



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY**

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

**MODELOVÁNÍ AORTY JAKO LAMINÁTU S
PROMĚNNOU TUHOSTÍ LAMIN PO TLOUŠŤCE**

MODELING AORTA AS A LAMINATE WITH STIFFNESS VARYING ACROSS THE
THICKNESS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Tomáš Kořínek

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Stanislav Polzer, Ph.D.

BRNO 2016

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	Tomáš Kořínek
Studijní program:	Strojírenství
Studijní obor:	Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce:	Ing. Stanislav Polzer, Ph.D.
Akademický rok:	2015/16

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Modelování aorty jako laminátu s proměnnou tuhostí lamin po tloušťce

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Aorta je největší tepnou v těle a znalost její struktury a schopnost ji modelovat je klíčová pro predikci vývoje onemocnění jako je ateroskleróza nebo aneurysma. Naše poslední výzkumy naznačují, že kolagenní vlákna v tepně nejsou rozprostřena rovnoměrně, ale jsou výrazněji uspořádána obvodově na vnitřním povrchu. Je potřeba provést ověřovací analýzy, které určí, jak se takový kompozit bude chovat při zatížení vnitřním tlakem, tahem případně ohybem

Cíle bakalářské práce:

1. Provést rešerši současného přístupu k modelování aorty.
2. Vytvořit konečnoprvkový model aorty, ve kterém bude stěna modelována jako vícevrstvý laminát.
3. Provést základní tahové, tlakové a ohybové zkoušky vytvořeného modelu aorty a analyzovat výsledky

Seznam literatury:

Vrbka J. 2008. Mechanika kompozitů. VUT v Brně

Polzer et al. 2015. Structure-based constitutive model can accurately predict planar biaxial properties of aortic wall tissue. Acta Biomaterialia 14:133-145.

Fratzl P. 2008 Collagen structure and mechanics. Springer.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2015/16

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

ABSTRAKT

Tato bakalářská práce se zabývá výpočtovým řešením deformačně-napětových stavů vznikajících v idealizované geometrii tepny. Vzhledem ke struktuře stěny, je s ní při řešení uvažováno jako s laminátem z vláknového kompozitu, složeného ze sítě elastinu jako matrice a kolagenních vláken jako výztuže. Důraz je přitom kladen na respektování rozložení a orientace kolagenních vláken po tloušťce stěny, jež má výrazný vliv na její výsledné mechanické vlastnosti. Chování tohoto modelu je simulováno pomocí konečnoprvkového programu ANSYS. Práce obsahuje také rešeršní pojednání o současných hyperelasických modelech aorty.

Klíčová slova

Stěna aorty, rozložení kolagenu, vláknový kompozit, homogenizace vlastností kompozitu, metoda konečných prvků, modul pružnosti kolagenu, napětí ve stěně

ABSTRACT

This bachelor's thesis deals with computational solution of stress-strain states arising in idealized geometry of artery. Based on it's structure, wall is considered as a laminate of fiber reinforced composite consisting of a network of elastin as a matrix and collagen fibers as reinforcement. Emphasis is placed on respecting of collagen fibers distribution and orientation on the thickness of the wall, which has a significant impact on it's mechanical properties. The behavior of this model is simulated using finite element programme ANSYS. The thesis also includes a research study of existing hyperelastic models of the aorta.

Keywords

Aorta's wall, collagen distribution, fiber-reinforced composite, homogenization of properties of composite, finite element method, Young's modulus of collagen, wall stress

BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

KOŘÍNEK, T. *Modelování aorty jako laminátu s proměnnou tuhostí lamin po tloušťce*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2016. 40 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Stanislav Polzer, Ph.D..

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma *Modelování aorty jako laminátu s proměnnou tuhostí lamin po tloušťce* vypracoval samostatně s použitím odborné literatury a pramenů, uvedených na seznamu, který tvoří přílohu této práce.

V Brně dne 27. 5. 2015

Tomáš Kořínek

PODĚKOVÁNÍ

Rád bych na tomto místě poděkoval svému vedoucímu bakalářské práce Ing. Stanislavu Polzerovi, Ph.D., za cenné rady, věcné připomínky a vstřícnost při konzultacích a vypracování této práce. Za předané vědomosti a zkušenosti, které formovali mě, i mé dosavadní studium, vděčím kantorům FSI VUT v Brně. V neposlední řadě pak velký dík patří mé rodině, přítelkyni, kamarádům a všem, kteří věřili v úspěšné dokončení mé práce.

OBSAH

1	ÚVOD.....	9
2	LÉKAŘSKÉ MINIMUM	10
2.1	Oběhová soustava krevní	10
2.1.1	Srdce	10
2.1.2	Krev	11
2.1.3	Cévy.....	11
3	AORTA JAKO LAMINÁT.....	16
3.1	Základní vztahy a pojmy v materiálech	16
3.2	Anizotropní materiál	17
3.3	Ortotropní materiál	17
3.4	Jednosměrové dlouhovláknové kompozity.....	18
3.4.1	Podélný modul pružnosti v tahu a Poissonovo číslo	19
3.4.2	Příčný modul pružnosti v tahu a modul pružnosti ve smyku	19
3.4.3	Poissonovo číslo μ_{TT}	20
4	SOUČASNÉ MODEL Y AORTY	21
4.1	Teorie velkých deformací	21
4.1.1	Tenzory přetvoření	22
4.1.2	Tenzory napětí	22
4.1.3	Měrná deformační energie.....	23
4.2	Konstitutivní modely	24
4.2.1	Izotropní modely	24
4.2.2	Anizotropní modely.....	25
5	VÝPOČTOVÝ MODEL STĚNY	26
5.1	Omezení výpočtového modelu	26
5.2	Geometrie modelu.....	26
5.3	Materiál modelu	27
5.3.1	Objemové plnění vrstev.....	27
5.4	Konečný prvek sítě	29
5.5	Okrajové podmínky a zatížení	30
5.6	Modul pružnosti v tahu kolagenu	30
5.7	Konvergence sítě.....	35
5.8	Analýza výsledků.....	36
	ZÁVĚR.....	37
	SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ	40

1 ÚVOD

Závažná onemocnění srdce a cév patří v dnešní době k nejčastějším příčinám náhlého úmrtí a aneuryzma, jinak také výduť tepny, je jedním z nich. Aneuryzmata jsou typická svým pomalým růstem a téměř žádnou symptomatikou, což dělá tuto chorobu tolik zákeřnou. Léčba aneuryzmatu má jediný a jasný cíl a to zabránit případné ruptuře (protržení) stěny. V případě diagnostikování tohoto onemocnění, je tak pro lékaře při rozhodování o dalším postupu léčby co nejdetailnější znalost nastalého problému klíčová.

V tuto chvíli přichází na řadu právě výpočtové modelování, jejímž cílem je posouzení rizika a místa ruptury na základě napětí ve stěně. Vytvořením co nejdokladnějšího modelu tepny, který by zahrnoval všechny faktory ovlivňující toto napětí, se v poslední dekádě zabývaly týmy biomechaniků po celém světě, včetně týmu Ústavu mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky FSI VUT v Brně. Výzkum a vývoj v oblasti simulace chování tepny nyní dospěl do fáze, kdy je pro ještě přesnější popis jejího chování důležité pochopení její struktury.

Stěna tepny představuje složitý kompozitní materiál, mající vrstevnatou strukturu, přičemž každá z vrstev má odlišné vlastnosti. Tyto vlastnosti jsou v praxi získávány experimentálně, na základě mechanických zkoušek tkání cévní stěny. Na základě těch bylo zjištěno, že odezva vzorků z jednotlivých vrstev na vnější zatížení je pro každou vrstvu jiná. Protože hlavní složkou nesoucí zatížení jsou kolagenní vlákna, tvořící výztuž stěny, v praxi tato rozdílná odezva znamená různorodé rozprostření kolagenních vláken ve stěně. Toto rozložení má pak výrazný vliv na výsledné mechanické vlastnosti tepny.

Před týmy biomechaniků tak nyní stojí výzva vytvoření modelu, který by toto rozložení co nejlépe respektoval a dal tím lékařům co nejlepší možnou podporu k léčbě.

2 LÉKAŘSKÉ MINIMUM

Jelikož v této práci pojednávám o tématu, které není pro strojírenskou praxi běžné, je nutné uvést přehled základních termínů a funkcí jednotlivých částí srdečně cévní soustavy.

2.1 Oběhová soustava krevní

Funkcí oběhové soustavy je zajišťovat oběh krve. Ten je zajištěn stahy srdeční svaloviny. Krev se potom dále pohybuje v uzavřené cévní soustavě. To znamená, že tepny a žíly jsou spojeny kapilárami¹. Rozlišujeme dva oběhové okruhy:

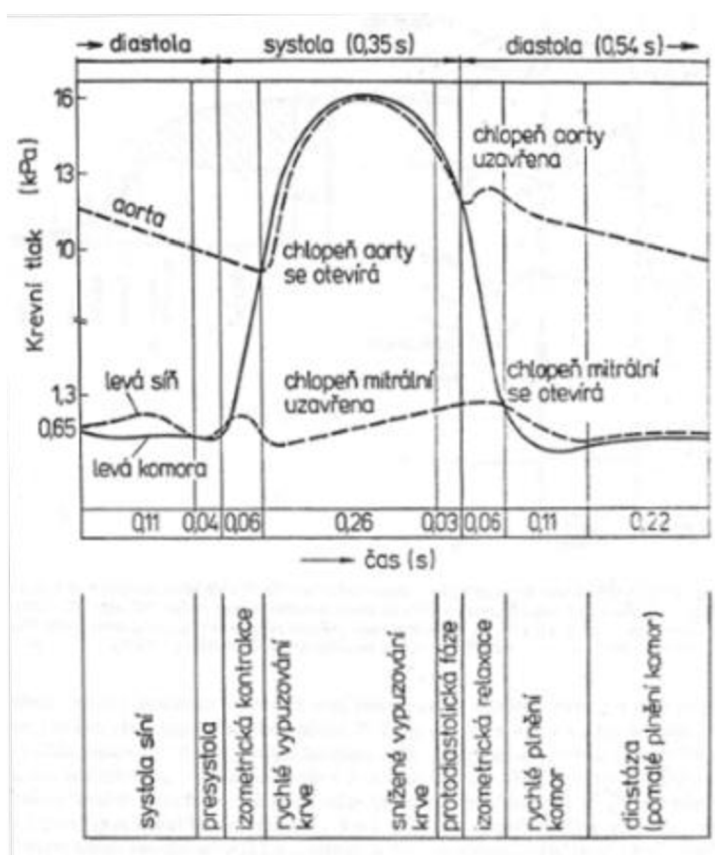
- Velký tělní oběh** – začíná v levé srdeční komoře, odkud je okysličená krev tepnami rozváděna do celého těla. Odkysličená krev je pak přiváděna žilami do pravé síně v srdci.
- Malý plicní oběh** – začíná v pravé srdeční komoře, odkud je odkysličená krev vedena tepnami do plic. Z plic je přiváděna okysličená krev do levé síně srdeční.

Oba okruhy se navzájem spojují v srdečních dutinách. [4], [5]

2.1.1 Srdce

Ústředním orgánem oběhového systému je srdce. Je to svalová pumpa skládající se z pravé a levé poloviny. Každá polovina obsahuje síň a komoru s chlopněmi, které zabraňují zpětnému toku krve.

