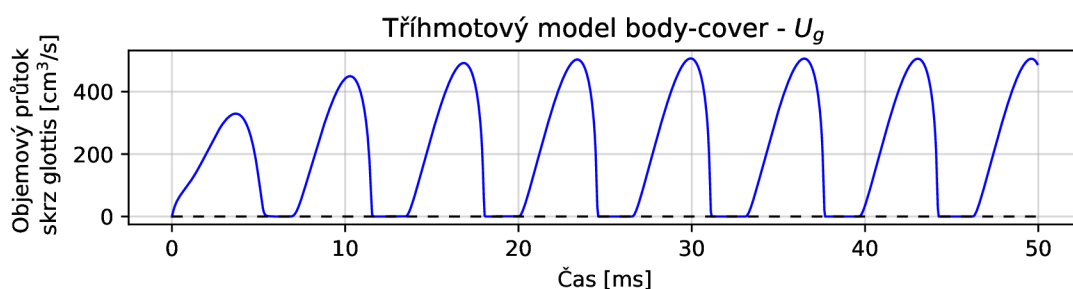
Veličina	Hodnota	Veličina	Hodnota
m_1	$0.15/7 \doteq 0.0214$ g	h_1	$3k_1 = 180$ N/m
m_2	$0.15/7 \doteq 0.0214$ g	h_2	$3k_2 = 45$ N/m
m_3	$0.15 \cdot 5/7 \doteq 0.1071$ g	$\xi_{1\text{otevřená}}$	0.4 [–]
k_1	60 N/m	$\xi_{1\text{uzavřená}}$	0.8 [–]
k_2	15 N/m	$\xi_{2\text{otevřená}}$	0.4 [–]
k_3	100 N/m	$\xi_{2\text{uzavřená}}$	0.8 [–]
k_c	25 N/m	d_1	0.25 cm
η_{ko}	100 [–]	d_2	0.05 cm
η_{kc}	500 [–]	$A_{g01} = A_{g02}$	0.05 cm ²
ξ_3	0.28 [–]	l_g	1.4 cm

Tab. 4.1. Číselné parametry hlasivky tříhmotového modelu body-cover.

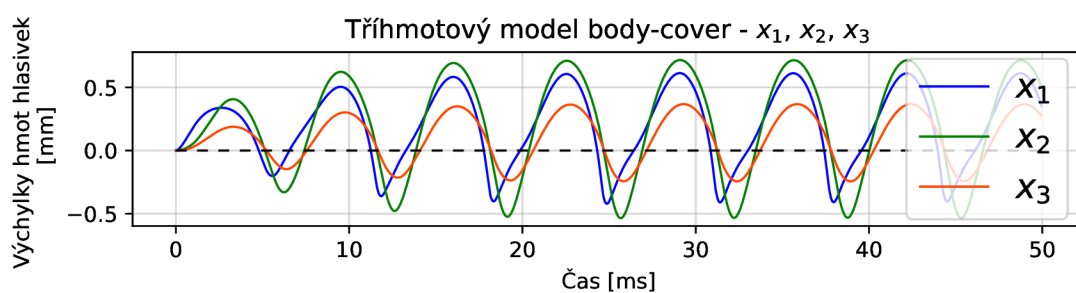
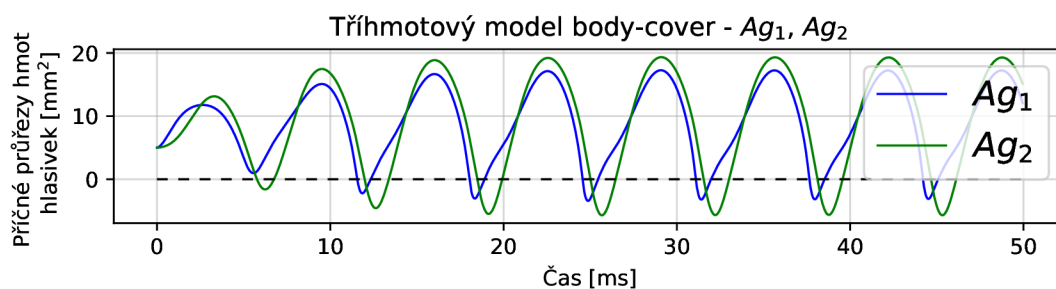
4.4 Vyhodnocení výsledků

Numerické řešení tříhmotového body-cover modelu hlasivky řešeného v interakci s proudícím vzduchem a vokálním traktem pomocí metody konečných diferencí je zobrazeno v následujících grafech.

Na Obr. 4.3 je zobrazen průběh objemového průtoku v *glottis* během prvních 50 ms. Na začátku kmitání je stejně jako u dvouhmotového modelu na Obr. 3.5 patrný přechodový děj. Maximální průtok byl laděn parametry dle dvouhmotového modelu, a dosahuje proto

Obr. 4.3. Tříhmotový model body-cover – objemový průtok v *glottis*.

také zhruba $500 \text{ cm}^3/\text{s}$. Nulové hodnoty během každého cyklu ukazují fáze kmitu, kdy je v kontaktu alespoň jedna hmota m_1 nebo m_2 s protější hlasivkou. Fáze, kdy objemový průtok roste, opět koresponduje s otevíráním *glottis*, při poklesu U_g se *glottis* uzavírá.

Obr. 4.4. Tříhmotový model body-cover – výchylky hmot m_1 a m_2 .Obr. 4.5. Tříhmotový model body-cover – příčné průřezy v *glottis*.

Výchylky x_1 a x_2 na Obr. 4.4 mají stejný průběh jako příčné průřezy A_{g1} a A_{g2} na Obr. 4.5. Opět je zde vidět přechodový děj, který po několika cyklech vymizí a hmotné prvky hlasivky se ustálí na harmonickém kmitání. Na Obr. 4.4 je také zobrazena výchylka x_3 , která kmitá s nižší amplitudou. To odpovídá předpokladům, protože hmota m_2 je nejtěžší a představuje tělo hlasivky. Výchylky x_1 a x_2 , znázorňující obal hlasivky, kmitají opět s fázovým posuvem, který odpovídá pohybu slizniční vlny ve směru zdola nahoru. Výchylka x_2 kmitá s vyšší amplitudou, což opět odpovídá předpokladům, protože pružina k_2 je méně tuhá než pružina k_1 . Průběh x_1 a A_{g1} není dokonale vyhlazený, což může být způsobeno interakcí s hmotou m_3 a vzájemnými poměry číselných parametrů. Frekvence kmitů je 151.5 Hz , což je zhruba o 7.6% více než u dvouhmotového modelu.

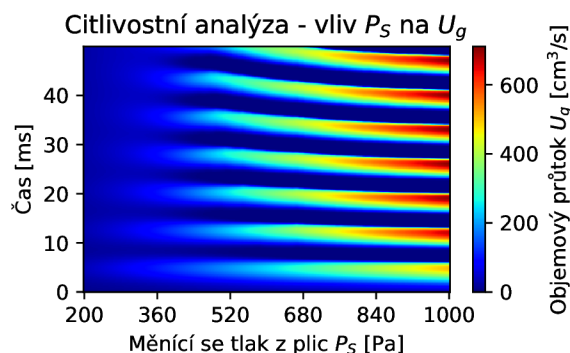
5 Citlivostní analýzy

Cílem této kapitoly je určit, jaký vliv má změna některého ze vstupních parametrů na kmitání hlasivek a objemový průtok. Bylo vytvořeno několik analýz pro oba modely, přičemž měněn byl vždycky pouze jeden parametr, ostatní parametry zůstaly konstantní na původních hodnotách dle tabulek v kapitolách 3.6 a 4.3.

5.1 Dvouhmotový model

Pro dvouhmotový model bylo vytvořeno celkem 8 citlivostních analýz. Grafy objemového průtoku U_g , výchylek x_2 a x_2 a příčných průřezů A_{g1} a A_{g2} v čase v závislosti na změně jednotlivých parametrů se nachází v příloze C.

První analýza se týká změny hodnoty statického tlaku P_S , který proudí z plic a působí jako buzení celého systému. Nominální hodnota je nastavena dle literatury na 8 cm H₂O, což odpovídá 784.532 Pa. Na Obr. 5.1 je zobrazen měnící se objemový průtok U_g v čase v závislosti na změně tlaku, jehož hodnoty se pohybují mezi 200 až 1000 Pa. Je patrné, že čím je tlak větší, tím vyšší je maximální objemový průtok. Pokud je ale tlak příliš malý, tedy okolo hodnoty 200 Pa, nedojde k vybuzení systému a hlasivky nebudou kmitat. Všechny příslušné grafy jsou shrnuty v příloze C.1.



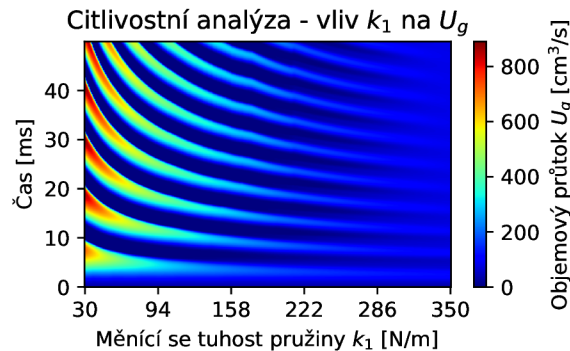
Obr. 5.1. Dvouhmotový model – vliv P_S na objemový průtok U_g .

Další parametr, u kterého byly měněny hodnoty, je hmotnost hmotného prvku m_1 . Aby byla zachována celková hmotnost hlasivky 0.15 g, hmotnost hmoty m_2 se při rostoucí m_1 zmenšovala. Jak je patrné z grafů v příloze C.2, čím se zvyšuje hmotnost m_1 vůči m_2 , tím dochází k větším amplitudám kmitů. Ovšem pokud jsou hmoty zhruba stejně těžké, nastane zlom a amplitudy se opět sníží.

Kromě změny poměrů hmotností lze měnit i poměr délek hmotných prvků d_1 a d_2 . Délka d_1 byla variována od hodnoty 1.5 mm, kdy je stejně dlouhá jako d_2 , až do hodnoty 2.9 mm, kdy zabírá délku téměř celé hlasivky. Změna těchto poměrů ale nemá příliš velký vliv na kmitání hlasivky, což lze vidět v příloze C.3.

Vliv má ale změna tuhosti k_1 hmotného prvku m_1 (příloha C.4), jak je zobrazeno na Obr. 5.2. S narůstající tuhostí klesá amplituda kmitání a mírně roste frekvence. Měnit lze i tuhost k_2 druhé hmoty (příloha C.5). Zde opět klesá amplituda s rostoucí tuhostí,

a to především u hmoty m_2 . Poslední lineární tuhost, kterou lze měnit, je tuhost k_c (příloha C.6). Změna kmitání je patrná pouze při nízkých hodnotách, kdy klesá frekvence a amplituda hmoty m_2 .



Obr. 5.2. Dvuhmotový model – vliv k_1 na objemový průtok U_g .

Poslední parametry dvuhmotového modelu, které byly variovány, jsou tuhosti h_1 a h_2 při kontaktu hmoty hlasivky s protější hlasivkou, jejichž grafy jsou zobrazeny v přílohách C.7 a C.8. Ty nemají příliš velký vliv na frekvenci kmitání a na průběh objemového průtoku. Čím ale rostou, tím méně dochází k penetraci do protější hlasivky u příslušné hmoty, na kmitání druhé hmoty nemají vliv.

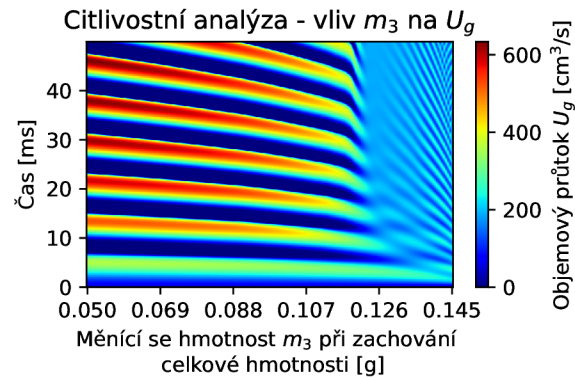
5.2 Tříhmotový model body-cover

Pro tříhmotový model body-cover bylo provedeno celkem 9 citlivostních analýz, které jsou zobrazeny na grafech v příloze D.

První analýza se opět týká statického tlaku P_S . Grafy vypadají podobně jako u dvuhmotového modelu, pro vybuzení kmitání hlasivek je ovšem potřeba jeho minimální hodnotu o něco málo zvýšit, proto jsou analýzy (příloha D.1) provedeny až od velikosti tlaku 400 Pa.

Zajímavý je průběh změny hmotnosti m_3 při zachování celkové hmotnosti a zároveň rovnosti m_1 a m_2 . Graf pro objemový průtok je zobrazen na Obr. 5.3. Hmotnost hmoty m_3 se mění od hodnoty 0.05 g, kdy jsou si všechny hmotnosti rovny, až do hodnoty 0.145 g, kdy hmota m_3 obsahuje většinu hmotnosti hlasivky. Zhruba od hodnoty 0.126 g je vidět rapidní pokles amplitud a zároveň zvýšení frekvence. Je to způsobeno nejspíš skutečností, že hmoty m_1 a m_2 jsou už tak málo hmotné, že není patrný jejich vzájemný pohyb. Z tříhmotového modelu se tak stává v podstatě model jednohmotový, který nedokáže simulovat pohyb slizniční vlny a samobuzené kmity hlasivek vyvolané proudícím vzduchem, jak bylo popsáno v kapitole 2.1. Další příslušné grafy jsou zobrazeny v příloze D.2.

Změna poměru délek d_1 a d_2 stejně jako u dvuhmotového modelu nemá příliš vliv na kmitání hmotných prvků hlasivek, jak je vidět v příloze D.3. Průběhy pro tuhosti k_1 a k_2 vypadají vůči sobě podobně, což je patrné z příloh D.4 a D.5. Největší vliv mají na průběh



Obr. 5.3. Tříhmotový model – vliv m_3 na objemový průtok U_g .

příslušné hmoty, které s rostoucí tuhostí snižují amplitudu. Obecně mírně zvyšují frekvenci kmitání. Tuhost k_3 ovlivňuje všechny průběhy výchylek podobně (příloha D.6). S rostoucí tuhostí zvyšuje frekvenci a hmotným prvkům snižuje amplitudu kmitu, nejvíce pak hmotě m_3 . Změna spojující pružiny k_c opět nemá příliš velký vliv (příloha D.7) a pro tuhosti pružin h_1 a h_2 při kontaktu platí stejné závěry, jaké byly uvedeny u dvouhmotového modelu, viz přílohy D.8 a D.9.

6 Závěr

V diplomové práci jsou shrnuty poznatky o tvorbě lidského hlasu, které vychází ze současně uznávané myoelasto-aerodynamické teorie. Dále je popsána anatomie hrtanu, jehož součástí jsou i hlasivky, které jsou doplněny o mechanické vlastnosti a pohyby konané při kmitání. Nakonec je stručně shrnuta charakteristika hlasu a tvorba hlásek.

Na anatomii a fyziologii navazuje přehled modelů se soustředěnými parametry, a to jak těch základních, ke kterým patří jednohmotový, dvouhmotový či tříhmotový model, tak i jejich modifikací a rozšíření o další méně známé modely.

Praktická část obsahuje simulaci interakce mezi hmotovými modely hlasivky a tekutinou. K provedení simulace byly vybrány dva základní modely, které tuto interakci umožňují, tedy dvouhmotový model a tříhmotový model body-cover, který se skládá z těla a obalu, a respektuje proto více vrstev hlasivky.

Pro oba modely byla vytvořena fluidně-strukturně akustická interakce modelovaná soustavou rovnic, které se vzájemně ovlivňují v čase. Kmitání hlasivek bylo popsáno pohybovými rovnicemi, které vycházejí z Lagrangeových rovnic II. druhu. Proudění vzduchu, které lze považovat vůči rychlostem pohybu hlasivek za kvazistatické, bylo modelováno jednodimenzionální Bernoulliho rovnicí. Akustika byla zavedena do systému pomocí akustického obvodu vytvořeného dle elektro-akustické analogie a vyřešeného dle Kirchhoffových zákonů. Takto vznikla soustava diferenciálních rovnic, které jsou analyticky obtížně řešitelné, proto bylo provedeno řešení ve formě konečných diferencí. Tato metoda nahrazuje nekonečně malé diferenciální členy konečně velkými diferencemi a při použití dostatečně vysoké vzorkovací frekvence dává uspokojivé výsledky. Jednotlivé rovnice proto byly vyjádřeny a odvozeny pomocí této metody tak, aby byly snadno řešitelné v časové oblasti.

Parametry dvouhmotového modelu byly převzaty z literatury, kde je tento model popsán. Pro tříhmotový model body-cover byly parametry taktéž částečně převzaty, částečně ale naladěny tak, aby bylo možné modely vzájemně porovnat. Konkrétně byl body-cover model přizpůsoben tak, aby si odpovídaly maximální objemové průtoky obou modelů. Stanovení konkrétních číselných hodnot a vlastností materiálů v lidském těle je obecně ale těžké přesně definovat, protože se u každého člověka mírně liší.

Výsledky simulace dvouhmotového modelu se shodují s výsledky uvedenými v literatuře, ze které simulovaný model vychází. Byl vykreslen objemový průtok mezi hlasivkami, který má v čase periodický průběh. Je zde patrný pohyb hlasivek, který lze v rámci jedné periody rozdělit na fáze uzavřené a otevřené hlasivkové štěrbině. Během otevřené fáze, kdy mezi hlasivkami proudí vzduch, je možné pohyb dále rozdělit na fázi otevírání a uzavírání, mezi kterými hlasivky přecházejí z konvergentního na divergentní tvar. Dále byly vykresleny průběhy výchylek obou hmot a příčných průřezů v hlasivkové štěrbině. Na nich je patrný pohyb slizniční vlny, protože pohyb dolní hmoty hlasivky předchází pohyb hmoty horní.

Tříhmotový model body-cover byl modelován na stejném principu jako dvouhmotový. Změněny byly pouze pohybové rovnice, které se ovšem přidáním třetí hmoty výrazně zkomplikovaly. Na výsledných grafech je, kromě jevů zmíněných u dvouhmotového modelu, patrná menší výchylka hmoty, která představuje tělo hlasivky, což koresponduje s fyziologickými předpoklady.

Na základě nejasností s číselnými vstupními parametry byly nakonec pro oba modely vytvořeny citlivostní analýzy. Ty představují vliv změny jednotlivých parametrů při zachování ostatních parametrů konstantních, což ukazuje vliv variability různých vstupních hodnot na výsledné kmitání hlasivek. Nejzajímavější a nejvíce ovlivňující byla změna statického tlaku, který působí jako buzení celého systému, změna tuhosti nejtěžší z hmot či změna vzájemného poměru hmotností jednotlivých hmotných prvků.

Provedené fluidně-strukturně-akustické interakce těchto modelů hlasivek mohou sloužit k výzkumu povahy interakce mezi zmíněnými prostředími a přispět k pochopení vzniku lidského hlasu. Vycházejí ze základních fyzikálních principů a řešení jejich simulace dává výsledky v rozumném časovém horizontu. Na práci by také bylo možné dále navázat např. složitějšími modely, které by se více blížily chování skutečných hlasivek, nebo studiem nelinearit a hlasových přeskoků při změnách rejstříků.

