UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Martin Krbec, DiS.

Analytická geometrie kuželoseček

Olomouc 2013 vedoucí práce: Mgr. David Nocar, Ph.D.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a uvedl veškerou použitou literaturu a zdroje.

V Olomouci dne 15. 4. 2013 Martin Krbec, DiS.

Poděkování

Děkuji Mgr. Davidu Nocarovi, Ph.D. za odborné vedení, cenné rady a zkušenosti, kterými mě vedl a motivoval při zpracování bakalářské práce.

Obsah

Úvod

Studium kuželoseček je důležitou součástí analytické geometrie. Pojem kuželosečky je společný název pro kružnici, elipsu, hyperbolu a parabolu. S kuželosečkami a jejich vlastnostmi se žáci setkávají již na střední škole.

Hlavním cílem této bakalářské práce je podat pohled na problematiku kuželoseček. Obsahem je analytický přístup ke studiu kuželoseček v euklidovské rovině.

Celá práce je rozdělena na dvě části, a to na část teoretickou a na část praktickou.

Teoretická část je rozdělena do několika kapitol. V první kapitole je vysvětleno, co jsou kuželosečky a jak vznikají. V druhá kapitola se zabývá typy kuželoseček, jejich definicí a popisem jejich vlastností. Celé práce se zabývá kuželosečkami, jejichž osy jsou rovnoběžné s osami kartézské soustavy souřadnic. V kapitole je naznačena konstrukce každé kuželosečky. Třetí kapitola se zaměřuje na rovnice kuželoseček. U každé kuželosečky je provedeno odvození středové, resp. vrcholové rovnice kuželosečky, napsány všechny tvary těchto rovnic podle polohy kuželosečky a tvary obecných rovnic. Čtvrtá kapitola je zaměřena na určování vzájemné polohy kuželosečky a přímky, resp. dvou kuželoseček. Popisuje postup pro určení vzájemné polohy na základě řešení soustavy rovnic. Dále jsou vysvětleny jednotlivé polohy přímky, které může přímka zaujmout ke kuželosečce.

Praktická část má jednu kapitolu, která je těžištěm této práce. Tato kapitola obsahuje sadu řešených příkladů, které logicky navazují na předchozí kapitoly. Zde by si měl čtenář ověřit, zda správně pochopil teoretickou část a dokáže aplikovat teoretické znalosti při řešení praktických příkladů.

Pro grafické zpracování textu byl použit software GeoGebra, který je volně stažitelný nebo použitelný jako webová aplikace. Pomocí tohoto programu byly narýsovány obrázky do prvních čtyř kapitol a bylo naznačeno řešení příkladů z páté kapitoly, které je umístěno do přílohy. Obrázky by měly sloužit pro snadnější pochopení teorie.

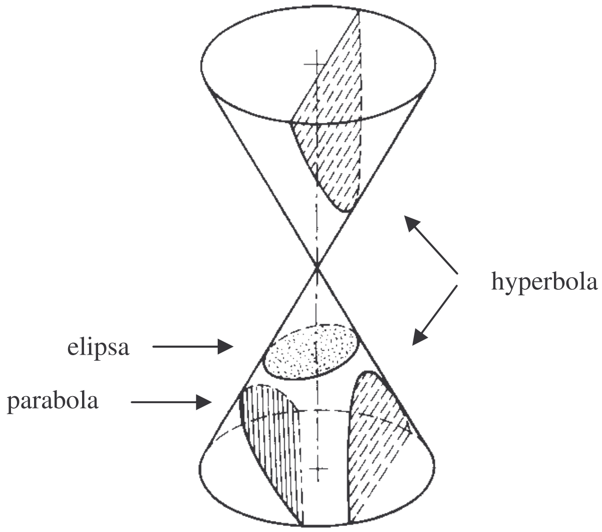
1 Kuželosečky

1.1 Kuželosečky jako řezy na kuželové ploše

Definice

Kuželosečky jsou rovinné křivky, ve kterých rovina seče rotační kuželovou plochu.

Z definice vyplývá, že kuželosečky jsou rovinné křivky a všechny body kuželoseček leží v téže rovině na rozdíl od prostorových křivek (např. šroubovice), u nichž tomu tak není. Různé druhy kuželoseček vznikají podle plochy roviny řezu vzhledem ke kulové ploše (obr. 1).



Obr. 1: Kuželosečky

Předpokládejme, že rovina řezu ρ není vrcholová rovina. Vrchol $V \notin \rho$.

Kuželosečka je **kružnicí**, je-li rovina řezu ρ rovnoběžná s některou rovinou kruhového řezu $(\rho \parallel \pi)$. Roviny kolmé k rotační kuželové ploše ji protínají v kružnicích. Uvedená nesečna přejde v nevlastní přímku roviny π.

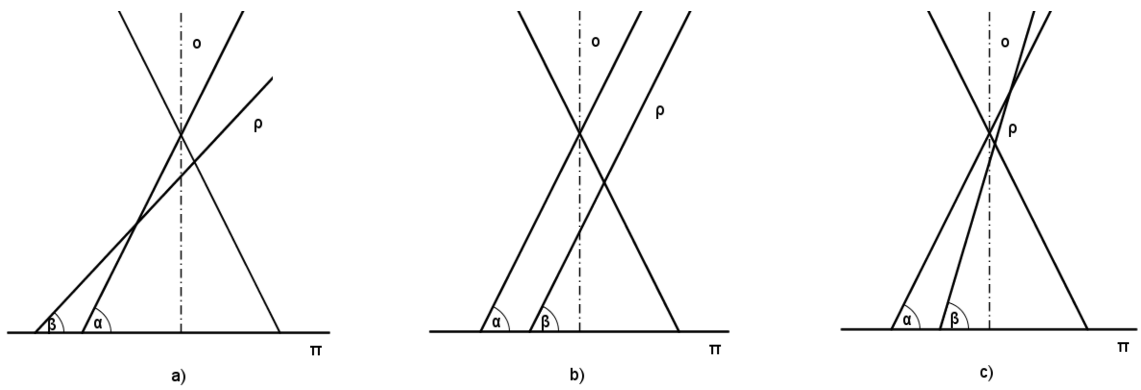
Kuželosečka je **elipsou**, jestliže vrcholová rovina ω, která je rovnoběžná s rovinou řezu ρ $(\omega \parallel \rho)$, protíná rovinu π řídicí kružnice k kuželové plochy v přímce p, která je nesečnou kružnice k.

Kuželosečka je **parabolou**, jestliže vrcholová rovina ω, která je rovnoběžná s rovinou řezu ρ $(\omega \parallel \rho)$, protíná rovinu π řídicí kružnice k v přímce t, která je tečnou kružnice k.

Kuželosečka je **hyperbolou**, jestliže vrcholová rovina ω, která je rovnoběžná s rovinou řezu ρ ($\omega \parallel \rho$), protíná rovinu π řídicí kružnice k v sečně této kružnice.

Nyní si označíme dva úhly. Úhel α svírají povrchové přímky rotační kuželové plochy s rovinou kolmou k ose rotace a úhel β svírá rovinu řezu ρ s rovinou π kolmou k ose rotační plochy. Podle polohy roviny řezu ρ vzhledem ke kuželové ploše můžeme rozlišit různé druhy kuželoseček:

- řezem je elipsa, je-li α > β;
- řezem je parabola, je-li α = β;
- řezem je hyperbola, je-li α < β.



Obr. 2: Kuželosečky v osovém řezu kuželové plochy

Klasifikaci kuželoseček můžeme provést podle toho, kolik přímek kuželové plochy je proťato rovinou řezu ρ. Řezem je elipsa nebo kružnice, protíná-li rovina ρ všechny přímky kuželové plochy (obr. 2a). Řezem je parabola, protíná-li rovina ρ všechny přímky kuželové plochy kromě jediné, s níž je rovnoběžná (obr. 2b). Řezem je hyperbola, protíná-li rovina ρ všechny přímky kuželové plochy až na dvě, s nimiž je rovnoběžná (obr. 2c). Klasifikace kuželoseček je schematicky znázorněna v osovém řezu kuželové plochy.

Je-li rovina řezu ρ vrcholová rovina ($V \in \rho$), je řezem tzv. složená kuželosečka.

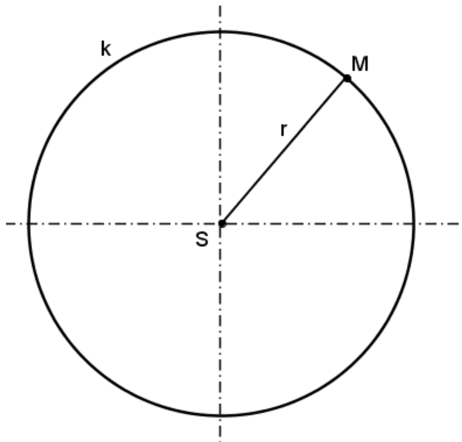
2 Typy kuželoseček a jejich popis

2.1 Kružnice

2.1.1 Základní pojmy kružnice

Definice

Kružnice je množina všech bodů v rovině, které mají od daného bodu S (středu kružnice) stejnou vzdálenost r (poloměr kružnice) (obr. 3).



Obr. 3: Základní pojmy kružnice

Bod $\boldsymbol{S}$ se nazývá střed kružnice. Vzdálenost $|SM|$ se nazývá poloměr a značí se **r**. Kružnice je speciálním případem elipsy. V tomto případě ohniska splynou v jeden bod (střed S) a dostaneme kružnici. Pro velikosti poloos platí $a = b$ a velikost excentricity $e = 0$.

Všechny body roviny je možné charakterizovat na základě jejich polohy vzhledem ke kružnici:

a) $|SM| < r$, M je vnitřní bod kružnice;

b) $|SM| = r$, M je bod kružnice;

c) $|SM| > r$, M je vnější bod kružnice.

2.1.2 Konstrukce kružnice

Konstrukce kružnice je velmi jednoduchá a všem dobře známá. Zvolíme si střed S kružnice a pomocí kružítka narýsujeme kružnici k s poloměrem r. Značíme $k(S, r)$.

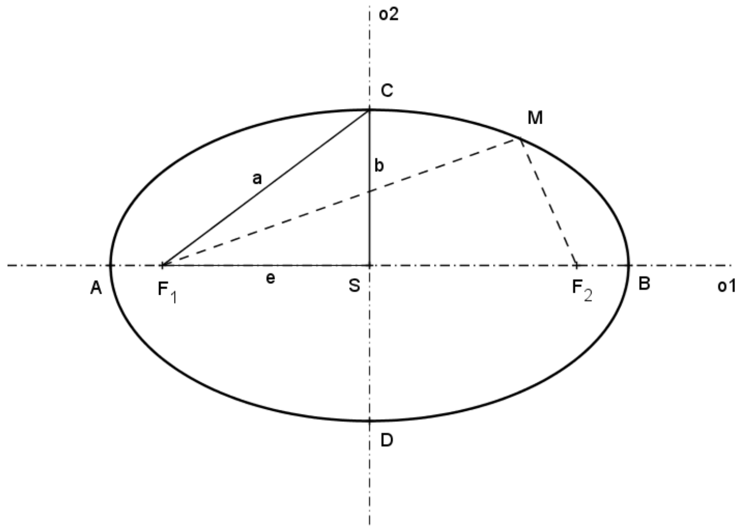
Konstrukci kružnice můžeme využít v běžném životě. Při tvorbě kruhového záhonu na zahradě, při tvorbě kružnic a kruhových oblouků na sportovištích, atd.

2.2 Elipsa

2.2.1 Základní pojmy elipsy

Definice

Elipsa je množina všech bodů v rovině, které mají od dvou různých bodů F_1, F_2 konstantní součet vzdáleností rovný $2a$, který je větší než vzdálenost bodů F_1, F_2. Číslo a je velikost hlavní poloosy a musí platit $a > 0$ (obr. 4).



Obr. 4: Základní pojmy elipsy

Body $\boldsymbol{F1}, \boldsymbol{F2}$ se nazývají ohniska elipsy. Přímka $\boldsymbol{o_1}$ procházející ohnisky elipsy se nazývá hlavní osa elipsy. Bod $\boldsymbol{S}$ je střed elipsy. Přímka $\boldsymbol{o_2}$, která je kolmá k hlavní ose elipsy a prochází středem elipsy, se nazývá vedlejší osa elipsy. Body $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ se nazývají hlavní vrcholy elipsy a body $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ se nazývají vedlejší vrcholy elipsy. Vzdálenost hlavních vrcholů elipsy $|AB| = \boldsymbol{2a}$ nazýváme délka hlavní osy elipsy. Vzdálenost hlavních vrcholů od středu elipsy $|AS| = |BS| = \boldsymbol{a}$ se nazývá délka hlavní poloosy elipsy. Stejnou vzdálenost jakou mají hlavní vrcholy elipsy od středu elipsy, mají vzdálenosti ohnisek elipsy od jejich vedlejších vrcholů $|F1C| = |F2C| = |F1D| = |F2D| = \boldsymbol{a}$. Vzdálenost vedlejších vrcholů elipsy $|CD| = \boldsymbol{2b}$ nazýváme délka vedlejší osy elipsy. Vzdálenost vedlejších vrcholů od středu elipsy $|CS| = |DS| = \boldsymbol{b}$ se nazývá délka vedlejší poloosy elipsy. Vzdálenost ohniska elipsy od středu elipsy $|F1S| = |F2S| = \boldsymbol{e}$ se nazývá excentricita (výstřednost) elipsy. Vzdálenost ohnisek $F1, F2$ elipsy je rovna $|F1F2| = \boldsymbol{2e}$ a nazývá se ohnisková vzdálenost.

Bod $\boldsymbol{M}$ je libovolný bod elipsy a spojnice $\boldsymbol{F_1M}$ a $\boldsymbol{F_2M}$ nazýváme průvodiče bodu M. Úhel $\angle F_1MF_2$ se nazývá vnitřní úhel průvodičů.

Pravoúhlý trojúhelník $\boldsymbol{F_1SC}$, který nazýváme charakteristickým trojúhelníkem elipsy, vyjadřuje vztah mezi délkou hlavní poloosy a, délkou vedlejší poloosy b a excentricitou e.

$$a^2 = b^2 + e^2$$

Všechny body roviny je možné charakterizovat na základě jejich polohy vzhledem k elipse:

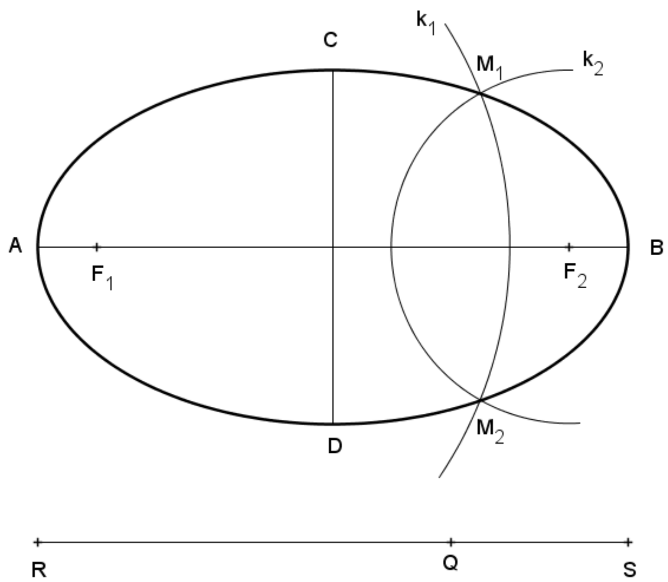
a) $|F_1M| + |F_2M| < 2a$, M je vnitřní bod elipsy;

b) $|F_1M| + |F_2M| = 2a$, M je bod elipsy;

c) $|F_1M| + |F_2M| > 2a$, M je vnější bod elipsy.

2.2.2 **Konstrukce elipsy**

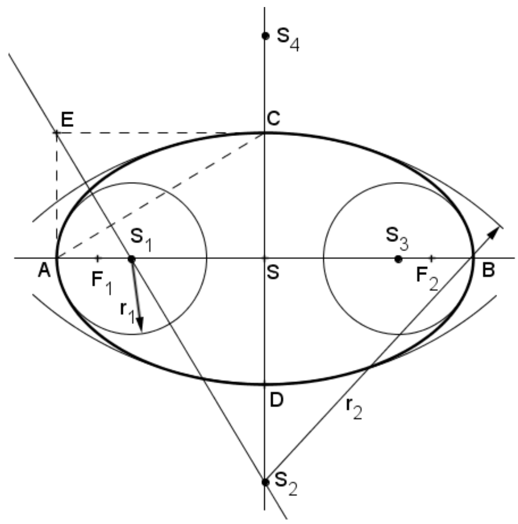
Jednotlivé body elipsy lze sestrojit pomocí tzv. **bodové konstrukce elipsy** (obr. 5). Nechť jsou dány hlavní vrcholy A, B elipsy a její ohniska F_1, F_2. Budeme hledat body, které mají od ohnisek F_1, F_2 konstantní součet vzdáleností rovný $2a$. Sestrojíme si pomocnou úsečku RS, pro kterou platí $|RS| = |AB| = 2a$. Budeme volit libovolně bod $Q \in RS$, jenž úsečku RS rozdělí na dvě části o délkách $|QR|$ a $|QS|$. Sestrojíme kružnice $k_1(F_1, |QR|)$ a $k_2(F_2, |QS|)$. Je zřejmé, že se kružnice k_1, k_2 protínají v bodech elipsy M_1, M_2 ($k_1 \cap k_2 = \{M_1, M_2\}$). Různou volbou bodu Q získáme různé poloměry kružnic a tím i různé body elipsy.



Obr. 5: Bodová konstrukce elipsy

Konstrukce středů hyperoskulačních kružnic

Při rýsování v okolí vrcholů nahrazujeme elipsu oblouky oskulačních kružnic (obr. 6). Tyto kružnice ze všech kružnic nejlépe nahrazují elipsu, jak se dokazuje v diferenciální geometrii. Ukažme si konstrukci těchto kružnic. Body A, S, C doplníme na obdélník $ASCE$ a z vrcholu E spustíme kolmici na úhlopříčku AC. Průsečík této kolmice s hlavní poloosou dává střed S_1 a průsečík této kolmice s vedlejší poloosou dává střed S_2.



Obr. 6: Konstrukce středů hyperoskulačních kružnic

Mějme libovolnou kružnici k se středem $S = [s, 0]$ na hlavní ose elipsy a procházející např. vrcholem A elipsy. Rovnice této kružnice má tvar $(x - s)^2 + y^2 = (a - s)^2$. Pro průsečík $M = [x, y]$ kružnice k s elipsou o rovnici $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ platí vztah

$$x^2e^2 - 2a^2sx - a^2(e^2 - 2as) = 0.$$

Kružnice k bude v okolí vrcholu A nejlépe nahrazovat elipsu, když její průsečíky A a M s elipsou splynou. Toto nastane v případě, že má rovnice jeden dvojnásobný kořen. Diskriminant je roven nule, když je splněn vztah

$$(as - e^2)^2 = 0.$$

Pro poloměr oskulační kružnice v hlavních vrcholech elipsy platí

$$r_1 = \frac{b^2}{a}.$$

Pro poloměr oskulační kružnice ve vedlejších vrcholech platí

$$r_2 = \frac{a^2}{b}.$$

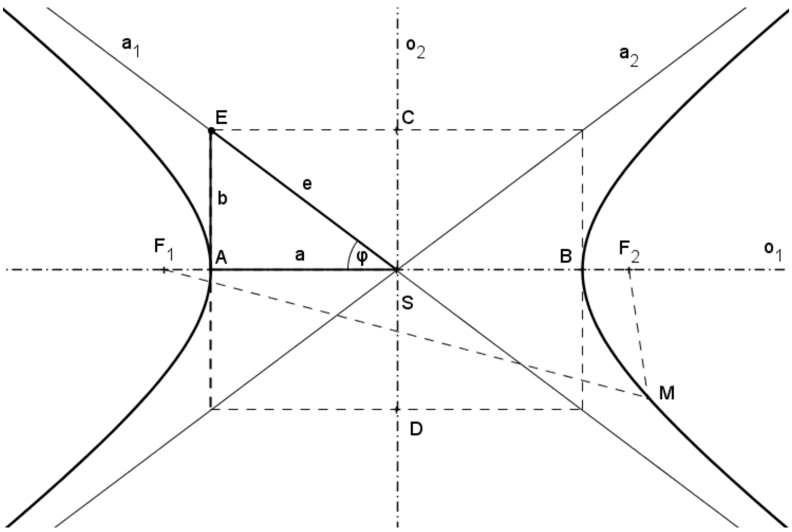
Pro oskulační kružnice ve vrcholech elipsy se někdy používá termín *hyperoskulační kružnice*. Termín oskulační kružnice je pak vyhrazen pro kružnice, které nahrazují elipsu v jejich libovolných bodech.

