



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



**FAKULTA STROJNÍHO
INŽENÝRSTVÍ
ENERGETICKÝ ÚSTAV
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
ENERGY INSTITUTE**

VÝPOČTOVÁ MODÁLNÍ ANALÝZA OBĚŽNÉHO KOLA VÍROVÉ TURBÍNY

MODAL ANALYSIS OF THE SWIRL TURBINE RUNNER

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

LUKÁŠ VALO

VEDOUcí PRÁCE
SUPERVISOR

Ing. PAVEL ČUPR

BRNO 2017

Zadání bakalářské práce

Ústav: Energetický ústav
Student: **Lukáš Valo**
Studijní program: Strojírenství
Studijní obor: Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce: **Ing. Pavel Čupr**
Akademický rok: 2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Výpočtová modální analýza oběžného kola vírové turbíny

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Na základě znalosti modálních vlastností oběžného kola je možné predikovat nebezpečné rezonanční stavy a zabránit tak havárii. Při zpracování této práce bude provedena výpočtová modální analýza oběžného kola vírové turbíny. Na základě jejích výsledků bude posouzeno, zda je možné za daných podmínek turbínu provozovat.

Cíle bakalářské práce:

1. Rešeršní studie shrnující základní teoretické poznatky dynamiky
2. Vytvoření výpočtového modelu oběžného kola vírové turbíny
3. Provedení modální analýzy
4. Zhodnocení dosažených výsledků

Seznam doporučené literatury:

ZEMAN, Vladimír a Zdeněk HLAVÁČ. Kmitání mechanických soustav. 2. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita, 2004. ISBN 80-7043-337-X.

SLAVÍK, Jaromír, Vladimír ZEMAN a Vladimír STEJSKAL. Základy dynamiky strojů. Praha: Vydavatelství ČVUT, 1997. ISBN 80-01-01622-6.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17

V Brně, dne

L. S.

doc. Ing. Jiří Pospíšil, Ph.D.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

ABSTRAKT

Bakalárska práca sa zaoberá výpočtovou modálnou analýzou obežného kolesa vírovej turbíny. Hlavným cieľom bolo určenie vlastných frekvencií a vlastných tvarov obežného kolesa. Analyzovaný bol podrobnejší a zjednodušený model geometrie obežného kolesa pri dvoch typoch okrajových podmienok. Výpočet bol realizovaný vo výpočtovom programe ANSYS. Experimentálne meranie bolo vykonané za účelom overenia a porovnania výsledkov výpočtu.

ABSTRACT

The bachelor's thesis deals with modal analysis of the swirl turbine runner. The main aim was to determine natural frequencies and mode shapes of the turbine runner. Both detailed and simplified models of geometry of the turbine runner were analysed for two types of boundary conditions. The ANSYS program was used to carry out numerical simulations. Experimental measurement was realised to verify and to compare results of calculations.

KLÚČOVÉ SLOVÁ

Modálna analýza, vlastné frekvencie, vírová turbína

KEYWORDS

Modal analysis, natural frequencies, swirl turbine

BIBLIOGRAFICKÁ CITÁCIA

VALO, Lukáš. *Výpočtová modální analýza oběžného kola vírové turbíny*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2017. 45 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Pavel Čupr.

PREHLÁSENIE

Prehlasujem, že som bakalársku prácu na tému Výpočtová modálná analýza oběžného kola vírové turbíny vypracoval samostatne s použitím odbornej literatúry a prameňov, uvedených na zozname, ktorý tvorí prílohu tejto práce.

26. května 2017

.....
Lukáš Valo

POĎAKOVANIE

V prvom rade chcem poďakovať Ing. Pavlovi Čuprovi za cenné rady, pripomienky a veľkú ochotu pri konzultovaní bakalárskej práce. Ďalej chcem poďakovať Ing. Martinovi Hudcovi za pomoc pri experimentálnom meraní a svojej rodine za podporu počas celého štúdia.

OBSAH

ÚVOD	11
1 FORMULÁCIA PROBLÉMU	12
2 VÍROVÁ TURBÍNA	13
3 KMITANIE MECHANICKÝCH SÚSTAV	15
3.1 KMITANIE LINEÁRNYCH SÚSTAV S JEDNÝM STUPŇOM VOLNOSTI.....	15
3.2 VOLNÉ KMITANIE	16
3.2.1 <i>Volné netlmené kmitanie</i>	16
3.2.2 <i>Volné tlmené kmitanie</i>	17
3.3 PROBLÉM VLASTNÝCH HODNÔT.....	18
4 METÓDA KONEČNÝCH PRVKOV	20
5 VÝPOČTOVÝ MODEL A REALIZÁCIA VÝPOČTOVEJ MODÁLNEJ ANALÝZY	23
5.1 MODEL GEOMETRIE	24
5.2 MODEL MATERIÁLU.....	25
5.3 VÝPOČTOVÁ SIEŤ	26
5.4 OKRAJOVÉ PODMIENKY	28
5.5 VÝSLEDKY	28
6 EXPERIMENTÁLNA MODÁLNA ANALÝZA	34
7 POROVNANIE A ZHODNOTENIE VÝSLEDKOV	37
ZÁVER	38
ZOZNAM POUŽITÝCH ZDROJOV	39
ZOZNAM POUŽITÝCH SYMBOLOV	41
ZOZNAM OBRÁZKOV	43
ZOZNAM TABULIEK	44
ZOZNAM PRÍLOH	45
PRÍLOHA	46

ÚVOD

V poslednom období sa kladie čoraz väčší dôraz na využívanie obnoviteľných zdrojov energie. Jedným z najrozšírenejších a zároveň najčistejších zdrojov sú vodné elektrárne. V nich sa pomocou turbín premieňa mechanická energia vody na elektrickú energiu. Popri veľkých vodných elektrárnach začína rásť dopyt aj po malých elektrárnach, za ktoré sú považované elektrárne s inštalovaným výkonom do 10 MW. Tie dokážu využiť energiu nízkych spádov (1–5 m). Pre nízke spády a relatívne veľké prietoky je vhodná vírová turbína, ktorá je jedným z nových typov turbín. Bola vynájdená prof. Pochylým na VUT v Brne [1]. U nízkych spádov dosahuje vyššiu účinnosť než Kaplanova turbína. [2] [3]

U lopatkových strojov dochádza k vzniku vibrácií. Aby mohol stroj spoľahlivo pracovať po celú dobu svojej životnosti, musí byť vhodne navrhnutý z hľadiska dynamiky. U vodnej turbíny je generátor roztáčaný pomocou obežného kolesa, ktoré roztáča prúdiaca voda. Aby bola prevádzka turbíny bezpečná, je už počas jej návrhu potrebné riešiť problém nadmerných vibrácií. Vo všeobecnosti tento problém nastáva, keď dynamické budenie v blízkosti technického objektu má frekvenciu blízku vlastnej frekvencii objektu alebo jej časti. U turbíny môže vzniknúť dynamické budenie v dôsledku prúdenia kvapaliny. Najčastejšie však k problému nadmerných vibrácií dochádza v prípade, keď sa pracovné otáčky turbíny približujú vlastnej frekvencii niektorej časti turbíny (obežného kolesa alebo hriadeľa). Tento nežiaduci jav sa nazýva rezonancia. [4]

Ak je objekt budený frekvenciou blízku vlastnej frekvencii, nastane nárast výchylky mechanického kmitania. To môže viesť k vzniku poškodenia (únavového porušenia), ktoré môže viesť k odstaveniu stroja z prevádzky. V horšom prípade môže prísť k havárii s fatálnymi následkami (od zničenia stroja až po zranenia a straty na životoch). Následkom odstávky stroja môžu vzniknúť aj ekonomické straty vyplývajúce z toho, že stroj nie je schopný dodávať do siete elektrický prúd. Preto je potrebné zaistiť, aby stroj nepracoval s pracovnými otáčkami, ktoré sa približujú jeho vlastnej frekvencii. Problémom nadmerných vibrácií, mechanického kmitania a určovania vlastných frekvencií sa zaoberá dynamika. [4] [5]

Cieľom bakalárskej práce je realizácia výpočtovej modálnej analýzy zvoleného obežného kolesa vírovej turbíny. V teoretickej časti práce sú zhrnuté základné poznatky z dynamiky a stručný popis metódy konečných prvkov a princípu vírovej turbíny. V druhej časti je popísaná výpočtová a aj experimentálna modálna analýza obežného kolesa vírovej turbíny a prezentované ich výsledky.

1 FORMULÁCIA PROBLÉMU

U vodných turbín, teda aj u vírovej turbíny, je nutné zaistiť ich bezpečnú prevádzku. Jedným z možných nežiaducich javov, ktoré môžu nastať pri chode stroja sú nadmerné vibrácie. Tomuto javu sa dá predísť realizáciou modálnej analýzy. Jej výsledkom je stanovenie modálnych vlastností – vlastných frekvencií a vlastných tvarov. Už počas procesu návrhu stroja sa vykonáva modálna analýza výpočtom a pri samotnej realizácii diela aj experimentálne.

Obsahom tejto práce je realizovanie výpočtovej a následne aj experimentálnej modálnej analýzy a určenie prvých piatich vlastných frekvencií a prislúchajúcich vlastných tvarov.

2 VÍROVÁ TURBÍNA

Väčšina lokalít vhodných na umiestnenie veľkých vodných elektrární je v Európe už využitá. Preto sa čoraz viac upriamuje pozornosť na využitie lokalít s nízkym spádom (do 5 m). U nich však využitie bežných turbín, napr. Kaplanovej, nemusí byť ekonomicky výhodné. Je to spôsobené hlavne finančnou nákladnosťou turbíny a nízkou prietochnosťou pri nízkych spádoch. [3] [6]

Činnosť klasických turbín (Francisova, Kaplanova) sa riadi pomocou Eulerovej turbínovej rovnice

$$\eta_h gH = u_1 v_{u1} - u_2 v_{u2} \quad (2.1)$$

kde η_h je hydraulická účinnosť, g gravitačné zrýchlenie, H spád, u_1, u_2 uťahavá rýchlosť na vstupe resp. výstupe, v_{u1}, v_{u2} uťahavá zložka absolútnej rýchlosti na vstupe resp. výstupe. Z rovnice vyplýva, že maximálna účinnosť je dosiahnutá, ak $v_{u2} = 0$. Z toho plynie, že voda opúšťajúca obežné koleso má nulovú rotačnú zložku rýchlosti. [6]

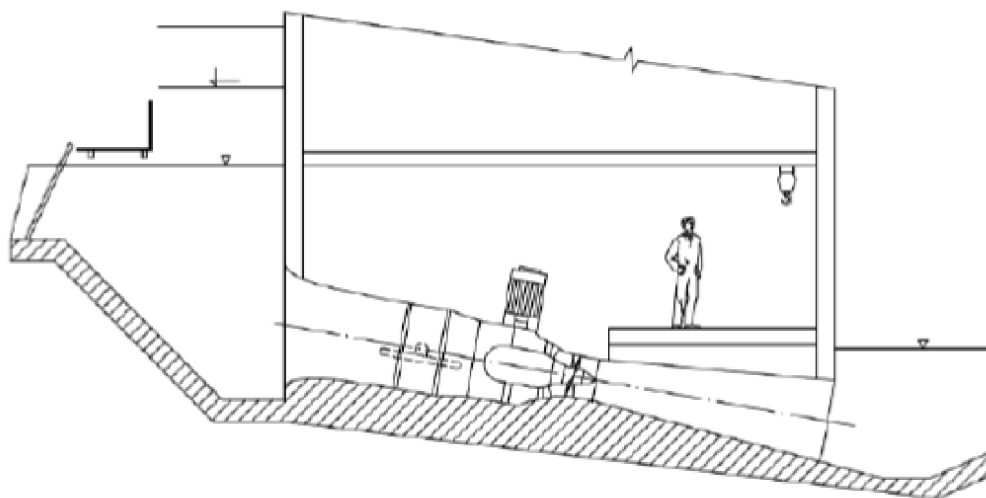
Vírová turbína je nový typ turbíny vyvinutý prof. Pochylým a jeho tímom na VUT v Brne [1]. Je určená hlavne pre nízke spády. Oproti klasickým typom turbín, u vírovej turbíny sa nenachádzajú rozvádzacie lopatky a nie je možné ani natáčanie samotných lopatiek obežného kolesa. Preto je tvar turbínovej rovnice pre tento typ turbíny odlišný:

$$\eta_{hmax} gH = -u_2 v_{u2} \quad (2.2)$$

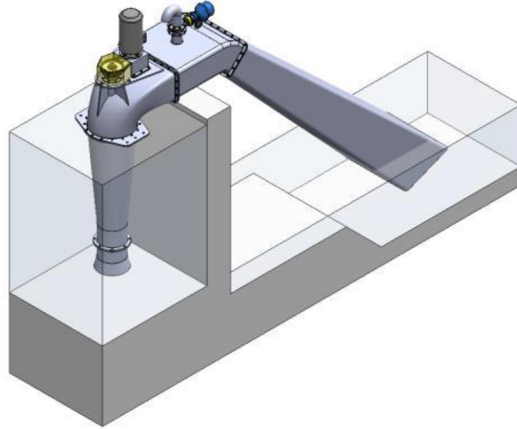
Z rovnice vyplýva, že voda má na vstupe nulovú rotačnú zložku rýchlosti a na výstupe rotuje v opačnom zmysle než obežné koleso. [6] [7]

Výhodami použitia vírovej turbíny v porovnaní s klasickými typmi turbín je jednoduchšia konštrukcia, vyššia prietochnosť a vyššia rýchlosť obežného kolesa, čo umožňuje vo väčšine prípadov pripojiť obežné koleso priamo na generátor a teda nie je potrebné použiť prevodovku. Z toho vyplýva nižšia finančná nákladnosť. [3] [6]

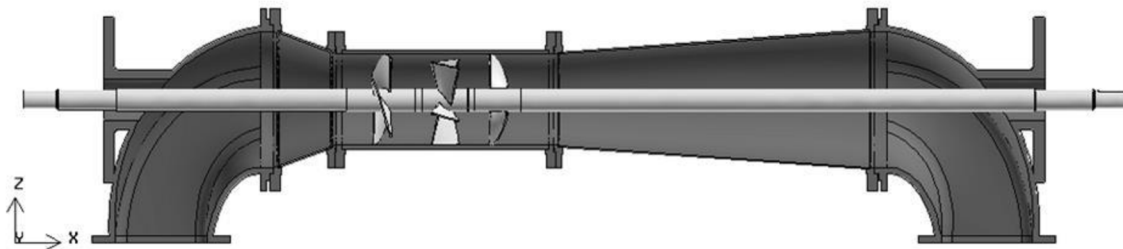
Existuje niekoľko spôsobov usporiadania vírovej turbíny. Klasicky usporiadaný je priamoprúdy variant (Obr. 2.1). Ďalšími variantmi sú násoskové (Obr. 2.2) a dvojstupňové usporiadanie turbíny (Obr. 2.3). [6]