Literatura

- [1] TITZE, Ingo R. *Principles of Voice Production*. Eaglewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1994. ISBN 0-13-717893-X.
- [2] ŠVEC, Jan G. *Studium mechanicko-akustických vlastností zdroje lidského hlasu*. 1996.
- [3] PÁČ, Libor. *Anatomie člověka II: splachnologie, kardiovaskulární systém, žlázy s vnitřní sekrecí*. 1. vyd. Masarykova univerzita, 2007. ISBN 978-80-210-4291-9.
- [4] MURTOLO, Tiina. Investigating vowel production with computational physical modelling and glottal inverse filtering. 2019. ISBN ISBN 978-952-60-8619-4.
- [5] ČIHÁK, Radomír. *Anatomie 2*. 2. vyd. Grada Publishing, 2002. ISBN 80-247-0143-X.
- [6] BERG, Janwillem Van Der; VENNARD, W.; BURGER, D.; SHERVANIAN, C. *Voice Production: The Vibrating Larynx*. 1960.
- [7] FLANAGAN, James L.; ALLEN, Jont B.; HASEGAWA-JOHNSON, Mark A. *Speech Analysis and Perception*. 2. vyd. Springer Berlin, Heidelberg, 1965. ISBN 978-3-662-00849-2. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-00849-2>.
- [8] FANT, Gunnar. *Acoustic Theory of Speech Production*. Mouton, The Netherlands, 1960. ISBN 9027916004.
- [9] HÁJEK, Petr. *Výpočtové modelování samobuzeného kmitání lidských hlasivek*. 2021. Disertační práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce: Pavel Švancara.
- [10] BERG, Janwillem van den. Myoelastic-Aerodynamic Theory of Voice Production. *Journal of Speech and Hearing Research*. 1958, roč. 1, s. 227–244. ISSN 0022-4685. Dostupné z DOI: [10.1044/jshr.0103.227](https://doi.org/10.1044/jshr.0103.227).
- [11] TITZE, Ingo R. *The myoelastic aerodynamic theory of phonation*. National center for voice a speech, 2006. ISBN 0-87414-156-7.
- [12] ŠVEC, Jan G.; SCHUTTE, H. K.; CHEN, C. J.; TITZE, I. R. Integrative Insights into the Myoelastic-Aerodynamic Theory and Acoustics of Phonation. Scientific Tribute to Donald G. Miller. *Journal of Voice*. 2021. ISSN 0892-1997. Dostupné z DOI: [10.1016/J.JVOICE.2021.01.023](https://doi.org/10.1016/J.JVOICE.2021.01.023).
- [13] MIŠUN, Vojtěch. *Tajemství lidského hlasu*. 1. vyd. VUTIUM, 2010. ISBN 978-80-214-3499-8.
- [14] SAWASHIMA, Masayuki; COOPER, Franklin S. *Dynamic Aspects of Speech Production: current results, emerging problems and new instrumentation*. University of Tokyo Press, 1977. ISBN 0860081923.
- [15] STEVENS, Kenneth N.; HIRANO, Minoru. *Vocal Fold Physiology*. University of Tokyo Press, 1981. ISBN 0860082814.
- [16] HIRANO, Minoru; KAKITA, Yotaro. *Cover-body theory of vocal fold vibration*. Ed. DANILOFF, R. G. College Hill Press, 1985.
- [17] HIRANO, Minoru. Morphological Structure of the Vocal Cord as a Vibrator and its Variations. *Folia Phoniatrica et Logopaedica*. 1974, s. 89–94. ISSN 1021-7762. Dostupné z DOI: [10.1159/000263771](https://doi.org/10.1159/000263771).
- [18] HIRANO, Minoru. *Phonosurgery: Basic nad Clinical Investigations*. Sv. 21. 1975.
- [19] HIRANO, Minoru; KAKITA, Y.; OHMARU, K.; KURITA, S. Structure and Mechanical Properties of the Vocal Fold. 1982, roč. 7, s. 271–297. ISSN 0193-3434. Dostupné z DOI: [10.1016/B978-0-12-608607-2.50015-7](https://doi.org/10.1016/B978-0-12-608607-2.50015-7).
- [20] KIM, Moon Jung; HUNTER, Eric J; TITZE, Ingo R. Comparison of Human, Canine, and Ovine Laryngeal Dimensions. *Annals of Otolaryngology, Rhinology & Laryngology*. 2004, roč. 113, s. 60–68. Dostupné z DOI: [10.1177/000348940411300114](https://doi.org/10.1177/000348940411300114).
- [21] COLTON, Raymond H. Physiological mechanisms of vocal frequency control: The role of tension. *Journal of Voice*. 1988, roč. 2, s. 208–220. ISSN 0892-1997. Dostupné z DOI: [10.1016/S0892-1997\(88\)80079-1](https://doi.org/10.1016/S0892-1997(88)80079-1).
- [22] ZHANG, Zhaoyan. Cause-effect relationship between vocal fold physiology and voice production in a three-dimensional phonation model. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2016, roč. 139, s. 1493–1507. ISSN 0001-4966. Dostupné z DOI: [10.1121/1.4944754](https://doi.org/10.1121/1.4944754).
- [23] ALIPOUR, Fariborz; VIGMOSTAD, Sarah. Measurement of Vocal Folds Elastic Properties for Continuum Modeling. *Journal of Voice*. 2012, roč. 26, s. 816.e21–816.e29. ISSN 0892-1997. Dostupné z DOI: [10.1016/J.JVOICE.2012.04.010](https://doi.org/10.1016/J.JVOICE.2012.04.010).
- [24] ALIPOUR-HAGHIGHI, Fariborz; TITZE, Ingo R. Elastic models of vocal fold tissues. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1991, roč. 90, s. 1326–1331. ISSN 0001-4966. Dostupné z DOI: [10.1121/1.401924](https://doi.org/10.1121/1.401924).
- [25] COOPER, D. S.; PATRIDGE, L. D.; ALIPOUR-HAGHIGHI, F. *Vocal fold physiology: frontiers in basic science*. Singular Publishing Group, 1993.
- [26] MIN, Young B; TITZE, Ingo R; ALIPOUR-HAGHIGHI, Fariborz. Stress-Strain Response of the Human Vocal Ligament. *Annals of Otolaryngology, Rhinology & Laryngology*. 1994, roč. 104, s. 563–569. ISSN 0003-4894. Dostupné z DOI: [10.1177/000348949510400711](https://doi.org/10.1177/000348949510400711). doi: [10.1177/000348949510400711](https://doi.org/10.1177/000348949510400711).

- [27] PERLMAN, Adrienne L.; DURHAM, P. L. *Laryngeal function in phonation and respiration*. A College-Hill Press, Little, Brown a Company, 1987.
- [28] HAJI, Tomoyuki; MORI, Kazunori; OMORI, Koichi; ISSHIKI, Nobuhiko. Mechanical Properties of the Vocal Fold. *Acta Oto-Laryngologica*. 1992, roč. 112, s. 559–565. ISSN 0001-6489. Dostupné z DOI: 10.3109/00016489209137440. doi: 10.3109/00016489209137440.
- [29] PERLMAN, Adrienne L.; TITZE, Ingo R. Development of an in Vitro Technique for Measuring Elastic Properties of Vocal Fold Tissue. *Journal of Speech, Language, and Hearing Research*. 1988, roč. 31, s. 288–298. Dostupné z DOI: 10.1044/jshr.3102.288. doi: 10.1044/jshr.3102.288.
- [30] BAER, Thomas. *Investigation of phonation using excised larynxes*. 1975. Disertační práce. Massachusetts Institute of Technology.
- [31] JIANG, Jack; LIN, E.; HANSON, D. G. Vocal Fold Physiology. *Otolaryngologic Clinics of North America*. 2000, roč. 33, s. 699–718. ISSN 0030-6665. Dostupné z DOI: 10.1016/S0030-6665(05)70238-3.
- [32] ASHBY, Michael; MAIDMENT, John. *Úvod do obecné fonetiky*. Charles University in Prague, Karolinum Press, 2015. ISBN 9788024623221.
- [33] LUST, Robert M. The Pulmonary System. In: 2007, s. 1–6. Dostupné z DOI: 10.1016/B978-008055232-3.60307-1.
- [34] SILBERNAGL, Stefan; DESPOPOULOS, Agamemnon. *Atlas fyziologie člověka*. 6. vyd. Grada Publishing, 2004. ISBN 978-80-247-0630-6.
- [35] EWALD, Ernst Julius Richard. Zur Konstruktion von Polsterpfeifen. *Pflüger's Archiv für die gesamte Physiologie des Menschen und der Tiere*. 1913, roč. 152, s. 171–186. ISSN 1432-2013. Dostupné z DOI: 10.1007/BF01680977.
- [36] ALIPOUR, Fariborz; BRUCKER, Ch.; COOK, D.; GOMMEL, A.; KALTENBACHER, M.; MATTHEUS, W.; MONGEAU, L.; NAUMAN, E.; SCHWARZE, R.; TOKUDA, I.; ZORNER, S. Mathematical Models and Numerical Schemes for the Simulation of Human Phonation. *Current Bioinformatics*. 2011, roč. 6, s. 323–343. Dostupné z DOI: 10.2174/157489311796904655.
- [37] ERATH, Byron D.; ZAÑARTU, Matías; STEWART, Kelley C.; PLESNIAK, Michael W.; SOMMER, David E.; PETERSON, Sean D. A review of lumped-element models of voiced speech. *Speech Communication*. 2013, roč. 55, s. 667–690. ISSN 0167-6393. Dostupné z DOI: 10.1016/J.SPECOM.2013.02.002.
- [38] FLANAGAN, James L.; LANDGRAF, Lorinda L. Self Oscillating Source for Vocal Tract Synthesizers. 1968. Dostupné z DOI: 10.1109/TAU.1968.1161949.
- [39] CVETICANIN, Livija. Review on Mathematical and Mechanical Models of the Vocal Cord. *Journal of Applied Mathematics*. 2012, roč. 2012. Dostupné z DOI: 10.1155/2012/928591.
- [40] ISHIZAKA, K.; FLANAGAN, J. L. Synthesis of Voiced Sounds From a Two-Mass Model of the Vocal Cords. *The Bell System Technical Journal*. 1972, roč. 51.
- [41] CHILDERS, D G; MOORE, G P. A model for vocal fold vibratory motion, contact area, and the electroglottogram. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1986, roč. 80, s. 1309–1320. ISSN 0001-4966. Dostupné z DOI: 10.1121/1.394382. ObjectType-Article-1 SourceType-Scholarly Journals-1 ObjectType-Feature-2.
- [42] ISHIZAKA, K; ISSHIKI, N. Computer simulation of pathological vocal-cord vibration. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1976, roč. 60, s. 1193–1198. ISSN 0001-4966. Dostupné z DOI: 10.1121/1.381221.
- [43] STEINECKE, Ina; HERZEL, Hanspeter. Bifurcations in an asymmetric vocal-fold model. *Citation: The Journal of the Acoustical Society of America*. 1995, roč. 97, s. 1148. Dostupné z DOI: 10.1121/1.412061.
- [44] WURZBACHER, Tobias; SCHWARZ, R.; DÖLLINGER, M. Model-based classification of nonstationary vocal fold vibrations A finite-element model of vocal-fold vibration. *Citation: The Journal of the Acoustical Society of America*. 2006, roč. 120, s. 3003. Dostupné z DOI: 10.1121/1.2211550.
- [45] KOIZUMI, Takuya; TANIGUCHI, Shuji; HIROMITSU, Seijiro. Two-mass models of the vocal cords for natural sounding voice synthesis. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1987, roč. 82, s. 1179–1192. ISSN 0001-4966. Dostupné z DOI: 10.1121/1.395254.
- [46] DRESEL, Christian. *Biomechanical Modeling of the Human Voice: A Modified Two-Mass Model*. 2001. Diplomová práce. Friedrich-Alexander-Universität.
- [47] LUCERO, Jorge C. Chest- and falsetto-like oscillations in a two-mass model of the vocal folds. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1996, roč. 100, s. 3355–3359. ISSN 0001-4966. Dostupné z DOI: 10.1121/1.416976.
- [48] TOKUDA, Isao T.; HORÁČEK, J.; ŠVEC, J. G.; HERZEL, H. Comparison of biomechanical modeling of register transitions and voice instabilities with excised larynx experiments. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2007, roč. 122, s. 519–531. ISSN 0001-4966. Dostupné z DOI: 10.1121/1.2741210.
- [49] STORY, Brad H.; TITZE, Ingo R. Voice simulation with a body-cover model of the vocal folds. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1995, roč. 97, s. 1249–1260. ISSN 0001-4966. Dostupné z DOI: 10.1121/1.412234.
- [50] TITZE, Ingo R. Parameterization of the glottal area, glottal flow, and vocal fold contact area. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1984, roč. 75, s. 570–580. ISSN 0001-4966. Dostupné z DOI: 10.1121/1.390530.

- [51] KELLY, J. L. Jr.; LOCHBAUM, C. C. Speech Synthesis. *Proceedings of the Stockholm Speech Communication Seminar*. 1962, s. 127–130.
- [52] TITZE, Ingo; STORY, Brad. Rules for controlling low-dimensional vocal fold models with muscle activation. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2002, roč. 112, s. 1064–1076. Dostupné z DOI: 10.1121/1.1496080.
- [53] TITZE, Ingo R. Regulating glottal airflow in phonation: Application of the maximum power transfer theorem to a low dimensional phonation model. *Citation: The Journal of the Acoustical Society of America*. 2002, roč. 111, s. 367. Dostupné z DOI: 10.1121/1.1417526.
- [54] LILJENCRAFTS, Johan. A translating and rotating mass model of the vocal folds. 1991, roč. 32, s. 001–018.
- [55] TITZE, Ingo R. The Human Vocal Cords: A Mathematical Model. *Phonetica*. 1973, roč. 28, s. 129–170. Dostupné z DOI: doi:10.1159/000259453.
- [56] TITZE, Ingo R. The Human Vocal Cords: A Mathematical Model. *Phonetica*. 1974, roč. 29, s. 1–21. Dostupné z DOI: doi:10.1159/000259461.
- [57] KOB, Malte. Physical Modeling of the Singing Voice. 2002. ISBN 3-89722-997-8.
- [58] WONG, Darrell; ITO, M. R.; COX, N. B. Observation of perturbations in a lumped-element model of the vocal folds with application to some pathological cases. *Citation: The Journal of the Acoustical Society of America*. 1991, roč. 89, s. 383. ISBN 10.1121/1.400472. Dostupné z DOI: 10.1121/1.400472.
- [59] SCHWARZ, Raphael; DÖLLINGER, M.; WURZBACHER, T.; EYSHOLDT, U.; LOHSCHELLER, J. Nonlinear source-filter coupling in phonation. *Citation: The Journal of the Acoustical Society of America*. 2008, roč. 123, s. 2733. Dostupné z DOI: 10.1121/1.2902167.
- [60] WURZBACHER, Tobias; DÖLLINGER, M.; SCHWARZ, R. Spatiotemporal classification of vocal fold dynamics by a multimass model comprising time-dependent parameters. *Citation: The Journal of the Acoustical Society of America*. 2008, roč. 123, s. 2324. Dostupné z DOI: 10.1121/1.2835435.
- [61] YANG, Anxiong; LOHSCHELLER, J.; BERRY, D. A.; BECKER, S.; EYSHOLDT, U.; VOIGT, D.; DÖLLINGER, M. Biomechanical modeling of the three-dimensional aspects of human vocal fold dynamics. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2010, roč. 127, s. 1014–1031. ISSN 0001-4966. Dostupné z DOI: 10.1121/1.3277165.
- [62] LOUS, N.J.C.; HOFMANS, G.C.J.; VELDHUIS, R.N.J.; HIRSCHBERG, A. A Symmetrical Two-Mass Vocal-Fold Model Coupled to Vocal Tract and Trachea, with Application to Prosthesis Design. *Acustica*. 1998, roč. 84, s. 1135–1150.
- [63] TITZE, Ingo R. The physics of small-amplitude oscillation of the vocal folds. *Citation: The Journal of the Acoustical Society of America*. 1988, roč. 83, s. 1536. Dostupné z DOI: 10.1121/1.395910.
- [64] HORÁČEK, Jaromír; ŠVEC, Jan G. Aeroelastic Model of Vocal-fold-shaped Vibrating Element for Studying The Phonation Threshold. *Journal of Fluids and Structures*. 2002, s. 931–955. Dostupné z DOI: 10.1006/jfls.454.
- [65] HÉLIE, Thomas; SILVA, Fabrice. Self-oscillations of a Vocal Apparatus: A Port-Hamiltonian Formulation. In: 2017, s. 375–383. ISBN 978-3-319-68445-1.
- [66] ENCINA, Marco; YUZ, Juan; ZAÑARTU, Matías; GALINDO, Gabriel. Vocal Fold Modeling through the port-Hamiltonian Systems Approach. 2015. Dostupné z DOI: 10.1109/CCA.2015.7320832.
- [67] MORA, Luis; YUZ, Juan; RAMÍREZ, Hector; GORREC, Yann Le. A port-Hamiltonian Fluid-Structure Interaction Model for the Vocal folds. *IFAC-PapersOnLine*. 2018, roč. 51, s. 62–67. Dostupné z DOI: 10.1016/j.ifacol.2018.06.016.
- [68] MORA, Luis; RAMÍREZ, Hector; YUZ, Juan; GORREC, Yann Le; ZAÑARTU, Matías. Energy-based fluid–structure model of the vocal folds. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*. 2020, roč. 38. Dostupné z DOI: 10.1093/imamci/dnaa031.
- [69] RISSE, Thomas; HÉLIE, Thomas; SILVA, Fabrice; WETZEL, Victor. *Lumped Parameter Modelling and Simulation of a Simplified Vocal Apparatus in the Port-Hamiltonian Framework*. Forum Acusticum, 2023.
- [70] ŘEŘUCHOVÁ, Ivana. *Hmotové modely hlasivek buzené harmonicky*. 2022. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce: Petr Hájek.
- [71] BERG, Jw. Van den; ZANTEMA, J; DOORNENBAL, Peter. On the Air Resistance and the Bernoulli Effect of the Human Larynx. *Journal of the Acoustical Society of America*. 1957, roč. 29, s. 626–631.
- [72] JULIŠ, Karel; BREPTA, Rudolf. *Mechanika. II. díl, Dynamika*. 1. vyd. SNTL, 1987.

Seznam symbolů a zkratek

- A_1 příčný průřez vokálního traktu
 A_3 člen v rovnici pro výchylku x_{3_i} body-cover modelu
 A_c příčný průřez změny geometrie při kontrakci
 A_{g0i} příčný průřez *glottis* podél i-tého hmotného prvku za klidového stavu
 A_{gi} příčný průřez *glottis* podél i-tého hmotného prvku
 B_1, B_2, B_3 členy v rovnici pro výchylku x_{3_i} body-cover modelu
 C_1, C_2, C_3 členy v rovnici pro výchylku x_{3_i} body-cover modelu
 b_b konstanta tlumení hmotného prvku *body*
 b_i konstanta tlumení i-tého hmotného prvku
 c rychlost zvuku
 D diskriminant
 D_1, D_2, D_3 členy v rovnici pro výchylku x_{3_i} body-cover modelu
 d_i délka i-tého hmotného prvku
 E_1, E_2, E_3 členy v rovnici pro výchylku x_{3_i} body-cover modelu
 E_d disipativní energie
 E_k kinetická energie
 E_p potenciální energie
 f funkce
 F_1, F_2 formanty
 F_i budící síla působící na i-tý hmotný prvek
 f_0 základní frekvence kmitání
 G_1, G_2 členy v rovnici pro výchylku x_{3_i} body-cover modelu
 H_1, H_2 členy v rovnici pro výchylku x_{3_i} body-cover modelu
 h_i konstanta tuhosti pružiny při kolizi
 k_b konstanta tuhosti pružiny hmotného prvku *body*
 k_c konstanta tuhosti pružiny spojující hmotné prvky
 k_e koeficient obnovy tlaku
 k_i konstanta tuhosti i-té pružiny
 s_i funkce tuhosti i-té pružiny
 l_1 délka vokálního traktu
 L_1 setrvačnost vokálního traktu
 l_c délka změny geometrie při kontrakci
 l_e délka změny geometrie při expanzi
 l_g tloušťka hlasivky
 L_{gi} setrvačnost i-tého hmotného prvku
 L_R setrvačnost úst
 m_b hmotnost hmotného prvku *body*
 m_i hmotnost i-té hmoty, hmotného prvku
 p tlak v tekutině
 P výkon vnějších sil
 P_1 tlak ve vokálním traktu, supraglotický tlak
 $P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}$ tlaky podél hlasivky
 P_{mi} tlak působící jako buzení na i-tý hmotný prvek
 P_S statický tlak proudící z plic, subglotický tlak
 Q parametr určující mechanické vlastnosti hlasivky
 q_i zobecněná souřadnice
 \dot{q}_i rychlost (derivace) zobecněné souřadnice
 R_1 odpor vokálního traktu
 R_{ki} odpor i-tého hmotného prvku z akustické impedance
 R_R odpor úst
 R_{vi} odpor i-tého hmotného prvku z Hagen-Poiseuilleova zákona
 S_1 obvod vokálního traktu
 t čas
 T časový krok
 U_1 objemový průtok ve vokálním traktu
 U_g objemový průtok v *glottis*
 U_R objemový průtok v ústech
 $u(x)$ potenciál vnějšího konzervativního pole
 v rychlost proudění
 W práce vnějších sil
 x_i výchylka, posuv i-té hmoty v ose x
 \dot{x}_i rychlost i-té hmoty v ose x
 \ddot{x}_i zrychlení i-té hmoty v ose x
 x_{imin} výchylka i-té hmoty udávající přechod mezi stavem, kdy je nebo není hlasivka v kolizi
 η_{kc} zpevňující koeficient tuhosti při kolizi

η_{ki} zpevnující koeficient tuhosti i-té hmoty
 $\eta_{ki}^{\text{otevřená}}$ zpevnující koeficient tuhosti i-té hmoty bez kolize
 $\eta_{ki}^{\text{uzavřená}}$ zpevnující koeficient tuhosti i-té hmoty při kolizi
 η_{ko} zpevnující koeficient tuhosti bez kolize
 μ dynamická viskozita
 ω vlastní úhlová frekvence
 φ_i natočení
 $\dot{\varphi}_i$ úhlová rychlost
 π Ludolfovo číslo
 ρ hustota
 $\xi_{i}^{\text{otevřená}}$ koeficient tlumení i-té hmoty bez kolize
 $\xi_{i}^{\text{uzavřená}}$ koeficient tlumení i-té hmoty při kolizi

3D trojrozměrný, prostorový

kol. kolektiv

m. *musculus*, sval

n. *nervus*, nerv

A Dvouhmotový model – odvození rovnic

Zde jsou odvozeny rovnice, které se týkají dvouhmotového modelu z kap. 2.2, ale bylo by příliš zdlouhavé a nepřehledné rovnice odvozovat přímo v kapitole.