2.3 Hyperbola

2.3.1 Základní pojmy hyperboly

Definice

Hyperbola je množina všech bodů v rovině, které mají od dvou různých pevně daných bodů F_1, F_2 konstantní kladný rozdíl vzdáleností rovný $2a$, který je menší než vzdálenost bodů F_1, F_2(obr. 7).



Obr. 7: Základní pojmy hyperboly

Body $\boldsymbol{F_1}, \boldsymbol{F_2}$ se nazývají ohniska hyperboly. Přímka $\boldsymbol{o_1}$**,** která prochází ohnisky hyperboly, se nazývá hlavní osa hyperboly. Bod $\boldsymbol{S}$ je střed hyperboly. Přímka $\boldsymbol{o_2}$, která je kolmá k hlavní ose hyperboly a prochází středem hyperboly, se nazývá vedlejší osa hyperboly. Body $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$, které vzniknou jako průsečíky hyperboly s hlavní osou, se nazývají vrcholy hyperboly. Vzdálenosti vrcholů hyperboly $|AB| = \boldsymbol{2a}$ se říká délka hlavní osy hyperboly. Vzdálenost hlavních vrcholů od středu hyperboly $|AS| = |BS| = \boldsymbol{a}$ se nazývá délka hlavní poloosy hyperboly. Vzdálenost $|CS| = |DS| = \mathbf{b}$ se nazývá délka vedlejší poloosy hyperboly. Vedlejší osa hyperboly neobsahuje žádné body hyperboly, protože rozdíl průvodičů vedlejší osy je roven nule. Platí-li $a = b$, nazývá se hyperbola rovnoosá. Vzdálenost ohniska hyperboly od středu hyperboly $|F_1S| = |F_2S| = \boldsymbol{e}$ se nazývá excentricita (délková výstřednost) hyperboly. Vzdálenost ohnisek F_1, F_2 hyperboly je rovna $|F_1\, F_2| = \boldsymbol{2e}$ a nazývá se ohnisková vzdálenost.

Hyperbola není souvislá křivka, skládá se ze dvou navzájem disjunktních částí, které nazýváme větve hyperboly. Aby byl dle definice dodržen kladný rozdíl průvodičů $2a$, platí pro body opačných větví hyperboly opačný rozdíl průvodičů. Bod $\boldsymbol{M}$ je libovolný bod hyperboly a spojnice $\boldsymbol{F_1M}$ a $\boldsymbol{F_2M}$ nazýváme průvodiče bodu M. Pro body M jedné větve platí rozdíl $|F_1M| - |F_2M| = 2a$ a pro body druhé větve platí rozdíl $|F_2M| - |F_1M| = 2a$.

Charakteristický obdélník hyperboly a v něm charakteristický trojúhelník hyperboly dostáváme z průsečíků vrcholových tečen hyperboly (kolmice na hlavní osu hyperboly v bodech A, B) s kružnicí se středem S a poloměrem $\left|SF_{1(2)}\right| = e$.

V charakteristickém trojúhelníku hyperboly platí vztah

$$e^2 = a^2 + b^2.$$

Z tohoto vztahu můžeme vyvodit další vztahy mezi délkou hlavní poloosy a, délkou vedlejší poloosy b a excentricitou e:

- pro excentricitu: $e^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow e = \sqrt{a^2 + b^2}$
- pro délku hlavní poloosy: $a^2 = e^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{e^2 - b^2}$
- pro délku vedlejší poloosy: $b^2 = e^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{e^2 - a^2}$

Kromě délkové výstřednosti (excentricity) používáme ještě další charakteristiku hyperboly, která se nazývá **číselná výstřednost**. Číselnou výstřednost značíme $\boldsymbol{\varepsilon}$ a vypočítáme ji ze vztahu $\varepsilon = \frac{e}{a}$. Hodnota číselné výstřednosti je vždy menší než 1, protože $e > a$.

Pro přesnější určení tvaru hyperboly bývá vhodné sestrojit si **asymptoty** $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}$. Jsou to přímky, které procházejí středem hyperboly S a současně procházejí vrcholy charakteristického obdélníka hyperboly. Asymptoty jsou úhlopříčky charakteristického obdélníka a s hlavní osou hyperboly svírají úhel $\boldsymbol{\varphi}$. Pro tento úhel platí vztah: $\tan \varphi = \frac{b}{a}$.

Všechny body roviny je možné charakterizovat na základě jejich polohy vzhledem k hyperbole:

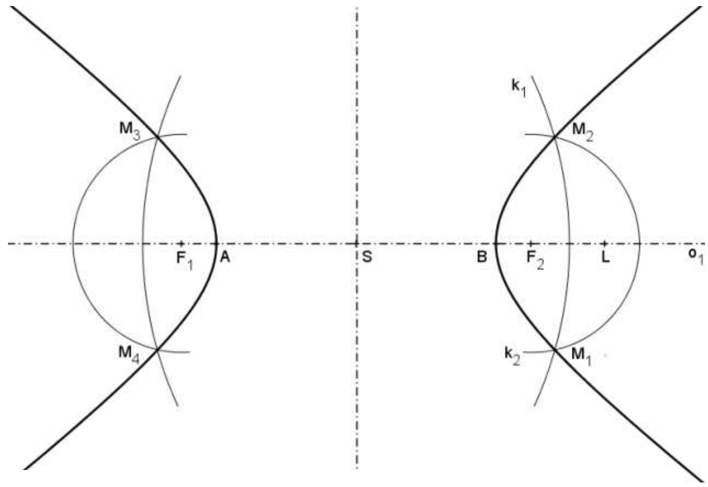
a) $||F_1M| - |F_2M|| > 2a$, M je vnitřní bod hyperboly;

b) $||F_1M| - |F_2M|| = 2a$, M je bod hyperboly;

c) $||F_1M| - |F_2M|| < 2a$, M je vnější bod hyperboly.

2.3.2 Konstrukce hyperboly

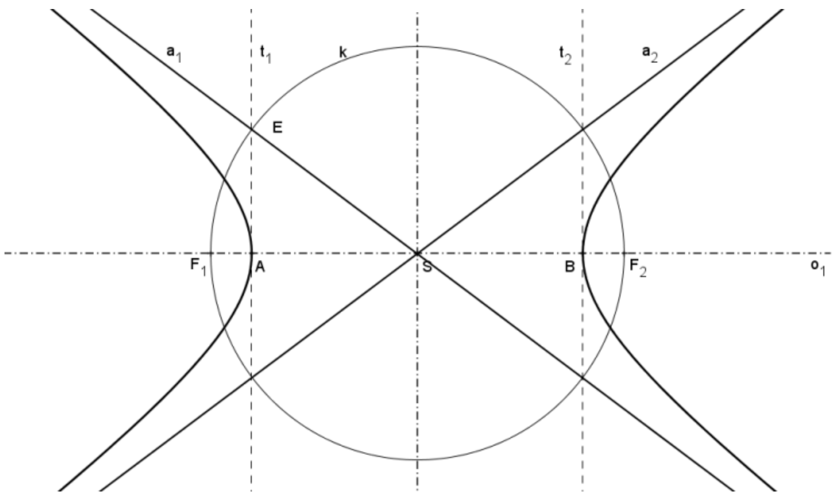
Jednotlivé body hyperboly můžeme sestrojit následujícím způsobem pomocí **bodové konstrukce hyperboly** (obr. 8). Jsou dány hlavní vrcholy A, B hyperboly a její ohniska F_1, F_2. Zvolme na polopřímce opačné k polopřímce $\rightarrow F_1F_2$ libovolný bod L. Z ohnisek F_1, F_2 opišme kruhové oblouky k_1, k_2 o poloměrech $|AL|, |BL|$. Tyto vzdálenosti představují velikosti průvodičů bodů hyperboly, neboť platí $|AL| - |BL| = |AB| = 2a$. Průsečíky kruhových oblouků k_1, k_2 nám dávají body M_1, M_2, M_3, M_4 hyperboly.



Obr. 8: Bodová konstrukce hyperboly

Konstrukce asymptot

V hlavním vrcholu A vztyčíme kolmici. V průsečíku této kolmice s kružnicí se středem S a poloměrem $|SF_{1(2)}| = e$ dostaneme bod E. Bod E je jedním vrcholem charakteristického obdélníka a současně bodem asymptoty. Asymptota a_1 je dána body S a E. Obdobně se provádí konstrukce asymptoty a_2 (obr. 9).



Obr. 9: Konstrukce asymptot

Konstrukce středů hyperoskulačních kružnic

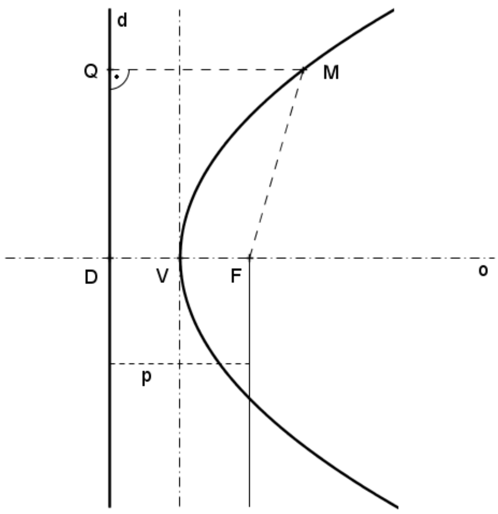
Při konstrukci v okolí vrcholů se nahrazuje hyperbola, obdobně jako v případě elipsy, oblouky oskulačních kružnic. Bodem E, který je jedním vrcholem charakteristického obdélníka a současně bodem asymptoty, vedeme kolmici k asymptotě, která tímto bodem prochází. Průsečík této kolmice s hlavní osou dává střed S_1 oskulační kružnice s poloměrem $|S_1A|$. Obdobně se provede konstrukce středu S_2 druhé oskulační kružnice.

2.4 Parabola

2.4.1 **Základní pojmy paraboly**

Definice

Parabola je množina všech bodů v rovině, které mají od pevného bodu a od dané přímky, která tímto bodem neprochází, stejné vzdálenosti (obr. 10).



Obr. 10: Základní pojmy paraboly

Pevný bod nazýváme **ohnisko** a značí se $\boldsymbol{F}$. Danou přímku nazýváme **řídicí přímkou** a značíme ji $\boldsymbol{d}$. **Parametrem** $\boldsymbol{p}$ se rozumí vzdálenost ohniska od řídicí přímky. V některých učebnicích matematiky se můžeme setkat s pojmem poloparametr. Poloparametr je vzdálenost řídicí přímky od ohniska. Přímka, která je kolmá k řídicí přímce d a prochází ohniskem F, je **osa** $\boldsymbol{o}$ paraboly. Bod $\boldsymbol{V}$ se nazývá **vrchol**. Tento bod leží na ose a půlí vzdálenost bodu F od řídicí přímky d. Spojnice $\boldsymbol{FM}$ ohniska F a bodu M a spojnice $\boldsymbol{QM}$ paty Q kolmice sestrojené z bodu M na řídicí přímku d a bodu M se nazývají **průvodiče bodu** $\boldsymbol{M}$**.**

Parabola dělí rovinu na dvě disjunktní části. První část, v níž leží ohnisko F, budeme nazývat **vnitřní oblast paraboly** a druhou část, která ohnisko F neobsahuje, budeme nazývat **vnější oblast paraboly**. Pro průvodiče bodu L vnější oblasti paraboly platí: $|FL| > |QL|$. Pro průvodiče bodu L vnitřní oblasti paraboly platí: $|FL| < |QL|$.

Nechť bod M je bodem paraboly. Úhel $\angle FMQ$, ve kterém leží průsečík osy o a řídicí přímky d, a příslušný vrcholový úhel se nazývají **vnější úhly průvodičů** bodu M. Vedlejší úhly k těmto vnějším úhlům se nazývají **vnitřní úhly průvodičů** bodu M.

Všechny body roviny je možné charakterizovat na základě jejich polohy vzhledem k parabole:

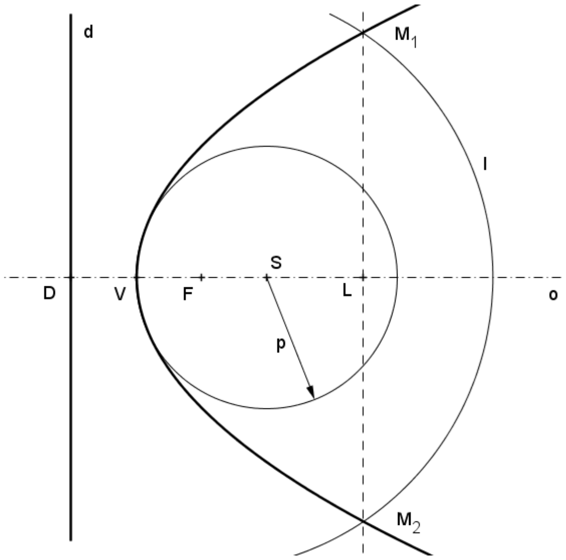
a) |MF| < |Md| , M je vnitřní bod paraboly;

b) |MF| = |Md|, M je bod paraboly;

c) |MF| > |Md|, M je vnější bod paraboly.

2.4.2 Konstrukce paraboly

Libovolný bod paraboly, která je dána ohniskem F a řídicí přímkou d, sestrojíme pomocí tzv. **bodové konstrukce paraboly** (obr. 11). Z ohniska F sestrojíme na řídicí přímku d kolmici o, její patu označíme D. Střed úsečky FD je vrchol V paraboly. Vrchol V leží na ose o a platí pro něj |VF| = |Vd|. Další body paraboly sestrojíme tak, že v libovolném bodě L otevřené polopřímky VF vedeme kolmici k přímce o. Dále narýsujeme kružnici $l(F, |DL|)$. Průsečíky M_1 a M_2 kolmice a kružnice l jsou zjevně body paraboly.



Obr. 11: Bodová konstrukce paraboly

Konstrukce středu hyperoskulační kružnice

Při konstrukci v okolí vrcholu V nahrazujeme parabolu obloukem oskulační kružnice. Její střed S snadno sestrojíme, neboť jak se dokazuje v diferenciální geometrii, poloměr oskulační kružnice paraboly v jejím vrcholu je roven parametru p. Naneseme tedy vzdálenost $p = |Fd|$ na její polopřímku VF a dostaneme střed S oskulační kružnice paraboly.

Nechť k je libovolná kružnice se středem $S = [s, 0]$ na ose paraboly o rovnici $(x - s)^2 + y^2 = s^2$, která má s parabolou $y^2 = 2px$ společný vrchol $V = [0, 0]$. Pro průsečík $M = [x, y]$ kružnice s parabolou platí rovnice

$$x^2 - 2x(p - s) = 0.$$

Průsečík M splyne s vrcholem paraboly v případě, že tato rovnice má jeden dvojnásobný kořen, což nastane právě tehdy, když $s = p$.

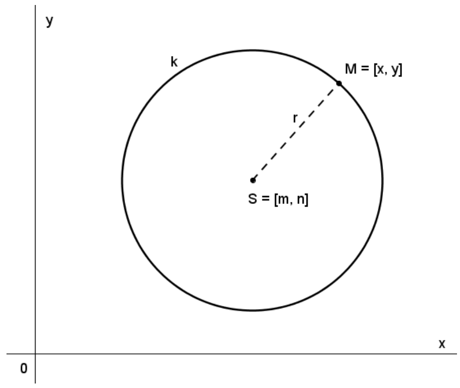
3 Rovnice kuželoseček

3.1 Kružnice

3.1.1 Odvození středové rovnice kružnice

V kartézské soustavě zvolíme dva různé body. Střed S kružnice se souřadnicemi $[m, n]$. Bod M ležící na kružnici se souřadnice $[x, y]$ (obr. 12). Vzdálenost těchto dvou bodů je rovna poloměru kružnice a platí:

$$|SM| = r.$$



Obr. 12: Odvození středové rovnice kružnice

Pomocí Pythagorovy věty odvodíme středovou rovnici kružnice

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2.$$

3.1.2 Středová (osová) rovnice kružnice

$x^2 + y^2 = r^2$ pro $S = [0, 0]$

$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$ pro $S = [m, n]$

3.1.3 Obecná rovnice kružnice

Pomocí úprav středové rovnice kružnice dostaneme obecnou rovnici kružnice.

$x^2 - 2xm + m^2 + y^2 - 2ny + n^2 = r^2$

$x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + m^2 + n^2 - r^2 = 0$

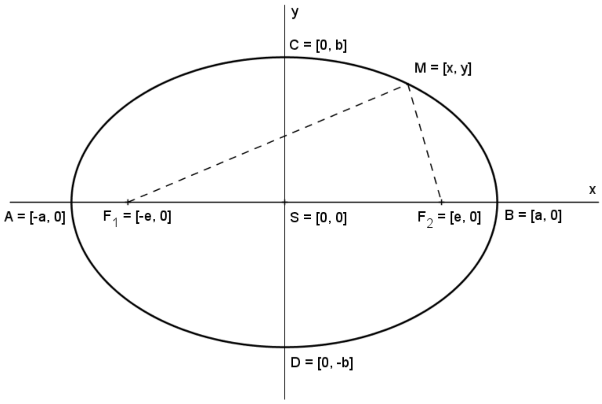
$M = -2mx, N = -2ny, L = m^2 + n^2 - r^2$

$x^2 + y^2 + Mx + Ny + L = 0,$ kde $M^2 + N^2 - 4L > 0$

3.2 Elipsa

3.2.1 **Odvození středové rovnice elipsy**

Zvolíme kartézskou soustavu souřadnic s počátkem ve středu elipsy S a souřadnou osou x v hlavní ose elipsy AB a souřadnou osou y ve vedlejší ose elipsy CD. Jsou-li souřadné osy osami souměrnosti elipsy (tj. počátek je současně středem elipsy), potom říkáme, že elipsa je v tzv. základní poloze. Souřadnice ohnisek označme $F_1 = [-e, 0], F_2 = [e, 0]$ (obr. 13).



Obr. 13: Odvození středové rovnice elipsy

Pro libovolný bod elipsy $M = [x, y]$ platí,

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a.$$

Rozepsáním rovnice dostáváme

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a.$$

Celou rovnici umocníme na druhou

$$2\sqrt{e^4 + x^4 + y^4 - 2e^2x^2 + 2e^2y^2 + 2x^2y^2} = 4a^2 - 2e^2 - 2x^2 - 2y^2.$$

Po dalším umocnění a úpravách dostaneme

$$-4e^2x^2 = 4a^4 - 4a^2e^2 - 4a^2x^2 - 4a^2y^2,$$

$$x^2(a^2 - e^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2).$$

S následným užitím vztahu

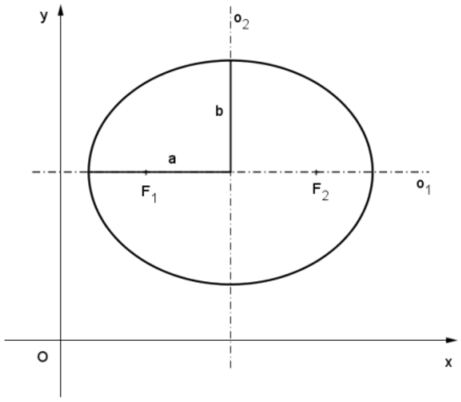
$$a^2 - e^2 = b^2,$$

dostaneme rovnici

$$x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

3.2.2 Středová (osová) rovnice elipsy

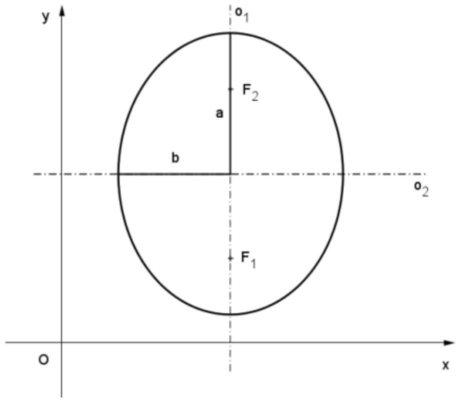


Obr. 14: Elipsa ($\boldsymbol{o_1} \parallel \boldsymbol{x}$)

Hlavní osa elipsy je rovnoběžná s osou x:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{pro } S = [0, 0]$$

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \qquad \text{pro } S = [m, n]$$



Obr. 15: Elipsa ($\boldsymbol{o_1} \parallel \boldsymbol{y}$)

Hlavní osa elipsy je rovnoběžná s osou y:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \qquad \text{pro S} = [0, 0]$$

$$\frac{(y-n)^2}{a^2} + \frac{(x-m)^2}{b^2} = 1 \qquad \text{pro S} = [m, n]$$

3.2.3 Obecná rovnice elipsy

Pomocí úprav středové rovnice elipsy dostaneme obecnou rovnici elipsy.

