UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Dvojný integrál – princip řešení a sbírka příkladů

Vedoucí bakalářské práce:
Mgr. Iveta Bebčáková, Ph.D.

Vypracovala:
Martina Šušková
ME, III. ročník

Rok odevzdání: 2013

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně pod vedením paní Mgr. Ivety Bebčákové, Ph.D. s použitím uvedené literatury.

V Olomouci dne 10. března 2013

Poděkování

Ráda bych poděkovala vedoucí bakalářské práce paní Mgr. Ivetě Bebčákové, Ph.D. za spolupráci i za čas, který mi věnovala při konzultacích.

Obsah

Úvod

Téma mé bakalářské práce je *Dvojný integrál - sbírka příkladů*. Tato práce by měla sloužit studentům prvního ročníku oboru Matematika - ekonomie se zaměřením na bankovnictví a pojišťovnictví jako učební pomůcka v předmětu Matematika 2. Doufám tedy, že pro ně bude přínosná a dokážou díky ní lépe pochopit počítání dvojných integrálů. Bakalářská práce je psaná s předpokladem, že čtenář má již základní znalost z předmětu Matematika 1.

V první kapitole je uvedena motivace dvojného integrálu a základní vzorce, definice a věty, bez jejichž znalostí by počítání integrálů nešlo.

Dále je celá práce rozdělena do pěti kapitol řešených příkladů (kapitoly 2-6), kde se postupně čtenář naučí řešit různé typy příkladů týkajících se řešení dvojných integrálů. Začínáme nejjednodušší kapitolou - dvojný integrál na obdélníkové oblasti, pokračujeme trochu složitější částí - dvojný integrál na elementárních množinách, po které následují příklady řešené transformací do polárních souřadnic. Čtenář se také naučí i něco z geometrické aplikace, jako jsou výpočty obsahu ploch a objemu těles pomocí dvojných integrálů. V této kapitole je zahrnuto i odvození vzorců pro výpočty objemů těles.

V poslední, sedmé kapitole, si navíc ukážeme, jak používat program Wolfram Mathematica při řešení dvojných integrálů.

Důvod, proč jsem si toto téma vybrala, byl ten, že se mi ze všech vypsaných prací téma *Dvojný integrál* líbilo nejvíce. Co mě ale zaujalo možná ještě více je fakt, že moje bakalářská práce může v budoucnu někomu posloužit a neskončí jen její obhajobou.

Seznam použitého značení

$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel
$\mathbb{R}^n$	kartézský součin $\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n}$
$\langle a, b \rangle$	uzavřený interval od a do b
$A \times B$	kartézský součin množin A a B
$A \cup B$	sjednocení množin A a B
$\int \int_M f(x,y)dxdy$	dvojný integrál funkce dvou proměnných na množině M
$\mathcal{R}(M)$	množina všech funkcí Riemannovsky integrovatelných na množině M

1. Integrální počet

1.1. Dvojný (Riemannův) Integrál

V práci se budu zabývat dvojným integrálem, který je definován a podrobně rozebrán v [4], [5], [6]. Kvůli náročnosti definice a kvůli zaměření této práce zde nebudu tuto definici uvádět, ale zaměřím se pouze na tvrzení, která nám pomáhají s výpočtem dvojného integrálu.

1.1.1. Motivace

Na začátek si zavedeme geometrickou motivaci dvojného integrálu. Tou je úloha, kdy chceme určit objem tělesa s podstavou M v rovině (xy) a horní stěnou, která je tvořená částí grafu nezáporné omezené funkce f definované na množině M.

Integračním oborem u dvojného integrálu může být např. čtverec, obdélník, trojúhelník, kruh, lichoběžník atd. Tím se liší od jednorozměrného integrálu, kde je integračním oborem vždy interval.

Nejprve se budeme zabývat dvojným integrálem na obdélníku, tudíž množina M bude obdélníkového tvaru. Podobným postupem bychom mohli počítat také n-rozměrný integrál, kde $n \in \mathbb{N}$. Například pro $n = 3$ bychom integrovali přes kvádr.

Budeme uvažovat uzavřený obdélník $M \in \mathbb{R}^2$, kde M je kartézský součin uzavřených intervalů $\langle a, b\rangle$ na ose x a $\langle c, d\rangle$ na ose y, tj. $M = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$.

Existuje-li dvojný Riemannův integrál funkce f na M, říkáme, že funkce f je Riemannovsky integrovatelná na obdélníku M. Množinu všech funkcí Riemannovsky integrovatelných na M značíme jako $\mathcal{R}(M)$.

Dvojný integrál funkce dvou proměnných na množině M budeme značit

$$\int\int_M f(x, y) dxdy.$$

1.1.2. Základní věty a definice

Věta 1 (Fubiniova pro obdélník) *Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném obdélníku $M = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. Potom platí*

$$\int\int_M f(x,y)\ dx\ dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\ dx\right) dy$$

Definice 1 ***Elementární množina vzhledem k proměnné x*** *je množina tvaru*

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \in \langle a, b\rangle, g(x) \leq y \leq h(x)\},$$

kde g a h jsou funkce jedné reálné proměnné spojité na $\langle a, b\rangle$ takové, že pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ platí $g(x) < h(x)$.

Definice 2 ***Elementární množina vzhledem k proměnné y*** *je množina tvaru*

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \in \langle c, d\rangle, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\},$$

kde φ a ψ jsou funkce jedné reálné proměnné spojité na $\langle c, d\rangle$ takové, že pro všechna $y \in \langle c, d\rangle$ platí $\varphi(y) < \psi(y)$.

Definice 3 ***Elementární množina*** *je uzavřená množina, kterou lze vyjádřit jako sjednocení konečně mnoha disjunktních elementárních množin vzhledem k x nebo y.*

Věta 2 (Fubiniova pro elementární množinu)
Nechť je funkce f spojitá na uzavřené elementární množině M vzhledem k proměnné x, tj. $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$. Potom platí

$$\int\int_M f(x,y)\ dx\ dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\ dy\right) dx$$

Nechť je funkce f spojitá na uzavřené elementární množině M vzhledem k proměnné y, tj. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$. Potom platí

$$\int\int_M f(x,y)\ dx\ dy = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\ dx \right) dy$$

Věta 3 (Transformace souřadnic ve dvojném integrálu)
Nechť se uzavřená omezená množina $N \subset \mathbb{R}^2$ (proměnných u, v) zobrazí pomocí soustavy rovnic

$$x = g(u,v) \quad \text{a} \quad y = h(u,v)$$

vzájemně jednoznačně na uzavřenou omezenou množinu $M \subset \mathbb{R}^2$ (proměnných x, y), přičemž funkce g a h jsou v N spojité spolu se svými parciálními derivacemi $\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}, \frac{\partial h}{\partial u}$ a $\frac{\partial h}{\partial v}$ a pro tzv. Jacobiův determinant (jakobián) platí

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

ve všech bodech množiny N. Dále nechť funkce $f = f(x, y)$ je spojitá na M. Potom platí

$$\int\int_M f(x,y)\ dx\ dy = \int\int_N f(g(u,v), h(u,v)) \cdot |J|\ du\ dv,$$

kde $|J|$ je absolutní hodnota jakobiánu.

1.2. Integrální počet funkce jedné proměnné

Výše jsme viděli, že dvojný integrál převádíme na integrál dvojnásobný a při výpočtu dvojných integrálů tedy používáme metody známé z integrálního počtu funkce jedné proměnné. Proto si zde nyní nejdůležitější z nich uvedeme. Integrál funkce jedné proměnné je podrobně rozebrán v [1], [2], [3].

1.2.1. Základní věty a definice

Věta 4 (Metoda per partes) *Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají na intervalu I derivace $u'(x)$ a $v'(x)$. Existuje-li na I primitivní funkce k jedné z funkcí $u'(x)v(x)$, $u(x)v'(x)$, existuje i k druhé z nich a platí*

$$\int u(x)v'(x)\ dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\ dx$$

Věta 5 (Substituční metoda) *Nechť funkce $f(t)$ je spojitá na intervalu (a,b), nechť funkce $\varphi(x)$ má na intervalu (α,β) spojitou derivaci a nechť $\varphi(x) \in (a,b)$ pro každé $x \in (\alpha,\beta)$. Potom na intervalu (α,β) platí*

$$\int f(t)\ dt = \int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\ dx,$$

kde $t = \varphi(x)$.

Věta 6 (Newton–Leibnizův vzorec) *Nechť funkce $f \in \mathcal{R}\left(\langle a,b\rangle\right)$ a F je primitivní funkce k f na $\langle a,b\rangle$. Potom platí*

$$\int_a^b f(x)\ dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

1.2.2. Přehled základních vzorců

$$
\begin{array}{lll}
\int a\ dx & = ax + c & a \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R} \\
\int x^n\ dx & = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c & n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R} \\
\int x^\alpha\ dx & = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c & \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},\ x \in \mathbb{R}^+ \\
\int \frac{1}{x}\ dx & = \ln|x| + c & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\
\int e^x\, dx & = e^x + c & x \in \mathbb{R} \\
\int a^x\, dx & = \frac{a^x}{\ln a} + c & a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, x \in \mathbb{R} \\
\int \sin x\ dx & = -\cos x + c & x \in \mathbb{R} \\
\int \cos x\ dx & = \sin x + c & x \in \mathbb{R} \\
\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx & = -\operatorname{cotg} x + c & x \in \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\} \\
\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx & = \operatorname{tg} x + c & x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\} \\
\int \frac{1}{1+x^2}\, dx & = \operatorname{arctg} x + c & x \in \mathbb{R} \\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx & = \arcsin x + c & x \in (-1, 1)\,, \text{ kde } c \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

Při výpočtech integrálů používáme následující pravidla:

$$\int c \cdot f(x)\ dx = c \cdot \int f(x)\ dx,$$

kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta

$$\int (f(x) \pm g(x))\ dx = \int f(x)\ dx \pm \int g(x)\ dx$$

2. Dvojný integrál na obdélníkové oblasti

V následující kapitole se budeme zabývat počítáním integrálů na obdélníkové oblasti. Naučíme se dvojný integrál převádět na dvojnásobný, tj. využívat Fubiniovu větu, a dále počítat podle vět uvedených na začátku práce.

Vypočítejte daný integrál pro danou množinu M.

1. $\displaystyle\int\int_M x^2y^2dxdy \qquad M = \langle 1,5\rangle \times \langle 0,3\rangle$

   Řešení: Dvojný integrál můžeme přepsat na integrál dvojnásobný, protože je zde splněna podmínka Fubiniho věty pro obdélník. Kartézský součin nám udává, jaké budou integrační meze.

   $$\int_1^5 \left(\int_0^3 x^2y^2dy\right)dx =$$

   Nejprve budeme funkci integrovat podle proměnné y a proto budeme x považovat za konstantu, kterou můžeme vytknout před integrál. Zintegrujeme tedy funkci y^2.

   $$= \int_1^5 x^2\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^3 dx =$$

   V dalším kroku využijeme Newton–Leibnizův vzorec.

   $$= \int_1^5 x^2 \cdot \frac{27}{3}dx =$$

   Získáváme tak určitý integrál funkce jedné proměnné x. Nejprve vytkneme konstantu $\frac{27}{3}$ před integrál a nalezneme primitivní funkci k funkci x^2.

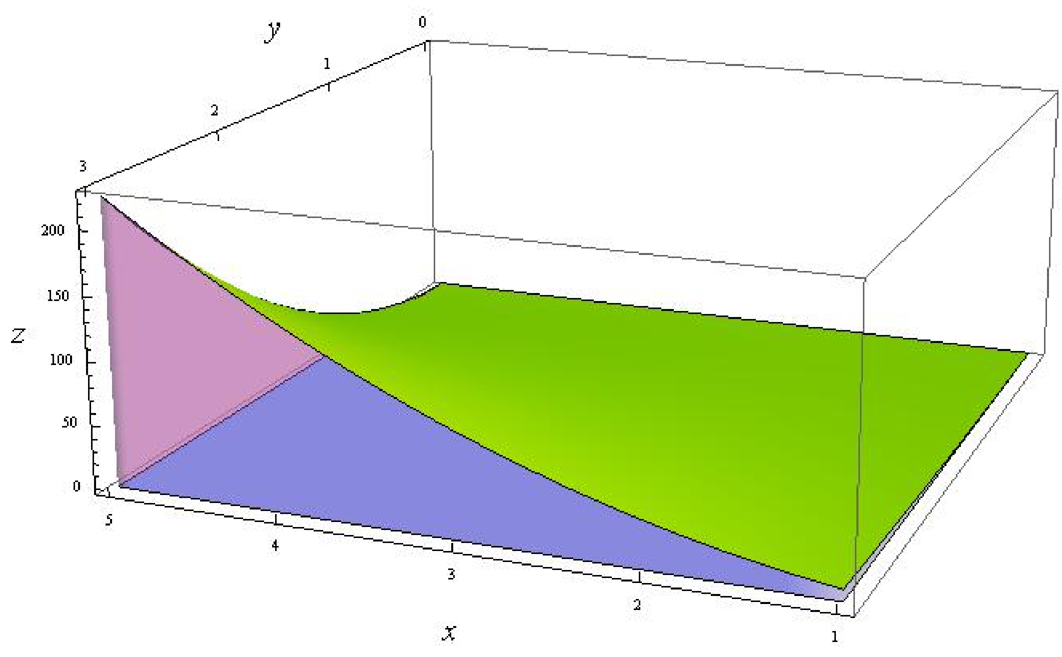
   $$= \frac{27}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^5 =$$

   Potom opět použijeme Newton–Leibnizův vzorec, pomocí kterého dojdeme ke konečnému výsledku.

$$= \frac{27}{3}\left(\frac{125}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{27}{3} \cdot \frac{124}{3} = 372$$

Poznámka: V tomto případě nezáleží na pořadí proměnných, podle kterých integrujeme. Mohli bychom tedy postupovat i tak, že bychom začali v prvním kroku integrovat podle proměnné x, takže bychom proměnnou y považovali za konstantu a vytkli ji před integrál. Dále bychom postupovali úplně stejně, jako v předchozím řešení. Pořadí proměnných, podle kterých integrujeme, volíme vždy tak, aby bylo pro nás snadnější integrál vypočítat.

Výsledek příkladu 1 můžeme interpretovat jako objem tělesa s dolní podstavou $M = \langle 1, 5\rangle \times \langle 0, 3\rangle$ v rovině (xy) a horní stěnou, která je tvořená částí grafu funkce $f(x, y) = x^2y^2$ definované na množině M (viz obrázek 1).



Obrázek 1: Těleso, jehož objem počítáme pomocí integrálu $\int\int_M x^2y^2dxdy$ na množině $M = \langle 1, 5\rangle \times \langle 0, 3\rangle$

2. $\displaystyle\int\int_M 4xy^2e^{x^2y}dxdy \qquad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$

Řešení: Protože je zde splněna podmínka Fubiniho věty pro obdélník, přepíšeme dvojný integrál na dvojnásobný. Budeme integrovat nejprve podle proměnné x, tudíž y budeme považovat za konstantu.

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 4xy^2e^{x^2y}dx \right) dy = \int_0^1 \left(4y^2 \int_0^1 xe^{x^2y}dx \right) dy =$$

V dalším kroku zavedeme substituci, kde x^2y položíme rovno t, abychom mohli snadno zintegrovat funkci xe^{x^2y}. Důsledkem této substituce dostáváme i nové integrační meze. Novou funkci proměnné t tedy zintegrujeme podle t a dále postupujeme stejně, jako u předchozího příkladu, tj. použijeme Newton–Leibnizův vzorec.

$$= \left| \begin{array}{l} t = x^2y \\ dt = 2xydx \\ x = 0 \to t = 0 \\ x = 1 \to t = y \end{array} \right| = \int_0^1 \left(2y \int_0^y e^t dt \right) dy = \int_0^1 \left(2y \left[e^t \right]_0^y \right) dy =$$

$$= \int_0^1 2y \left(e^y - 1 \right) dy = \int_0^1 2ye^y dy - \int_0^1 2y dy =$$

Dále použijeme Per partes, neboli integrujeme po částech podle známého vzorce z věty 4. Poté použijeme opět Newton–Leibnizův vzorec a dopočítáme integrál.

$$= \left| \begin{array}{ll} u = 2y & v' = e^y \\ u' = 2 & v = e^y \end{array} \right| = \left[2ye^y \right]_0^1 - \int_0^1 2e^y - \left[y^2 \right]_0^1 =$$

$$= \left[2ye^y \right]_0^1 - \left[2e^y \right]_0^1 - \left[y^2 \right]_0^1 = 2e - 0 - 2e + 2 - 1 + 0 = 1$$

Další příklady této kapitoly již nebudou tak podrobně komentované. Řeší se obdobně, jako ty vzorové, takže budou okomentovány vždy jen nějaké nové postupy nebo úpravy, které se ještě dříve nevyskytly.

3. $\displaystyle\int\int_M \frac{x}{y^2}dxdy \qquad M = \langle 0,6\rangle \times \langle 2,3\rangle$

Řešení:

$$\int\limits_0^6 \left(\int\limits_2^3 \frac{x}{y^2} dy \right) dx = \int\limits_0^6 x \left[-\frac{1}{y} \right]_2^3 dx = \int\limits_0^6 x \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) dx =$$

$$= \frac{-2+3}{6} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^6 = \frac{1}{6} \cdot \frac{36}{2} = 3$$

4. $\displaystyle\int\int_M \ln(xy^2)dxdy \qquad M = \langle 1,e\rangle \times \langle 1,e\rangle$

Řešení:

$$\int\limits_1^e \left(\int\limits_1^e \ln(xy^2) dy \right) dx = \int\limits_1^e \left(\int\limits_1^e \ln x dx \right) dy + \int\limits_1^e \left(\int\limits_1^e \ln y^2 dy \right) dx =$$

$$= \int\limits_1^e \left[x \cdot \ln x - x \right]_1^e dy + \int\limits_1^e \left[y \cdot \ln y^2 - 2y \right]_1^e dx =$$

$$= \int\limits_1^e \left[(e \cdot 1 - e) - (1 \cdot 0 - 1) \right] dy + \int\limits_1^e \left[(e \cdot 2 - 2e) - (1 \cdot 0 - 2) \right] dx =$$

$$= \int\limits_1^e 1 dy + \int\limits_1^e 2dx = [y]_1^e + [2x]_1^e = e - 1 + 2e - 2 = 3e - 3 = 3\,(e-1)$$

Poznámka: Integrál $\int\limits_1^e \left(\int\limits_1^e \ln y^2 dy \right) dx$, který jsme potřebovali spočítat ve druhém kroku, vypočítáme následovně:

$$\int \ln y^2 dy = \left| \begin{array}{l} t = y^2 \\ dt = 2ydy \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt = \left| \begin{array}{ll} u = \ln t & v' = \frac{1}{\sqrt{t}} = t^{-\frac{1}{2}} \\ u' = \frac{1}{t} & v = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{t} \end{array} \right| =$$

$$= \ln t \cdot 2\sqrt{t} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} \cdot 2 \cdot \sqrt{t} dt = \sqrt{t} \cdot \ln t - \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{t} \ln t - 2\sqrt{t} =$$

$$= y \cdot \ln y^2 - 2y + c$$

5. $\displaystyle\int\int_M x^2 y \sin\left(x+y^2\right) dxdy \qquad M = \langle \sin\pi, 2\pi\rangle \times \langle \sin\pi, \sqrt{\pi}\rangle$

Řešení: Zde si musíme nejprve uvědomit, že hraniční body intervalu, jejichž kartézský součin tvoří množinu M, jsou čísla a tudíž jde opět o integraci přes obdélník.

$$\int\limits_{\sin\pi}^{2\pi}\left(\int\limits_{\sin\pi}^{\sqrt{\pi}} x^2 y \sin\left(x+y^2\right) dy\right) dx = \int\limits_{0}^{2\pi}\left(\int\limits_{0}^{\sqrt{\pi}} x^2 y \sin\left(x+y^2\right) dy\right) dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = x+y^2 \\ dt = 2ydy \\ y = 0 \rightarrow t = x \\ y = \sqrt{\pi} \rightarrow t = x+\pi \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}\left(\int\limits_{x}^{x+\pi} x^2 \sin t dt\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi} x^2 \left[-\cos t\right]_x^{x+\pi} dx = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi} x^2 \left(\cos x - \cos\left(x+\pi\right)\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi} x^2 \cos x dx - \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi} x^2 \cos\left(x+\pi\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x\right]_0^{2\pi} -$$

$$- \frac{1}{2}\left[x^2\sin\left(x+\pi\right) + 2x\cos\left(x+\pi\right) - 2\sin\left(x+\pi\right)\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(4\pi^2\sin 2\pi + 4\pi\cos 2\pi - 2\sin 2\pi\right) -$$

$$- \frac{1}{2}\left(4\pi^2\sin 3\pi + 4\pi\cos 3\pi - 2\sin 3\pi\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(4\pi^2\cdot 0 + 4\pi\cdot 1 - 2\cdot 0\right) - \frac{1}{2}\left(4\pi^2\cdot 0 + 4\pi\cdot(-1) - 2\cdot 0\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 4\pi - \frac{1}{2}\left(-4\pi\right) = 2\pi + 2\pi = 4\pi$$

Poznámka: Integrály, které potřebujeme spočítat ve čtvrtém řádku výpočtu, si zintegrujeme zvlášť následujícím způsobem s využitím substituce.

$$\int x^2\cos x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x^2 & v' = \cos x \\ u' = 2x & v = \sin x \end{array} \right| = x^2\sin x - 2\int x\sin x dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x & v' = \sin x \\ u' = 1 & v = -\cos x \end{vmatrix} = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \int \cos x dx =$$

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c$$

$$\int x^2 \cos (x+\pi)\, dx = \begin{vmatrix} u = x^2 & v' = \cos (x+\pi) \\ u' = 2x & v = \sin (x+\pi) \end{vmatrix} =$$

$$= x^2 \sin (x+\pi) - 2 \int x \sin (x+\pi)\, dx = \begin{vmatrix} u = x & v' = \sin (x+\pi) \\ u' = 1 & v = -\cos (x+\pi) \end{vmatrix} =$$

$$= x^2 \sin (x+\pi) + 2x \cos (x+\pi) - 2 \int \cos (x+\pi)\, dx =$$

$$= x^2 \sin (x+\pi) + 2x \cos (x+\pi) - 2 \sin (x+\pi) + c$$

6. $\displaystyle \int\int_M \frac{1}{\left(\frac{x}{2} + 3y - 4\right)^2} dxdy \qquad M = \left\langle \cos \tfrac{\pi}{2}, -4\cos\pi \right\rangle \times \langle 2, 4\log 10 \rangle$

Řešení: Stejně jako u předchozího příkladu je zde nezvykle zadaná množina M, a to pomocí známých funkčních hodnot elementárních funkcí. Musíme si tudíž uvědomit, jaké hodnoty tyto zápisy vyjadřují.

$$\int_2^{4\log 10} \left(\int_{\cos\frac{\pi}{2}}^{-4\cos\pi} \frac{1}{\left(\frac{x}{2} + 3y - 4\right)^2} dx \right) dy = \int_2^4 \left(\int_0^4 \frac{1}{\left(\frac{x}{2} + 3y - 4\right)^2} dx \right) dy =$$

$$= \begin{vmatrix} t = \frac{x}{2} + 3y - 4 \\ dt = \frac{1}{2} dx \\ x = 0 \to t = 3y - 4 \\ x = 4 \to t = 3y - 2 \end{vmatrix} = \int_2^4 \left(\int_{3y-4}^{3y-2} \frac{2}{t^2} dt \right) dy = 2 \int_2^4 \left[-\frac{1}{t} \right]_{3y-4}^{3y-2} dy =$$

$$= -2 \int_2^4 \frac{1}{3y-2} dy + 2 \int_2^4 \frac{1}{3y-4} dy = \begin{vmatrix} u = 3y - 2 \\ du = 3dy \\ y = 2 \to u = 4 \\ y = 4 \to u = 10 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} v = 3y - 4 \\ dv = 3dy \\ y = 2 \to v = 2 \\ y = 4 \to v = 8 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{2}{3} \int_4^{10} \frac{1}{u} du + \frac{2}{3} \int_2^8 \frac{1}{v} dv = -\frac{2}{3} \left[\ln |u| \right]_4^{10} + \frac{2}{3} \left[\ln |v| \right]_2^8 =$$

$$= -\frac{2}{3} (\ln 10 - \ln 4) + \frac{2}{3} (\ln 8 - \ln 2) = \frac{2}{3} (\ln 8 + \ln 4 - \ln 2 - \ln 10) =$$

$$= \frac{2}{3}\ln\left(\frac{8\cdot 4}{2\cdot 10}\right) = \frac{2}{3}\ln\left(\frac{32}{20}\right) = \frac{2}{3}\ln\left(\frac{8}{5}\right)$$

7. $\displaystyle\int\int_M \frac{y^2}{\cos^2 x} dxdy \qquad M = \left\langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right\rangle \times \langle 0, 3\rangle$

Řešení:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int\limits_0^3 \frac{y^2}{\cos^2 x} dy\right) dx = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^3 dx = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{9}{\cos^2 x} dx = 9\cdot[\operatorname{tg} x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= 9\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right) = 9\left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 6\sqrt{3}$$

8. $\displaystyle\int\int_M e^x \cos x dxdy \qquad M = \left\langle \sin\pi, \frac{\pi}{2}\right\rangle \times \left\langle \sin\pi, 2\sin\frac{\pi}{6}\right\rangle$

Řešení:

$$\int\limits_{\sin\pi}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_{\sin\pi}^{2\sin\frac{\pi}{6}} e^x \cos x dy\right) dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_0^1 e^x \cos x dy\right) dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\, [y]_0^1\, dx =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x \cdot 1 dx = \begin{vmatrix} u = e^x & v' = \cos x \\ u' = e^x & v = \sin x \end{vmatrix} = [e^x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = e^x & v' = \sin x \\ u' = e^x & v = -\cos x \end{vmatrix} = [e^x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [e^x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$$

Nyní budeme pokračovat v řešení příkladu pomocí rekurence, protože jsme se dostali do situace, kdy nám vyšlo, že integrál funkce jedné proměnné $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$, který dostáváme na začátku druhého řádku výpočtu, je roven $[e^x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [e^x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$. Proto budeme řešit následující rovnici:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = [e^x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [e^x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = [e^x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [e^x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx &= \tfrac{1}{2}\,[e^x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \tfrac{1}{2}\,[e^x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} \cdot \sin\tfrac{\pi}{2} - e^0 \cdot \sin 0\right) + \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} \cdot \cos\tfrac{\pi}{2} - e^0 \cdot \cos 0\right) = \\
&= \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} \cdot 1 - e^0 \cdot 0\right) + \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} \cdot 0 - e^0 \cdot 1\right) = \\
&= \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)
\end{aligned}$$

9. $\displaystyle\int\int_M \frac{9x^2-5x-10}{x^3-x^2-4x+4} dxdy \qquad M = \langle 3,4\rangle \times \langle 0,1\rangle$

Řešení: Tento příklad budeme řešit rozkladem na parciální zlomky. Nejprve si upravíme jmenovatele na součinový tvar.