A.1 Tlaky podél hlasivek

Zde jsou postupně odvozeny tlaky P_{m1} a P_{m2} (rovnice (3.13) z kapitoly 3.4), které působí jako buzení hmotných prvků m_1 a m_2 . Z rovnic (3.3) až (3.7) z kapitoly 3.2 lze odvodit jednotlivé tlaky působící podél hlasivek a ve vokálním traktu:

$$P_{11} = P_S - 1.37 \frac{\rho}{2} \left(\frac{U_g}{A_{g1}} \right)^2 - \int_0^{l_c} \frac{\rho}{A_c(x)} dx \cdot \frac{dU_g}{dt}, \quad (\text{A.1a})$$

$$P_{12} = P_{11} - 12 \frac{\mu \cdot l_g^2 \cdot d_1}{A_{g1}^3} \cdot U_g - \frac{\rho \cdot d_1}{A_{g1}} \cdot \frac{dU_g}{dt}, \quad (\text{A.1b})$$

$$P_{21} = P_{12} - \frac{1}{2} \rho \cdot U_g^2 \left(\frac{1}{A_{g2}^2} - \frac{1}{A_{g1}^2} \right), \quad (\text{A.1c})$$

$$P_{22} = P_{21} - 12 \frac{\mu \cdot l_g^2 \cdot d_2}{A_{g2}^3} \cdot U_g - \frac{\rho \cdot d_2}{A_{g2}} \cdot \frac{dU_g}{dt}, \quad (\text{A.1d})$$

$$P_1 = P_{22} + \frac{\rho}{2} \left(\frac{U_g}{A_{g2}} \right)^2 \cdot 2 \frac{A_{g2}}{A_1} \left(1 - \frac{A_{g2}}{A_1} \right). \quad (\text{A.1e})$$

Z těchto tlaků lze vyjádřit tlaky P_{m1} a P_{m2} působící na hmoty hlasivky. Nejdříve vyjádření P_{12} v závislosti na P_S a s použitím parametrů akustického obvodu z rovnic (3.8b) a (3.8c) (tlak P_{11} již takto vyjadřovat není třeba):

$$\begin{aligned} P_{12} &= P_S - 1.37 \frac{\rho}{2} \left(\frac{U_g}{A_{g1}} \right)^2 - 12 \frac{\mu \cdot l_g^2 \cdot d_1}{A_{g1}^3} \cdot U_g - \frac{\rho \cdot d_1}{A_{g1}} \cdot \frac{dU_g}{dt} = \\ &= P_S - 1.37 \frac{\rho}{2} \left(\frac{U_g}{A_{g1}} \right)^2 - R_{v1} \cdot U_g - L_{g1} \cdot \frac{dU_g}{dt}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Tlak P_{m1} má následující podobu:

$$\begin{aligned} P_{m1} &= \frac{1}{2} (P_{11} + P_{12}) = \\ &= \frac{1}{2} \left[P_S - 1.37 \frac{\rho}{2} \left(\frac{U_g}{A_{g1}} \right)^2 + P_S - 1.37 \frac{\rho}{2} \left(\frac{U_g}{A_{g1}} \right)^2 - R_{v1} \cdot U_g - L_{g1} \cdot \frac{dU_g}{dt} \right] = \\ &= P_S - 1.37 \frac{\rho}{2} \left(\frac{U_g}{A_{g1}} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(R_{v1} \cdot U_g + L_{g1} \cdot \frac{dU_g}{dt} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Stejně jako P_{12} lze vyjádřit i tlaky P_{21} a P_{22} , a to v závislosti na P_{m1} při dosazení z rovnic (3.9b) a (3.9c):

$$\begin{aligned} P_{21} &= P_{12} - \frac{1}{2} \rho \cdot U_g^2 \left(\frac{1}{A_{g2}^2} - \frac{1}{A_{g1}^2} \right) = \\ &= P_S - 1.37 \frac{\rho}{2} \left(\frac{U_g}{A_{g1}} \right)^2 - R_{v1} \cdot U_g - L_{g1} \cdot \frac{dU_g}{dt} - \frac{1}{2} \rho \cdot U_g^2 \left(\frac{1}{A_{g2}^2} - \frac{1}{A_{g1}^2} \right) = \\ &= P_{m1} - \frac{1}{2} \left(R_{v1} \cdot U_g + L_{g1} \cdot \frac{dU_g}{dt} \right) - \frac{1}{2} \rho \cdot U_g^2 \left(\frac{1}{A_{g2}^2} - \frac{1}{A_{g1}^2} \right). \quad (\text{A.4a}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{22} &= P_{21} - 12 \frac{\mu \cdot l_g^2 \cdot d_2}{A_{g2}^3} \cdot U_g - \frac{\rho \cdot d_2}{A_{g2}} \cdot \frac{dU_g}{dt} = \\ &= P_{21} - R_{v2} \cdot U_g - L_{g2} \cdot \frac{dU_g}{dt} = \\ &= P_{m1} - \frac{1}{2} \left(R_{v1} \cdot U_g + L_{g1} \cdot \frac{dU_g}{dt} \right) - \frac{1}{2} \rho \cdot U_g^2 \left(\frac{1}{A_{g2}^2} - \frac{1}{A_{g1}^2} \right) - R_{v2} \cdot U_g - L_{g2} \cdot \frac{dU_g}{dt}. \quad (\text{A.4b}) \end{aligned}$$

Tlak P_{m2} má tedy následující tvar:

$$\begin{aligned} P_{m2} &= \frac{1}{2} (P_{21} + P_{22}) = \\ &= \frac{1}{2} \left[P_{m1} - \frac{1}{2} \left(R_{v1} \cdot U_g + L_{g1} \cdot \frac{dU_g}{dt} \right) - \frac{1}{2} \rho \cdot U_g^2 \left(\frac{1}{A_{g2}^2} - \frac{1}{A_{g1}^2} \right) + \right. \\ &+ \left. P_{m1} - \frac{1}{2} \left(R_{v1} \cdot U_g + L_{g1} \cdot \frac{dU_g}{dt} \right) - \frac{1}{2} \rho \cdot U_g^2 \left(\frac{1}{A_{g2}^2} - \frac{1}{A_{g1}^2} \right) - R_{v2} \cdot U_g - L_{g2} \cdot \frac{dU_g}{dt} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[2 \cdot P_{m1} - \left(R_{v1} \cdot U_g + L_{g1} \cdot \frac{dU_g}{dt} \right) - R_{v2} \cdot U_g - L_{g2} \cdot \frac{dU_g}{dt} - \rho \cdot U_g^2 \left(\frac{1}{A_{g2}^2} - \frac{1}{A_{g1}^2} \right) \right] \\ &= P_{m1} - \frac{1}{2} \left[(R_{v1} + R_{v2}) U_g + (L_{g1} + L_{g2}) \cdot \frac{dU_g}{dt} \right] - \frac{\rho}{2} \cdot U_g^2 \left(\frac{1}{A_{g2}^2} - \frac{1}{A_{g1}^2} \right). \quad (\text{A.5}) \end{aligned}$$

Tímto jsou výsledné tvary rovnic (A.3) a (A.5) rovny rovnicím (3.13) v kapitole 3.4.

A.2 Pohybové rovnice

Zde jsou odvozeny pohybové rovnice (3.19) z Lagrangeových rovnic II. druhu (3.16). Nejdříve je nutné vyjádřit jednotlivé energie, výkon a jejich derivace. Kinetická energie spolu se svými derivacemi dle rychlostí \dot{x}_1 a \dot{x}_2 je:

$$E_k = \frac{1}{2}m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \dot{x}_2^2, \quad (\text{A.6a})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_1} \right) = \frac{d}{dt} (m_1 \dot{x}_1) = m_1 \ddot{x}_1, \quad (\text{A.6b})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_2} \right) = \frac{d}{dt} (m_2 \dot{x}_2) = m_2 \ddot{x}_2. \quad (\text{A.6c})$$

Disipativní energie je vyjádřena spolu s derivacemi:

$$E_d = \frac{1}{2}b_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}b_2 \dot{x}_2^2, \quad (\text{A.7a})$$

$$\frac{\partial E_d}{\partial \dot{x}_1} = b_1 \dot{x}_1, \quad (\text{A.7b})$$

$$\frac{\partial E_d}{\partial \dot{x}_2} = b_2 \dot{x}_2. \quad (\text{A.7c})$$

Potenciální energie je jediná, která se liší od odvození v práci [70]. Zde je potřeba dosadit místo k_1 a k_2 výrazy pro $s_1(x_1)$ a $s_2(x_2)$ z rovnic (3.17) v případě hmot bez kontaktu, respektive (3.18) pro hlasivky v kontaktu, nebo pokud je jen jedna hmota v kontaktu s protilehlou hmotou, tak jejich kombinace. Nejdříve bude uvažován případ, kdy není ani jedna hmota hlasivky v kontaktu:

$$E_p = \frac{1}{2}k_1 x_1^2 + \frac{1}{4}k_1 \eta_{k1} x_1^4 + \frac{1}{2}k_2 x_2^2 + \frac{1}{4}k_2 \eta_{k2} x_2^4 + \frac{1}{2}k_c(x_2 - x_1)^2, \quad (\text{A.8a})$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x_1} = k_1 x_1 + k_1 \eta_{k1} x_1^3 + k_c(x_1 - x_2), \quad (\text{A.8b})$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x_2} = k_2 x_2 + k_2 \eta_{k2} x_2^3 + k_c(x_2 - x_1), \quad (\text{A.8c})$$

kde první dva členy v (A.8b) a (A.8c) odpovídají rovnicím (3.17). Pokud by byly obě hlasivky v kontaktu, potenciální energie a její derivace by vypadaly následovně:

$$\begin{aligned} E_p = & \frac{1}{2}k_1 x_1^2 + \frac{1}{4}k_1 \eta_{k1} x_1^4 + \frac{1}{2}h_1(x_1 - x_{1min})^2 + \frac{1}{4}h_1 \eta_{k1} (x_1 - x_{1min})^4 + \\ & + \frac{1}{2}k_2 x_2^2 + \frac{1}{4}k_2 \eta_{k2} x_2^4 + \frac{1}{2}h_2(x_2 - x_{2min})^2 + \frac{1}{4}h_2 \eta_{k2} (x_2 - x_{2min})^4 + \\ & + \frac{1}{2}k_c(x_2 - x_1)^2, \end{aligned} \quad (\text{A.9a})$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x_1} = k_1 x_1 + k_1 \eta_{k1} x_1^3 + h_1(x_1 - x_{1min}) + h_1 \eta_{k1} (x_1 - x_{1min})^3 + k_c(x_1 - x_2), \quad (\text{A.9b})$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x_2} = k_2 x_2 + k_2 \eta_{k2} x_2^3 + h_2(x_2 - x_{2min}) + h_2 \eta_{k2} (x_2 - x_{2min})^3 + k_c(x_2 - x_1), \quad (\text{A.9c})$$

kde první čtyři členy v (A.9b) a (A.9c) odpovídají rovnicím (3.18). V části periody cyklu kmitání, kdy je v kontaktu pouze dolní hmota m_1 , by derivace potenciální energie byly kombinací rovnic (A.9b) a (A.8c). Naopak pokud je v kontaktu pouze hmota m_2 , jsou derivace potenciální energie kombinací rovnic (A.8b) a (A.9c).

Výkon vnějších sil spolu s derivacemi vypadá takto:

$$P = F_1 \dot{x}_1^2 + F_2 \dot{x}_2^2, \quad (\text{A.10a})$$

$$\frac{\partial P}{\partial \dot{x}_1} = F_1, \quad (\text{A.10b})$$

$$\frac{\partial P}{\partial \dot{x}_2} = F_2, \quad (\text{A.10c})$$

kde se síly F_1 a F_2 řídí tabulkou 3.1. Dosazením do Lagrangeovy rovnice II. druhu vznikne soustava dvou pohybových rovnic, které jsou shodné s rovnicemi (3.19):

$$m_1 \ddot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 + s_1(x_1) + k_c(x_1 - x_2) = F_1, \quad (\text{A.11a})$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + b_2 \dot{x}_2 + s_2(x_2) + k_c(x_2 - x_1) = F_2, \quad (\text{A.11b})$$

přičemž za $s_1(x_1)$ a $s_2(x_2)$ je nutné dosadit dle výše uvedených rovnic první dva členy z (A.8b), (A.8c), (A.9b) a (A.9c).

A.3 Metoda konečných diferencí – objemové průtoky

Zde je sepsáno odvození rovnic (3.24), (3.26a) a (3.26b) objemových průtoků U_{g_i} v *glottis*, U_{1_i} ve vokálním traktu a U_{R_i} v ústech z rovnic pro smyčky akustického obvodu (3.22). Z rovnice g-smyčky lze odvodit objemový průtok U_{g_i} v *glottis* v i -tém časovém kroku:

$$(R_{k1_i} + R_{k2_i}) \cdot |U_{g_i}| \cdot U_{g_i} + \left(R_{v1_i} + R_{v2_i} + R_1 + \frac{L_{g1_i} + L_{g2_i} + L_1}{T} \right) \cdot U_{g_i} + \\ - \left(\frac{L_{g1_i} + L_{g2_i} + L_1}{T} \right) \cdot U_{g_{i-1}} + \frac{1}{C_1} \cdot \sum_{j=0}^{i-1} (U_{g_j} - U_{1_j}) - P_S = 0. \quad (\text{A.12})$$

Z této rovnice vyplývá, že má několik možných řešení. Vzhledem k tomu, že není uvažován během kmitání jakýkoli záporný tok, lze rovnici upravit takto:

$$(R_{k1_i} + R_{k2_i}) \cdot U_{g_i}^2 + \left(R_{v1_i} + R_{v2_i} + R_1 + \frac{L_{g1_i} + L_{g2_i} + L_1}{T} \right) \cdot U_{g_i} + \\ - \left(\frac{L_{g1_i} + L_{g2_i} + L_1}{T} \right) \cdot U_{g_{i-1}} + \frac{1}{C_1} \cdot \sum_{j=0}^{i-1} (U_{g_j} - U_{1_j}) - P_S = 0. \quad (\text{A.13})$$

Rovnice je kvadratická, lze proto spočítat diskriminant:

$$D = \left(R_{v1_i} + R_{v2_i} + R_1 + \frac{L_{g1_i} + L_{g2_i} + L_1}{T} \right)^2 - \\ - 4 \cdot (R_{k1_i} + R_{k2_i}) \cdot \left[- \left(\frac{L_{g1_i} + L_{g2_i} + L_1}{T} \right) \cdot U_{g_{i-1}} + \frac{1}{C_1} \cdot \sum_{j=0}^{i-1} (U_{g_j} - U_{1_j}) - P_S \right]. \quad (\text{A.14})$$

Z diskriminantu lze poté spočítat vztah pro U_{g_i} , přičemž jsou možná dvě řešení:

$$U_{g_{i,2}} = \frac{-\left(R_{v_{1_i}} + R_{v_{2_i}} + R_1 + \frac{L_{g_{1_i}} + L_{g_{2_i}} + L_1}{T}\right) \pm \sqrt{D}}{2 \cdot (R_{k_{1_i}} + R_{k_{2_i}})}, \quad (\text{A.15})$$

kde rozhodnutí, zda nastane případ s $+\sqrt{D}$ nebo s $-\sqrt{D}$, je určeno podle toho, které z řešení se více blíží hodnotě U_g v kroku $i - 1$.

Ze smyček l a R akustického obvodu (3.22) lze sestavit soustavu dvou rovnic o dvou neznámých U_{1_i} a U_{R_i} :

$$\left(\frac{L_1 + L_R}{T} + R_1\right) \cdot U_{1_i} - \frac{L_R}{T} \cdot U_{R_i} = \frac{L_1 + L_R}{T} \cdot U_{1_{i-1}} - \frac{L_R}{T} \cdot U_{R_{i-1}} - \frac{T}{C_1} \cdot \sum_{j=0}^{i-1} (U_{1_j} - U_{g_j}), \quad (\text{A.16a})$$

$$-\frac{L_R}{T} \cdot U_{1_i} + \left(\frac{L_R}{T} \cdot U_{R_i} + R_R\right) = -\frac{L_R}{T} \cdot U_{1_{i-1}} + \frac{L_R}{T} \cdot U_{R_{i-1}}. \quad (\text{A.16b})$$

Ze druhé rovnice lze vyjádřit U_{1_i} :

$$\begin{aligned} U_{1_i} &= \frac{T}{L_R} \cdot \left[\left(\frac{L_R}{T} + R_R\right) \cdot U_{R_i} + \frac{L_R}{T} \cdot U_{1_{i-1}} - \frac{L_R}{T} \cdot U_{R_{i-1}} \right] = \\ &= \left(\frac{T}{L_R} \cdot R_R + 1\right) \cdot U_{R_i} + U_{1_{i-1}} - U_{R_{i-1}}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Tato rovnice se dosadí do první rovnice a postupně se vyjádří U_{R_i} :

$$\begin{aligned} \left(\frac{L_1 + L_R}{T} + R_1\right) \cdot \left[\left(\frac{T}{L_R} \cdot R_R + 1\right) \cdot U_{R_i} + U_{1_{i-1}} - U_{R_{i-1}} \right] - \frac{L_R}{T} \cdot U_{R_i} &= \\ = \frac{L_1 + L_R}{T} \cdot U_{1_{i-1}} - \frac{L_R}{T} \cdot U_{R_{i-1}} - \frac{T}{C_1} \cdot \sum_{j=0}^{i-1} (U_{1_j} - U_{g_j}), \end{aligned} \quad (\text{A.18a})$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{L_1 + L_R}{T} + R_1\right) \cdot \left(\frac{T}{L_R} \cdot R_R + 1\right) \cdot U_{R_i} - \frac{L_R}{T} \cdot U_{R_i} + \left(\frac{L_1 + L_R}{T} + R_1\right) \cdot U_{1_{i-1}} - \\ - \left(\frac{L_1 + L_R}{T} + R_1\right) \cdot U_{R_{i-1}} = \frac{L_1 + L_R}{T} \cdot U_{1_{i-1}} - \frac{L_R}{T} \cdot U_{R_{i-1}} - \frac{T}{C_1} \cdot \sum_{j=0}^{i-1} (U_{1_j} - U_{g_j}), \end{aligned} \quad (\text{A.18b})$$

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\frac{L_1 + L_R}{T} + R_1 \right) \cdot \left(\frac{T}{L_R} \cdot R_R + 1 \right) - \frac{L_R}{T} \right] \cdot U_{R_i} = \\
& = \left(\frac{L_1 + L_R}{T} - \frac{L_1 + L_R}{T} - R_1 \right) \cdot U_{1_{i-1}} + \left(\frac{L_1 + L_R}{T} + R_1 - \frac{L_R}{T} \right) \cdot U_{R_{i-1}} - \\
& \quad - \frac{T}{C_1} \cdot \sum_{j=0}^{i-1} (U_{1_j} - U_{g_j}) = \\
& = -R_1 \cdot U_{1_{i-1}} + \left(\frac{L_1}{T} + R_1 \right) \cdot U_{R_{i-1}} - \frac{T}{C_1} \cdot \sum_{j=0}^{i-1} (U_{1_j} - U_{g_j}), \quad (\text{A.18c})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{R_i} &= \frac{-R_1 \cdot U_{1_{i-1}} + \left(\frac{L_1}{T} + R_1 \right) \cdot U_{R_{i-1}} - \frac{T}{C_1} \cdot \sum_{j=0}^{i-1} (U_{1_j} - U_{g_j})}{\left(\frac{L_1 + L_R}{T} + R_1 \right) \cdot \left(\frac{T}{L_R} \cdot R_R + 1 \right) - \frac{L_R}{T}} = \\
&= \frac{-R_1 \cdot U_{1_{i-1}} + \left(\frac{L_1}{T} + R_1 \right) \cdot U_{R_{i-1}} - \frac{T}{C_1} \cdot \sum_{j=0}^{i-1} (U_{1_j} - U_{g_j})}{\frac{L_1}{L_R} \cdot R_R + \frac{L_1}{T} + R_R + R_1 \cdot R_R \cdot \frac{T}{L_R} + R_1}. \quad (\text{A.18d})
\end{aligned}$$

Tímto jsou výsledné tvary rovnic (A.15), (A.17) a (A.18d) rovny rovnicím (3.24), (3.26a) a (3.26b).