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

$$b^2(x-m)^2 + a^2(y-n)^2 = a^2b^2$$

$$b^2x^2 - 2mb^2x + b^2m^2 + a^2y^2 - 2na^2y + a^2n^2 - a^2b^2 = 0$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 + (-2mb^2)x + (-2na^2)y + (b^2m^2 + a^2n^2 - a^2b^2) = 0$$

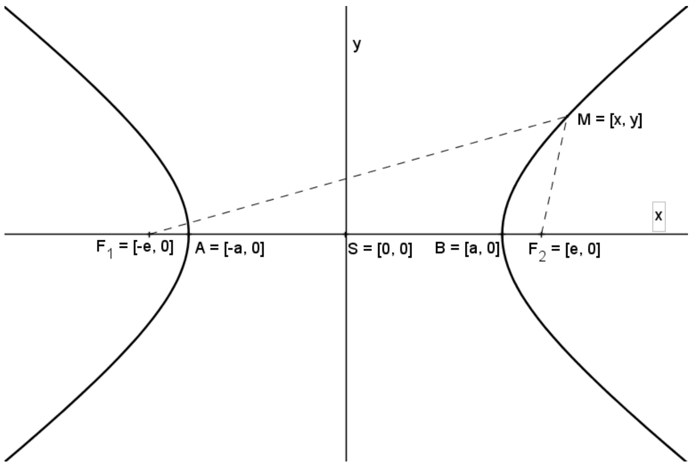
$$A = b^2, B = a^2, C = -2mb^2, D = -2na^2, E = b^2m^2 + a^2n^2 - a^2b^2$$

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0, \qquad A > 0, B > 0$$

3.3 Hyperbola

3.3.1 **Odvození středové rovnice hyperboly**

Zvolíme kartézskou soustavu souřadnic s počátkem ve středu hyperboly S a souřadnou osou x v hlavní ose a souřadnou osou y ve vedlejší ose. Jsou-li souřadné osy osami souměrnosti hyperboly (tj. počátek je současně středem hyperboly), potom říkáme, že hyperbola je v tzv. základní poloze. Souřadnice ohnisek označíme $F_1 = [-\,e, 0], F_2 = [e, 0]$ (obr. 16).



Obr. 16: Odvození středové rovnice hyperboly

Pro libovolný bod hyperboly $M = [x, y]$ platí,

$$\big||F_1M| - |F_2M|\big| = 2a.$$

Rozepsáním rovnice dostáváme

$$\left|\sqrt{(x+e)^2+y^2} - \sqrt{(x-e)^2+y^2}\right| = 2a.$$

Provedeme úpravy podobně jako v případě elipsy

$$-2\sqrt{e^4+x^4+y^4-2e^2x^2+2e^2y^2+2x^2y^2} = 4a^2-2e^2-2x^2-2y^2$$

$$-4e^2x^2 = 4a^4-4a^2e^2-4a^2x^2-4a^2y^2$$

$$-x^2(e^2-a^2)+a^2y^2 = -a^2(e^2-a^2)$$

S následným užitím vztahu

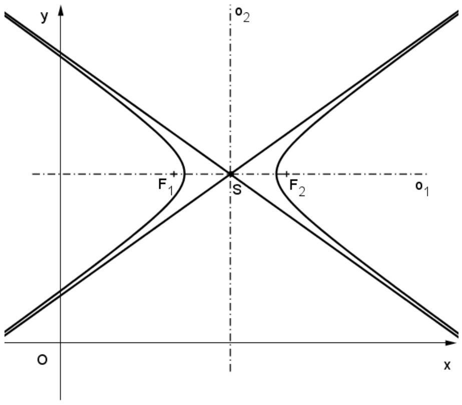
$$e^2 - a^2 = b^2,$$

dostaneme rovnici

$$-x^2b^2 + a^2y^2 = -a^2b^2,$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

3.3.2 Středová (osová) rovnice hyperboly



Obr. 17: Hyperbola ($\boldsymbol{o_1} \parallel \boldsymbol{x}$)

Hlavní osa elipsy je rovnoběžná s osou x:

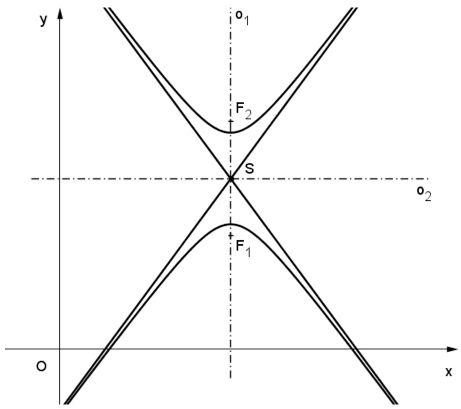
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{pro } S = [0, 0]$$

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \qquad \text{pro } S = [m, n]$$

Rovnice asymptot

$$y = \pm\frac{b}{a}x \qquad \text{pro } S = [0, 0]$$

$$y - n = \pm\frac{b}{a}(x - m) \qquad \text{pro } S = [m, n]$$



Obr. 18: Hyperbola ($\boldsymbol{o_1} \parallel \boldsymbol{y}$)

Hlavní osa elipsy je rovnoběžná s osou y:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \qquad \text{pro } S = [0, 0]$$

$$\frac{(y-n)^2}{a^2} - \frac{(x-m)^2}{b^2} = 1 \qquad \text{pro } S = [m, n]$$

Rovnice asymptot

$$y = \pm\frac{b}{a}x \qquad \text{pro } S = [0, 0]$$

$$y - n = \pm\frac{b}{a}(x - m) \qquad \text{pro } S = [m, n]$$

3.3.3 Obecná rovnice hyperboly

Pomocí úprav středové rovnice hyperboly dostaneme obecnou rovnici hyperboly.

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

$$b^2(x-m)^2 - a^2(y-n)^2 = a^2b^2$$

$$b^2x^2 - 2mb^2x + b^2m^2 - a^2y^2 + 2na^2y - a^2n^2 - a^2b^2 = 0$$

$$b^2x^2 - a^2y^2 + (-2mb^2)x + (2na^2)y + (b^2m^2 - a^2n^2 - a^2b^2) = 0$$

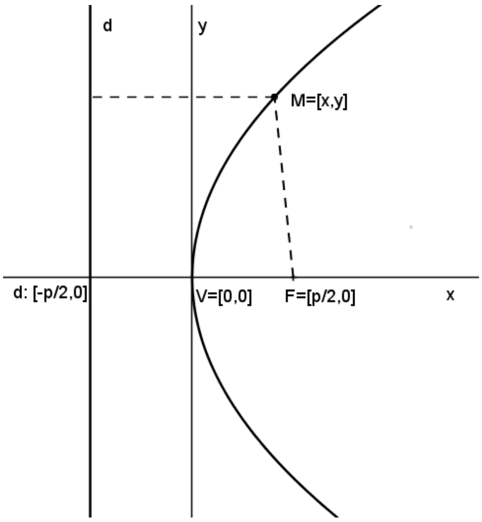
$$A = b^2, B = a^2, C = -2mb^2, D = 2na^2, E = b^2m^2 - a^2n^2 - a^2b^2$$

$$Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + E = 0, \qquad A > 0, B > 0$$

3.4 Parabola

3.4.1 **Odvození rovnice paraboly**

Nyní provedeme odvození rovnice paraboly. Kartézskou soustavu souřadnic zvolíme tak, aby $\mathrm{F} = \left[\frac{\mathrm{p}}{2}, 0\right]$ a rovnice řídicí přímky d byla d: $\mathrm{x} = -\frac{\mathrm{p}}{2}$. Nechť bod $M = [x, y]$ je libovolný bod roviny (obr. 19).



Obr. 19: Odvození rovnice paraboly

Nejprve předpokládejme, že bod M náleží parabole. Potom podle definice platí

$$|MF| = |Md|.$$

Tento vztah rozepíšeme v souřadnicích a dostáváme

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Rovnici umocníme na druhou a po krátké úpravě dostaneme

$$\mathrm{y}^2 = 2\mathrm{px}.$$

Tato rovnice se nazývá kanonická rovnice paraboly.

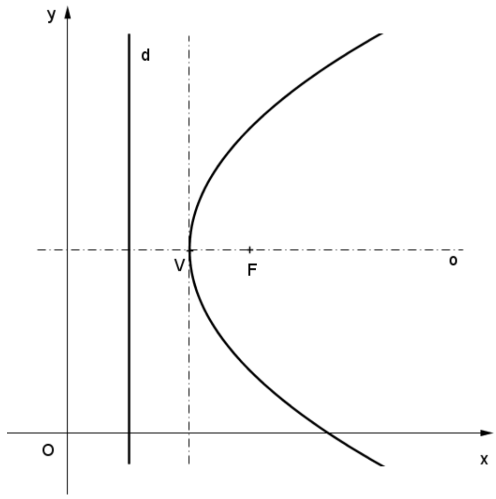
Obráceně předpokládejme, že pro bod $M = [x, y]$ platí rovnice $y^2 = 2px$. Dosazením za y^2 z $y^2 = 2px$ do výrazu

$$|MF| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

dostaneme

$$|MF| = \left|x + \frac{p}{2}\right| = |Md|.$$

3.4.2 **Rovnice paraboly**



Obr. 20: Parabola otevřená doprava ($\boldsymbol{o} \parallel \boldsymbol{x}$)

Vrcholová rovnice:

$y^2 = 2px$ pro $V = [0, 0]$

$(y - n)^2 = 2p(x - m)$ pro $V = [m, n]$

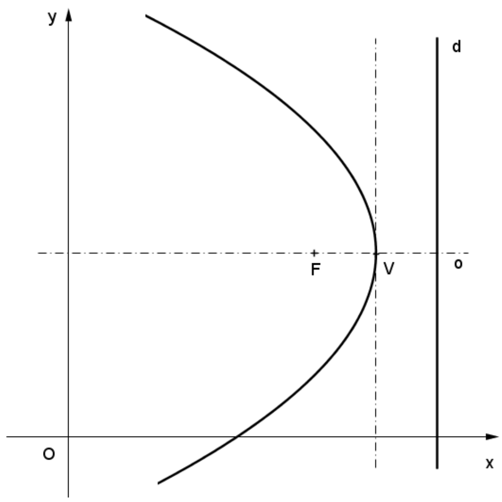
Obecná rovnice:

$d: x = m - \frac{p}{2}$

Ohnisko F:

$F = \left[\frac{p}{2}, 0\right]$ pro $V = [0, 0]$

$F = \left[m + \frac{p}{2}, n\right]$ pro $V = [m, n]$



Obr. 21: Parabola otevřená doleva ($\boldsymbol{o} \parallel \boldsymbol{x}$)

Vrcholová rovnice:

$y^2 = -2px$ pro $V = [0, 0]$

$(y - n)^2 = -2p(x - m)$ pro $V = [m, n]$

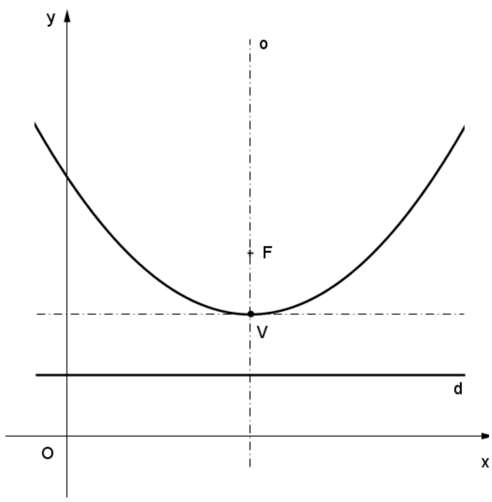
Rovnice řídicí přímky:

$d: x = m + \frac{p}{2}$

Ohnisko F:

$F = \left[-\frac{p}{2}, 0\right]$ pro $V = [0, 0]$

$F = \left[m - \frac{p}{2}, n\right]$ pro $V = [m, n]$



Obr. 22: Parabola otevřená nahoru ($\boldsymbol{o} \parallel \boldsymbol{y}$)

Vrcholová rovnice:

$x^2 = 2py$ pro $V = [0, 0]$

$(x - m)^2 = 2p(y - n)$ pro $V = [m, n]$

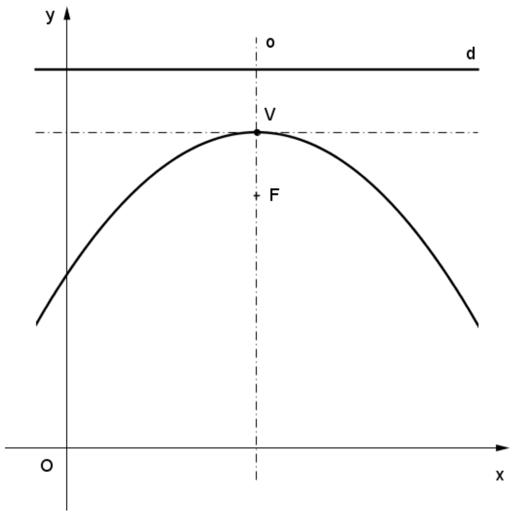
Rovnice řídicí přímky:

$d: y = n - \frac{p}{2}$

Ohnisko F:

$F = \left[0, \frac{p}{2}\right]$ pro $V = [0, 0]$

$F = \left[m, n + \frac{p}{2}\right]$ pro $V = [m, n]$



Obr. 23: Parabola otevřená dolů ($\boldsymbol{o} \parallel \boldsymbol{y}$)

Vrcholová rovnice:

$x^2 = -2py$ pro $V = [0, 0]$

$(x - m)^2 = -2p(y - n)$ pro $V = [m, n]$

Rovnice řídicí přímky:

$d: y = n + \dfrac{p}{2}$

Ohnisko F:

$F = \left[0, -\dfrac{p}{2}\right]$ pro $V = [0, 0]$

$F = \left[m, n - \dfrac{p}{2}\right]$ pro $V = [m, n]$

3.4.3 **Obecná rovnice paraboly**

Vrcholový tvar rovnice paraboly, jejíž osa je rovnoběžná s osou x, lze upravit na obecný tvar:

$(y - n)^2 = 2p(x - m)$

$y^2 - 2ny + n^2 = 2px - 2pm$

$y^2 + (-2p)x + (-2n)y + n^2 + 2pm = 0$

$A = -2p, B = -2n, C = n^2 + 2pm$

$y^2 + Ax + By + C = 0, A \neq 0.$

Vrcholový tvar rovnice paraboly, jejíž osa je rovnoběžná s osou y, lze upravit na obecný tvar:

$(x - m)^2 = 2p(y - n)$

$x^2 - 2mx + m^2 = 2py - 2pn$

$x^2 + (-2m)x + (-2n)y + m^2 + 2pn = 0$

$A = -2p, B = -2n, C = m^2 + 2pn$

$x^2 + Ax + By + C = 0, B \neq 0.$

4 Vyšetřování vzájemné polohy kuželosečky a přímky, dvou kuželoseček

Vzájemnou polohu dvou geometrických útvarů vyšetřujeme v analytické geometrii řešením soustavy rovnic, resp. nerovnic, které jsou analytickým vyjádřením těchto útvarů. Řešením soustavy získáme souřadnice bodů průniku těchto útvarů.

4.1 Vzájemná poloha kuželosečky a přímky v rovině

Soustava rovnic dané kuželosečky (kvadratická rovnice) a dané přímky (lineární rovnice) se řeší takto: z lineární rovnice vyjádříme neznámou x, resp. y, kterou dosadíme do kvadratické rovnice. Tímto eliminujeme jednu neznámou a dostaneme kvadratickou rovnici pro druhou neznámou. Pokud má řešená soustava rovnic v R^2 právě dvě řešení, má přímka s kuželosečkou právě dva společné body a jejich průnikem je dvojbodová množina. Pokud má řešená soustava právě jedno řešení, má přímka s kuželosečkou právě jeden společný bod a jejich průnikem je jednobodová množina. Nemá-li řešená soustava žádné řešení, nemá kuželosečka s přímkou žádný společný bod a jejich průnikem je množina prázdná.

Vnitřní oblastí kružnice $k(S, r)$ se nazývá množina bodů M roviny, pro které platí $|SM| < r$ (obr. 24).

Vnitřní oblastí elipsy s ohnisky F_1, F_2 a s hlavní osou délky $2a > |F_1F_2|$ nazýváme množinu bodů M roviny, pro které platí $|F_1M| + |F_2M| < 2a$ (obr. 25).

Pro hyperbolu s ohnisky F_1, F_2 a s hlavní osou délky $2a < |F_1F_2|$ **vnitřní oblastí jedné větve hyperboly** nazýváme množinu bodů M roviny, pro které platí $|F_1M| - |F_2M| > 2a$. **Vnitřní oblastí druhé větve hyperboly** nazýváme množinu bodů M roviny, pro které platí $|F_2M| - |F_1M| > 2a$ (obr. 26).

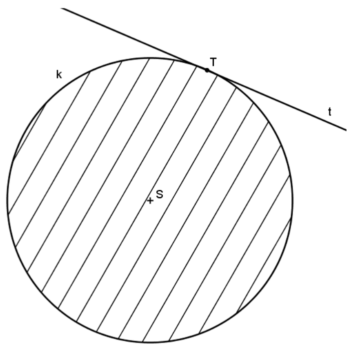
Vnitřní oblastí paraboly s ohniskem F a řídicí přímkou d nazýváme množinu bodů M roviny, pro které platí $|FM| < v(Md)$ (obr. 27).

Sečna *s* kuželosečky je přímka, která má s kuželosečkou buď právě dva společné body, nebo obsahuje právě jeden její bod, ale není tečnou kuželosečky (tj. obsahuje body vnitřní oblasti kuželosečky).

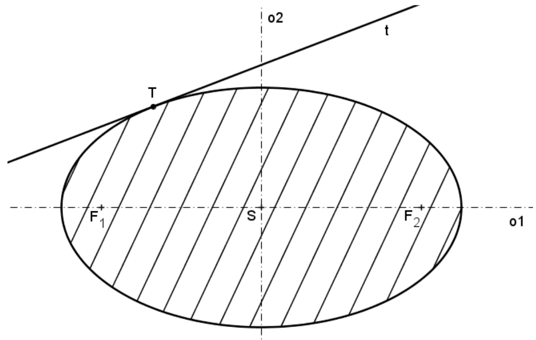
Tečna *t* kuželosečky je přímka, která má s kuželosečkou právě jeden společný bod *T* a neobsahuje žádný bod vnitřní oblasti kuželosečky. Bodu T se říká **bod dotyku (dotykový bod)** kuželosečky a přímky.

Vnější přímka *p* kuželosečky je přímka, která nemá s kuželosečkou žádný společný bod. Průnikem kuželosečky s vnější přímkou je množina prázdná.

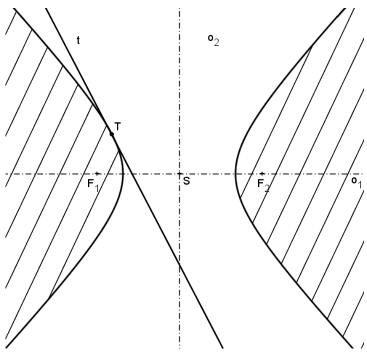
Všechny možné případy vzájemné polohy elipsy a přímky jsou na obr. 28.