$x^3 - x^2 - 4x + 4 = x^2(x-1) - 4(x-1) = (x-1)(x^2-4) =$
$= (x-1)(x+2)(x-2)$

Nyní již můžeme integrál upravit do tvaru:

$$\int_3^4 \left(\int_0^1 \frac{9x^2-5x-10}{x^3-x^2-4x+4} dy\right) dx = \int_3^4 \left(\int_0^1 \frac{9x^2-5x-10}{(x-1)(x+2)(x-2)} dy\right) dx =$$

$$= \int_3^4 \left(\int_0^1 \left(\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2} + \frac{4}{x-2}\right) dy\right) dx =$$

$$= \int_3^4 \left(\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2} + \frac{4}{x-2}\right) \cdot [y]_0^1\, dx =$$

$$= [2 \cdot \ln|x-1| + 3 \cdot \ln|x+2| + 4 \cdot \ln|x-2|]_3^4 =$$

$$= [(2\ln 3 + 3\ln 6 + 4\ln 2) - (2\ln 2 + 3\ln 5 + 4\ln 1)] =$$
$$= \ln 9 + \ln 6^3 + \ln 16 - \ln 4 - \ln 125 - 0 = \ln\left(\frac{9\cdot 216\cdot 16}{4\cdot 125}\right) = \ln\frac{7776}{125}$$

Poznámka: Při výpočtu jsme použili rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky, což konkrétně v tomto příkladu vypadá takto:

$$\frac{9x^2-5x-10}{(x-1)(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-2} \qquad /\cdot (x-1)(x+2)(x-2)$$

$$9x^2-5x-10 = A(x+2)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+2)$$

$$9x^2-5x-10 = Ax^2-4A+Bx^2-3Bx+2B+Cx^2+Cx-2C$$

$$9x^2-5x-10 = x^2(A+B+C) + x^1(-3B+C) + x^0(-4A+2B-2C)$$

Dále jsme řešili soustavu tří rovnic o třech neznámých.

$A+B+C=9$

$-3B+C=-5$

$\underline{-4A+2B-2C=-10}$

Řešením soustavy jsou $A=2$, $B=3$ a $C=4$.

10. $\displaystyle\int\int_M \frac{x+7}{x^2-7x+10}dxdy \qquad M = \langle -10, \log 1\rangle \times \langle \cos 0, 3\ln e\rangle$

Řešení: Stejně jako v předchozím příkladu použijeme rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky. Také si musíme uvědomit, že množina M je opět obdélník, i když to tak na první pohled nevypadá.

$x^2-7x+10 = (x-2)(x-5)$

$$\int_{-10}^{\log 1}\left(\int_{\cos 0}^{3\ln e}\frac{x+7}{(x-2)(x-5)}dy\right)dx = \int_{-10}^{0}\left(\int_{1}^{3}\frac{x+7}{(x-2)(x-5)}dy\right)dx =$$

$$= \int_{-10}^{0}\left(\int_{1}^{3}\left(\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-5}\right)dy\right)dx = \int_{-10}^{0}\left(\int_{1}^{3}\left(\frac{-3}{x-2}+\frac{4}{x-5}\right)dy\right)dx =$$

$$= \int_{-10}^{0} \left(\frac{4}{x-5} - \frac{3}{x-2} \right) \cdot [y]_1^3 \, dx = \int_{-10}^{0} \left(\frac{4}{x-5} - \frac{3}{x-2} \right) \cdot (3-1) \, dx =$$

$$= 2 \cdot \int_{-10}^{0} \left(\frac{4}{x-5} - \frac{3}{x-2} \right) dx = 2 \cdot [4 \cdot \ln|x-5| - 3 \cdot \ln|x-2|]_{-10}^{0} =$$

$$= 2 \cdot [(4 \cdot \ln|-5| - 3 \cdot \ln|-2|) - (4 \cdot \ln|-15| - 3 \cdot \ln|-12|)] =$$

$$= 2 \cdot \left(\ln 5^4 + \ln 12^3 - \ln 2^3 - \ln 15^4\right) = 2 \cdot \ln \left(\frac{5^4 \cdot 12^3}{2^3 \cdot 15^4} \right) =$$

$$= 2 \cdot \ln \frac{8}{3} = \ln \left(\frac{8}{3} \right)^2 = \ln \frac{64}{9}$$

11. $$\int\int_M \frac{2x^2 - 2x + 8}{x^3 - 2x^2 - 16x + 32} \cdot y \; dxdy \qquad M = \langle -2, 1 \rangle \times \langle 0, 4 \rangle$$

Řešení: Příklad opět řešíme rozkladem racionální lomené funkce na parciální zlomky. Platí totiž vztah:

$x^3 - 2x^2 - 16x + 32 = x^2 (x-2) - 16 (x-2) = (x-2) (x^2 - 16) =$
$= (x-2) (x-4) (x+4)$

$$\int_{-2}^{1} \left(\int_{0}^{4} \frac{2x^2 - 2x + 8}{x^3 - 2x^2 - 16x + 32} \cdot y dy \right) dx =$$

$$= \int_{-2}^{1} \left(\int_{0}^{4} \frac{2x^2 - 2x + 8}{(x-2)(x-4)(x+4)} \cdot y dy \right) dx =$$

$$= \int_{-2}^{1} \frac{2x^2 - 2x + 8}{(x-2)(x-4)(x+4)} \cdot \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^4 dx =$$

$$= 8 \cdot \int_{-2}^{1} \left(\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{x+4} \right) dx =$$

$$= 8 \cdot \int_{-2}^{1} \left(\frac{-1}{x-2} + \frac{2}{x-4} + \frac{1}{x+4} \right) dx =$$

$$= 8\left[-\ln|x-2| + 2\ln|x-4| + \ln|x+4|\right]_{-2}^{1} =$$

$$= 8\left[-\ln|-1| + 2\ln|-3| + \ln 5 + \ln|-4| - 2\ln|-6| - \ln 2\right] =$$

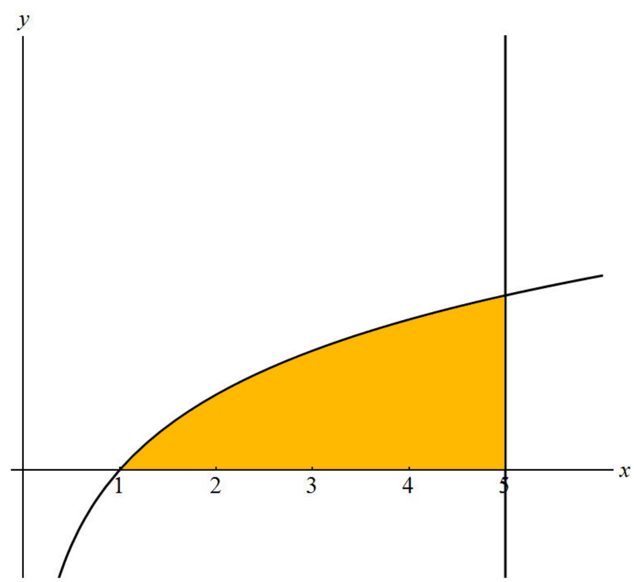
$$= 8\left(\ln 9 + \ln 5 + \ln 4 - \ln 36 - \ln 2\right) = 8 \cdot \ln\frac{9\cdot 5\cdot 4}{36\cdot 2} = 8\ln\frac{5}{2}$$

3. Dvojný integrál na elementárních množinách

V této kapitole se naučíme řešit dvojné integrály na elementárních množinách. To znamená, že integrační množina již nebude zadaná kartézským součinem dvou intervalů, jako tomu bylo doposud, ale bude dána funkcemi. Abychom mohli určit integrační meze, budeme si vždy muset v prvé řadě danou množinu M nakreslit. Jakmile určíme integrační meze, postup výpočtu je již obdobný, jako u dvojného integrálu na obdélníku.

12. $\displaystyle\int\int_M e^y dxdy \qquad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 1 \le x \le 5; 0 \le y \le \ln x\}$

Řešení: Nejprve si namalujeme obrázek - danou množinu, přes kterou budeme integrovat. Množina je dána nerovnicemi $1 \le x \le 5$ a $0 \le y \le \ln x$. Na základě obrázku 2 určíme integrační meze.



Obrázek 2: $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 1 \le x \le 5; 0 \le y \le \ln x\}$

Dále přepíšeme dvojný integrál na dvojnásobný pomocí věty 2 (Fubiniova pro elementární množinu). Daná integrační množina je elementární vzhledem k proměnné x.

$$\int_1^5 \left(\int_0^{\ln x} e^y dy \right) dx =$$

Protože je integrační množina elementární vzhledem k proměnné x, budeme nejprve integrovat podle proměnné y.

$$= \int_1^5 [e^y]_0^{\ln x}\, dx =$$

Využitím Newton–Leibnizova vzorce a postupným dosazením dostaneme jednoduchý integrál funkce proměnné x.

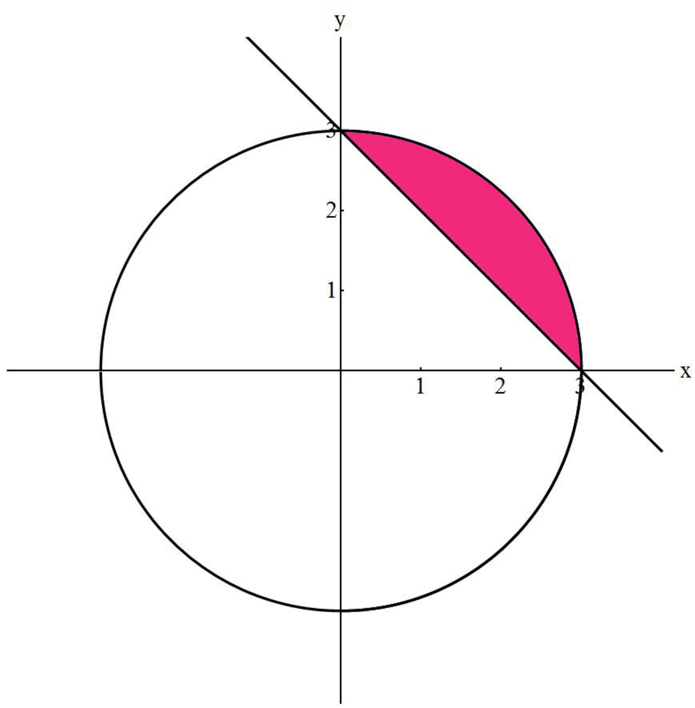
$$= \int_1^5 \left(e^{\ln x} - e^0\right) dx = \int_1^5 (x-1)\, dx =$$

Vypočítaný integrál dále řešíme opět Newton-Leibnizovým vzorcem. Po jeho použití dojdeme ke konečnému výsledku.

$$= \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^5 = \frac{25}{2} - 5 - \frac{1}{2} + 1 = 12 - 4 = 8$$

13. $\displaystyle\int\int_M 20x^2y^3dxdy \qquad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \leq 9; y+x-3 \geq 0\}$

Řešení: Stejně jako v předchozím příkladu si nejprve namalujeme danou množinu, přes kterou budeme integrovat. Množina je dána dvěma nerovnicemi. Nerovnice $x^2+y^2 \leq 9$ popisuje kruh se středem v bodě $[0,0]$ a poloměrem 3 a $y+x-3 \geq 0$ popisuje polorovinu. Na základě obrázku 3 určíme integrační meze. Tentokrát je množina elementární vzhledem k proměnné y.



Obrázek 3: $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \leq 9; y+x-3 \geq 0\}$

Dvojný integrál si přepíšeme na dvojnásobný, opět pomocí věty 2 (Fubiniova pro elementární množinu).

$$\int_0^3 \left(\int_{3-y}^{\sqrt{9-y^2}} 20x^2y^3dx \right) dy =$$

Jak již bylo řečeno, množina je elementární vzhledem k proměnné y a budeme tedy integrovat nejprve podle proměnné x, tzn. y budeme považovat za konstantu.

$$= \int_0^3 \left(20y^3 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{3-y}^{\sqrt{9-y^2}} \right) dy =$$

Dále využijeme Newton–Leibnizův vzorec.

$$= \int_0^3 \frac{20}{3} y^3 \left[\sqrt{(9-y^2)^3} - (3-y)^3 \right] dy =$$

$$= \frac{20}{3} \int_0^3 y^3 \left(9-y^2\right)^{\frac{3}{2}} dy - \frac{20}{3} \int_0^3 y^3 \left(3-y\right)^3 dy =$$

Dostali jsme rozdíl dvou integrálů, které nejsme schopni vypočítat podle vzorce, ale musíme si je vypočítat každý zvlášť.

Nejdříve si spočítáme jen primitivní funkci. Integrál $\int y^3 \left(9-y^2\right)^{\frac{3}{2}} dy$ budeme počítat pomocí dvou substitucí. Nejprve zavedeme první z nich, kde y^2 nahradíme t.

$$\int y^3 \left(9-y^2\right)^{\frac{3}{2}} dy = \begin{vmatrix} t = y^2 \\ dt = 2ydy \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \int t(9-t)^{\frac{3}{2}} dt =$$

V dalším kroku zavedeme substituci $s = 9 - t$ a upravíme, aby se nám lépe integrovalo.

$$= \begin{vmatrix} s = 9-t \\ ds = -dt \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2} \int -(9-s) \cdot s^{\frac{3}{2}} ds = \frac{1}{2} \int (s-9) \cdot s^{\frac{3}{2}} ds =$$

$$= \frac{1}{2} \int \left(s^{\frac{5}{2}} - 9s^{\frac{3}{2}} \right) ds =$$

Nyní již můžeme integrovat podle vzorce $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ a postupnými matematickými úpravami integrál dopočítáme.

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{s^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} - \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \frac{s^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{1}{7} \cdot s^{\frac{7}{2}} - \frac{9}{5} \cdot s^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{7} \cdot (9-t)^{\frac{7}{2}} - \frac{9}{5} \cdot (9-t)^{\frac{5}{2}} =$$

$$= \frac{1}{7} \cdot \left(9-y^2\right)^{\frac{7}{2}} - \frac{9}{5} \cdot \left(9-y^2\right)^{\frac{5}{2}}$$

Ještě si musíme zvlášť vypočítat integrál $\int y^3 \left(3-y\right)^3 dy$. Nejprve roznásobíme závorku pomocí vzorce $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ a poté ještě vynásobíme výrazem y^3. Dále počítáme postupně jednotlivé integrály.

$$\int y^3 (3-y)^3 \, dy = \int y^3 \left(27 - 27y + 9y^2 - y^3\right) dy =$$
$$= \int \left(27y^3 - 27y^4 + 9y^5 - y^6\right) dy = \frac{27}{4}y^4 - \frac{27}{5}y^5 + \frac{9}{6}y^6 - \frac{y^7}{7}$$

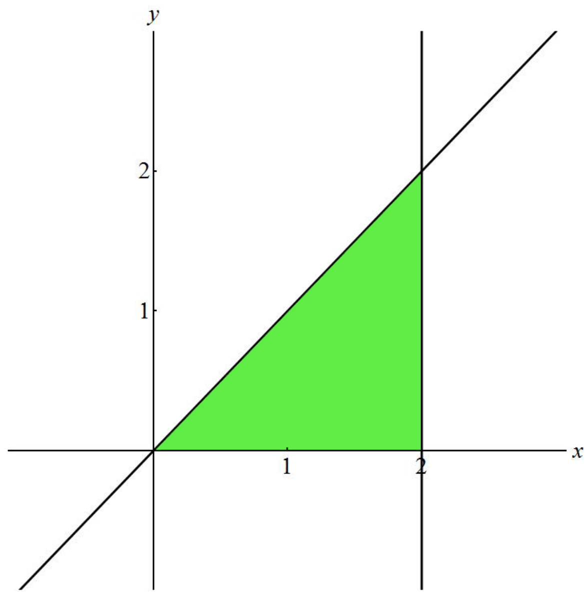
Nyní již můžeme pokračovat ve výpočtu samotného integrálu. Využijeme Newton–Leibnizův vzorec a postupnými úpravami dojdeme ke konečnému výsledku.

$$= \frac{20}{3}\left[\frac{(9-y^2)^{\frac{7}{2}}}{7} - \frac{9\,(9-y^2)^{\frac{5}{2}}}{5}\right]_0^3 - \frac{20}{3}\left[\frac{27}{4}y^4 - \frac{27}{5}y^5 + \frac{9}{6}y^6 - \frac{y^7}{7}\right]_0^3 =$$
$$= \frac{20}{3}\left[\frac{(9-9)^{\frac{7}{2}}}{7} - \frac{9\,(9-9)^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{9^{\frac{7}{2}}}{7} + \frac{9 \cdot 9^{\frac{5}{2}}}{5}\right] -$$
$$- \frac{20}{3}\left[\frac{27 \cdot 81}{4} - \frac{27 \cdot 243}{5} + \frac{9 \cdot 729}{6} - \frac{2187}{7}\right] = \frac{20}{3} \cdot \frac{4374}{35} - \frac{729}{7} =$$
$$= \frac{5832}{7} - \frac{729}{7} = 729$$

Další příklady této kapitoly již nebudou tak podrobně komentované. Řeší se obdobně, jako ty vzorové, takže budou okomentovány vždy jen nějaké nové postupy nebo úpravy, které se ještě dříve nevyskytly.

14. $\int\int_M \ln\left(9-x^2\right) dxdy$ M je uzavřený trojúhelník s vrcholy v bodech $A=[0,0];\ B=[2,0];\ C=[2,2]$

Řešení:



Obrázek 4: Množina M daná body $A=[0,0];\ B=[2,0];\ C=[2,2]$

V tomto příkladu je množina M zadaná jinak, než v dosud komentovaných příkladech. Nemáme zde dány funkce, ale pouze body určující plochu, proto si tyto funkce musíme určit sami. Po nakreslení daného trojúhelníku vidíme, že podle proměnné x budeme integrovat na intervalu $\langle 0,2\rangle$ a y máme od 0 do funkce $y=x$.

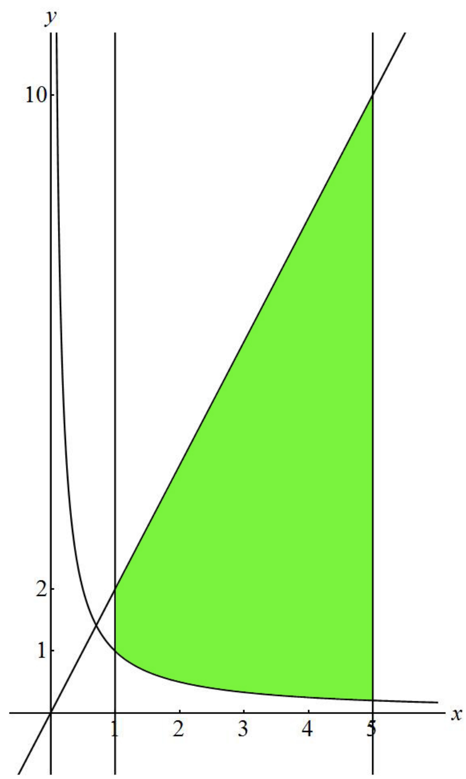
$$\int_0^2\left(\int_0^x \ln\left(9-x^2\right) dy\right) dx = \int_0^2 \ln\left(9-x^2\right) [y]_0^x\, dx = \int_0^2 \ln\left(9-x^2\right)\cdot x dx =$$

$$= \left|\begin{array}{l} t=9-x^2 \\ dt=-2xdx \\ x=0\rightarrow t=9 \\ x=2\rightarrow t=5 \end{array}\right| = -\frac{1}{2}\int_9^5 \ln t dt = \frac{1}{2}\int_5^9 \ln t dt = \frac{1}{2}\left[t\cdot\ln t - t\right]_5^9 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(9\cdot\ln 9 - 9 - 5\cdot\ln 5 + 5\right) = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{9^9}{5^5} - 4\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{9^9}{5^5} - 2$$

15. $\displaystyle\int\int_M \frac{2x^2}{y^2}dxdy \qquad M = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; 1\le x\le 5; \tfrac{1}{x}\le y\le 2x\right\}$

Řešení:



Obrázek 5: $M = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; 1\le x\le 5; \tfrac{1}{x}\le y\le 2x\right\}$

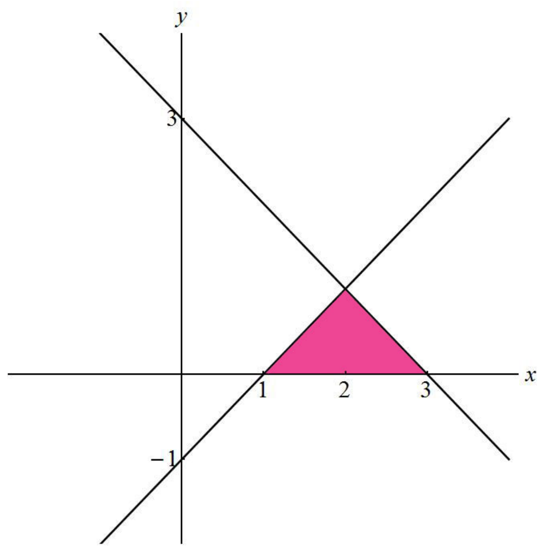
$$\int_1^5\left(\int_{\frac{1}{x}}^{2x}\frac{2x^2}{y^2}dy\right)dx = \int_1^5 2x^2\left[-\frac{1}{y}\right]_{\frac{1}{x}}^{2x}dx = \int_1^5 2x^2\left(-\frac{1}{2x}+x\right)dx =$$

$$= \int_1^5\left(-x+2x^3\right)dx = \left[\frac{2x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_1^5 = \left[\frac{x^4}{2}-\frac{x^2}{2}\right]_1^5 =$$

$$= \frac{5^4-5^2}{2}+\frac{1-1}{2} = \frac{5^2\left(5^2-1\right)}{2} = \frac{25\cdot 24}{2} = 300$$

16. $\displaystyle\int\int_M \left(x^2 - 5y\right) dxdy \qquad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0; y \leq x - 1; x + y \leq 3\}$

Řešení:



Obrázek 6: $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0; y \leq x - 1; x + y \leq 3\}$

Tento příklad musíme řešit jako součet dvou integrálů, tj. dělením dané množiny M na dvě množiny. Je to tím, že na intervalu $\langle 1, 2\rangle$ je plocha shora omezená funkcí $y = x - 1$ a na intervalu $\langle 2, 3\rangle$ je omezená funkcí $y = 3 - x$. Proto musíme vypočítat každý integrál zvlášť a následně je sečíst.

$$\int_1^2 \left(\int_0^{x-1} \left(x^2 - 5y\right) dy\right) dx + \int_2^3 \left(\int_0^{3-x} \left(x^2 - 5y\right) dy\right) dx =$$

$$= \int_1^2 \left[x^2 y - \frac{5y^2}{2}\right]_0^{x-1} dx + \int_2^3 \left[x^2 y - \frac{5y^2}{2}\right]_0^{3-x} dx =$$

$$= \int_1^2 \left(x^2 (x-1) - \frac{5\left(x^2 - 2x + 1\right)}{2}\right) dx +$$

$$+ \int_2^3 \left(x^2 (3-x) - \frac{5\left(9 - 6x + x^2\right)}{2}\right) dx =$$

$$= \int_1^2 \left(x^3 - x^2 - \frac{5}{2}x^2 + 5x - \frac{5}{2}\right) dx + \int_2^3 \left(3x^2 - x^3 - \frac{45}{2} + 15x - \frac{5}{2}x^2\right) dx =$$

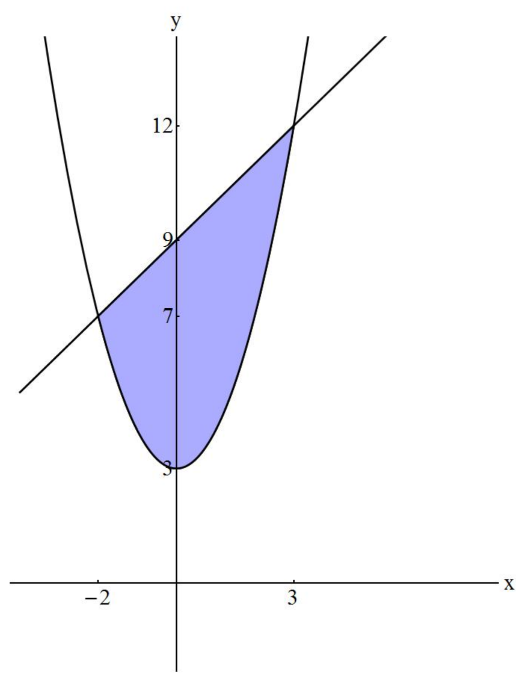
$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{5x^3}{6} + \frac{5x^2}{2} - \frac{5x}{2}\right]_1^2 + \left[x^3 - \frac{x^4}{4} - \frac{45}{2}x + \frac{15}{2}x^2 - \frac{5}{6}x^3\right]_2^3 =$$

$$= \left[\left(\frac{16}{4} - \frac{8}{3} - \frac{40}{6} + 10 - 5\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{5}{6} + \frac{5}{2} - \frac{5}{2}\right)\right] +$$

$$+ \left[\left(27 - \frac{81}{4} - \frac{135}{2} + \frac{135}{2} - \frac{135}{6}\right) - \left(8 - \frac{16}{4} - 45 + 30 - \frac{40}{6}\right)\right] = \frac{5}{2}$$

17. $\displaystyle\int\int_M 6\,(2x+y)\,dxdy \qquad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y - x^2 - 3 \geq 0; y - x - 9 \leq 0\}$

Řešení:



Obrázek 7: $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y - x^2 - 3 \geq 0; y - x - 9 \leq 0\}$

$$\int_{-2}^{3} \left(\int_{x^2+3}^{x+9} 6\,(2x+y)\,dy\right) dx = \int_{-2}^{3} \left(\int_{x^2+3}^{x+9} (12x+6y)\,dy\right) dx =$$

$$= \int_{-2}^{3} \left[12xy + 3y^2\right]_{x^2+3}^{x+9} dx =$$

$$= \int_{-2}^{3} \left[12x\,(x+9) + 3\,(x+9)^2 - 12x\left(x^2+3\right) - 3\left(x^2+3\right)^2\right] dx =$$

$$= \int_{-2}^{3} \left(12x^2 + 108x + 3x^2 + 54x + 243 - 12x^3 - 36x - 3x^4 - 18x^2 - 27\right) dx =$$

$$= \int_{-2}^{3} \left(-3x^2 + 126x - 12x^3 - 3x^4 + 216x\right) dx =$$

$$= \left[-x^3 + \frac{126}{2}x^2 - \frac{12}{4}x^4 - \frac{3}{5}x^5 + 216x\right]_{-2}^{3} =$$

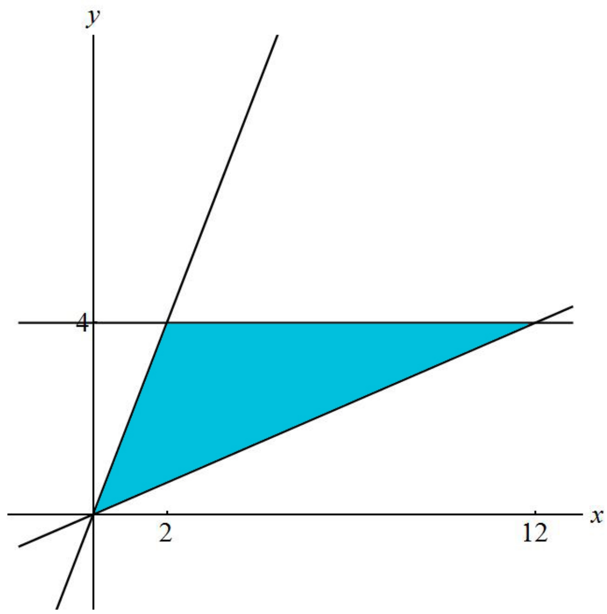
$$= \left(-27 + \frac{126 \cdot 9}{2} - \frac{12 \cdot 81}{4} - \frac{3 \cdot 243}{5} + 216 \cdot 3\right) -$$

$$- \left(8 + 126 \cdot 2 - 12 \cdot 4 + \frac{3 \cdot 32}{5} - 216 \cdot 2\right) = \frac{3996}{5} + \frac{1004}{5} = 1000$$

Poznámka: V tomto příkladu jsme si museli integrační meze vypočítat, a to jako průniky dvou křivek. Zavedli jsme tedy rovnici $x^2+3 = x+9$ a jejím vyřešením jsme dostali kořeny $x_1 = 3$, $x_2 = -2$, což jsou naše integrační meze.