B Tříhmotový model body-cover – odvození rovnic

Odvození některých rovnic pro tříhmotový model z kap. 4 se nachází zde, protože v kapitole by bylo zbytečně zdlouhavé a nepřehledné.

B.1 Pohybové rovnice

Zde jsou odvozeny pohybové rovnice (4.4) z Lagrangeových rovnic II. druhu (3.16). Opět je nejdříve nutné vyjádřit jednotlivé energie, výkon a jejich derivace. Rovnice pro kinetickou energii a její derivace podle \dot{x}_1 , \dot{x}_2 a \dot{x}_3 jsou následující:

$$E_k = \frac{1}{2}m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3 \dot{x}_3^2, \quad (\text{B.1a})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_1} \right) = \frac{d}{dt} (m_1 \dot{x}_1) = m_1 \ddot{x}_1, \quad (\text{B.1b})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_2} \right) = \frac{d}{dt} (m_2 \dot{x}_2) = m_2 \ddot{x}_2, \quad (\text{B.1c})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_3} \right) = \frac{d}{dt} (m_3 \dot{x}_3) = m_3 \ddot{x}_3. \quad (\text{B.1d})$$

Disipativní energie spolu s derivacemi je vyjádřena:

$$E_d = \frac{1}{2}b_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_3)^2 + \frac{1}{2}b_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_3)^2 + \frac{1}{2}b_3 \dot{x}_3^2, \quad (\text{B.2a})$$

$$\frac{\partial E_d}{\partial \dot{x}_1} = b_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_3) = b_1 \dot{x}_1 - b_1 \dot{x}_3, \quad (\text{B.2b})$$

$$\frac{\partial E_d}{\partial \dot{x}_2} = b_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_3) = b_2 \dot{x}_2 - b_2 \dot{x}_3, \quad (\text{B.2c})$$

$$\frac{\partial E_d}{\partial \dot{x}_3} = -b_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_3) - b_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + b_3 \dot{x}_3 = -b_1 \dot{x}_1 - b_2 \dot{x}_2 + (b_1 + b_2 + b_3) \dot{x}_3. \quad (\text{B.2d})$$

Potenciální energii je opět nutné rozdělit na případy, kdy jsou hmoty hlasivky ve fázi bez kontaktu a kdy ve fázi kontaktu. Pokud se hlasivky nedotýkají, jsou uvažovány nelineární pružiny $s_1(x_1, x_3)$ a $s_2(x_1, x_3)$ dle rovnic (4.1). Pružina $s_3(x_3)$ (rovnice (4.3)) je vždy uvažována bez kontaktu, protože není v přímém spojení s hmotou m_1 nebo m_2 . Potenciální energie a její derivace mají v tomto případě následující tvar:

$$E_p = \frac{1}{2}k_1 (x_1 - x_3)^2 + \frac{1}{4}k_1 \eta_{ko} (x_1 - x_3)^4 + \frac{1}{2}k_2 (x_2 - x_3)^2 + \frac{1}{4}k_2 \eta_{ko} (x_2 - x_3)^4 + \\ + \frac{1}{2}k_3 x_3^2 + \frac{1}{4}k_3 \eta_{ko} x_3^4 + \frac{1}{2}k_c (x_2 - x_1)^2, \quad (\text{B.3a})$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x_1} = k_1 (x_1 - x_3) + k_1 \eta_{ko} (x_1 - x_3)^3 + k_c (x_1 - x_2), \quad (\text{B.3b})$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x_2} = k_2 (x_2 - x_3) + k_2 \eta_{ko} (x_2 - x_3)^3 + k_c (x_2 - x_1), \quad (\text{B.3c})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_p}{\partial x_3} = & -k_1 (x_1 - x_3) - k_1 \eta_{ko} (x_1 - x_3)^3 - \\ & - k_2 (x_2 - x_3) - k_2 \eta_{ko} (x_2 - x_3)^3 + k_3 x_3 + k_3 \eta_{ko} x_3^3, \end{aligned} \quad (\text{B.3d})$$

kde první dva členy v (B.3b) a (B.3c) a první čtyři členy v (B.3d) odpovídají rovnicím (4.1) a poslední člen v (B.3d) odpovídá rovnici (4.3). Pokud jsou obě hmoty m_1 a m_2 v kontaktu s protější hlasivkou, rovnice potenciální energie a její derivace dle výchylek mají tento tvar:

$$\begin{aligned} E_p = & \frac{1}{2} k_1 (x_1 - x_3)^2 + \frac{1}{4} k_1 \eta_{kc} (x_1 - x_3)^4 + \frac{1}{2} h_1 (x_1 - x_{1min})^2 + \frac{1}{4} h_1 \eta_{kc} (x_1 - x_{1min})^4 + \\ & + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_3)^2 + \frac{1}{4} k_2 \eta_{kc} (x_2 - x_3)^4 + \frac{1}{2} h_2 (x_2 - x_{2min})^2 + \frac{1}{4} h_2 \eta_{kc} (x_2 - x_{2min})^4 + \\ & + \frac{1}{2} k_3 x_3^2 + \frac{1}{4} k_3 \eta_{ko} x_3^4 + \frac{1}{2} k_c (x_2 - x_1)^2, \end{aligned} \quad (\text{B.4a})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_p}{\partial x_1} = & k_1 (x_1 - x_3) + k_1 \eta_{kc} (x_1 - x_3)^3 + \\ & + h_1 (x_1 - x_{1min}) + h_1 \eta_{kc} (x_1 - x_{1min})^3 + k_c (x_1 - x_2), \end{aligned} \quad (\text{B.4b})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_p}{\partial x_2} = & k_2 (x_2 - x_3) + k_2 \eta_{kc} (x_2 - x_3)^3 + \\ & + h_2 (x_2 - x_{2min}) + h_2 \eta_{kc} (x_2 - x_{2min})^3 + k_c (x_2 - x_1), \end{aligned} \quad (\text{B.4c})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_p}{\partial x_3} = & -k_1 (x_1 - x_3) - k_1 \eta_{ko} (x_1 - x_3)^3 - \\ & - k_2 (x_2 - x_3) - k_2 \eta_{ko} (x_2 - x_3)^3 + k_3 x_3 + k_3 \eta_{ko} x_3^3, \end{aligned} \quad (\text{B.4d})$$

kde první čtyři členy v (B.4b) a (B.4c) odpovídají rovnicím (4.2) a rovnice (B.4d) je stejná jako (B.3d). Pokud je v kontaktu pouze hmota m_1 , platí kombinace rovnic (B.4b) a (B.3c). Pokud je naopak v kontaktu pouze hmota m_2 , platí kombinace rovnic (B.3b) a (B.4c).

Výkon vnějších sil spolu s derivacemi vypadá takto:

$$P = F_1 \dot{x}_1^2 + F_2 \dot{x}_2^2, \quad (\text{B.5a})$$

$$\frac{\partial P}{\partial \dot{x}_1} = F_1, \quad (\text{B.5b})$$

$$\frac{\partial P}{\partial \dot{x}_2} = F_2, \quad (\text{B.5c})$$

$$\frac{\partial P}{\partial \dot{x}_3} = 0, \quad (\text{B.5d})$$

příčemž síly F_1 a F_2 se řídí Tab. 3.1. Dosazením do Lagrangeových rovnic II. druhu vznikne soustava tří pohybových rovnic, které jsou shodné s rovnicemi (4.4):

$$m_1 \ddot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 + s_1(x_1, x_3) + k_c(x_1 - x_2) = F_1, \quad (\text{B.6a})$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + b_2 \dot{x}_2 + s_2(x_2, x_3) + k_c(x_2 - x_1) = F_2, \quad (\text{B.6b})$$

$$m_3 \ddot{x}_3 - b_1 \dot{x}_1 - b_2 \dot{x}_2 + (b_1 + b_2 + b_3) \ddot{x}_3 - s_1(x_1, x_3) - s_2(x_2, x_3) + s_3(x_3) = 0, \quad (\text{B.6c})$$

kde je za $s_1(x_1, x_3)$, $s_2(x_2, x_3)$ a $s_3(x_3)$ nutné dosadit z rovnic (4.1), (4.2) a (4.3).

B.2 Metoda konečných diferencí – pohybové rovnice

Zde je uvedeno odvození rovnic (4.8) až (4.10) výchylek x_{1_i} , x_{2_i} a x_{3_i} z pohybových rovnic ve tvaru konečných diferencí (4.6). Z první rovnice (4.6a) lze vyjádřit výchylku x_{1_i} . Pro případ, kdy hmota m_1 není v kontaktu:

$$x_{1_i} = \frac{\left(\frac{2m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} - k_c\right) \cdot x_{1_{i-1}} - \frac{m_1}{T^2} \cdot x_{1_{i-2}} + \left(\frac{b_1}{T} + k_1\right) \cdot x_{3_i} - \frac{b_1}{T} \cdot x_{3_{i-1}} + k_c \cdot x_{2_{i-1}}}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1} + \frac{-k_1 \eta_{ko} \cdot (x_{1_{i-1}} - x_{3_{i-1}})^3 + F_{1_i}}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1}, \quad (\text{B.7})$$

pro případ, kdy v kontaktu je, vypadá vyjádření výchylky x_{1_i} takto:

$$x_{1_i} = \frac{\left(\frac{2m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} - k_c\right) \cdot x_{1_{i-1}} - \frac{m_1}{T^2} \cdot x_{1_{i-2}} + \left(\frac{b_1}{T} + k_1\right) \cdot x_{3_i} - \frac{b_1}{T} \cdot x_{3_{i-1}} + k_c \cdot x_{2_{i-1}}}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1} + \frac{-k_1 \eta_{kc} \cdot (x_{1_{i-1}} - x_{3_{i-1}})^3 + h_1 \cdot x_{1_{min}} - h_1 \cdot \eta_{kc} \cdot (x_{1_{i-1}} - x_{1_{min}})^3 + F_{1_i}}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1}. \quad (\text{B.8})$$

Stejný postup lze aplikovat na vyjádření výchylky x_{2_i} z druhé pohybové rovnice (4.6b). Pokud hmota m_2 není v kontaktu:

$$x_{2_i} = \frac{\left(\frac{2m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} - k_c\right) \cdot x_{2_{i-1}} - \frac{m_2}{T^2} \cdot x_{2_{i-2}} + \left(\frac{b_2}{T} + k_2\right) \cdot x_{3_i} - \frac{b_2}{T} \cdot x_{3_{i-1}} + k_c \cdot x_{1_{i-1}}}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2} + \frac{-k_2 \eta_{ko} \cdot (x_{2_{i-1}} - x_{3_{i-1}})^3 + F_{2_i}}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2}, \quad (\text{B.9})$$

a pokud v kontaktu je, vypadá rovnice následovně:

$$x_{2_i} = \frac{\left(\frac{2m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} - k_c\right) \cdot x_{2_{i-1}} - \frac{m_2}{T^2} \cdot x_{2_{i-2}} + \left(\frac{b_2}{T} + k_2\right) \cdot x_{3_i} - \frac{b_2}{T} \cdot x_{3_{i-1}} + k_c \cdot x_{1_{i-1}}}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2} + \frac{-k_2 \eta_{kc} \cdot (x_{2_{i-1}} - x_{3_{i-1}})^3 + h_2 \cdot x_{2_{min}} - h_2 \cdot \eta_{kc} \cdot (x_{2_{i-1}} - x_{2_{min}})^3 + F_{2_i}}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2}. \quad (\text{B.10})$$

Pro výchylku x_{3_i} je nutné rozdělit pohybovou rovnici (4.6c) na všechny čtyři případy (ani jedna hmota v kontaktu, v kontaktu pouze m_1 , v kontaktu pouze m_2 a v kontaktu obě hmoty), protože v rovnicích (B.7) až (B.10) pro výchylky x_{1_i} a x_{2_i} se x_{3_i} vyskytuje jako proměnná. Nejsložitější případ je, pokud jsou obě hmoty v kontaktu, odvození je proto následující. Nejdříve se dosadí za nelineární tuhosti do třetí pohybové rovnice:

$$\begin{aligned} & \frac{m_3}{T^2}(x_{3_i} - 2x_{3_{i-1}} + x_{3_{i-2}}) - \frac{b_1}{T}(x_{1_i} - x_{1_{i-1}}) - \frac{b_2}{T}(x_{2_i} - x_{2_{i-1}}) + \\ & + \frac{b_1 + b_2 + b_3}{T}(x_{3_i} - x_{3_{i-1}}) - k_1 \cdot [(x_{1_i} - x_{3_i}) + \eta_{kc} \cdot (x_{1_{i-1}} - x_{3_i})^3] - \\ & - h_1 [(x_{1_i} - x_{1_{min}}) + \eta_{kc}(x_{1_{i-1}} - x_{1_{min}})^3] - k_2 \cdot [(x_{2_i} - x_{3_i}) + \eta_{kc} \cdot (x_{2_{i-1}} - x_{3_i})^3] - \\ & - h_2 [(x_{2_i} - x_{2_{min}}) + \eta_{kc}(x_{2_{i-1}} - x_{2_{min}})^3] + k_3 \cdot (x_{3_i} + \eta_{ko} \cdot x_{3_i}^3) = 0. \quad (\text{B.11}) \end{aligned}$$

Nyní se dosadí z rovnic (B.8) a (B.10) a členy se uspořádají tak, aby byly vždy s příslušnou výchylkou vyjádřeny všechny konstanty. Pro přehlednost jsou jednotlivé konstanty barevně odlišeny:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{m_3}{T^2} + \frac{b_1 + b_2 + b_3}{T} + k_1 + k_2 + k_3\right) \cdot x_{3_i} + \left(-\frac{2m_3}{T^2} - \frac{b_1 + b_2 + b_3}{T}\right) \cdot x_{3_{i-1}} + \frac{m_3}{T^2} \cdot x_{3_{i-2}} + \\ & + \frac{b_1}{T} \cdot x_{1_{i-1}} + \frac{b_2}{T} \cdot x_{2_{i-1}} - k_1 \cdot \eta_{kc} \cdot (x_{1_{i-1}} - x_{3_i})^3 - k_2 \cdot \eta_{kc} \cdot (x_{2_{i-1}} - x_{3_i})^3 + k_3 \cdot \eta_{ko} \cdot x_{3_i}^3 - \\ & - \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right) \cdot \left(\frac{2m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} - k_c\right)}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1} \cdot x_{1_{i-1}} + \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right) \cdot \left(\frac{2m_1}{T^2}\right)}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1} \cdot x_{1_{i-2}} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right) \cdot \left(\frac{b_1}{T} + k_1\right)}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1} \cdot x_{3_i} + \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right) \cdot \left(\frac{b_1}{T}\right)}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1} \cdot x_{3_{i-1}} - \\
& - \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right) \cdot k_c}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1} \cdot x_{2_{i-1}} - \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right) \cdot h_1}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1} \cdot x_{1_{min}} + \\
& + \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right) \cdot (k_1 \cdot \eta_{kc})}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1} \cdot (x_{1_{i-1}} - x_{3_{i-1}})^3 + \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right) \cdot (h_1 \cdot \eta_{kc})}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1} \cdot (x_{1_{i-1}} - x_{1_{min}})^3 - \\
& - \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right) \cdot \left(\frac{2m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} - k_c\right)}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2} \cdot x_{2_{i-1}} + \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right) \cdot \left(\frac{2m_2}{T^2}\right)}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2} \cdot x_{2_{i-2}} - \\
& - \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right) \cdot \left(\frac{b_2}{T} + k_2\right)}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2} \cdot x_{3_i} + \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right) \cdot \left(\frac{b_2}{T}\right)}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2} \cdot x_{3_{i-1}} - \\
& - \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right) \cdot k_c}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2} \cdot x_{1_{i-1}} - \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right) \cdot h_2}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2} \cdot x_{2_{min}} + \\
& + \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right) \cdot (k_2 \cdot \eta_{kc})}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2} \cdot (x_{2_{i-1}} - x_{3_{i-1}})^3 + \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right) \cdot (h_2 \cdot \eta_{kc})}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2} \cdot (x_{2_{i-1}} - x_{2_{min}})^3 - \\
& - \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right)}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1} \cdot F_{1_i} - \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right)}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2} \cdot F_{2_i} = 0. \tag{B.12}
\end{aligned}$$

Rovnici lze uspořádat uspořádat do tvaru:

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\frac{m_3}{T^2} + \frac{b_1 + b_2 + b_3}{T} + k_1 + k_2 + k_3 \right) - \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right)^2}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1} - \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right)^2}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2} \right] \cdot x_{3_i} + \\
& + \left[\left(-\frac{2m_3}{T^2} - \frac{b_1 + b_2 + b_3}{T} \right) + \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right) \cdot \left(\frac{b_1}{T}\right)}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1} + \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right) \cdot \left(\frac{b_2}{T}\right)}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2} \right] \cdot x_{3_{i-1}} + \\
& + \frac{m_3}{T^2} \cdot x_{3_{i-2}} + k_3 \cdot \eta_{ko} \cdot x_{3_i}^3 + \\
& + \left[\frac{b_1}{T} - \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right) \cdot \left(\frac{2m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} - k_c\right)}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1} - \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right) \cdot k_c}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2} \right] \cdot x_{1_{i-1}} + \\
& + \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right) \cdot \left(\frac{2m_1}{T^2}\right)}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1} \cdot x_{1_{i-2}} + \left[-k_1 \cdot \eta_{kc} + \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right) \cdot (k_1 \cdot \eta_{kc})}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1} \right] \cdot (x_{1_{i-1}} - x_{3_i})^3 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{b_2}{T} - \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right) \cdot \left(\frac{2m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} - k_c\right)}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2} - \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right) \cdot k_c}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1} \right] \cdot x_{2i-1} + \\
& + \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right) \cdot \left(\frac{2m_2}{T^2}\right)}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2} \cdot x_{2i-2} + \left[-k_2 \cdot \eta_{kc} + \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right) \cdot (k_2 \cdot \eta_{kc})}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2} \right] \cdot (x_{2i-1} - x_{3i})^3 - \\
& - \left[\frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right)}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1} \right] \cdot F_{1i} - \left[\frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right)}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2} \right] \cdot F_{2i} + \\
& + \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right) \cdot (h_1 \cdot \eta_{kc})}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1} \cdot (x_{1i-1} - x_{1min})^3 + \left[-\frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right) \cdot h_1}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1} \right] \cdot x_{1min} + \\
& + \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right) \cdot (h_2 \cdot \eta_{kc})}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2} \cdot (x_{2i-1} - x_{2min})^3 + \left[-\frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right) \cdot h_2}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2} \right] \cdot x_{2min} = 0. \quad (\text{B.13})
\end{aligned}$$

Výhytku x_{3i} , kdy jsou obě hmoty m_1 i m_2 v kontaktu, lze pomocí barevných členů vyjádřit jako:

$$\begin{aligned}
x_{3i} = & \frac{E_1 \cdot F_{1i} + E_2 \cdot F_{2i} - B_3 \cdot x_{3i-1} - C_3 \cdot x_{3i-2} - D_3 \cdot x_{3i-1}^3}{A_3} + \\
& + \frac{-B_1 \cdot x_{1i-1} - C_1 \cdot x_{1i-2} - D_1 \cdot (x_{1i-1} - x_{3i-1})^3}{A_3} + \\
& + \frac{-B_2 \cdot x_{2i-1} - C_2 \cdot x_{2i-2} - D_2 \cdot (x_{2i-1} - x_{3i-1})^3}{A_3} + \\
& + \frac{-G_1 \cdot (x_{1i-1} - x_{1min})^3 - H_1 \cdot x_{1min} - G_2 \cdot (x_{2i-1} - x_{2min})^3 - H_2 \cdot x_{2min}}{A_3}, \quad (\text{B.14})
\end{aligned}$$

kde:

$$A_3 = \left[\left(\frac{m_3}{T^2} + \frac{b_1 + b_2 + b_3}{T} + k_1 + k_2 + k_3 \right) - \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right)^2}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1} - \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right)^2}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2} \right], \quad (\text{B.15a})$$

$$B_3 = \left[\left(-\frac{2m_3}{T^2} - \frac{b_1 + b_2 + b_3}{T} \right) + \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right) \cdot \left(\frac{b_1}{T}\right)}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1} + \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right) \cdot \left(\frac{b_2}{T}\right)}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2} \right], \quad (\text{B.15b})$$

$$C_3 = \frac{m_3}{T^2}, \quad (\text{B.15c})$$

$$D_3 = k_3 \cdot \eta_{ko}, \quad (\text{B.15d})$$

$$B_1 = \left[\frac{b_1}{T} - \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right) \cdot \left(\frac{2m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} - k_c\right)}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1} - \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right) \cdot k_c}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2} \right], \quad (\text{B.15e})$$

$$C_1 = \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right) \cdot \left(\frac{2m_1}{T^2}\right)}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1}, \quad (\text{B.15f})$$

$$D_1 = \left[-k_1 \cdot \eta_{kc} + \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right) \cdot (k_1 \cdot \eta_{kc})}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1} \right], \quad (\text{B.15g})$$

$$B_2 = \left[\frac{b_2}{T} - \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right) \cdot \left(\frac{2m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} - k_c\right)}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2} - \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right) \cdot k_c}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1} \right], \quad (\text{B.15h})$$

$$C_2 = \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right) \cdot \left(\frac{2m_2}{T^2}\right)}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2}, \quad (\text{B.15i})$$

$$D_2 = \left[-k_2 \cdot \eta_{kc} + \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right) \cdot (k_2 \cdot \eta_{kc})}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2} \right], \quad (\text{B.15j})$$

$$E_1 = \left[\frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right)}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1} \right], \quad (\text{B.15k})$$

$$E_2 = \left[\frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right)}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2} \right], \quad (\text{B.15l})$$

$$G_1 = \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right) \cdot (h_1 \cdot \eta_{kc})}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1}, \quad (\text{B.15m})$$

$$H_1 = \left[-\frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right) \cdot h_1}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1} \right], \quad (\text{B.15n})$$

$$G_2 = \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right) \cdot (h_2 \cdot \eta_{kc})}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2}, \quad (\text{B.15o})$$

$$H_2 = \left[-\frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right) \cdot h_2}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2} \right]. \quad (\text{B.15p})$$