Srdeční cyklus můžeme rozdělit na dvě části. Systolu, což je stah svaloviny komor s vypuzením krve ze srdce při tlaku 16 kPa (systolický tlak) a diastolu, což je uvolnění svaloviny komor a jejich plnění krví při tlaku 10kPa (diastolický tlak). [4], [5], [6]



Obr. 2.1 Průběh tlaku v aortě, levé síni a levé komoře jednoho srdečního cyklu. Převzato z [10]

¹ jinak také vlásečnice, je tenkostěnná céva nejmenšího průměru

2.1.2 Krev

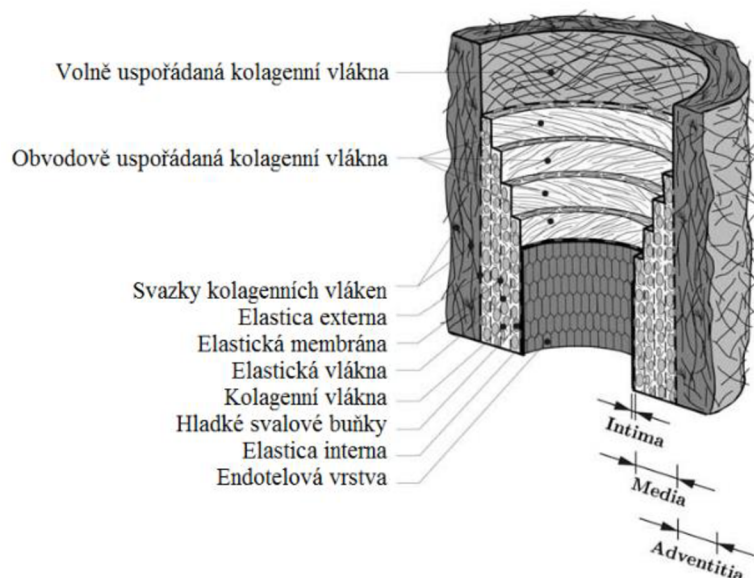
Krev je tekutá tkáň, která se skládá z krevních tělísek a krevní plazmy a to v poměru 1:1. Tělíška jsou tvořena z červených krvinek, bílých krvinek a krevních destiček. Plazma je tekutou částí krve a jedná se o vodní roztok bílkovin a solí. [4], [5], [6]

2.1.3 Cévy

Pojem cévy zahrnuje tepny, žíly a kapiláry. Vzhledem k zaměření práce je nadále podstatný především popis tepen. Ty jsou podle světlosti stěny děleny na tři základní typy. Tepny nejmenších průměrů nazývané tepénky. Dále tepny malého a středního průměru označované jako tepny svalového typu. Třetí skupinu pak tvoří tepny velkého průměru, označovány jako tepny elastického typu. Do této třetí skupiny patří i aorta. [4], [5], [6]

Stavba stěny tepny elastického typu

Stěna tepny se skládá ze tří vrstev. První vnitřní vrstvou je tunica intima, druhou střední vrstvou je tunica media a třetí vnější vrstvou je tunica adventitia. Každá z vrstev má své specifické vlastnosti.



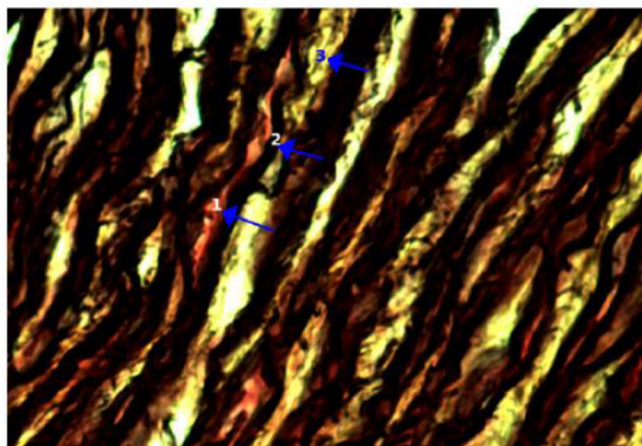
Obr. 2.2 Schéma stěny aorty. Převzato z [7]

Tunica intima

Je tvořena vrstvou z endotelových buněk, které vystylají všechny cévy. Pod ní je tenká subendotelová vazivová vrstvička a dále elastická membrána (elastica interna), která je tvořena elastinovými a kolagenními vlákny. U zdravého člověka je intima velice tenká (100 μm) a její vliv na mechanické vlastnosti stěny je tak zanedbatelný. [7]

Tunica media

Je silná, převážně svalová vrstva. Její kostra je tvořena 40 až 60 elastickými membránami. Mezi těmito membránami procházejí vlákna hladkých svalů, která jsou obtočena kolagenními vlákny. Toto v podstatě pružinové uspořádání je výhodné pro periodický způsob namáhání cévní stěny a umožňuje její zpětné smrštění po průchodu tlakové vlny, čímž také redukuje mechanické zatížení srdce. Vzhledem ke složení se media zapojuje do funkce především při menších deformacích, a tudíž nese zejména fyziologickou zátěž. [2], [7], [10]



Obr. 2.3 Struktura tunica media. 1. Kolagen (červená) 2. Elastin (černá) 3. Hladké svalstvo (žlutá).
Převzato z [8]

Tunica adventitia

Od střední vrstvy je oddělena další elastickou membránou (elastica externa). Je tvořena zvlněnými kolagenními vlákny, která zde nejsou výrazněji prostorově uspořádána a stěnu vyztužují. Při velkých deformacích se tyto vlákna natáhnou, vrstva se stává velmi tuhou a chrání tím tepnu před rupturou. Na povrchu tvoří kolagenní vlákna síťovitou strukturu a spojují tepnu s okolními tkáněmi. Ve větších tepnách se v adventilii nachází také soubor tepének a žilek, označovaných jako vasa vasorum, které přivádějí kyslík a živiny do stěny tepny. [4], [5], [9]

Mechanické vlastnosti tepny

Základním stavebním prvkem tkáně jsou hladké svalové buňky a vlákna elastinu a kolagenu. Míra zastoupení jednotlivých vláken a jejich prostorové uspořádání výrazně určují výsledné mechanické vlastnosti. Pro popis mechanického chování tepny jako celku je důležité blíže specifikovat vlastnosti jednotlivých složek, které stěnu utváří.

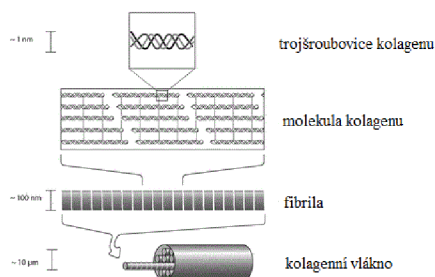
Tab. 2.1 Procentuální zastoupení kolagenu, elastinu a hladkého svalstva v břišní části aorty prasete.
Převzato z [8]

	Kolagen	Elastin	Hladký sval
Zastoupení složky [%]	32	58	10

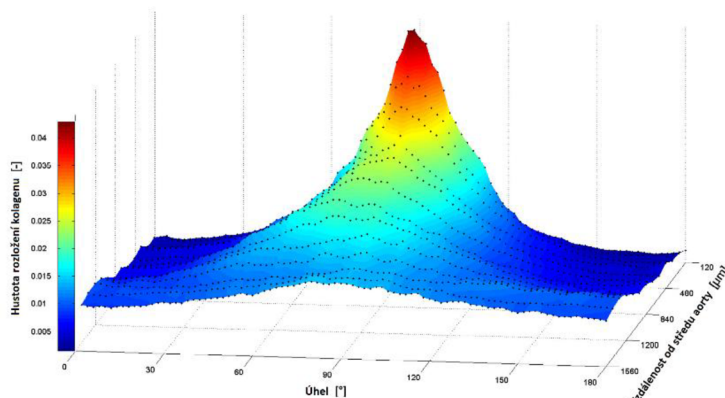
Kolagen

V tkáních je nejrozšířenější kolagen typu I. Vykazuje vysoké hodnoty pevnosti, která je podmíněná jeho trojřetězcovou šroubovicovou strukturou molekul, zpevněnou příčnými vazbami. Tyto molekuly se pak dále spojují a utváří fibrily. Sdružováním fibril vzniká kolagenní vlákno, jak lze vidět na obr. 2.4.

Vzhledem ke skutečnosti, že samotná kolagenní vlákna vykazují ortotropní chování, je důležité jejich prostorové uspořádání. Jak uvádí autoři v práci [2], rozložení kolagenu je po tloušťce stěny anizotropní. Ve vnitřních vrstvách je kolagen soustředěn po obvodu, naopak ve vnějších vrstvách se vyskytuje individuálně ve formě jednotlivých vláken. Obr. 2.5 znázorňuje toto rozložení. Popisu této orientace a rozložení kolagenu ve stěně je v současné době kladena velká pozornost, jelikož je důležitým podkladem pro přesnější výpočtové modelování stěny aorty, viz kapitola 4.2.

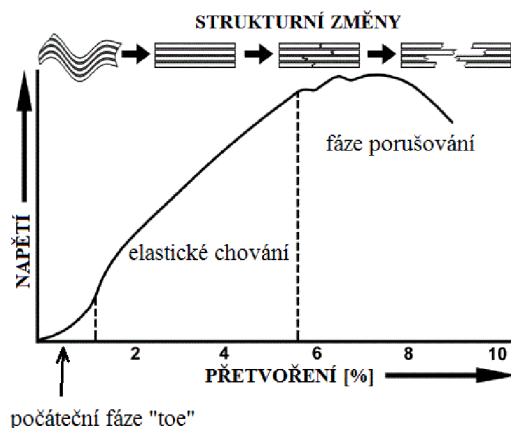


Obr. 2.4 Struktura kolagenního vlákna. Převzato z [26]



Obr. 2.5 Rozložení kolagenu prasečí aorty. Obvodový směr vláken odpovídá úhlu 90°. Převzato z [2]

Obr. 2.6 ukazuje deformačně-napětíovou křivku kolagenních vláken, lze ji rozdělit do tří částí. Při malém přetvoření do 2% dochází k narovnání původně zvlněných vláken. Tato část se nazývá “toe”. Poté se již natažená vlákna s lineární závislostí na napětí protahují až do přetvoření přibližně 6%, kde začne docházet k porušování příčných vazeb. Při dalším zvyšování napětí dochází k přetržení. Z tahových zkoušek pak lze určit pevnost vlákna kolagenu, z různých experimentů autoři práce [24] uvádí pevnosti 10 MPa – 1 GPa. [11]



Obr. 2.6 Křivka deformace vlákna kolagenu šlachy. Převzato z [27]

Elastin

Na rozdíl od kolagenu je elastin chudý na aminokyselinu, která je typická pro tvorbu příčných vazeb. To znamená, že molekuly elastinu nejsou výrazněji směrově orientovány, tudíž elastin vykazuje izotropní chování (lze vidět na obr. 2.7 a 2.8) a jeho pevnost v tahu je minimální.

Vyznačuje se ale značným protažením, až 70%. Tato schopnost velkého protažení vyžaduje pro popis jeho mechanických vlastností použití vztahů pro hyperelastický materiál². Chování elastinu popsali autoři v práci [12] následujícím modelem měrné energie napjatosti³:

$$W = c_0(I_1 - 3) + c_1(I_4 - 1)^2 + c_2(I_6 - 1)^2 \quad (2.1)$$

kde I_1, I_4 a I_6 jsou invarianty pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace a c_0, c_1 a c_2 jsou materiálové parametry.

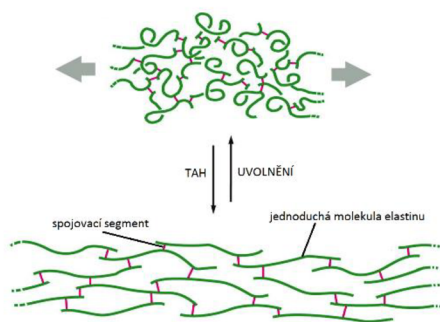
² materiál schopný velkých konečných vratných deformací

³ popsáno v kapitole 4

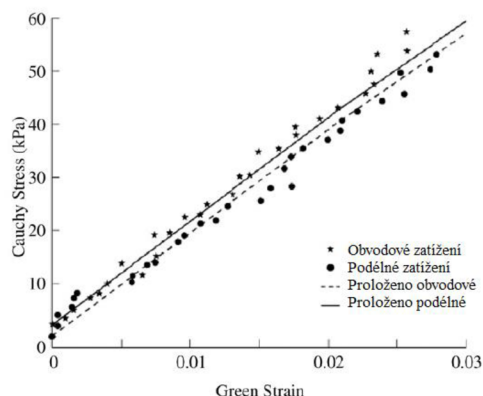
Hodnota parametru c_0 byla průměrně 74 kPa , parametru $c_1 = 1,18 \text{ kPa}$ a parametru $c_2 = 0,8 \text{ kPa}$. Vzhledem k nízkým hodnotám parametrů c_1 a c_2 lze druhý a třetí člen rovnice zanedbat a výše uvedený vztah přepsat do následující podoby:

$$W = c_0(I_1 - 3) \quad (2.2)$$

Na základě experimentu a funkce měrné energie napjatosti rovnice (2.2) byl naměřen modul pružnosti sítě elastinu $E = 523 \text{ kPa}$. [12]



Obr. 2.7 Struktura elastinu před a po zatížení. Převzato z [9]

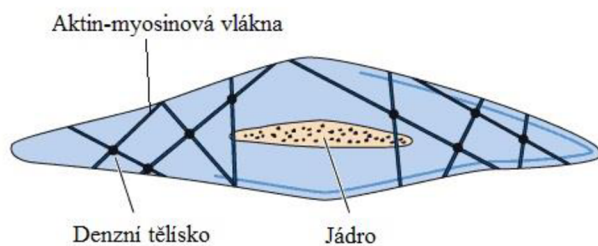


Obr. 2.8 Výsledky ekvibiaxiální⁴ zkoušky sítě elastinu ukazující na izotropní chování. Převzato z [12]