18. $\displaystyle\int\int_M xydxdy \qquad M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \leq 4; y \leq 2x; y \geq \frac{1}{3}x\right\}$

Řešení:



Obrázek 8: $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \leq 4; y \leq 2x; y \geq \frac{1}{3}x\right\}$

$$\int\limits_0^2 \left(\int\limits_{\frac{1}{3}x}^{2x} xydy\right) dx + \int\limits_2^{12} \left(\int\limits_{\frac{1}{3}x}^{4} xydy\right) dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 x\left[y^2\right]_{\frac{1}{3}x}^{2x} dx + \frac{1}{2}\int\limits_2^{12} x\left[y^2\right]_{\frac{1}{3}x}^{4} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^2 x\left(4x^2 - \frac{1}{9}x^2\right) dx + \frac{1}{2}\int\limits_2^{12} x\left(16 - \frac{1}{9}x^2\right) dx =$$

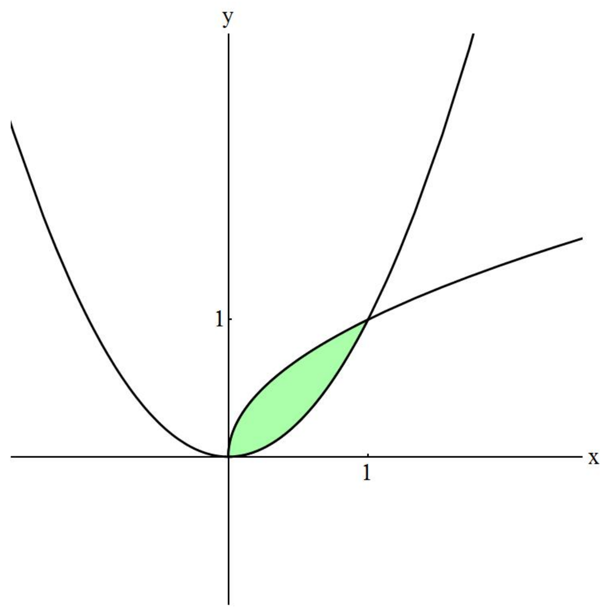
$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^2 \left(4x^3 - \frac{1}{9}x^3\right) dx + \frac{1}{2}\int\limits_2^{12} \left(16x - \frac{1}{9}x^3\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^4 - \frac{1}{9}\cdot\frac{x^4}{4}\right]_0^2 + \frac{1}{2}\left[8x^2 - \frac{1}{9}\cdot\frac{x^4}{4}\right]_2^{12} = \frac{1}{2}\left[\left(16 - \frac{1}{9}\cdot\frac{16}{4}\right) - 0\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\left(8\cdot 144 - \frac{1}{9}\cdot\frac{12^4}{4}\right) - \left(32 - \frac{1}{9}\cdot\frac{16}{4}\right)\right] = 280$$

19. $\displaystyle\int\int_M 3\ln x dxdy \qquad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \geq x^2; y^2 \leq x\}$

Řešení:



Obrázek 9: $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \geq x^2; y^2 \leq x\}$

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} 3\ln x dy \right) dx = \int_0^1 (3\ln x)\,[y]_{x^2}^{\sqrt{x}}\, dx = \int_0^1 \left(3\sqrt{x}\ln x - 3x^2 \ln x\right) dx =$$

$$= 3\int_0^1 \sqrt{x}\ln x dx - 3\int_0^1 x^2 \ln x dx = 3\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln x - \frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\ln x + \frac{x^3}{9}\right]_0^1 =$$

$$= 3\left(\frac{2}{3}\cdot 1 \cdot 0 - \frac{4}{9} - 0 + \frac{1}{9}\right) = 3\cdot\left(-\frac{3}{9}\right) = -1$$

Poznámka: Integrály $\int \sqrt{x}\ln x dx$ a $\int x^2 \ln x dx$, které se vyskytly na začátku druhého řádku výpočtu, jsou zintegrovány zvlášť v této poznámce. Vypočítáme si zde jen primitivní funkce.

$$\int \sqrt{x}\ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x & v' = \sqrt{x} \\ u' = \frac{1}{x} & v = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \end{matrix} \right| = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} dx =$$

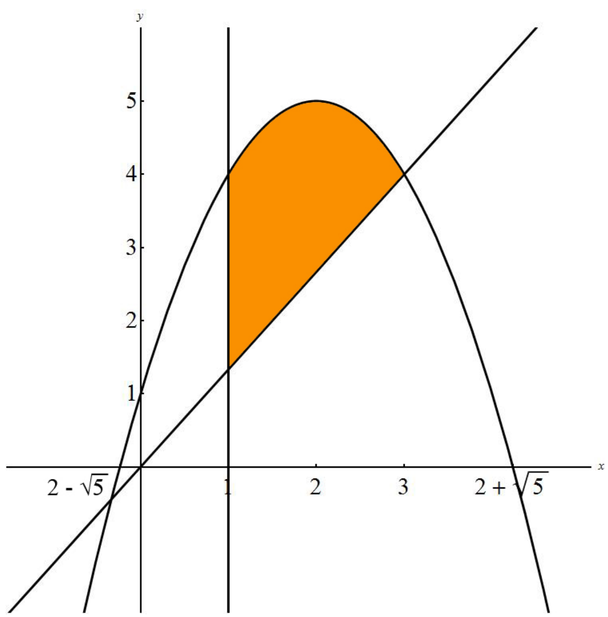
$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln x - \frac{2}{3}\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln x - \frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int x^2 \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & v' = x^2 \\ u' = \frac{1}{x} & v = \frac{x^3}{3} \end{vmatrix} = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{3} dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c$$

20. $\displaystyle\int\int_M 5x^2 dxdy \qquad M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \le 1 - x^2 + 4x; y \ge \tfrac{4}{3}x; x \ge 1\right\}$

Řešení:



Obrázek 10: $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \le 1 - x^2 + 4x; y \ge \frac{4}{3}x; x \ge 1\right\}$

$$\int_1^3 \left(\int_{\frac{4}{3}x}^{1-x^2+4x} 5x^2 dy \right) dx = \int_1^3 5x^2 \left[y\right]_{\frac{4}{3}x}^{1-x^2+4x} dx =$$

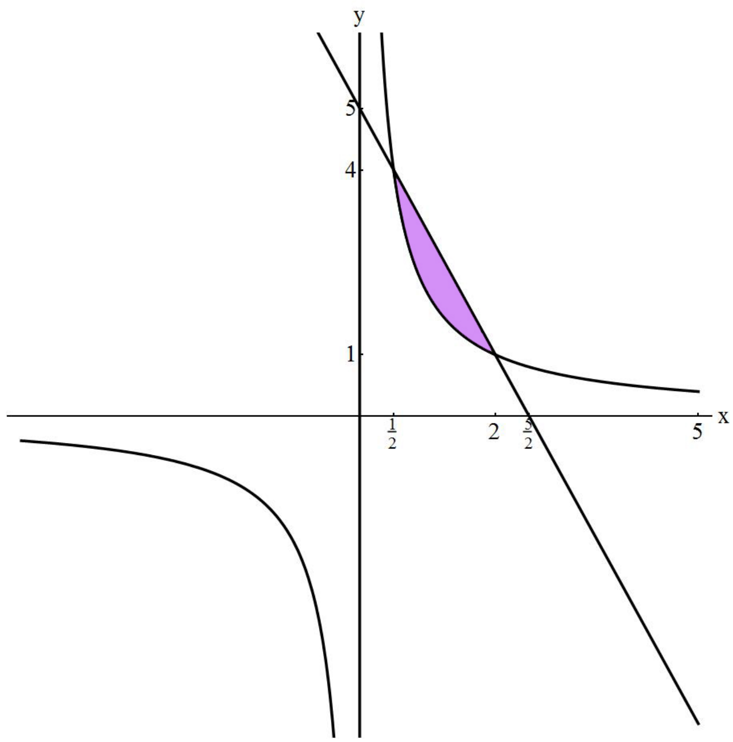
$$= \int_1^3 5x^2 \left(1 - x^2 + 4x - \frac{4}{3}x\right) dx = \int_1^3 \left(5x^2 - 5x^4 + 20x^3 - \frac{20}{3}x^3\right) dx =$$

$$= \left[\frac{5}{3}x^3 - x^5 + \frac{20}{4}x^4 - \frac{20}{12}x^4\right]_1^3 =$$

$$= \left(\frac{5 \cdot 27}{3} - 3^5 + \frac{20 \cdot 81}{4} - \frac{20 \cdot 81}{12}\right) - \left(\frac{5}{3} - 1 + \frac{20}{4} - \frac{20}{12}\right) = 68$$

21. $\displaystyle\int\int_M 4y dx dy \qquad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; xy \geq 2; 2x + y - 5 \leq 0\}$

Řešení:



Obrázek 11: $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; xy \geq 2; 2x + y - 5 \leq 0\}$

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\int\limits_{\frac{2}{x}}^{5-2x} 4y dy \right) dx = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \left[2y^2 \right]_{\frac{2}{x}}^{5-2x} dx = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \left[2\,(5-2x)^2 - 2 \cdot \frac{4}{x^2} \right] dx =$$

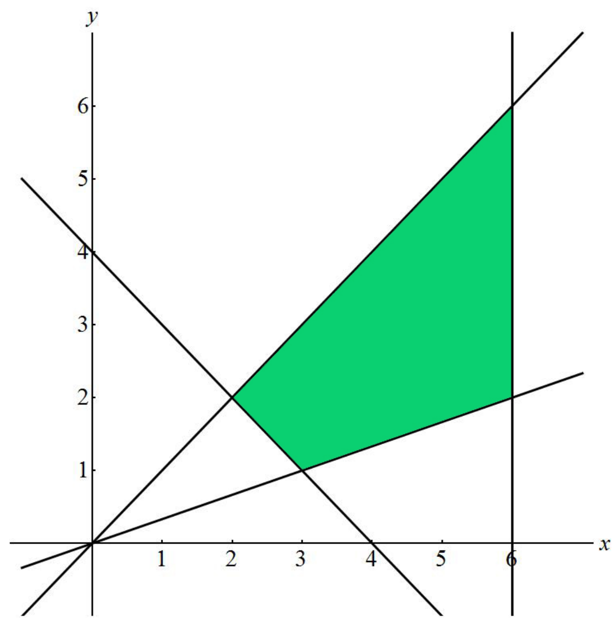
$$= \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \left[2 \cdot \left(25 - 20x + 4x^2\right) - \frac{8}{x^2} \right] dx = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \left(50 - 40x + 8x^2 - 8 \cdot \frac{1}{x^2} \right) dx =$$

$$= \left[50x - 20x^2 + \frac{8}{3}x^3 + 8 \cdot \frac{1}{x} \right]_{\frac{1}{2}}^{2} = \left(100 - 80 + \frac{64}{3} + \frac{8}{2} \right) -$$

$$- \left(25 - 5 + \frac{8 \cdot \frac{1}{8}}{3} + 16 \right) = 24 + \frac{64}{3} - 20 - 16 - \frac{1}{3} = 9$$

22. $\displaystyle\int\int_M 3xydxdy \qquad M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \leq x; y \geq \tfrac{1}{3}x; y \geq 4-x; x \leq 6\right\}$

Řešení:



Obrázek 12: $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \leq x; y \geq \tfrac{1}{3}x; y \geq 4-x; x \leq 6\right\}$

$$\int_2^3 \left(\int_{4-x}^{x} 3xydy\right) dx + \int_3^6 \left(\int_{\frac{1}{3}x}^{x} 3xydy\right) dx = \int_2^3 3x \left[\frac{y^2}{2}\right]_{4-x}^{x} dx + \int_3^6 3x \left[\frac{y^2}{2}\right]_{\frac{1}{3}x}^{x} dx =$$

$$= \int_2^3 \frac{3}{2}x\left(x^2 - 16 + 8x - x^2\right) dx + \int_3^6 \frac{3}{2}x\left(x^2 - \frac{1}{9}x^2\right) dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int_2^3 \left(x^3 - 16x + 8x^2 - x^3\right) dx + \frac{3}{2}\int_3^6 \left(x^3 - \frac{1}{9}x^3\right) dx =$$

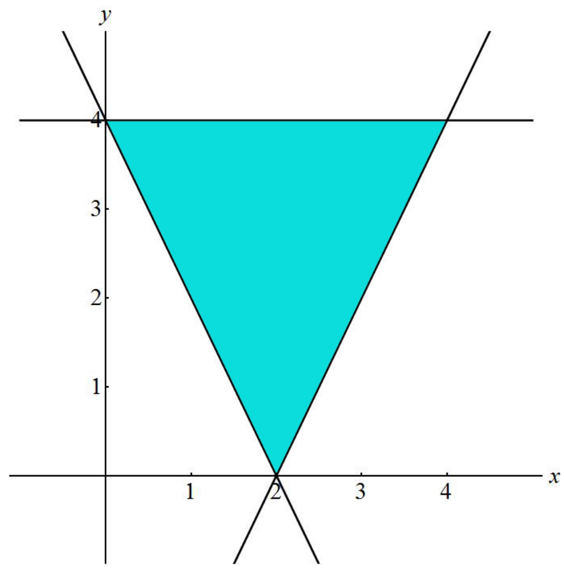
$$= \frac{3}{2}\left[\frac{1}{4}x^4 - 8x^2 + \frac{8}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_2^3 + \frac{3}{2}\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{36}x^4\right]_3^6 =$$

$$= \frac{3}{2}\left[\left(\frac{81}{4} - 72 + \frac{8\cdot 27}{3} - \frac{81}{4}\right) - \left(\frac{16}{4} - 32 + \frac{64}{3} - \frac{16}{4}\right)\right] +$$

$$+ \frac{3}{2}\left[\left(\frac{6^4}{4} - \frac{6^4}{36}\right) - \left(\frac{3^4}{4} - \frac{3^4}{36}\right)\right] = 16 + 405 = 421$$

23. $\int\int_M (2x+3y)\,dxdy$ M je trojúhelník s vrcholy $A=[0,4]\,,B=[2,0]\,,$ $C=[4,4]$

Řešení:



Obrázek 13: Množina M dána body $A=[0,4]\,,B=[2,0]\,,C=[4,4]$

$$\int_0^2\left(\int_{4-2x}^4 (2x+3y)\,dy\right)dx+\int_2^4\left(\int_{2x-4}^4 (2x+3y)\,dy\right)dx=$$

$$=\int_0^2\left[2xy+\frac{3}{2}y^2\right]_{4-2x}^4 dx+\int_2^4\left[2xy+\frac{3}{2}y^2\right]_{2x-4}^4 dx=$$

$$=\int_0^2\left[2x\cdot 4+\frac{3\cdot 16}{2}-2x\,(4-2x)-\frac{3}{2}\,(4-2x)^2\right]dx+$$

$$+\int_2^4\left[2x\cdot 4+\frac{3\cdot 16}{2}-2x\,(2x-4)-\frac{3}{2}\,(2x-4)^2\right]dx=$$

$$=\int_0^2\left(8x+24-8x+4x^2-\frac{3}{2}\left(16-16x+4x^2\right)\right)dx+$$

$$+\int_{2}^{4}\left(8x+24-4x^2+8x-\frac{3}{2}\left(4x^2-16x+16\right)\right)dx=$$

$$=\int_{0}^{2}\left(24+4x^2-24+24x-6x^2\right)dx+$$

$$+\int_{2}^{4}\left(16x+24-4x^2-6x^2+24x-24\right)dx=$$

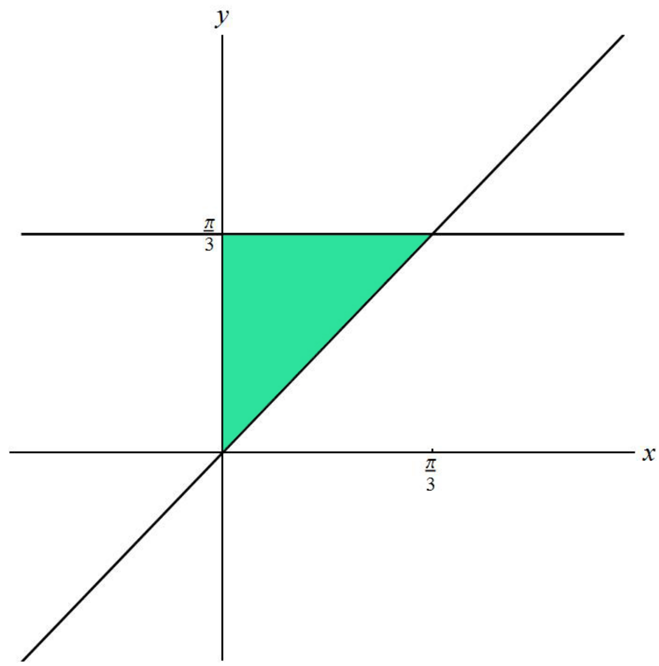
$$=\int_{0}^{2}\left(24x-2x^2\right)dx+\int_{2}^{4}\left(40x-10x^2\right)dx=$$

$$=\left[\frac{24}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3\right]_0^2+\left[\frac{40}{2}x^2-\frac{10}{3}x^3\right]_2^4=$$

$$=\left(12\cdot 4-\frac{16}{3}\right)+\left(20\cdot 16-\frac{10\cdot 4^3}{3}-20\cdot 4+\frac{80}{3}\right)=96$$

24. $\displaystyle\int\int_M \sin\left(2x+\frac{y}{2}\right)dxdy \qquad M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; y\geq x; y\leq \tfrac{\pi}{3}; x\geq 0\right\}$

Řešení:



Obrázek 14: $M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; y\geq x; y\leq \frac{\pi}{3}; x\geq 0\right\}$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\int\limits_x^{\frac{\pi}{3}}\sin\left(2x+\frac{y}{2}\right)dy\right)dx=\left|\begin{array}{l} t=2x+\frac{y}{2}\\ dt=\frac{1}{2}dy\\ y=x\to t=2x+\frac{x}{2}=\frac{5}{2}x\\ y=\frac{\pi}{3}\to t=2x+\frac{\pi}{6}\end{array}\right|=$$

$$=2\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\int\limits_{\frac{5}{2}x}^{2x+\frac{\pi}{6}}\sin(t)\,dt\right)dx=-2\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\left[\cos(t)\right]_{\frac{5}{2}x}^{2x+\frac{\pi}{6}}dx=$$

$$=-2\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)dx+2\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\left(\frac{5}{2}x\right)dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l} u=2x+\frac{\pi}{6}\\ du=2dx\\ x=0\to u=\frac{\pi}{6}\\ x=\frac{\pi}{3}\to u=\frac{5\pi}{6}\end{array}\right|;\left|\begin{array}{l} v=\frac{5}{2}x\\ dv=\frac{5}{2}dx\\ x=0\to v=0\\ x=\frac{\pi}{3}\to v=\frac{5\pi}{6}\end{array}\right|=$$

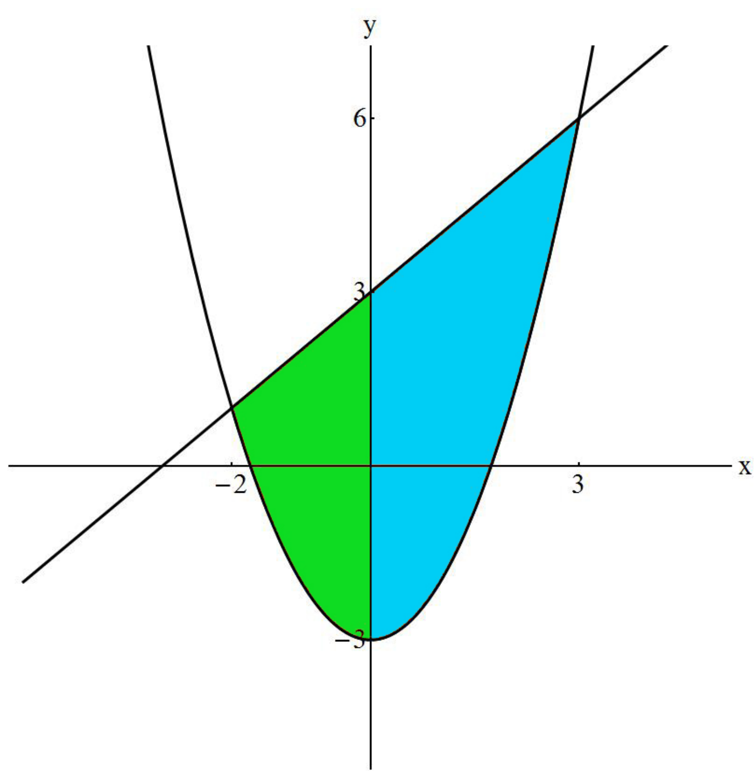
$$= -1 \cdot \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \cos(u)\, du + \frac{4}{5} \int_{0}^{\frac{5\pi}{6}} \cos(v)\, dv = \frac{4}{5} \left[\sin(v)\right]_0^{\frac{5\pi}{6}} - \left[\sin(u)\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} =$$

$$= \frac{4}{5}\left(\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \sin(0)\right) - \left(\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{5} \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{10} + \frac{5}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

25. $\int\int_M 12\,|x|\, dxdy \qquad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \geq x^2 - 3; y \leq x + 3\}$

Řešení:



Obrázek 15: $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \geq x^2 - 3; y \leq x + 3\}$

V tomto příkladu musíme uvažovat dvě situace, a to případ, kdy je výraz v absolutní hodnotě kladný, a případ, kdy je záporný. Proto zde máme dvoubarevný obrázek, modrá polovina znázorňuje případ, kdy $x \geq 0$ a integrál vypočítáme klasickým způsobem. Zelená plocha znázorňuje případ, kdy $x \leq 0$, a proto při výpočtu integrálu musíme otočit znaménko integrované funkce. Oba vypočtené integrály nakonec sečteme, čímž dojdeme k výsledku.

(a) $x \geq 0$

$$\int_0^3 \left(\int_{x^2-3}^{x+3} 12xdy \right) dx = \int_0^3 12x \left[y\right]_{x^2-3}^{x+3} dx =$$

$$= \int_0^3 12x \left(x + 3 - x^2 + 3\right) dx = \int_0^3 \left(12x^2 + 72x - 12x^3\right) dx =$$

$$= \left[4x^3 + 36x^2 - 3x^4\right]_0^3 = 4 \cdot 27 + 36 \cdot 9 - 3 \cdot 81 = 189$$

(b) $x \leq 0$

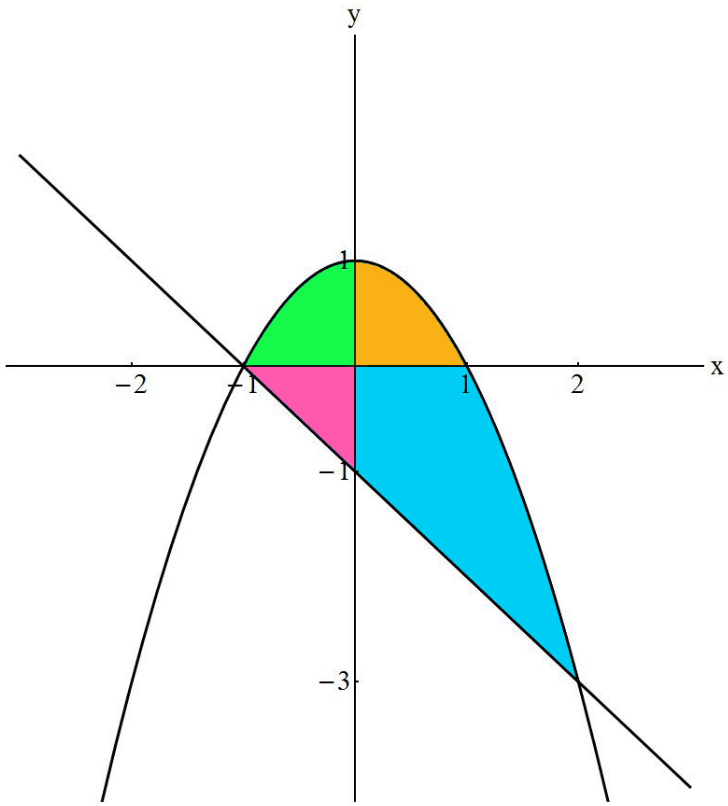
$$\int_{-2}^0 \left(\int_{x^2-3}^{x+3} -12xdy \right) dx = \int_0^{-2} \left(12x^2 + 72x - 12x^3\right) dx =$$

$$= \left[4x^3 + 36x^2 - 3x^4\right]_0^{-2} = 4 \cdot (-8) + 36 \cdot 4 - 3 \cdot 16 = 64$$

$$\int\int_M 12\,|x|\,dxdy = 189 + 64 = 253$$

26. $\displaystyle\int\int_M |xy|\, dxdy \qquad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \leq -x^2+1; y \geq -x-1\}$

Řešení:



Obrázek 16: $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \leq -x^2+1; y \geq -x-1\}$

$$xy \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\, x \geq 0 \wedge y \geq 0)^{(a)} \quad \vee \quad (x \leq 0 \wedge y \leq 0)^{(b)}$$
$$xy \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\, x \geq 0 \wedge y \leq 0)^{(c)} \quad \vee \quad (x \leq 0 \wedge y \geq 0)^{(d)}$$

(a) $x \geq 0 \wedge y \geq 0$

$$\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{1-x^2} xydy \right) dx = \int\limits_0^1 \frac{x}{2} \left[y^2\right]_0^{1-x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^1 x\left(1-2x^2+x^4\right) dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \left(x-2x^3+x^5\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^6\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12}$$

(b) $x \leq 0 \wedge y \leq 0$

$$\int\limits_{-1}^{0}\left(\int\limits_{-x-1}^{0} xydy\right)dx = \int\limits_{-1}^{0}\frac{x}{2}\left[y^2\right]_{-x-1}^{0}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0} x\left(0 - x^2 - 2x - 1\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0}\left(-x^3 - 2x^2 - x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{24}$$