Obr. 2.1 Schéma priamoprúdeho usporiadania vírovej turbíny [6]



Obr. 2.2 Schéma násoskovej vírovej turbíny [6]



Obr. 2.3 Schéma dvojstupňového usporiadania vírovej turbíny [6]

3 KMITANIE MECHANICKÝCH SÚSTAV

K mechanickému kmitaniu dochádza vtedy, keď sa hmotný bod pohybuje okolo svojej rovnovážnej polohy. Dochádza pritom k zmene fyzikálnych veličín (napr. výchylky, rýchlosti, zrýchlenia) v čase. Striedavo sa mení kinetická energia sústavy na potenciálnu a naopak. [5] [8] [9]

V technickej praxi ku kmitaniu dochádza pri prevádzke technických zariadení. Negatívnym následkom kmitania konštrukcií môže byť zníženie ich životnosti, produkcia hluku, zníženie komfortu prevádzky pre človeka u úžitkových strojov alebo dokonca veľké havárie a katastrofy. [5]

Kmitanie je možné rozdeliť podľa niekoľkých kritérií:

- z hľadiska vzniku na voľné, buденé a samobuденé,
- podľa toho, či dochádza k disipácii energie, na tlmené a netlmené,
- podľa priebehu kmitania na periodické alebo neperiodické. [10]

3.1 Kmitanie lineárnych sústav s jedným stupňom voľnosti

Pre analýzu kmitania musí byť reálna mechanická sústava nahradená výpočtovým modelom. Ten je potrebné popísať matematicky. Aj keď reálna konštrukcia je kontinuum (spojité prostredie s nekonečným množstvom bodov), na jej popis stačí len niekoľko súradníc. To umožňuje vytvorenie zjednodušeného matematického modelu. [5] [11]

Vhodným základom pre vytvorenie matematického modelu kmitania sú Lagrangeove rovnice druhého druhu. Vhodný tvar Lagrangeovej rovnice pre kmitanie je [5] [12]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q} + \frac{\partial E_p}{\partial q} + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{q}} = F(t) \quad (3.1)$$

kde:

q je zovšeobecnená súradnica,

E_k kinetická energia,

E_p potenciálna energia,

E_D disipatívna energia, ktorá vyjadruje tlmenie sústavy,

$F(t)$ zovšeobecnená budiaca sila. [12]

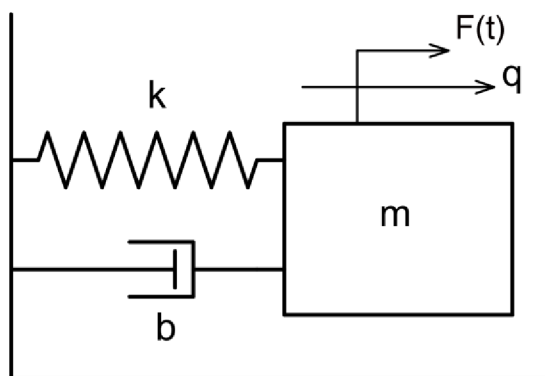
Ak analyzujeme model s jedným stupňom voľnosti (Obr. 3.1), po zderivovaní rovnice (3.1) dostaneme pohybovú rovnicu v tvare

$$m\ddot{q}(t) + b\dot{q}(t) + kq(t) = F(t) \quad (3.2)$$

kde m je zovšeobecnená hmotnosť,

b zovšeobecnené tlmenie,

k zovšeobecnená tuhosť. [5]



Obr. 3.1 Sústava s jedným stupňom voľnosti [12]

V prípade matematického modelu s n stupňami voľnosti pre diskrétnu lineárnu sústavu s konštantnými koeficientmi je pohybová rovnica vyjadrená maticovo:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}(t) \quad (3.3)$$

kde \mathbf{M} je matica hmotnosti, \mathbf{B} matica tlmenia, \mathbf{K} matica tuhosti (všetky s rozmermi $n \times n$), \mathbf{f} vektor budenia a \mathbf{q} vektor zovšeobecnených súradníc (stĺpcové vektory s rozmermi $n \times 1$). [5]

Keďže sa práca zaoberá určením vlastných frekvencií, ďalej bude popísané len voľné kmitanie, s ktorým určenie vlastných frekvencií súvisí.

3.2 Voľné kmitanie

K voľnému kmitaniu dochádza vtedy, keď na sústavu nepôsobia žiadne vonkajšie sily a rám sústavy sa nepohybuje alebo sa posúva priamočiara bez zrýchlenia. Sústava sa rozkmitá v dôsledku nenulových počiatkových podmienok [5]

$$\begin{aligned} q(0) &= q_0 \\ \dot{q}(0) &= \dot{q}_0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Podľa toho, či sa jedná o sústavu tlmenú, alebo netlmenú, rozlišujeme voľné tlmené a netlmené kmitanie. [5]

3.2.1 Voľné netlmené kmitanie

Voľné netlmené kmitanie popisuje najjednoduchší mechanický model bez tlmenia a budiacej sily. Odvodenie rovníc je prevzaté z [10]. Pohybová rovnica voľného netlmeného kmitania má tvar:

$$m\ddot{q}(t) + kq(t) = 0 \quad (3.5)$$

Vlastná frekvencia Ω_0 je definovaná:

$$\Omega_0 = \sqrt{k/m} \quad (3.6)$$

Riešenie rovnice (3.5) má tvar:

$$q(t) = Ce^{\lambda t} \quad (3.7)$$

kde C je amplitúda (výkmit). Charakteristická rovnica má tvar:

$$\lambda^2 + \Omega_0^2 = 0 \quad (3.8)$$

Jej koreňmi sú

$$\lambda_{1,2} = \pm i\Omega_0 \quad (3.9)$$

Po dosadení koreňov charakteristickej rovnice do rovnice (3.7) a ďalších úpravách je možné riešenie rovnice (3.5) prepísať na tvar:

$$q(t) = C \sin(\Omega_0 t + \varphi_0) \quad (3.10)$$

kde φ_0 je fázový uhol, ktorý vyjadruje výchylku v čase $t = 0$. [10]

3.2.2 Voľné tlmené kmitanie

Odvozenie rovníc pre voľné tlmené kmitanie je prevzaté z [5]. Pohybová rovnica pre voľné kmitanie systému s jedným stupňom voľnosti má tvar:

$$m\ddot{q}(t) + b\dot{q}(t) + kq(t) = 0 \quad (3.11)$$

Pomerný útlm:

$$D = \frac{b}{2m\Omega_0} = \frac{b}{2\sqrt{km}} \quad (3.12)$$

Po úprave rovnice (3.11) pomocou vzťahov (3.6) a (3.12) dostaneme charakteristickú rovnicu v tvare:

$$\lambda^2 + 2D\Omega_0\lambda + \Omega_0^2 = 0 \quad (3.13)$$

Z nej vyjadríme korene:

$$\lambda_{1,2} = -D\Omega_0 \pm \Omega_0\sqrt{D^2 - 1} \quad (3.14)$$

Korene $\lambda_{1,2}$ v závislosti na člene D^2 môžu byť: reálne rôzne ($D^2 > 1$), komplexne združené ($D^2 < 1$) alebo môže vyjsť dvojný koreň ($D^2 = 1$). Podľa veľkosti pomerného útlmu D môžeme tlmenie klasifikovať ako:

1. nadkritické (silné) tlmenie, pre $D > 1$. Všeobecné riešenie má tvar:

$$q(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (3.15)$$

2. kritické tlmenie, pre $D = 1$. Všeobecné riešenie má tvar:

$$q(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\Omega_0 t} \quad (3.16)$$

3. podkritické (slabé) tlmenie, pre $0 \leq D < 1$ (pre $D = 0$ ide o netlmenú sústavu). Všeobecné riešenie má tvar:

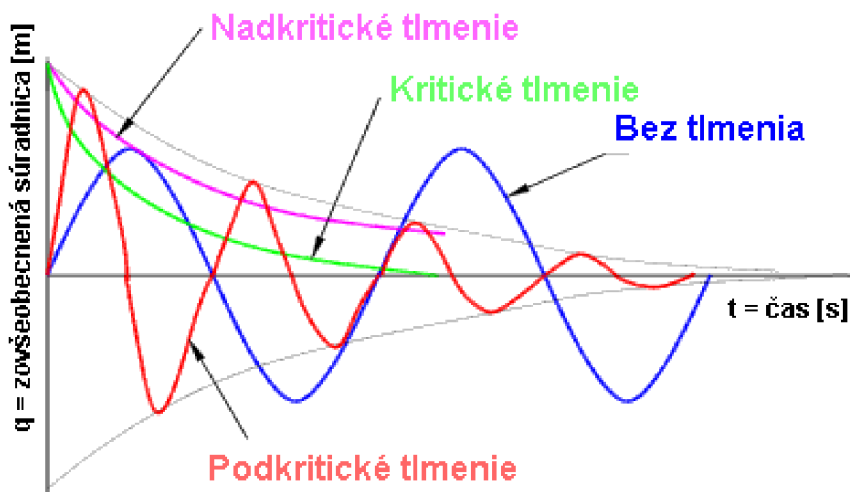
$$q(t) = e^{-D\Omega_0 t} (C_1 e^{i\Omega_D t} + C_2 e^{-i\Omega_D t}) \quad (3.17)$$

kde

$$\Omega_D = \Omega_0 \sqrt{1 - D^2} \quad (3.18)$$

je vlastná frekvencia tlmenej sústavy.

Členy C_1 a C_2 vo vzťahoch (3.15), (3.16), (3.17) sú integračné konštanty, ktoré sú určené z počiatočných podmienok [5]. Priebehy grafov závislosti výchylky na čase popísaných druhov tlmení sú na obr. 3.2.



Obr. 3.2 Grafy rôznych druhov tlmení [13]

3.3 Problém vlastných hodnôt

„Problém vlastných hodnôt je definovaný ako určenie vlastných čísel (vlastných frekvencií) a vlastných vektorov matematického modelu (3.3) pre $f(t) = 0$.“ [9, s. 77]

Pre určenie vlastných frekvencií sa vychádza z modelu sústavy s viac stupňami voľnosti (3.3) bez tlmenia a budiacej sily, teda z rovnice pre popis voľného kmitania konzervatívnych sústav [5]

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{0} \quad (3.19)$$

s počiatočnými podmienkami danými vektormi

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(0) &= \mathbf{q}_0 \\ \dot{\mathbf{q}}(0) &= \dot{\mathbf{q}}_0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Rovnica (3.19) má riešenie v tvare:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{v}e^{i\Omega t} \quad (3.21)$$

kde \mathbf{v} je vektor amplitúd a Ω uhlová frekvencia. Keď rovnicu (3.21) dosadíme do rovnice (3.19), dostaneme rovnicu predstavujúcu problém vlastných hodnôt: [5]

$$(\mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M})\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (3.22)$$

Netriviálne riešenie rovnice (3.22) existuje, len keď platí:

$$\det(\mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M}) = 0 \quad (3.23)$$

Korene charakteristickej rovnice (3.23) λ_v sa nazývajú vlastné čísla [5]

$$\lambda_v = \Omega_v^2 \quad (3.24)$$

Vlastné frekvencie

$$\Omega_v = +\sqrt{\lambda_v} \quad (3.25)$$

sa zoradia vzostupne $0 \leq \Omega_1 \leq \Omega_2 \leq \dots \leq \Omega_n$. Každý vlastnej frekvencii Ω_v zodpovedá vlastný vektor \mathbf{v}_v . Ten musí spĺňať rovnicu (3.22) a charakterizuje vlastný tvar kmitania. Teda [5]

$$(\mathbf{K} - \Omega_v^2 \mathbf{M})\mathbf{v}_v = \mathbf{0}, \quad v = 1, 2, \dots, n \quad (3.26)$$

Keďže tejto rovnici vyhovuje ľubovoľný násobok vlastného vektora, je potrebné vlastné vektory normovať. Používa sa podmienka pre normované vlastné vektory v tvare [5]

$$\mathbf{v}_v^T \mathbf{M} \mathbf{v}_v = 1, \quad v = 1, 2, \dots, n \quad (3.27)$$

„Vlastné vektory sú lineárne nezávislé a tvoria bázu n -dimenzionálneho Euklidovského priestoru. Fyzikálne to znamená to, že každý možný pohyb sústavy telies modelovaný pohybovou rovnicou voľného netlmeného kmitania (3.19) je možné popísať lineárnou kombináciou vektorov“ [5, s. 69]

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{v=1}^n \mathbf{v}_v \mathbf{x}_v(t) = \mathbf{V} \mathbf{x}(t) \quad (3.28)$$

Kde \mathbf{V} je modálna matica zložená z vlastných vektorov \mathbf{v}_v . [5]

Modálna transformácia je transformácia zovšeobecnených súradníc $\mathbf{q}(t)$ na tzv. modálne súradnice $\mathbf{x}(t)$. Modálna analýza je spôsob vyšetovania dynamickej odozvy sústav založená na modálnej transformácii. Po aplikovaní modálnej transformácie na rovnicu (3.19) sa dá táto rovnica prepísať do tvaru [5]

$$\mathbf{M} \mathbf{V} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{V} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (3.29)$$

Pomer dvoch ľubovoľne vybraných zovšeobecnených súradníc $q_r(t)$ a $q_s(t)$ v ľubovoľnom čase sa rovná pomeru zodpovedajúcich prvkov vlastných vektorov \mathbf{v}_j [5]

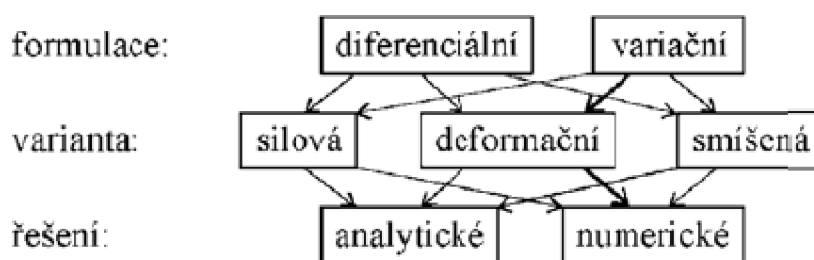
$$\frac{q_r(t)}{q_s(t)} = \frac{\mathbf{v}_{r,j}}{\mathbf{v}_{s,j}} \quad (3.30)$$

4 METÓDA KONEČNÝCH PRVKOV

Vznik metódy konečných prvkov (MKP) sa datuje do obdobia päťdesiatych rokov dvadsiateho storočia. Prvou knihou pojednávajúcou o MKP bola kniha prof. Zinkiewicza [14]. Využitie tejto metódy v praxi bolo umožnené vďaka rozvoju číslicových počítačov, ktoré umožňovali riešiť väčšie sústavy rovníc. [15]

Princípom metódy je rozdelenie spojitého telesa na konečný počet prvkov elementárnych tvarov (napr. trojuholník, štvoruholník, kocka, ihlan). Všeobecné diferenciálne rovnice, definované cez oblasť celého telesa, sú prevedené na sústavu algebraických rovníc na každom konečnom prvku. Sústavy rovníc sú najprv definované na jednotlivých prvkoch a sú tvorené lokálnymi maticami tuhosti, vonkajšieho zaťaženia a deformačných parametrov. Z lokálnych sústav rovníc definovaných na jednotlivých prvkoch je následne vytvorená jedna výsledná sústava rovníc, v ktorej vystupujú globálne matice vzniknuté zlúčením zodpovedajúcich lokálnych matíc zo všetkých prvkov. Riešením tejto sústavy rovníc je nájdenie neznámych parametrov každého prvku. Hľadanie spojitého riešenia sa teda mení na hľadanie konečného počtu parametrov. Tento postup sa nazýva diskretizácia spojitého problému. [15]

Prístupy riešenia priamych úloh mechaniky sa dajú rozdeliť podľa niekoľkých hľadísk. Rozdelenie je na obr. 4.1.