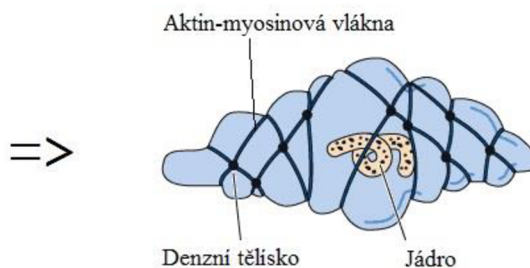
Hladké svalové buňky

Nachází se především ve střední vrstvě tepny a skládají se z jádra a vláken aktinu a myosinu. Ty pak na základě chemického, elektrického a mechanického podnětu zajišťují stah svalu (tzv. aktivní deformace). Jednotlivé buňky jsou fixovány ke kolagenním vláknům. Tím dochází k přenosu kontrakce mezi jednotlivými složkami, čímž podstatně ovlivňují mechanické vlastnosti tepny. Hladká svalovina je zodpovědná za viskoelastické chování tkáně. [6], [10]

Uvolněná buňka hladkého svalu



Stažená buňka hladkého svalu



Obr. 2.9 Struktura uvolněné a stažené hladké svalové buňky. Převzato z [28]

⁴ zkouška ve dvouosé rovnoměrné napjatosti

Po popisu vlastností jednotlivých stavebních prvků stěny aorty můžeme uvést charakteristiky stěny jako celku. [6]

Vlastnosti stěny aorty:

- odchylky od rotační symetrie jak po stránce geometrie tak materiálových vlastností
- vazby představuje spojení s okolním prostředím, jehož vlastnosti jsou velmi různorodé
- hyperelasticita
- aktivní chování tkáně – podráždění hladké svaloviny
- není jednoznačně definovaný výchozí stav
- zatížení tepny:
 - zbytková napjatost
 - podélné protažení
 - zatížení pulzujícím neharmonickým vnitřním tlakem krve
- materiálové charakteristiky:
 - nehomogenní struktura cévní stěny
 - nelineární závislost mezi napětím a deformací
 - závislost mezi napětím a deformací odlišnou v tahu a tlaku
 - viskoelastické chování – závislé na čase
 - anizotropie – směrová závislost vlastností
 - malá objemová stlačitelnost
 - závislost vlastností na teplotě
 - závislost vlastností na historii zatěžování
 - závislost vlastností na věku

3 AORTA JAKO LAMINÁT

Aorta, jak již bylo zmíněno, je tvořena třemi vrstvami, které by se v technické praxi mohly chápat jako jednotlivé laminy kompozitu. Základní stavební jednotkou těchto lamin je jednosměrový kompozit. Pokud u takového kompozitu nastávají pouze malá přetvoření (do 1%), je možno použít model lineárně elastického kontinua. Ten je založený na homogenizaci vlastností kompozitu a umožňuje matematický popis deformačně-napěťových závislostí těchto materiálů pomocí dvou až jednadvaceti nezávislých elastických konstant. [15]

3.1 Základní vztahy a pojmy v materiálech

Jelikož budu se stěnou aorty pracovat jako s kompozitem, je třeba blíže rozebrat hlavní vztahy obecně platné v těchto materiálech. Celá kapitola je uvedena hlavně pro zavedení pojmu ortotropní materiál, který je základním materiálovým modelem jednosměrových kompozitů. V úvodu kapitoly budou popsány tenzory napětí a přetvoření, které tvoří podklad pro popis odezvy materiálu na vnější zatížení.

Tenzor napětí

Vlivem vnějšího mechanického zatížení vzniká v tělese napjatost. V každém bodě M tělesa je napjatost určena tenzorem napětí, který je reprezentován následující maticí:

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Protože platí $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ je matice napětí symetrická. 9 složek napětí se redukuje na 6 a tenzor napětí můžeme zapsat jako vektor, který může mít více tvarů:

$$\begin{aligned} [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}]^T &= [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6]^T \\ &= [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{13}, \tau_{12}]^T \end{aligned} \quad (3.2)$$

Tenzor deformace

Při zatížení tělesa v něm vzniká nejen napjatost, ale dochází také k jeho deformaci. Pro přetvoření ε platí vztah:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.3)$$

kde $i, j = 1, 2, 3$ a u_i je složka posunutí ve směru i .

Tenzor deformace v libovolném bodě M tělesa lze vyjádřit ve tvaru matice:

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Tenzor deformace je stejně jako tenzor napětí symetrický $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ a lze ho opět zapsat jako vektor, který může nabývat více tvarů:

$$\begin{aligned} [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{12}]^T &= [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6]^T \\ &= [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{23}, \gamma_{13}, \gamma_{12}]^T \end{aligned} \quad (3.5)$$

kde γ_{23}, γ_{13} a γ_{12} představují úhlová přetvoření v jednotlivých rovinách. [14]

3.2 Anizotropní materiál

Jde o nejobecnější materiálový model. Odezva anizotropního materiálu na silové působení je obecně rozdílná ve všech směrech os. Protáhne-li se nebo stlačí-li se materiál podél jednoho ze směrů, dojde ke změnám délek podél os i úhlů mezi nimi. Mezi tenzorem napětí a tenzorem deformace platí konstitutivní vztah daný následujícím tenzorovým tvarem:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (3.6)$$

kde $i, j, k, l = 1, 2, 3$; σ_{ij} je tenzor napětí a ε_{kl} je tenzor deformací.

Tento vztah je možné vyjádřit maticově ve tvaru:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Rovnost (3.7) lze také zapsat zkráceně ve tvaru:

$$\sigma = C \cdot \varepsilon \quad (3.8)$$

kde σ je vektor napětí, ε je vektor přetvoření a C je matice tuhosti. Matice C obsahuje celkem 36 prvků, ale některé jsou vzájemně závislé. Při předpokladu lineárně elastického materiálu je matice tuhosti symetrická a platí $C_{ij} = C_{ji}$. Z 36 neznámých členů tak dostáváme 21 neznámých, které přísluší obecnému anizotropnímu materiálu. [1], [13]

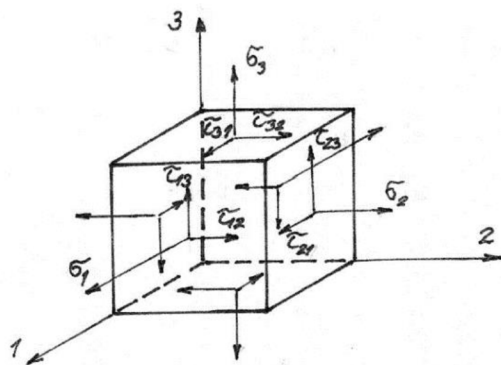
Někdy je výhodnější zápis ve tvaru:

$$\varepsilon = S \cdot \sigma \quad (3.9)$$

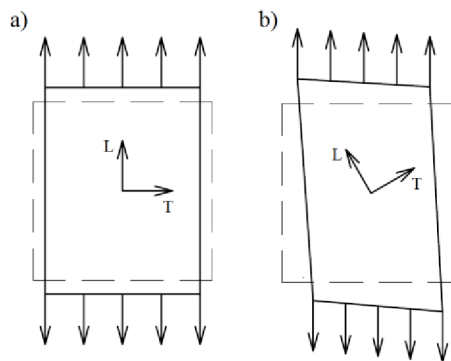
kde S je inverzní maticí k matici tuhosti, platí pro ni vztah $S = C^{-1}$ a nazývá se matice poddajnosti.

3.3 Ortotropní materiál

Hlavním rozdílem ortotropního materiálu od materiálu anizotropního je jeho odezva na vnější zatížení. Zatížíme-li takovýto materiál ve směru hlavních os souměrnosti, potom dojde pouze k poměrnému přetvoření, nikoliv však ke zkosení, viz obr. 3.2. V ortotropních materiálech tedy existují tři navzájem kolmé osy ortotropie, podél nichž se odezva liší. [14], [15]



Obr. 3.1 Zatížení elementu ortotropního materiálu v hlavních ortotropních směrech. Převzato z [1]

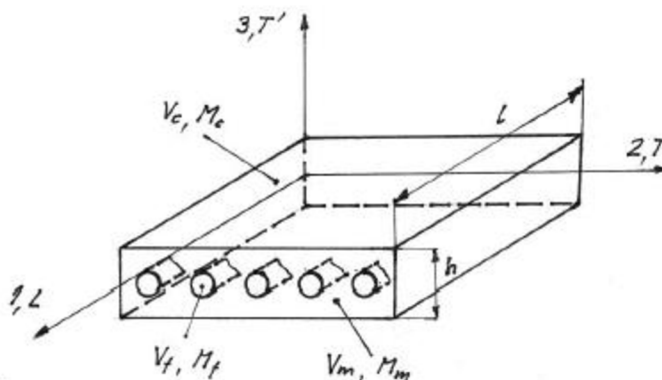


Obr. 3.2 Deformace ortotropního materiálu a) rovnoběžně s materiálovými osami b) v libovolném směru. Podle [13]

Vzhledem k existenci hlavních ortotropních směrů tak lze ortotropní materiál popsat devíti nezávislými materiálovými konstantami. Jsou jimi tři moduly pružnosti v tahu E_1, E_2, E_3 , tři moduly pružnosti ve smyku G_{12}, G_{13}, G_{23} a tři Poissonova čísla $\mu_{12}, \mu_{13}, \mu_{23}$. [15]

3.4 Jednosměrové dlouhovláknové kompozity

Jednosměrově vyztužené vrstvy vykazují obecně ortotropní vlastnosti. Mají tři vzájemně kolmé roviny souměrnosti určené dvojicemi hlavních materiálových os L, T a T'⁵. V rámci mechaniky kontinua osy L, T a T' odpovídají hlavním ortotropickým osám 1, 2 a 3. [1]



Obr. 3.3 Model dlouhovláknového jednosměrového kompozitu. V značí objemový podíl jednotlivých složek, M značí podíl hmotnostní. Převzato z [1]

Jedním z nejdůležitějších faktorů určujících vlastnosti kompozitů je relativní zastoupení vyztužujícího materiálu v matici kompozitu. Ten lze popsat hmotnostním či objemovým obsahem složek. V celé kapitole budu uvažovat dvoufázový materiál s indexy c, m a f pro kompozit, matici a vlákna. Objemové podíly jsou definovány následovně:

$$v_f = \frac{V_f}{V_c}; v_m = \frac{V_m}{V_c} \quad (3.10)$$

Největší pevnost má vrstva jednosměrového kompozitu ve směru podélném. Vlastnosti a chování v obou dalších směrech jsou přibližně tytéž. Takovýto materiál je označován jako příčně izotropní. Z předpokladu totožných vlastností v příčných směrech T a T' pak plynou následující vztahy mezi elastickými veličinami:

⁵ L – osa longitudinální (podélná), T – osa transversální (příčná) a T' osa – transversální (druhá příčná)

$$E_T^6 = E_{T'} \quad (3.11)$$

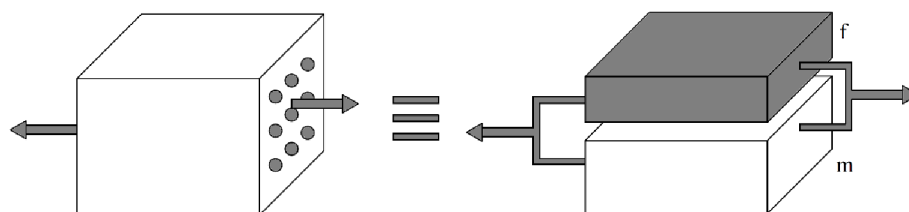
$$G_{LT}^7 = G_{LT'} \quad (3.12)$$

$$\mu_{LT}^8 = \mu_{LT'} \quad (3.13)$$

$$G_{TT'} = \frac{E_T}{2(1 + \mu_{TT'})} \quad (3.14)$$

Ortotropní materiál, z jehož modelu příčně izotropní materiál vychází, lze popsat devíti elastickými veličinami. Z výše uvedených rovností plyne, že pro příčně izotropní materiál stačí k popisu jeho elastických vlastností pouze pěti nezávislých elastických veličin. Těmito elastickými veličinami jsou E_L , E_T , μ_{LT} , $\mu_{TT'}$ a G_{LT} . Vztahy pro jejich analytický výpočet jsou ve formě směšovacích pravidel a předpokládají dokonalou adhezi mezi složkami. [14]

3.4.1 Podélný modul pružnosti v tahu a Poissonovo číslo



Obr. 3.4 Zatížení kompozitu v podélném směru.