(c) $x \geq 0 \wedge y \leq 0$

$$\int\limits_{0}^{1}\left(\int\limits_{-x-1}^{0} -xydy\right)dx = \int\limits_{0}^{1}\left(\int\limits_{0}^{-x-1} xydy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} x\left(x^2 + 2x + 1\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}\left(x^3 + 2x^2 + x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{17}{24}$$

$$\int\limits_{1}^{2}\left(\int\limits_{-x-1}^{1-x^2} -xydy\right)dx = \int\limits_{1}^{2}\left(\int\limits_{1-x^2}^{-x-1} xydy\right)dx = \int\limits_{1}^{2}\frac{x}{2}\left[y^2\right]_{1-x^2}^{-x-1}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{2} x\left[\left(x^2 + 2x + 1\right) - \left(1 - 2x^2 + x^4\right)\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{2} x\left(3x^2 + 2x - x^4\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{2}\left(3x^3 + 2x^2 - x^5\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^6\right]_{1}^{2} = \frac{1}{2}\left[\left(12 + \frac{16}{3} - \frac{2^6}{6}\right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right)\right] =$$

$$= \frac{65}{24}$$

(d) $x \leq 0 \wedge y \geq 0$

$$\int\limits_{-1}^{0}\left(\int\limits_{0}^{1-x^2} -xydy\right)dx = \int\limits_{0}^{-1}\left(\int\limits_{0}^{1-x^2} xydy\right)dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{-1} \frac{x}{2}\left[y^2\right]_0^{1-x^2} dx = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{-1} x\left(1-2x^2+x^4\right)dx =$$

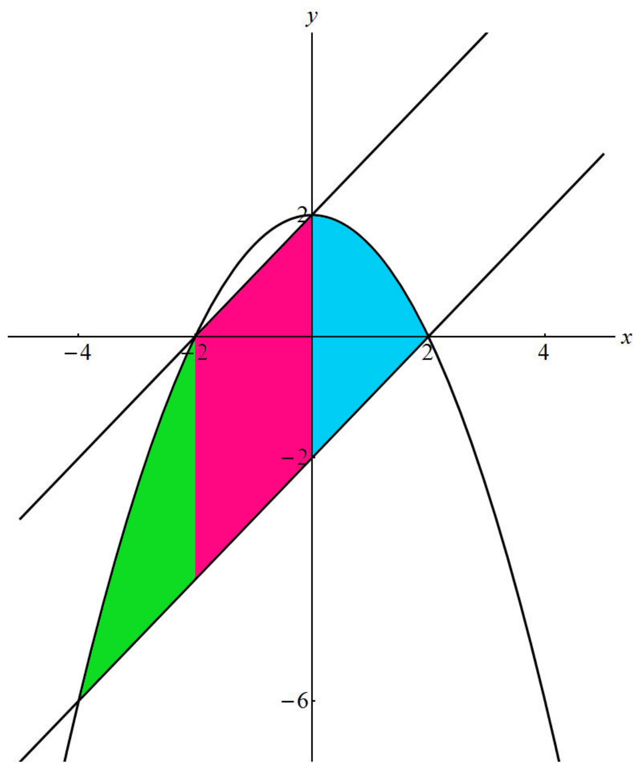
$$= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{-1}\left(x-2x^3+x^5\right)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^6\right]_0^{-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12}$$

$$\int\int_M |xy|\, dxdy = \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{17}{24} + \frac{65}{24} + \frac{1}{12} = \frac{29}{8}$$

27. $\displaystyle\int\int_M 3xydxdy \qquad M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; y\le 2-\frac{x^2}{2}, y\le x+2, y\ge x-2\right\}$

Řešení:



Obrázek 17: $M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; y\le 2-\frac{x^2}{2}, y\le x+2, y\ge x-2\right\}$

$$\int_{-4}^{-2}\left(\int_{x-2}^{2-\frac{x^2}{2}} 3xydy\right)dx+\int_{-2}^{0}\left(\int_{x-2}^{x+2} 3xydy\right)dx+\int_{0}^{2}\left(\int_{x-2}^{2-\frac{x^2}{2}} 3xydy\right)dx=$$

$$=\int_{-4}^{-2}\frac{3}{2}x\left[y^2\right]_{x-2}^{2-\frac{x^2}{2}}dx+\int_{-2}^{0}\frac{3}{2}x\left[y^2\right]_{x-2}^{x+2}dx+\int_{0}^{2}\frac{3}{2}x\left[y^2\right]_{x-2}^{2-\frac{x^2}{2}}dx=$$

$$=\frac{3}{2}\int_{-4}^{-2}x\left(4-2x^2+\frac{1}{4}x^4-x^2+4x-4\right)dx+$$

$$+\frac{3}{2}\int_{-2}^{0}x\left(x^2+4x+4-x^2+4x-4\right)dx+$$

$$+\frac{3}{2}\int\limits_{0}^{2} x\left(4-2x^2+\frac{1}{4}x^4-x^2+4x-4\right)dx=$$

$$=\frac{3}{2}\int\limits_{-4}^{-2} x\left(4x-3x^2+\frac{1}{4}x^4\right)dx+\frac{3}{2}\int\limits_{-2}^{0} x\cdot 8x dx+\frac{3}{2}\int\limits_{0}^{2} x\left(4x-3x^2+\frac{1}{4}x^4\right)dx=$$

$$=\frac{3}{2}\int\limits_{-4}^{-2}\left(4x^2-3x^3+\frac{1}{4}x^5\right)dx+\frac{3}{2}\int\limits_{-2}^{0} 8x^2 dx+\frac{3}{2}\int\limits_{0}^{2}\left(4x^2-3x^3+\frac{1}{4}x^5\right)dx=$$

$$=\frac{3}{2}\left[\frac{4}{3}x^3-\frac{3}{4}x^4+\frac{1}{24}x^6\right]_{-4}^{-2}+\frac{3}{2}\left[\frac{8}{3}x^3\right]_{-2}^{0}+\frac{3}{2}\left[\frac{4}{3}x^3-\frac{3}{4}x^4+\frac{1}{24}x^6\right]_{0}^{2}=$$

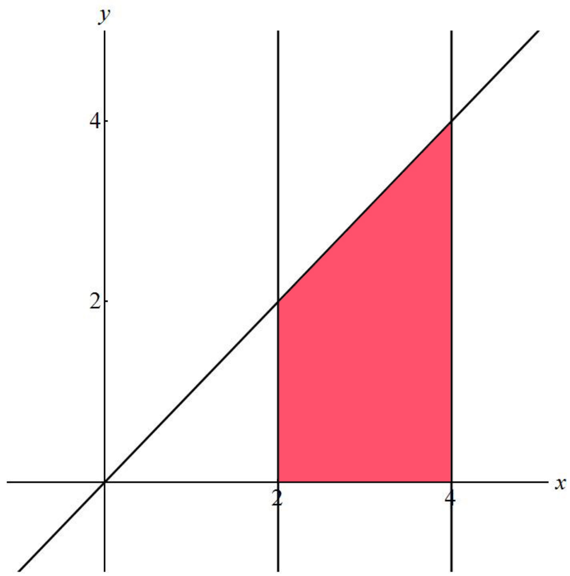
$$=\frac{3}{2}\left[\left(-\frac{32}{3}-\frac{3\cdot 16}{4}+\frac{64}{24}\right)-\left(-\frac{4\cdot 64}{3}-\frac{3\cdot 4^4}{4}+\frac{4^6}{24}\right)\right]+$$

$$+\frac{3}{2}\left(0+\frac{64}{3}\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{32}{3}-\frac{3\cdot 16}{4}+\frac{2^6}{24}\right)=\frac{3}{2}\left(-20+\frac{320}{3}\right)+\frac{3}{2}\cdot\frac{64}{3}+\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}=$$

$$=130+32+2=164$$

28. $\displaystyle\int\int_M \frac{x^5-x^3+6}{x^3-x}dxdy \qquad M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; y\le x; x\ge 2; x\le 4\}$

Řešení:



Obrázek 18: $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; y\le x; x\ge 2; x\le 4\}$

$$\int\limits_2^4\left(\int\limits_0^x \frac{x^5-x^3+6}{x^3-x}dy\right)dx = \int\limits_2^4 \frac{x^5-x^3+6}{x^3-x}\,[y]_0^x\,dx = \int\limits_2^4 \frac{x^5-x^3+6}{x\,(x^2-1)}\cdot xdx =$$

$$\int\limits_2^4 \frac{x^5-x^3+6}{x^2-1}dx = \int\limits_2^4\left(x^3+\frac{6}{(x-1)\,(x+1)}\right)dx =$$

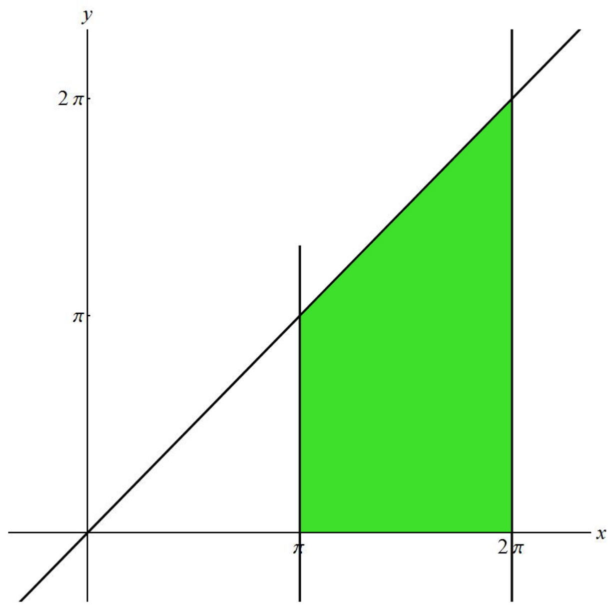
$$=\int\limits_2^4\left(x^3+\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}\right)dx = \int\limits_2^4\left(x^3+\frac{3}{x-1}-\frac{3}{x+1}\right)dx =$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}+3\ln|x-1|-3\ln|x+1|\right]_2^4 = \frac{4^4}{4}+3\ln 3-3\ln 5-\frac{2^4}{4}-3\ln 1+3\ln 3 =$$

$$=60+\ln 27-\ln 125+\ln 27=60+\ln\left(\frac{27\cdot 27}{125}\right)=60+\ln\frac{729}{125}$$

29. $\displaystyle\int\int_M y^2 \cos x dx dy \qquad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \leq x; y \geq 0; \pi \leq x \leq 2\pi\}$

Řešení:



Obrázek 19: $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \leq x; y \geq 0; \pi \leq x \leq 2\pi\}$

$$\int\limits_{\pi}^{2\pi}\left(\int\limits_{0}^{x} y^2 \cos x dy\right) dx = \int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{3}\cos x \left[y^3\right]_0^x dx = \frac{1}{3}\int\limits_{\pi}^{2\pi} x^3 \cos x dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x^3 & v' = \cos x \\ u' = 3x^2 & v = \sin x \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\left[x^3 \sin x\right]_{\pi}^{2\pi} - \frac{1}{3}\int\limits_{\pi}^{2\pi} 3x^2 \sin x dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x^2 & v' = \sin x \\ u' = 2x & v = -\cos x \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\left[x^3 \sin x\right]_{\pi}^{2\pi} + \left[x^2 \cos x\right]_{\pi}^{2\pi} - 2\int\limits_{\pi}^{2\pi} x \cos x dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x & v' = \cos x \\ u' = 1 & v = \sin x \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\left[x^3 \sin x\right]_{\pi}^{2\pi} + \left[x^2 \cos x\right]_{\pi}^{2\pi} - 2\left[x \sin x\right]_{\pi}^{2\pi} +$$

$$+ 2\int\limits_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = \frac{1}{3}\left[x^3 \sin x\right]_{\pi}^{2\pi} + \left[x^2 \cos x\right]_{\pi}^{2\pi} - 2\left[x \sin x\right]_{\pi}^{2\pi} - 2\left[\cos x\right]_{\pi}^{2\pi} =$$

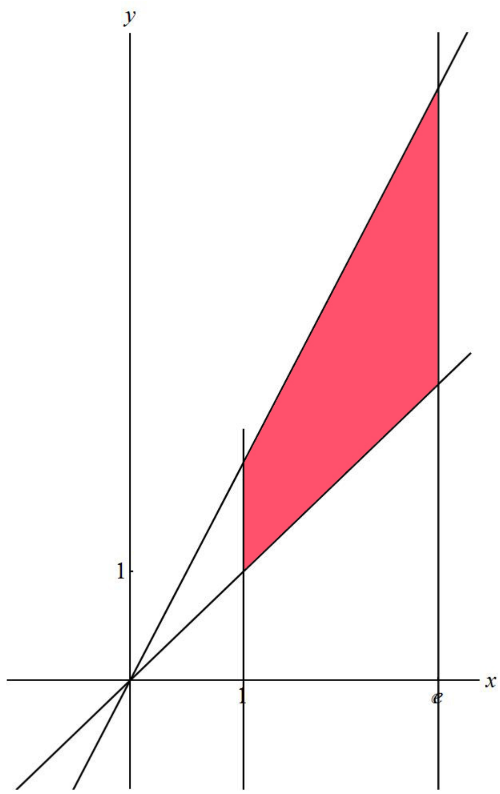
$$= \frac{1}{3}\cdot 8\pi^3 \sin 2\pi - \frac{1}{3}\pi^3 \sin \pi + 4\pi^2 \cos 2\pi - \pi^2 \cos \pi - 4\pi \sin 2\pi + 2\pi \sin \pi -$$

$$- 2\cos 2\pi + 2\cos \pi = \frac{1}{3}\cdot 8\pi^3 \cdot 0 - \frac{1}{3}\pi^3 \cdot 0 + 4\pi^2 \cdot 1 - \pi^2 \cdot (-1) -$$

$$- 4\pi \cdot 0 + 2\pi \cdot 0 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 4\pi^2 + \pi^2 - 2 - 2 = 5\pi^2 - 4$$

30. $\displaystyle\int\int_M \ln x^3 dxdy \qquad M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq 2x; y \geq x; 1 \leq x \leq e\}$

Řešení:



Obrázek 20: $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq 2x; y \geq x; 1 \leq x \leq e\}$

$$\int_1^e \left(\int_x^{2x} \ln x^3 dy \right) dx = \int_1^e \ln x^3 \, [y]_x^{2x} \, dx = \int_1^e x \cdot \ln x^3 dx =$$

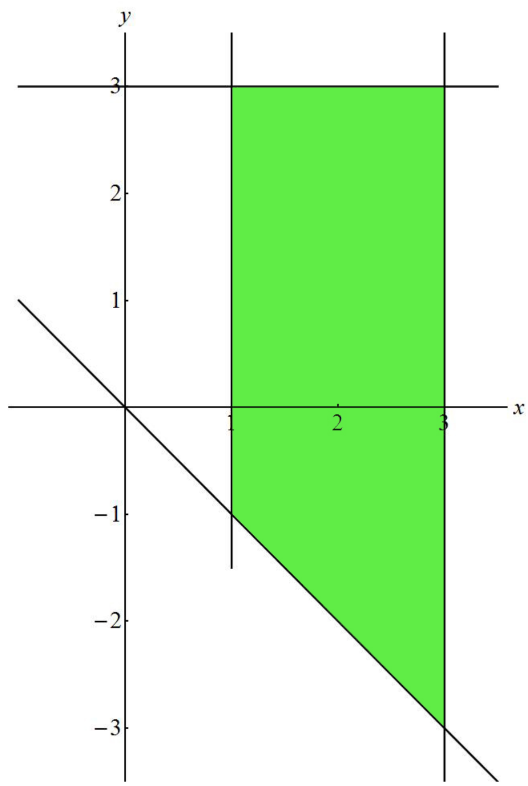
$$= \left| \begin{array}{ll} u = \ln x^3 & v' = x \\ u' = \frac{1}{x^3} \cdot 3x^2 = \frac{3}{x} & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \left[\frac{x^2}{2} \ln x^3 \right]_1^e - \int_1^e \frac{3}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \ln x^3 \right]_1^e - \frac{3}{2} \int_1^e x dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x^3 \right]_1^e - \frac{3}{4} \left[x^2 \right]_1^e =$$

$$= \frac{e^2}{2} \ln e^3 - \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{3}{4} e^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{2} e^2 - \frac{3}{4} e^2 + \frac{3}{4} = \frac{6}{4} e^2 - \frac{3}{4} e^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \left(e^2 + 1 \right)$$

31. $\displaystyle\int\int_M y \ln x dx dy \qquad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \geq -x; y \leq 3; 1 \leq x \leq 3\}$

Řešení:



Obrázek 21: $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \geq -x; y \leq 3; 1 \leq x \leq 3\}$

$$\int_1^3 \left(\int_{-x}^3 y \ln x dy \right) dx = \int_1^3 \ln x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-x}^3 = \int_1^3 \ln x \left(\frac{9}{2} - \frac{x^2}{2} \right) dx =$$

$$= \int_1^3 \frac{9}{2} \ln x dx - \int_1^3 \frac{x^2}{2} \ln x dx = \frac{9}{2} \int_1^3 \ln x dx - \frac{1}{2} \int_1^3 x^2 \ln x dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = \ln x & v' = x^2 \\ u' = \frac{1}{x} & v = \frac{x^3}{3} \end{vmatrix} = \frac{9}{2} [x \cdot \ln x - x]_1^3 - \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} \ln x \right]_1^3 +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{3} dx = \frac{9}{2} [x \cdot \ln x - x]_1^3 - \frac{1}{6} \left[x^3 \ln x \right]_1^3 + \frac{1}{6} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^3 =$$

$$= \frac{9}{2} (3 \cdot \ln 3 - 3 - 1 \cdot \ln 1 + 1) - \frac{1}{6} (27 \cdot \ln 3 - 1 \cdot \ln 1) + \frac{1}{18} (27 - 1) =$$

$$= \frac{9}{2}\left(\ln 27 - 2\right) - \frac{27}{6}\ln 3 + \frac{26}{18} = \frac{9}{2}\left(\ln 27 - 2\right) - \frac{9}{2}\ln 3 + \frac{13}{9} =$$

$$= \frac{9}{2}\ln 27 - \frac{9}{2}\ln 3 - \frac{68}{9} = \frac{9}{2}\ln\frac{27}{3} - \frac{68}{9} = \frac{9}{2}\ln 9 - \frac{68}{9} =$$

$$= 3 \cdot \frac{3}{2}\ln 9 - \frac{68}{9} = 3 \cdot \ln\sqrt{9^3} - \frac{68}{9} = 3\ln 27 - \frac{68}{9}$$

4. Transformace do polárních souřadnic

V této kapitole budeme integrály počítat transformací do polárních souřadnic. Polární souřadnice používáme u příkladů, které neumíme integrovat v kartézských souřadnicích, ve kterých jsme počítali doposud. V polárních souřadnicích je každý bod popsán svou vzdáleností od počátku souřadnicového systému (značíme r) a orientovaným úhlem, který svírá jeho průvodič s kladným směrem osy x (značíme α).

Na začátek si zavedeme následující transformaci:

$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\sin\alpha$$

Poté vypočítáme Jakobián podle věty 3 (Transformace souřadnic ve dvojném integrálu).

$$J = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -r\sin\alpha \\ \sin\alpha & r\cos\alpha \end{vmatrix} = r\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) = r$$

Dále přepíšeme výraz $x^2 + y^2$ do polárních souřadnic.

$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\alpha + r^2\sin^2\alpha = r^2\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) = r^2$$

Poté si určíme integrační meze a dále již můžeme začít s integrováním.

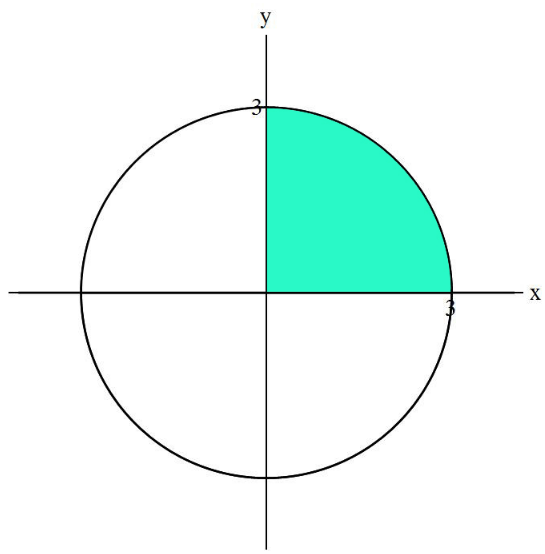
Budeme postupovat podle věty 3 (Transformace souřadnic ve dvojném integrálu). Ta nám říká, že platí následující vzorec.

$$\int\int_M f(x,y)\ dx\ dy = \int\int_M f(g(u,v), h(u,v)) \cdot |J|\ du\ dv,$$

kde $|J|$ je absolutní hodnota jakobiánu.

32. $\displaystyle\int\int_M 3^{x^2+y^2}dxdy \qquad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \leq 9; x \geq 0; y \geq 0\}$

Řešení: V některých případech je potřeba využít transformaci do polárních souřadnic. Nejprve si opět nakreslíme danou množinu, přes kterou budeme integrovat. Tou je zde čtvrtina kruhu o poloměru 3.



Obrázek 22: $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \leq 9; x \geq 0; y \geq 0\}$

Zavedeme si následující transformaci:

$$x = r\cos\alpha,\ y = r\sin\alpha,$$

kde r vyjadřuje vzdálenost bodu (x,y) od počátku a α je orientovaný úhel, který svírá průvodič bodu s kladným směrem osy x.

Z předchozího již víme, že platí $x^2+y^2 = r^2$ a $J = r$.

Než začneme intergál počítat, musíme si ještě určit integrační meze. V tomto případě je určujeme přímo z obrázku. Na něm vidíme, že poloměr je 3 jednotky, tudíž r se bude pohybovat na množině $\langle 0,3\rangle$ a sevřený úhel se mění od 0° do 90°, takže $\alpha \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$.

Nyní již můžeme začít počítat samotný integrál funkce dvou proměnných, kterými jsou r a α. Nejprve si přepíšeme dvojný integrál na dvojnásobný podle věty 2 (Fubiniho pro elementární množinu). Integrovat budeme nejprve podle proměnné r a α budeme považovat za konstantu.

$$\int\int_M 3^{x^2+y^2} dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_0^3 3^{r^2} \cdot r dr \right) d\alpha =$$

Zavedeme substituci $t = r^2$, čímž se nám změní integrační meze uvnitř integrálu.

$$= \left| \begin{array}{l} t = r^2 \\ dt = 2rdr \\ r = 0 \to t = 0 \\ r = 3 \to t = 9 \end{array} \right| = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_0^9 3^t \cdot \frac{1}{2} dt \right) d\alpha =$$

Zintegrujeme tedy funkci podle proměnné t a dopočítáme podle Newton–Leibnizova vzorce.

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{3^t}{\ln 3} \right]_0^9 d\alpha = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3^9}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3} \right) d\alpha =$$

Dále zde máme už jen integrál jedné proměnné, kterou je α, který vypočítáme a upravíme opět podle Newton–Leibnizova vzorce.

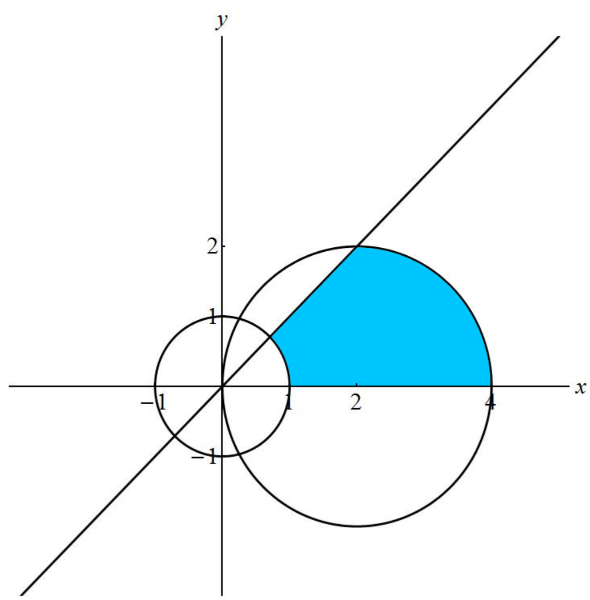
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3^9 - 1}{\ln 3} \cdot [\alpha]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{3^9 - 1}{\ln 3}$$

Poznámka: U některých příkladů je možné integrovat nejdříve podle proměnné α a až poté podle r. Je to ovšem individuální a závisí to na zadání příkladu. Vždy se rozhodujeme, které proměnné dáme přednost podle toho, co je pro výpočet integrálu jednodušší.

33. $\displaystyle\int\int_M \frac{3}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$

$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x-2)^2 + y^2 \leq 4; x^2+y^2 \geq 1; y \leq x; y \geq 0\right\}$

Řešení: V tomto příkladě opět využijeme transformaci do polárních souřadnic. Nejprve si nakreslíme integrační množinu. Tentokrát už má složitější tvar, a proto nebudeme schopni podle obrázku určit integrační meze, ale budeme si je muset vypočítat.



Obrázek 23: $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x-2)^2 + y^2 \leq 4; x^2+y^2 \geq 1; y \leq x; y \geq 0\right\}$

Zavedeme opět následující transformaci: $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$ a zároveň víme, že platí $x^2+y^2 = r^2$ a $J = r$.

Nejprve určíme integrační meze pro proměnnou r, a to tak, že ze zadaných nerovnic $(x-2)^2+y^2 \leq 4$ a $x^2+y^2 \geq 1$, které popisují kruhy a určují nám poloměr, uděláme rovnice, u obou dosadíme za x $r\cos\alpha$ a za y $r\sin\alpha$ a dopočítáme r.

$$\left.\begin{array}{ll}
(x-2)^2+y^2-4=0 & x^2+y^2-1=0 \\
x^2-4x+y^2=0 & r^2-1=0 \\
r^2\cos^2\alpha-4r\cos\alpha+r^2\sin^2\alpha=0 & |r|=1 \\
r^2-4r\cos\alpha=0 & r=1 \\
r\left(r-4\cos\alpha\right)=0 & \\
r=0 \quad \vee \quad r=4\cos\alpha &
\end{array}\right\} \quad 1\leq r\leq 4\cos\alpha$$

V prvním sloupci nám zde vyšly 2 kořeny pro r, ale protože žádný bod, kterému by odpovídal poloměr $r=0$, se nevyskytuje v zadané množině, nepočítáme s ním a bereme pouze druhý výsledek. Podle proměnné r budeme tedy integrovat na množině $\langle 1, 4\cos\alpha\rangle$.

Dále musíme určit i integrační meze pro proměnnou α. To uděláme tak, že obě další zadané nerovnosti změníme za rovnosti, budeme tedy mít dvě rovnice: $y=x$ a $y=0$. Přímky, které jsou těmito rovnicemi popsány, svírají úhel s osou x, a proto udávají úhel α. Budeme počítat arkustangens směrnice, který tyto dvě přímky svírají s osou x.

$$\left.\begin{array}{lll}
y=x & \rightarrow & \alpha=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4} \\
y=0 & \rightarrow & \alpha=\operatorname{arctg}0=0
\end{array}\right\} \quad 0\leq\alpha\leq\frac{\pi}{4}$$

Na množině $\left\langle 0, \frac{\pi}{4}\right\rangle$ budeme tedy integrovat podle proměnné α.