Ve fázích, kdy je v kontaktu s protější hlasivkou pouze jedna z hmot nebo není ani jedna, se rovnice pro výchylku x_{3i} liší. Pokud je v kontaktu pouze hmota m_1 , jsou vynechány všechny členy, které představují kontakt hmoty m_2 , takže změna se dotkne členů

A_3 , B_3 , B_1 , B_2 , C_2 a E_2 , kde chybí h_2 , D_2 , kde se navíc mění η_{kc} na η_{ko} , a členy G_2 a H_2 chybí úplně:

$$\begin{aligned}
 x_{3_i} = & \frac{E_1 \cdot F_{1_i} + E_2 \cdot F_{2_i} - B_3 \cdot x_{3_{i-1}} - C_3 \cdot x_{3_{i-2}} - D_3 \cdot x_{3_{i-1}}^3}{A_3} + \\
 & + \frac{-B_1 \cdot x_{1_{i-1}} - C_1 \cdot x_{1_{i-2}} - D_1 \cdot (x_{1_{i-1}} - x_{3_{i-1}})^3}{A_3} + \\
 & + \frac{-B_2 \cdot x_{2_{i-1}} - C_2 \cdot x_{2_{i-2}} - D_2 \cdot (x_{2_{i-1}} - x_{3_{i-1}})^3}{A_3} + \\
 & + \frac{-G_1 \cdot (x_{1_{i-1}} - x_{1_{min}})^3 - H_1 \cdot x_{1_{min}}}{A_3}, \quad (\text{B.16})
 \end{aligned}$$

kde:

$$A_3 = \left[\left(\frac{m_3}{T^2} + \frac{b_1 + b_2 + b_3}{T} + k_1 + k_2 + k_3 \right) - \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1 \right)^2}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1} - \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2 \right)^2}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2} \right], \quad (\text{B.17a})$$

$$B_3 = \left[\left(-\frac{2m_3}{T^2} - \frac{b_1 + b_2 + b_3}{T} \right) + \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1 \right) \cdot \left(\frac{b_1}{T} \right)}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1} + \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2 \right) \cdot \left(\frac{b_2}{T} \right)}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2} \right], \quad (\text{B.17b})$$

$$C_3 = \frac{m_3}{T^2}, \quad (\text{B.17c})$$

$$D_3 = k_3 \cdot \eta_{ko}, \quad (\text{B.17d})$$

$$B_1 = \left[\frac{b_1}{T} - \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1 \right) \cdot \left(\frac{2m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} - k_c \right)}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1} - \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2 \right) \cdot k_c}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2} \right], \quad (\text{B.17e})$$

$$C_1 = \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1 \right) \cdot \left(\frac{2m_1}{T^2} \right)}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1}, \quad (\text{B.17f})$$

$$D_1 = \left[-k_1 \cdot \eta_{kc} + \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1 \right) \cdot (k_1 \cdot \eta_{kc})}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1} \right], \quad (\text{B.17g})$$

$$B_2 = \left[\frac{b_2}{T} - \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2 \right) \cdot \left(\frac{2m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} - k_c \right)}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2} - \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1 \right) \cdot k_c}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1} \right], \quad (\text{B.17h})$$

$$C_2 = \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2 \right) \cdot \left(\frac{2m_2}{T^2} \right)}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2}, \quad (\text{B.17i})$$

$$D_2 = \left[-k_2 \cdot \eta_{kc} + \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right) \cdot (k_2 \cdot \eta_{ko})}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2} \right], \quad (\text{B.17j})$$

$$E_1 = \left[\frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right)}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1} \right], \quad (\text{B.17k})$$

$$E_2 = \left[\frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right)}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2} \right], \quad (\text{B.17l})$$

$$G_1 = \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right) \cdot (h_1 \cdot \eta_{kc})}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1}, \quad (\text{B.17m})$$

$$H_1 = \left[-\frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right) \cdot h_1}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1 + h_1} \right]. \quad (\text{B.17n})$$

Pokud je v kontaktu pouze hmota m_2 , rovnice vypadají podobně. Jsou vynechány všechny členy, které představují kontakt hmoty m_1 . Změna se tedy oproti (B.14) a (B.15) dotkne členů A_3 , B_3 , B_1 , C_1 , E_1 a B_2 , kde chybí h_1 , D_1 , kde se navíc mění η_{kc} na η_{ko} , a členy G_1 a H_1 chybí úplně:

$$x_{3_i} = \frac{E_1 \cdot F_{1_i} + E_2 \cdot F_{2_i} - B_3 \cdot x_{3_{i-1}} - C_3 \cdot x_{3_{i-2}} - D_3 \cdot x_{3_{i-1}}^3}{A_3} +$$

$$+ \frac{-B_1 \cdot x_{1_{i-1}} - C_1 \cdot x_{1_{i-2}} - D_1 \cdot (x_{1_{i-1}} - x_{3_{i-1}})^3}{A_3} +$$

$$+ \frac{-B_2 \cdot x_{2_{i-1}} - C_2 \cdot x_{2_{i-2}} - D_2 \cdot (x_{2_{i-1}} - x_{3_{i-1}})^3}{A_3} +$$

$$+ \frac{-G_2 \cdot (x_{2_{i-1}} - x_{2min})^3 - H_2 \cdot x_{2min}}{A_3}, \quad (\text{B.18})$$

kde:

$$A_3 = \left[\left(\frac{m_3}{T^2} + \frac{b_1 + b_2 + b_3}{T} + k_1 + k_2 + k_3 \right) - \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right)^2}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1} - \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right)^2}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2} \right], \quad (\text{B.19a})$$

$$B_3 = \left[\left(-\frac{2m_3}{T^2} - \frac{b_1 + b_2 + b_3}{T} \right) + \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right) \cdot \left(\frac{b_1}{T}\right)}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1} + \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right) \cdot \left(\frac{b_2}{T}\right)}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2} \right], \quad (\text{B.19b})$$

$$C_3 = \frac{m_3}{T^2}, \quad (\text{B.19c})$$

$$D_3 = k_3 \cdot \eta_{ko}, \quad (\text{B.19d})$$

$$B_1 = \left[\frac{b_1}{T} - \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right) \cdot \left(\frac{2m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} - k_c\right)}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1} - \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right) \cdot k_c}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2} \right], \quad (\text{B.19e})$$

$$C_1 = \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right) \cdot \left(\frac{2m_1}{T^2}\right)}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1}, \quad (\text{B.19f})$$

$$D_1 = \left[-k_1 \cdot \eta_{ko} + \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right) \cdot (k_1 \cdot \eta_{kc})}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1} \right], \quad (\text{B.19g})$$

$$B_2 = \left[\frac{b_2}{T} - \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right) \cdot \left(\frac{2m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} - k_c\right)}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2} - \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right) \cdot k_c}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1} \right], \quad (\text{B.19h})$$

$$C_2 = \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right) \cdot \left(\frac{2m_2}{T^2}\right)}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2}, \quad (\text{B.19i})$$

$$D_2 = \left[-k_2 \cdot \eta_{kc} + \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right) \cdot (k_2 \cdot \eta_{kc})}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2} \right], \quad (\text{B.19j})$$

$$E_1 = \left[\frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right)}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1} \right], \quad (\text{B.19k})$$

$$E_2 = \left[\frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right)}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2} \right], \quad (\text{B.19l})$$

$$G_2 = \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right) \cdot (h_2 \cdot \eta_{kc})}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2}, \quad (\text{B.19m})$$

$$H_2 = \left[-\frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right) \cdot h_2}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2 + h_2} \right]. \quad (\text{B.19n})$$

Poslední případ, jak rovnice pro výchylku x_{3_i} vypadá, je nejjednodušší, a to obě hmoty m_1 i m_2 bez kontaktu. Zde nastanou oproti (B.14) a (B.15) změny téměř ve všech členech, ze kterých se odstraní h_1 a h_2 , z η_{kc} se stane η_{ko} a vymizí členy G_1 , H_1 , G_2 a H_2 :

$$\begin{aligned}
x_{3_i} = & \frac{E_1 \cdot F_{1_i} + E_2 \cdot F_{2_i} - B_3 \cdot x_{3_{i-1}} - C_3 \cdot x_{3_{i-2}} - D_3 \cdot x_{3_{i-1}}^3}{A_3} + \\
& + \frac{-B_1 \cdot x_{1_{i-1}} - C_1 \cdot x_{1_{i-2}} - D_1 \cdot (x_{1_{i-1}} - x_{3_{i-1}})^3}{A_3} + \\
& + \frac{-B_2 \cdot x_{2_{i-1}} - C_2 \cdot x_{2_{i-2}} - D_2 \cdot (x_{2_{i-1}} - x_{3_{i-1}})^3}{A_3}, \quad (\text{B.20})
\end{aligned}$$

kde:

$$A_3 = \left[\left(\frac{m_3}{T^2} + \frac{b_1 + b_2 + b_3}{T} + k_1 + k_2 + k_3 \right) - \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1 \right)^2}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1} - \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2 \right)^2}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2} \right], \quad (\text{B.21a})$$

$$B_3 = \left[\left(-\frac{2m_3}{T^2} - \frac{b_1 + b_2 + b_3}{T} \right) + \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1 \right) \cdot \left(\frac{b_1}{T} \right)}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1} + \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2 \right) \cdot \left(\frac{b_2}{T} \right)}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2} \right], \quad (\text{B.21b})$$

$$C_3 = \frac{m_3}{T^2}, \quad (\text{B.21c})$$

$$D_3 = k_3 \cdot \eta_{ko}, \quad (\text{B.21d})$$

$$B_1 = \left[\frac{b_1}{T} - \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1 \right) \cdot \left(\frac{2m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} - k_c \right)}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1} - \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2 \right) \cdot k_c}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2} \right], \quad (\text{B.21e})$$

$$C_1 = \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1 \right) \cdot \left(\frac{2m_1}{T^2} \right)}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1}, \quad (\text{B.21f})$$

$$D_1 = \left[-k_1 \cdot \eta_{ko} + \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1 \right) \cdot (k_1 \cdot \eta_{kc})}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1} \right], \quad (\text{B.21g})$$

$$B_2 = \left[\frac{b_2}{T} - \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2 \right) \cdot \left(\frac{2m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} - k_c \right)}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2} - \frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1 \right) \cdot k_c}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1} \right], \quad (\text{B.21h})$$

$$C_2 = \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2 \right) \cdot \left(\frac{2m_2}{T^2} \right)}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2}, \quad (\text{B.21i})$$

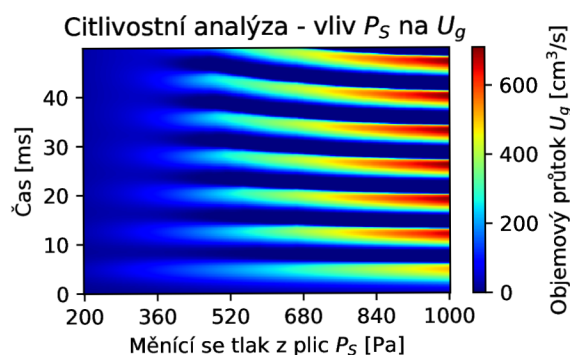
$$D_2 = \left[-k_2 \cdot \eta_{ko} + \frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2 \right) \cdot (k_2 \cdot \eta_{kc})}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2} \right], \quad (\text{B.21j})$$

$$E_1 = \left[\frac{\left(\frac{b_1}{T} + k_1\right)}{\frac{m_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + k_1} \right], \quad (\text{B.21k})$$

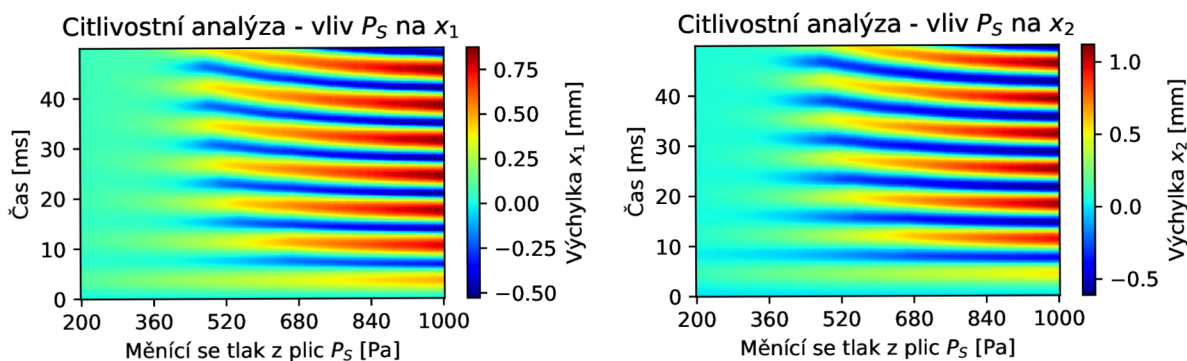
$$E_2 = \left[\frac{\left(\frac{b_2}{T} + k_2\right)}{\frac{m_2}{T^2} + \frac{b_2}{T} + k_2} \right]. \quad (\text{B.21l})$$

C Citlivostní analýzy – dvoumotový model

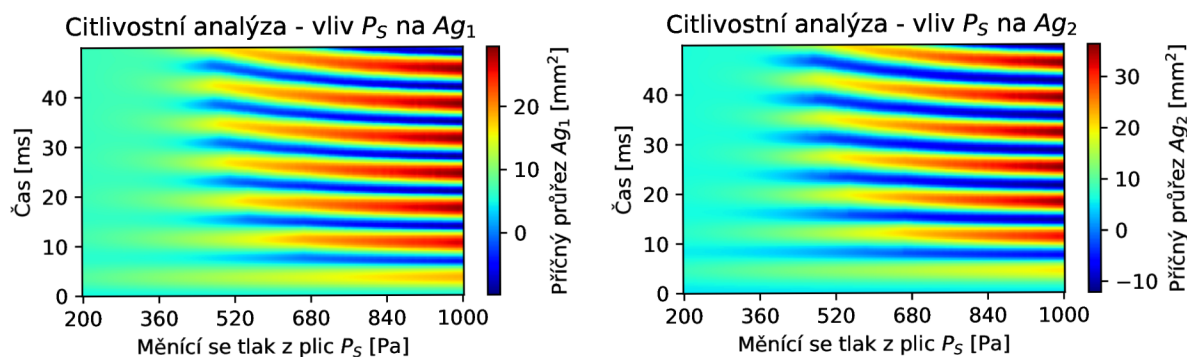
C.1 Parametr P_S – statický tlak z plic



Obr. C.1. Dvoumotový model – vliv P_S na objemový průtok U_g .

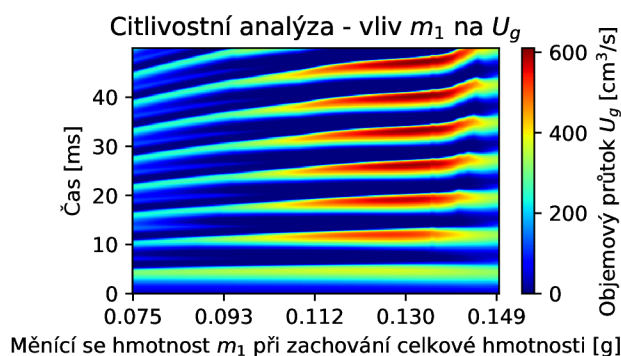
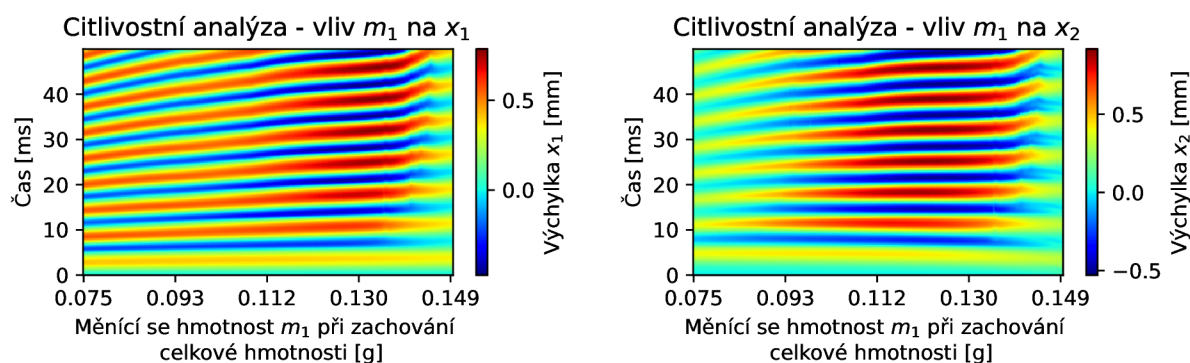
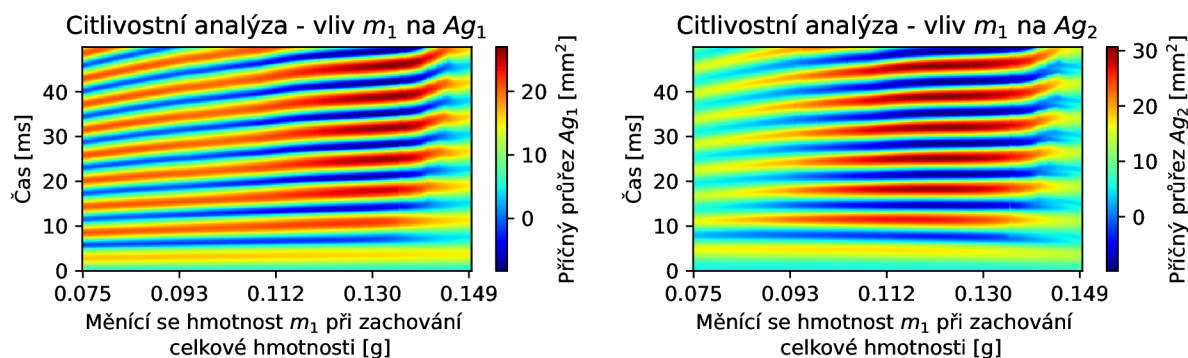


Obr. C.2. Dvoumotový model – vliv P_S na výchylky x_1 a x_2 .

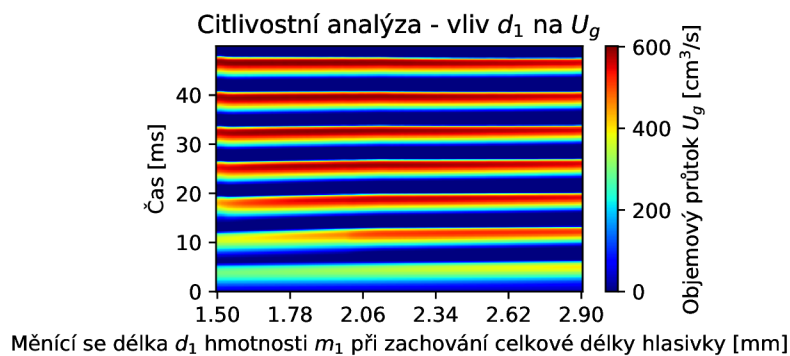


Obr. C.3. Dvoumotový model – vliv P_S na příčné průřezy A_{g1} a A_{g2} .