Kombinací předpokladu totožného podélného přetvoření všech složek a vztahu (3.10) obdržíme podélný modul pružnosti v tahu jednosměrového kompozitu vyjádřený ve tvaru:

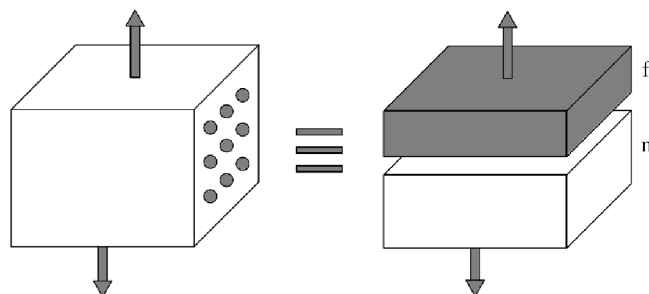
$$E_L = E_f \cdot \nu_f + E_m \cdot \nu_m \quad (3.15)$$

Rovnice (3.15) vyjadřuje, že příspěvky jednotlivých složek k průměrným vlastnostem kompozitu jsou úměrné jejich objemovým podílům. [13]

Analogicky pak lze dojít k Poissonovu číslu μ_{LT} kompozitu, jehož tvar je:

$$\mu_{LT} = \mu_f \cdot \nu_f + \mu_m \cdot \nu_m \quad (3.16)$$

3.4.2 Příčný modul pružnosti v tahu a modul pružnosti ve smyku



Obr. 3.5 Zatížení kompozitu v příčném směru.

⁶ modul pružnosti v tahu ve směru T (příčném)

⁷ modul pružnosti ve smyku mezi směrem L a T

⁸ Poissonovo číslo, kde první index označuje směr zatížení a druhý pak směr přetvoření

Stejně jako u podélných vlastností i příčný modul pružnosti v tahu lze popsat směšovacími pravidly. Takzvané inverzní směšovací pravidlo však dává pouze odhad spodní hodnoty a jeho použitím tak dochází k podhodnocení modulu pružnosti. Proto je vhodnější použití přístupu, který odvodili Halpin a Tsai. [16]. Ten je vyjádřen následovně:

$$E_T = E_m \cdot \frac{(1 + \xi \cdot \eta \cdot \nu_f)}{(1 - \eta \cdot \nu_f)} \quad (3.17)$$

$$\eta = \frac{\left(\frac{E_f}{E_m} - 1\right)}{\left(\frac{E_f}{E_m} + \xi\right)} \quad (3.18)$$

kde ξ je konstanta popisující uspořádání vláken v řezu a jejich geometrii. Pro odhad E_T se používá $\xi = 1,5$.

Záměnou E_i za G_i v rovnicích (3.17) a (3.18) lze získat vztah pro modul pružnosti ve smyku G_{LT} . [16]

3.4.3 Poissonovo číslo μ_{TT}

Poslední chybějící konstantou pro kompletní homogenizaci kompozitu je Poissonovo číslo μ_{TT} . Jeho výpočet sice vyžaduje více mezi výpočtů, avšak není jej nutné určovat pro všechny typy úloh. Pro rovinné úlohy nemá význam a nemění v tomto případě výsledek naopak u prostorových úloh je nezbytnou součástí výpočtu. Pro určení Poissonova čísla μ_{TT} je možné použít Clyneův model v tomto tvaru:

$$\mu_{TT} = 1 - \mu_{TL} - \frac{E_T}{3 \cdot K} \quad (3.19)$$

$$\mu_{TL} = \frac{E_T}{E_L} \cdot \mu_{LT} \quad (3.20)$$

$$K = \left(\frac{\nu_f}{K_f} + \frac{\nu_m}{K_m}\right)^{-1} \quad (3.21)$$

$$K_f = \frac{E_f}{3(1 - 2\mu_f)}, K_m = \frac{E_m}{3(1 - 2\mu_m)} \quad (3.22)$$

kde K je modul objemové pružnosti kompozitu, K_f modul objemové pružnosti vláken a K_m modul objemové pružnosti matrice. [17]

Nyní jsme schopni na základě vlastností jednotlivých složek dvoufázového kompozitu analyticky dopočítat jeho vlastnosti v třech hlavních směrech a homogenizovat tímto jeho model.

4 SOUČASNÉ MODELY AORTY

Volba vhodného modelu chování stěny je u biomechanických problémů z oblasti měkkých tkání velmi podstatnou a obtížnou částí řešení. Jak již bylo uvedeno na konci kapitoly 2, stěna cévy vykazuje celou řadu vlastností a vhodný model musí respektovat maximum z nich. Používané konstitutivní modely kombinují ty vlastnosti, které jsou pro modelování stěny považovány za nejpodstatnější. Nynější modely kladou důraz především na hyperelasticitu a viskoelasticitu stěny a strukturu tkáně (směr kolagenních vláken). V této kapitole bude věnována pozornost izotropním a anizotropním hyperelastickým modelům. [6], [7], [19]

4.1 Teorie velkých deformací

Pro chování cév jsou charakteristické velké deformace (přetvoření větší než 1%). Je tedy nutné rozlišovat mezi počáteční nedeformovanou geometrií a koncovou geometrií deformovanou. Z toho tedy plynou dva základní přístupy k řešení této problematiky. První, Lagrangeův přístup, považuje za základní vztažnou konfiguraci nedeformovanou geometrii tělesa. Druhý, Eulerův přístup, naproti tomu uvažuje jako nezávislou proměnnou deformovanou geometrii. [20]

Tenzor deformačního gradientu

Deformační gradient v sobě nese informaci o pohybu kontinua v bodě. Převádí referenční diferenciální vektor na zdeformovaný diferenciální vektor. [18] V následujícím značení tedy X bude představovat souřadnice před deformací a x souřadnice po deformaci. Složky tenzoru deformačního gradientu jsou pak definovány takto:

$$F_{iK} = \frac{\partial x_i}{\partial X_K} \quad (4.1)$$

Pro homogenní deformaci⁹ je možné jej zapsat v následujícím maticovém tvaru:

$$F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

kde $\lambda_{1,2,3}$ jsou hlavní poměrná protažení ve směrech shodných se směry hlavního souřadného systému. [19]

$$\lambda_1 = \frac{\partial x_1}{\partial X_1}, \lambda_2 = \frac{\partial x_2}{\partial X_2}, \lambda_3 = \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \quad (4.3)$$

Třetí invariant tenzoru deformačního gradientu udává poměrnou objemovou změnu a značí se J . U nestlačitelných materiálů je tento invariant $J = 1$. [21] Pro hlavní směry je dán následovně:

$$J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \frac{V}{V_0} \quad (4.4)$$

Sám o sobě je však deformační gradient neobjektivní. Při pohybu tělesa jako celku jsou jeho složky nenulové, ale jeho prostřednictvím je možné vyjádřit další tenzory. [18]

⁹ deformace, při které je zachována geometrická podobnost tělesa před a po deformaci (např. krychle → kvádr)

4.1.1 Tenzory přetvoření

Pro velké deformace je odvozeno několik tenzorů přetvoření. Pro jednoduchost uvádím jen hlavní přetvoření jako funkci hlavních poměrných protažení $\lambda_{1,2,3}$ (λ_i). [18]

a) Pravý Cauchy-Greenův tenzor deformace

$$C_R = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Invarianty tohoto tenzoru v hlavním souřadnicovém systému lze vyjádřit následovně:

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (4.6)$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \quad (4.7)$$

$$I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \quad (4.8)$$

Pro nestlačitelný materiál je podobně jako invariant deformačního gradientu J i třetí invariant pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace $I_3 = 1$.

K popisu funkce měrné energie napjatosti W slouží tzv. modifikované invarianty. Tyto modifikované invarianty mají za cíl oddělení tvarové složky deformace od složky objemové a jejich tvary jsou tyto:

$$\bar{I}_1 = I_1 J^{-1/3} \quad (4.9)$$

$$\bar{I}_2 = I_2 J^{-1/3} \quad (4.10)$$

b) Green-Lagrangeův tenzor přetvoření

$$E_i^L = \frac{\partial u_i}{\partial X_i} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_i} \right)^2 = \frac{1}{2} (\lambda_i^2 - 1) \quad (4.11)$$

c) Almansi-Hamelův tenzor přetvoření

$$E_i^A = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 = \frac{1}{2} (1 - \lambda_i^{-2}) \quad (4.12)$$

d) Cauchyho přirozený tenzor přetvoření

Jako jediný z uvedených tenzorů přetvoření zachycuje každý přírůstek k aktuální geometrii.

$$E_i^C = \int_{X_i}^{x_i} \frac{dx}{x} = [\ln x]_{X_i}^{x_i} = \ln x_i - \ln X_i = \ln \lambda_i^2 \quad (4.13)$$

4.1.2 Tenzory napětí

Ke každému tenzoru přetvoření lze přiřadit nějakou míru napětí. O tomto přiřazení říkáme, že jsou spolu dané tenzory energeticky konjugovány¹⁰. Pro správné určení energie napjatosti je nutné pracovat s odpovídajícími si dvojicemi. [18], [20]

¹⁰ práce vnitřních sil při deformaci je vždy stejná

Tenzory napětí se od sebe odlišují plochou, ke které je vztaženo působící zatížení.

a) Cauchyho tenzor napětí

Síla je zde vztažena k aktuální deformované ploše. Bývá označován jako tenzor skutečných napětí a je energeticky konjugovaný s Almansi-Hamelovým tenzorem přetvoření.

$$\sigma_{ij} = \frac{dF_i}{ds_j} \quad (4.14)$$

b) První Piola-Kirchhoffův (nesymetrický) tenzor napětí

U tohoto tenzoru je síla vztažena k počáteční nedeformované ploše. Je označován jako tenzor smluvních napětí. [18]

$$\tau_{ij} = \frac{dF_i}{dS_j} \quad (4.15)$$

c) Druhý Piola-Kirchhoffův (symetrický) tenzor napětí

Zde je k počáteční nedeformované ploše vztažena fiktivní síla. Tento tenzor nemá jasný fyzikální význam, ale je častěji používán, jelikož i pro velké deformace zůstává symetrický. Je energeticky konjugovaný s Green-Lagrangeovým a také s pravým Cauchy-Greenovým tenzorem deformace. [18]

$$S_{ij} = \frac{dF_{0i}}{dS_j} \quad (4.16)$$

Pro nestlačitelný materiál je možné uvést přepočty mezi jednotlivými tenzory napětí v následujících tvarech:

$$\sigma_i = \tau_i \lambda_i \quad (4.17)$$

$$\sigma_i = S_i \lambda_i^2 \quad (4.18)$$

4.1.3 Měrná deformační energie

Pro popsání hyperelastických materiálů se používají vztahy vycházející z potenciálu deformační energie. Definici této energie lze vyjádřit následovně:

Materiál můžeme považovat za hyperelastický, existuje-li elastická potencionální funkce W (měrná deformační energie), která je skalární funkcí některého z tenzorů přetvoření a jejíž parciální derivace podle některé složky přetvoření pak určuje odpovídající složku napětí. [18]

$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} = 2 \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} \quad (4.19)$$

kde S_{ij} jsou složky 2. Piola-Kirchhoffova tenzoru napětí, W je funkce měrné energie napjatosti na jednotku nedeformovaného objemu, E_{ij} jsou složky Green-Lagrangeova tenzoru přetvoření a C_{ij} jsou složky pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace. [18]

4.2 Konstitutivní modely

Konstitutivní vztahy obecně matematicky vyjadřují závislosti mezi tenzory napětí a přetvoření. U všech hyperelastických modelů je třeba modelovat objemovou a tvarovou složku deformace odděleně. Proto obvykle konstitutivní vztahy sestávají z části popisující vliv změny objemu a části popisující vliv změny tvarové (deviátorové). Jelikož je stěna aorty tvořena z velké části z vody a můžeme ji tak považovat za téměř nestlačitelný materiál, v níže uvedených modelech objemovou složku deformace neuvažují. Modelů popisujících hyperelastické chování byla navržena celá řada a je mimo kapacitní možnosti této práce uvést všechny, proto uvádím pouze výběr z nich. [7], [18], [19]

4.2.1 Izotropní modely

Neo-Hooke

Jedná se o jeden z nejstarších a nejjednodušších modelů. Je založený na mikromechanických vlastnostech struktury materiálu. Jeho nevýhodou je, že při větších přetvořeních není schopen popsat vyztužení materiálu. Má následující tvar:

$$W = \frac{G}{2} (\bar{I}_1 - 3) \quad (4.20)$$

kde G je počáteční modul pružnosti ve smyku a \bar{I}_1 je modifikovaný první invariant pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace. [18]