Nyní již můžeme přistoupit k samotnému integrování. Dvojný integrál si nejprve přepíšeme na dvojnásobný podle věty 2 (Fubiniho pro elementární množinu).

$$\int\int_M \frac{3}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int\limits_1^{4\cos\alpha}\frac{3}{r}\cdot rdr\right)d\alpha =$$

Nejprve budeme integrovat podle proměnné r a α budeme považovat za konstantu.

$$= 3\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}[r]_1^{4\cos\alpha}\,d\alpha =$$

Dále využijeme Newton–Leibnizův vzorec a dosazením dostaneme jednoduchý integrál funkce proměnné α.

$$= 3 \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (4\cos\alpha - 1)\, d\alpha =$$

Integrál vypočítáme a opět použijeme Newton–Leibnizův vzorec, pomocí něhož dojdeme ke konečnému výsledku.

$$= 3\left[4\sin\alpha - \alpha\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 3\left[4\sin\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - 4\sin 0 + 0\right] =$$

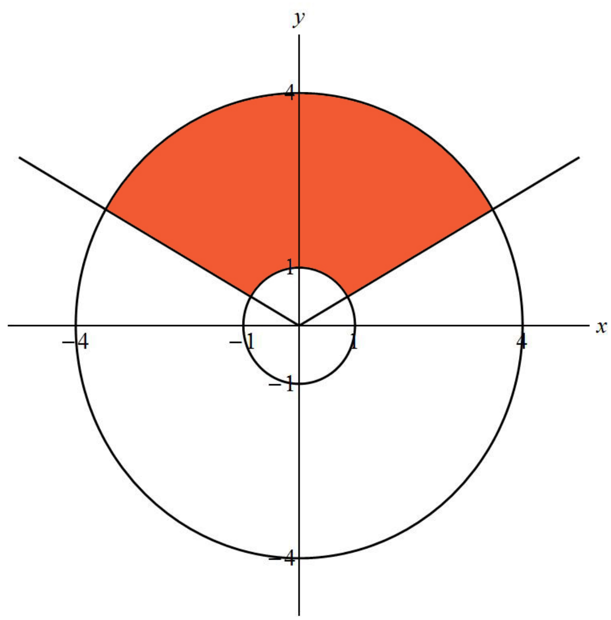
$$= 3 \cdot \left(4\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} - 4 \cdot 0\right) = 6\sqrt{2} - \frac{3}{4}\pi$$

Dále již nebudou příklady komentované, protože se počítají pomocí stejných principů, které byly vysvětleny výše.

34. $\displaystyle\int\int_M e^{\left(x^2+y^2\right)^2} \cdot \left(x^2+y^2\right) dxdy$

$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \geq 1; x^2+y^2 \leq 16; y \geq \left|\frac{\sqrt{3}}{3}x\right|\right\}$

Řešení:



Obrázek 24: $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \geq 1; x^2+y^2 \leq 16; y \geq \left|\frac{\sqrt{3}}{3}x\right|\right\}$

$x = r\cos\alpha$

$y = r\sin\alpha$

$x^2+y^2 = r^2\cos^2\alpha + r^2\sin^2\alpha = r^2\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) = r^2$

$$\left.\begin{array}{ll} x^2+y^2 = 1 & x^2+y^2 = 16 \\ r^2 = 1 & r^2 = 16 \\ |r| = 1 & |r| = 4 \\ r = \pm 1 & r = \pm 4 \end{array}\right\} \quad 1 \leq r \leq 4$$

$$\left.\begin{array}{ll} y = \frac{\sqrt{3}}{3}x, \text{ odtud} & \alpha = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6} \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x, \text{ odtud} & \alpha = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{5\pi}{6} \end{array}\right\} \quad \frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{5\pi}{6}$$

$$\int\int_M e^{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\left(x^2+y^2\right)dxdy = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\left(\int\limits_1^4 e^{\left(r^2\right)^2}\cdot r^2\cdot r dr\right)d\alpha =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\left(\int\limits_1^4 e^{r^4}\cdot r^3 dr\right)d\alpha = \left|\begin{array}{l} t = r^4 \\ dt = 4r^3dr \\ r = 1 \rightarrow t = 1 \\ r = 4 \rightarrow t = 4^4 = 256 \end{array}\right| =$$

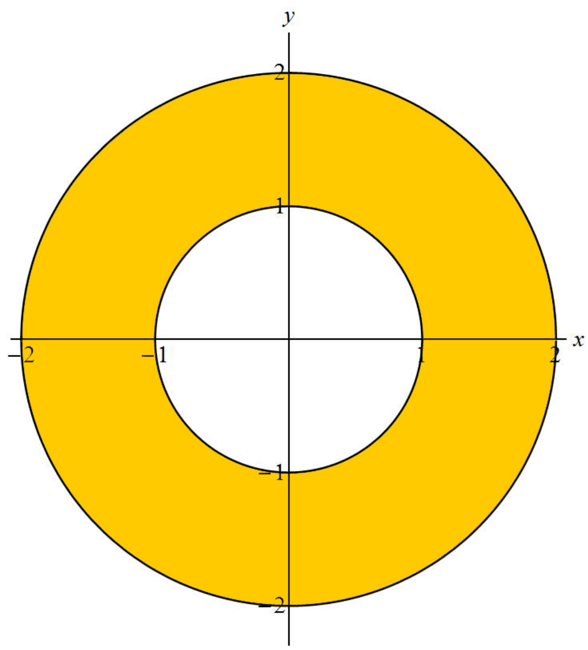
$$= \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\left(\int\limits_1^{256} e^t\cdot\frac{1}{4}dt\right)d\alpha = \frac{1}{4}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\left[e^t\right]_1^{256}d\alpha = \frac{1}{4}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\left(e^{256}-e^1\right)d\alpha =$$

$$= \frac{1}{4}e\left(e^{255}-1\right)\cdot[\alpha]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = \frac{1}{4}e\left(e^{255}-1\right)\cdot\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}e\left(e^{255}-1\right)\cdot\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}e\left(e^{255}-1\right)$$

35. $\displaystyle\int\int_M \sqrt{x^2+y^2+2}dxdy \qquad M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2+y^2\geq 1; x^2+y^2\leq 4\}$

Řešení:



Obrázek 25: $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2+y^2\geq 1; x^2+y^2\leq 4\}$

$x = r\cos\alpha$

$y = r\sin\alpha$

$x^2+y^2 = r^2\cos^2\alpha + r^2\sin^2\alpha = r^2\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right) = r^2$

$$\left.\begin{array}{ll} x^2+y^2=1 & x^2+y^2=4 \\ r^2=1 & r^2=4 \\ |r|=1 & |r|=2 \\ r=\pm 1 & r=\pm 2 \end{array}\right\} \quad 1\leq r\leq 2$$

$0\leq\alpha\leq 2\pi$

$$\int\int_M \sqrt{x^2+y^2+2}dxdy = \int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_1^2 \sqrt{r^2+2}\cdot r dr\right)d\alpha = \left|\begin{array}{l} t=r^2+2 \\ dt=2rdr \\ r=1\rightarrow t=3 \\ r=2\rightarrow t=6 \end{array}\right| =$$

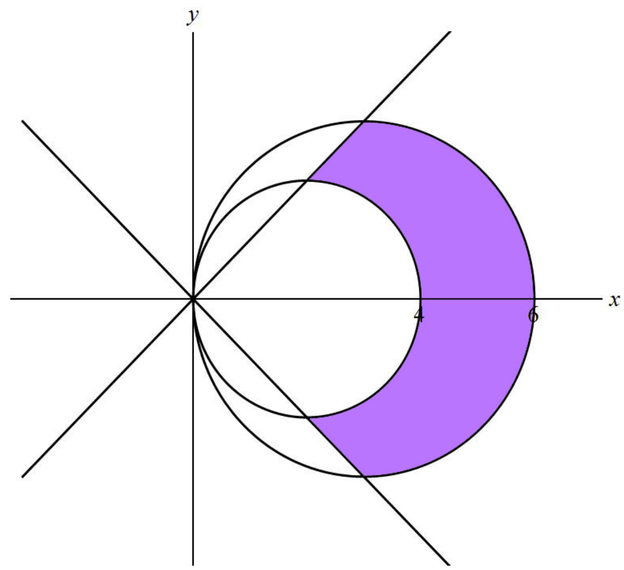
$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_3^6 \frac{1}{2} \sqrt{t} dt \right) d\alpha = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_3^6 d\alpha = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left(6^{\frac{3}{2}} - 3^{\frac{3}{2}} \right) d\alpha =$$

$$= \frac{1}{3} \left(6\sqrt{6} - 3\sqrt{3} \right) \cdot [\alpha]_0^{2\pi} = 2\pi \left(2\sqrt{6} - \sqrt{3} \right)$$

36. $\displaystyle\int\int_M \frac{xy}{x^2+y^2}dxdy$

$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \geq 4x; x^2+y^2 \leq 6x; y \leq x; y \geq -x\}$

Řešení:



Obrázek 26: $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \geq 4x; x^2+y^2 \leq 6x; y \leq x; y \geq -x\}$

$x = r\cos\alpha$

$y = r\sin\alpha$

$x^2+y^2 = r^2\cos^2\alpha + r^2\sin^2\alpha = r^2\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right) = r^2$

$$\begin{array}{ll} 4x \leq x^2+y^2 \leq 6x & \left.\begin{array}{l} y = x \quad \rightarrow \ \alpha = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} \\ y = -x \ \rightarrow \ \alpha = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4} \\ \end{array}\right\} -\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4} \\ 4r\cos\alpha \leq r^2 \leq 6r\cos\alpha & \\ 4\cos\alpha \leq r \leq 6\cos\alpha & \end{array}$$

$$\int\int_M \frac{xy}{x^2+y^2}dxdy = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\int\limits_{4\cos\alpha}^{6\cos\alpha}\frac{r^2\sin\alpha\cos\alpha}{r^2}\cdot rdr\right)d\alpha =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\int\limits_{4\cos\alpha}^{6\cos\alpha}\sin\alpha\cos\alpha\cdot rdr\right)d\alpha = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sin\alpha\cos\alpha\left[r^2\right]_{4\cos\alpha}^{6\cos\alpha}d\alpha =$$

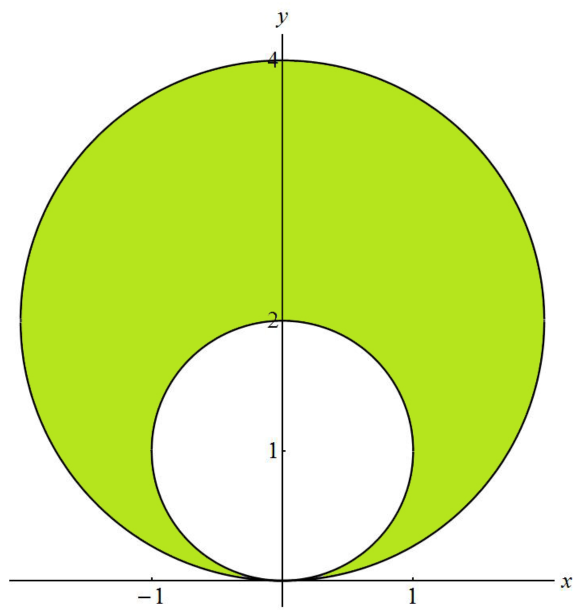
$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin\alpha\cos\alpha\left(36\cos^2\alpha - 16\cos^2\alpha\right) d \;= \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 20\sin\alpha\cos^3\alpha d\alpha =$$

$$= 10\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin\alpha\cos^3\alpha d\alpha = \left| \begin{array}{l} t = \cos\alpha \\ dt = -\sin\alpha \\ \alpha = -\frac{\pi}{4} \to t = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \alpha = \frac{\pi}{4} \to t = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right| = -10\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t^3 dt =$$

$$= -10\left[\frac{t^4}{4}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{5}{2}\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4\right] = 0$$

37. $\displaystyle\int\int_M \frac{\ln(x^2+y^2)}{\ln\left[(x^2+y^2)^2\right]}dxdy \qquad M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2+y^2\geq 2y; x^2+y^2\leq 4y\}$

Řešení:



Obrázek 27: $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2+y^2\geq 2y; x^2+y^2\leq 4y\}$

$x = r\cos\alpha$

$y = r\sin\alpha$

$x^2+y^2 = r^2\cos^2\alpha + r^2\sin^2\alpha = r^2\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right) = r^2$

$$\begin{array}{ll} 2y\leq x^2+y^2\leq 4y & \qquad 0\leq\alpha\leq\pi \\ 2r\sin\alpha\leq r^2\leq 4r\sin\alpha & \\ 2\sin\alpha\leq r\leq 4\sin\alpha & \end{array}$$

$$\int\int_M \frac{\ln(x^2+y^2)}{\ln\left[(x^2+y^2)^2\right]}dxdy = \int\limits_0^{\pi}\left(\int\limits_{2\sin\alpha}^{4\sin\alpha}\frac{\ln r^2}{\ln r^4}\cdot rdr\right)d\alpha =$$

$$= \int\limits_0^{\pi}\left(\int\limits_{2\sin\alpha}^{4\sin\alpha}\frac{2\ln r}{4\ln r}\cdot rdr\right)d\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\left[r^2\right]_{2\sin\alpha}^{4\sin\alpha}d\alpha =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi}\left(16\sin^2\alpha - 4\sin^2\alpha\right)d\alpha = 3\int\limits_0^{\pi}\sin^2\alpha d\alpha =$$
$$= \frac{3}{2}\left[\alpha - \sin\alpha\cos\alpha\right]_0^{\pi} = \frac{3}{2}\left(\pi - \sin\pi\cos\pi - 0 + \sin 0\cos 0\right) =$$
$$= \frac{3}{2}\left(\pi - 0\cdot(-1) - 0 + 0\cdot 1\right) = \frac{3}{2}\pi$$

Poznámka: Integrál, který potřebujeme vypočítat na konci třetího řádku výpočtu, si zintegrujeme zvlášť v této poznámce. Využijeme zde rekurenci, která již byla vysvětlena dříve.

$$\begin{aligned}
\int \sin^2\alpha d\alpha &= \int\left(1-\cos^2\alpha\right)d\alpha = \int 1d\alpha - \int\cos^2\alpha d\alpha = \\
&= \int 1d\alpha - \begin{vmatrix} u = \cos\alpha & v' = \cos\alpha \\ u' = -\sin\alpha & v = \sin\alpha \end{vmatrix} = \\
&= \int 1d\alpha - \left(\sin\alpha\cos\alpha - \int -\sin^2\alpha d\alpha\right) = \\
&= \alpha - \sin\alpha\cos\alpha - \int\sin^2\alpha d\alpha
\end{aligned}$$

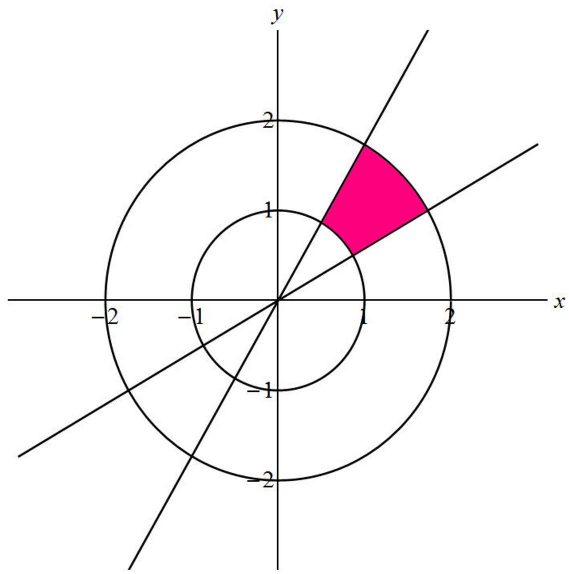
$$2\int\sin^2\alpha d\alpha = \alpha - \sin\alpha\cos\alpha$$

$$\int\sin^2\alpha d\alpha = \frac{1}{2}\left(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha\right)$$

38. $\displaystyle\int\int_M \sqrt{16-x^2-y^2}dxdy$

$M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2+y^2\geq 1; x^2+y^2\leq 4; y\leq x\sqrt{3}; y\geq \frac{\sqrt{3}}{3}x\right\}$

Řešení:



Obrázek 28: $M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2+y^2\geq 1; x^2+y^2\leq 4; y\leq x\sqrt{3}; y\geq \frac{\sqrt{3}}{3}x\right\}$

$x=r\cos\alpha$

$y=r\sin\alpha$

$x^2+y^2=r^2\cos^2\alpha+r^2\sin^2\alpha=r^2\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)=r^2$

$$1\leq r\leq 2 \qquad \left.\begin{array}{lcl} y=x\sqrt{3} & \to & \alpha=\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3} \\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}x & \to & \alpha=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6} \end{array}\right\} \quad \frac{\pi}{6}\leq\alpha\leq\frac{\pi}{3}$$

$$\int\int_M \sqrt{16-x^2-y^2}dxdy=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\int\limits_1^2\sqrt{16-r^2}\cdot rdr\right)d\alpha=$$

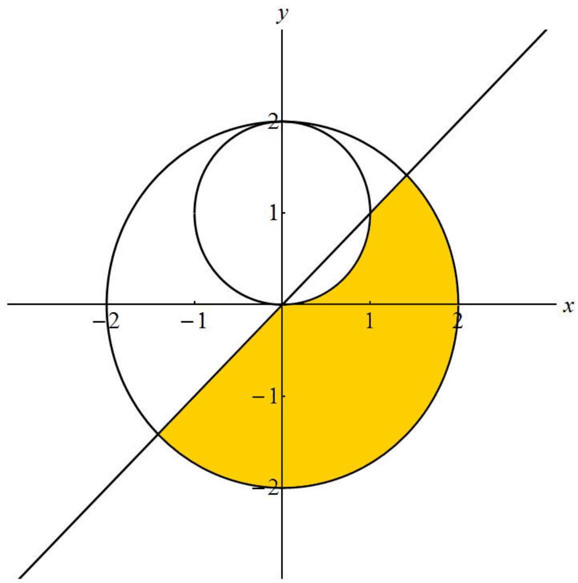
$$=\left|\begin{array}{l} t=16-r^2 \\ dt=-2rdr \\ x=1\to t=15 \\ x=2\to t=12 \end{array}\right|=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\int\limits_{12}^{15}\sqrt{t}dt\right)d\alpha=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{12}^{15}d\alpha=$$

$$= \frac{1}{3} \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\sqrt{15^3} - \sqrt{12^3} \right) d\alpha = \frac{1}{3} \left(15\sqrt{15} - 24\sqrt{3} \right) \cdot [\alpha]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \left(5\sqrt{15} - 8\sqrt{3} \right) \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{6} \left(5\sqrt{15} - 8\sqrt{3} \right)$$

39. $\displaystyle\int\int_M \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy \quad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \geq 2y; x^2+y^2 \leq 4; y \leq x\}$

Řešení:



Obrázek 29: $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \geq 2y; x^2+y^2 \leq 4; y \leq x\}$

$x = r\cos\alpha$

$y = r\sin\alpha$

$x^2+y^2 = r^2\cos^2\alpha + r^2\sin^2\alpha = r^2\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) = r^2$

Tento příklad musíme vypočítat ve dvou krocích. V prvním z nich budeme uvažovat pouze plochu, která je popsaná úhlem $\alpha \in \left\langle 0, \frac{\pi}{4}\right\rangle$, a vypočítáme si poloměr pro tento úhel. V dalším kroku vypočítáme integrál pro plochu popsanou úhlem $\alpha \in \left\langle -\frac{3}{4}\pi, 0\right\rangle$ a opět musíme vypočítat i poloměr platný pro tento úhel. Oba vypočtené integrály nakonec sečteme.

(a) $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{4}$

$$\left.\begin{array}{ll} x^2+y^2 \ge 2y & x^2+y^2 \le 4 \\ r^2 \ge 2r\sin\alpha & r^2 \le 4 \\ r \ge 2\sin\alpha & r \le 2 \end{array}\right\} \quad 2\sin\alpha \le r \le 2$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int\limits_{2\sin\alpha}^{2} \frac{1}{\sqrt{r^2}} \cdot r dr \right) d\alpha = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int\limits_{2\sin\alpha}^{2} 1 dr \right) d\alpha = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (2-2\sin\alpha)\, d\alpha =$$

$$= [2\alpha + 2\cos\alpha]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\cdot\frac{\pi}{4} + 2\cos\frac{\pi}{4} - 2\cos 0 = \frac{\pi}{2} + 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 2 = \frac{\pi}{2} + \sqrt{2} - 2$$

(b) $-\frac{3}{4}\pi \le \alpha \le 0 \qquad 0 \le r \le 2$

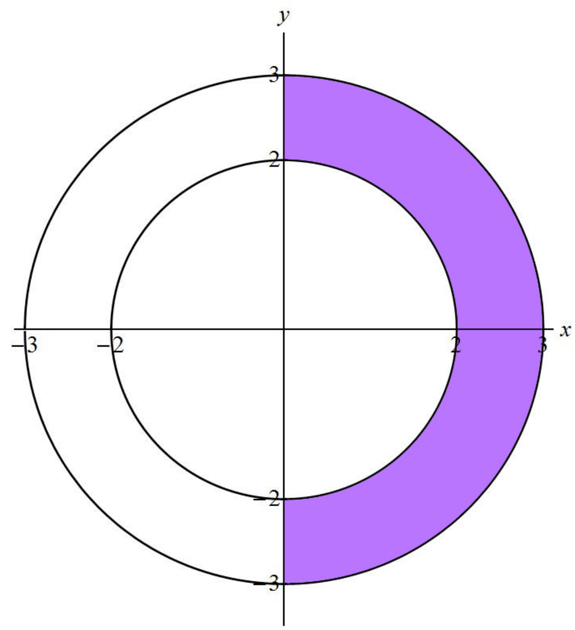
$$\int\limits_{-\frac{3}{4}\pi}^{0} \left(\int\limits_0^2 \frac{1}{\sqrt{r^2}} \cdot r dr \right) d\alpha = \int\limits_{-\frac{3}{4}\pi}^{0} \left(\int\limits_0^2 1 dr \right) d\alpha = \int\limits_{-\frac{3}{4}\pi}^{0} 2 d\alpha = 2\,[\alpha]_{-\frac{3}{4}\pi}^{0} =$$

$$= 2 \cdot \frac{3}{4}\pi = \frac{3}{2}\pi$$

$$\int\int_M \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = \frac{\pi}{2} + \sqrt{2} - 2 + \frac{3}{2}\pi = 2\pi + \sqrt{2} - 2$$

40. $\int\int_M \frac{1}{x^2+y^2}dxdy \qquad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 4 \leq x^2+y^2 \leq 9; x \geq 0\}$

Řešení:



Obrázek 30: $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 4 \leq x^2+y^2 \leq 9; x \geq 0\}$

$x = r\cos\alpha$

$y = r\sin\alpha$

$x^2+y^2 = r^2\cos^2\alpha + r^2\sin^2\alpha = r^2\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right) = r^2$

$2 \leq r \leq 3 \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

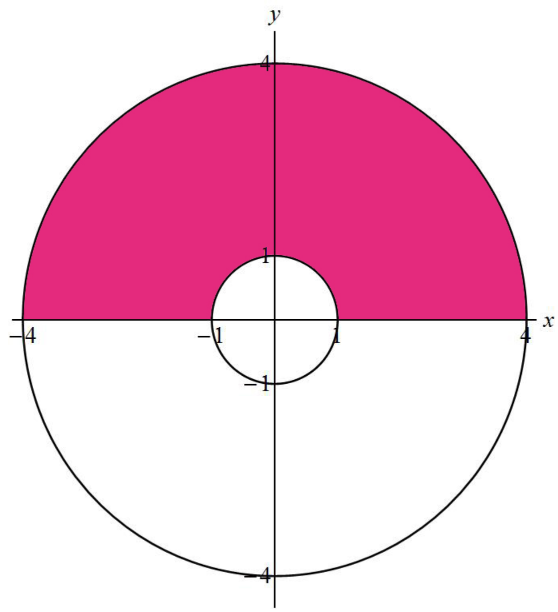
$$\int\int_M \frac{1}{x^2+y^2}dxdy = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_2^3 \frac{1}{r^2}\cdot r dr\right)d\alpha = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_2^3 \frac{1}{r}dr\right)d\alpha =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\ln|r|\right]_2^3 d\alpha = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\ln 3 - \ln 2)\,d\alpha = \ln\frac{3}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 d\alpha = \ln\frac{3}{2}\left[\alpha\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \ln\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \pi\cdot\ln\frac{3}{2}$$

41. $\int\int_M \ln\left(x^2+y^2\right) dxdy \qquad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x^2+y^2 \leq 16; y \geq 0\}$

Řešení:



Obrázek 31: $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x^2+y^2 \leq 16; y \geq 0\}$

$x = r\cos\alpha,\ y = r\sin\alpha$

$x^2+y^2 = r^2\cos^2\alpha + r^2\sin^2\alpha = r^2\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right) = r^2$

$1 \leq r \leq 4 \qquad 0 \leq \alpha \leq \pi$

$$\int\int_M \ln\left(x^2+y^2\right) dxdy = \int_0^\pi \left(\int_1^4 \ln r^2 \cdot r dr\right) d\alpha = 2\int_0^\pi \left(\int_1^4 \ln r \cdot r dr\right) d\alpha =$$

$$= 2\int_0^\pi \left[\frac{r^2}{2}\ln r - \frac{r^2}{4}\right]_1^4 d\alpha = 2\int_0^\pi \left(8\ln 4 - 4 - \frac{1}{2}\ln 1 + \frac{1}{4}\right) d\alpha =$$

$$= 2\int_0^\pi \left(8\ln 4 - \frac{15}{4}\right) d\alpha = \left(16\ln 4 - \frac{15}{2}\right)\cdot [\alpha]_0^\pi = \pi\left(16\ln 4 - \frac{15}{4}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(64\ln 4 - 15\right)$$

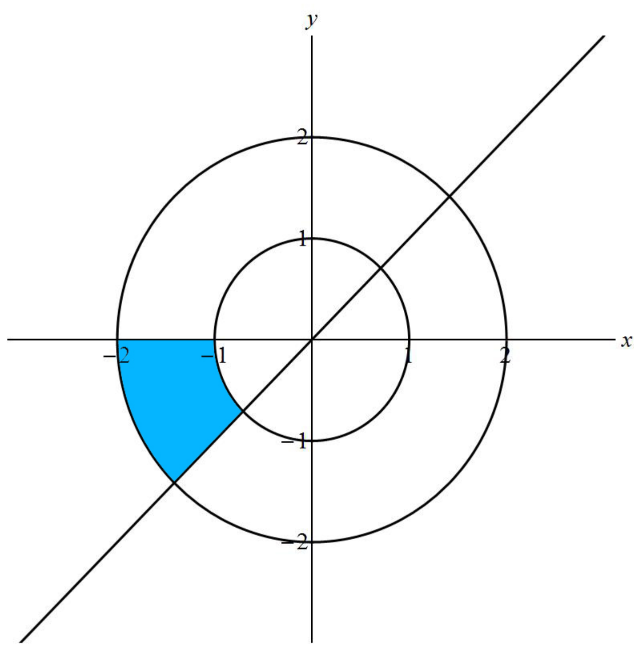
Poznámka: Integrál $\int \ln r \cdot r dr$, který máme na konci prvního řádku výpočtu, vypočítáme takto.

$$\int r \cdot \ln r dr = \begin{vmatrix} u = \ln r & v' = r \\ u' = \frac{1}{r} & v = \frac{r^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{r^2}{2} \ln r - \int \frac{1}{r} \cdot \frac{r^2}{2} dr = \frac{r^2}{2} \ln r - \frac{r^2}{4} + c$$