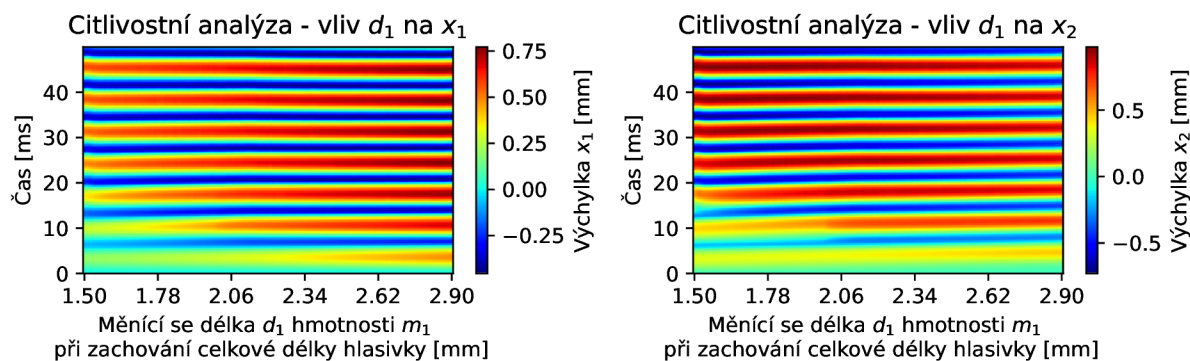
C.2 Parametr m_1 – hmotnost hmoty 1 při zachování celkové hmotnosti

Obr. C.4. Dvouhmotový model – vliv m_1 na objemový průtok U_g .Obr. C.5. Dvouhmotový model – vliv m_1 na výchylky x_1 a x_2 .Obr. C.6. Dvouhmotový model – vliv m_1 na příčné průřezy A_{g1} a A_{g2} .

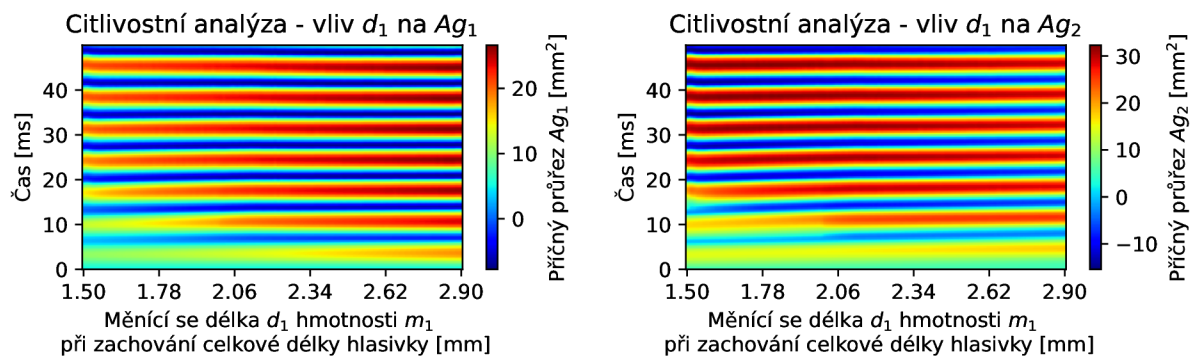
C.3 Parametr d_1 – délka hmoty 1 při zachování celkové délky



Obr. C.7. Dvuhmotový model – vliv d_1 na objemový průtok U_g .

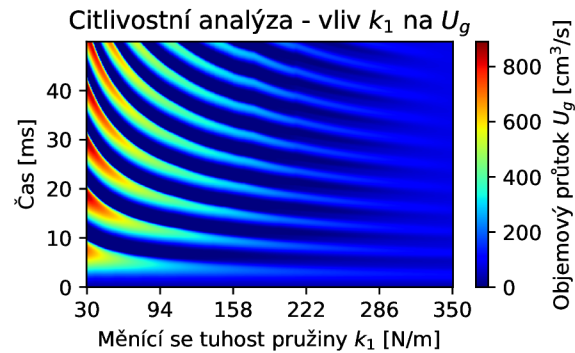
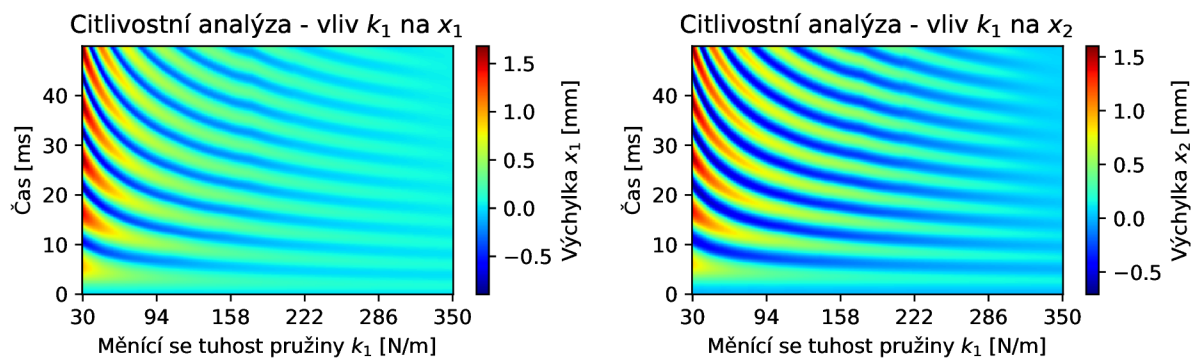
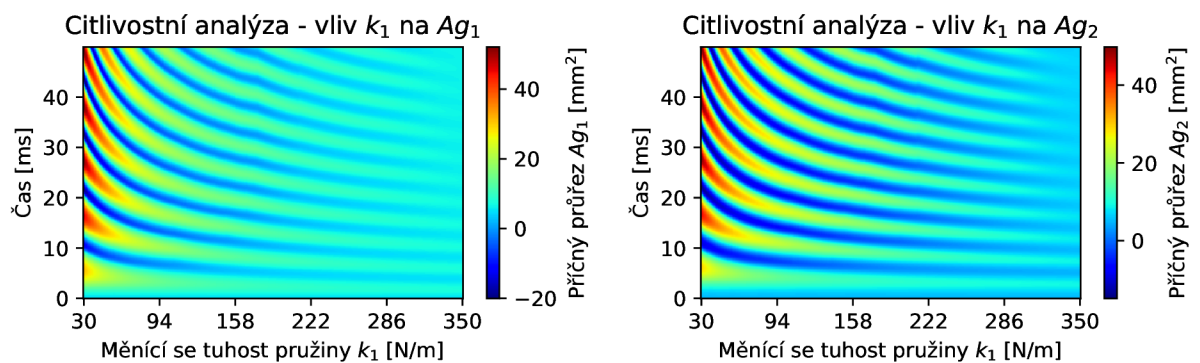


Obr. C.8. Dvuhmotový model – vliv d_1 na výchylky x_1 a x_2 .

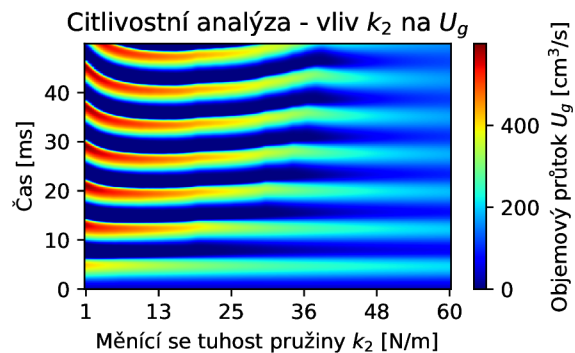


Obr. C.9. Dvuhmotový model – vliv d_1 na příčné průřezy A_{g1} a A_{g2} .

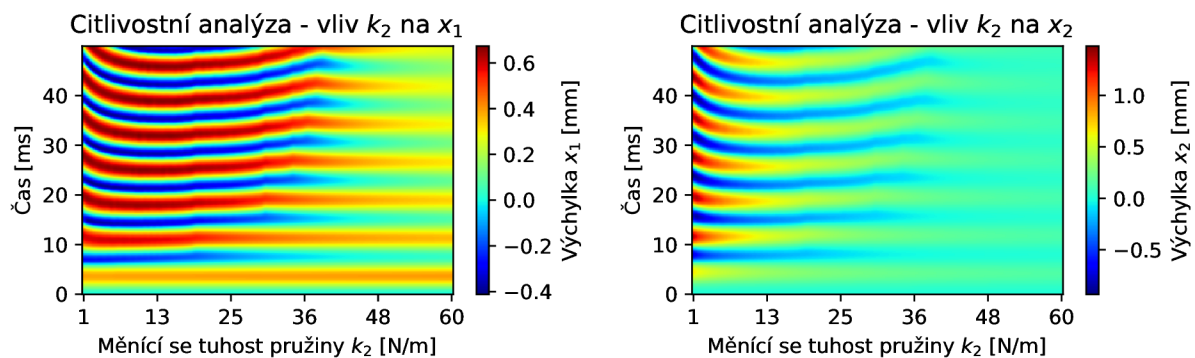
C.4 Parametr k_1 – tuhost pružiny 1

Obr. C.10. Dvouhmotový model – vliv k_1 na objemový průtok U_g .Obr. C.11. Dvouhmotový model – vliv k_1 na výchylky x_1 a x_2 .Obr. C.12. Dvouhmotový model – vliv k_1 na příčné průřezy A_{g1} a A_{g2} .

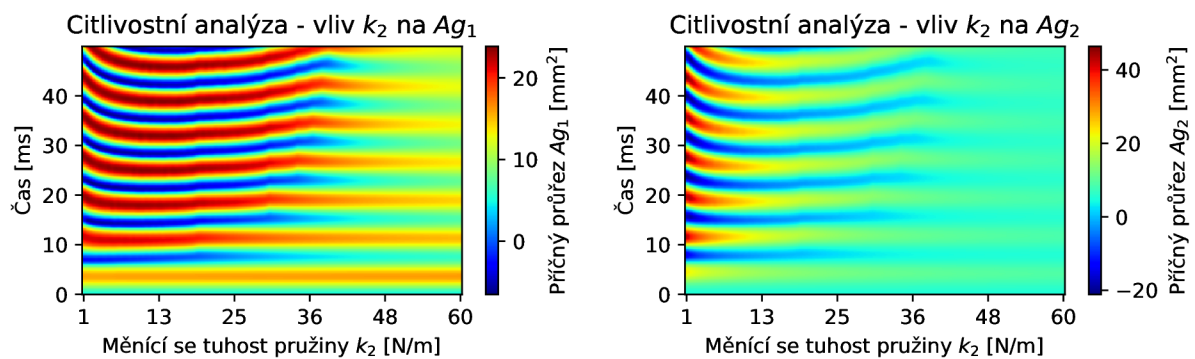
C.5 Parametr k_2 – tuhost pružiny 2



Obr. C.13. Dvouhmový model – vliv k_2 na objemový průtok U_g .

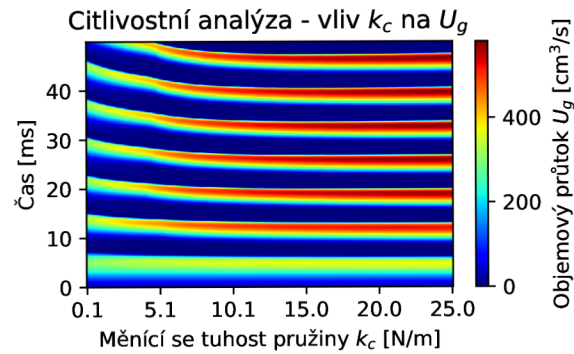
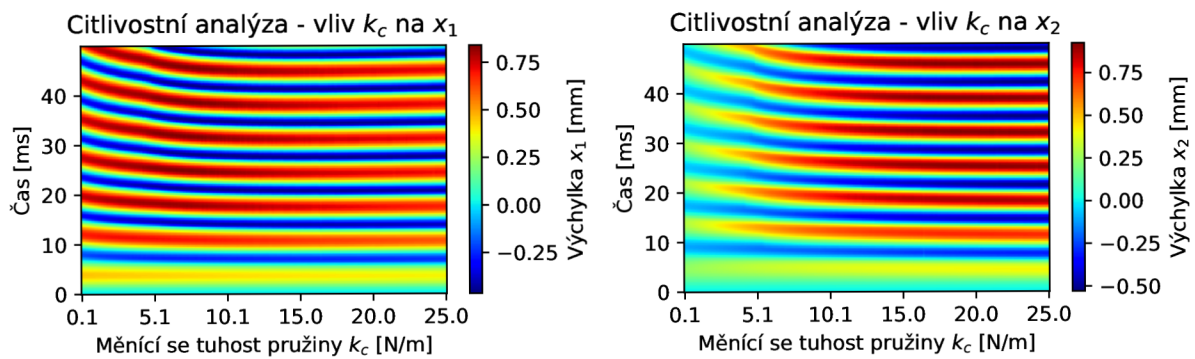
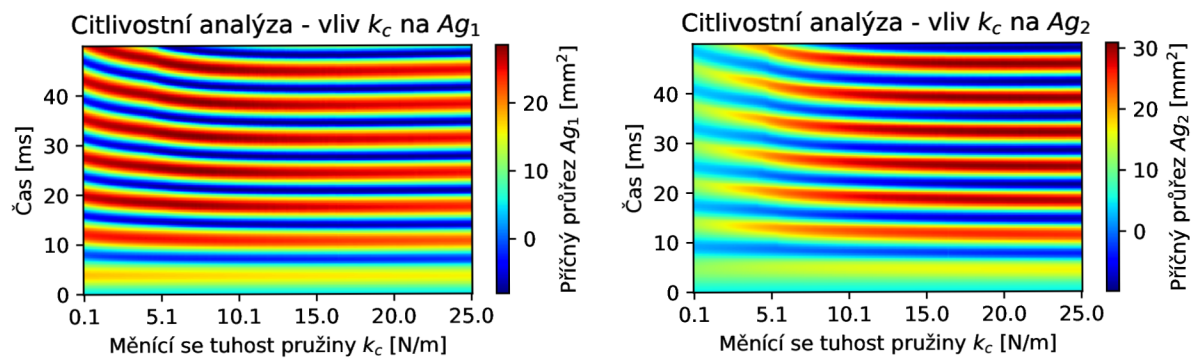


Obr. C.14. Dvouhmový model – vliv k_2 na výchylky x_1 a x_2 .

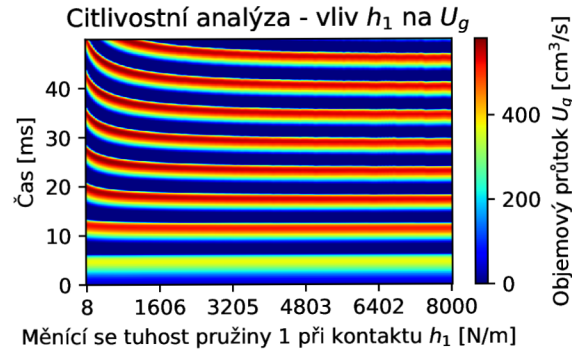


Obr. C.15. Dvouhmový model – vliv k_2 na příčné průřezy A_{g1} a A_{g2} .

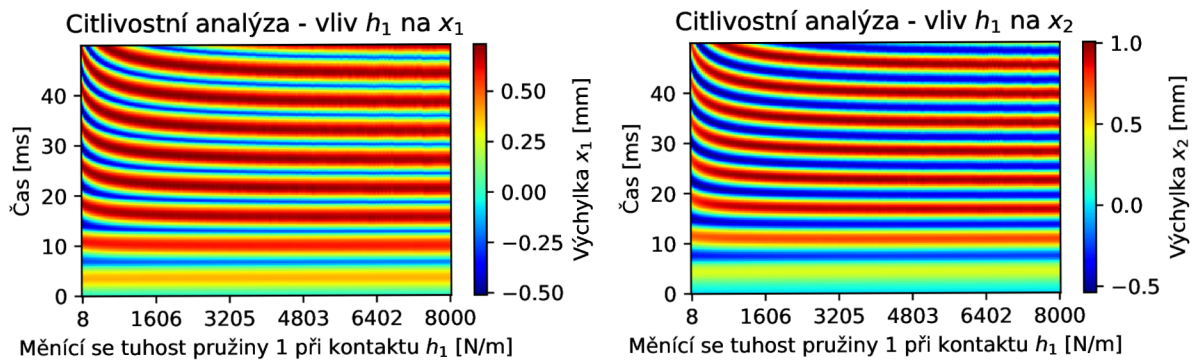
C.6 Parametr k_c – tuhost pružiny mezi hmotami

Obr. C.16. Dvouhmotový model – vliv k_c na objemový průtok U_g .Obr. C.17. Dvouhmotový model – vliv k_c na výchylky x_1 a x_2 .Obr. C.18. Dvouhmotový model – vliv k_c na příčné průřezy A_{g1} a A_{g2} .

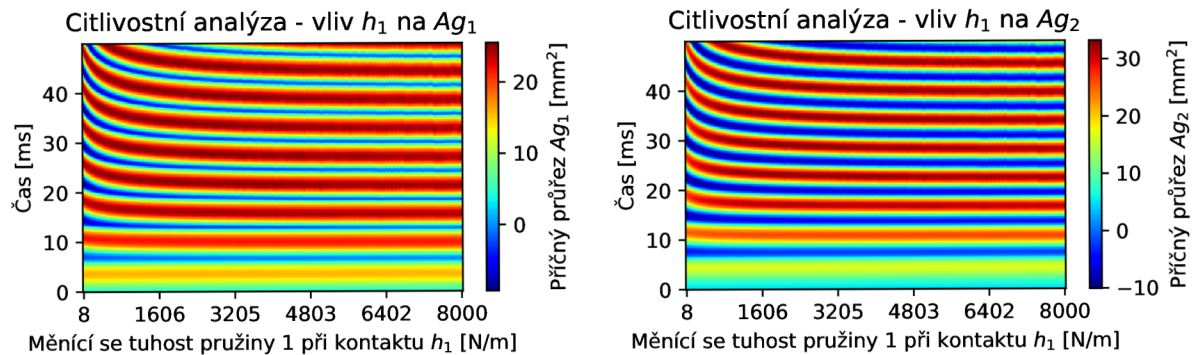
C.7 Parametr h_1 – tuhost pružiny 1 při kontaktu



Obr. C.19. Dvuhmotový model – vliv h_1 na objemový průtok U_g .

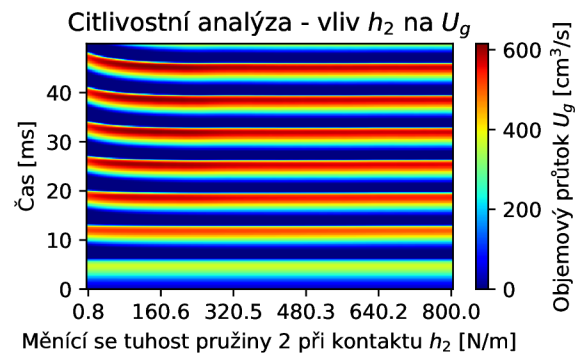
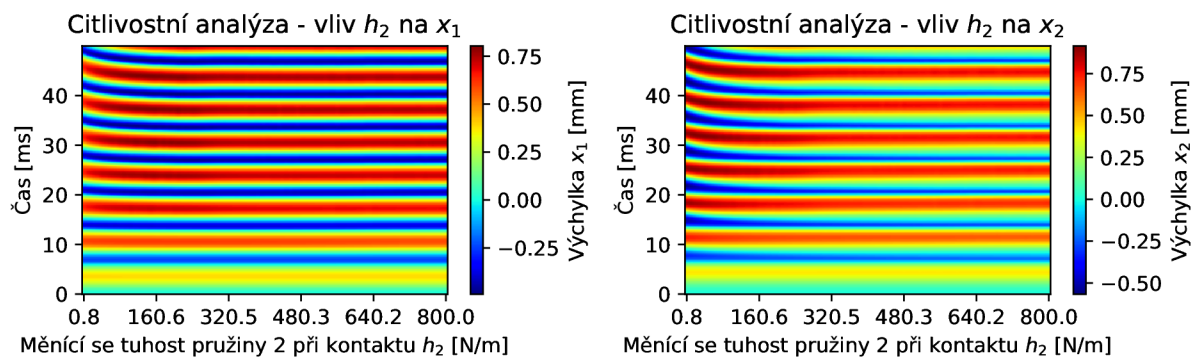
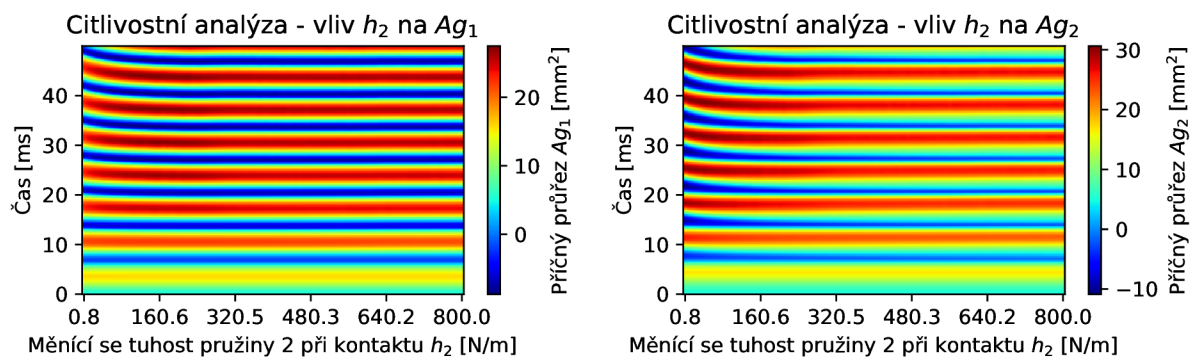


Obr. C.20. Dvuhmotový model – vliv h_1 na výchylky x_1 a x_2 .