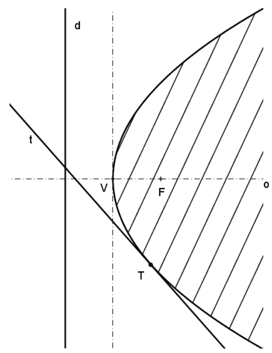
Obr. 24: Vnitřní oblast kružnice



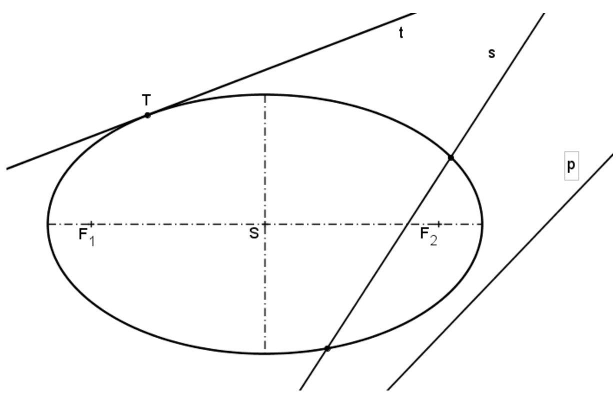
Obr. 25: Vnitřní oblast elipsy



Obr. 26: Vnitřní oblast hyperboly



Obr. 27: Vnitřní oblast paraboly



Obr. 28: Vzájemná poloha elipsy a přímky

4.2 Rovnice tečen ke kuželosečkám

Nechť je dána středová kuželosečka (kružnice, elipsa, hyperbola) rovnicí ve středovém tvaru, resp. parabola ve vrcholovém tvaru, pak rovnice tečny ke kuželosečce vedené daným bodem dotyku $T = [x_0, y_0]$ mají tvary uvedené v tabulce.

Rovnice kuželosečky	Rovnice tečny kuželosečky v bodě dotyku $T = [x_0, y_0]$
Středový tvar rovnice kružnice $(x-m)^2 + (y^2-n)^2 = r^2$	Rovnice tečny kružnice v bodě dotyku $T = [x_0, y_0]$ $(x_0-m)(x-m)^2 + (y_0-n)(y-n) = r^2$
Středový tvar rovnice elipsy $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ $\frac{(y-n)^2}{a^2} + \frac{(x-m)^2}{b^2} = 1$	Rovnice tečny elipsy v bodě dotyku $T = [x_0, y_0]$ $\frac{(x_0-m)(x-m)}{a^2} + \frac{(y_0-n)(y-n)}{b^2} = 1$ $\frac{(y_0-n)(y-n)}{a^2} + \frac{(x_0-m)(x-m)}{b^2} = 1$
Středový tvar rovnice hyperboly $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ $\frac{(y-n)^2}{a^2} - \frac{(x-m)^2}{b^2} = 1$	Rovnice tečny hyperboly v bodě dotyku $T = [x_0, y_0]$ $\frac{(x_0-m)(x-m)}{a^2} - \frac{(y_0-n)(y-n)}{b^2} = 1$ $\frac{(y_0-n)(y-n)}{a^2} - \frac{(x_0-m)(x-m)}{b^2} = 1$
Vrcholový tvar rovnice paraboly $(x-m)^2 = 2p(y-n)$ $(x-m)^2 = -2p(y-n)$ $(y-n)^2 = 2p(x-m)$ $(y-n)^2 = -2p(x-m)$	Rovnice tečny paraboly v bodě dotyku $T = [x_0, y_0]$ $(x_0-m)(x-m) = p(y_0-n) + p(y-n)$ $(x_0-m)(x-m) = -p(y_0-n) - p(y-n)$ $(y_0-n)(y-n) = p(x_0-m) + p(x-m)$ $(y_0-n)(y-n) = -p(x_0-m) - p(x-m)$

4.3 Vzájemná poloha dvou kuželoseček

Úlohy na určení průniku dvou kuželoseček se řeší v analytické geometrii řešením soustavy jejich rovnic, tj. kvadratických rovnic se dvěma neznámými x, y.

5 Řešené příklady

5.1 Kružnice

Příklad 1

Určete souřadnice středu S a poloměr r kružnice dané obecnou rovnicí:

$x^2 + y^2 - 64 = 0$

$x^2 + y^2 = 64$

$S = [0, 0], r = 8$

Příklad 2

Určete souřadnice středu S a poloměr r kružnice dané obecnou rovnicí:

$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 24 = 0$

$x^2 - 8x + y^2 - 6y = -24$

$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = -24 + 16 + 9$

$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 1$

$S = [4, 3], r = 1$

Příklad 3

Určete středovou rovnici kružnice, je-li dán její střed S a prochází bodem A. Pak ji převeďte na obecný tvar: $S = [-5, 1], A = [-6, -2]$

1. způsob:

Poloměr r kružnice vypočítáme jako vzdálenost bodů S a A,

tj. r = |SA| = $\sqrt{(-6 + 5)^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$.

Rovnice kružnice má pak tvar

$(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 10$

$x^2 + 10x + 25 + y^2 - 2y + 1 = 10$

$x^2 + y^2 + 10x - 2y + 16 = 0$

2. způsob:

Souřadnice středu S dosadíme do středové rovnice kružnice:

$(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = r^2$

Bod A leží na kružnici, proto souřadnice bodu A dosadíme to této rovnice:

$(-6 + 5)^2 + (-2 - 1)^2 = r^2$

$1 + 9 = r^2$

$10 = r^2$

Rovnice kružnice má potom tvar $(x+5)^2+(y-1)^2=10$, kterou převedeme na obecný tvar $x^2+y^2+10x-2y+16=0$.

Příklad 4

Určete středovou rovnici kružnice o průměru CD a upravte ji na obecný tvar: $C=[0,-5], D=[4,1]$.

$$S=\frac{C+D}{2}=[2,-2], r=|CS|=\sqrt{(2-0)^2+(-2+5)^2=}\sqrt{13}$$

$$(x-2)^2+(y+2)^2=13$$

$$x^2-4x+4+y^2+4y+4-13=0$$

$$x^2+y^2-4x+4y-5=0$$

Příklad 5

Napište středovou rovnici kružnice k, která prochází body $A=[5,1], B=[0,6]$, $C=[4,-2]$. Určete souřadnice středu S a poloměr r.

Body A, B, C leží na kružnici, proto jejich souřadnice postupně dosadíme do obecné rovnice kružnice $x^2+y^2+Mx+Ny+L=0$

$A\in k$: $\quad 5^2+1^2+M\cdot 5+N\cdot 1+L=0$

$B\in k$: $\quad 0^2+6^2+M\cdot 0+N\cdot 6+L=0$

$C\in k$: $\quad 4^2+(-2)^2+M\cdot 4+N\cdot(-2)+L=0$

Rovnice upravíme a dostaneme soustavu tří lineárních rovnic o třech neznámých M, N, L, tj. koeficienty hledané rovnice kružnice:

$$5M+N+L=-26$$

$$6N+L=-36$$

$$4M-2N+L=-20$$

Řešením této soustavy jsou koeficienty $M=0, N=-2,\ L=-24$. Tyto koeficienty dosadíme do obecné rovnice kružnice a dostaneme $x^2+y^2-2y-24=0$. Rovnici převedeme pomocí úprav na středový tvar.

$$x^2+(y^2-2y)-24=0$$

$$x^2+(y-1)^2-1=24$$

$$x^2+(y-1)^2=25$$

Ze středové rovnice určíme souřadnice středu $S=[0,1]$ a poloměr r = 5.

Příklad 6

Napište rovnici kružnice k, která prochází 2 danými body A = [3, 5], B = [2, 6] a má střed na dané přímce p: $2x + 3y - 4 = 0$.

$A \in k$: $(3+m)^2 + (5-n)^2 = r^2$

$B \in k$: $(2+m)^2 + (6-n)^2 = r^2$

$S \in p$: $2m + 3n - 4 = 0$

$$(3+m)^2 + (5-n)^2 = (2+m)^2 + (6-n)^2$$

$$9 - 6m + m^2 + 25 - 10n + n^2 = 4 - 4m + m^2 + 36 - 12n + n^2$$

$$-2m + 2n - 6 = 0$$

$$2m + 3n - 4 = 0$$

$$5n = 10$$

$$n = 2$$

$$2m + 6 - 4 = 0$$

$$m = -1$$

$$(3+1)^2 + (5-2)^2 = r^2$$

$$25 = r^2$$

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$$

Příklad 7

Napište rovnici kružnice, která se dotýká obou souřadných os a prochází bodem A = [-2, -4].

Vzdálenost středu S je od obou os stejná, proto souřadnice středu můžeme psát S = [m, m]. Mezi souřadnicemi středu m a poloměrem r platí $m = -r$.

$$(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$$

$$(-2+r)^2 + (-4+r)^2 = r^2$$

$$4 - 4r + r^2 + 16 - 8r + r^2 = r^2$$

$$r^2 - 12r + 20 = 0$$

$$(r-2) \cdot (r-10) = 0$$

$$r_1 = 2, r_2 = 10$$

Souřadnice středu $\mathrm{S}_1 = [-2, -2]$ a poloměr $\mathrm{r}_1 = 2$

$$(\mathrm{x}+2)^2 + (\mathrm{y}+2)^2 = 4$$

$$\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + 4\mathrm{x} + 4\mathrm{y} + 4 = 0$$

Souřadnice středu $S_2 = [-10, -10]$ a poloměr $r_2 = 10$

$$(x + 10)^2 + (y + 10)^2 = 100$$

$$x^2 + y^2 + 20x + 20y + 100 = 0$$

Příklad 8

Rozhodněte o vzájemné poloze bodů $A = [2, 4], B = [7, 2], C = [1, 3]$ a kružnice $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$.

A: $(2 - 2)^2 + (4 + 1)^2 = 25$

$25 = 25$ A leží na kružnici

B: $(7 - 2)^2 + (2 + 1)^2 = 25$

$34 > 25$ B leží vně kružnice

C: $(1 - 2)^2 + (3 + 1)^2 = 25$

$17 < 25$ C leží uvnitř kružnice

5.2 Elipsa

Příklad 9

Určete souřadnice středu, délky poloos, excentricitu a souřadnice ohnisek elipsy, která je dána obecnou rovnicí $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$.

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$S = [0, 0], a = 3, b = 2, e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$

$F_1 = [-\sqrt{5}, 0], F_2 = [\sqrt{5}, 0]$

Příklad 10

Určete souřadnice středu, délky poloos, excentricitu a souřadnice ohnisek elipsy, která je dána obecnou rovnicí $9x^2 + 25y^2 + 54x + 100y - 44 = 0$.

$$9x^2 + 54x + 25y^2 + 100y = 44$$

$$9(x^2 + 6x) + 25(y^2 + 4y) = 44$$

$$9(x + 3)^2 + 25(y + 2)^2 = 44 + 81 + 100$$

$$9(x + 3)^2 + 25(y + 2)^2 = 225$$

$$\frac{(x + 3)^2}{25} + \frac{(y + 2)^2}{9} = 1$$

$S = [-3, -2], a = 5, b = 3, e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$

$F_1 = [-7, -2], F_2 = [1, -2]$

Příklad 11

Určete souřadnice středu, délky poloos, excentricitu a souřadnice ohnisek elipsy, která je dána obecnou rovnicí $4x^2 + 5y^2 - 32x + 20y + 84 = 0$.

$$4x^2 - 32x + 5y^2 + 20y = -84$$
$$4(x^2 - 8x) + 5(y^2 + 4y) = -84$$
$$4(x - 4)^2 + 5(y + 2)^2 = -84 + 64 + 20$$
$$4(x - 4)^2 + 5(y + 2)^2 = 0$$

Zadaná obecná rovnice není rovnicí elipsy.

Příklad 12

Určete středovou a obecnou rovnici elipsy se středem $S = [-6, 2]$ a jejím bodem $K = [2, 5]$, je-li $a = 10, o_1 \parallel x$.

Do rovnice elipsy $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ dosadíme souřadnice středu elipsy $S = [-6, 2]$ a délku hlavní poloosy $a = 10$.

$$\frac{(x+6)^2}{10^2} + \frac{(y-2)^2}{b^2} = 1$$

Bod K leží na elipse, proto jeho souřadnice musí vyhovovat této rovnici.

$$\frac{(2+6)^2}{10^2} + \frac{(5-2)^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{64}{100} + \frac{9}{b^2} = 1$$
$$\frac{9}{b^2} = 1 - \frac{64}{100}$$
$$\frac{9}{b^2} = \frac{36}{100}$$
$$\frac{1}{b^2} = \frac{4}{100}$$
$$b^2 = 25$$

Středovou rovnici elipsy upravíme na obecný tvar.

$$\frac{(x+6)^2}{100} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$$
$$(x+6)^2 + 4(y-2)^2 = 100$$
$$x^2 + 12x + 36 + 4y^2 - 16y + 16 = 100$$
$$x^2 + 4y^2 + 12x - 16y - 48 = 0$$

Obecná rovnice elipsy je $x^2 + 4y^2 + 12x - 16y - 48 = 0$.

Příklad 13

Najděte rovnici elipsy, která má ohniska $F_1 = [-4, 3], F_2 = [2, 3]$ a vrchol na vedlejší ose je $C = [-1, 7]$.

$S = \frac{F_1 + F_2}{2} = [-1, 3]$

$|F_1F_2| = 2e = \sqrt{(2+4)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{36} = 6,\ e = 3$

$|SC| = b = \sqrt{(-1+1)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{16} = 4$

$a = \sqrt{b^2 + e^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$

$$\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$$

$$16(x+1)^2 + 25(y-3)^2 = 400$$

$$16(x^2 + 2x + 1) + 25(y^2 - 6y + 9) = 400$$

$$16x^2 + 32x + 16 + 25y^2 - 150y + 225 = 400$$

$$16x^2 + 25y^2 + 32x - 150y - 159 = 0$$

Příklad 14

Najděte rovnici elipsy, která má za vrcholy body $C = [5, 7]$ a $D = [-3, 7]$ na vedlejší ose a ohnisko je $F_1 = [1, 4]$.

$S = \frac{C + D}{2} = [1, 7]$

$|CD| = 2b = \sqrt{(-3-5)^2 + (7-7)^2} = \sqrt{64} = 8,\ b = 4$

$|SF_1| = e = \sqrt{(1-1)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{9} = 3$

$a = \sqrt{b^2 + e^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$

$$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-7)^2}{25} = 1$$

$$25(x-1)^2 + 16(y-7)^2 = 400$$

$$25(x^2 - 2x + 1) + 16(y^2 - 14y + 49) = 400$$

$$25x^2 - 50x + 25 + 16y^2 - 224y + 784 = 400$$

$$25x^2 + 16y^2 - 50x - 224y + 409 = 0$$

Příklad 15

Najděte rovnici elipsy, která se dotýká obou souřadných os a má střed $S = [6, 4]$.

Ze souřadnic středu S určíme, že $a = 6$ a $b = 4$

$$\frac{(x-6)^2}{36}+\frac{(y-4)^2}{16}=1$$
$$16(x-6)^2+36(y-4)^2=576$$
$$16x^2-192x+576+36y^2-288y+576=576$$
$$4x^2+9y^2-48x-72y+144=0$$

Příklad 16

Rozhodněte o vzájemné poloze bodů $A=[-3,1], B=[-5,-3], C=[4,6]$ a elipsy $9\mathrm{x}^2+25\mathrm{y}^2-450=0$.

A: $9\cdot(-3)^2+25\cdot 1^2-450=0$

$-344<0$ A leží uvnitř elipsy

B: $9\cdot(-5)^2+25\cdot(-3)^2-450=0$

$0=0$ B leží na elipse

C: $9\cdot 4^2+25\cdot 6^2-450=0$

$594>0$ C leží vně elipsy

5.3 Hyperbola

Příklad 17

Napište středovou a obecnou rovnici hyperboly, je-li dáno: $S=[0,0], a=3, b=2,\ o_1 \parallel x$.

$$\frac{x^2}{\mathrm{a}^2}-\frac{y^2}{\mathrm{b}^2}=1$$
$$\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{2^2}=1$$
$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$$
$$4x^2-9y^2-36=0$$

Příklad 18

Napište středovou a obecnou rovnici hyperboly, je-li dáno: $S=[0,0], a=5, b=6,\ o_1 \parallel y$.

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$
$$\frac{y^2}{5^2}-\frac{x^2}{6^2}=1$$
$$\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{36}=1$$
$$25x^2-36y^2+900=0$$

Příklad 19

Určete obecný tvar rovnice hyperboly, je-li dáno: $S = [-1, 1], a = 4, e = 5,\ o_1 \parallel x$.

Určíme délku vedlejší poloosy: $b^2 = \sqrt{e^2 - a^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$

$$\frac{(x-m)^2}{\mathrm{a}^2} - \frac{(y-n)^2}{\mathrm{b}^2} = 1$$

$$\frac{(x+1)^2}{4^2} - \frac{(y-1)^2}{3^2} = 1$$

$$9(x+1)^2 - 16(y-1)^2 = 144$$

$$9(x^2 + 2x + 1) - 16(y^2 - 2y + 1) = 144$$

$$9x^2 + 18x + 9 - 16y^2 + 32y - 16 = 144$$

$$9x^2 - 16y^2 + 18x + 32y - 151 = 0$$

Příklad 20

Určete obecný tvar rovnice hyperboly, je-li dáno: $S = [-5, 4], a = \sqrt{2}, b = \sqrt{6},\ o_1 \parallel y$.

$$\frac{(y-n)^2}{\mathrm{a}^2} - \frac{(x-m)^2}{\mathrm{b}^2} = 1$$

$$\frac{(y-4)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} - \frac{(x+5)^2}{\left(\sqrt{6}\right)^2} = 1$$

$$6(y-4)^2 - 2(x+5)^2 = 12$$

$$6(y^2 - 8y + 16) - 2(x^2 + 10x + 25) = 12$$

$$6y^2 - 48y + 96 - 2x^2 - 20x - 50 = 12$$

$$x^2 - 3y^2 + 10x + 24y - 17 = 0$$

Příklad 21

Určete středovou rovnici hyperboly se středem $S = [0, 0]$ a jejím bodem $L = [5, 3]$, je-li dáno: $b = 4\ \ o_1 = x$.

$$\frac{x^2}{\mathrm{a}^2} - \frac{y^2}{\mathrm{b}^2} = 1$$

$$\frac{5^2}{\mathrm{a}^2} - \frac{3^2}{4^2} = 1$$

$$\frac{25}{\mathrm{a}^2} = 1 + \frac{3^2}{4^2}$$

$$\frac{25}{\mathrm{a}^2} = \frac{25}{16}$$

$$\mathrm{a}^2 = 16$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Příklad 22

Určete středovou rovnici hyperboly se středem $S = [-4, -1]$ a jejím bodem $L = [2, -5]$, je-li dáno: $a = 2\sqrt{5}, o_1 \parallel x$.

$$\frac{(x-m)^2}{\mathrm{a}^2} - \frac{(y-n)^2}{\mathrm{b}^2} = 1$$

$$\frac{(2+4)^2}{\left(2\sqrt{5}\right)^2} - \frac{(-5+1)^2}{\mathrm{b}^2} = 1$$

$$\frac{36}{20} - \frac{16}{\mathrm{b}^2} = 1$$

$$-\frac{16}{\mathrm{b}^2} = 1 - \frac{36}{20}$$

$$-\frac{16}{\mathrm{b}^2} = -\frac{16}{20}$$

$$\mathrm{b}^2 = 20$$

$$\frac{(x+4)^2}{20} - \frac{(y+1)^2}{20} = 1$$

Příklad 23

Určete středovou rovnici hyperboly se středem $S = [2, -7]$ a jejím bodem $L = [-4, 0]$, je-li dáno: $a = 2, o_1 \parallel y$.

$$\frac{(y-n)^2}{a^2} - \frac{(x-m)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(0+7)^2}{2^2} - \frac{(-4-2)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{49}{4} - \frac{36}{b^2} = 1$$

$$-\frac{36}{b^2} = 1 - \frac{49}{4}$$

$$-\frac{36}{b^2} = -\frac{45}{4}$$

$$\mathrm{b}^2 = 3{,}2$$

$$\frac{(y+7)^2}{4} - \frac{(x-2)^2}{3{,}2} = 1$$

Příklad 24

Určete souřadnice středu hyperboly $x^2 - 2y^2 + 8y - 16 = 0$, délky jejich poloos, excentricitu a rovnice asymptot.

$$x^2 - 2y^2 + 8y - 16 = 0$$
$$x^2 - 2(y^2 - 4y) = 16$$
$$x^2 - 2(y-2)^2 = 16 - 8$$
$$\frac{x^2}{8} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

$S = [0, 2], a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, b = 2, e = \sqrt{8+4} = 2\sqrt{3}$

Rovnice asymptot:

$$y - n = \pm\frac{b}{a}(x - m)$$
$$y - 2 = \pm\frac{2}{2\sqrt{2}}(x - 0)$$
$$y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x + 2$$

Rovnice asymptot jsou $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + 2$ a $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + 2$.