42. $\displaystyle\int\int_M \frac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$

$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 1 \le x^2+y^2 \le 4; y \ge x; y \le 0; x \le 0\}$

Řešení:



Obrázek 32: $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 1 \le x^2+y^2 \le 4; y \ge x; y \le 0; x \le 0\}$

$x = r\cos\alpha,\ \ y = r\sin\alpha,\ \ x^2+y^2 = r^2$

$1 \le r \le 2 \qquad \pi \le \alpha \le \frac{5}{4}\pi$

$$\int\int_M \frac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = \int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \left(\int_1^2 \frac{\ln r^2}{\sqrt{r^2}} \cdot r dr \right) d\alpha = 2 \int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \left(\int_1^2 \ln r dr \right) d\alpha =$$

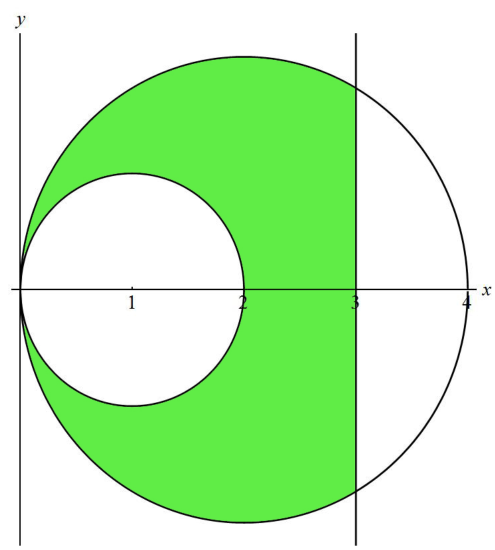
$$= 2\int\limits_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} [r \cdot \ln r - r]_1^2 \, d\alpha = 2\int\limits_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} (2 \cdot \ln 2 - 2 - 1 \cdot \ln 1 + 1) \, d\alpha =$$

$$= 2\int\limits_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} (2\ln 2 - 1) \, d\alpha = 2\,(2\ln 2 - 1)\,[\alpha]_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} = 2\,(2\ln 2 - 1) \cdot \left(\frac{5}{4}\pi - \pi\right) =$$

$$= \frac{2\pi}{4}\,(2\ln 2 - 1) = \frac{\pi}{2}\,(2\ln 2 - 1)$$

43. $\displaystyle\int\int_M \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} dxdy \qquad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 2x \leq x^2+y^2 \leq 4x; x \leq 3\}$

Řešení:



Obrázek 33: $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 2x \leq x^2+y^2 \leq 4x; x \leq 3\}$

$x = r\cos\alpha \qquad y = r\sin\alpha \qquad x^2+y^2 = r^2$

(a) $2x \leq x^2+y^2 \leq 4x \qquad\qquad \frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

$2r\cos\alpha \leq r^2 \leq 4r\cos\alpha$

$2\cos\alpha \leq r \leq 4\cos\alpha$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{2\cos\alpha}^{4\cos\alpha} \frac{\sqrt{r^2}}{r^2} \cdot r dr \right) d\alpha = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{2\cos\alpha}^{4\cos\alpha} 1 dr \right) d\alpha = 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha d\alpha =$$

$$= 2 \left[\sin\alpha\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1$$

(b) $2\cos\alpha \le r \le \frac{3}{\cos\alpha} \qquad -\frac{\pi}{6} \le \alpha \le \frac{\pi}{6}$

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\int_{2\cos\alpha}^{\frac{3}{\cos\alpha}} \frac{\sqrt{r^2}}{r^2} \cdot r dr \right) d\alpha = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\int_{2\cos\alpha}^{\frac{3}{\cos\alpha}} 1 dr \right) d\alpha = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{3}{\cos\alpha} - 2\cos\alpha \right) d\alpha =$$

$$= \left[3\ln\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right) - 3\ln\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} - 2\left[\sin\alpha\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} =$$

$$= 3\ln\left(\sin\frac{\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{12}\right) - 3\ln\left(\cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}\right) -$$

$$- 3\ln\left[\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right] + 3\ln\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right] -$$

$$- 2\left(\sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}\right) = 3\ln\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) -$$

$$- 3\ln\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) - 3\ln\left(\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) +$$

$$+ 3\ln\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 3\ln\frac{2\sqrt{6}}{4} - 3\ln\frac{2\sqrt{2}}{4} - 3\ln\frac{2\sqrt{2}}{4} + 3\ln\frac{2\sqrt{6}}{4} - 2 =$$

$$= 3\ln\frac{\sqrt{6}}{2} - 3\ln\frac{\sqrt{2}}{2} - 3\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + 3\ln\frac{\sqrt{6}}{2} - 2 =$$

$$= 6\ln\frac{\sqrt{6}}{2} - 6\ln\frac{\sqrt{2}}{2} - 2 = 6\left(\ln\frac{\sqrt{6}}{2} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2 =$$

$$= 6\left(\ln\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) - 2 = 6\left(\ln\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\right) - 2 = 6\ln\sqrt{3} - 2 = \ln 27 - 2$$

(c) $2x \leq x^2 + y^2 \leq 4x \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq -\frac{\pi}{6}$

$2r\cos\alpha \leq r^2 \leq 4r\cos\alpha$

$2\cos\alpha \leq r \leq 4\cos\alpha$

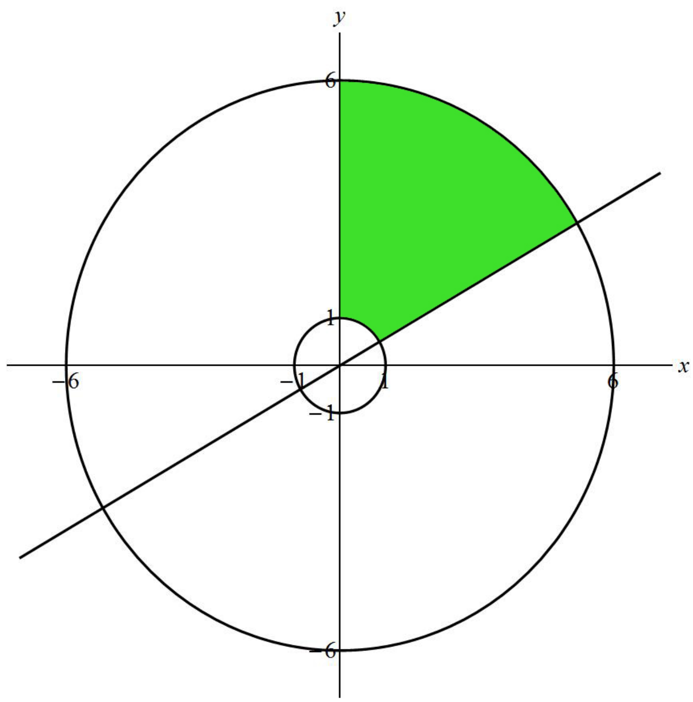
$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}} \left(\int\limits_{2\cos\alpha}^{4\cos\alpha} \frac{\sqrt{r^2}}{r^2} \cdot r dr \right) d\alpha = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}} \left(\int\limits_{2\cos\alpha}^{4\cos\alpha} 1 dr \right) d\alpha = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}} 2\cos\alpha d\alpha =$$

$$= 2\left[\sin\alpha\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}} = 2\left(\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2\left(-\frac{1}{2} - (-1)\right) = 1$$

$$\int\int_M \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} dxdy = 1 + \ln 27 - 2 + 1 = \ln 27$$

44. $\displaystyle\int\int_M x \ln y dx dy \qquad M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x^2+y^2 \leq 36; y \geq \tfrac{\sqrt{3}}{3}x; x \geq 0\right\}$

Řešení:



Obrázek 34: $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x^2+y^2 \leq 36; y \geq \tfrac{\sqrt{3}}{3}x; x \geq 0\right\}$

$$x = r\cos\alpha \qquad y = r\sin\alpha \qquad x^2+y^2=r^2$$

$$1 \leq r \leq 6 \qquad \tfrac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \tfrac{\pi}{2}$$

$$\int\int_M x\ln y dx dy = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_1^6 r\cos\alpha \cdot \ln(r\sin\alpha) \cdot r dr \right) d\alpha =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_1^6 r^2 \cos\alpha \left(\ln r + \ln\sin\alpha\right) dr \right) d\alpha =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^6 r^2 \cos\alpha \cdot \ln r dr \right) d\alpha + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^6 r^2 \cos\alpha \cdot \ln(\sin\alpha)\, dr \right) d\alpha =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha \left(\int_1^6 r^2 \ln r dr \right) d\alpha + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha \ln(\sin\alpha) \left(\int_1^6 r^2 dr \right) d\alpha =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(72\ln 6 - \frac{215}{9} \right) \cdot \cos\alpha d\alpha + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha \ln(\sin\alpha) \cdot \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^6 d\alpha =$$

$$= \left(72\ln 6 - \frac{215}{9} \right) \cdot [\sin\alpha]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{215}{3} \cdot \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha \ln(\sin\alpha)\, d\alpha =$$

$$= \left(72\ln 6 - \frac{215}{9} \right) \cdot \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{6} \right) + \frac{215}{3} \left(-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) =$$

$$= \left(72\ln 6 - \frac{215}{9} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \right) - \frac{215}{6}\ln\frac{1}{2} - \frac{215}{6} = 36\ln 6 - \frac{215}{18} - \frac{215}{6}\ln\frac{1}{2} -$$

$$- \frac{215}{6} = 36\ln 6 - \frac{215}{6}\ln\frac{1}{2} - \frac{430}{9} = \ln\frac{6^{36}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{215}{6}}} - \frac{430}{9}$$

Poznámka: Integrály $\int_1^6 r^2 \cdot \ln r dr$ a $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha \cdot \ln(\sin\alpha)\, d\alpha$ vypočítáme takto.

$$\int_1^6 r^2 \cdot \ln r dr = \begin{vmatrix} u = \ln r & v' = r^2 \\ u' = \frac{1}{r} & v = \frac{r^3}{3} \end{vmatrix} = \left[\ln r \cdot \frac{r^3}{3} \right]_1^6 - \int_1^6 \frac{1}{r} \cdot \frac{r^3}{3} dr =$$

$$= \left[\ln r \cdot \tfrac{r^3}{3} \right]_1^6 - \left[\tfrac{r^3}{9} \right]_1^6 = \ln 6 \cdot \tfrac{6^3}{3} - \ln 1 \cdot \tfrac{1}{3} - \tfrac{6^3}{9} + \tfrac{1}{9} =$$

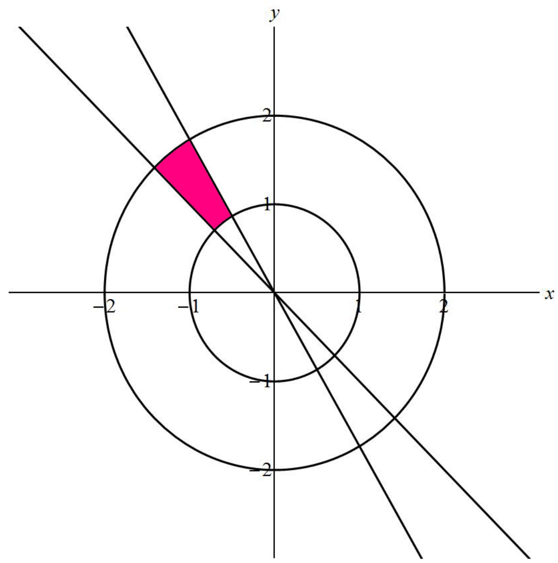
$$= 72\ln 6 - \tfrac{215}{9}$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha \cdot \ln(\sin\alpha)\, d\alpha = \begin{vmatrix} t = \sin\alpha \\ dt = \cos\alpha d\alpha \\ \alpha = \frac{\pi}{6} \to t = \frac{1}{2} \\ \alpha = \frac{\pi}{2} \to t = 1 \end{vmatrix} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln t dt = [t \cdot \ln t - t]_{\frac{1}{2}}^1 =$$

$$= 1 \cdot \ln 1 - 1 - \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{2}\ln\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}$$

45. $\displaystyle\int\int_M \frac{x}{y}dxdy \qquad M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 1 \le x^2+y^2 \le 4; y \ge -x; y \le -x\sqrt{3}\right\}$

Řešení:



Obrázek 35: $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 1 \le x^2+y^2 \le 4; y \ge -x; y \le -x\sqrt{3}\right\}$

$$x = r\cos\alpha \qquad y = r\sin\alpha \qquad x^2+y^2 = r^2$$

$$1 \le r \le 2 \qquad \left.\begin{array}{lll} y = -x\sqrt{3} & \to & \alpha = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{2}{3}\pi \\ y = -x & \to & \alpha = \operatorname{arctg}\left(-1\right) = \frac{3}{4}\pi \end{array}\right\} \quad \frac{2}{3}\pi \le \alpha \le \frac{3}{4}\pi$$

$$\int\int_M \frac{x}{y}dxdy = \int\limits_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{3}{4}\pi}\left(\int\limits_1^2 \frac{r\cos\alpha}{r\sin\alpha}\cdot rdr\right)d\alpha = \int\limits_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\left[\frac{r^2}{2}\right]_1^2 d\alpha =$$

$$= \int\limits_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{3}{4}\pi}\left(2-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}d\alpha = \left|\begin{array}{l} t = \sin\alpha \\ dt = \cos\alpha \\ \alpha = \frac{2}{3}\pi \to t = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \alpha = \frac{3}{4}\pi \to t = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right| = \frac{3}{2}\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{t}dt =$$

$$= \frac{3}{2}\left[\ln|t|\right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3}{2}\left(\ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \ln\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2}\ln\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \frac{3}{2}\ln\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{3}{2}\ln\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{3} = \frac{3}{2}\ln\frac{\sqrt{6}}{3}$$

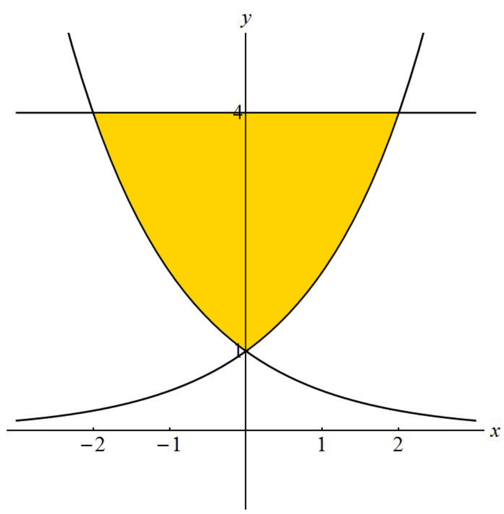
5. Geometrická aplikace – obsahy ploch

Dvojný integrál má různá využití a jedním z nich je i to, že s jeho použitím umíme spočítat obsahy různých ploch.

Obsah plochy $M \subset \mathbb{R}^2$ ohraničené několika křivkami budeme počítat pomocí vztahu $S = \int\int_M dxdy$, kde M označuje plochu.

46. Pomocí dvojného integrálu určete obsah plochy ohraničené křivkami:
    $y = 2^x; y = 2^{-x}; y = 4$

Řešení: Nejprve si nakreslíme dané křivky do grafu a pomocí nich určíme integrační meze.



Obrázek 36: Plocha ohraničená křivkami $y = 2^x; y = 2^{-x}; y = 4$

Vidíme, že obrázek je symetrický podle osy y, proto můžeme vypočítat integrál jen pro např. pravou půlku plochy a vynásobit dvěma. Množina, přes kterou integrujeme, je elementární vzhledem k proměnné x i vzhledem k proměnné y. Nezáleží zde tedy na pořadí proměnných, podle kterých budeme integrovat, ukážeme si to oběma způsoby.

Nejprve budeme integrovat podle proměnné y a x budeme považovat za konstantu.

$$S = 2 \cdot \int\limits_0^2 \left(\int\limits_{2^x}^4 1dy \right) dx =$$

Zintegrujeme tedy podle y a upravíme za použití Newton–Leibnizova vzorce.

$$= 2 \cdot \int\limits_0^2 [y]_{2^x}^4 \, dx = 2 \cdot \int\limits_0^2 (4 - 2^x) \, dx =$$

Dále integrujeme podle x a opět upravíme podle Newton–Leibnizova vzorce a dopočítáme.

$$= 2 \left[4x - \frac{2^x}{\ln 2} \right]_0^2 = 2 \left(8 - \frac{4}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 2} \right) = 2 \left(8 - \frac{3}{\ln 2} \right) = 16 - \frac{6}{\ln 2}$$

Druhý způsob bude velmi obdobný, rozdíl bude jen v tom, že budeme integrovat nejprve podle proměnné x a y budeme považovat za konstantu. Vypočteme vnitřní integrál podle proměnné x a upravíme podle Newton–Leibnizova vzorce.

$$S = 2 \cdot \int\limits_1^4 \left(\int\limits_0^{\log_2 y} 1dx \right) dy = 2 \cdot \int\limits_1^4 [x]_0^{\log_2 y} \, dy =$$

Dále počítáme jednoduchý integrál proměnné y. Musíme použít metodu Per partes z věty 4 a potom opět upravit podle Newton–Leibnizova vzorce.

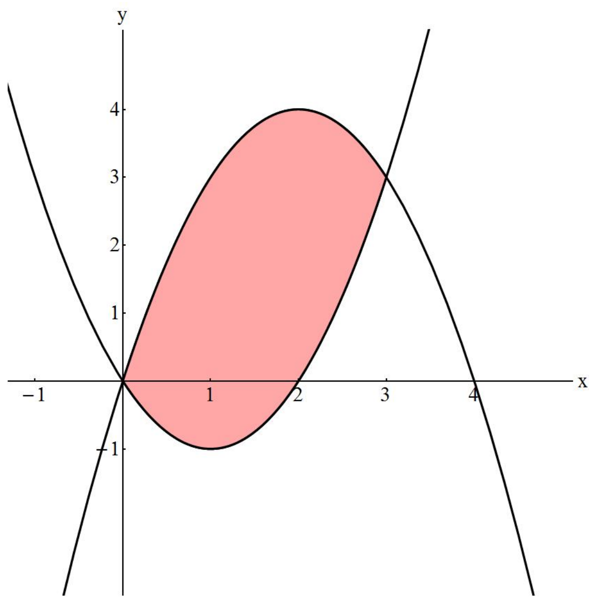
$$= \left| \begin{array}{ll} u = \log_2 y & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{y \cdot \ln 2} & v = y \end{array} \right| = 2 \left[y \log_2 y \right]_1^4 - 2 \cdot \int\limits_1^4 \frac{1}{\ln 2} dy =$$

$$= 2 \left(4 \log_2 4 - 1 \cdot \log_2 1 \right) - 2 \cdot \frac{1}{\ln 2} \cdot [y]_1^4 = 16 - \frac{6}{\ln 2}$$

Obsah plochy na obrázku 36 je $16 - \frac{6}{\ln 2}$ jednotek čtverečních.

47. Pomocí dvojného integrálu určete obsah plochy ohraničené křivkami:
$y = x^2 - 2x; y = 4x - x^2$

Řešení: Nejprve si nakreslíme dané křivky do grafu, abychom mohli určit integrační meze. Plocha, jejíž obsah počítáme, je ohraničena dvěma parabolami.



Obrázek 37: Plocha ohraničená křivkami $y = x^2 - 2x; y = 4x - x^2$

Budeme integrovat nejprve podle proměnné y a x budeme považovat za konstantu.

$$S = \int_0^3 \left(\int_{x^2-2x}^{4x-x^2} 1 dy \right) dx = \int_0^3 [y]_{x^2-2x}^{4x-x^2} dx =$$

Nyní integrál upravíme podle Newton–Leibnizova vzorce.

$$= \int_0^3 \left(4x - x^2 - x^2 + 2x\right) dx = \int_0^3 \left(6x - 2x^2\right) dx =$$

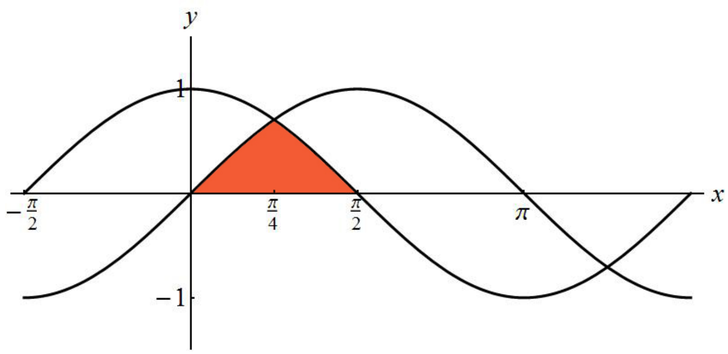
Na závěr vypočteme integrál jedné proměnné x a pomocí Newton–Leibnizova vzorce opět upravíme.

$$\left[3x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^3 = 27 - \frac{2 \cdot 27}{3} = 9$$

Obsah plochy na obrázku 37 je 9 jednotek čtverečních.

48. Pomocí dvojného integrálu určete obsah plochy dané množinou M.
$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq \sin x; y \leq \cos x; y \geq 0; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right\}$

Řešení:



Obrázek 38: $M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq \sin x; y \leq \cos x; y \geq 0; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right\}$

Tento příklad jde vypočítat čtyřmi způsoby. Plocha je souměrná podle osy $x = \frac{\pi}{4}$, tudíž si ji můžeme rozdělit na dvě poloviny a vypočítat integrál pouze jedné poloviny plochy a výsledek vynásobit dvěma. Můžeme také počítat dva integrály a ty potom sečíst. Další možností je udělat z plochy plochu elementární vzhledem k y a vypočítat takto. Ukážeme si zde pro názornost všechny čtyři způsoby.

1. způsob:

$$S = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\sin x} 1 dy \right) dx = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = 2 \cdot [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= 2\left(-\cos\frac{\pi}{4} + \cos 0\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) = 2 - \sqrt{2}$$

2. způsob:

$$S = 2\cdot\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_{0}^{\cos x} 1dy\right)dx = 2\cdot\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx = 2\cdot[\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{4}\right) =$$
$$= 2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 - \sqrt{2}$$

3. způsob:

$$S = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(\int\limits_{0}^{\sin x} 1dy\right)dx + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_{0}^{\cos x} 1dy\right)dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin x dx + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx =$$
$$= [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\cos\frac{\pi}{4} + \cos 0\right) + \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{4}\right) =$$
$$= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 - \sqrt{2}$$

4. způsob:

$$S = \int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\int\limits_{\arcsin y}^{\arccos y} 1dx\right)dy = \int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(\arccos y - \arcsin y)\,dy =$$
$$= \left[y\cdot\arccos y - \sqrt{1-y^2} - y\cdot\arcsin y - \sqrt{1-y^2}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$
$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{4} - \sqrt{1-\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{4} - \sqrt{1-\frac{1}{2}}\right) - (0-1-0-1) = 2 - \sqrt{2}$$

Poznámka: Integrály $\int \arcsin y dy$ a $\int \arccos y dy$ vypočítáme takto.

$$\int \arcsin y dy = \left|\begin{array}{ll} u = \arcsin y & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} & v = y \end{array}\right| = y\cdot\arcsin y - \int\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy =$$
$$= \left|\begin{array}{l} t = 1-y^2 \\ dt = -2ydy \end{array}\right| = y\cdot\arcsin y + \sqrt{1-y^2} + c$$

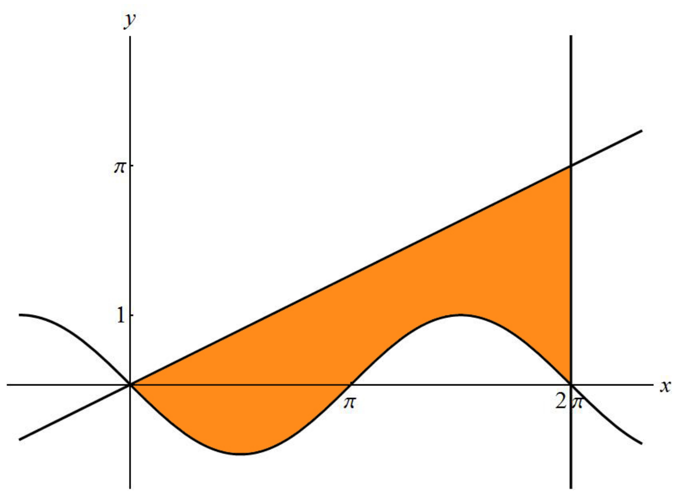
$$\int \arccos y dy = \begin{vmatrix} u = \arccos y & v' = 1 \\ u' = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} & v = y \end{vmatrix} = y \cdot \arccos y + \int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} dy =$$

$$= \begin{vmatrix} t = 1 - y^2 \\ dt = -2ydy \end{vmatrix} = y \cdot \arccos y - \sqrt{1-y^2} + c$$

Obsah plochy na obrázku 38 je $2 - \sqrt{2}$ jednotek čtverečních.

49. Pomocí dvojného integrálu určete obsah plochy M.
$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq \frac{x}{2}; y \geq -\sin x; 0 \leq x \leq 2\pi\right\}$

Řešení:



Obrázek 39: $M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq \frac{x}{2}; y \geq -\sin x; 0 \leq x \leq 2\pi\right\}$

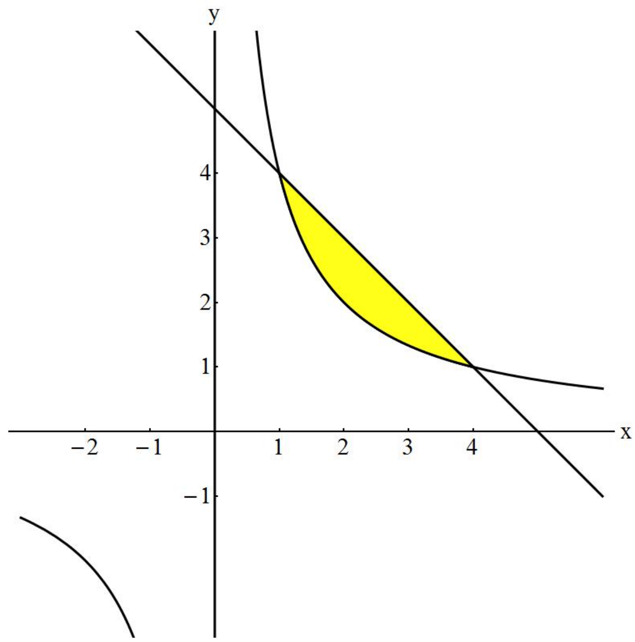
$$S = \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\sin x}^{\frac{x}{2}} 1 dy \right) dx = \int_0^{2\pi} \left(\frac{x}{2} + \sin x \right) dx = \left[\frac{1}{4} x^2 - \cos x \right]_0^{2\pi} =$$
$$= \frac{1}{4} \cdot 4\pi^2 - \cos 2\pi + \cos 0 = \pi^2 - 1 + 1 = \pi^2$$

Obsah plochy na obrázku 39 je π^2 jednotek čtverečních.