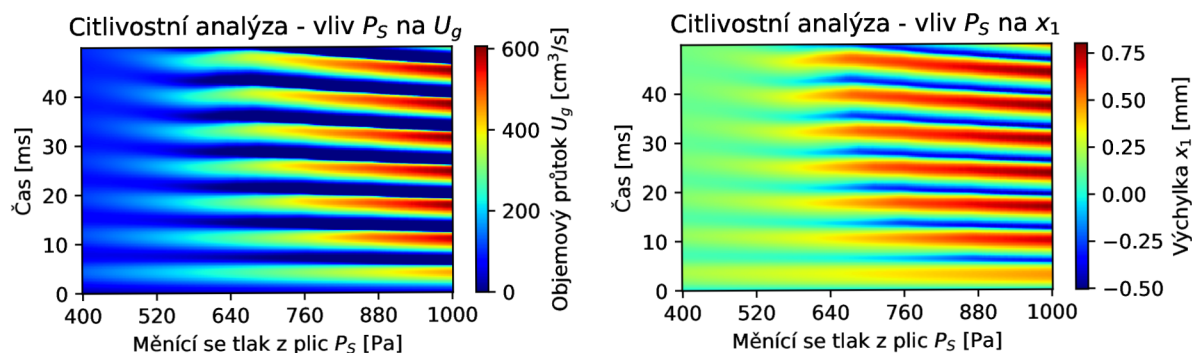
Obr. C.21. Dvuhmotový model – vliv h_1 na příčné průřezy A_{g1} a A_{g2} .

C.8 Parametr h_2 – tuhost pružiny 2 při kontaktu

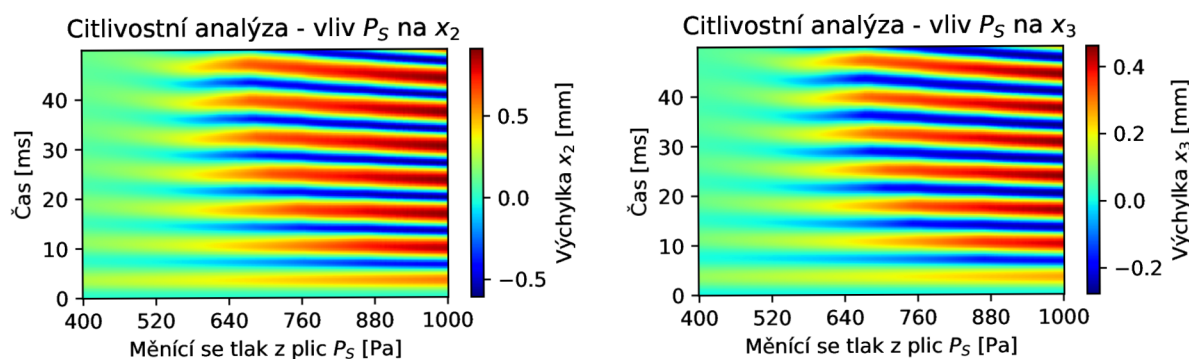
Obr. C.22. Dvouhmotový model – vliv h_2 na objemový průtok U_g .Obr. C.23. Dvouhmotový model – vliv h_2 na výchylky x_1 a x_2 .Obr. C.24. Dvouhmotový model – vliv h_2 na příčné průřezy A_{g1} a A_{g2} .

D Citlivostní analýzy – tříhmotový model

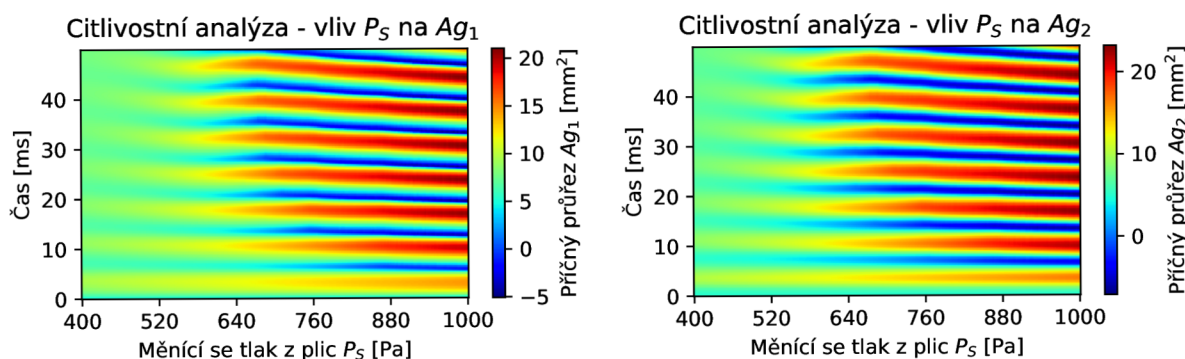
D.1 Parametr P_S – statický tlak z plic



Obr. D.1. Tříhmotový model – vliv P_S na objemový průtok U_g a výchylku x_1 .

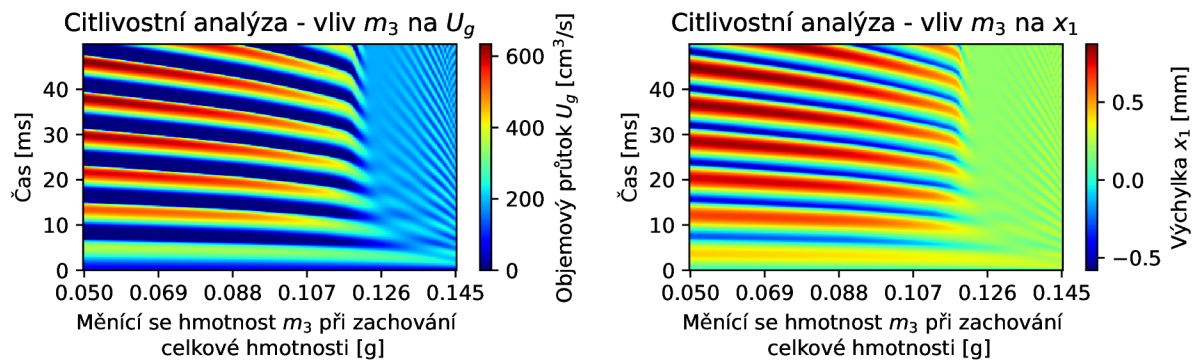
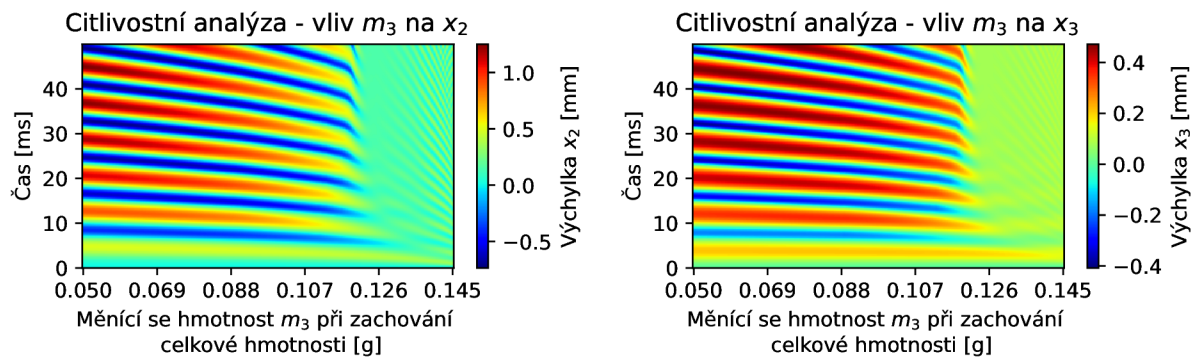
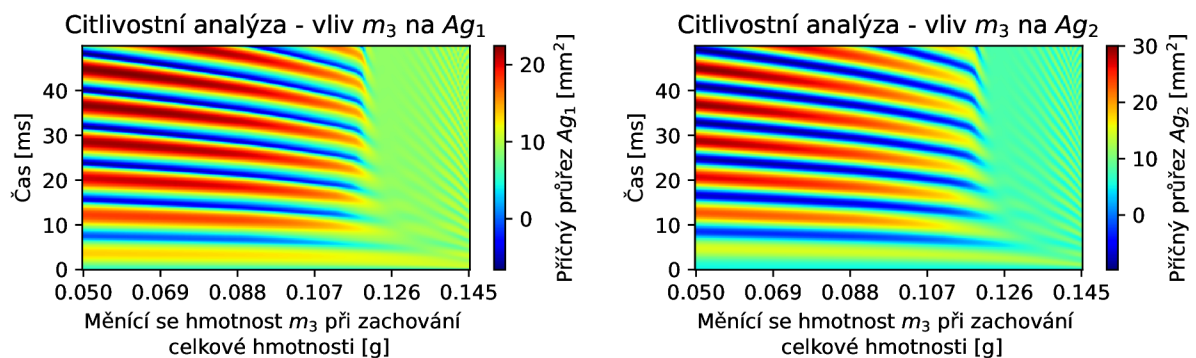


Obr. D.2. Tříhmotový model – vliv P_S na výchylky x_2 a x_3 .

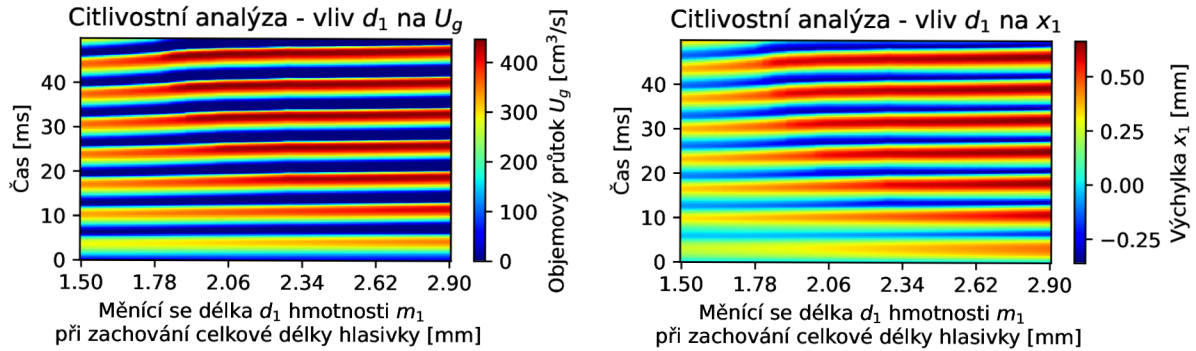


Obr. D.3. Tříhmotový model – vliv P_S na příčné průřezy A_{g1} a A_{g2} .

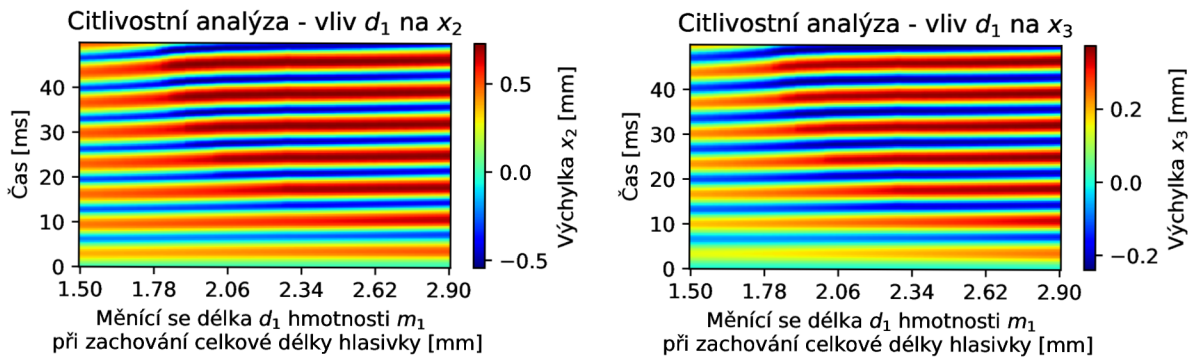
D.2 Parametr m_3 – hmotnost hmoty 3 při zachování celkové hmotnosti

Obr. D.4. Tříhmotový model – vliv m_3 na objemový průtok U_g a výchylku x_1 .Obr. D.5. Tříhmotový model – vliv m_3 na výchylky x_2 a x_3 .Obr. D.6. Tříhmotový model – vliv m_3 na příčné průřezy Ag_1 a Ag_2 .

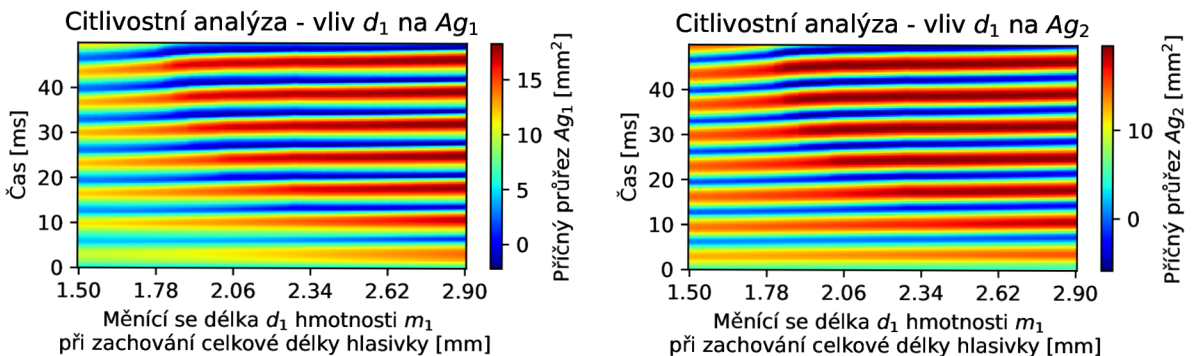
D.3 Parametr d_1 – délka hmoty 1 při zachování celkové délky



Obr. D.7. Tříhmotový model – vliv d_1 na objemový průtok U_g a výchylku x_1 .

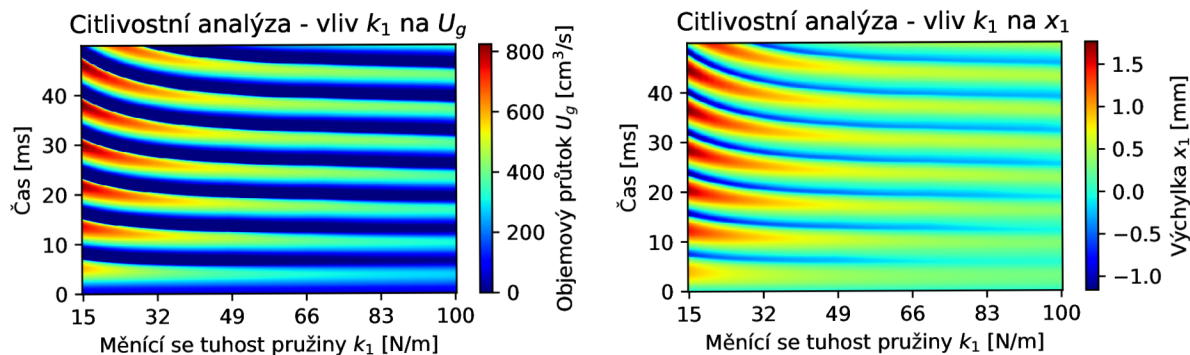
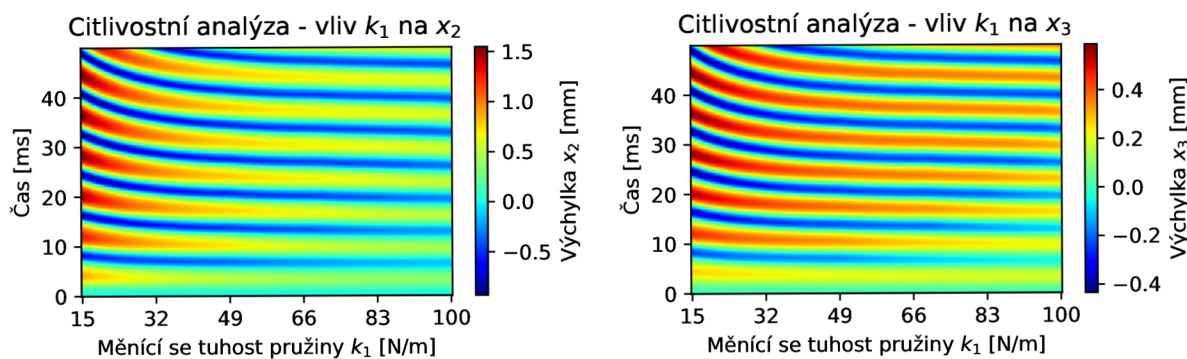
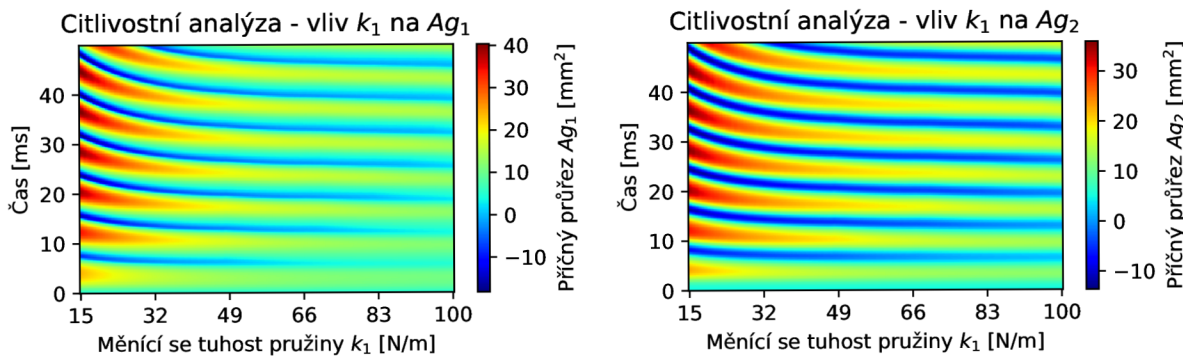


Obr. D.8. Tříhmotový model – vliv d_1 na výchylky x_2 a x_3 .

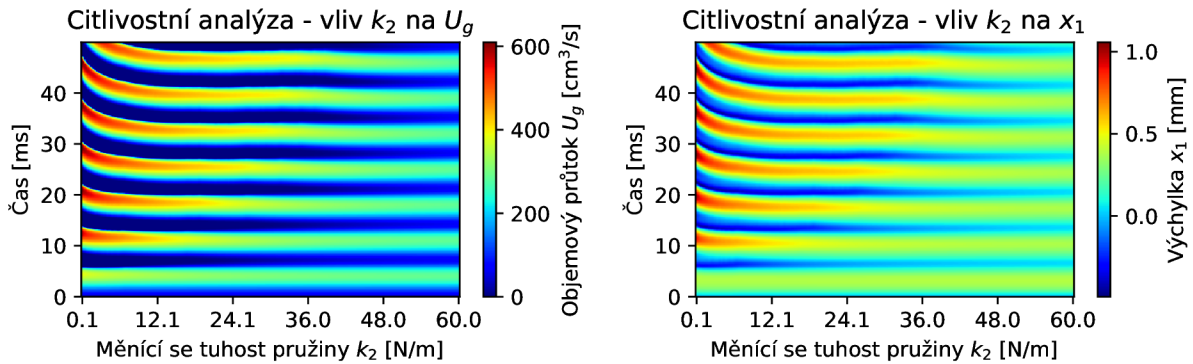


Obr. D.9. Tříhmotový model – vliv d_1 na příčné průřezy A_{g1} a A_{g2} .