Příklad 25

Určete souřadnice středu hyperboly $4x^2 - y^2 + 32x - 4y + 24 = 0$, délky jejich poloos, excentricitu a rovnice asymptot.

$$4x^2 - y^2 + 32x - 4y + 24 = 0$$
$$4(x^2 + 8x) - (y^2 + 4y) = -24$$
$$4(x+4)^2 - (y+2)^2 = -24 + 64 - 4$$
$$\frac{(x+4)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{36} = 1$$

$S = [-4, -2], a = 3, b = 6, e = \sqrt{9+36} = 3\sqrt{5}$

Rovnice asymptot:

$$y - n = \pm\frac{b}{a}(x - m)$$
$$y + 2 = \pm\frac{6}{3}(x + 4)$$
$$y = \pm 2(x + 4) - 2$$

Rovnice asymptot jsou $y = 2x + 6$ a $y = -2x - 10$.

Příklad 26

Rozhodněte o vzájemné poloze bodů $A = [3,0], B = [4,2], C = [-4,1]$ a hyperboly $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$.

A: $4 \cdot (-4)^2 - 9 \cdot 1^2 - 36 = 0$

$19 > 0$ A leží vně hyperboly

B: $4 \cdot 3^2 - 9 \cdot 0^2 - 36 = 0$

$0 = 0$ B leží na hyperbole

C: $4 \cdot 4^2 - 9 \cdot 2^2 - 36 = 0$

$-8 < 0$ C leží uvnitř hyperboly

5.4 Parabola

Příklad 27

Určete souřadnice vrcholu, ohniska, parametr a rovnici řídicí přímky paraboly $(y-2)^2 = 10(x+1)$.

$$V = [-1,2], F = \left[m + \frac{p}{2}, n\right] = \left[-1 + \frac{5}{2}; 2\right] = [1{,}5; 2]$$

$$p = \frac{10}{2} = 5, d\colon x = m - \frac{p}{2} = -1 - \frac{5}{2} = -3{,}5$$

Příklad 28

Určete souřadnice vrcholu, ohniska, parametr a rovnici řídicí přímky paraboly $(x+6)^2 = 8(y-3)$.

$$V = [-6,3], F = \left[m, n + \frac{p}{2}\right] = \left[-6; 3 + \frac{4}{2}\right] = [-6; 5]$$

$$p = \frac{8}{2} = 4, d\colon y = n - \frac{p}{2} = 3 - \frac{4}{2} = 1$$

Příklad 29

Určete souřadnice vrcholu, ohniska, parametr a rovnici řídicí přímky paraboly $(x-3)^2 = -(y+4)$.

$$V = [3,-4], F = \left[m, n - \frac{p}{2}\right] = \left[3; -4 - \frac{0{,}5}{2}\right] = [3; -4{,}25]$$

$$p = \frac{1}{2} = 0{,}5, d\colon y = n + \frac{0{,}5}{2} = -4 + \frac{0{,}5}{2} = -3{,}75$$

Příklad 30

Určete souřadnice vrcholu, ohniska, parametr a rovnici řídicí přímky paraboly $(y+7)^2 = -6(x+2)$.

$$V = [-2, -7], F = \left[m - \frac{p}{2}, n\right] = \left[-2 - \frac{3}{2}; -7\right] = [-3{,}5; -7]$$

$$p = \frac{6}{2} = 3, d: x = m + \frac{p}{2} = -2 + \frac{3}{2} = -0{,}5$$

Příklad 31

Určete obecné rovnice parabol.

$$(x+4)^2 = -8(y-1)$$
$$x^2 + 8x + 16 = -8y + 8$$
$$x^2 + 8x + 8y + 8 = 0$$

$$(y-6)^2 = -2(x+1)$$
$$y^2 - 12y + 36 = -2x - 2$$
$$y^2 + 2x - 12y + 38 = 0$$

Příklad 32

Napište vrcholovou rovnici paraboly s vrcholem $V = [0, 0]$ a jejím bodem $M = [3, -6]$, je-li dáno $F \in x^+$.

$$y^2 = 2px$$
$$(-6)^2 = 2p \cdot 3$$
$$p = \frac{36}{6} = 6$$
$$y^2 = 12x$$

Příklad 33

Napište vrcholovou a obecnou rovnici paraboly s vrcholem $V = [-4, 2]$ a jejím bodem $M = [1, -3]$, je-li $o \parallel x$.

$$(y-n)^2 = 2p(x-m)$$
$$(-3-2)^2 = 2p(1+4)$$
$$25 = 10p$$
$$p = 2{,}5$$

Vrcholová rovnice paraboly: $(y-2)^2 = 5(x+4)$

Obecná rovnice paraboly: $y^2 - 5x - 4y - 16 = 0$.

Příklad 34

Napište vrcholovou a obecnou rovnici paraboly s vrcholem $V = [1, -5]$ a jejím bodem $M = [-3, -7]$, je-li $o \parallel y$.

$$(x-m)^2 = -2p(y-n)$$
$$(-3-1)^2 = 2p(-7+5)$$
$$16 = -4p$$
$$p = 4$$

Vrcholová rovnice paraboly: $(x-1)^2 = -8(y+5)$

Obecná rovnice paraboly: $x^2 - 2x + 8y + 41 = 0$.

Příklad 35

Určete rovnici paraboly, jsou-li dány její body $K = [-4, 3], L = [2, 9], M = [-2{,}5; 6]$ a $o \| x$.

Body K, L, M leží na parabole, proto jejich souřadnice postupně dosadíme do obecné rovnice paraboly $y^2 + Ax + By + C = 0$

K ∈ P: $3^2 + \mathrm{A} \cdot (-4) + \mathrm{B} \cdot 3 + \mathrm{C} = 0$

L ∈ P: $9^2 + \mathrm{A} \cdot 2 + \mathrm{B} \cdot 9 + \mathrm{C} = 0$

M ∈ P: $6^2 + \mathrm{A} \cdot (-2{,}5) + \mathrm{B} \cdot 6 + \mathrm{C} = 0$

$$-4\mathrm{A} + 3\mathrm{B} + \mathrm{C} = -9$$
$$2\mathrm{A} + 9\mathrm{B} + \mathrm{C} = -81$$
$$-2{,}5\mathrm{A} + 6\mathrm{B} + \mathrm{C} = -36$$

Pomocí úprav dostaneme:

$$-4\mathrm{A} + 3\mathrm{B} + \mathrm{C} = -9$$
$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = -12$$
$$-1{,}5\mathrm{A} = 9$$

Řešením této soustavy jsou koeficienty $A = -6, B = -6, C = -15$.

Obecná rovnice paraboly je $y^2 - 6x - 6y - 15 = 0$.

Příklad 36

Určete rovnici paraboly, jsou-li dány její body $K = [2, 0], L = [10, -8], M = [-2, -2]$ a $o \| y$.

Body K, L, M leží na parabole, proto jejich souřadnice postupně dosadíme do obecné rovnice paraboly $x^2 + Ax + By + C = 0$

K ∈ P: $2^2 + \mathrm{A} \cdot 2 + \mathrm{B} \cdot 0 + \mathrm{C} = 0$

L ∈ P: $10^2 + \mathrm{A} \cdot 10 + \mathrm{B} \cdot (-8) + \mathrm{C} = 0$

M ∈ P: $(-2)^2 + \mathrm{A} \cdot (-2) + \mathrm{B} \cdot (-2) + \mathrm{C} = 0$

$$2A \qquad + C = -4$$
$$10A - 8B + C = -100$$
$$-2A - 2B + C = -4$$
Pomocí úprav dostaneme:
$$2A + 2B - C = 4$$
$$2A + C = -4$$
$$24A = -96$$
Řešením této soustavy jsou koeficienty $A = -4, B = 8, C = 4$.

Obecná rovnice paraboly je $x^2 - 4x + 8y + 4 = 0$.

5.5 Vzájemná poloha kružnice a přímky

Příklad 37

Určete vzájemnou polohu kružnice $x^2 + y^2 = 9$ a přímky p: $x - y + 3 = 0$.

Z rovnice přímky vyjádříme y a dosadíme za y do rovnice kružnice. Rovnici upravíme a vypočítáme x.

$$y = x + 3$$
$$x^2 + (x+3)^2 = 9$$
$$x^2 + x^2 + 6x + 9 = 9$$
$$2x^2 + 6x = 0$$
$$x \cdot (x+3) = 0$$
$$x_1 = 0, x_2 = -3$$
Dosadíme za x do rovnice přímky $y = x + 3$.

$x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 3$

$x_2 = -3 \Rightarrow y_2 = 0$

Přímka je sečnou kružnice se společnými body $A = [0, 3]$ a $B = [-3, 0]$.

Příklad 38

Určete vzájemnou polohu kružnice $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 5$ a přímky p: $x - 2y - 1 = 0$.

$$x = 2y + 1$$
$$(2y + 1 - 4)^2 + (y+1)^2 = 5$$
$$4y^2 - 12y + 9 + y^2 + 2y + 1 = 5$$
$$5y^2 - 10y + 5 = 0$$
$$y^2 - 2y + 1 = 0$$
$$y_{1,2} = 1$$

$$x_{1,2} = 2 \cdot 1 + 1$$
$$x_{1,2} = 3$$

Přímka je tečnou s jedním společným bodem $\mathrm{T} = [3, 1]$.

Příklad 39

Napište rovnici tečny kružnice $\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 = 25$ v jejím bodě dotyku $\mathrm{T} = [-3, 4]$.

$$x_0 x + y_0 y = r^2$$
$$-3x + 4y = 25$$
$$3x - 4y + 25 = 0$$

Příklad 40

Napište rovnici tečny kružnice $\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 - 4\mathrm{x} - 4\mathrm{y} + 7 = 0$ v jejím bodě dotyku $\mathrm{T} = [3, 2]$.

Obecnou rovnici kružnice převedeme na středový tvar

$$\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 - 4\mathrm{x} - 4\mathrm{y} + 7 = 0$$
$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = -7 + 4 + 4$$
$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$$

Užijeme rovnici tečny kružnice v bodě dotyku $\mathrm{T} = [\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0]$.

$$(x_0 - m) \cdot (x - m)^2 + (y_0 - n) \cdot (y - n) = r^2$$
$$(x_0 - 2) \cdot (x - 2) + (y_0 - 2) \cdot (y - 2) = 1$$
$$(3 - 2) \cdot (x - 2) + (2 - 2) \cdot (y - 2) = 1$$
$$x - 2 = 1$$
$$x = 3$$

Příklad 41

Napište rovnici tečny kružnice $\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 - 4\mathrm{x} + 12\mathrm{y} + 27 = 0$, která je rovnoběžná s přímkou p: $2x - 3y + 5 = 0$.

Přímka p a tečna t, které jsou spolu rovnoběžné, mají stejný normálový vektor. Tečnu t můžeme zapsat ve tvaru $2x - 3y + c = 0$. Z této rovnice vyjádříme x a dosadíme za x do rovnice kružnice.

$$x = \frac{3y - c}{2}$$

$$\left(\frac{3y - c}{2}\right)^2 + y^2 - 4\left(\frac{3y - c}{2}\right) + 12y + 27 = 0$$

$$\frac{9y^2 - 6cy + c^2}{4} + y^2 - 6y + 2c + 12y + 27 = 0$$

$$9y^2 - 6cy + c^2 + 4y^2 - 24y + 8c + 48y + 108 = 0$$

$$13y^2 - 6cy + c^2 + 8c + 24y + 108 = 0$$

$$13y^2 + (24 - 6c)y + c^2 + 8c + 108 = 0$$

Nyní budeme řešit kvadratickou rovnici a hledat c tak, aby byl diskriminant D = 0.

$$(24 - 6c)^2 - 4 \cdot 13 \cdot (c^2 + 8c + 108) = 0$$

$$576 + 288c + 36c^2 - 52c^2 - 416c - 5616 = 0$$

$$c^2 + 44c + 315 = 0$$

$$c_{1,2} = \frac{-44 \pm \sqrt{44^2 - 4 \cdot 1 \cdot 315}}{2} = \frac{-44 \pm 26}{2} = \begin{cases} -9, \\ -35 \end{cases}$$

Rovnice tečen jsou t_1: $2x - 3y - 9 = 0$ a t_2: $2x - 3y - 35 = 0$.

5.6 Vzájemná poloha elipsy a přímky

Příklad 42

Určete vzájemnou polohu elipsy $4\mathrm{x}^2 + 16\mathrm{y}^2 - 64 = 0$ a přímky p: $3x - y + 2 = 0$.

Z rovnice přímky vyjádříme y a dosadíme za y do rovnice elipsy. Rovnici upravíme a vypočítáme x.

$$y = 3x + 2$$

$$4x^2 + 16y^2 - 64 = 0$$

$$4x^2 + 16(3x + 2)^2 - 64 = 0$$

$$4x^2 + 16(9x^2 + 12x + 4) - 64 = 0$$

$$4x^2 + 144x^2 + 192x + 64 - 64 = 0$$

$$148x^2 + 192x = 0$$

$$x(148x + 192) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = -\frac{192}{148} = -\frac{48}{37}$$

Dosadíme za x do rovnice přímky $y = 3x + 2$

$x_1 = 0 \;\Rightarrow\; y_1 = 2$

$x_2 = -\frac{48}{37} \Rightarrow\; y_2 = 3 \cdot \left(-\frac{48}{37}\right) + 2 = -\frac{70}{37}$

Přímka je sečnou elipsy se společnými body A = $[0, 2]$ a B = $\left[-\frac{48}{37}, -\frac{70}{37}\right]$.

Příklad 43

Určete vzájemnou polohu elipsy $\frac{(x+1)^2}{8}+\frac{(y-2)^2}{2}=1$a přímky p: $M=[3,2], s=(2,1)$.

Přímku vyjádříme parametricky $X=M+ts, t\in R$.

$x=3+2t$

$y=2+t$

Souřadnice x, y přímky dosadíme do rovnice elipsy a vypočítáme parametr.

$$\frac{(3+2t+1)^2}{8}+\frac{(2+t-2)^2}{2}=1$$

$$(2t+4)^2+4t^2=8$$

$$(2t+4)^2+4t^2=8$$

$$4t^2+16t+16+4t^2=8$$

$$8t^2+16t+8=0$$

$$t^2+2t+1=0$$

$$t_{1,2}=-1$$

Parametr t dosadíme do parametrického vyjádření přímky.

$x=3+2t=3+2\cdot(-1)=1$

$y=2+t=2-1=1$

Přímka je tečnou s jedním společným bodem $\mathrm{T}=[1,1]$.

Příklad 44

Napište rovnici tečny elipsy $4\mathrm{x}^2+9\mathrm{y}^2=100$ v jejím bodě dotyku $\mathrm{T}=[-4,\mathrm{y}_0>0]$.

Do rovnice elipsy dosadíme souřadnici x_0 bodu T.

$$4\cdot(-4)^2+9\mathrm{y}^2=100$$

$$64+9\mathrm{y}^2=100$$

$$9\mathrm{y}^2=36$$

$$y_{1,2}=\pm 2$$

Podmínce $\mathrm{y}_0>0$ vyhovuje pouze kořen 2. Bod dotyku $\mathrm{T}=[-4,2]$.

$$\frac{x_0x}{25}+\frac{9y_0y}{100}=1$$

$$4\cdot(-4)x+9\cdot 2\,y=100$$

$$-16x+18\,y-100=0$$

$$8x-9y+50=0$$

Příklad 45

Napište rovnici tečny elipsy $x^2 + 4y^2 - 4x + 32y + 48 = 0$ v jejím bodě dotyku $T = [x_0 > 0, -2]$.

Postup řešení je podobný jako v předchozím příkladu.

$$x^2 + 4 \cdot (-2)^2 - 4x + 32 \cdot (-2) + 48 = 0$$
$$x^2 + 4x = 0$$
$$x \cdot (x + 4) = 0$$
$$x_1 = 0, x_2 = 4$$

Podmínce $x_0 > 0$ vyhovuje pouze kořen 4. Bod dotyku $T = [4, -2]$.

$$x^2 - 4x + 4y^2 + 32y + 48 = 0$$
$$x^2 - 4x + 4(y^2 + 8y) = -48$$
$$(x - 2)^2 + 4(y + 4)^2 = -48 + 4 + 64$$
$$\frac{(x-2)^2}{20} + \frac{(y+4)^2}{5} = 1$$

$$\frac{(x_0 - 2) \cdot (x - 2)}{20} + \frac{(y_0 + 4) \cdot (y + 4)}{5} = 1$$
$$\frac{(4 - 2) \cdot (x - 2)}{20} + \frac{(-2 + 4) \cdot (y + 4)}{5} = 1$$
$$2x - 4 + 8y + 16 = 20$$
$$2x + 8y - 8 = 0$$
$$x + y - 4 = 0$$

5.7 Vzájemná poloha hyperboly a přímky

Příklad 46

Určete vzájemnou polohu hyperboly $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{36} = 1$ a přímky p: $x = -9 + 3t,\ y = 4t$. Vypočtěte souřadnice jejich bodů, pokud existují.

$$\frac{(-9 + 3t)^2}{81} - \frac{(4t)^2}{36} = 1$$
$$\frac{(-9 + 3t)^2}{81} - \frac{(4t)^2}{36} = 1$$
$$\frac{81 - 54t + 9t^2}{81} - \frac{16t^2}{36} = 1$$
$$4(81 - 54t + 9t^2) - 9 \cdot 16t^2 = 324$$

$324 - 216t + 36t^2 – 144t^2 = 324$

$324 - 216t + 36t^2 – 144t^2 = 324$

$108t^2 + 216t = 0$

$108t \cdot (t + 2) = 0$

$t_1 = 0$ $t_2 = -2$

$x_1 = -9 + 3 \cdot 0 = -9$ $x_1 = -9 + 3 \cdot (-2) = -15$

$y_1 = 4 \cdot 0 = 0$ $y_1 = 4 \cdot (-2) = -8$

Přímka je sečnou se dvěma společnými body $A = [-9, 0]$ a $B = [-15, -8]$.

Příklad 47

Určete vzájemnou polohu hyperboly $x^2 – 4y^2 = 4$ a přímky p: $y = 2x + 3$. Vypočtěte souřadnice jejich bodů, pokud existují.

$$x^2 – 4y^2 = 4$$

$$x^2 – 4(2x + 3)^2 = 4$$

$$x^2 – 4(4x^2 + 12x + 9) = 4$$

$$x^2 – 16x^2 - 48x - 36 = 4$$

$$15x^2 + 48x + 40 = 0$$

Vypočteme diskriminant

$D = 48^2 - 4 \cdot 15 \cdot 40 = 2304 - 2400 = -96$

Diskriminant je záporný, přímka je vnější přímkou.

Příklad 48

Napište rovnici tečny hyperboly $\frac{x^2}{36} – \frac{y^2}{81} = 1$ v jejím bodě dotyku $T \ = [-10,\ y_0 > 0]$.

$$\frac{(-10)^2}{36} – \frac{y^2}{81} = 1$$

$$\frac{100}{36} – \frac{y^2}{81} = 324$$

$900 – 4y^2 = 324$

$4y^2 = 576$

$y^2 = 144$

$y_{1,2} \ = \pm 12$

Podmínce $y_0 > 0$ vyhovuje pouze kořen 12. Bod dotyku $T = [-10, 12]$.

$$\frac{x_0 x}{36} - \frac{y_0 y}{81} = 1$$

$$\frac{-10x}{36} - \frac{12y}{81} = 1$$

$$9 \cdot (-10)x - 4 \cdot 12y = 324$$

$$-90x - 48\,y - 324 = 0$$

$$15x + 8\,y + 54 = 0$$

Příklad 49

K hyperbole $\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{6} = 1$ veďte tečnu rovnoběžnou s přímkou $x + y - 7 = 0$.

Tečna má předpis $x + y + c = 0$

$$y = -x - c$$

$$\frac{x^2}{15} - \frac{(-x-c)^2}{6} = 1$$

$$2x^2 - 5(-x-c)^2 = 30$$

$$2x^2 - 5(x^2 + 2cx + c^2) = 30$$

$$2x^2 - 5x^2 - 10cx - 5c^2 - 30 = 0$$

$$3x^2 + 10cx + 5c^2 + 30 = 0$$

Řešíme kvadratickou rovnici pro c a diskriminant musí být roven 0.

$$(10c)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (5c^2 + 30) = 0$$

$$100c^2 - 60c^2 + 360 = 0$$

$$40c^2 = 360$$

$$c^2 = 9$$

$$c_{1,2} = \pm 3$$

Rovnice tečen jsou $x + y + 3 = 0$ a $x + y - 3 = 0$.