Obr. 4.1 Rozdelenie prístupov riešenia priamych úloh mechaniky [15]

Z hľadiska matematickej formulácie problému sa dajú prístupy rozdeliť na prístup diferenciálny, ktorý formuluje problém ako sústavu diferenciálnych rovníc, a princíp variačný. Ten hľadá riešenie problému ako stav, v ktorom energia analyzovaného telesa dosahuje extrém. Z hľadiska výberu nezávislých funkcií pružnosti sa prístupy delia na deformačný (hľadanými neznámymi sú zložky posuvov), silový (neznámymi sú zložky napätí) a zmiešaný prístup (neznámymi sú zložky napätí aj posuvov). Z hľadiska vlastnej realizácie riešenia rozlišujeme riešenia:

- analytické riešenie – s využitím integrálneho a diferenciálneho počtu sú výsledkom spojité funkcie. Jeho výhodou je nájdenie všeobecnej funkčnej závislosti medzi vstupnými a výstupnými veličinami. Problémom je však jeho obmedzené využitie, spravidla len na geometricky jednoduché úlohy.
- numerické riešenie – namiesto hľadania spojitých funkcií hľadá riešenie konečného počtu neznámych parametrov. Pomocou nich sú hľadané funkcie približne aproximované, z čoho vyplýva, že riešenie nie je presné, ale len približné. Oproti analytickému riešeniu je numerické riešenie použiteľné prakticky pre každú matematicky popísateľnú úlohu. [15]

Metóda konečných prvkov je približná metóda, ktorá hľadá riešenie problémov popísateľných diferenciálnymi rovnicami. Prevláda u nej variačná formulácia, deformačný prístup (neznáme parametre sú posuvy) a numerické riešenie. Keďže numerické riešenie vyžaduje veľký počet matematických operácií, bol rozvoj tejto metódy limitovaný rozvojom výpočtovej techniky. [15] [16]

Východiskom deformačnej varianty MKP je Lagrangeov variačný princíp, ktorý hovorí: „Medzi Všetkými funkciami posuvov, ktoré zachovávajú spojitost' telesa a splňujú geometrické okrajové podmienky, sa realizujú tie, ktoré udeľujú celkovej potenciálnej energii Π stacionárnu hodnotu.“ [15, s. 10] Uvedená stacionárna hodnota predstavuje minimum potenciálnej energie. Potenciálnu energiu možno vyjadriť ako

$$\Pi = W - P \quad (4.1)$$

kde W je energia napätosti telesa a P potenciál vonkajšieho zaťaženia. Po vyjadrení energie napätosti a potenciálu vonkajšieho zaťaženia môžeme celkovú potenciálnu energiu vyjadriť v maticovom tvare v závislosti na konečnom počte deformačných parametrov, ktoré sú zoradené v matici U : [15]

$$\Pi = \frac{1}{2} U^T K U - U^T F \quad (4.2)$$

kde K je matica tuhosti a F matica vonkajšieho zaťaženia. Potenciálna energia nadobúda extrém, ak [15]

$$\frac{\partial \Pi}{\partial U} = 0 \quad (4.3)$$

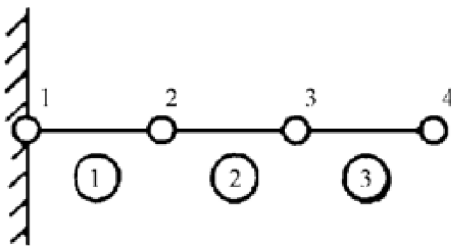
Po zderivovaní dostaneme základnú rovnicu MKP [15]

$$K U = F \quad (4.4)$$

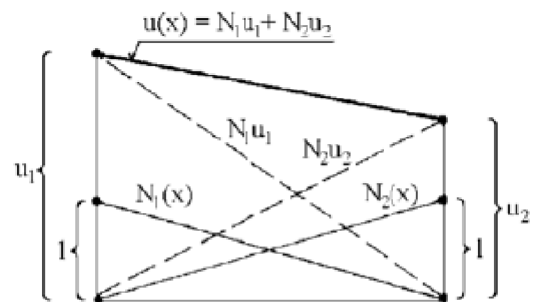
Pri analýze pomocou MKP sa teleso rozdelí na konečný počet prvkov. Každý prvok má určitý počet uzlov. V nich sú hľadané neznáme parametre, v prípade deformačnej varianty MKP sú to deformačné parametre (napr. posuvy, natočenia). Prvky a uzly tvoria sieť. Jej hustota a rozloženie ovplyvňuje presnosť výsledku. Ako príklad je na obr. 4.2 zobrazená sieť prútu tvorená tromi prúťovými prvkami a štyrmi uzlami. Posuv prvku je daný vzťahom [15]

$$u(x) = N \delta \quad (4.5)$$

kde N je matica bazových funkcií (tvarových funkcií posuvov) a δ je matica deformačných parametrov, ktoré sú neznámymi riešeniami. Bazové funkcie pre jednoduchý prúťový prvok sú zobrazené na obr. 4.3. [15]



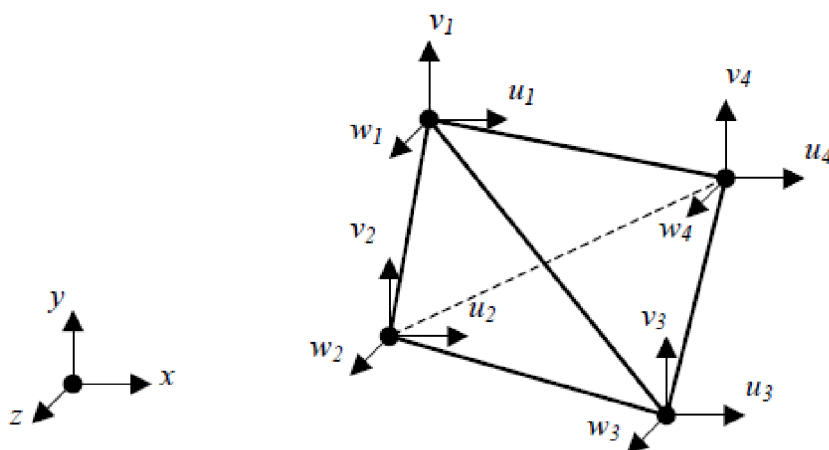
Obr. 4.2 Sieť prútu [15]



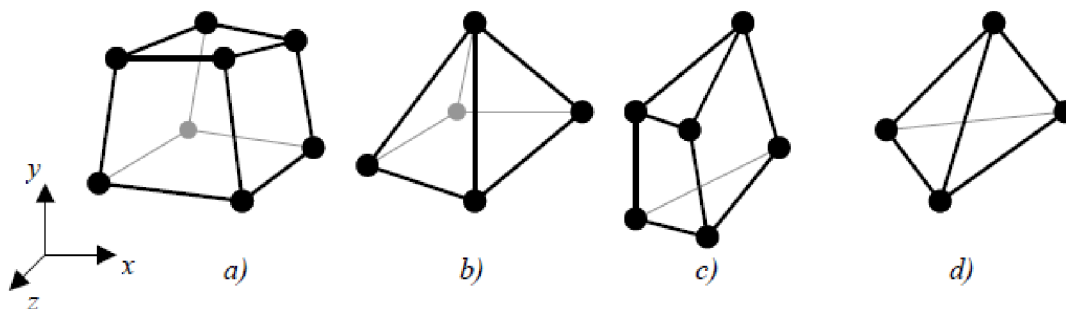
Obr. 4.3 Bazové funkcie [15]

Metóda konečných prvkov v dynamike vychádza z pohybovej rovnice lineárnej diskretnej sústavy (3.3). Určenie vlastných frekvencií a tvarov vychádza z pohybovej rovnice voľného netlmeného kmitania (3.19) a rovnice popisujúcej problém vlastných hodnôt (3.22). [15]

V praxi sa najčastejšie diskretizujú priestorové telesá. Najjednoduchším priestorovým prvkom je lineárny štvorsten, nazývaný aj tetraéder (Obr. 4.4). Vzniká vytiahnutím rovinného trojuholníka do tretieho priestoru. Neznámymi parametrami sú tri zložky posuvov u, v, w . Ďalším typom prvku je osemuzlový lineárny šesťsten, nazývaný aj hexaéder (Obr. 4.5). Existujú však aj rôzne tvarovo degradované podoby šesťstenu. Tie umožňujú vyplniť zložitejšie tvarovanú geometriu. [15]



Obr. 4.4 Štvorsten [15]



Obr. 4.5 Šesťsten a jeho tvarovo degenerované formy [15]

5 VÝPOČTOVÝ MODEL A REALIZÁCIA VÝPOČTOVEJ MODÁLNEJ ANALÝZY

Cieľom praktickej časti tejto práce je realizácia výpočtovej modálnej analýzy obežného kolesa vírovej turbíny. Analyzované bolo obežné koleso vírovej turbíny s dvomi lopatkami, ktoré bolo navrhnuté v rámci diplomovej práce na Odbore fluidného inžinýrství Viktora Kaplana [17]. Obežné koleso je znázornené na obr. 5.1 a jeho základné rozmery sú uvedené v tab. 5.1.



Obr. 5.1 Analyzované obežné koleso vírovej turbíny

Tab. 5.1 Základné rozmery obežného kolesa v mm

Priemer obežného kolesa	Vonkajší priemer náboja	Vnútorý priemer náboja	Dĺžka náboja
200	50	30	56

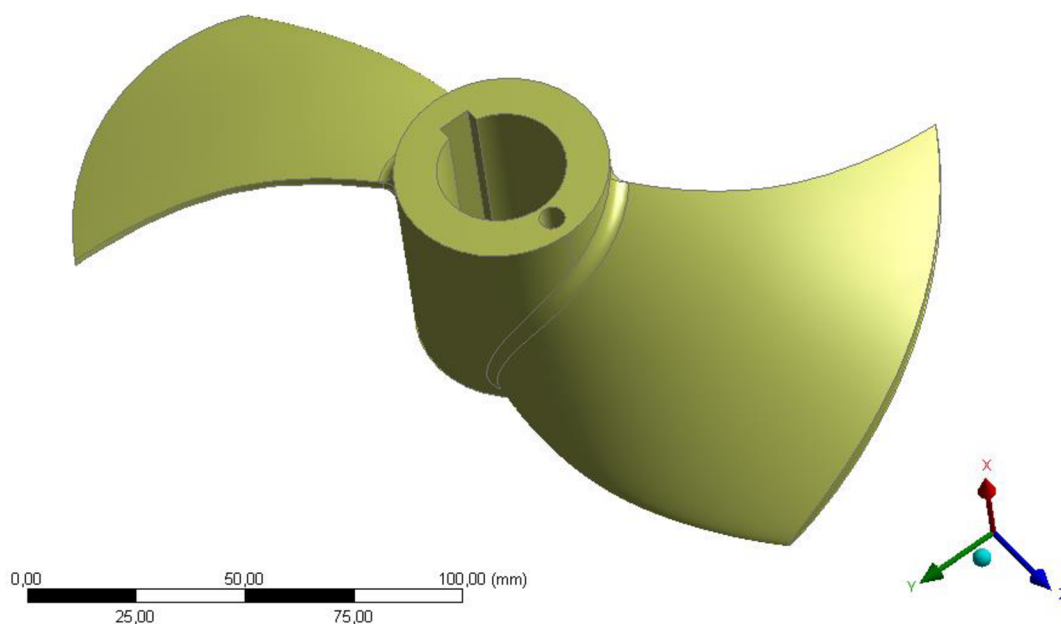
Riešením analyzovaného problému je určenie prvých piatich vlastných frekvencií a zodpovedajúcich vlastných tvarov bez vplyvu rotácie a tlmenia. Takto stanovená úloha zodpovedá prípadu voľného netlmeného kmitania popísaného v kapitole 3.2.1.

Na realizáciu výpočtovej modálnej analýzy je využitý program ANSYS Workbench 17.2. Geometria je upravená v module ANSYS DesignModeler.

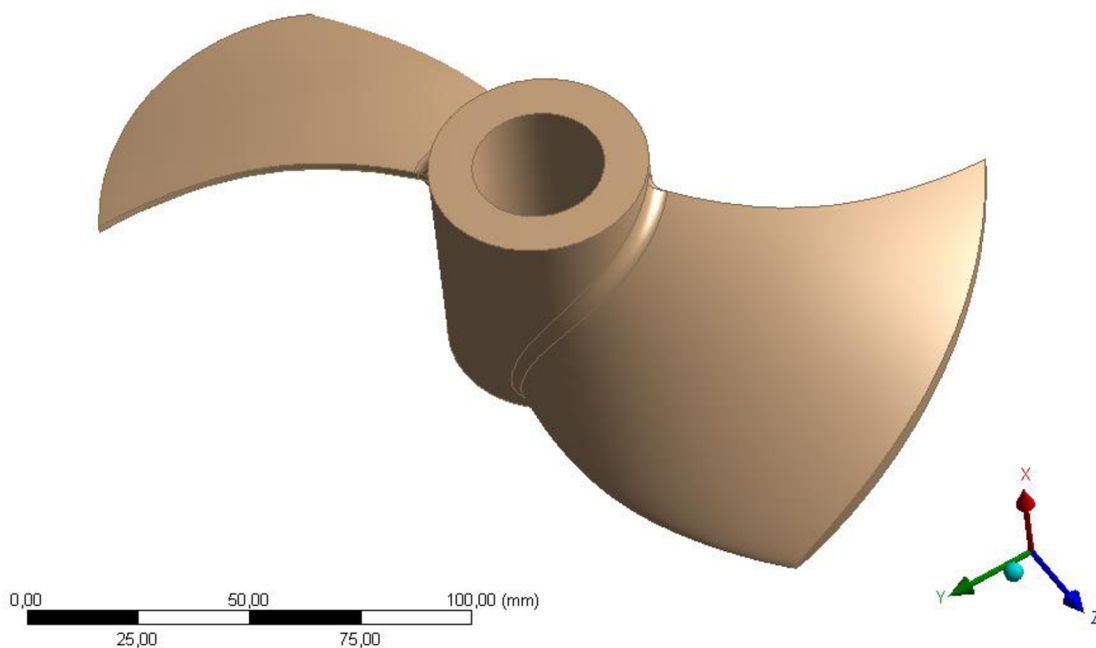
5.1 Model geometrie

Model geometrie je prevzatý z diplomovej práce [17] vo formáte IGES. Tento model je za účelom vytvorenia kvalitnej siete zjednodušený. Sú odstránené malé nepodstatné a prechodové plochy (zrazené alebo zaoblené hrany).