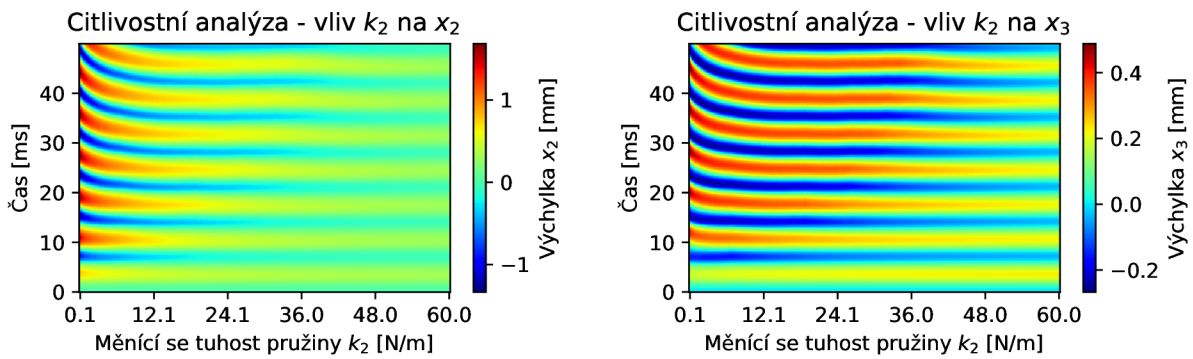
D.4 Parametr k_1 – tuhost pružiny 1

Obr. D.10. Tříhmotový model – vliv k_1 na objemový průtok U_g a výchylku x_1 .Obr. D.11. Tříhmotový model – vliv k_1 na výchylky x_2 a x_3 .Obr. D.12. Tříhmotový model – vliv k_1 na příčné průřezy A_{g1} a A_{g2} .

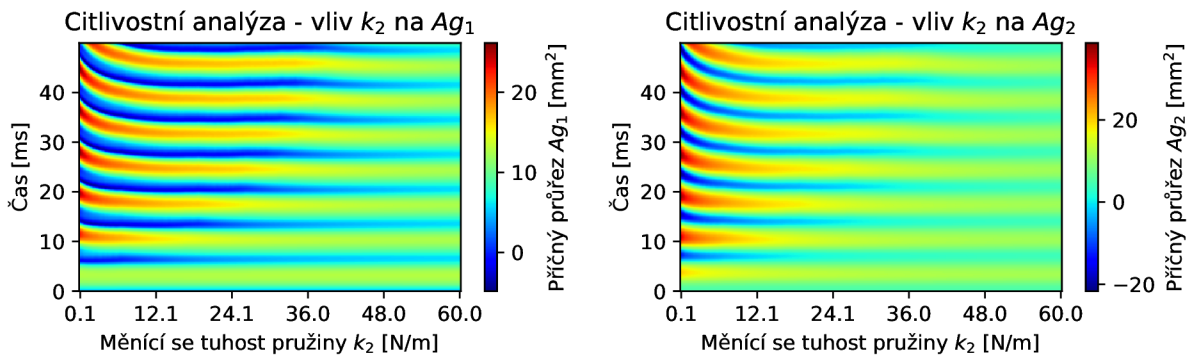
D.5 Parametr k_2 – tuhost pružiny 2



Obr. D.13. Tříhmotový model – vliv k_2 na objemový průtok U_g a výchylku x_1 .

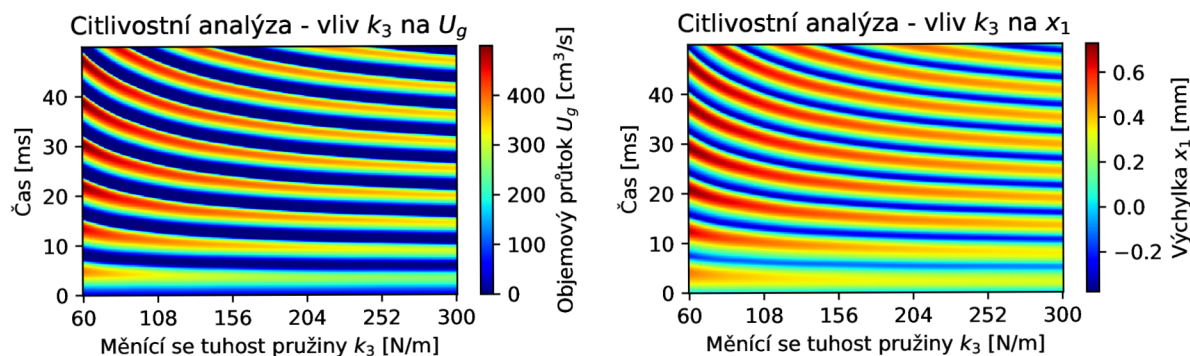


Obr. D.14. Tříhmotový model – vliv k_2 na výchylky x_2 a x_3 .

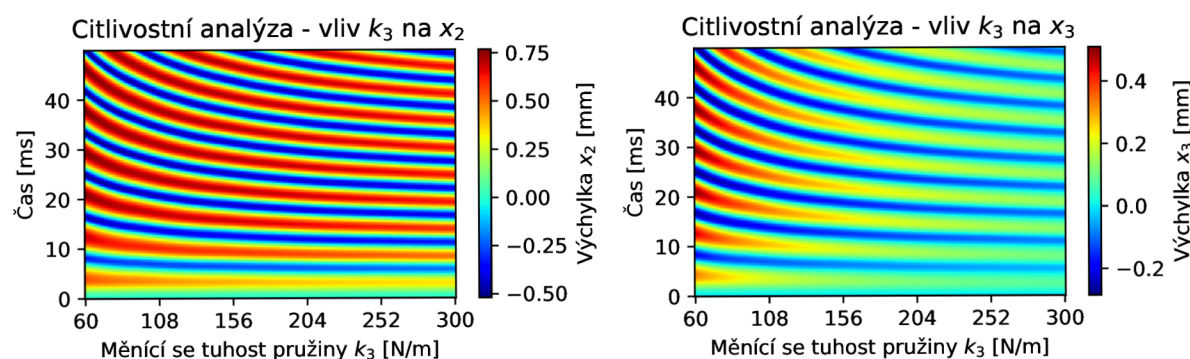


Obr. D.15. Tříhmotový model – vliv k_2 na příčné průřezy A_{g1} a A_{g2} .

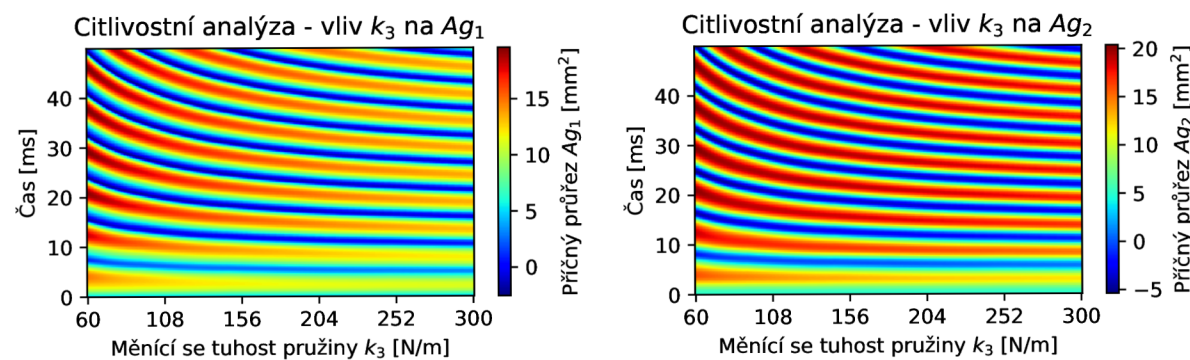
D.6 Parametr k_3 – tuhost pružiny 3



Obr. D.16. Tříhmotový model – vliv k_3 na objemový průtok U_g a výchylku x_1 .

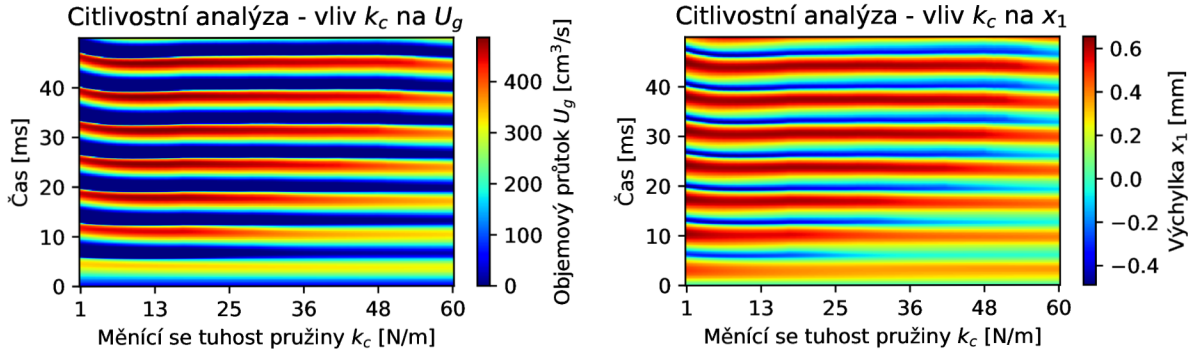


Obr. D.17. Tříhmotový model – vliv k_3 na výchylky x_2 a x_3 .

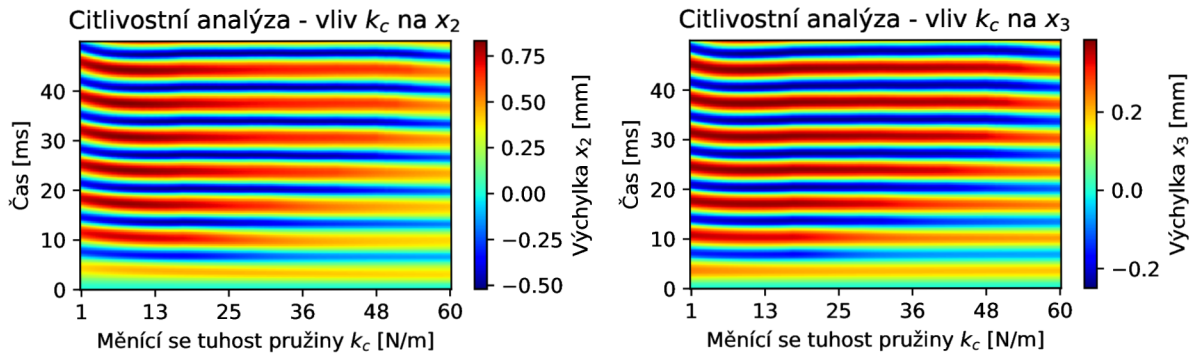


Obr. D.18. Tříhmotový model – vliv k_3 na příčné průřezy A_{g1} a A_{g2} .

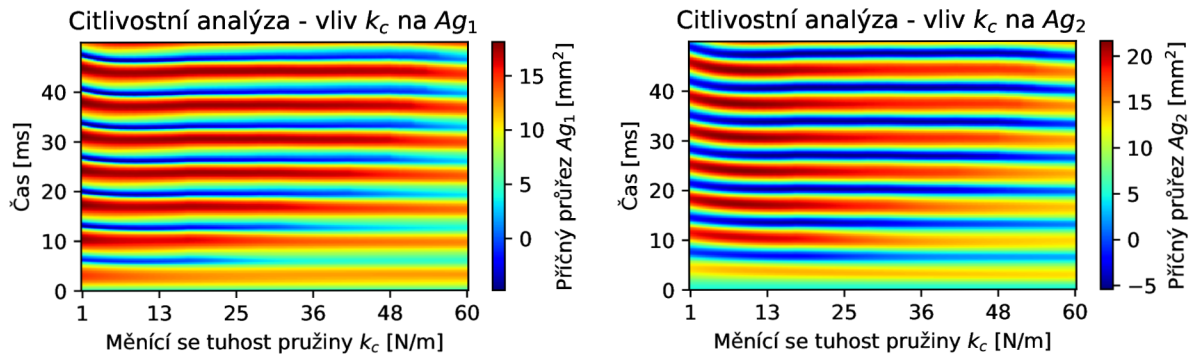
D.7 Parametr k_c – tuhost pružiny mezi hmotami



Obr. D.19. Tříhmotový model – vliv k_c na objemový průtok U_g a výchylku x_1 .

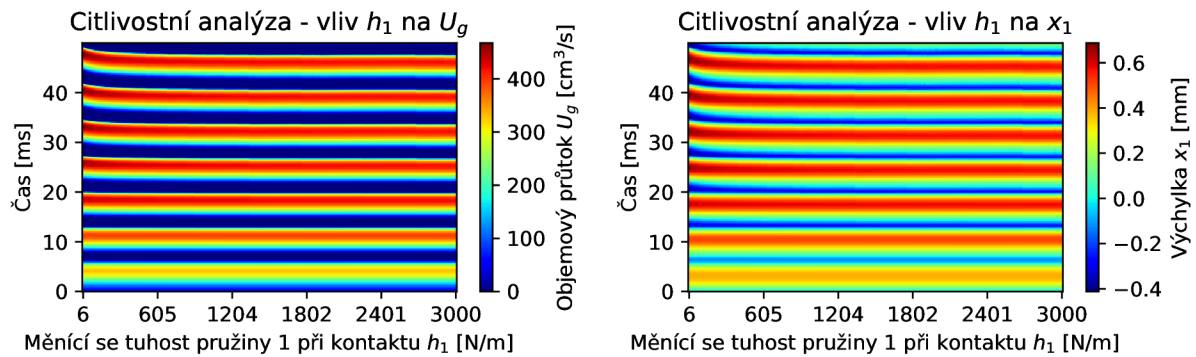


Obr. D.20. Tříhmotový model – vliv k_c na výchylky x_2 a x_3 .

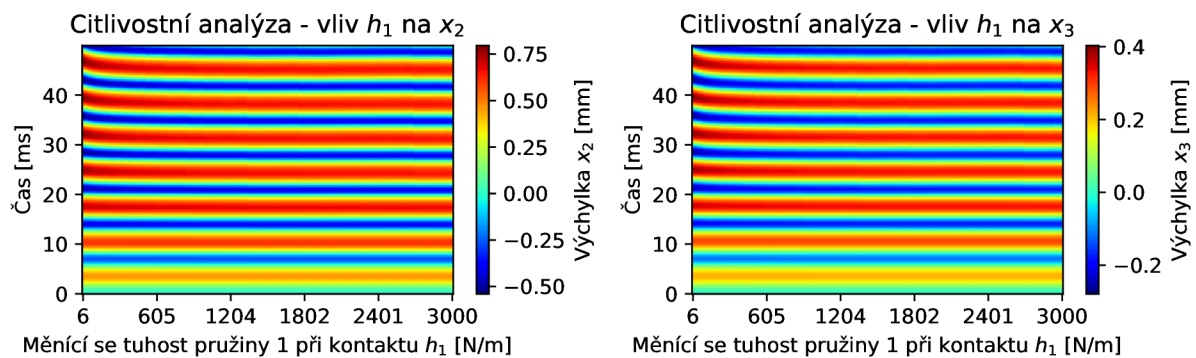


Obr. D.21. Tříhmotový model – vliv k_c na příčné průřezy A_{g1} a A_{g2} .

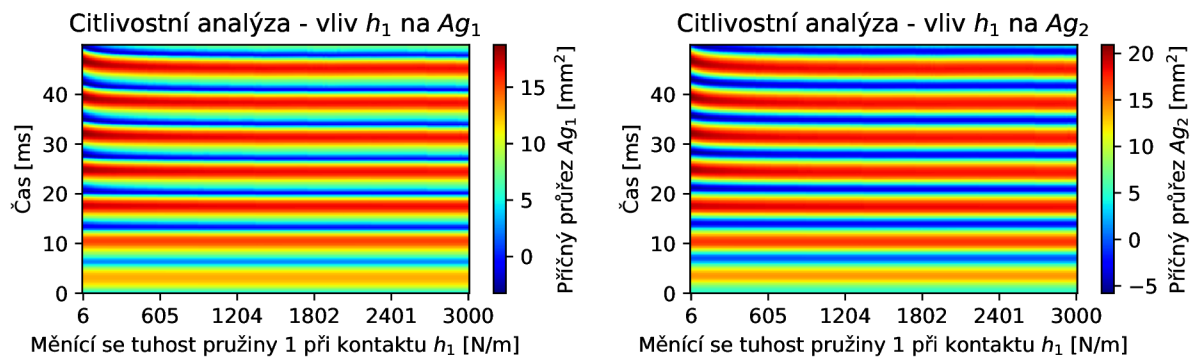
D.8 Parametr h_1 – tuhost pružiny 1 při kontaktu



Obr. D.22. Tříhmotový model – vliv h_1 na objemový průtok U_g a výchylku x_1 .

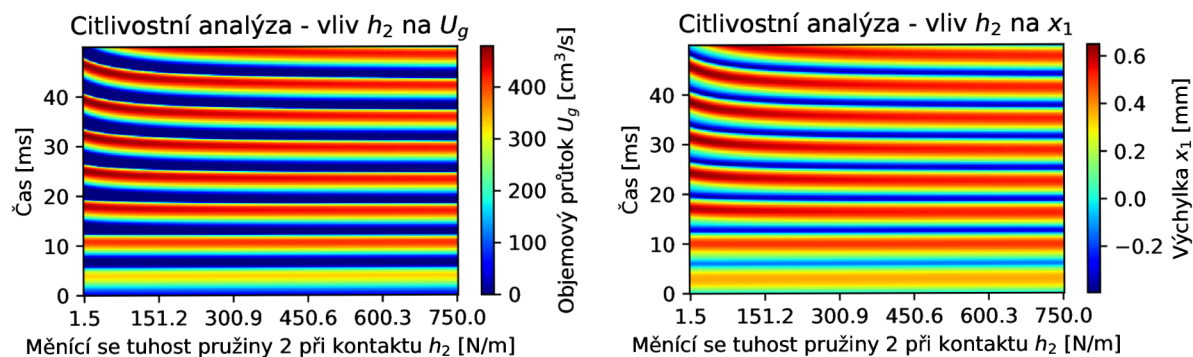


Obr. D.23. Tříhmotový model – vliv h_1 na výchylky x_2 a x_3 .

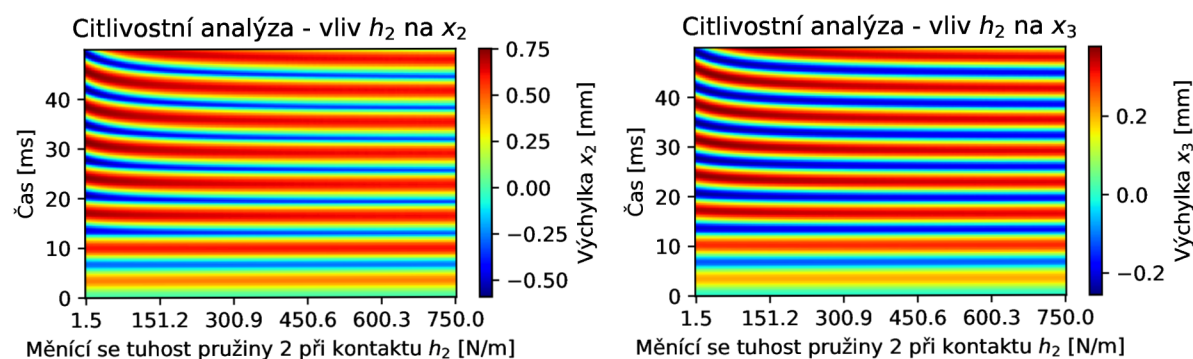


Obr. D.24. Tříhmotový model – vliv h_1 na příčné průřezy A_{g1} a A_{g2} .

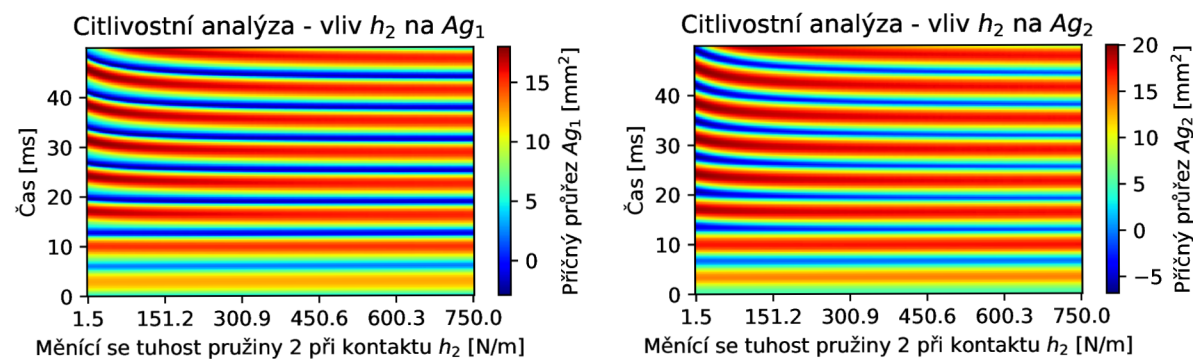
D.9 Parametr h_2 – tuhost pružiny 2 při kontaktu



Obr. D.25. Tříhmotový model – vliv h_2 na objemový průtok U_g a výchylku x_1 .



Obr. D.26. Tříhmotový model – vliv h_2 na výchylky x_2 a x_3 .



Obr. D.27. Tříhmotový model – vliv h_2 na příčné průřezy A_{g1} a A_{g2} .