5.8 Vzájemná poloha paraboly a přímky

Příklad 50

Vypočítejte souřadnice průsečíků paraboly $x^2 = 12y$ s přímkou $2x - 3y + 5 = 0$.

$$y = \frac{2x+5}{3}$$

$$x^2 = 12 \cdot \frac{2x+5}{3}$$

$$x^2 = 8x + 20$$

$$x^2 - 8x - 20 = 0$$

$(x-10)\cdot(x+2)= 0$

$x_1 = 10 \Rightarrow y_1 = \dfrac{2x+5}{3} = \dfrac{2\cdot 10+5}{3} = \dfrac{25}{3}$

$x_2 = -2 \Rightarrow y_1 = \dfrac{2x+5}{3} = \dfrac{2\cdot(-2)+5}{3} = \dfrac{1}{3}$

Přímka je sečnou k parabole s body dotyku $A = \left[10, \frac{25}{3}\right]$ a $B = \left[-2, \frac{1}{3}\right]$.

Příklad 51

Jakou velikost má tětiva na parabole $y^2 = 8x$, kterou vytíná přímka $y = x - 2$?

$(x-2)^2 = 8x$

$x^2 - 12x + 4 = 0$

$x_{1,2} = \dfrac{12 \pm \sqrt{144 - 4\cdot 1\cdot 4}}{2} = \dfrac{12 \pm 8\sqrt{2}}{2} = 6 \pm 4\sqrt{2}$

$x_1 = 6 + 4\sqrt{2} \Rightarrow y_1 = 6 + 4\sqrt{2} - 2 = 4 + 4\sqrt{2}$

$x_2 = 6 - 4\sqrt{2} \Rightarrow y_2 = 6 - 4\sqrt{2} - 2 = 4 - 4\sqrt{2}$

Dostáváme dva body $A = \left[6 + 4\sqrt{2};\ 4 + 4\sqrt{2}\,\right]$ a $B = \left[6 - 4\sqrt{2};\ 4 - 4\sqrt{2}\,\right]$.

Velikost tětivy vypočítáme jako vzdálenost těchto dvou bodů.

$$d = |AB| = \sqrt{\left(6 - 4\sqrt{2} - 6 - 4\sqrt{2}\right)^2 + \left(4 - 4\sqrt{2} - 4 - 4\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{256} = 16$$

Tětiva má velikost 16.

Příklad 52

Napište rovnici tečny paraboly $y^2 - 6x - 4y - 14 = 0$ v jejím bodě dotyku $T = [3, -4]$.

Obecnou rovnici převedeme na vrcholovou rovnici.

$y^2 - 4y = 6x + 14$

$(y-2)^2 = 6x + 14 + 4$

$(y-2)^2 = 6(x+3)$

Bod dotyku T dosadíme do rovnice tečny paraboly.

$(y_0 - n)\cdot(y - n) = p(x_0 - m) + p(x - m)$

$(4-2)\cdot(y-2) = 3(3+3) + 3(x+3)$

$-6y + 12 = 18 + 3x + 9$

$x + 2y + 5 = 0$

Příklad 53

Najděte rovnici tečny paraboly $x^2 - 6x - 8y - 7 = 0$, je-li dán bod dotyku $T = [7, y_0]$.

Vypočítáme druhou souřadnici bodu T.

$7^2 - 6 \cdot 7 - 8y - 7 = 0$

$$8y = 49 - 42 - 7$$

$$y = 0$$

Obecnou rovnici převedeme na vrcholovou rovnici.

$x^2 - 6x = 8y + 7$

$(x - 3)^2 = 8y + 7 + 9$

$(x - 3)^2 = 8(y + 2)$

Bod dotyku T dosadíme do rovnice tečny paraboly.

$(x_0 - m) \cdot (x - m) = p(y_O - n) + p(y - n)$

$$(7 - 3) \cdot (x - 3) = 4(0 + 2) + 4(y + 2)$$

$$4x - 12 = 8 + 4y + 8$$

$$x - y - 7 = 0$$

Příklad 54

Veďte k parabole $y^2 = 8x$ tečnu rovnoběžnou s přímkou $3x - y + 5 = 0$.

Rovnice tečny je $3x - y + c = 0$. Řešíme soustavu rovnic s neznámou c.

$$y = 3x + c$$

$$(3x + c)^2 = 8x$$

$$9x^2 + 6cx + c^2 = 8x$$

$9x^2 + (6c - 8)x + c^2 = 0$

Diskriminant této rovnice musí být roven nule, aby přímka byla tečnou paraboly.

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$(6c - 8)^2 - 4 \cdot 9 \cdot c^2 = 0$$

$36c^2 - 96c + 64 - 36c^2 = 0$

$$c = \frac{64}{96} = \frac{2}{3}$$

Dosadíme za c do rovnice tečny a dostaneme tečnu o rovnici $9x - 3y + 2 = 0$.

5.9 Vzájemná poloha dvou kuželoseček

Příklad 55

Určete vzájemnou polohu kuželoseček $(x-3)^2+y^2=45$ a $(x-9)^2+(y-2)^2=25$.

Řešíme jako soustavu rovnic.

$$x^2-6x+9+y^2-45=0$$
$$x^2-18x+81+y^2-4y+4-25=0$$
$$x^2+y^2-6x-36=0$$
$$x^2+y^2-18x-4y+60=0$$
$$-12x-4y+96=0$$
$$y=24-3x$$

Neznámou y dosadíme do jedné z rovnic kuželoseček.

$$(x-3)^2+y^2=45$$
$$(x-3)^2+(24-3x)^2=45$$
$$x^2-6x+9+576-144x+9x^2=45$$
$$10x^2-150x+540=0$$
$$x^2-15x+54=0$$
$$(x-9)\cdot(x-6)=0$$

$x_1=9 \;\Rightarrow y_1=24-3x_1=24-3\cdot 9=-3$

$x_2=6 \;\Rightarrow y_2=24-3x_2=24-3\cdot 6=6$

Kuželosečky mají dva společné body $A=[9,-3]$ a $B=[6,6]$.

Příklad 56

Určete průsečíky kuželoseček $x^2+y^2-225=0$ a $y^2-16x=0$.

Řešíme soustavu rovnic. Vyjádříme neznámou z rovnice paraboly a dosadíme do rovnice kružnice.

$y^2=16x$

$x^2+y^2-225=0$

$x^2+16x-225=0$

$(x+25)\cdot(x-9)=0$

Kořen $x_1=-25$ ... nevyhovuje, kořen $x_2=9$.

$$y^2=16\cdot 9=144$$
$$y^2=\pm 12$$

Kuželosečky mají 2 společné body $M=[9,12]$ a $N=[9,-12]$.

Příklad 57

Určete průsečíky kuželoseček $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{128} = 1$ a $y^2 - 16x = 0$. Určete délku společné tětivy.

Řešíme soustavu rovnic. Vyjádříme neznámou z rovnice paraboly a dosadíme do rovnice elipsy.

$y^2 = 16x$

$\frac{x^2}{32} + \frac{16x}{128} = 1$

$4x^2 + 16x = 128$

$x^2 + 4x - 32 = 0$

$(x + 8) \cdot (x - 4) = 0$

Kořen $x_1 = -8$ ... nevyhovuje, kořen $x_2 = 4$.

$$y^2 = 16 \cdot 4 = 64$$

$$y^2 = \pm 8$$

Kuželosečky mají 2 společné body $M = [4, 8]$ a $N = [4, -8]$.

Délku tětivy určíme jako vzdálenost bodů MN.

$d = |MN| = \sqrt{(n_1 - m_1)^2 + (n_2 - m_2)^2} = \sqrt{(4 - 4)^2 + (-8 - 8)^2} = \sqrt{256} = 16$

Délka tětivy je 16.

Příklad 58

Určete průsečíky kuželoseček $\frac{x^2}{500} - \frac{y^2}{1600} = 1$ a $y^2 - 16x = 0$. Určete rovnici jejich spojnice.

$y^2 = 16x$

$\frac{x^2}{500} - \frac{16x}{1600} = 1$

$x^2 - 5x - 500 = 0$

$(x - 25) \cdot (x + 20) = 0$

Kořen $x_1 = 25$, kořen $x_2 = -20$ nevyhovuje.

$$y^2 = 16 \cdot 25 = 400$$

$$y^2 = \pm 20$$

Kuželosečky mají 2 společné body $R = [25, 20]$ a $S = [25, -20]$.

Rovnici spojnice určíme pomocí obecné rovnice.

$\vec{s} = (0, -40) \Rightarrow \vec{n} = (40, 0)$

$$40x + 0y + c = 0$$

$$40 \cdot 25 + 0 \cdot 20 + c = 0$$

$$c = -1000$$

$$40x - 1000 = 0$$

$$x = 25$$

Závěr

Hlavním cílem bakalářské práce bylo podání pohledu na problematiku kuželoseček.

Celou práci jsem rozdělil na dvě části, a to na část teoretickou a na část praktickou.

Teoretickou část jsem rozdělil do čtyř kapitol. V první kapitole jsem vysvětlil, že kuželosečky jsou rovinné křivky a vznikají jako průnik roviny s rotační kuželovou plochou. V druhé kapitole jsem se zabýval jednotlivými typy kuželoseček, uvedl jejich definici a popsal jejich vlastnosti. Z vlastností by měl čtenář pochopit, že kružnice, elipsa a hyperbola jsou středové kuželosečky, neboť jsou souměrné podle středu souměrnosti. Parabola nemá střed souměrnosti, a proto bývá označována jako nestředová kuželosečka. V kapitole jsou popsány konstrukce každé kuželosečky. Ve třetí kapitole jsem uvedl rovnice kuželoseček. U každé kuželosečky jsem odvodil středovou, resp. vrcholovou rovnici kuželosečky. Rovnice kuželoseček jsou uvedeny pro kuželosečky, jejichž osy jsou rovnoběžné s osami kartézské soustavy souřadnic. Čtvrtá kapitola je zaměřena na určování vzájemné polohy kuželosečky a přímky, resp. dvou kuželoseček. Na začátku této kapitoly jsem popsal postup pro určení vzájemné polohy na základě řešení soustavy rovnic. Dále vysvětlil pojmy sečna, tečna, nesečna.

Praktická část je těžištěm této práce. Celá kapitola obsahuje sadu řešených příkladů. V příkladech ze zadání určujeme středové, vrcholové a obecné rovnice. Provádíme převody mezi rovnicemi. Hledáme střed, ohniska, hlavní vrcholy, řídicí přímku a další vlastnosti kuželoseček. Určujeme polohu bodu a přímky vzhledem ke kuželosečce a vzájemnou polohu dvou kuželoseček.

Pro grafické zpracování jsem použil software GeoGebra. Všechny obrázky (mimo jednoho) jsem vytvořil pomocí tohoto programu. S rozvojem počítačů, interaktivních tabulí a interaktivních projektorů je tento program vhodným pomocníkem pro učitele a žáky při výuce geometrie i matematiky na všech typech škol.

Seznam literatury

1. HODAŇOVÁ, Jitka, David NOCAR a Vladimír VANĚK. *Konstrukční geometrie I: Kuželosečky*. 1. vyd. Olomouc: VUP, 2005, 84 s. ISBN 132 80-244-1091-5.

2. HRŮZA, Bohuslav a Hana MRHAČOVÁ. *Cvičení z algebry a geometrie*. 2. dopl. vyd. Brno: VUT, 1990, 183 s. ISBN 80-214-0230-X.

3. HUDCOVÁ, Milada, Libuše KUBIČÍKOVÁ. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ, SOU a nástavbové studium*. 2. vyd. Praha: Prometheus, 2006, 415 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6318-6.

4. LÁVIČKA, Miroslav. *Kuželosečky* [online]. Západočeská univerzita [cit. 2013-03-12]. Dostupné z WWW: <http://mat.fsv.cvut.cz/bakalari/kog/kzs/files/KuzeloseckyLavicka>.

5. POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. dotisk 6.vyd. Praha: Prometheus, 1995, 608 s. ISBN 80-858-4978-X.

6. SEDLÁČEK, Miloš, Dana ŠALOUNOVÁ a Jiří VRBICKÝ. *Lineární algebra*. 1. vyd. Ostrava: Vysoká škola báňská, 1994, 212 s. ISBN 80-707-8227-7.

Seznam obrázků

Seznam použitých symbolů

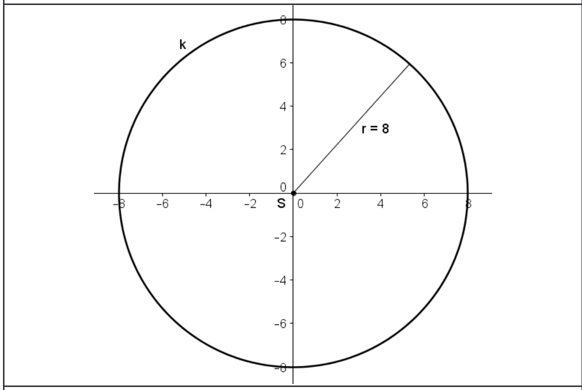
A, B	bod A, B
p, t	přímka p, t
α, β	úhel α, β
$V \in \rho$	bod V leží na přímce ρ
$V \notin \rho$	bod V neleží na přímce ρ
$\angle KLM$	konvexní úhel KLM s vrcholem L a rameny v polopřímkách LK, LM
$k_1 \cap k_2 = \{M_1, M_2\}$	body M_1, M_2 jsou průsečíky kružnic k_1, k_2
$\lvert AB \rvert$	velikost úsečky AB
$\rightarrow F_1F_2$	polopřímka F_1F_2 (polopřímka s počátkem F_1 a vnitřním bodem F_2)
$k(S, r)$	kružnice k se středem S a poloměrem r
$S = [m, n]$	bod S se souřadnicemi m, n
$o \parallel y$	přímka o je rovnoběžná s přímkou y

Seznam příloh

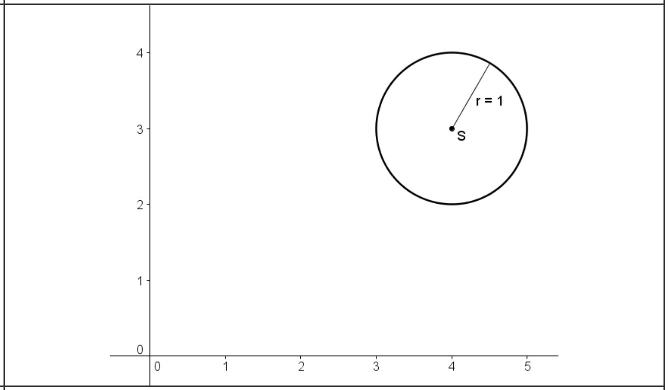
Příloha č. 1: Grafické zpracování řešených úloh