50. Pomocí dvojného integrálu určete obsah plochy M.

$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \geq \frac{4}{x}; y \leq 5 - x\right\}$

Řešení:



Obrázek 40: $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \geq \frac{4}{x}; y \leq 5 - x\right\}$

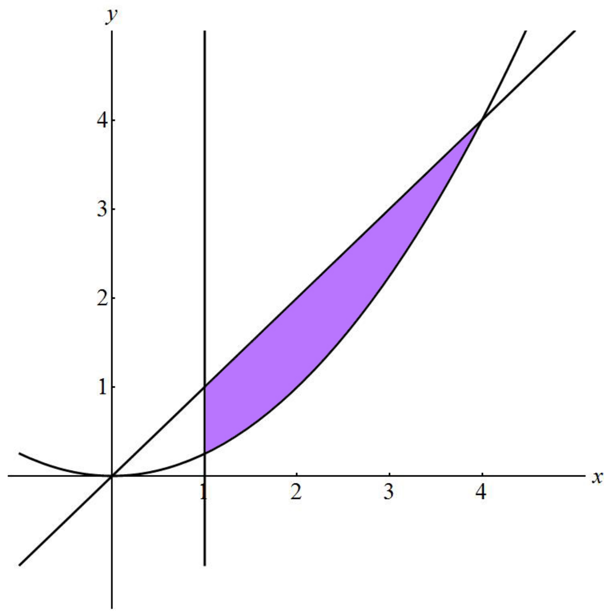
$$S = \int\limits_1^4 \left(\int\limits_{\frac{4}{x}}^{5-x} 1 dy \right) dx = \int\limits_1^4 \left(5 - x - \frac{4}{x}\right) dx = \left[5x - \frac{x^2}{2} - 4\ln|x|\right]_1^4 =$$
$$= 20 - 8 - 4\ln 4 - 5 + \frac{1}{2} + 4\ln 1 = \frac{15}{2} - 4\ln 4 = \frac{15}{2} - \ln 4^4 = \frac{15}{2} - \ln 256$$

Obsah plochy na obrázku 40 je $\frac{15}{2} - \ln 256$ jednotek čtverečních.

51. Pomocí dvojného integrálu určete obsah plochy M.

$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq x; y \geq \frac{x^2}{4}; x \geq 1 \right\}$

Řešení:



Obrázek 41: $M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq x; y \geq \frac{x^2}{4}; x \geq 1 \right\}$

$$S = \int_1^4 \left(\int_{\frac{x^2}{4}}^{x} 1 dy \right) dx = \int_1^4 \left(x - \frac{x^2}{4} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12} \right]_1^4 =$$

$$= 8 - \frac{64}{12} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{9}{4}$$

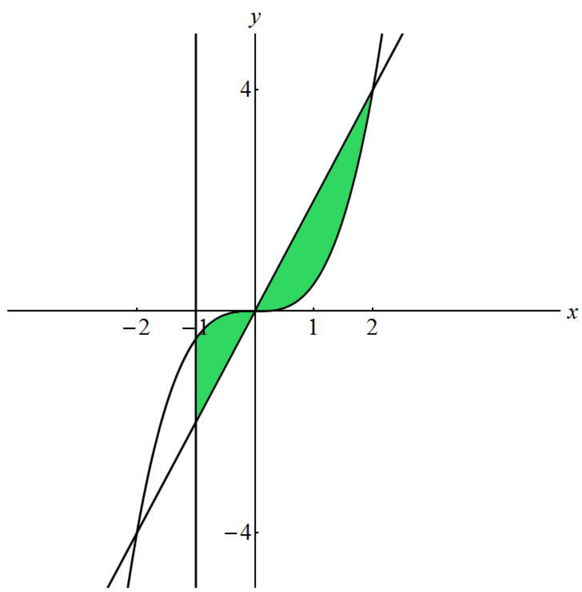
Obsah plochy na obrázku 41 je $\frac{9}{4}$ jednotek čtverečních.

52. Pomocí dvojného integrálu určete obsah plochy M.

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \geq \tfrac{x^3}{2}; y \leq 2x; x \geq 0\right\} \cup$$

$$\cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \leq \tfrac{x^3}{2}; y \geq 2x; x \in \langle -1, 0\rangle\right\}$$

Řešení:



Obrázek 42: Množina M z příkladu č. 52

Tento obsah vypočítáme jako součet dvou integrálů, protože v počátku souřadnic se nám mění integrační meze.

$$S = \int_{-1}^{0} \left(\int_{2x}^{\frac{x^3}{2}} 1dy \right) dx + \int_{0}^{2} \left(\int_{\frac{x^3}{2}}^{2x} 1dy \right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(\frac{x^3}{2} - 2x \right) dx + \int_{0}^{2} \left(2x - \frac{x^3}{2} \right) dx =$$

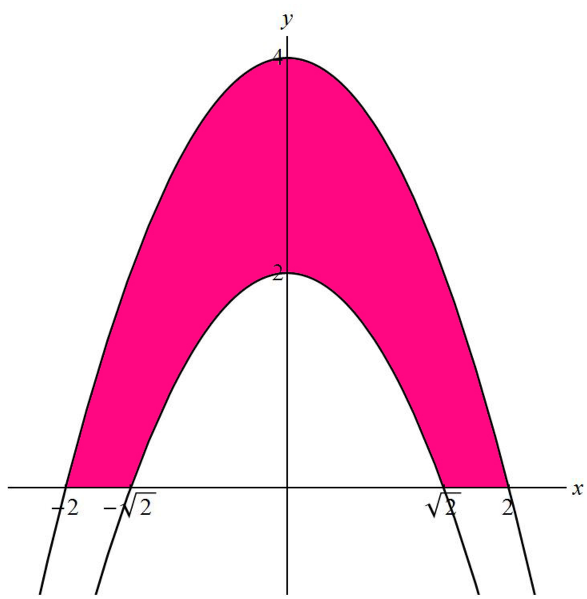
$$= \left[\frac{x^4}{8} - x^2 \right]_{-1}^{0} + \left[x^2 - \frac{x^4}{8} \right]_{0}^{2} = -\frac{1}{8} + 1 + 4 - 2 = \frac{23}{8}$$

Obsah plochy na obrázku 42 je $\frac{23}{8}$ jednotek čtverečních.

53. Pomocí dvojného integrálu určete obsah plochy M.

$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 2 - x^2; y \leq 4 - x^2; y \geq 0\}$

Řešení:



Obrázek 43: $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 2 - x^2; y \leq 4 - x^2; y \geq 0\}$

$$S = 2\int_{\sqrt{2}}^{2}\left(\int_{0}^{4-x^2} 1dy\right)dx + 2\int_{0}^{\sqrt{2}}\left(\int_{2-x^2}^{4-x^2} 1dy\right)dx =$$

$$= 2\int_{\sqrt{2}}^{2}\left(4 - x^2\right)dx + 2\int_{0}^{\sqrt{2}}\left(4 - x^2 - 2 + x^2\right)dx =$$

$$= 2\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{\sqrt{2}}^{2} + 2\left[x\right]_0^{\sqrt{2}} = 2\left(8 - \frac{8}{3} - 4\sqrt{2} + \frac{2\sqrt{2}}{2}\right) + 2 \cdot 2\sqrt{2} =$$

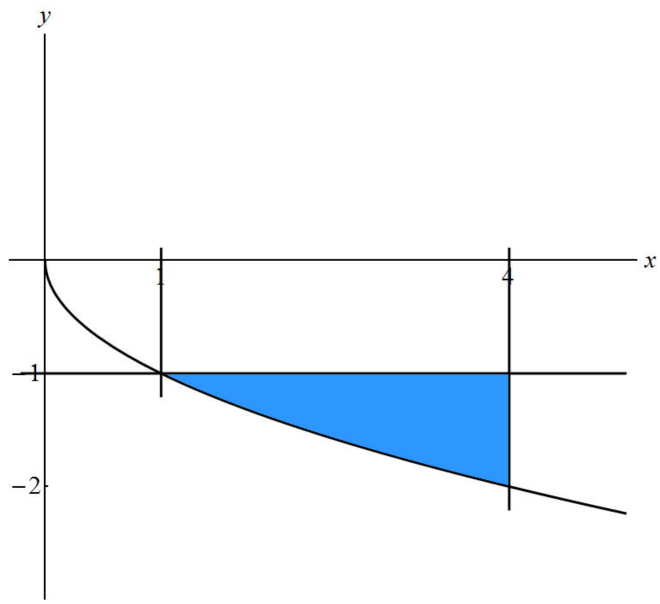
$$= 2\left(\frac{16}{3} - \frac{10\sqrt{2}}{3}\right) + 4\sqrt{2} = \frac{32}{3} - \frac{20\sqrt{2}}{3} + \frac{12\sqrt{2}}{3} = \frac{32}{3} - \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

Obsah plochy na obrázku 43 je $\frac{32}{3} - \frac{8\sqrt{2}}{3}$ jednotek čtverečních.

54. Pomocí dvojného integrálu určete obsah plochy M.

$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \geq -\sqrt{x}; 1 \leq x \leq 4; -2 \leq y \leq -1\}$

Řešení:



Obrázek 44: $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \geq -\sqrt{x}; 1 \leq x \leq 4; -2 \leq y \leq -1\}$

$$S = \int_1^4 \left(\int_{-\sqrt{x}}^{-1} 1 dy \right) dx = \int_1^4 \left(-1 + \sqrt{x}\right) dx = \left[-x + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^4 =$$

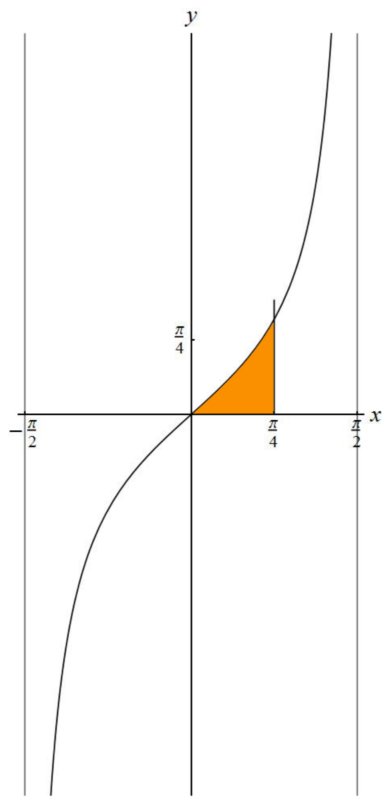
$$= -4 + \frac{2}{3}\sqrt{4^3} + 1 - \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{5}{3}$$

Obsah plochy na obrázku 44 je $\frac{5}{3}$ jednotek čtverečních.

55. Pomocí dvojného integrálu určete obsah plochy M.

$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}\right\}$

Řešení:



Obrázek 45: $M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}\right\}$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\operatorname{tg} x} 1 dy \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left| \begin{array}{lll} t = \cos x & & \\ dt = -\sin x dx & & \\ x = 0 & \rightarrow & t = 1 \\ x = \frac{\pi}{4} & \rightarrow & t = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right| =$$

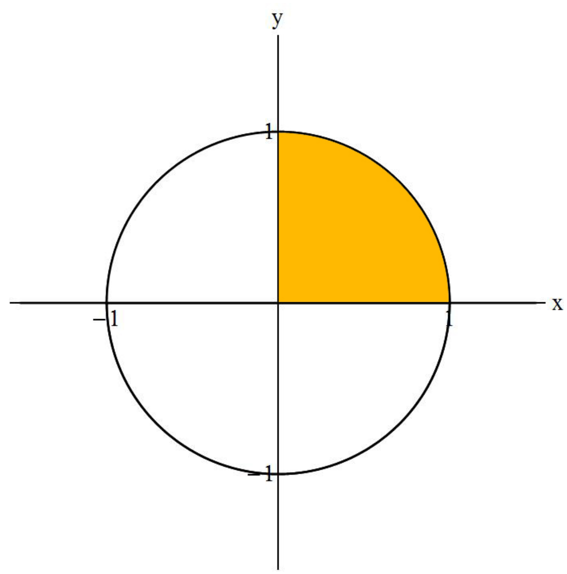
$$= - \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{t} dt = - \left[\ln |t|\right]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} + \ln 1 = - \ln \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Obsah plochy na obrázku 45 je $-\ln \frac{\sqrt{2}}{2}$ jednotek čtverečních.

56. Pomocí dvojného integrálu určete obsah plochy M.

$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1; y \geq 0; x \geq 0\}$

Řešení:



Obrázek 46: $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1; y \geq 0; x \geq 0\}$

$$S = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} 1 dy \right) dx = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \begin{vmatrix} x = \sin t & & \\ dx = \cos t dt & & \\ x = 0 & \rightarrow & t = 0 \\ x = 1 & \rightarrow & t = \frac{\pi}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t} \cdot \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{1}{2} \left[t + \sin t \cos t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + 1 \cdot 0 - 0 - 0 \cdot 1 \right) = \frac{\pi}{4}$$

Obsah plochy na obrázku 46 je $\frac{\pi}{4}$ jednotek čtverečních.

Poznámka: Integrál $\int \cos^2 t dt$, který se vyskytuje na konci druhého řádku ve výpočtu obsahu plochy M, počítáme takto.

$$\int \cos^2 t dt = \int \left(1 - \sin^2 t\right) dt = \int 1 dt - \int \sin^2 t dt = \int 1 dt -$$

$$- \begin{vmatrix} u = \sin t & v' = \sin t \\ u' = \cos t & v = -\cos t \end{vmatrix} = t + \sin t \cos t - \int \cos^2 t dt$$

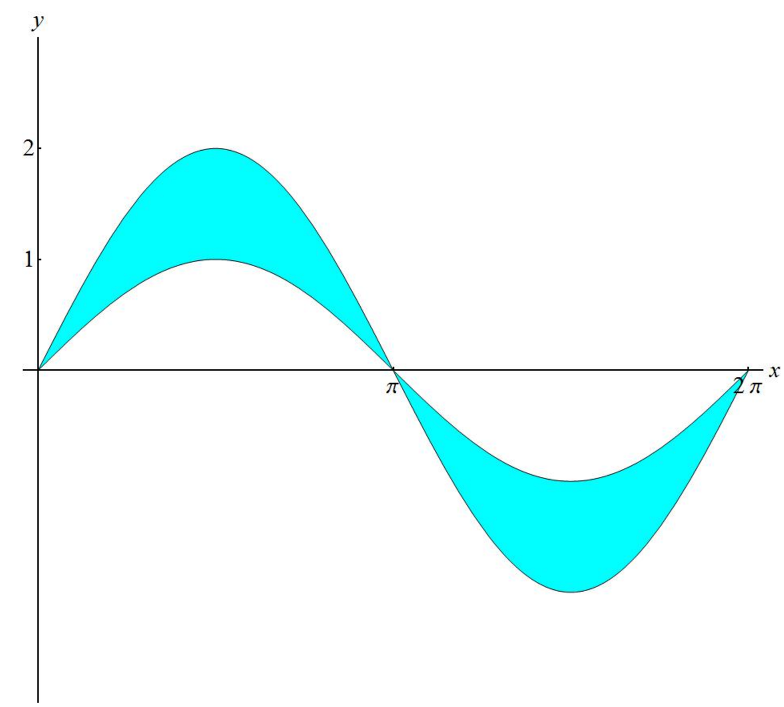
$$2\int \cos^2 t dt = t + \sin t \cos t + c$$

$$\int \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\left(t + \sin t \cos t\right) + c$$

57. Pomocí dvojného integrálu určete obsah plochy M.

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \le 2\sin x; y \ge \sin x; 0 \le x \le \pi\} \cup$$
$$\cup \ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \ge 2\sin x; y \le \sin x; \pi \le x \le 2\pi\}$$

Řešení:



Obrázek 47: Množina M z příkladu č. 57

$$S = 2 \cdot \int_0^{\pi} \left(\int_{\sin x}^{2\sin x} 1 dy \right) dx = 2 \cdot \int_0^{\pi} (2\sin x - \sin x)\, dx = 2 \cdot \int_0^{\pi} \sin x dx =$$

$$= -2\left[\cos x\right]_0^{\pi} = -2\left(-1-1\right) = 4$$

Obsah plochy na obrázku 47 jsou 4 jednotky čtverečné.

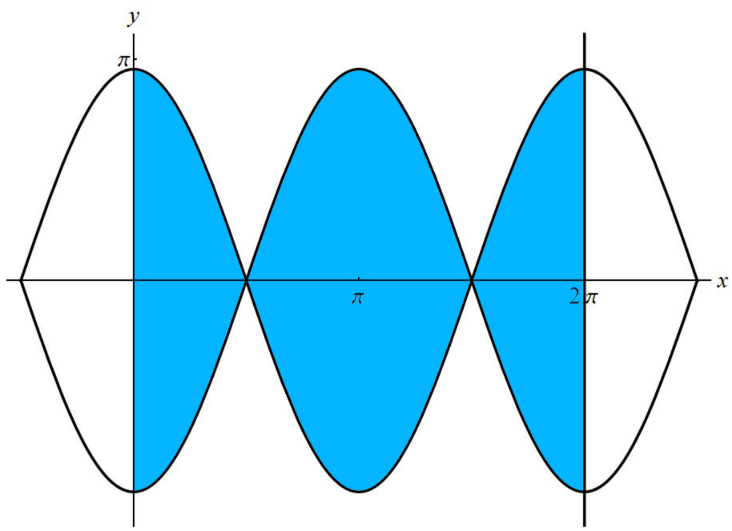
58. Pomocí dvojného integrálu určete obsah plochy M.

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \leq 3\cos x; y \geq -3\cos x; 0 \leq x \leq \tfrac{\pi}{2}\right\} \cup$$

$$\cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 3\cos x; y \leq -3\cos x; \tfrac{\pi}{2} \leq x \leq \tfrac{3}{2}\pi\right\} \cup$$

$$\cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \leq 3\cos x; y \geq -3\cos x; \tfrac{3}{2}\pi \leq x \leq 2\pi\right\}$$

Řešení:



Obrázek 48: Množina M z příkladu č. 58

$$S = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_{-3\cos x}^{3\cos x} 1 dy \right) dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\int\limits_{3\cos x}^{-3\cos x} 1 dy \right) dx + \int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \left(\int\limits_{-3\cos x}^{3\cos x} 1 dy \right) dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} 6\cos x dx - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 6\cos x dx + \int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 6\cos x dx =$$

$$= 6\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 6\left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + 6\left[\sin x\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} =$$

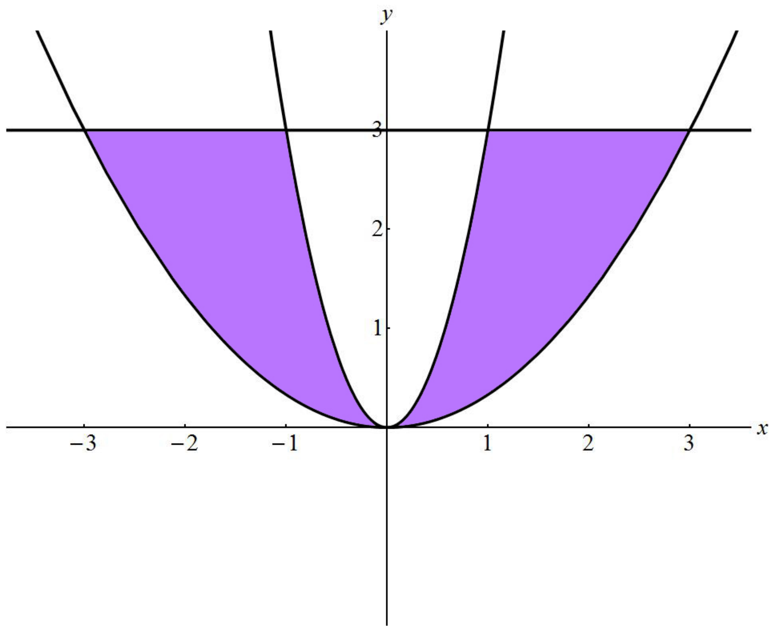
$$= 6\left(1-0\right) - 6\left(-1-1\right) + 6\left(0-(-1)\right) = 24$$

Obsah plochy na obrázku 48 je 24 jednotek čtverečních.

59. Pomocí dvojného integrálu určete obsah plochy M.

$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \leq 3x^2; y \geq \frac{x^2}{3}; y \leq 3\right\}$

Řešení:



Obrázek 49: $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \leq 3x^2; y \geq \frac{x^2}{3}; y \leq 3\right\}$

$$S = 2 \cdot \left[\int_0^1 \left(\int_{\frac{x^2}{3}}^{3x^2} 1dy\right) dx + \int_1^3 \left(\int_{\frac{x^2}{3}}^{3} 1dy\right) dx\right] =$$

$$= 2 \cdot \left[\int_0^1 \left(3x^2 - \frac{x^2}{3}\right) dx + \int_1^3 \left(3 - \frac{x^2}{3}\right) dx\right] =$$

$$= 2 \cdot \left(\left[x^3 - \frac{x^3}{9}\right]_0^1 + \left[3x - \frac{x^3}{9}\right]_1^3\right) =$$

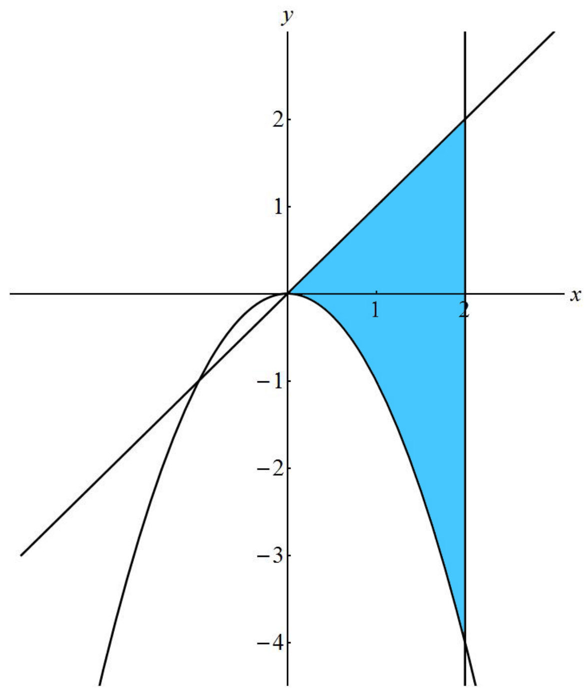
$$= 2 \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{9}\right) + \left(9 - \frac{27}{9} - 3 + \frac{1}{9}\right)\right] = 8$$

Obsah plochy na obrázku 49 je 8 jednotek čtverečních.

60. Pomocí dvojného integrálu určete obsah plochy M.

$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq x; y \geq -x^2; 0 \leq x \leq 2\}$

Řešení:



Obrázek 50: $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq x; y \geq -x^2; 0 \leq x \leq 2\}$

$$S = \int_0^2 \left(\int_{-x^2}^{x} 1 dy \right) dx = \int_0^2 \left(x + x^2\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 2 + \frac{8}{3} = \frac{14}{3}$$

Obsah plochy na obrázku 50 je $\frac{14}{3}$ jednotek čtverečních.

6. Geometrická aplikace – objemy těles

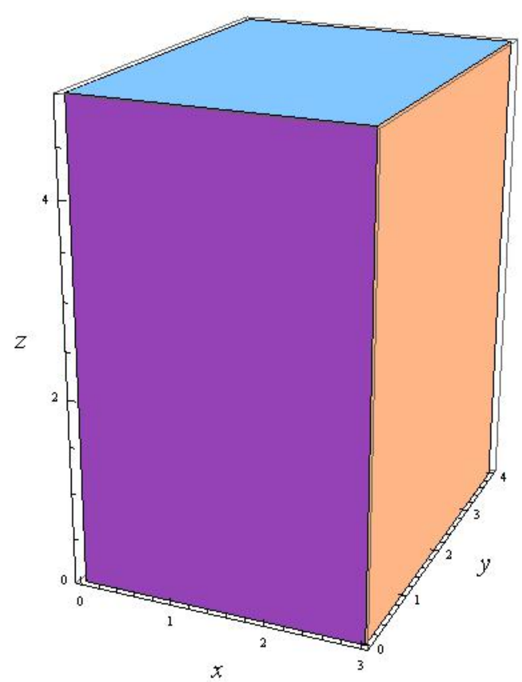
Dvojné integrály můžeme využít například i k odvození nám známých vzorečků pro objem některých těles. Také pomocí nich můžeme přímo objem těles vypočítat. Výpočet objemů těles i postup pro odvození vzorečků si ukážeme v této kapitole.

Objemy těles s podstavou, která je dána množinou M v rovině (xy) ohraničené shora částí grafu funkce f, budeme počítat pomocí vzorce

$$V = \int\int_M f(x, y) dx dy$$

61. Pomocí dvojného integrálu spočítejte objem kvádru s podstavou o rozměrech 3×4 cm a výškou 5 cm.

Řešení: Nejdříve si nakreslíme obrázek zadaného kvádru. Podle něho určíme integrační meze pro x a y.



Obrázek 51: Zadaný kvádr

Nyní začneme počítat objem kvádru podle vzorce $V = \int\int_M f(x,y)dxdy$. Dvojný integrál si přepíšeme na dvojnásobný podle věty 1 (Fubiniova pro obdélník) a $f(x,y)$ je v tomto případě konstantní funkce, jejíž graf leží ve výšce pěti jednotek nad rovinou (xy), tj. $f(x,y) = 5$. V tomto případě záleží na nás, podle které proměnné začneme integrovat, zvolíme tedy např. vnitřní integrál podle y a vnější podle x.

$$V = \int\limits_0^3 \left(\int\limits_0^4 5dy \right) dx =$$

Funkci tedy zintegrujeme podle proměnné y a následně použijeme Newton–Leibnizův vzorec.

$$= \int\limits_0^3 5\,[y]_0^4\, dx = \int\limits_0^3 20dx =$$

Poté vypočítáme jednoduchý integrál podle proměnné x a za pomocí Newton–Leibnizova vzorce dopočteme námi požadovaný objem kvádru.

$$= 20\,[x]_0^3 = 60 \text{ cm}^3$$

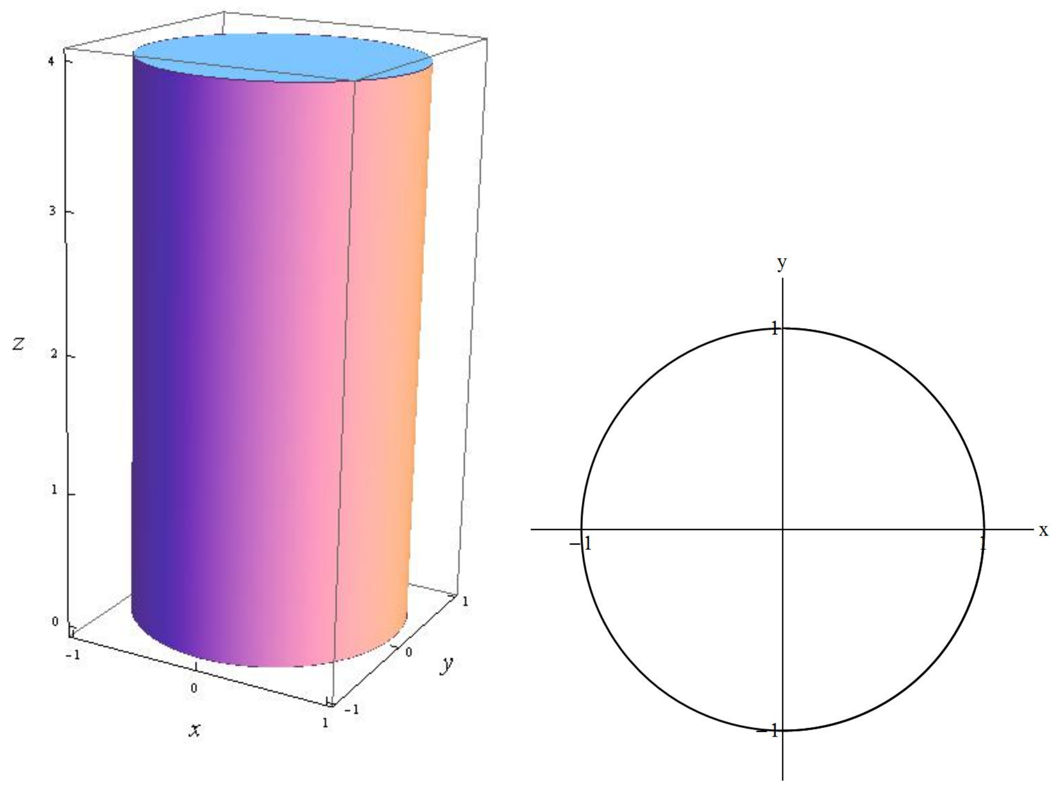
Objem kvádru na obrázku 51 je 60 cm^3.