Pre modálnu analýzu sú použité dva rôzne presné modely geometrie. Prvý – podrobnejší model geometrie je upravený len vyššie uvedeným spôsobom (Obr. 5.2). U druhého (Obr. 5.3) je zanedbaná drážka pre pero a diera slúžiaca na vyvažovanie. Cieľom použitia druhého modelu geometrie bolo zistiť, či zanedbanie drážky pre pero a vyvažovacej diery na náboji obežného kolesa má vplyv na výsledky výpočtovej modálnej analýzy. Ak by odchýlka výsledkov modálnej analýzy medzi oboma modelmi geometrie bola zanedbateľná, model zjednodušenej geometrie by mohol byť použiteľný u výpočtov ďalších obežných kolies. Táto geometria umožňuje jednoduchšie vytvorenie rovnomernej siete na náboji.



Obr. 5.2 Model podrobnejšej geometrie



Obr. 5.3 Model zjednodušenej geometrie

5.2 Model materiálu

Obežné koleso je vyrobené z bronzu s označením CuSn8. Reálny materiál obežného kolesa vírovej turbíny je treba pre výpočet nahradiť modelom materiálu. Pre túto výpočtovú modálnu analýzu je zvolený izotropný lineárne elastický model materiálu. Pre úplný popis materiálu pri riešení modálnej analýzy je potrebné poznať hodnoty dvoch materiálových charakteristík a hustoty (viď tab. 5.2).

Tab. 5.2 Materiálové vlastnosti

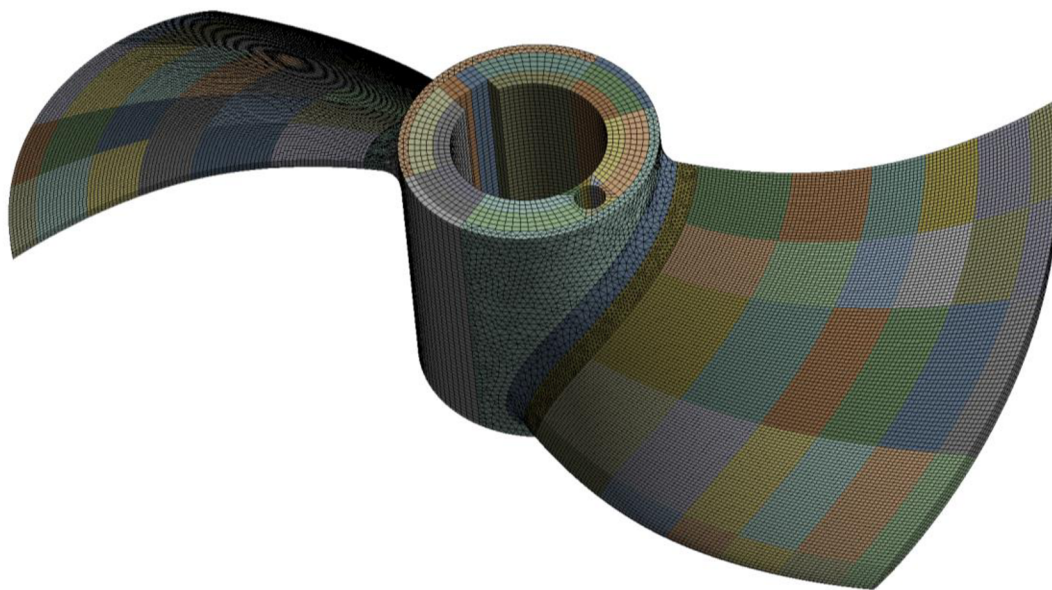
Youngov modul pružnosti E	115 000 MPa
Poissonov pomer μ	0,34
Hustota ρ	7800 kg/m ³

5.3 Výpočtová sieť

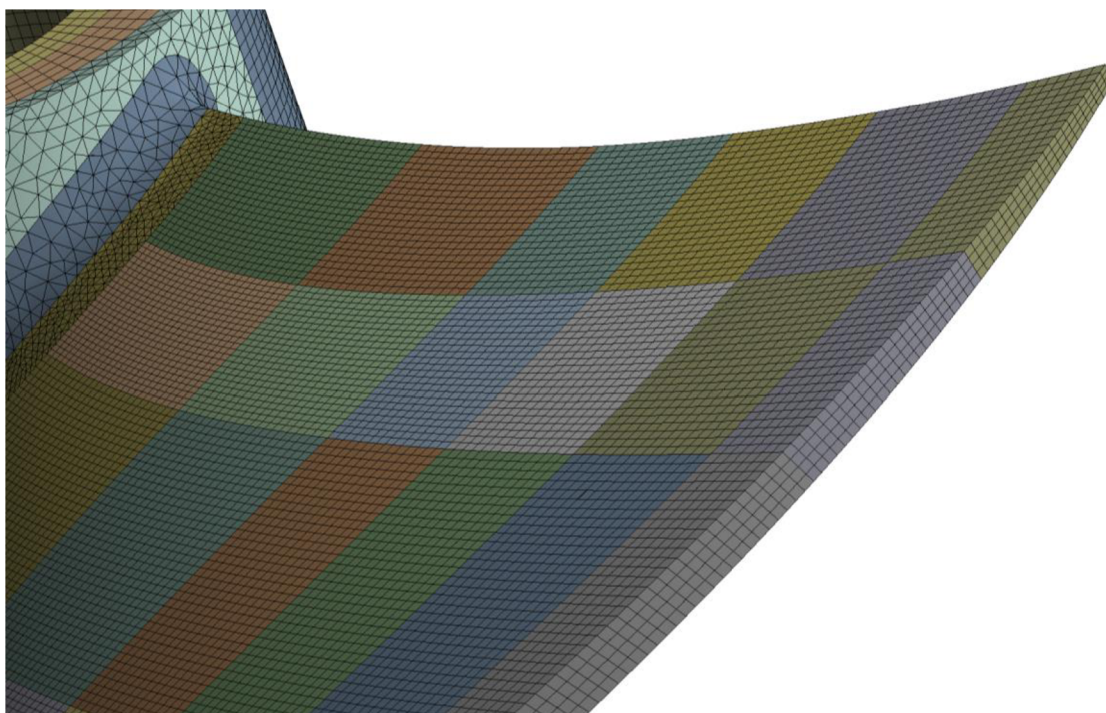
Pre získanie čo najpresnejších výsledkov je cieľom vytvoriť čo najkvalitnejšiu sieť konečných prvkov. Sieť by mala byť pravidelná. Preto sú použité hlavne prvky typu hexaéder (Obr. 4.5). Pravidelná sieť je dosiahnutá pomocou metódy sweep. Aby bolo možné túto metódu sieťovania použiť, musí byť urobená dekompozícia (rozloženie) geometrie. Keďže časť geometrie, hlavne korene lopatiek, má komplikovaný tvar, nie je možné ju vyplniť len pomocou hexaédrov (Obr. 4.5). Preto sú v koreňoch lopatiek a v príľahlých častiach náboja využité prvky typu tetraéder (Obr. 4.4). Oba typy prvkov sú lineárne. V programe ANSYS sú označené ako SOLID185. Vytvorená sieť je na obr. 5.4, obr. 5.5 a obr. 5.6. Počty prvkov a uzlov sietí sú v tab. 5.3.

Tab. 5.3 Počty prvkov a uzlov sietí

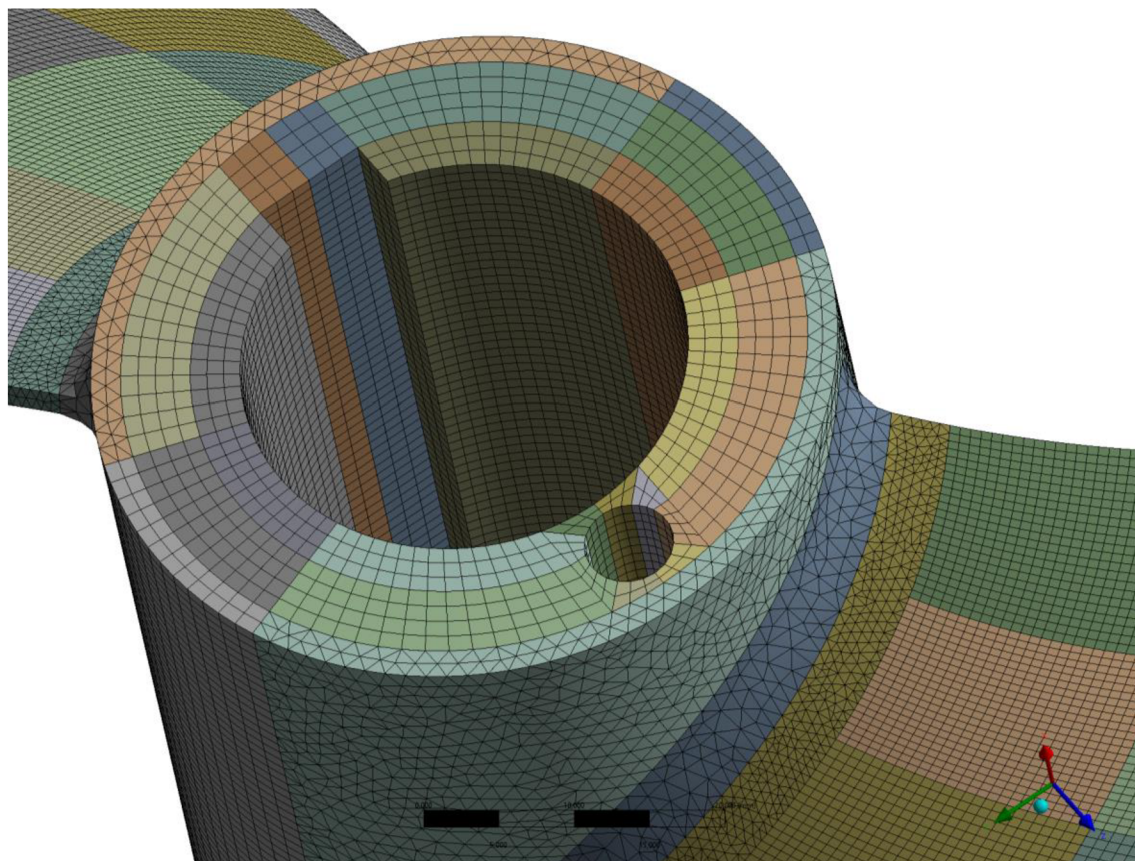
	Počet prvkov siete	Počet uzlov siete
Podrobnejšia geometria	251 767	186 182
Zjednodušená geometria	263 030	195 072



Obr. 5.4 Sieť vytvorená na podrobnejšej geometrii



Obr. 5.5 Detail siete lopatky



Obr. 5.6 Detail siete náboja

5.4 Okrajové podmienky

Analyzované sú modely s dvomi typmi okrajových podmienok. Okrajové podmienky vyjadrujú dva stavy obežného kola. Prvým je voľné teleso. Tento stav je namodelovaný bez použitia akejkoľvek väzby. Teleso má teda šesť stupňov voľnosti.

Druhým analyzovaným stavom je obežné koleso uložené na hriadeli. Okrajová podmienka vystihujúca tento stav je namodelovaná umiestnením pevnej väzby odoberajúcej všetky stupne voľnosti na čelnú plochu náboja obežného kola.

5.5 Výsledky

Pri výpočte bol použitý riešič Block Lanczos. Boli vypočítané hodnoty prvých piatich vlastných frekvencií modelu voľného telesa a modelu uloženia obežného kola na hriadeli. Zároveň boli určené prislúchajúce vlastné tvary. Prehľad vlastných frekvencií modelu voľného telesa je v tab. 5.4 a modelu obežného kola na hriadeli v tab. 5.5. V každej tabuľke sú pre porovnanie hodnoty vlastných frekvencií pre podrobnejší a zjednodušený model geometrie.

Tab. 5.4 Hodnoty vypočítaných vlastných frekvencií modelu voľného telesa

Tvar	Vlastná frekvencia [Hz]	
	Podrobnejší model geometrie	Zjednodušený model geometrie
1.	486	486
2.	608	605
3.	953	956
4.	999	998
5.	1952	1952

Tab. 5.5 Hodnoty vypočítaných vlastných frekvencií modelu obežného kola na hriadeli

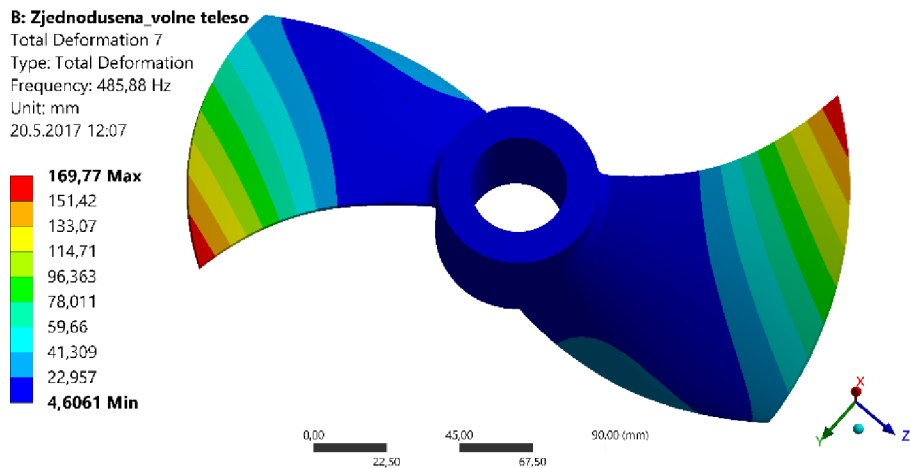
Tvar	Vlastná frekvencia [Hz]	
	Podrobnejší model geometrie	Zjednodušený model geometrie
1.	410	410
2.	867	869
3.	1827	1830
4.	2375	2374
5.	2687	2692

Z tab. 5.4 a tab. 5.5 vyplýva, že vlastné frekvencie modelov voľného telesa a modelov obežného kola uloženého na hriadeli sú úplne odlišné. Líšia sa hodnoty vlastných frekvencií ako aj rozdiely medzi hodnotami vlastných frekvencií jednotlivých vlastných tvarov.