Příloha č. 1: Grafické zpracování řešených úloh

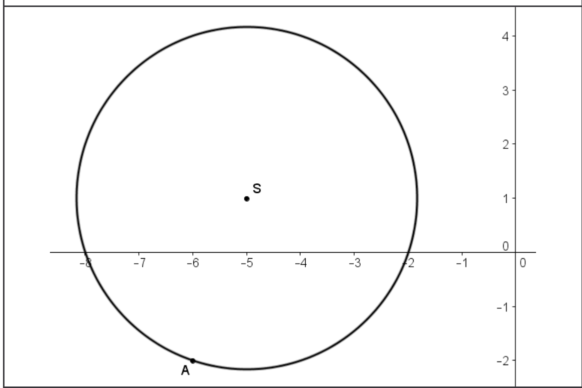
Příklad 1



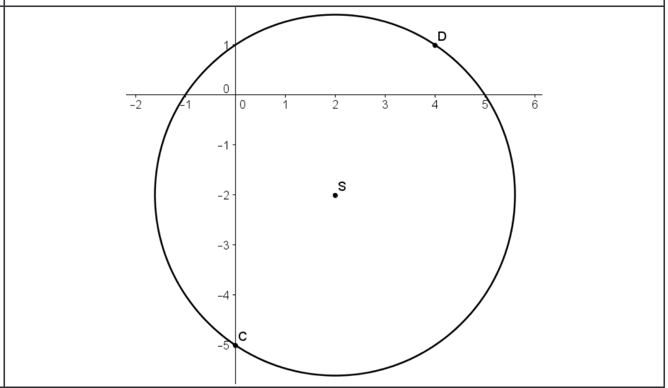
Příklad 2



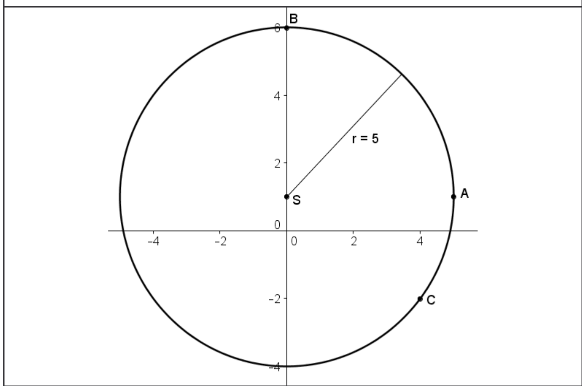
Příklad 3



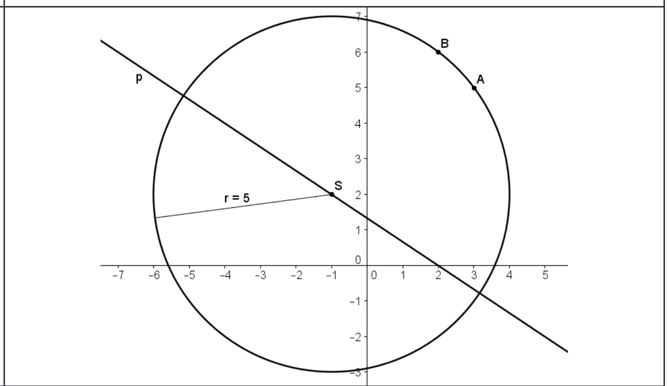
Příklad 4



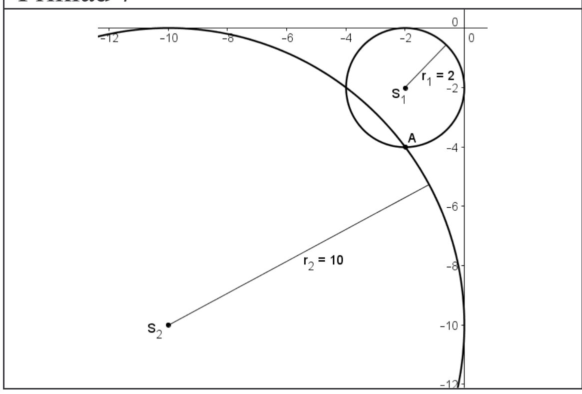
Příklad 5



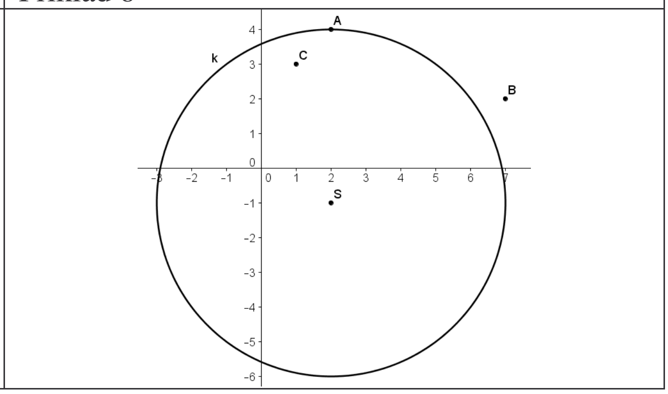
Příklad 6



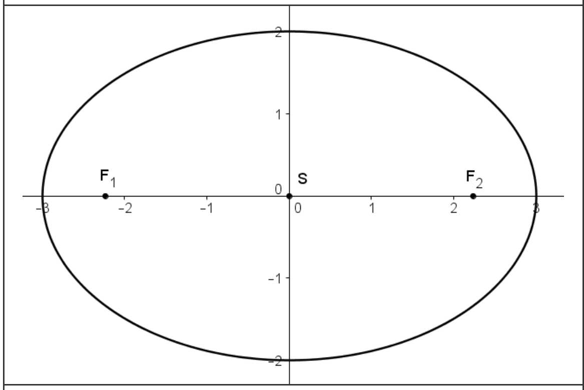
Příklad 7



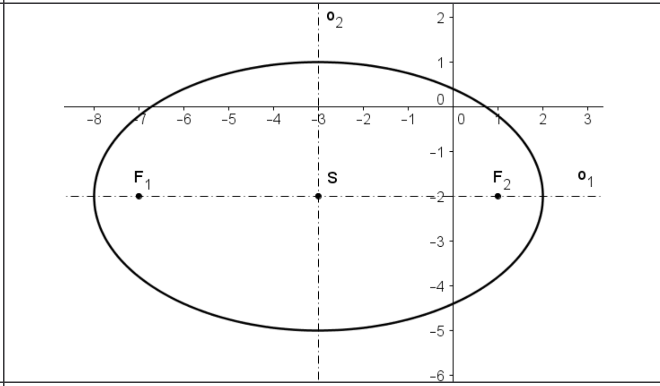
Příklad 8



Příklad 9



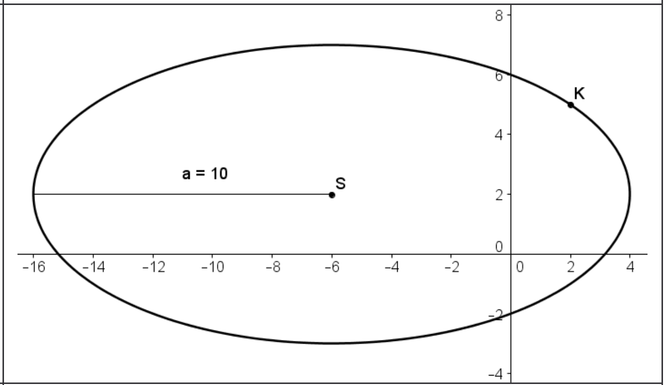
Příklad 10



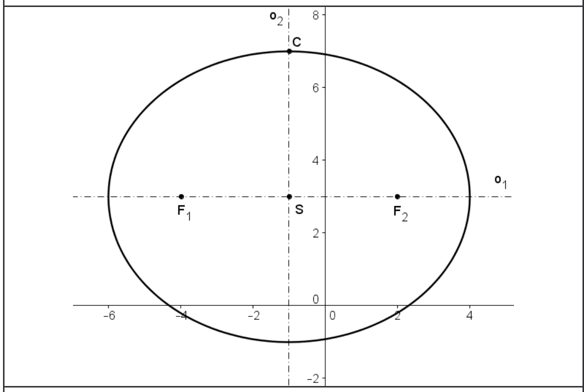
Příklad 11

Nemá řešení

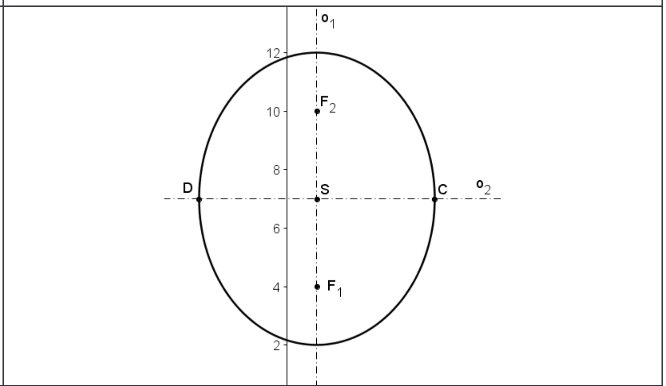
Příklad 12



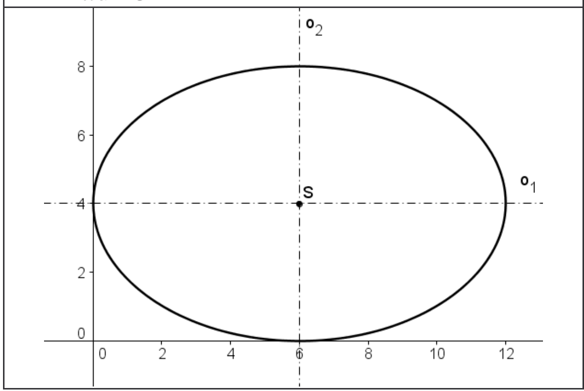
Příklad 13



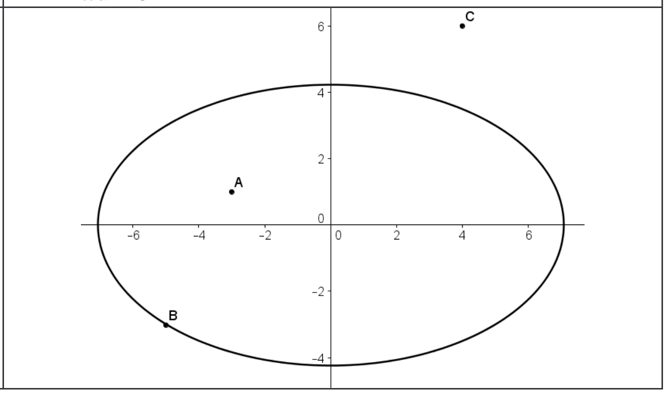
Příklad 14



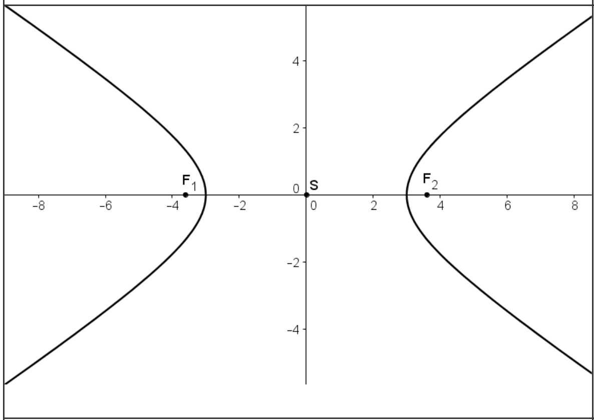
Příklad 15



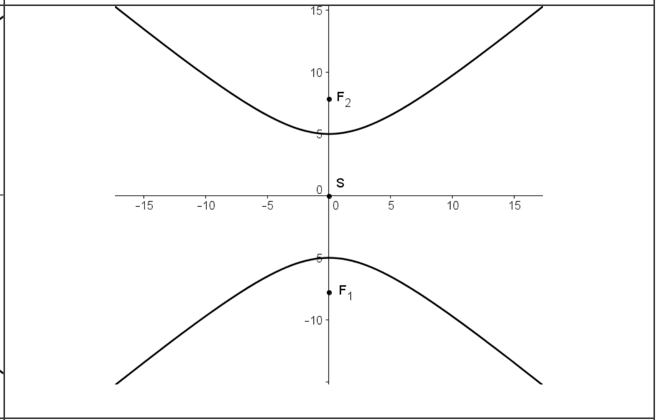
Příklad 16



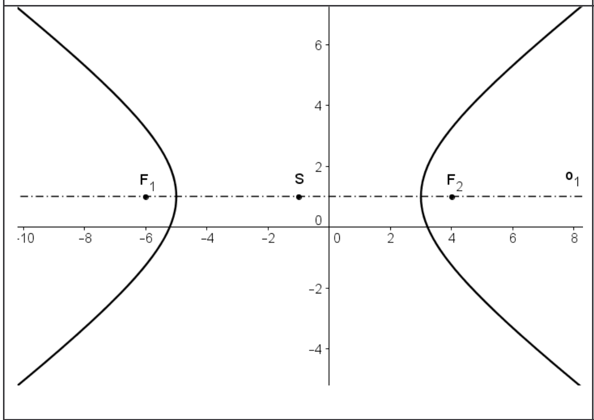
Příklad 17



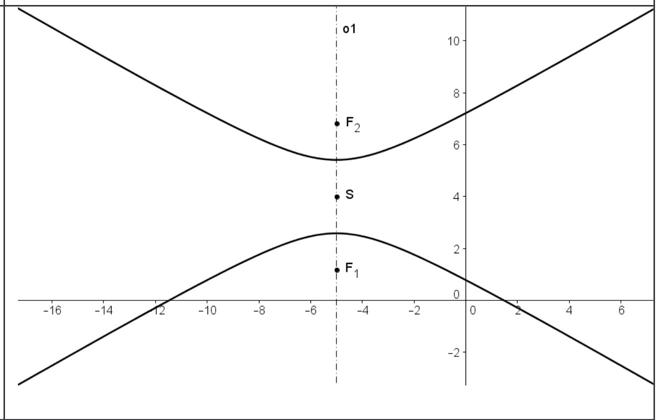
Příklad 18



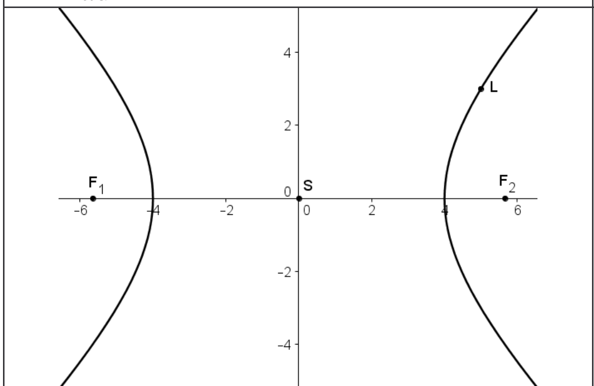
Příklad 19



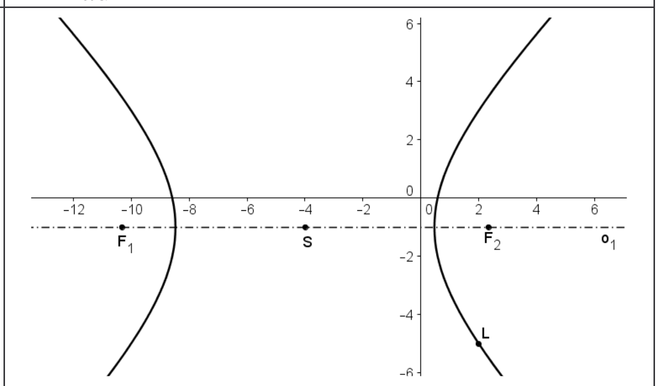
Příklad 20



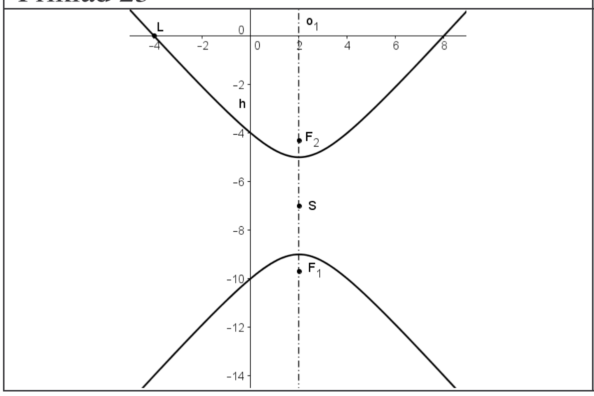
Příklad 21



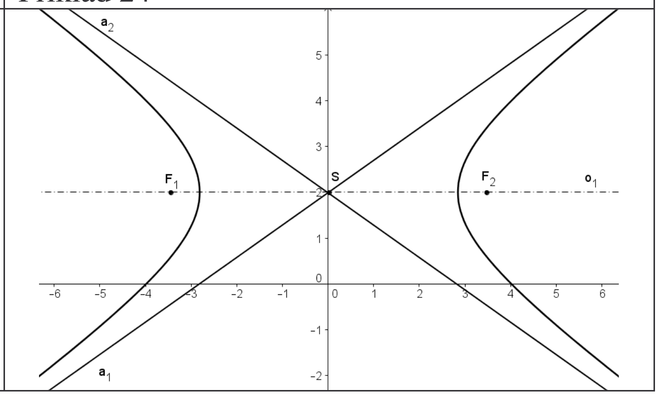
Příklad 22



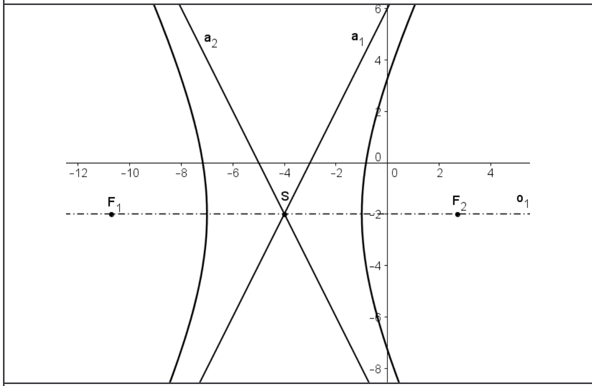
Příklad 23



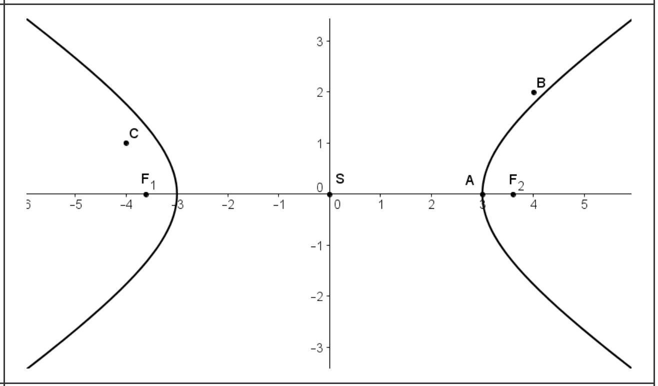
Příklad 24



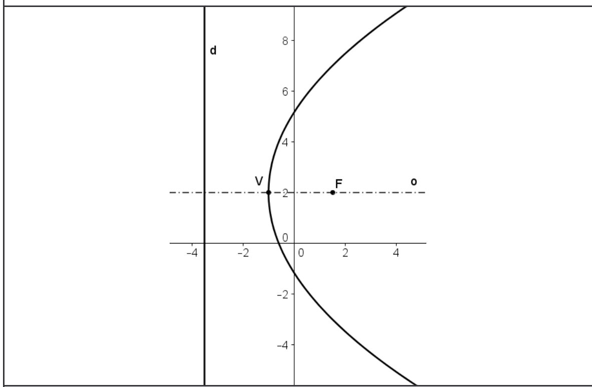
Příklad 25



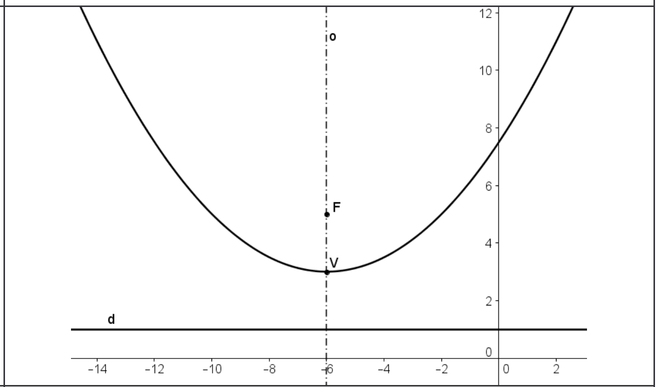
Příklad 26



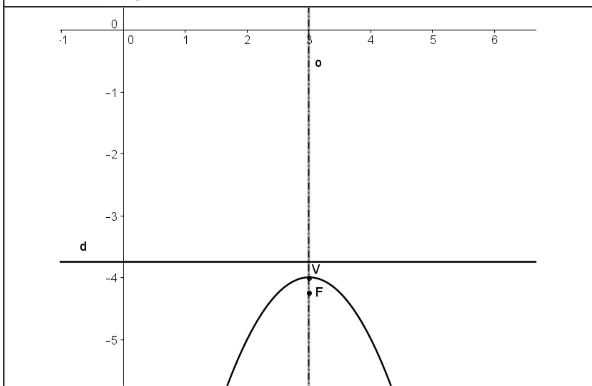
Příklad 27



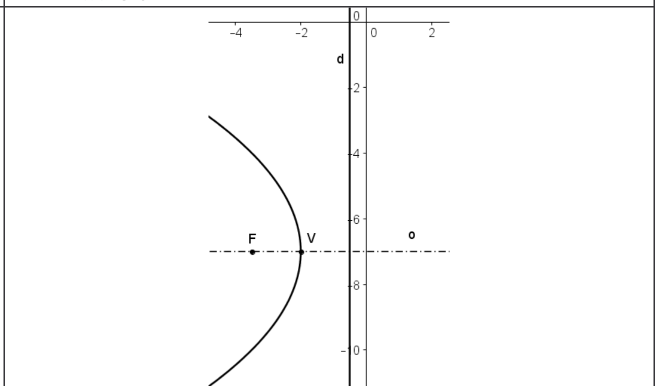
Příklad 28



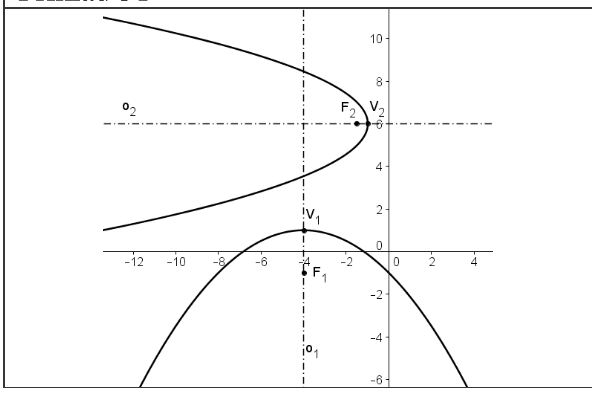
Příklad 29



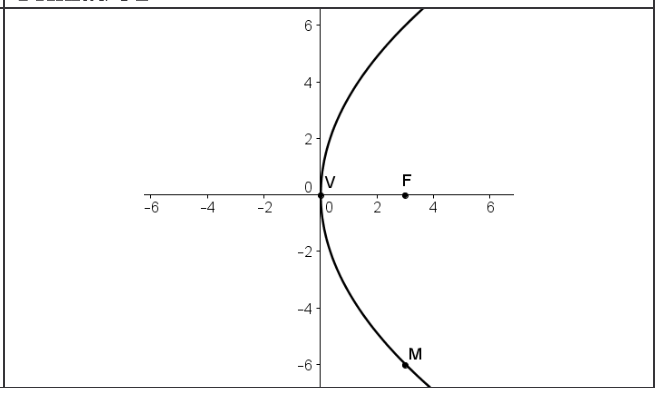
Příklad 30



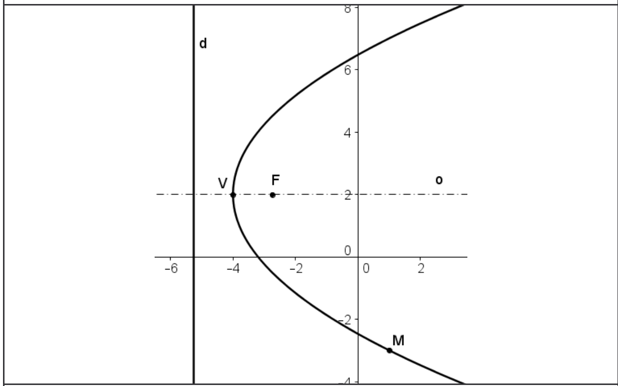
Příklad 31



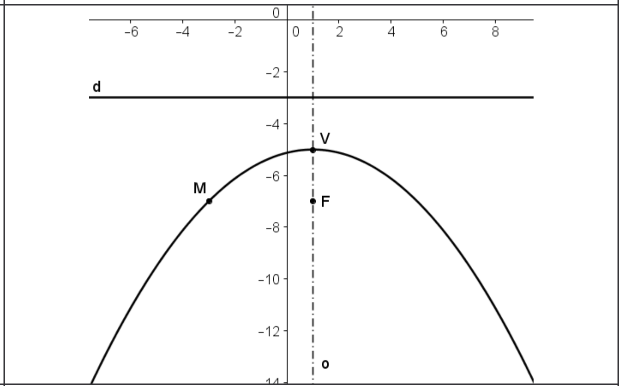
Příklad 32



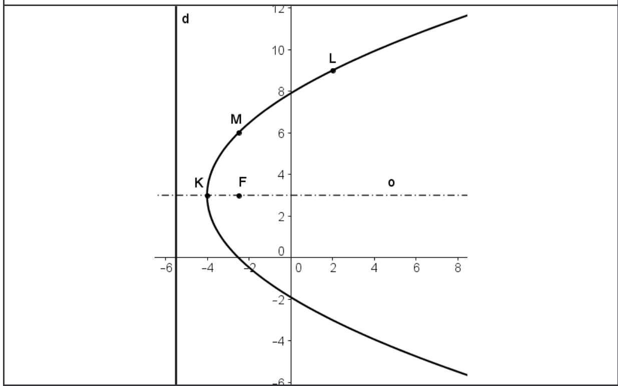
Příklad 33



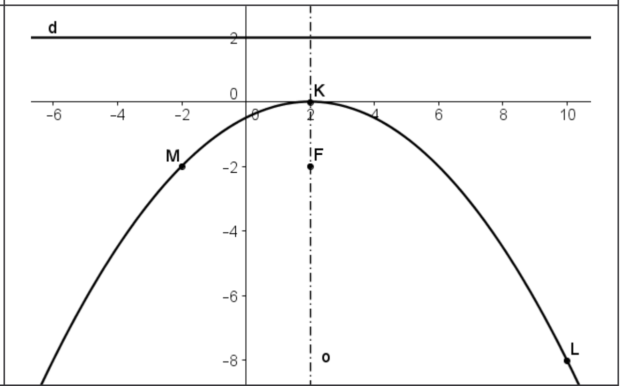
Příklad 34



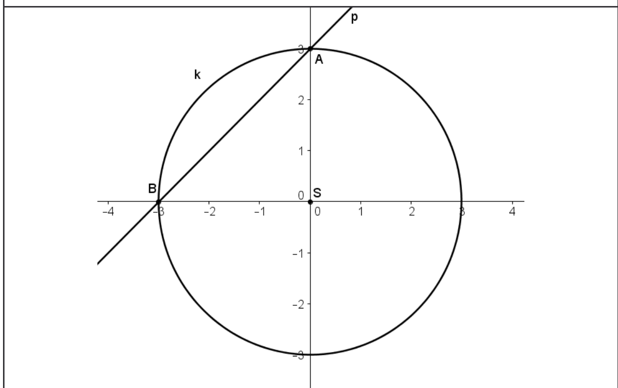
Příklad 35



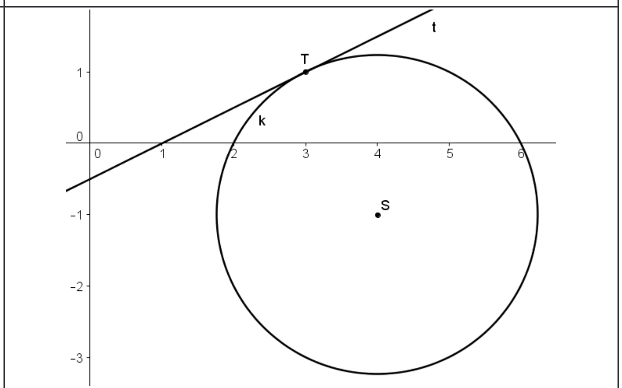
Příklad 36



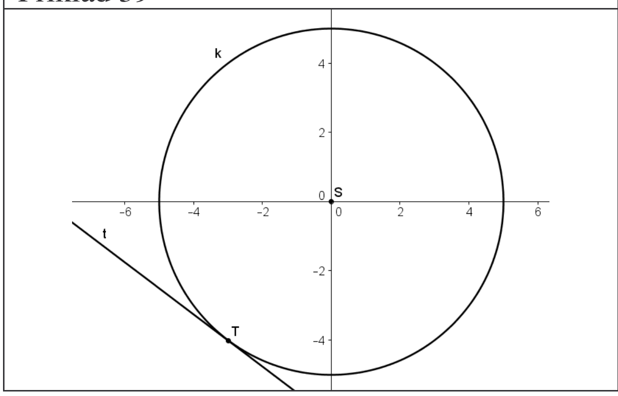
Příklad 37



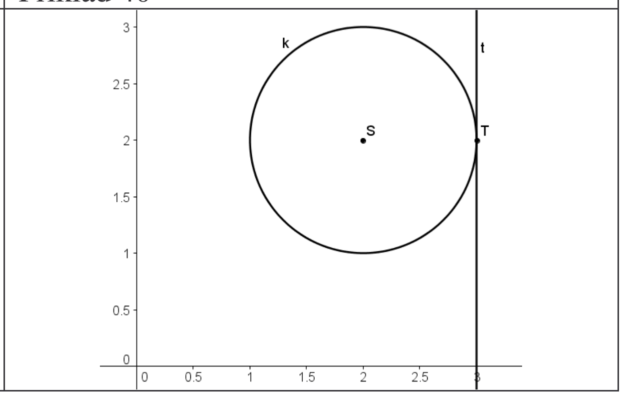
Příklad 38



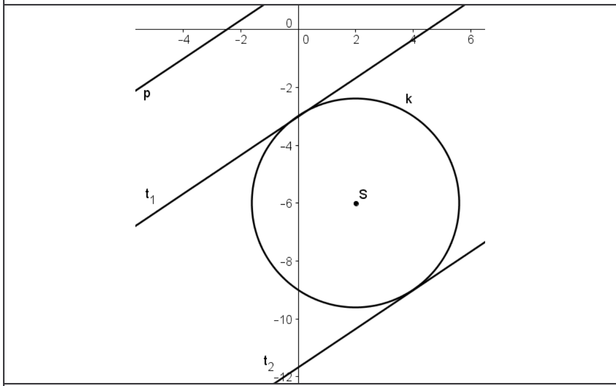
Příklad 39



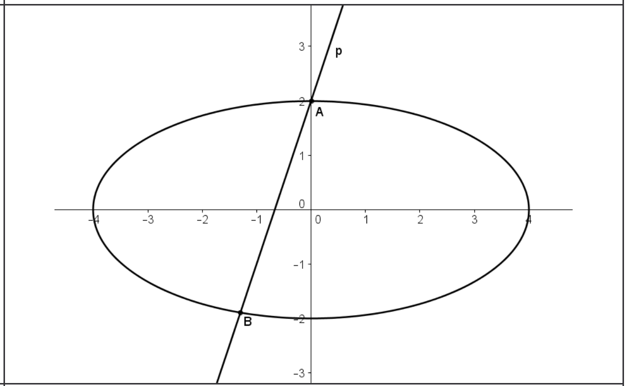
Příklad 40



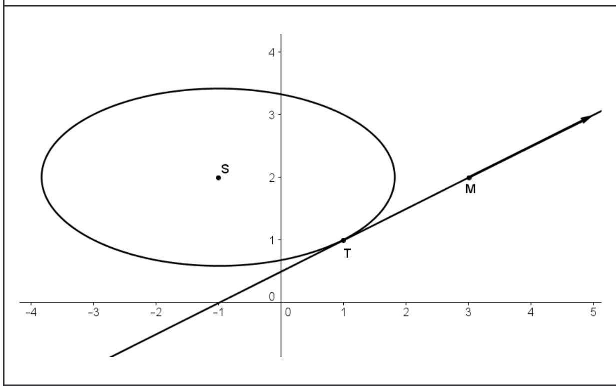
Příklad 41



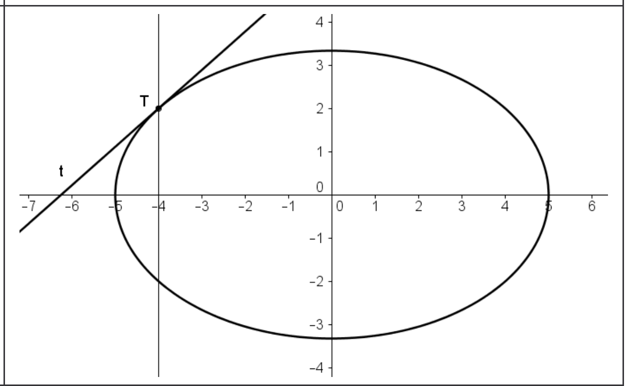
Příklad 42



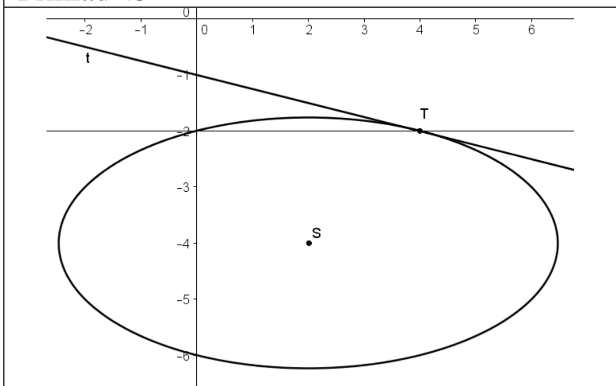
Příklad 43