Polynomický Mooney-Rivlin

Tvar tohoto modelu je založen na datech získaných z experimentů. Oproti Neo-Hookeovu modelu vykazuje při větších přetvořeních výraznější zpevnění. Vyskytuje se ve třech formách a to jako devíti, pěti a dvou parametrický. Obecně je dán tímto tvarem:

$$W = \sum_{i+j=1}^N c_{ij} (\bar{I}_1 - 3)^i (\bar{I}_2 - 3)^j \quad (4.21)$$

kde c_{ij} jsou materiálové parametry a \bar{I}_1 a \bar{I}_2 jsou modifikované invarianty pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace. $N = 1,2,3$ pro devíti, pěti a dvou parametrický model. [21]

Yeoh

Model Yeoh, též nazývaný jako redukovaný polynomický model, je s polynomickým modelem totožný ale tvarová složka měrné energie napjatosti se skládá pouze z členů s prvním modifikovaným invariantem. Obecně jej lze zapsat takto:

$$W = \sum_{i=1}^N c_{i0} (\bar{I}_1 - 3)^i \quad (4.22)$$

kde c_{i0} jsou materiálové parametry a \bar{I}_1 je modifikovaný první invariant pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace. Nejčastěji ve tvaru pro $N = 3$. Dosazením za $N = 1$ získáme model Neo-Hooke. [21]

Všechny tři výše uvedené izotropní modely jsou naimplementovány v programu ANSYS, což je výhodou jejich jednoduchého použití. [21]

4.2.2 Anizotropní modely

Holzapfel

Tento model, se na rozdíl od doposud uvedených, snaží respektovat strukturu stěny aorty. Stěna je považována za tenkostěnný nelineárně elastický válec skládající se ze dvou vrstev, přičemž každá z vrstev je uvažována jako vláknový kompozit. Výsledný konstitutivní model je ortotropní v každé z vrstev. Pro jednu vrstvu je vztah tento:

$$W = \frac{c}{2}(\bar{I}_1 - 3) + \frac{k_1}{2k_2} \sum_{i=4,6} \{ \exp[k_2(\bar{I}_i - 1)^2] - 1 \} \quad (4.23)$$

kde c a k_1 jsou materiálové parametry, k_2 je rozměrový parametr, \bar{I}_1 je modifikovaný první invariant pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace a \bar{I}_4 a \bar{I}_6 jsou kvadráty přetvoření ve dvou směrech kolagenních vláken. [7]

První část vztahu vychází z Neo-Hookeova modelu a popisuje izotropní odezvu stěny, druhá část vycházející z exponenciálního Fungova modelu potom popisuje anizotropní odezvu, jenž je dána vyztužením stěny při větších přetvořeních v důsledku výrazného zapojení kolagenních vláken do přenosu zatížení.

Gasser

Jedná se o modifikovaný Holzapfelův model, který navíc uvažuje rozptyl uspořádání kolagenních vláken ve vrstvách. K anizotropní části Holzapfelova modelu je přidán parametr κ_{disp} popisující právě tento rozptyl a model má následující tvar:

$$W = \frac{k_1}{2k_2} \sum_{i=4,6} \{ \exp(k_2(\kappa_{disp}\bar{I}_1 + (1 - 3\kappa_{disp})\bar{I}_i - 1)^2 - 1) \} \quad (4.24)$$

kde $\kappa_{disp} \in [0; 1/3]$. Pro $\kappa_{disp} = 0$ získáme Holzapfelův model, naopak $\kappa_{disp} = 1/3$ by znamenalo izotropní uspořádání vláken. [19]

5 VÝPOČTOVÝ MODEL STĚNY

Úkolem této kapitoly je simulace chování aorty ve stavu *in vivo*¹¹ ve výpočetním konečnoprvkovém programu ANSYS.

5.1 Omezení výpočtového modelu

Pro simulaci aorty jakožto laminátového kompozitu uvažují určitá zjednodušení. Jak bylo popsáno v kapitole 2, vnitřní vrstva aorty (*tunica intima*) má mízní vliv na mechanickou odezvu stěny jako celku a její přínos je tedy zanedbatelný. Vrstva vnější (*tunica adventitia*) se naopak zapojuje do funkce až při vyšších napětích jako ochrana stěny před její rupturou. Ani jedna z těchto vrstev tedy výrazněji nepřispívá k přenosu fyziologického zatížení a pro simulaci stěny v tomto stavu budu v práci uvažovat pouze střední vrstvu (*tunica media*), která je hlavním nosným prvkem fyziologické zátěže.

Jelikož nejsem schopen zachytit aktivní chování tkáně způsobené stahem hladké svaloviny, simuluji pouze chování pasivní. Medii tedy modeluji složenou pouze z elastinu a kolagenních vláken jakožto dvoufázového kompozitu.

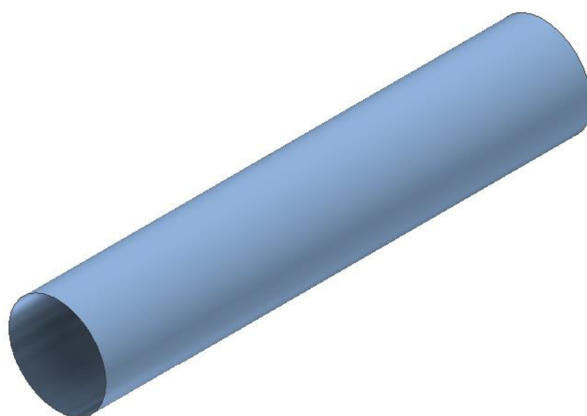
Namísto předpokladu velkých přetvoření měkké tkáně uvažují pouze přetvoření malá, tudíž obvyklý hyperelastický model nahrazují modelem lineárně elastickým.

V důsledku patologických procesů v organismu, jako je například ateroskleróza¹², může v aortě dojít ke vzniku aneurysmatu, jež výrazně mění geometrii stěny a tím i zvyšuje riziko její ruptury. V tomto modelu je počítáno se zdravou, geometricky rotačně symetrickou aortou. V geometrii také nejsou modelovány odbočující tepny, působící jako koncentrátoři napětí ve stěně. Posledním zjednodušením je zanedbání zbytkové napjatosti působící ve stěně tepny.

Dále, jelikož jsou buňky elastinu a kolagenu složeny hlavně z vody, lze stěnu aorty předpokládat za objemově téměř nestlačitelnou.

5.2 Geometrie modelu

K tvorbě geometrie byl použit program Autodesk Inventor Professional 2016. Zde byla vytvořena plocha o průměru $d = 20 \text{ mm}$, odpovídající průměru břišní aorty [4], a délce $l^{13} = 100 \text{ mm}$. Ta byla následně naimportována do výpočetního programu ANSYS.



Obr. 5.1 Skořepinový model geometrie.

¹¹ stav v živém organismu

¹² kornatění tepen v důsledku ukládání tuků do stěny

¹³ s vědomím, že délka břišní aorty je ve skutečnosti menší, jsem pro snazší práci s modelem volil délku 100 mm , přičemž tato změna nemá vliv na konečný výsledek

5.3 Materiál modelu

Jak již bylo uvedeno, media je modelována jako laminátový kompozit z kolagenních vláken a elastinu jako matrice. Materiál jednotlivých vrstev je tedy příčně izotropní, lineárně elastický a homogenní. Jelikož je rozložení kolagenu anizotropní a nejsem schopen respektovat rozptyl kolagenních vláken po tloušťce medie, nahrazuji toto rozložení dvěma, později čtyřmi vrstvami, přičemž každá z nich bude mít jiné objemové plnění a orientaci vláken. Práce [8] uvádí procentuální zastoupení kolagenu a elastinu v břišní aortě 40% a 60%, tedy $v_f = 0,4$ a $v_m = 0,6$.¹⁴

5.3.1 Objemové plnění vrstev

Rozložením kolagenu po tloušťce stěny aorty se zabývala již dříve zmíněná práce [2]. Autoři pro popis zastoupení a orientace kolagenních vláken použili distribuční funkci von Mises následujícího tvaru:

$$\rho(\alpha) = \frac{\exp \left[b \cdot \cos \left(\frac{\pi(\alpha - \varphi)}{180} \right) \right]}{\frac{1}{180\pi} \int_0^\pi \exp [b \cdot \cos(\beta)] d\beta} \quad (5.1)$$

kde φ je průměr orientace vláken ve stupních a b je parametr zastoupení definující anizotropní rozložení vláken.

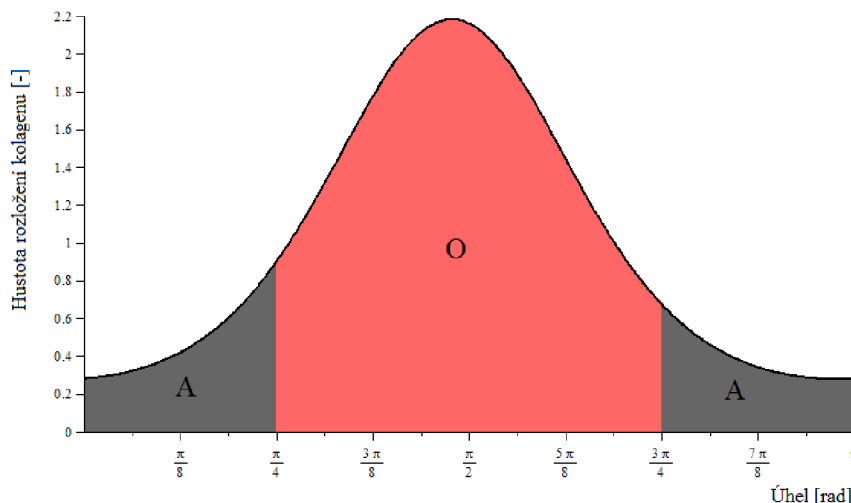
Tab. 5.1 Orientace kolagenních vláken jednotlivých vrstev prasečí hrudní aorty. Parametry von Mises distribuce φ a b získány experimentem. Převzato z [2]

Vzorek	Celá media		Vnitřní polovina medie		Vnější polovina medie	
	b	φ (°)	b	φ (°)	b	φ (°)
1	0,94	82	1,21	86	0,79	78
2	1,27	94	1,81	92	0,89	96
3	0,88	88	1,44	90	0,68	86
4	0,67	84	1,22	86	0,42	72
5	1,11	92	1,56	92	0,59	96
6	1,12	80	1,69	84	0,56	62
7	1,04	82	1,22	84	0,79	78
8	0,78	86	1,24	86	0,64	84
9	1,46	90	2,51	90	1,16	88
Průměr	1,03	86	1,54	88	0,72	82

Dvě vrstvy

Skupina vláken natočená mezi 45° a 135° je reprezentována první vrstvou s axiální orientací kolagenních vláken ($\alpha = 0^\circ$) a vlákna od 0° do 45° a od 135° do 180° byla nahrazena druhou vrstvou s obvodovou orientací vláken ($\alpha = 90^\circ$). Vlákna vrstev jsou na sebe tedy navzájem kolmá.

¹⁴ index f bude v následujícím výkladu představovat kolagenní vlákna a index m matrici, tedy síť elastinu



Obr. 5.2 Distribuční funkce celé medie pro $b = 1,03$ a $\varphi = 86^\circ$. O – obvodový směr vláken, A – axiální směr vláken.

Poměr obsahů ploch pod křivkou na obr. 5.2 odpovídá poměru objemového plnění vláken ve vrstvách. Je tak nutné rozložit vlákna do vrstev v tomto poměru při splnění celkového plnění medie $v_f = 0,4$. Tímto dostáváme objemové plnění jednotlivých vrstev, viz tabulka 5.2 a 5.3.

Tab. 5.2 Objemové plnění vrstvy 1.

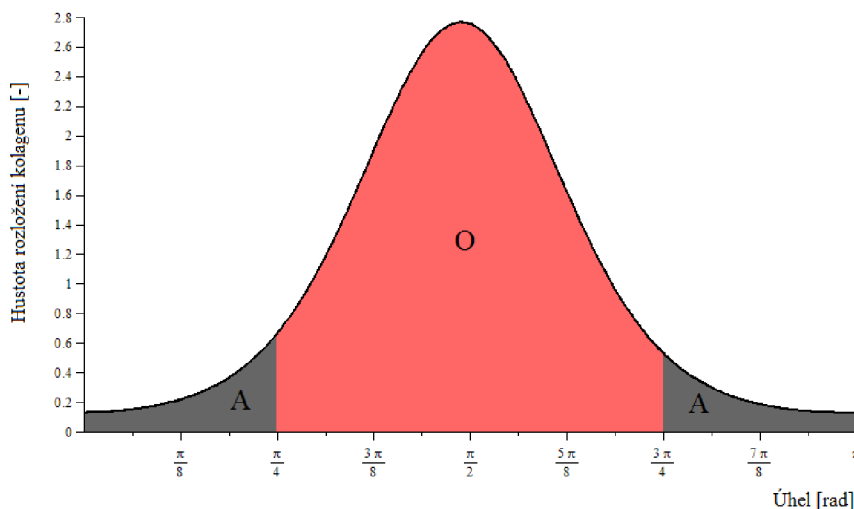
Axiální směr	$S_A = 0,677$
$v_{f1} = 0,172$	$v_{m1} = 0,828$

Tab. 5.3 Objemové plnění vrstvy 2.