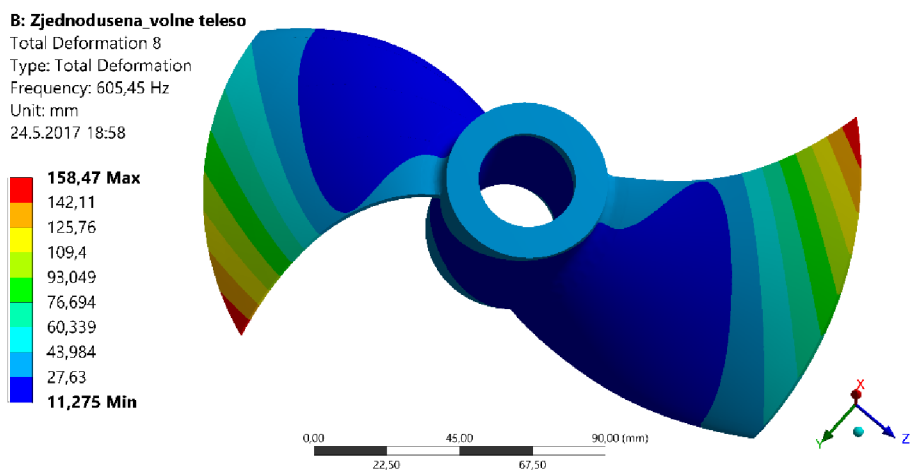
Z porovnania hodnôt vlastných frekvencií jednotlivých modelov geometrie vyplýva, že hodnoty sa odlišujú len minimálne. Maximálna zaznamenaná odchýlka hodnôt je 0,5 %. Na základe toho sa dá povedať, že model s podrobnejšou geometriou je možné nahradiť modelom so zjednodušenou geometriou a vypočítané hodnoty vlastných frekvencií budú prakticky totožné.

Hodnoty vlastných tvarov kmitania neudávajú skutočnú výchylku telesa pri kmitaní, aj keď program ANSYS v nižšie uvedených výsledkoch udáva jednotky stupnice v milimetroch. Sú to bezrozmerné hodnoty, ktoré určujú veľkosť výchylky v jednom bode vzhľadom k inému bodu. V mieste, kde má vlastný tvar hodnotu nula je nulová výchylka, v mieste, v ktorom má vlastný tvar najvyššiu hodnotu je najväčšia výchylka.

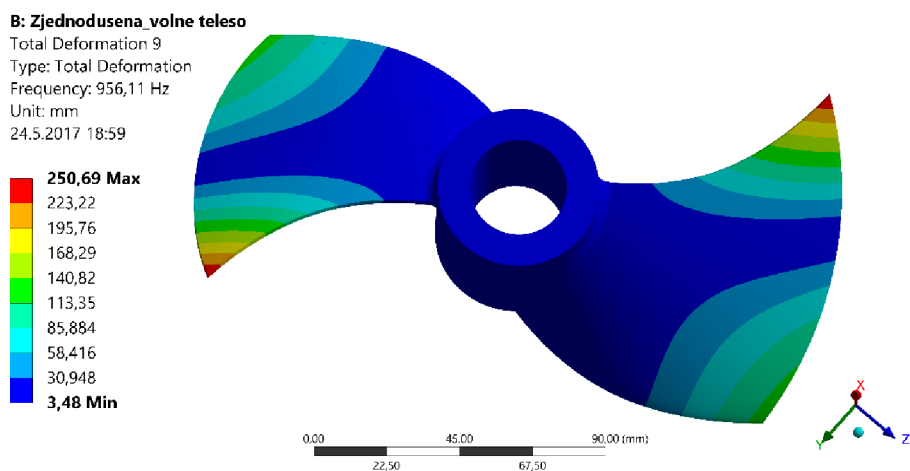
Z porovnania vlastných tvarov jednotlivých geometrií vyplýva, že odchýlky medzi nimi sú minimálne. Vlastné tvary modelu so zjednodušenou geometriou s voľným uložením sú na obr. 5.7 až 5.11 a modelu obežného kola uloženého na hriadeli na obr. 5.12 až 5.16. Keďže vlastné tvary modelu s podrobnejšou geometriou sa voči modelu so zjednodušenou geometriou líšia len minimálne, sú uvedené v prílohe A.



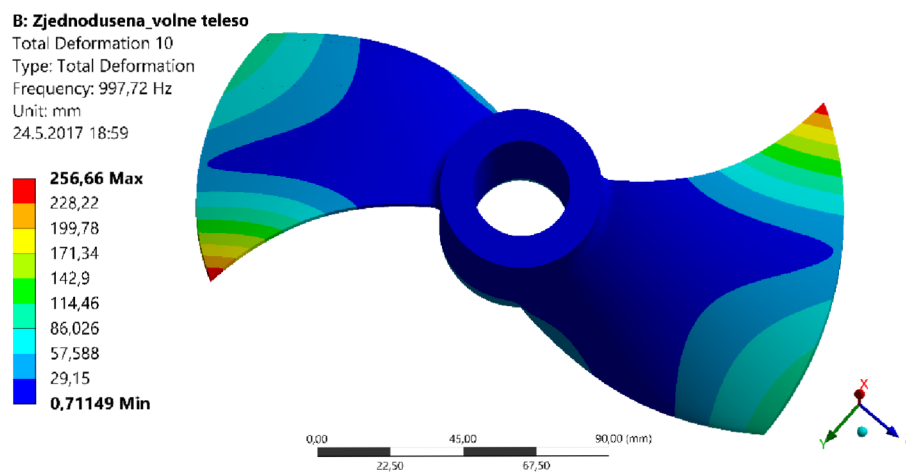
Obr. 5.7 Model voľného telesa so zjednodušenou geometriou – 1. vlastný tvar



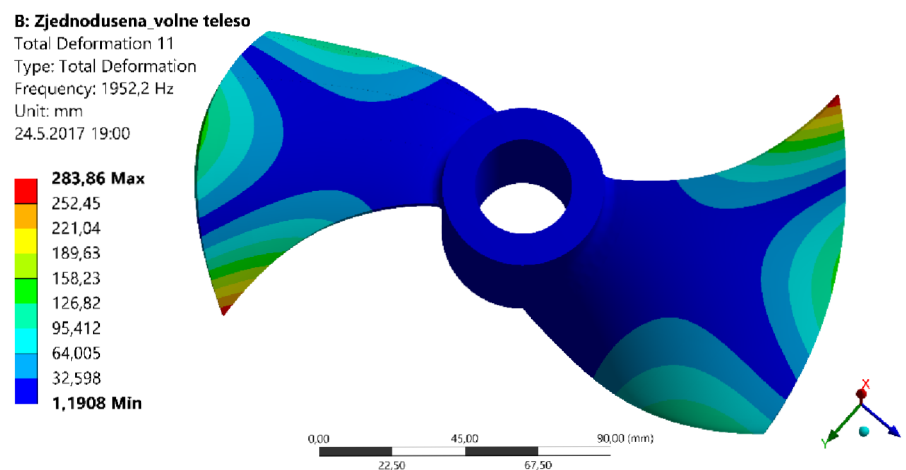
Obr. 5.8 Model voľného telesa so zjednodušenou geometriou – 2. vlastný tvar



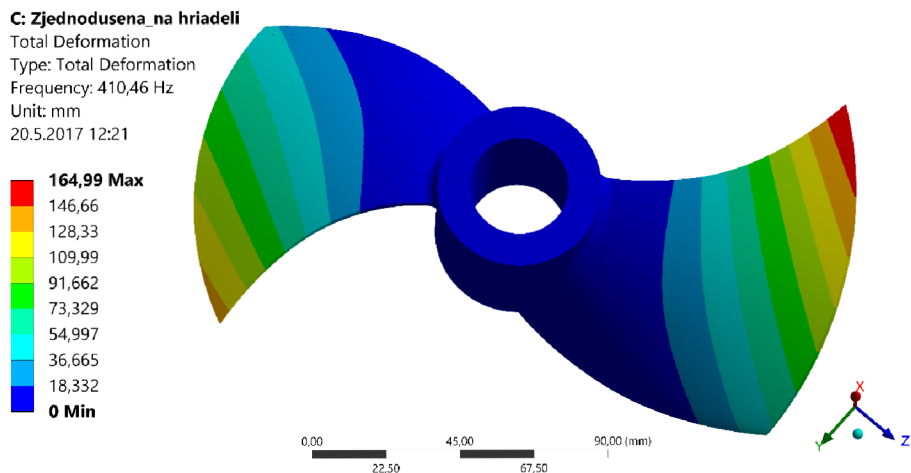
Obr. 5.9 Model voľného telesa so zjednodušenou geometriou – 3. vlastný tvar



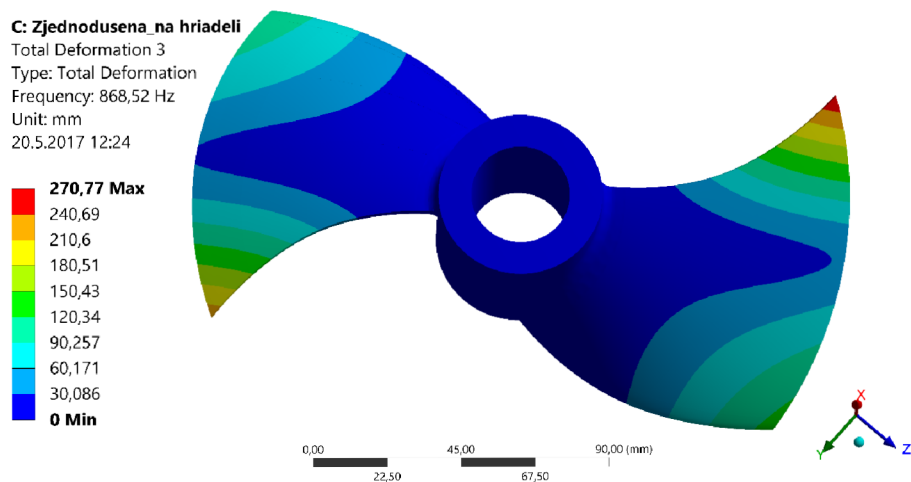
Obr. 5.10 Model voľného telesa so zjednodušenou geometriou – 4. vlastný tvar



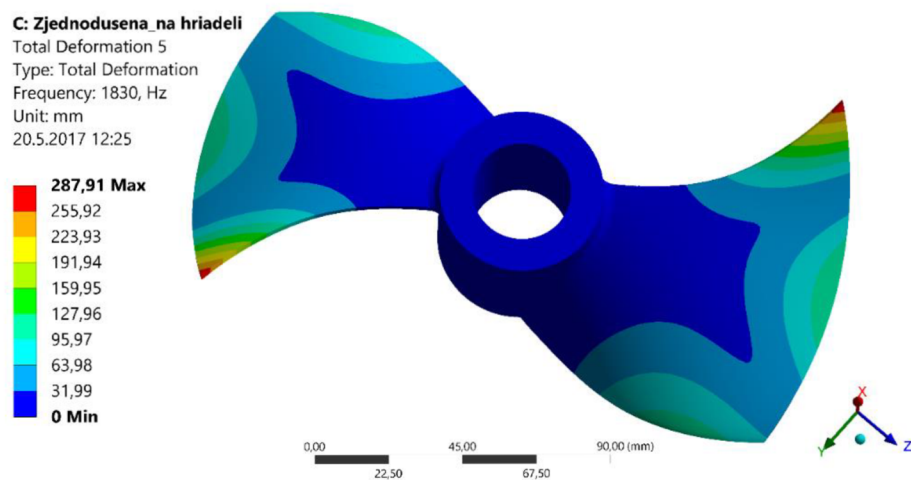
Obr. 5.11 Model voľného telesa so zjednodušenou geometriou – 5. vlastný tvar



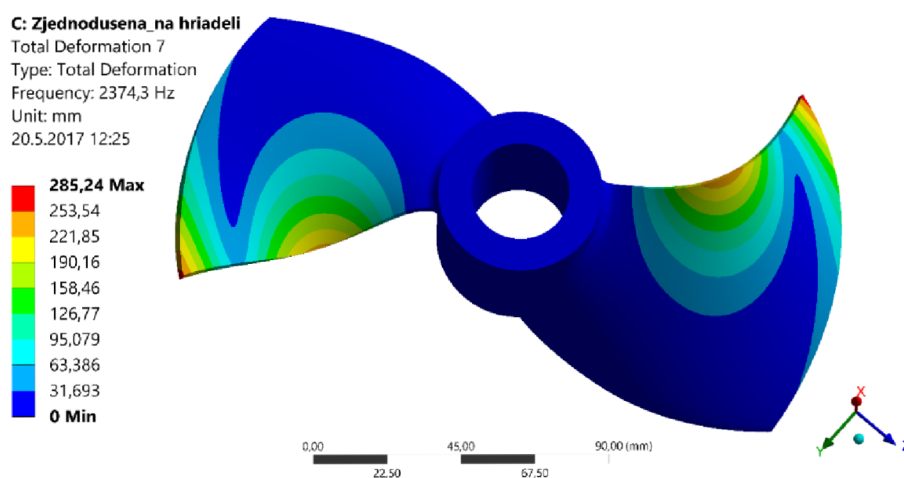
Obr. 5.12 Model uloženia na hriadelí so zjednodušenou geometriou – 1. vlastný tvar



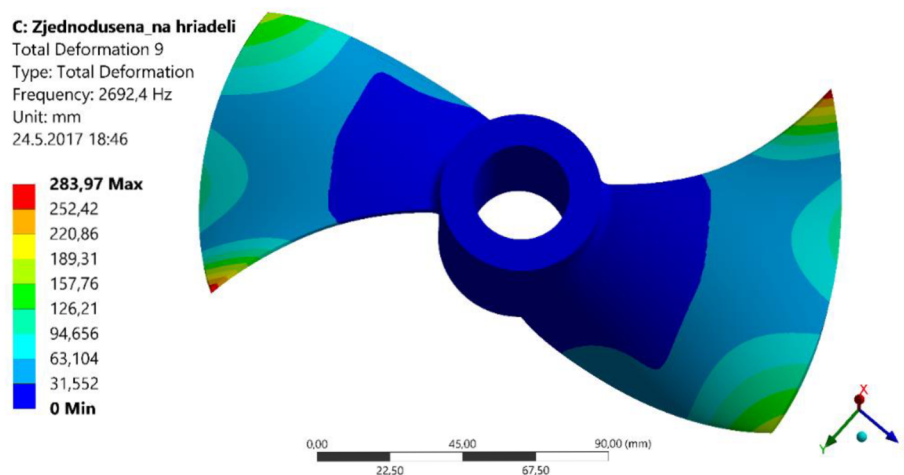
Obr. 5.13 Model uloženia na hriadelí so zjednodušenou geometriou – 2. vlastný tvar



Obr. 5.14 Model uloženia na hriadelí so zjednodušenou geometriou – 3. vlastný tvar



Obr. 5.15 Model uloženia na hriadeli so zjednodušenou geometriou – 4. vlastný tvar



Obr. 5.16 Model uloženia na hriadeli so zjednodušenou geometriou – 5. vlastný tvar

6 EXPERIMENTÁLNA MODÁLNA ANALÝZA

Výsledky výpočtového modelovania je možné považovať za vierohodné len po overení experimentálnym meraním. Preto bola v tejto práci navyše realizovaná aj experimentálna modálna analýza. Tá je založená na vybudení kmitania analyzovaného telesa a spracovaní záznamu jeho dokmitu.