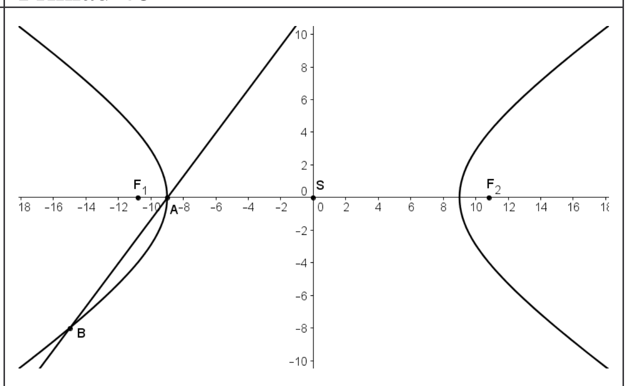
Příklad 44



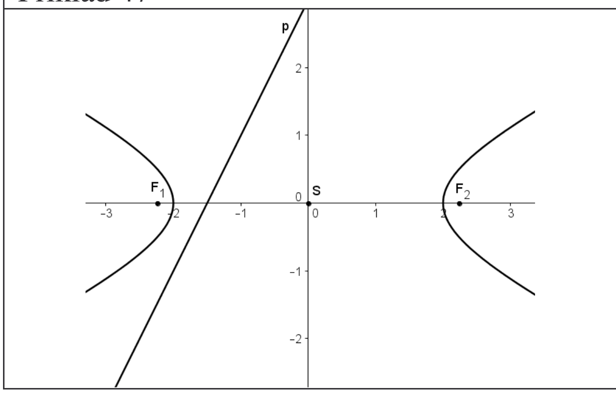
Příklad 45



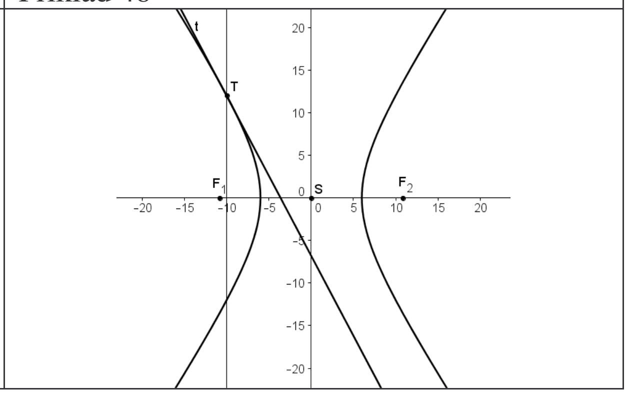
Příklad 46



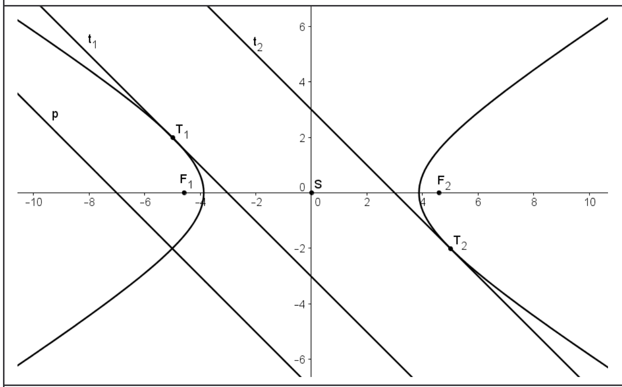
Příklad 47



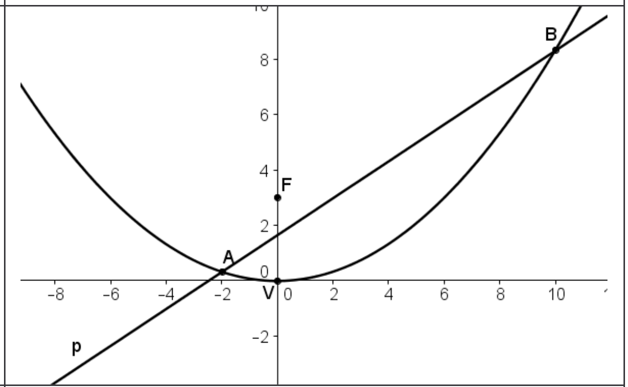
Příklad 48



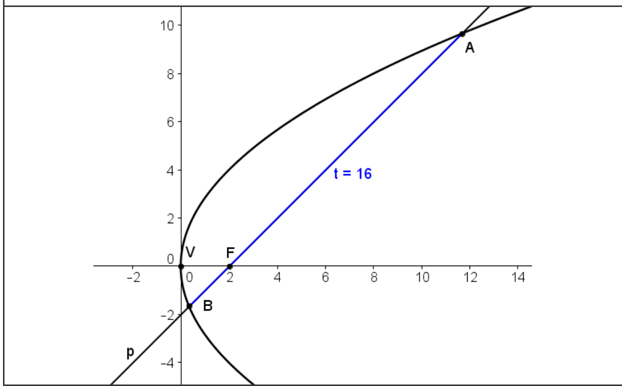
Příklad 49



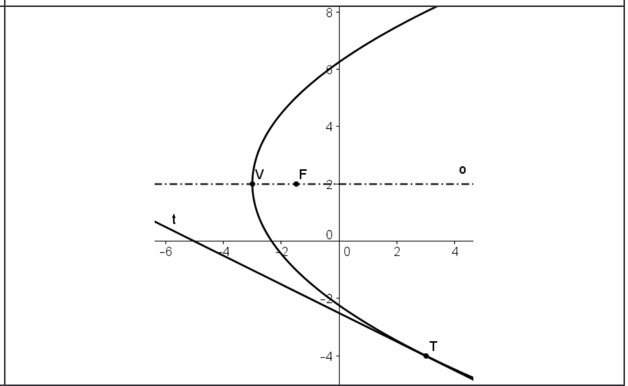
Příklad 50



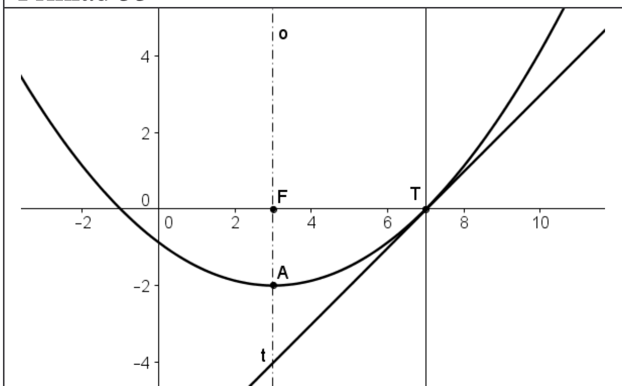
Příklad 51



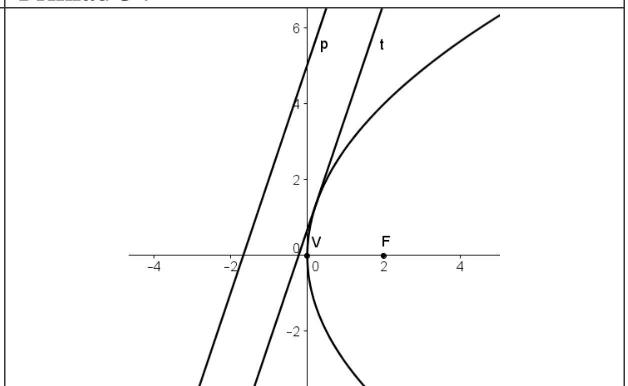
Příklad 52



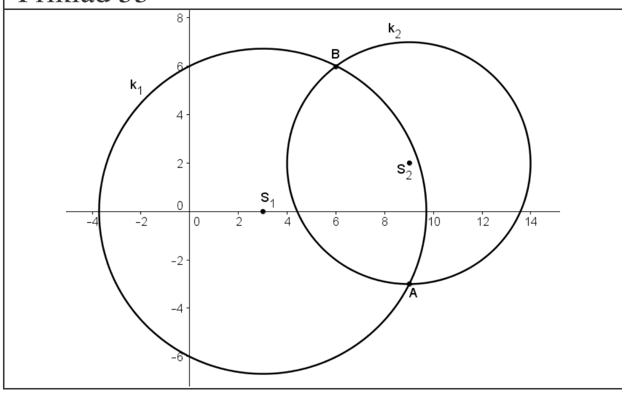
Příklad 53



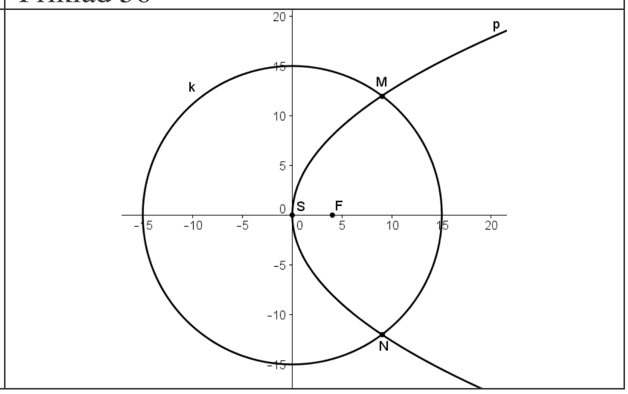
Příklad 54

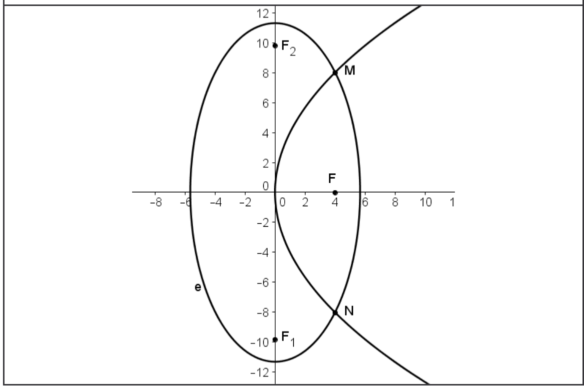
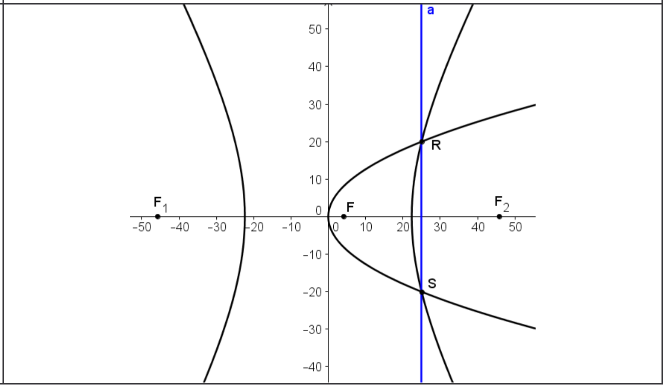


Příklad 55



Příklad 56



Příklad 57	Příklad 58
	

ANOTACE

Jméno a příjmení:	Martin Krbec
Katedra:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	Mgr. David Nocar, Ph.D.
Rok obhajoby:	2013

Název práce:	Analytická geometrie kuželoseček
Název v angličtině:	Analytic geometry of conic sections
Anotace práce:	Hlavním cílem této bakalářské práce je podat pohled na problematiku kuželoseček. Obsahem je analytický přístup ke studiu kuželoseček. Pojem kuželosečky je společný název pro kružnici, elipsu, hyperbolu a parabolu. Teoretická část je zaměřena na popis jejich vlastností, rovnice kuželoseček, vzájemnou polohu kuželosečky s přímkou nebo jinou kuželosečkou. Praktická část obsahuje sadu řešených příkladů, kde by si měl čtenář ověřit, zda správně pochopil teoretickou část a dokáže aplikovat teoretické znalosti při řešení praktických příkladů.
Klíčová slova:	Kuželosečky, elipsa, kružnice, hyperbola, parabola
Anotace v angličtině:	The main objective of this thesis is to provide a perspective on the issue of conics. It contains analytical approach to the study of conics. The term conic is a common name for a circle, ellipse, hyperbola and parabola. The theoretical part is focused on a description of their characteristics, equations, a relative position of a line or a different conic. The practical part contains a set of exercises where a reader should verify correct theoretical understanding and that is able to apply theoretical knowledge to solving practical examples.
Klíčová slova v angličtině:	Conic sections, ellipse, circle, hyperbola, parabola
Přílohy vázané v práci:	Grafické zpracování řešených úloh Anotace
Rozsah práce:	59
Jazyk práce:	Český