Obvodový směr	$S_O = 2,464$
$v_{f2} = 0,628$	$v_{m2} = 0,372$

Čtyři vrstvy

Naprostotožným postupem, jako bylo odvozeno objemové plnění pro rozdělení do dvou vrstev, bylo získáno i objemové plnění pro vrstvy čtyři. S použitím hodnot b a φ z tabulky 5.1 pro vnitřní a vnější polovinu medie byly vykresleny distribuční funkce a následně opět porovnány obsahy ploch pod křivkou. Zároveň musela být stále splněna podmínka celkového plnění medie kolagenem $v_f = 0,4$.



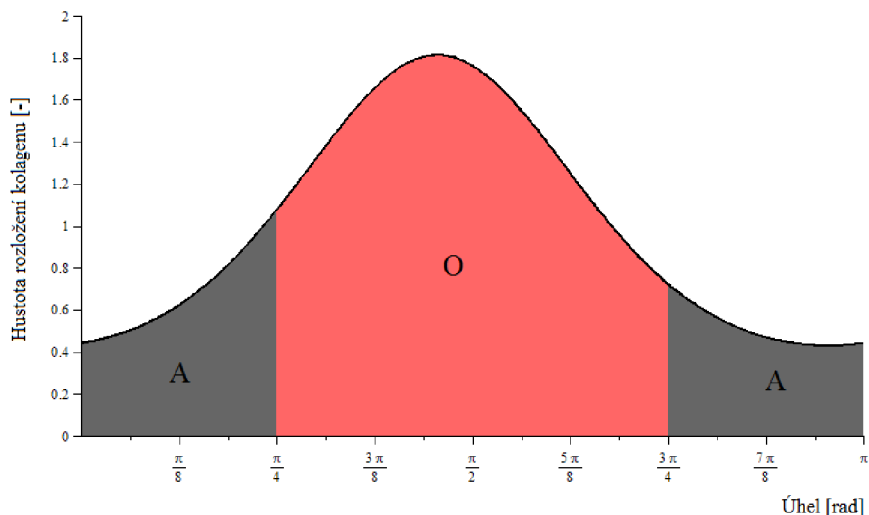
Obr. 5.3 Distribuční funkce vnitřní poloviny medie pro $b = 1,54$ a $\varphi = 88^\circ$. O – obvodový směr vláken, A – axiální směr vláken.

Tab. 5.4 Objemové plnění vrstvy 1.

Axiální směr	$S_A = 0,395$
$v_{f1} = 0,102$	$v_{m1} = 0,898$

Tab. 5.5 Objemové plnění vrstvy 2.

Obvodový směr	$S_O = 2,746$
$v_{f2} = 0,698$	$v_{m2} = 0,302$



Obr. 5.4 Distribuční funkce vnější poloviny medie pro $b = 0,72$ a $\varphi = 82^\circ$. O – obvodový směr vláken, A – axiální směr vláken.

Tab. 5.6 Objemové plnění vrstvy 3.

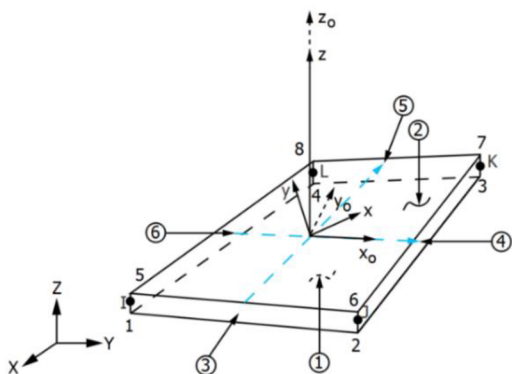
Axiální směr	$S_A = 0,923$
$v_{f3} = 0,235$	$v_{m3} = 0,765$

Tab. 5.7 Objemové plnění vrstvy 4.

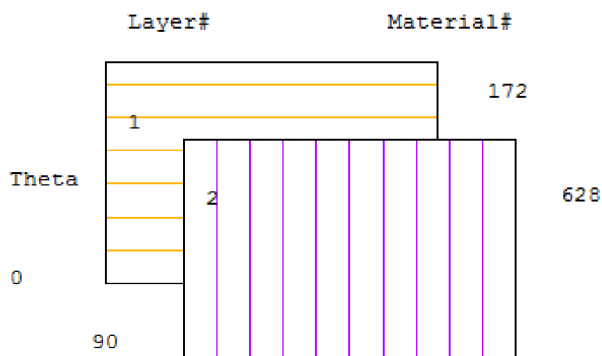
Obvodový směr	$S_O = 2,218$
$v_{f4} = 0,565$	$v_{m4} = 0,435$

5.4 Konečný prvek sítě

Pro vytvoření sítě skořepiny byl vybrán konečný prvek SHELL 181 vhodný právě pro modelování sendvičových struktur, jako je laminátový kompozit. V oddíle *sections* je možné tomuto prvku připsat počet vrstev, jejich tloušťku, materiál a orientaci vláken každé z nich. Jedná se o čtyřuzlový prvek mající v každém z uzlů šest stupňů volnosti. [22]



Obr. 5.5 Konečný prvek SHELL 181. Převzato z [22]

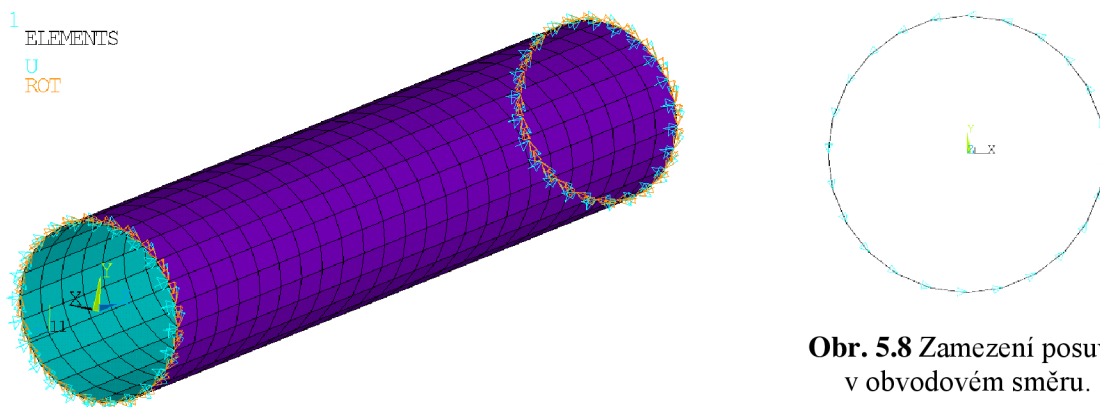


Obr. 5.6 Dvě na sebe kolmé vrstvy různého materiálu prvku SHELL 181 v programu ANSYS.

Jak uvádí práce [23], tloušťka celé medie je $t = 1,64 \text{ mm}$. V případě dvouvrstvého laminátu je tudíž každé z vrstev přiřazena tloušťka $t_{1,2} = 0,82 \text{ mm}$ a v případě vrstev čtyř $t_{1,2,3,4} = 0,41 \text{ mm}$.

5.5 Okrajové podmínky a zatížení

Vytvořené skořepinové síti byly předepsány tyto okrajové podmínky. Po natočení souřadného systému bylo na obou koncích zamezeno obvodovým posuvům. Protože tuto úlohu modelují jako symetrickou podle roviny počátku XY, konci v této rovině byl předepsán nulový posuv v axiálním směru a konec druhý, jelikož je aorta ve stavu in vivo předepnuta, je v tomto směru protažen o 15%. [10] Poté bylo na obou koncích zamezeno rotacím kolem osy Y a nakonec byl vnitřní povrch stěny ve dvou krocích zatížen tlakem 10 a 16 kPa.



Obr 5.7 Vytvořená síť s předepsanými okrajovými podmínkami.

Obr. 5.8 Zamezení posuvu v obvodovém směru.

5.6 Modul pružnosti v tahu kolagenu

Jak již bylo řečeno v kapitole 2, vlákna kolagenu jsou z počátku zatíženi zvlněná a s rostoucím zatížením se natahují a tuhnou. Jelikož nejsem schopen tento jev simulovat a nevím tudíž, v jakém stavu se vlákna kolagenu právě při předepsaném zatížení nacházejí, úkolem této kapitoly bude určit modul pružnosti v tahu kolagenu E_f .

Výpočet modulu pružnosti v tahu kolagenu E_f vychází ze znalosti tuhosti stěny v obvodovém směru, která je přibližně 10 MPa, viz práce [2]. Na základě toho byl modul pružnosti kolagenu určen ve dvou částech následovně.

Izotropní materiál

V první části byl výše uvedené geometrii přiřazen izotropní materiál s modulem pružnosti v tahu $E = 10 \text{ MPa}$ a Poissonovým číslem $\mu = 0,4$, následně na něj byly aplikovány okrajové podmínky z kapitoly 5.5. Pozorovaným výsledkem byl rozdíl posuvů v obvodovém směru mezi zatěžujícím tlakem 10 až 16 kPa.

Tab. 5.8 Výsledky posuvů izotropního materiálu.

Krok zatížení	Tlak [kPa]	Posuv [mm]
1	10	0,548
2	16	0,518 ¹⁵
Rozdíl Δ	6	0,030

¹⁵ při větším zatížení by se dal předpokládat větší posuv stěny, působí zde ale proti sobě zúžení způsobené podélným prodloužením a vnitřní tlak působící na stěnu, snižující se hodnota posuvu při rostoucím zatížení je dána převládajícím zúžením od prodloužení, v obou případech tak jde o posuv směrem k ose aorty

Dvouvrstvý laminát

Druhá část spočívala v tomto. Postupnou iterací modulu pružnosti v tahu vlákna kolagenu E_f bylo třeba získat stejný rozdíl posuvů v obvodovém směru pro dvouvrstvý laminát, jako tomu bylo u izotropního materiálu s modulem pružnosti $E = 10 \text{ MPa}$. Tak bude tuhost laminátu v obvodovém směru právě žádaných 10 MPa .

U všech vrstev počítám s modulem pružnosti v tahu sítě elastinu $E_m = 0,523 \text{ MPa}$. [12] Jelikož předpokládám stěnu aorty za téměř nestlačitelnou, Poissonova čísla jak elastinu, tak kolagenu volím $\mu_{f,m} = 0,4$. Objemové plnění vrstev bylo odvozeno v kapitole 5.3.1.

1. Krok iterace

Modul pružnosti v tahu vlákna kolagenu v prvním kroku volím $E_f = 200 \text{ MPa}$.

Homogenizace vrstvy 1

Tab. 5.9 Vlastnosti bimateriálového modelu.

	Vlákno	Matrice
$E \text{ [MPa]}$	200	0,523
$\nu \text{ [-]}$	0,172	0,828
$\mu \text{ [-]}$	0,4	0,4

Tab. 5.11 Vlastnosti homogenizovaného modelu.

$E_X = 34,833 \text{ MPa}$
$E_Y = 0,792 \text{ MPa}$
$E_Z = 0,792 \text{ MPa}$
$\mu_{XY} = 0,4$
$\mu_{YZ} = 0,74$
$\mu_{XZ} = 0,4$
$G_{XY} = 0,228 \text{ MPa}$
$G_{YZ} = 0,555 \text{ MPa}$
$G_{XZ} = 0,228 \text{ MPa}$

Homogenizace vrstvy 2

Tab. 5.10 Vlastnosti bimateriálového modelu.

	Vlákno	Matrice
$E \text{ [MPa]}$	200	0,523
$\nu \text{ [-]}$	0,628	0,372
$\mu \text{ [-]}$	0,4	0,4

Tab. 5.12 Vlastnosti homogenizovaného modelu.

$E_X = 125,97 \text{ MPa}$
$E_Y = 2,692 \text{ MPa}$
$E_Z = 2,692 \text{ MPa}$
$\mu_{XY} = 0,4$
$\mu_{YZ} = 0,607$
$\mu_{XZ} = 0,4$
$G_{XY} = 0,838 \text{ MPa}$
$G_{YZ} = 1,884 \text{ MPa}$
$G_{XZ} = 0,838 \text{ MPa}$

Tab. 5.13 Výsledky posuvů dvouvrstvého laminátu, $E_f = 200 \text{ MPa}$.