Na realizáciu experimentálnej modálnej analýzy bola využitá technika a softvér Odboru fluidného inžénrství. Použitá bola meracia stanica National Instruments PXIe-1078 s ôsmimi meracími kanálmi. Signál zaznamenávala meracia karta National Instruments PXIe-4492 s rozsahom zaznamenávanej frekvencie 20 Hz – 92,2 kHz. Na spracovanie dát bol použitý už vytvorený program v prostredí Labview určený na podobné merania. Ako snímač bol použitý akcelerometer PCB Piezotronics 352C03 s rozsahom frekvencie 0,5 Hz – 10 kHz. Meracia sústava je na obr. 6.1.



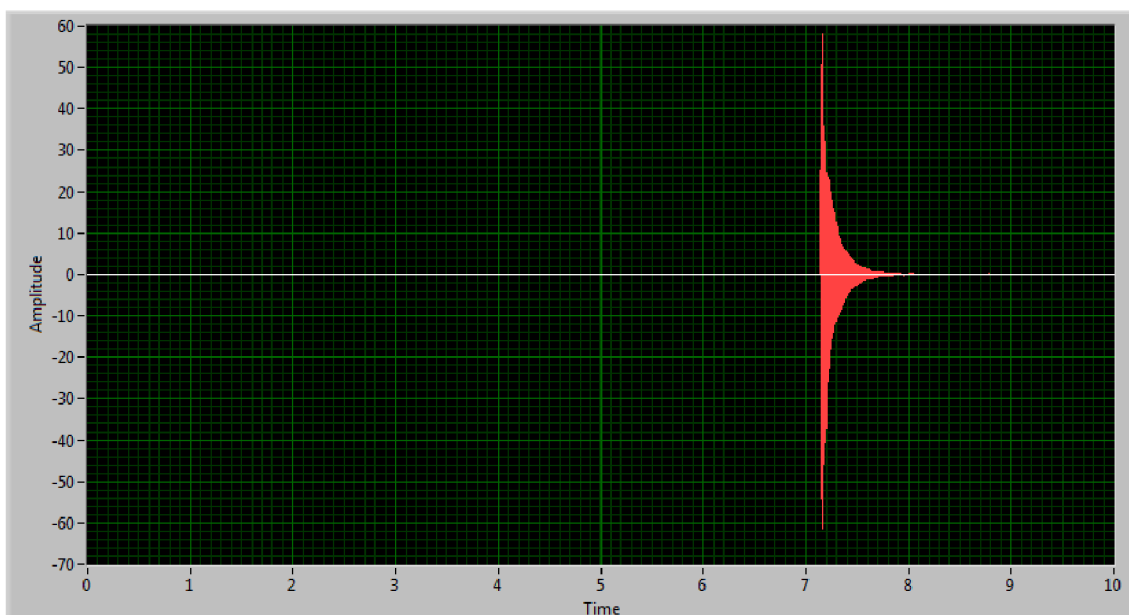
Obr. 6.1 Meracia zostava

Experimentálna modálna analýza bola realizovaná na obežnom kolese zavesenom voľne na lanku zanedbateľnej hmotnosti. Tento spôsob uloženia odpovedá výpočtovej analýze pre voľné teleso. Akcelerometer bol upevnený na lopatke pomocou vosku v mieste, kde bola predpokladaná najväčšia výchylka. Zavesenie obežného kola a umiestnenie snímača je na obr. 6.2. Obežné koleso bolo rozkmitané úderom modálneho kladivka do protiahlej lopatky, teda lopatky, na ktorej nebol umiestnený snímač.

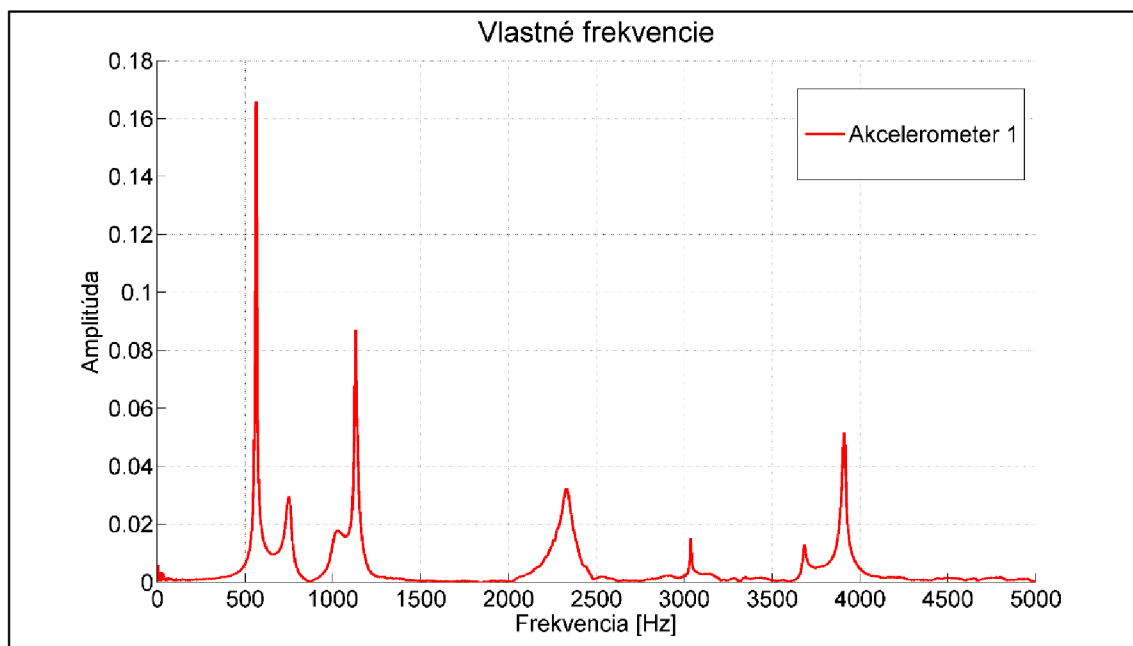


Obr. 6.2 Zavesenie obežného kola a umiestnenie snímača pri meraní

Signál dokmitu bol zaznamenaný so vzorkovacou frekvenciou 10 kHz. Záznam voľného dokmitu je na obr. 6.3. Získaný záznam dokmitu bol prevedený pomocou Fourierovej transformácie v programe Matlab z časovej do frekvenčnej oblasti. Graf Amplitúdo-frekvenčnej charakteristiky získanej Fourierovou transformáciou je na obr. 6.4. Z grafu boli určené hodnoty vlastných frekvencií. Pre porovnanie výsledkov s výpočtom bolo určených prvých päť vlastných frekvencií (tab. 6.1).



Obr. 6.3 Záznam voľného dokmitu



Obr. 6.4 Amplitúdo-frekvenčná charakteristika obežného kolesa

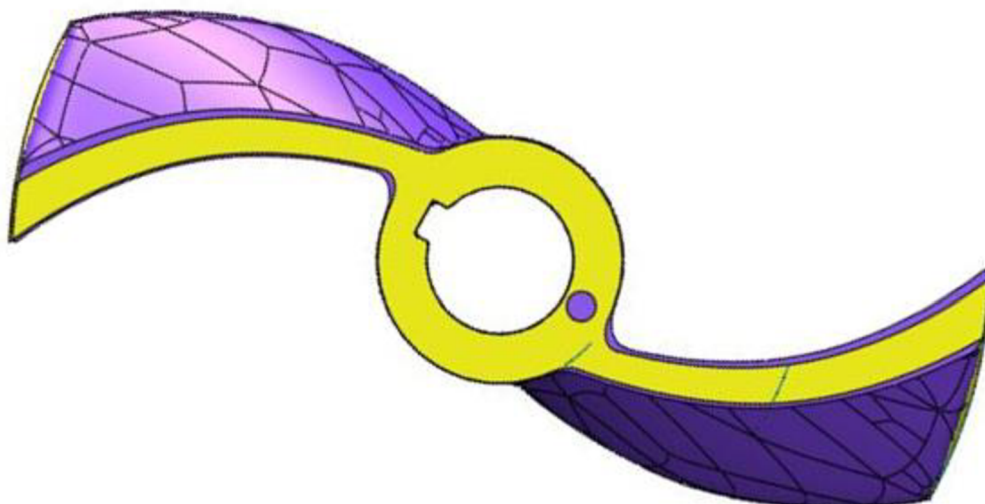
Tab. 6.1 Experimentálne určené hodnoty vlastných frekvencií obežného kolesa

Tvar	Vlastná frekvencia [Hz]
1.	563
2.	749
3.	1020
4.	1128
5.	2327

7 POROVNANIE A ZHODNOTENIE VÝSLEDKOV

Cieľom bakalárskej práce bola realizácia výpočtovej modálnej analýzy obežného kolesa vírovej turbíny. Keďže bolo dostupné vyrobené obežné koleso, rozhodlo sa, že výsledky výpočtového modelovania sa overia experimentálnou analýzou.

Pri porovnaní výsledkov oboch typov analýz pre model voľného telesa však boli zistené výrazné rozdiely. Preto ani nebolo uskutočnené experimentálne meranie obežného kolesa uloženého na hriadelí a hľadali sa príčiny vzniku nezhôd vo výsledkoch. Bolo zistené, že vyrobené obežné koleso nezodpovedá návrhu obežného kolesa, ktoré bolo výstupom diplomovej práce [17]. Obežné koleso bolo vyrobené buď s nedokumentovanými úpravami tvaru alebo vznikli odchýlky pri samotnej výrobe. Rozdiely v tvaroch analyzovaného modelu geometrie a reálneho obežného kolesa sú vystihnuté na obr. 7.1. Reálne obežné koleso je vyznačené fialovou a model geometrie žltou farbou. Ako je vidno, geometrie sa líšia v hrúbke lopatiek. Vyrobené obežné koleso má hrubšie lopatky ako navrhnutý model.



Obr. 7.1 Porovnanie geometrií modelu a reálneho obežného kolesa

Porovnanie výsledkov výpočtovej a experimentálnej modálnej analýzy teda nie je relevantné, pretože boli analyzované dva neekvivalentné modely geometrie.

ZÁVER

Hlavným cieľom bakalárskej práce bola realizácia výpočtovej modálnej analýzy obežného kolesa vírovej turbíny, tzn. určenie jeho vlastných frekvencií a vlastných tvarov. V úvodnej časti práce boli zhrnuté poznatky z mechanického kmitania a ďalej boli uvedené základné informácie o vírovej turbíne a metóde konečných prvkov. Pre overenie výsledkov bolo navyše vykonané experimentálne meranie. Nakoniec boli porovnané a zhodnotené výsledky.

Objektom výpočtovej modálnej analýzy bolo obežné koleso vírovej turbíny navrhnuté v diplomovej práci [17]. Na analýzu bol použitý výpočtový program ANSYS. Analyzované boli dva modely geometrie – podrobnejší a zjednodušený. Pre každý z modelov geometrie boli analyzované dva typy okrajových podmienok. Prvý variant okrajových podmienok predstavoval voľné uloženie obežného kolesa. Druhý popisoval stav, keď je obežné koleso uložené na hriadeli. Pre každý model bolo vypočítaných prvých päť vlastných frekvencií a boli určené prislúchajúce vlastné tvary. Pre model voľného telesa bola realizovaná aj experimentálna modálna analýza.

Z porovnania výsledkov výpočtovej modálnej analýzy vyplýva, že modely s rôznymi typmi okrajových podmienok majú odlišné modálne vlastnosti a teda je potrebné každý typ uloženia analyzovať samostatne. U každého z obidvoch variantov okrajových podmienok boli porovnané výsledky modálnej analýzy pre dva rôzne podrobné modely geometrie. Z výsledkov výpočtovej modálnej analýzy sa dá usúdiť, že analyzované typy modelov geometrií sú z hľadiska vypočítaných vlastných frekvencií a vlastných tvarov prakticky ekvivalentné, keďže maximálny rozdiel v hodnotách vlastných frekvencií je 0,5 %. Sú síce badateľné určité rozdiely v hodnotách výchyliek, ale keďže sú to len bezrozmerné čísla neudávajúce presnú výchylku, je možné nezhody zanedbať. Podrobnejší model geometrie preto môže byť pre výpočtovú modálnu analýzu nahradený zjednodušeným.

Pri porovnaní výsledkov výpočtovej a experimentálnej modálnej analýzy boli zistené výrazné rozdiely vo výsledkoch. Najpravdepodobnejšou príčinou nezhody výsledkov je odlišnosť hrúbky lopatiek analyzovaného modelu geometrie a reálneho obežného kolesa. Rozdiely mohli byť spôsobené dodatočnou zmenou návrhu alebo mohli vzniknúť pri výrobe obežného kolesa.

Ďalším predmetom záujmu v nadväznosti na túto bakalársku prácu by mohlo byť určenie modálnych vlastností pre obežné koleso ponorené v tekutine.

ZOZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮV

- [1] VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ. *Vírová turbína*. Česká republika. Číslo přihlášky 2000-4745. 12.6.2003.
- [2] VOBOŘIL, David. *Vodní elektrárny – princip, rozdělení, elektrárny v ČR* [online]. 2016 [cit. 2017-05-19]. Dostupné z: <http://oenergetice.cz/technologie/obnovitelne-zdroje-energie/vodni-elektrarny-princip-a-rozdeleni>
- [3] Vírová turbína. *Web energetického ústavu FSI VUT v Brně* [online]. [cit. 2017-05-25]. Dostupné z: <http://www.eu.fme.vutbr.cz/odbor-fluidniho-inzenyrstvi/virova-turbina>
- [4] MOBLEY, R. Keith. *Vibration fundamentals*. Boston: Butterworth-Heinemann, 1999. ISBN 0--7506-7150-5.
- [5] ZEMAN, Vladimír a Zdeněk HLAVÁČ. *Kmitání mechanických soustav*. 2. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita, 2004. ISBN 807043337x.
- [6] POCHYLÝ, F., HALUZA, M., RUDOLF, P., HABÁN, V., HUDEC, M. *Swirl turbine as a variant of low head propeller turbin*. Konference ViennaHydro 2016.
- [7] RUDOLF, P., MACH, J., ČUPR, P., POCHYLÝ, F. Hydraulic and structural optimization of very low head siphon propeller turbine (swirl turbine). Konference Viennahydro 2016.
- [8] TAKÁCS, Gergely a Boris ROHAL-ILKIV. *Model Predictive Vibration Control: Efficient Constrained MPC Vibration Control for Lightly Damped Mechanical Structures*. Springer Science & Business Media, 2012. ISBN 978-1-4471-2333-0.
- [9] SLAVÍK, Jaromír, Vladimír STEJSKAL a Vladimír ZEMAN. *Základy dynamiky strojů*. Praha: České vysoké učení technické, 1997. ISBN 8001016226.
- [10] KRATOCHVÍL, Ctirad a Jaromír SLAVÍK. *Mechanika těles: dynamika*. Vyd. 4., V Akademickém nakl. CERM 2. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2007. ISBN 9788021434462.
- [11] BEARDS, C. F. *Structural vibration: Analysis and damping*. Oxford, Boston: Butterworth-Heinemann, 1996. ISBN 0340645806.
- [12] HOUFEK, Lubomír. *Dynamika: Přednášky*. Brno, 2011.
- [13] Damped Vibrations. In: *Roymech* [online]. 2013 [cit. 2017-05-16]. Dostupné z: http://www.roymech.co.uk/Useful_Tables/Vibrations/Free_Vibrations.html
- [14] ZIENKIEWICZ, O. C. a CHEUNG, Y.K.: *The finite element method in structural and continuum mechanics*. New York: McGraw-Hill, 1967.
- [15] PETRUŠKA, Jindřich. *MKP v inženýrských výpočtech* [online]. 2011 [cit. 2017-04-14]. Dostupné z: <http://www.umt.fme.vutbr.cz/img/fckeditor/file/opory/RIV/MKP2011.pdf>
- [16] ZEMAN, J. *Metoda konečných prvků (MKP)* [online]. [cit. 2017-05-02]. Dostupné z: <http://mech.fsv.cvut.cz/~zemanj/teaching/mk10/prednasky/prednaska1.pdf>

- [17] ŠPERKA, O. *Návrh vírové turbíny*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2008. 69 stran. Vedoucí diplomové práce doc. Ing. Miloslav Haluza, CSc.