Pro ověření výsledku si objem kvádru můžeme vypočítat i pomocí známého vzorce $V = a \cdot b \cdot c$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$ jsou délky jeho hran.

$V = a \cdot b \cdot c = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60 \text{ cm}^3$.

62. Pomocí dvojného integrálu spočítejte objem válce s podstavou o poloměru 1 cm a výškou 4 cm.

Řešení: Než začneme počítat, nakreslíme si dva obrázky, a to válec i jeho podstavu, pomocí nichž určíme integrační meze. Podstavou bude kruh o poloměru 1.



Obrázek 52: Vlevo: zadaný válec, vpravo: podstava válce

Podle obrázku 52 vlevo určíme, že funkce $f(x, y) = 4$, protože je to výška válce. Z obrázku 52 vpravo vidíme, že integrační množina bude následující: $M = \ \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 1;\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\right\}.$

Nyní již známe integrační meze a můžeme začít počítat objem válce pomocí dvojného integrálu. Námi určená množina je elementární vzhledem k proměnné x a z toho důvodu budeme nejprve integrovat podle proměnné y a x

budeme považovat za konstantu. Nejprve si však dvojný integrál přepíšeme na dvojnásobný.

$$V = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 4dy \right) dx =$$

Zintegrujeme podle y a upravíme pomocí Newton–Leibnizova vzorce.

$$= \int_{-1}^{1} 4 \cdot [y]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{1} 4 \cdot 2\sqrt{1-x^2}dx =$$

Dále zavedeme substituci $x = \sin t$, čímž se nám následně změní integrační meze.

$$= \left| \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos tdt \\ x = -1 \quad \rightarrow \quad t = -\frac{\pi}{2} \\ x = 1 \quad \rightarrow \quad t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = 8 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos tdt = 8 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 tdt =$$

Vypočteme jednoduchý integrál proměnné t a pomocí Newton–Leibnizova vzorce dojdeme ke konečnému výsledku.

$$= 8 \cdot \frac{1}{2} \left[t + \sin t \cos t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} == 4 \left(\frac{\pi}{2} + 1 \cdot 0 - \left(-\frac{\pi}{2} \right) - (-1) \cdot 0 \right) = 4\pi \text{ cm}^3$$

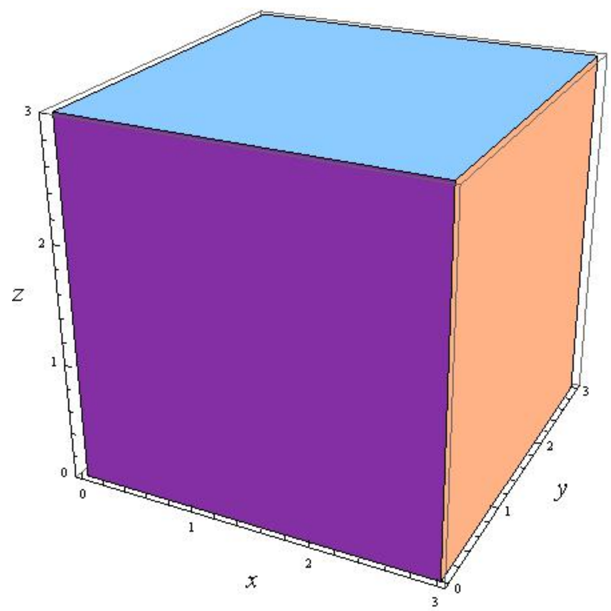
Objem válce na obrázku 52 je 4π cm^3.

Pro ověření výsledku si objem válce můžeme vypočítat i pomocí známého vzorce $V = \pi \cdot r^2 \cdot v$, kde $r \in \mathbb{R}$ je poloměr podstavy válce a $v \in \mathbb{R}$ je výška válce.

$V = \pi \cdot r^2 \cdot v = \pi \cdot 1^2 \cdot 4 = 4\pi$ cm^3.

63. Pomocí dvojného integrálu spočítejte objem krychle o délce hrany $a = 3$ cm.

Řešení: Výpočet objemu krychle pomocí dvojného integrálu bude velmi obdobný, jako výpočet objemu kvádru. Pro znázornění si nejprve nakreslíme obrázek.



Obrázek 53: Zadaná krychle

Budeme integrovat na množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 3; \ ; 0 \leq y \leq 3\}$. Za funkci $f(x, y)$ budeme považovat výšku krychle, neboli délku hrany a, tedy 3cm. Opět nezáleží na pořadí proměnných, podle kterých budeme integrovat, zkusíme to tedy naopak, než jak jsme počítali objem kvádru. Budeme nejprve integrovat podle x a následně podle y.

Dvojný integrál si přepíšeme na dvojnásobný podle věty 1 (Fubiniova pro obdélník).

$$V = \int_0^3 \left(\int_0^3 3dx \right) dy =$$

Zintegrujeme podle x a použijeme Newton–Leibnizův vzorec pro úpravu.

$$= \int_0^3 3\,[x]_0^3\,dy = \int_0^3 9dy =$$

Na závěr vypočteme jednoduchý integrál proměnné y a upravíme podle Newton–Leibnizova vzorce. Tím dojdeme ke konečnému výsledku.

$= 9\,[y]_0^3 = 27 \text{ cm}^3$

Objem krychle na obrázku 53 je 27 cm^3.

Pro ověření výsledku si objem krychle můžeme vypočítat i pomocí známého vzorce $V = a^3$, kde $a \in \mathbb{R}$ je délka hrany krychle.

$V = a^3 = 3^3 = 27$ cm^3.

Poznámka: Pomocí dvojného integrálu můžeme také odvodit objem krychle o jakékoli délce hrany a:

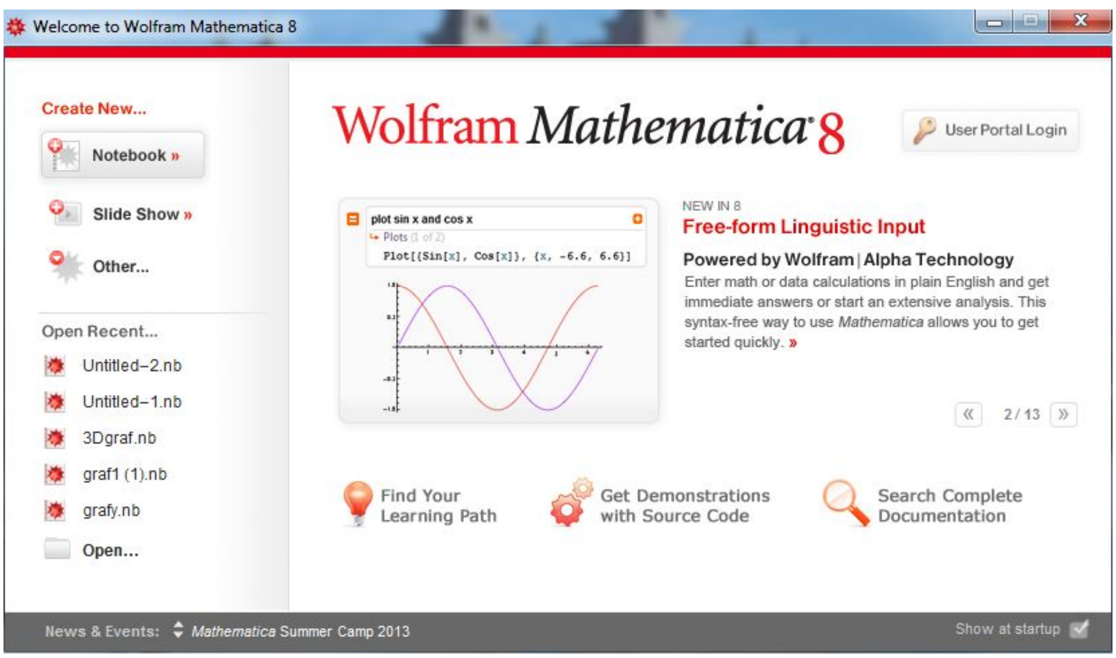
$$V = \int_0^a \left(\int_0^a a dy \right) dx = \int_0^a a\,[y]_0^a\,dx = \int_0^a a^2 dx = a^2\,[x]_0^a = a^3$$

7. Zadávání dvojných integrálů do programu Wolfram Mathematica

V této kapitole si ukážeme, jak používat program Mathematica od společnosti Wolfram Research na výpočet dvojných integrálů. To nám velmi usnadní jejich počítání. Navážeme na příklady, které jsme si již vypočítali v předchozích kapitolách, čímž si také ověříme, že jsme počítali správně.

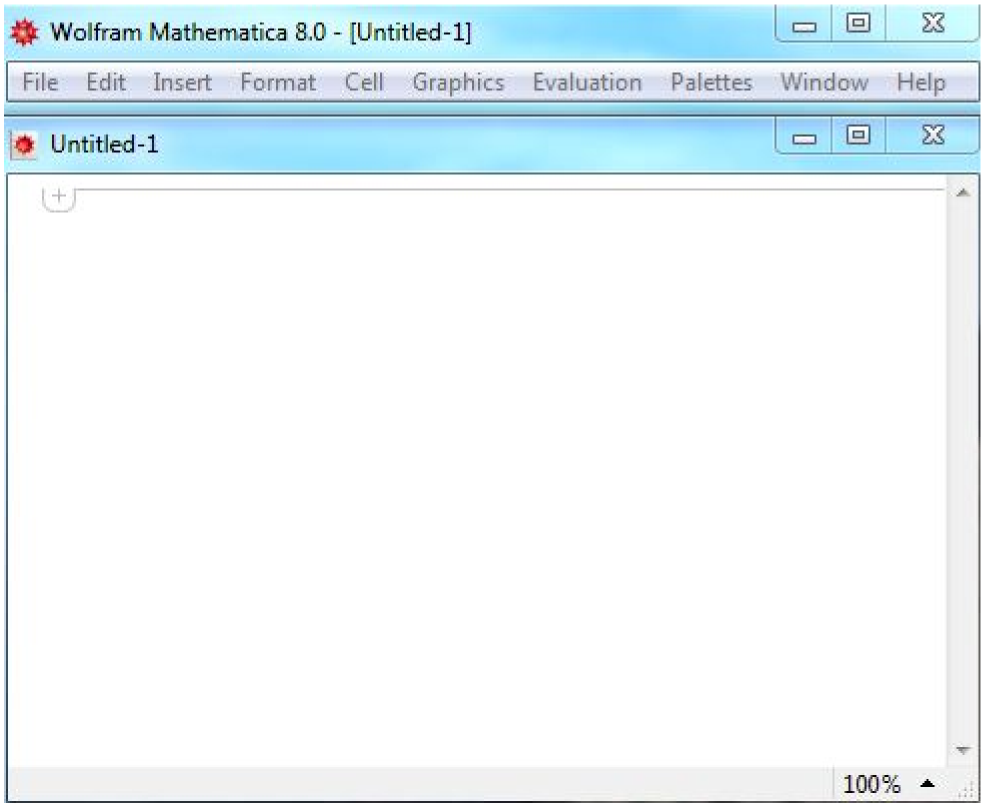
Abychom mohli program Mathematica používat, musíme vlastnit licenci, kterou je možno zakoupit na stránkách výrobce [8] a pro studenty je dostupná na některých školách zdarma. Také je možné využít zkušební verzi programu zdarma, která je opět dostupná ke stažení na stránkách výrobce [8].

Po zapnutí programu se nám objeví následující okno - obrázek 54.



Obrázek 54: Úvodní okno při zapnutí programu

Zde klikneme na tlačítko Create New **Notebook** a tím otevřeme naši pracovní plochu (obrázek 55), do které budeme zadávat příkazy.



Obrázek 55: Pracovní plocha programu

Jednoduché i dvojné integrály zadáváme do programu příkazem *Integrate*. Dále píšeme do hranatých závorek funkci, kterou chceme vypočítat, a zadané integrační meze. Ty zapisujeme do složených závorek. Vždy napíšeme do složené závorky proměnnou, podle které integrujeme a meze, pak i druhou proměnnou a opět její integrační meze. Vše od sebe oddělujeme čárkami. Nakonec zmáčkneme kombinaci kláves Shift+Enter a zobrazí se nám výsledek jako výstup Out.

Nejprve si zadáme do programu Mathematica **příklad 5** z kapitoly 2 , a to následujícím způsobem:

```
In[1]:= Integrate[x^2 * y * Sin[x + y^2], {x, Sin[Pi], 2 * Pi}, {y, Sin[Pi], Sqrt[Pi]}]
Out[1]= 4 π
```

Na zadání **příkladu 20** si ukážeme, že Mathematica zvládá vypočítat i dvojné integrály na elementárních množinách. Integrační meze si ovšem musíme určit sami, nestačí zadat integrační množinu, kterou dostaneme v zadání příkladu. Nejdřív si tedy vypočítáme integrační meze a poté zadáme integrál do programu takto:

```
In[1]:= Integrate[5*x^2, {x, 1, 3}, {y, (4/3)*x, 1 - x^2 + 4*x}]

Out[1]= 68
```

Vidíme, že výsledky jsou v obou příkladech stejné, jako ty, které jsme vypočítali výše, tudíž máme ověřenu jejich správnost.

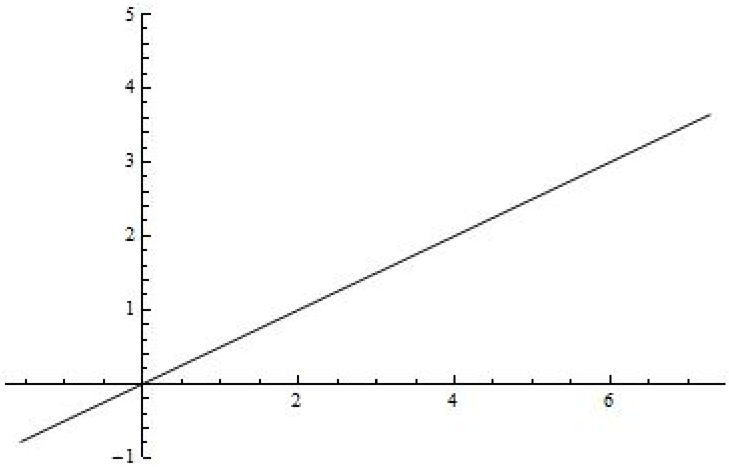
Dále je nutno říci, že goniometrické funkce zadáváme do programu Mathematica příkazy Sin, Cos, Tan, Cot a jejich argumenty píšeme do hranatých závorek přímo za ně. Symbol π píšeme příkazem Pi, přirozený logaritmus příkazem Log, dekadický logaritmus Log10 a odmocninu zapíšeme jako Sqrt. Jejich argumenty budou také vždy v hranatých závorkách. Absolutní hodnotu píšeme příkazem Abs a její argument zadáváme opět do hranaté závorky.

Všechny grafy, které jsou obsaženy v této bakalářské práci, byly vykresleny také pomocí programu Mathematica. Proto si zde ukážeme i návod na jejich vytvoření, a to na **příkladu 44**. Integrační množinu tohoto příkladu nám Mathematica vykreslí, když do ní zadáme tento příkaz:

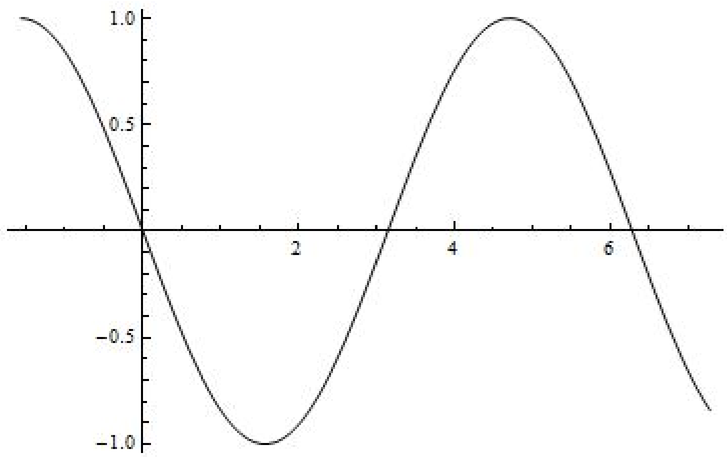
```
In[1]:= funkce1[x_] := x / 2;
        funkce2[x_] := -Sin[x]
        g1 = Plot[funkce1[x], {x, -Pi / 2, 2 * Pi + 1}, PlotRange → {-1, 5},
          PlotStyle → {Black, Thickness[0.004]}]
        g2 = Plot[funkce2[x], {x, -Pi / 2, 2 * Pi + 1},
          PlotStyle → {Black, Thickness[0.004]}]
        g3 = ContourPlot[{x == 2 Pi}, {x, -Pi / 2, 2 * Pi + 1},
          {y, -1.5, 5.}, Frame -> False, Axes -> True,
          ContourStyle → {Black, Thickness[0.004]}]

        Show[g1, g2, g3, AxesStyle → Thick, TextStyle → {FontSize → 30},
         AspectRatio → 0.7, PlotRange → {-1.5, 5},
         Ticks → {{Pi, 2 * Pi}, {1, Pi}}, AxesOrigin → {0, 0},
         AxesLabel → {Style["\!\(\*
                StyleBox[\"x\",\nFontSlant->\"Italic\"]\)", 30,
            FontFamily → Times], Style["\!\(\*
                StyleBox[\"y\",\nFontSlant->\"Italic\"]\)", 30,
            FontFamily → Times]}, PlotRange → All]
```

Začínáme nadefinováním funkcí, které potřebujeme vykreslit. Potom si vykreslíme grafy těchto funkcí příkazem *Plot*. Do hranaté závorky píšeme vlastnosti grafu, například příkaz *PlotRange* určuje, v jakém intervalu se bude pohybovat graf na ose y. Do příkazu *PlotStyle* vepisujeme do hranaté závorky parametry, jako například barvu nebo tloušťku grafu funkce. Protože si zde definujeme 3 grafy funkcí, a to g1, g2 a g3, vykreslí se nám všechny, každý do zvláštního obrázku - Out[3], Out[4], Out[5]. Příkazem *Show* potom vykreslíme všechny grafy do jednoho obrázku a máme celou naši integrační množinu. Tu nám znázorňuje poslední, čtvrtý obrázek - Out[6]. Za příkaz *Show* píšeme do hranaté závorky parametry, které nám určují vlastnosti posledního grafu - Out[6]. Těmi jsou například tloušťka os, velikost popisků os a další.

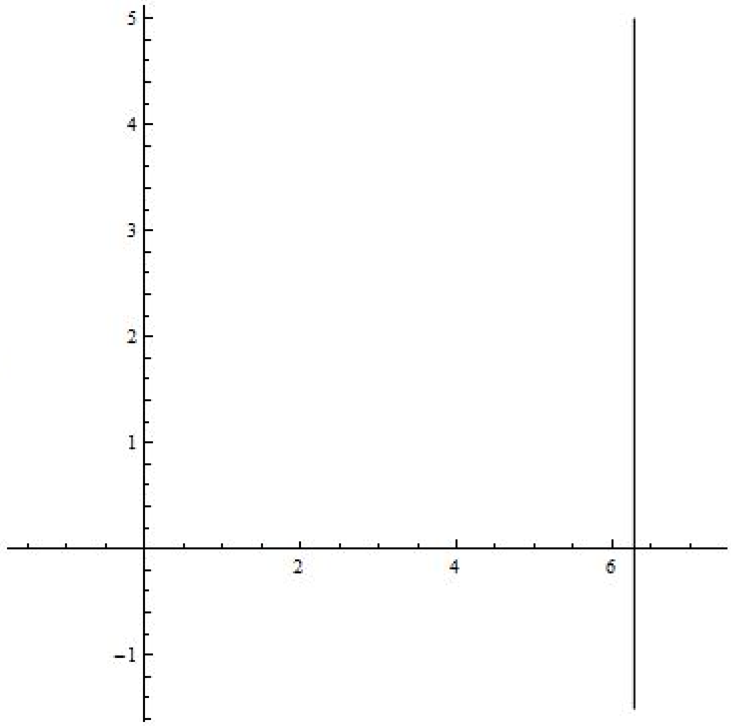
Out[3]=



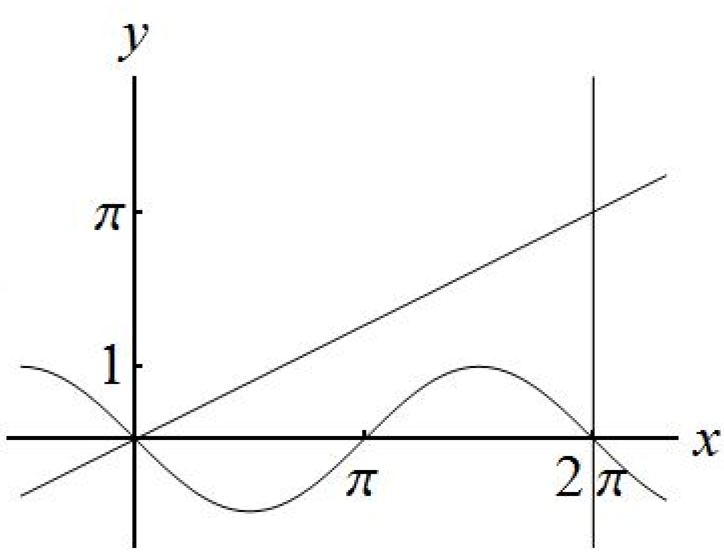
Out[4]=



Out[5]=



Out[6]=



Pokud bychom si chtěli obarvit plochu vykresleného grafu, použijeme příkaz *Filling*. Oblast mezi grafem funkce a osou x vybarvíme příkazem *Filling* $\rightarrow$ *Axis*, oblast pod grafem funkce vybarvíme, když do programu zadáme *Filling* $\rightarrow$ *Bottom*. Pokud chceme vybarvit oblast nad grafem funkce, zadáme příkaz *Filling* $\rightarrow$ *Top*.

Závěr

Cílem této práce bylo seznámit čtenáře s principem výpočtu dvojného integrálu. V první kapitole byly uvedeny základní věty, definice a vzorce potřebné pro výpočet integrálů a dále již následovaly kapitoly řešených příkladů.

Druhá kapitola začala výpočtem dvojného integrálu na obdélníkové oblasti, kde se čtenář naučil počítat integrály pomocí různých metod, jako například per partes nebo substituce. Využili jsme zde také rozklad na parciální zlomky.

Dále jsme pokračovali dvojným integrálem na uzavřené množině. Tato kapitola byla již složitější a vyžadovala pokročilejší znalosti v počítání. Zadané integrační množiny jsme si zde již museli zakreslovat do grafů a podle nich jsme určovali integrační meze. Všechny grafy byly kresleny v programu Mathematica, o kterém se více dozvíme v kapitole 7, a barevné plochy byly vybarveny v programu Adobe Photoshop CS6, jehož zkušební verzi je možné stáhnout na stránkách výrobce [9].

V další kapitole jsme se dostali k příkladům řešeným substitucí do polárních souřadnic. Zde jsme se naučili převést integrál do jiných souřadnic a využívat k výpočtu Jakobián. Využili jsme také již dříve známých poznatků z goniometrie, protože se zde vyskytly i některé goniometrické funkce.

Následovaly dvě kapitoly věnované geometrické aplikaci dvojného integrálu, a to výpočet obsahů ploch a objemů těles pomocí dvojného integrálu. S tím souvisí i odvození nám známých vzorců pro objemy těles, například jsme si odvodili objem krychle o hraně a pomocí dvojného integrálu.

Poslední kapitola je věnována programu Mathematica od Wolframu. Důvodem, proč jsem si k řešení dvojných integrálů vybrala zrovna tento program, je ten, že se mi zdál ze všech pro mě dostupných matematických softwarů (mezi nimiž je i Maple a Matlab, ve kterých jsme se učili pracovat v 1. ročníku) nejlepší po stránce jeho kvality a propracovanosti a také velmi dobře ovladatelný. Dokáže se v něm totiž snadno zorientovat i úplný začátečník. I já jsem se v něm musela naučit pracovat kvůli této práci. Dříve jsem ho nepoužívala ani neznala, protože se na naší škole učí letos prvním rokem.

Literatura

[1] Jarník, V.: Diferenciální počet II. Academia, 1984.

[2] Brabec, J., Hrůza, B.: Matematická analýza I., SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1985.

[3] Rektorys, K. a spol.: Přehled užité matematiky I.,Prometheus, 2000.

[4] Daněček, J., Dlouhý, O., Přibyl, O.: Matematika II: studijní opory pro studijní programy s kombinovanou formou studia. Modul 1, Dvojný a trojný integrál, Brno : Akademické nakladatelství CERM, 2006.

[5] Kalas, J., Kuben, J.: Integrální počet funkcí více proměnných. Brno: Masarykova univerzita, 2009.

[6] Fialka, M.: Integrální počet funkcí více proměnných s aplikacemi: výklad, řešené příklady, cvičení. Zlín : Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2008.

[7] Koutková, H., Prudilová, K.: Sbírka příkladů z matematiky III: modul BA02-M05 : dvojný, trojný a křivkový integrál. Brno : Akademické nakladatelství CERM, 2008.

[8] Wolfram Mathematica [online], dostupné z: http://www.wolfram.com/mathematica/, [citováno 1.3.2013]

[9] Adobe [online], dostupné z: http://www.adobe.com/cz/downloads/, [citováno 20.4.2013]

[10] Mathematica - fórum, Materiály [online], dostupné z: http://www.mathematica-forum.cz/materialy.htm, [citováno 12.3.2013]

[11] MATHEMATICA - Manuál [online], dostupné z: http://www.km.sjf.stuba.sk/data/Fortran/cvicenia/Cv_1_mat_manual.pdf, [citováno 3.2.2013]

[12] Mathematica 8 (Stručný manuál) [online], dostupné z: http://www.vscht.cz/mat/PASCh/HTMLMath/ManualMath.html, [citováno 6.2.2013]

[13] Říha, J., Látal, F., Švrček, F., Richterek, L., Kainzová, V., Mošová, V., Vyšín, I.: Software Mathematica v přírodních vědách a ekonomii [online], dostupné z: http://icteduca.upol.cz/dokumenty/software_mathematica.pdf, [citováno 12.2.2013]