Krok zatížení	Tlak [kPa]	Posuv [mm]
1	10	0,007
2	16	0,001
Rozdíl Δ	6	0,006

Rozdíl posuvů při modulem pružnosti kolagenu $E_f = 200 \text{ MPa}$ je $0,006 \text{ mm}$. Je tedy menší než posuv pro materiál izotropní s $E = 10 \text{ MPa}$ a v dalším kroku je třeba modul pružnosti E_f snížit.

2. Krok iterace

Modul pružnosti v tahu vlákna kolagenu pro krok č. 2 volím $E_f = 30 \text{ MPa}$.

Homogenizace vrstvy 1

Tab. 5.14 Vlastnosti bimateriálového modelu.

	Vlákno	Matrice
$E \text{ [MPa]}$	30	0,523
$\nu \text{ [-]}$	0,172	0,828
$\mu \text{ [-]}$	0,4	0,4

Tab. 5.16 Vlastnosti homogenizovaného modelu.

$E_X = 5,593 \text{ MPa}$
$E_Y = 0,781 \text{ MPa}$
$E_Z = 0,781 \text{ MPa}$
$\mu_{XY} = 0,4$
$\mu_{YZ} = 0,696$
$\mu_{XZ} = 0,4$
$G_{XY} = 0,230 \text{ MPa}$
$G_{YZ} = 0,547 \text{ MPa}$
$G_{XZ} = 0,230 \text{ MPa}$

Homogenizace vrstvy 2

Tab. 5.15 Vlastnosti bimateriálového modelu.

	Vlákno	Matrice
$E \text{ [MPa]}$	30	0,523
$\nu \text{ [-]}$	0,628	0,372
$\mu \text{ [-]}$	0,4	0,4

Tab. 5.17 Vlastnosti homogenizovaného modelu.

$E_X = 19,035 \text{ MPa}$
$E_Y = 2,495 \text{ MPa}$
$E_Z = 2,495 \text{ MPa}$
$\mu_{XY} = 0,4$
$\mu_{YZ} = 0,582$
$\mu_{XZ} = 0,4$
$G_{XY} = 0,789 \text{ MPa}$
$G_{YZ} = 1,747 \text{ MPa}$
$G_{XZ} = 0,789 \text{ MPa}$

Tab. 5.18 Výsledky posuvů dvouvrstvého laminátu, $E_f = 30 \text{ MPa}$.

Krok zatížení	Tlak [kPa]	Posuv [mm]
1	10	0,039
2	16	0,003
Rozdíl Δ	6	0,036

Rozdíl posuvů při modulu pružnosti kolagenu $E_f = 30 \text{ MPa}$ je $0,036 \text{ mm}$. Je tedy nepatrně větší než posuv pro materiál izotropní a v dalším kroku je tak třeba modul pružnosti E_f zvýšit.

3. Krok iterace

Modul pružnosti v tahu vlákna kolagenu ve třetím kroku volím $E_f = 38 \text{ MPa}$.

Homogenizace vrstvy 1

Tab. 5.19 Vlastnosti bimateriálového modelu.

	Vlákno	Matrice
$E \text{ [MPa]}$	38	0,523
$\nu \text{ [-]}$	0,172	0,828
$\mu \text{ [-]}$	0,4	0,4

Tab. 5.21 Vlastnosti homogenizovaného modelu.

$E_X = 6,797 \text{ MPa}$
$E_Y = 0,783 \text{ MPa}$
$E_Z = 0,783 \text{ MPa}$
$\mu_{XY} = 0,4$
$\mu_{YZ} = 0,705$
$\mu_{XZ} = 0,4$
$G_{XY} = 0,230 \text{ MPa}$
$G_{YZ} = 0,548 \text{ MPa}$
$G_{XZ} = 0,230 \text{ MPa}$

Homogenizace vrstvy 2

Tab. 5.20 Vlastnosti bimateriálového modelu.

	Vlákno	Matrice
$E \text{ [MPa]}$	38	0,523
$\nu \text{ [-]}$	0,628	0,372
$\mu \text{ [-]}$	0,4	0,4

Tab. 5.22 Vlastnosti homogenizovaného modelu.

$E_X = 23,431 \text{ MPa}$
$E_Y = 2,536 \text{ MPa}$
$E_Z = 2,536 \text{ MPa}$
$\mu_{XY} = 0,4$
$\mu_{YZ} = 0,587$
$\mu_{XZ} = 0,4$
$G_{XY} = 0,799 \text{ MPa}$
$G_{YZ} = 1,775 \text{ MPa}$
$G_{XZ} = 0,799 \text{ MPa}$

Tab. 5.23 Výsledky posuvů dvouvrstvého laminátu, $E_f = 38 \text{ MPa}$.

Krok zatížení	Tlak [kPa]	Posuv [mm]
1	10	0,033
2	16	0,003
Rozdíl Δ	6	0,030

Rozdíl posuvů v tomto případě vyhovuje podmínce a je stejný jako rozdíl posuvů pro izotropní materiál, tudíž je hledaný modul pružnosti v tahu kolagenu $E_f = 38 \text{ MPa}$.

Čtyřvrstvý laminát

Postup pro zjištění modulu pružnosti v tahu vlákna kolagenu E_f pro čtyřvrstvý laminát je totožný jako pro laminát dvouvrstvý. Vzhledem ke skutečnosti, že tento princip byl již detailněji popsán, uvádím v tomto případě pouze poslední z iterací, tedy tu vyhovující.

Homogenizace vrstvy 1

Tab. 5.24 Vlastnosti bimateriálového modelu.

	Vlákno	Matrice
E [MPa]	36	0,523
ν [-]	0,102	0,898
μ [-]	0,4	0,4

Tab. 5.26 Vlastnosti homogenizovaného modelu.

$E_X = 4,142$ MPa
$E_Y = 0,666$ MPa
$E_Z = 0,666$ MPa
$\mu_{XY} = 0,400$
$\mu_{YZ} = 0,707$
$\mu_{XZ} = 0,400$
$G_{XY} = 0,195$ MPa
$G_{YZ} = 0,466$ MPa
$G_{XZ} = 0,195$ MPa

Homogenizace vrstvy 3

Tab. 5.28 Vlastnosti bimateriálového modelu.

	Vlákno	Matrice
E [MPa]	36	0,523
ν [-]	0,235	0,765
μ [-]	0,4	0,4

Tab. 5.30 Vlastnosti homogenizovaného modelu.

$E_X = 8,860$ MPa
$E_Y = 0,906$ MPa
$E_Z = 0,906$ MPa
$\mu_{XY} = 0,400$
$\mu_{YZ} = 0,693$
$\mu_{XZ} = 0,400$
$G_{XY} = 0,268$ MPa
$G_{YZ} = 0,634$ MPa
$G_{XZ} = 0,268$ MPa

Homogenizace vrstvy 2

Tab. 5.25 Vlastnosti bimateriálového modelu.

	Vlákno	Matrice
E [MPa]	36	0,523
ν [-]	0,698	0,302
μ [-]	0,4	0,4

Tab. 5.27 Vlastnosti homogenizovaného modelu.

$E_X = 25,286$ MPa
$E_Y = 3,216$ MPa
$E_Z = 3,216$ MPa
$\mu_{XY} = 0,400$
$\mu_{YZ} = 0,565$
$\mu_{XZ} = 0,400$
$G_{XY} = 1,027$ MPa
$G_{YZ} = 2,251$ MPa
$G_{XZ} = 1,027$ MPa

Homogenizace vrstvy 4

Tab. 5.29 Vlastnosti bimateriálového modelu.

	Vlákno	Matrice
E [MPa]	36	0,523
ν [-]	0,565	0,435
μ [-]	0,4	0,4

Tab. 5.31 Vlastnosti homogenizovaného modelu.

$E_X = 20,568$ MPa
$E_Y = 2,089$ MPa
$E_Z = 2,089$ MPa
$\mu_{XY} = 0,400$
$\mu_{YZ} = 0,605$
$\mu_{XZ} = 0,400$
$G_{XY} = 0,650$ MPa
$G_{YZ} = 1,462$ MPa
$G_{XZ} = 0,650$ MPa

Tab. 5.32 Výsledky posuvů čtyřvrstvého laminátu.

Krok zatížení	Tlak [kPa]	Posuv [mm]
1	10	0,037
2	16	0,007
Rozdíl Δ	6	0,030

Zjištěný modul pružnosti v tahu vlákna kolagenu pro čtyřvrstvý laminát je $E_f = 36 \text{ MPa}$. Rozdíl oproti E_f laminátu dvouvrstvého činí pouze 5% a lze tak předpokládat, že zvyšování počtu vrstev odhadovaný modul pružnosti výrazněji nezmění a získaná hodnota je konečná.

I přes veškerá omezení tohoto modelu měření tuhosti kolagenu z tkání, zmíněná v práci [24], došla přibližně ke stejným výsledkům (viz tabulka 5.33) a tento postup a výsledek lze tedy považovat za použitelný a poměrně přesný.

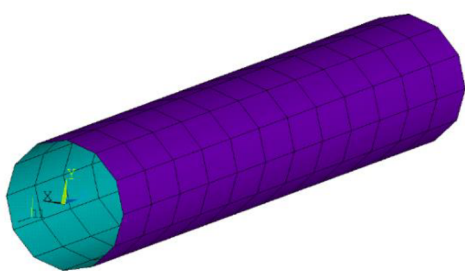
Tab. 5.33 Modul pružnosti a mez pevnosti kolagenu pro čtyři různé druhy tkáně. Převzato z [24]

	$E \text{ [MPa]}$	$\sigma_{krit} \text{ [MPa]}$
Kůže	0 – 50	15
Rohovka	0,2 – 1	20
Mitrální chlopeň	0 – 50	-
Šlacha	1000	90

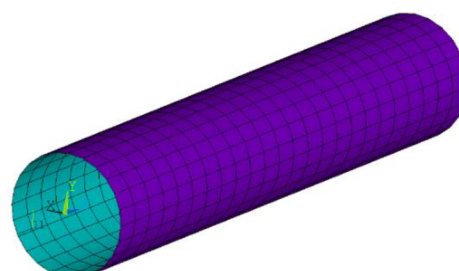
5.7 Konvergence sítě

Z důvodu posouzení korektnosti výsledků u výpočtů metodou konečných prvků je nutné zkontrolovat konvergenci použité sítě. Zvyšováním počtu prvků sítě je třeba se blížit spojitému řešení problému. Při zjemňování sítě je sledován rozdíl posledních dvou výsledků a zjemňování je prováděno tak dlouho, dokud není dosaženo rozdílu výsledků menšího než 5%.

Jelikož se jedná u jednoduchou geometrii nenáročnou na výpočet, nebylo nutné sít nijak lokálně zjemňovat. U tvorby sítě byl tak řízen pouze počet elementů po obvodu a po délce modelu, viz obrázky 5.9 a 5.10.



Obr. 5.9 Sít' č. 2 s 144 elementy.



Obr. 5.10 Sít' č. 3 s 576 elementy.

Tab. 5.34 Ověření konvergence sítě.

Sít'	Počet elementů	Napětí ve směru vláken ve vnější vrstvě $\sigma_f \text{ [MPa]}$	Rozdíl [%]
1	36	0,092	-
2	144	0,107	16,3
3	576	0,113	5,6
4	2304	0,114	0,8

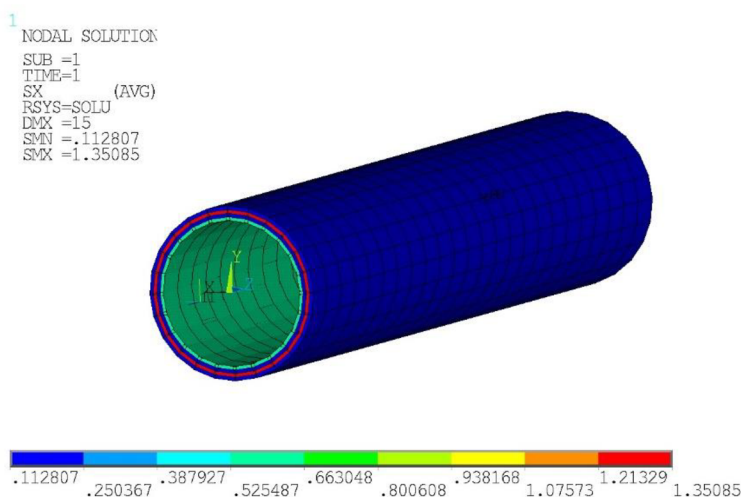
Jak je vidět v tabulce 5.34, mezi sítěmi 3 a 4 bylo dosaženo rozdílu menšího než 5%. To znamená, že síť č. 3 s 576 prvky již splňuje podmínku konvergence a postačuje k řešení.