ZOZNAM POUŽITÝCH SYMBOLOV

Symbol	Jednotka	Veličina
b B	[N.s.m ⁻¹]	Tlmenie Matica tlmenia
C	[m]	Amplitúda kmitania (výkmit)
C_1, C_2	[m]	Integračné konštanty
D	[-]	Pomerný útlm
E	[Pa]	Youngov modul pružnosti
E_D	[J]	Disipatívna energia
E_k	[J]	Kinetická energia
E_p	[J]	Polohová energia
F f F	[N]	Sila Vektor budenia Matica vonkajšieho zaťaženia
g	[m.s ⁻²]	Gravitačné zrýchlenie
H	[m]	Spád
k K	[N.m ⁻¹]	Tuhosť Matica tuhosti
m M	[kg]	Hmotnosť Matica hmotnosti
N_1, N_2 N		Bázové funkcie Matica bázových funkcií
P	[J]	Potenciál vonkajšieho zaťaženia
q, q_0, q_r, q_s q, q_0	[m]	Zovšeobecnená súradnica Vektor zovšeobecnených súradníc
\dot{q}, \dot{q}_0 \dot{q}, \dot{q}_0	[m.s ⁻¹]	Zovšeobecnená rýchlosť Vektor zovšeobecnenej rýchlosti
\ddot{q} \ddot{q}	[m.s ⁻²]	Zovšeobecnené zrýchlenie Vektor zovšeobecneného zrýchlenia
t	[s]	Čas
u	[m]	Posuv
u_1	[m.s ⁻¹]	Unášavá rýchlosť na vstupe do obežného kola

u_2	[m.s ⁻¹]	Unášavá rýchlosť na výstupe z obežného kola
U	[m]	Matica deformačných parametrov
$\mathbf{V}, \mathbf{V}_v, \mathbf{V}_{r,j}, \mathbf{V}_{s,j}$	[-]	Vlastný vektor
V	[-]	Modálna matica
v_{u1}	[m.s ⁻¹]	Unášavá zložka absolútnej rýchlosti na vstupe do obežného kola
v_{u2}	[m.s ⁻¹]	Unášavá zložka absolútnej rýchlosti na výstupe z obežného kola
W	[J]	Energia napätosti
x	[m]	Súradnica
\mathbf{x}, \mathbf{x}_v	[m]	Vektor modálnych súradníc
$\ddot{\mathbf{x}}$	[m.s ⁻²]	Vektor zrýchlenia modálnych súradníc
δ	[m]	Matica deformačných parametrov
η_h η_{hmax}	[%]	Hydraulická účinnosť Maximálna hydraulická účinnosť
λ		Koreň charakteristickej rovnice
λ_v		Vlastné číslo
μ	[-]	Poissonov pomer
Π Π	[J]	Celková potenciálna energia Funkcionál celkovej potenciálnej energie
ρ	[kg.m ⁻³]	Hustota
φ_0	[rad]	Fázový uhol
Ω	[rad.s ⁻¹]	Uhlová frekvencia
Ω_0, Ω_v Ω_D	[rad.s ⁻¹]	Vlastná frekvencia Vlastná frekvencia tlmenej sústavy

ZOZNAM OBRÁZKOV

Obr. 2.1 Schéma priamoprúdeho usporiadania vírovej turbíny [6]	13
Obr. 2.2 Schéma násoskovej vírovej turbíny [6]	14
Obr. 2.3 Schéma dvojstupňového usporiadania vírovej turbíny [6]	14
Obr. 3.1 Sústava s jedným stupňom voľnosti [12]	16
Obr. 3.2 Grafy rôznych druhov tlmení [13].....	18
Obr. 4.1 Rozdelenie prístupov riešenia priamych úloh mechaniky [15]	20
Obr. 4.2 Sieť prútu [15]	21
Obr. 4.3 Bázové funkcie [15].....	21
Obr. 4.4 Štvorsten [15]	22
Obr. 4.5 Šesťsten a jeho tvarovo degenerované formy [15].....	22
Obr. 5.1 Analyzované obežné koleso vírovej turbíny	23
Obr. 5.2 Model podrobnejšej geometrie	24
Obr. 5.3 Model zjednodušenej geometrie	25
Obr. 5.4 Sieť vytvorená na podrobnejšej geometrii.....	27
Obr. 5.5 Detail siete lopatky	27
Obr. 5.6 Detail siete náboja	28
Obr. 5.7 Model voľného telesa so zjednodušenou geometriou – 1. vlastný tvar.....	30
Obr. 5.8 Model voľného telesa so zjednodušenou geometriou – 2. vlastný tvar.....	30
Obr. 5.9 Model voľného telesa so zjednodušenou geometriou – 3. vlastný tvar.....	30
Obr. 5.10 Model voľného telesa so zjednodušenou geometriou – 4. vlastný tvar.....	31
Obr. 5.11 Model voľného telesa so zjednodušenou geometriou – 5. vlastný tvar.....	31
Obr. 5.12 Model uloženia na hriadeli so zjednodušenou geometriou – 1. vlastný tvar..	32
Obr. 5.13 Model uloženia na hriadeli so zjednodušenou geometriou – 2. vlastný tvar..	32
Obr. 5.14 Model uloženia na hriadeli so zjednodušenou geometriou – 3. vlastný tvar..	32
Obr. 5.15 Model uloženia na hriadeli so zjednodušenou geometriou – 4. vlastný tvar..	33
Obr. 5.16 Model uloženia na hriadeli so zjednodušenou geometriou – 5. vlastný tvar..	33
Obr. 6.1 Meracia zostava	34
Obr. 6.2 Zavesenie obežného kolesa a umiestnenie snímača pri meraní.....	35
Obr. 6.3 Záznam voľného dokmitu.....	35
Obr. 6.4 Amplitúdo-frekvenčná charakteristika obežného kolesa.....	36
Obr. 7.1 Porovnanie geometrií modelu a reálneho obežného kolesa.....	37

ZOZNAM TABULIEK

Tab. 5.1 Základné rozmery obežného kola v mm.....	23
Tab. 5.2 Materiálové vlastnosti	25
Tab. 5.3 Počty prvkov a uzlov sietí	26
Tab. 5.4 Hodnoty vypočítaných vlastných frekvencií modelu voľného telesa	29
Tab. 5.5 Hodnoty vypočítaných vlastných frekvencií modelu obežného kola na hriadeľi	29
Tab. 6.1 Experimentálne určené hodnoty vlastných frekvencií obežného kola	36

ZOZNAM PRÍLOH

Príloha A

Obrázok 1 Model voľného telesa s podrobnejšou geometriou – 1. vlastný tvar

Obrázok 2 Model voľného telesa s podrobnejšou geometriou – 2. vlastný tvar

Obrázok 3 Model voľného telesa s podrobnejšou geometriou – 3. vlastný tvar

Obrázok 4 Model voľného telesa s podrobnejšou geometriou – 4. vlastný tvar

Obrázok 5 Model voľného telesa s podrobnejšou geometriou – 5. vlastný tvar

Obrázok 6 Model uloženia na hriadelí s podrobnejšou geometriou – 1. vlastný tvar

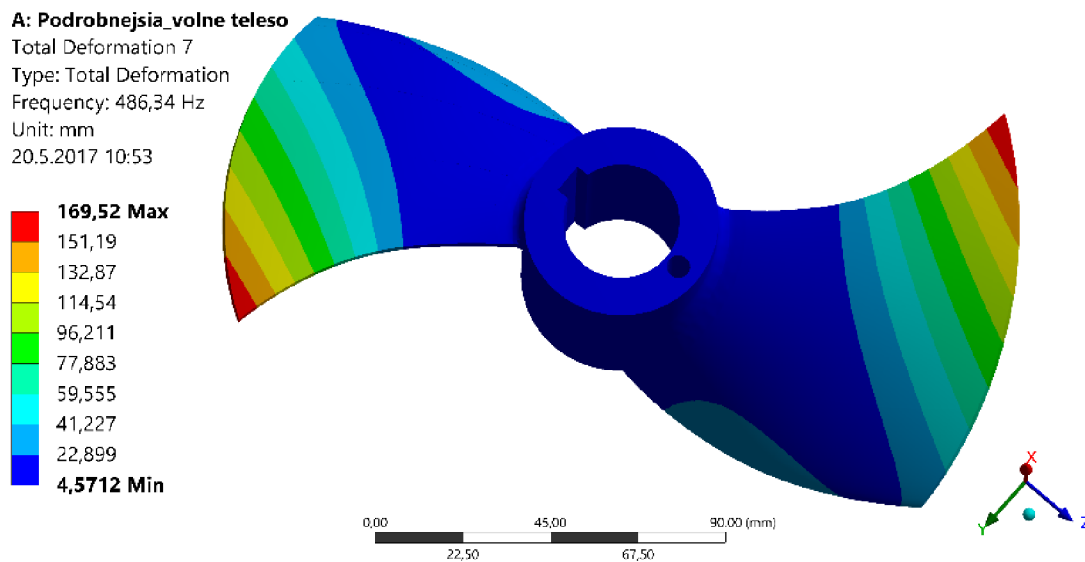
Obrázok 7 Model uloženia na hriadelí s podrobnejšou geometriou – 2. vlastný tvar

Obrázok 8 Model uloženia na hriadelí s podrobnejšou geometriou – 3. vlastný tvar

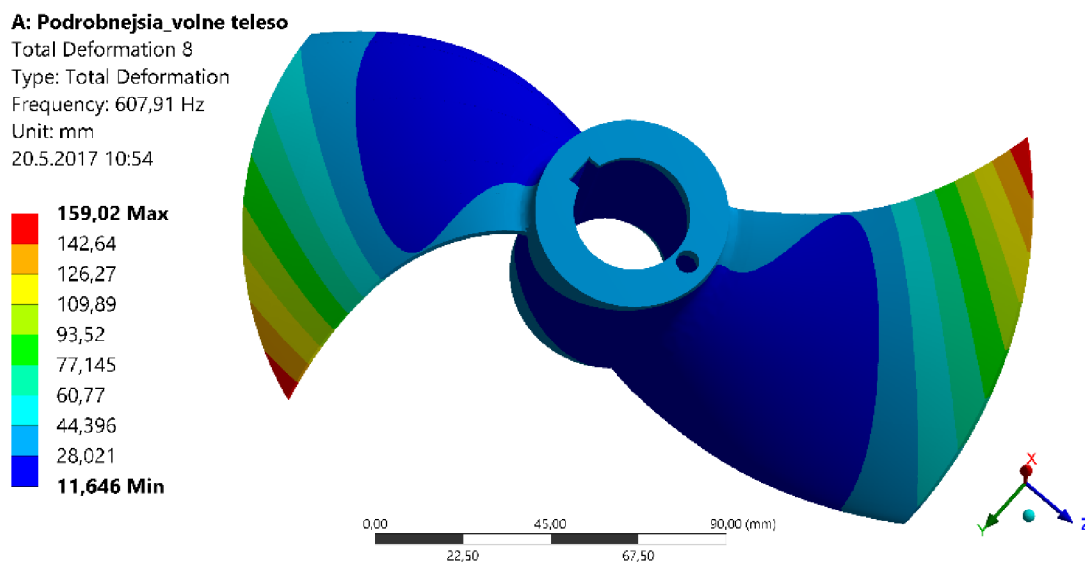
Obrázok 9 Model uloženia na hriadelí s podrobnejšou geometriou – 4. vlastný tvar

Obrázok 10 Model uloženia na hriadelí s podrobnejšou geometriou – 5. vlastný tvar

PRÍLOHA A



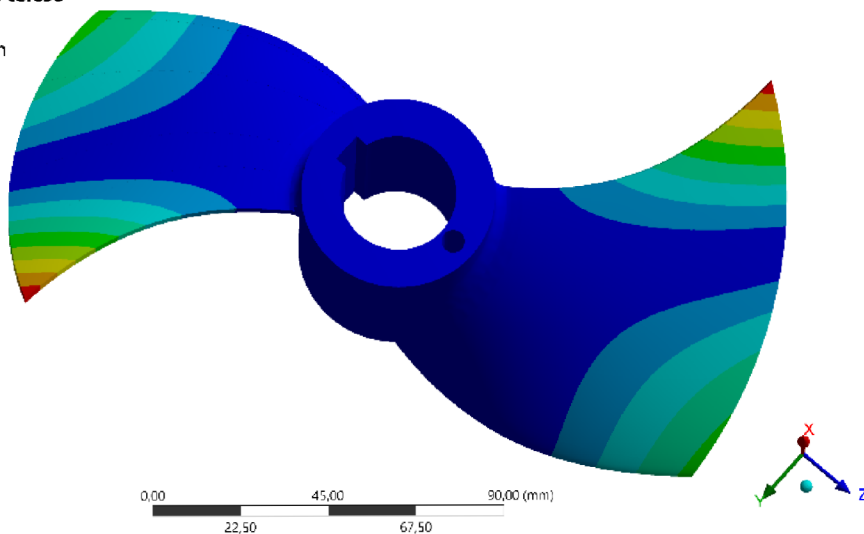
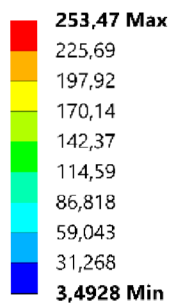
Obrázok 1 Model voľného telesa s podrobnejšou geometriou – 1. vlastný tvar