5.8 Analýza výsledků

Jak již bylo dříve uvedeno, cílem této kapitoly bylo zjištění napětí ve vláknech a jejich srovnání s kritickou hodnotou pevnosti v tahu kolagenu. Jelikož by mělo u čtyřvrstvého laminátu dojít k přesnější simulaci orientace kolagenních vláken po tloušťce medie, analýza je provedena pro tento laminát. Všechna napětí jsou analyzována při maximálním možném zatížení, tedy při systolickém tlaku $p = 16 \text{ kPa}$. Pouze pro srovnání v tabulce 5.35 uvádím i výsledná napětí pro laminát dvouvrstvý.

Tab. 5.35 Napětí ve vláknech po jednotlivých vrstvách při systolickém tlaku 16 kPa.

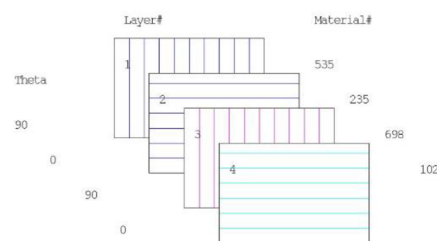
Vrstva	Čtyřvrstvý laminát	Dvouvrstvý laminát
	Napětí ve směru vláken σ_f [MPa]	Napětí ve směru vláken σ_f [MPa]
1	0,113	0,146
2	1,351	1,039
3	1,179	-
4	0,638	-



Obr. 5.11 Napětí po vrstvách ve směru vláken.

V jednosměrových kompozitech s křehkými vlákny, podrobených tahovému podélnému zatížení se porušení zahajuje přetržením vláken v jejich nejslabších příčných průřezích. Jakmile počet přetržených vláken vzroste, některé průřezy kompozitu se stanou příliš slabými, aby snesly zvýšené napětí, a dochází tak k úplnému lomu kompozitu. [13] Maximální napětí ve vláknech se nachází ve druhé vrstvě a to $\sigma_{max} = 1,351 \text{ MPa}$. Pokud uvažují mez pevnosti v tahu kolagenu $\sigma_{krit} = 15 \text{ MPa}$, viz tabulka 5.33, lze porovnáním maximálního a kritického napětí dopočítat bezpečnost před porušením $k = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{krit}} = 11,1$.

Dalším zjištěním je fakt, že reakční síla v axiálním směru se mezi systolickým a diastolickým tlakem pro tento model téměř nemění. Pro systolu je reakční síla $F_{sy} = 2,994 \text{ N}$, pro diastolu potom $F_{di} = 2,985 \text{ N}$. Toto je zajímavý výsledek, protože i přes veškerá omezení modelu souhlasí s pokročilejšími experimenty a výpočty. Jak totiž uvádí práce [25], v lidském těle je při stavu in vivo axiální síla prakticky konstantní.



Obr. 5.12 Orientace jednotlivých vrstev.

ZÁVĚR

Předkládaná bakalářská práce se zabývala modelováním aorty jako laminátu s proměnnou tuhostí lamin po tloušťce. Jelikož je modelování měkkých tkání i práce s kompozity velice složitou problematikou, přesahující rámec bakalářského studia, nejprve bylo nutné získat v těchto oblastech určitý přehled, kterým se zabývá teoretická část této práce v kapitolách dva až čtyři.

V těch bylo postupně pojednáno o jednotlivých částech kardiovaskulární soustavy, se zaměřením na cévní stěnu a mechanické vlastnosti jejich hlavních složek, o kompozitních materiálech a homogenizaci jejich vlastností a také o současných konstitutivních modelech tepny, pracujících v oblasti velkých deformací, přičemž žádný ze současných modelů není schopen plného respektování rozprostření kolagenních vláken po tloušťce stěny.

V praktické části byl vytvořen konečnoprvkový model aorty, ve kterém byla stěna modelována jako dvouvrstvý a čtyřvrstvý kompozitový laminát. Každá z vrstev přitom měla na základě rozdílného objemového plnění a orientace vláken odlišné mechanické vlastnosti. Prvním z úkolů bylo u tohoto modelu zjištění modulu pružnosti v tahu kolagenu. Ten byl určen na základě dat z provedených tahových zkoušek v práci [2] a výsledek $E_f = 36 \text{ MPa}$ se poměrně přesně shoduje s výsledky jiných měření uvedených v práci [24]. Ve druhém úkolu bylo analyzováno chování stěny při jejím zatížení vnitřním tlakem. Porovnáním maximálního napětí ve vláknech a jejich pevnosti byla konstatována bezpečnost před poškozením zdravé aorty $k = 11,1$.

I přes veškerá zjednodušení provedená v této bakalářské práci tedy získané výsledky nevypadají zcela nereálně a korespondují se skutečností a jinými měřeními. Je ale nutné zdůraznit, že celá praktická část této práce se pohybuje v oblasti malých deformací, což značně ovlivňuje její použitelnost u skutečných měkkých tkání, vykazujících deformace velké.

SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

- [1] VRBKA, Jan. 2008. *Mechanika kompozitů*. Brno.
- [2] S. POLZER, T.C. GASSER, K. NOVAK, V. MAN, M. TICHY, P. SKACEL, J. BURSA, *Structure-based constitutive model can accurately predict planar biaxial properties of aortic wall tissue*, *Acta Biomaterialia*, 2015, roč. 14, str. 133-145. ISSN 1742-7061. Dostupné z:
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1742706114005467>
- [3] FRATZL, Peter. *Collagen: structure and mechanics*. New York: Springer, 2008. ISBN 038773905X.
- [4] ČIHÁK, Radomír. *Anatomie*. 3., upr. a dopl. vyd. Praha: Grada, 2004. ISBN 80-247-1132-X.
- [5] LÜLLMANN-RAUCH, Renate. *Histologie*. 1. české vyd. Praha: Grada, 2012. ISBN 978-80-247-3729-4.
- [6] BURŠA, Jiří. *Studijní opory – Biomechanika III* [online]. [cit. 2016-02-22]. Elektronické opory. Dostupné z:
<http://www.umt.fme.vutbr.cz/cz/studium/studijni-materialy.html>
- [7] Gerhard A. HOLZAPFEL, Thomas C. GASSER, Ray W. OGDEN, *A New Constitutive Framework for Arterial Wall Mechanics and a Comparative Study of Material Models*, *Journal of elasticity and the physical science of solids*, 2000, roč. 61, str. 5, ISSN 1573-2681. Dostupné z:
<http://link.springer.com/article/10.1023%2FA%3A1010835316564>
- [8] A.I. ARROYAVE G., R.G. LIMA, P.A.L.S. MARTINS, N. RAMIAO, R.M.N. JORGE, *Methodology for Mechanical Characterization of Soft Biological Tissues: Arteries*, *Procedia Engineering*, 2015, roč. 110, str. 80, ISSN 1877-7058. Dostupné z:
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877705815012539>
- [9] ALBERTS, Bruce. *Molecular biology of the cell*. New York: Garland Science, 2008. ISBN 978-0-8153-4105-5.
- [10] KONVIČKOVÁ, Svatava a Jaroslav VALENTA. *Biomechanika srdečně cévního systému člověka*. Vyd. 2. Praha: Česká technika - nakladatelství ČVUT, 1997. ISBN 80-01-03425-9.
- [11] POLZER, Stanislav. *Deformačně napěťová analýza aortálních aneurysmat*. Brno, 2012. Doktorská dizertační práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství. Vedoucí práce prof. Ing. Jiří Burša, Ph.D.
- [12] Namrata GUNDIAH, Mark B. RATCLIFFE, Lisa A. PRUITT. *The biomechanics of arterial elastin*, *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 2009, roč. 2, str. 288-296, ISSN 1751-6161. Dostupné z:
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1751616108001057>
- [13] AGARWAL, Bhagwan D. a Lawrence J. BROUTMAN. *Vláknové kompozity: celostátní vysokoškolská příručka pro vysoké školy technické*. 1. vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1987.
- [14] LAŠ, Vladislav. *Mechanika kompozitních materiálů*. 1. vyd. V Plzni: Západočeská univerzita, 2004. ISBN 80-7043-273-X.
- [15] KOLLAR, L. a George S. SPRINGER. *Mechanics of composite structures*. New York: Cambridge University Press, 2003.

- [16] HALPIN, J. C., TSAI, S. W., *Effects of Enviromental Factors on Composite Materials*, Air Force Material Laboratory Technical Report, AFML-TR 64-423, 1969.
- [17] POLZER, Stanislav. Opory předmětu Mechanika kompozitů.
- [18] PETRUŠKA, Jindřich. *Studijní opory – Nelineární úlohy mechaniky v MKP* [online]. [cit. 2016-03-05]. Elektronické opory. Dostupné z: <http://www.umt.fme.vutbr.cz/cz/studium/studijni-materialy.html>
- [19] Moritz A. FRENZEL. *Advanced Structural Finite Element Modeling of Arterial Walls for Patient-Specific Geometries*. München, 2009. Doktorská dizertační práce. Technische Universität München, Fakultät für Maschinenwesen.
- [20] MAUREL, Walter. *Biomechanical models for soft tissue simulation*. New York: Springer-Verlag, c1998. EUR (Series), 16614 EN. ISBN 3540637427.
- [21] ANSYS, Inc. *Hyperelasticity* [online]. 2002 [cit. 2016-04-08]. Dostupné z: <http://ansys.net/collection/830>
- [22] ANSYS, Inc. *System help, ANSYS 16.0* [software]. Leden 2015. [přístup 27-1-2015]
- [23] Hannah WEISBECKER, David M. PIERCE, Peter REGITNIG, Gerhard A. HOLZAPFEL, *Layer-specific damage experiments and modeling of human thoracic and abdominal aortas with non-atherosclerotic intimal thickening*, Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials, 2012, roč. 12, str. 93-106, ISSN 1751-6161. Dostupné z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1751616112000926>
- [24] Vincent R. SHERMAN, Wen YANG, Marc A. MEYERS, *The materials science of collagen*, Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials, 2015, roč. 52, str. 22-50, ISSN 1751-6161. Dostupné z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1751616115001903>
- [25] J.D. HUMPHREY, J.F. EBERTH, W.W. DYE, R.L. GLEASON, *Fundamental role of axial stress in compensatory adaptations by arteries*, Journal of Biomechanics, 2009, roč. 42, str. 1-8, ISSN 0021-9290. Dostupné z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021929008005952>

ZDROJE POUŽITÝCH OBRÁZKŮ

- [26] <http://pubs.rsc.org/en/content/articlehtml/2010/cs/b813273a>
- [27] <http://www.pitchingnow.com/kinesiology/basic-biomechanics-of-tendons-and-ligaments/>
- [28] http://book.myhistology.com/basic-histo/10.%20Muscle%20Tissue_files.html

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ

Symbol	Jednotka	Popis
C	$[-]$	Malice tuhosti
C_R	$[-]$	Pravý Cauchy-Greenův tenzor deformace
γ	$[-]$	Úhlové přetvoření
E	$[Pa]$	Modul pružnosti v tahu
E_i^A	$[-]$	Almansi-Hamelův tenzor přetvoření
E_i^C	$[-]$	Cauchyho přirozený tenzor přetvoření
E_i^L	$[-]$	Green-Lagrangeův tenzor přetvoření
E_{ij}	$[-]$	Složky Green-Lagrangeova tenzoru přetvoření
ε	$[-]$	Délkové přetvoření
F	$[N]$	Axiální reakční síla
F_{iK}	$[-]$	Tenzor Deformačního gradientu
G	$[Pa]$	Modul pružnosti ve smyku
I_i	$[-]$	Invariant pravého Cauchy-Greenova tenzoru přetvoření
\bar{I}_1	$[-]$	Modifikovaný invariant pravého Cauchy-Greenova tenzoru přetvoření
J	$[-]$	Třetí invariant tenzoru deformačního gradientu
k	$[-]$	Součinitel bezpečnosti
K	$[Pa]$	Modul objemové pružnosti
λ	$[-]$	Poměrné protažení
μ	$[-]$	Poissonova konstanta
ρ	$[-]$	Von Mises distribuční funkce
S	$[-]$	Malice poddajnosti
S_{ij}	$[Pa]$	Druhý Piola-Kirchhoffův tenzor napětí
σ	$[Pa]$	Normálové napětí
σ_{ij}	$[Pa]$	Cauchyho tenzor napětí
τ	$[Pa]$	Smykové napětí
τ_{ij}	$[Pa]$	První Piola-Kirchhoffův tenzor napětí
V	$[m^3]$	Objem
ν	$[-]$	Objemový podíl
W	$[Pa]$	Měrná deformační energie