Obrázok 2 Model voľného telesa s podrobnejšou geometriou – 2. vlastný tvar

A: Podrobnejšia_volne teleso

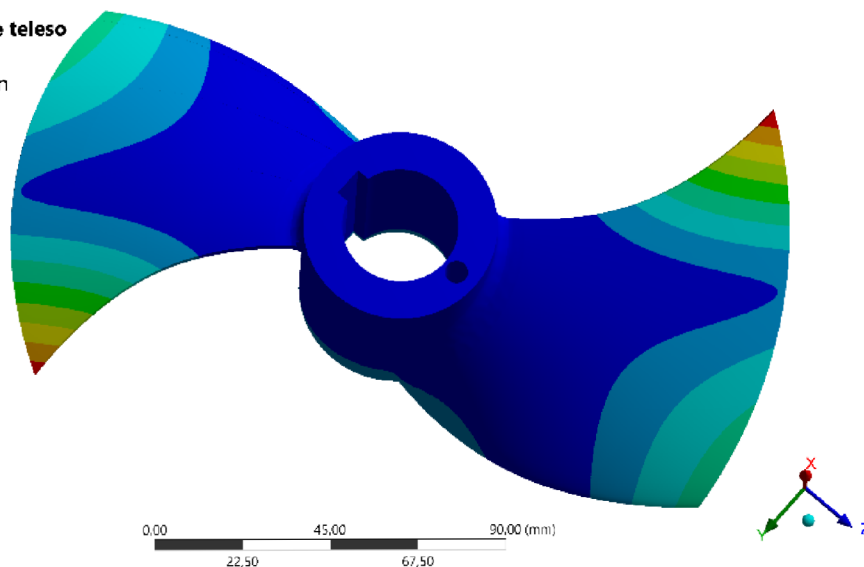
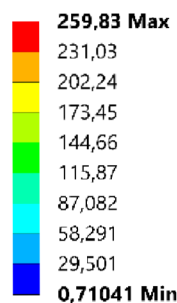
Total Deformation 9
Type: Total Deformation
Frequency: 952,52 Hz
Unit: mm
20.5.2017 10:55



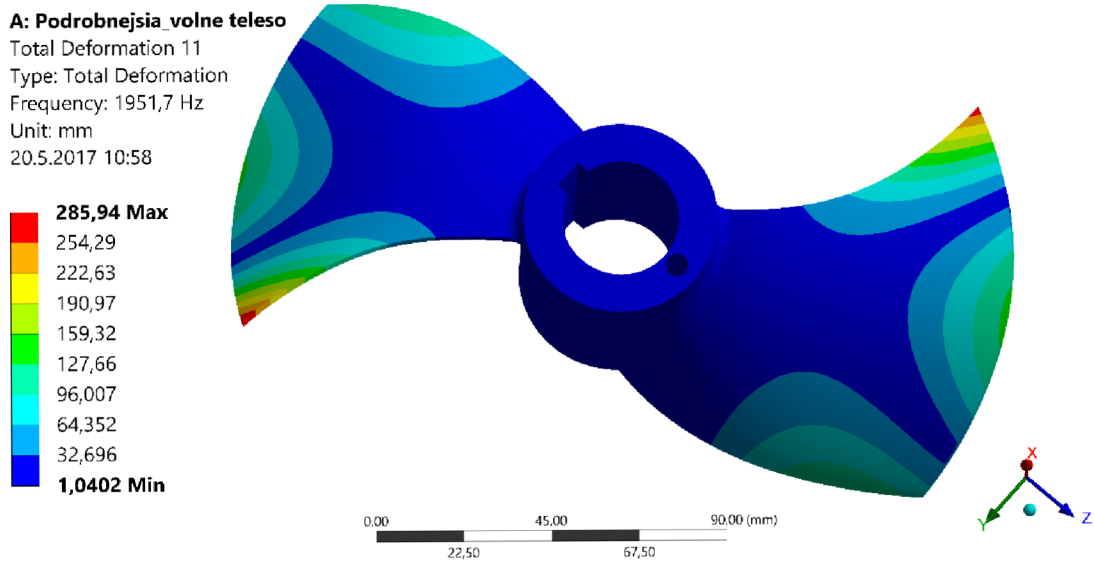
Obrázok 3 Model voľného telesa s podrobnejšou geometriou – 3. vlastný tvar

A: Podrobnejšia_volne teleso

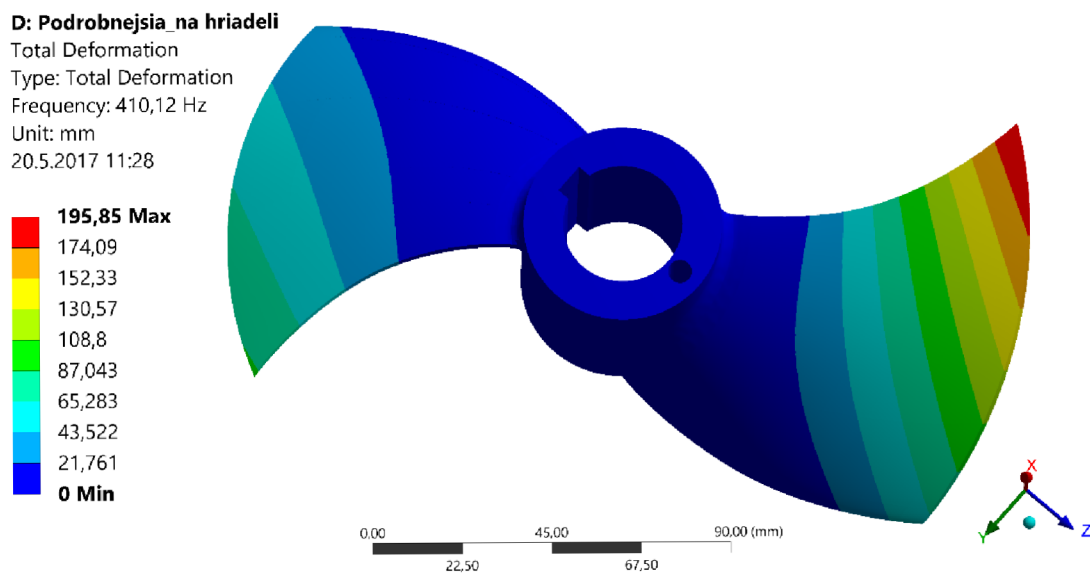
Total Deformation 10
Type: Total Deformation
Frequency: 998,74 Hz
Unit: mm
20.5.2017 10:58



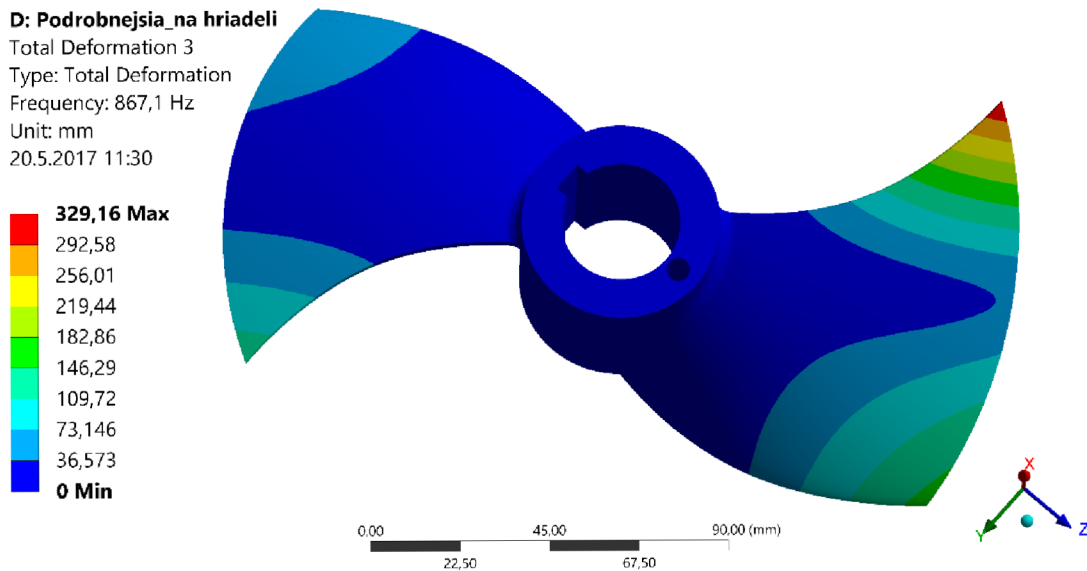
Obrázok 4 Model voľného telesa s podrobnejšou geometriou – 4. vlastný tvar



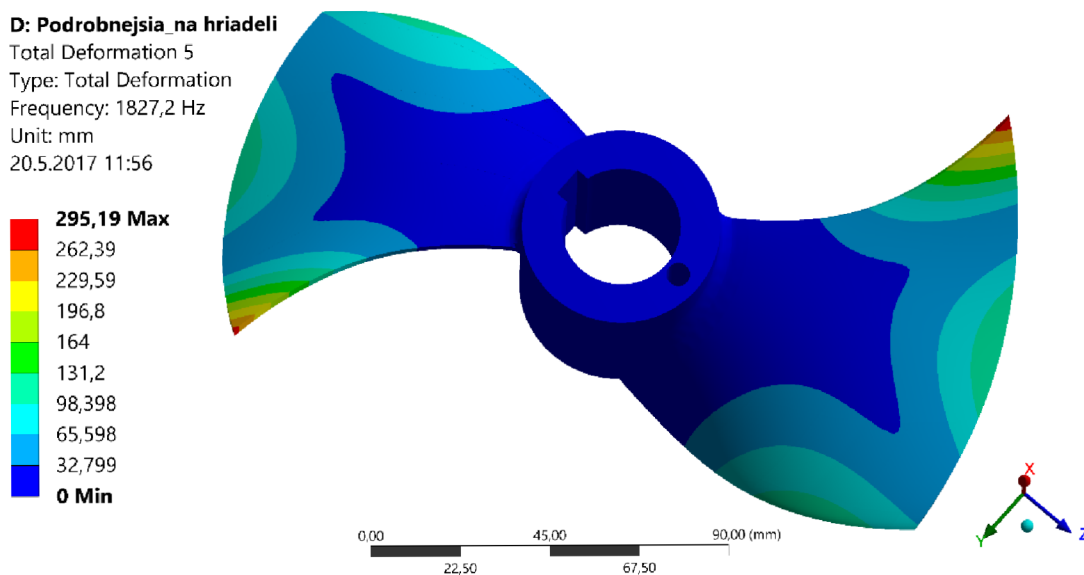
Obrázok 5 Model voľného telesa s podrobnejšou geometriou – 5. vlastný tvar



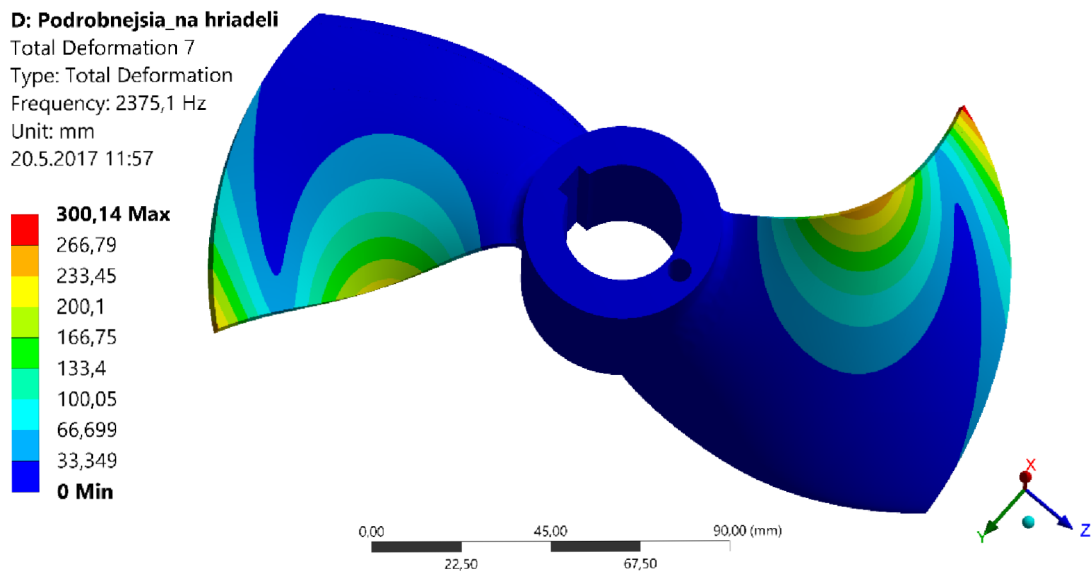
Obrázok 6 Model uloženia na hriadeli s podrobnejšou geometriou – 1. vlastný tvar



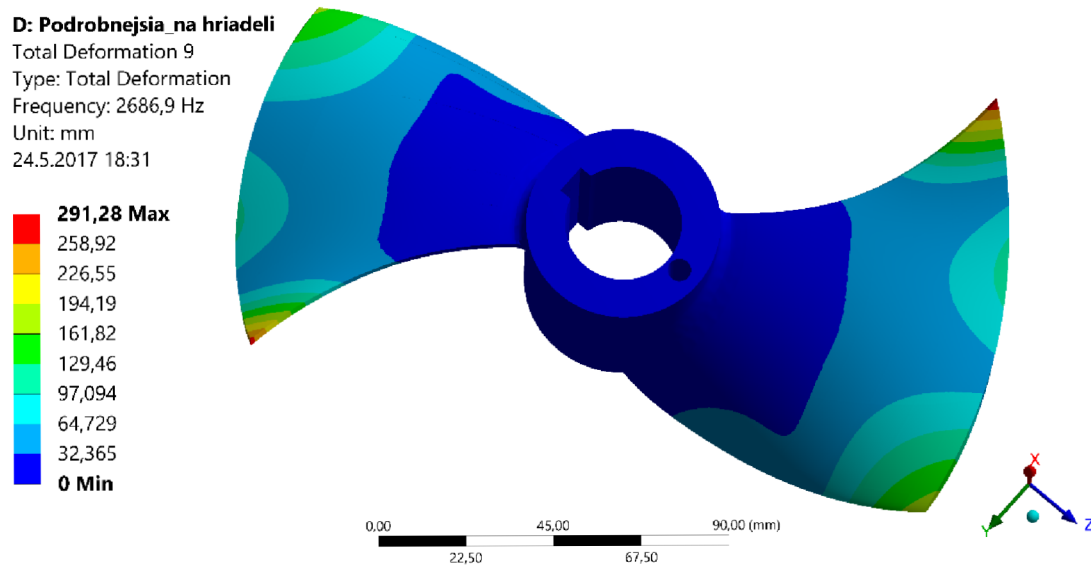
Obrázok 7 Model uloženia na hriadelí s podrobnejšou geometriou – 2. vlastný tvar



Obrázok 8 Model uloženia na hriadelí s podrobnejšou geometriou – 3. vlastný tvar



Obrázok 9 Model uloženia na hriadeli s podrobnejšou geometriou – 4. vlastný tvar



Obrázok 10 Model uloženia na hriadeli s podrobnejšou geometriou – 5. vlastný tvar