

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Analýza sesuvu svahu pomocí metody kriging



Vedoucí bakalářské práce:
Mgr. Pavel Tuček Ph.D.
Rok odevzdání: 2011

Vypracoval:
Robert Zůvala
AS, III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracoval samostatně pod vedením pana Mgr. Pavla Tučka Ph.D. s použitím uvedené literatury.

V Olomouci dne 20. dubna 2011

Poděkování

Na tomto místě bych chtěl poděkovat především svému vedoucímu bakalářské práce panu Mgr. Pavlu Tučkovi Ph.D., za dostatek trpělivosti, čímž mi pomohl dovést tuto práci ke zdárnému konci. Také bych rád poděkoval panu Mgr. Lukáši Markovi, který mě doprovázel při měření v terénu. Dále bych poděkoval svému kamarádovi Martinu Erdösovi za občasnou výpomoc s překlady cizojazyčných materiálů.

Obsah

Úvod	5
I. Teoretická část	6
1 Prostorová proměnná	6
1.1 Náhodná funkce	6
1.2 Prostorová proměnná	6
1.3 Stacionarita	7
1.4 Prostorová kovarianční funkce	8
2 Variogram	10
2.1 Dosah a oblast vlivu	11
2.2 Chování kolem počátku	12
2.3 Vnořené sktruktury	13
2.4 Modely variogramu	14
2.4.1 Sférický model	14
2.4.2 Kvadratický model	14
2.4.3 Exponenciální model	15
2.4.4 Gaussovský model	15
2.4.5 Sinový model	15
2.5 Experimentální variogramy	16
2.5.1 Použití na přímce při pravidelném rozmístění hodnot	16
2.5.2 Použití na přímce při nepravidelném rozmístění hodnot	16
2.5.3 Použití v rovině při pravidelném rozmístění hodnot	18
2.6 Fit variogram modelu	18
3 Teorie krigingu	18
3.1 Základní poznatky	18
3.2 Cíle metody	18
3.3 Odvození krigingových rovnic	19
3.4 Typy krigingu	20
3.4.1 Základní kriging	20
3.4.2 Jednoduchý kriging	26
3.4.3 Univerzální kriging	27
3.4.4 Kokriging	28
3.4.5 Lognormální kriging	30
3.4.6 Indikátorový kriging	31
II. Praktická část	32

4 Svahové pohyby, sesuvy	32
4.1 Rozdělení svahových pohybů	32
4.2 Prevence svahových pohybů	33
4.3 Popis pozorovaného sesuvu	34
4.4 Použité programy	35
4.4.1 R	35
4.4.2 ArcGIS	35
4.5 Výsledné mapy	38
Závěr	43
Přílohy	44
Příloha 1: Souřadnice bodů v jednotlivých období	44
Příloha 2: Algoritmus výpočtů krigingu	45
Příloha 3: Srovnání výstupu ArcGIS a R	46
Příloha 4: Totální stanice a geoharpon	47
Příloha 5: Sesuv Halenkovice	48
Literatura	50

Úvod

Téma této bakalářské práce jsem si zvolil, protože jsem chtěl pracovat s něčím konkrétním, užitečným a aplikovatelným v běžném životě. Sesuvy půdy mohou nejen poškodit majetek, ale dokáží zničit celé vesnice a zabít přitom mnoho lidí. Poslední velké sesuvy se staly letos na začátku roku v Brazílii v Rio de Janeiro, kde usmrtily několik stovek lidí. Ale i v naší republice je mnoho míst, kde sesuvy ve větší či menší míře hrozí. Důležité je o nebezpečných místech vědět, pravidelně je kontrolovat a v případě ohrožení jim zamezit. Cílem této bakalářské práce je ukázat s jakými proměnnými se pracuje, jak se detekují sesuvy svahu a je ukázáno také použití metody kriging.

Bakalářskou práci jsem rozdělil na teoretickou a praktickou část. V teoretické části se zabývám především vysvětlením pojmů, modely variogramu a krigingovými metodami. V praktické části je mým cílem seznámit se s celým procesem zaměření kontrolních bodů přímo na místě svahu a zjistit, v jakých obdobích a v jakých bodech došlo k největším posunům a zda hrozí nějaké nebezpečí pro okolí. Výstupy bakalářské práce jsou mapy vypracované v programu ArcGIS a R. Vzhledem k faktu, že neexistuje mnoho českých monografií a publikací, zabývajících se teorií krigování, obsahuje práce detailnější popis této metody. Tato část práce je tedy využitelná i pro studijní účely.

I. Teoretická část

1 Prostorová proměnná

1.1 Náhodná funkce

Sledovaná hodnota v každém datovém bodu x je považována za výsledek, $z(x)$, náhodné veličiny, $Z(x)$. Její průměr se nazývá drift, $m(x)$. V bodech, v nichž nejsou měření provedena, jsou hodnoty $z(x)$ dobře definovány, ačkoliv nejsou známy. Mohou být myšleny jako výsledky (realizace) odpovídající náhodné veličiny $Z(x)$.

Definice 1.1. *V matematické terminologii se rodina všech těchto náhodných veličin nazývá náhodná funkce.*

Náhodná funkce má stejný vztah k jedné z jejích realizací tak jako náhodná veličina k jednomu z jejích výsledků. Navíc realizace náhodné funkce je funkce, kde výsledek náhodné veličiny je číslo.

1.2 Prostorová proměnná

Definice 1.2. *Prostorová proměnná představuje veličinu, která je funkcí polohy, tj. např. souřadnic X, Y, Z . Každému bodu ve vymezené oblasti může být přiřazena hodnota veličiny, která je obecně složena ze systematické (strukturní) a náhodné části. Systematická složka je funkcí souřadnic*

$$U = f(X, Y, Z) \tag{1}$$

a má čistě popisný charakter. Náhodná složka představuje realizaci náhodných vlivů, šumu.

K popisu prostorové proměnné lze využít teorie náhodných funkcí, kde pozorovanou hodnotu považujeme za jednu realizaci náhodné funkce v daném místě. Přímé studium funkce (1) je ve velké většině případů vyloučeno, neboť její prostorová variabilita je zpravidla velice nepravidelná, nespojitá a anizotropní. Navíc máme k dispozici pouze omezený počet skutečných pozorování. Na základě

funkční závislosti hodnoty sledované veličiny na poloze lze očekávat, že existuje i vzájemná závislost mezi jednotlivými hodnotami sledované veličiny. Ta se může projevit především při malých vzdálenostech mezi zkoumanými místy, kdy konstatujeme podobnost hodnot sledované veličiny. Jde tedy o korelaci hodnot téže veličiny a hovoříme o tzv. autokorelaci, která je závislá na vzdálenosti pozorování. Pokud závislost pozorujeme, hovoříme o tzv. kontinuálním poli. Pokud tato závislost nezávisí na směru zjišťování v poli, jedná se o izotropní pole, v opačném případě jde o anizotropní pole.

1.3 Stacionarita

Definice 1.3. *Stacionarita v případě prostorových dat znamená, že případná závislost prostorové proměnné, sledované ve dvou místech, vyplývá ze vzdálenosti těchto míst a nikoliv místa, kde k měření došlo.*

V případě statistických pozorování se pracuje s přístupem, kdy jednotlivá pozorování jsou na sobě nezávislá. V případě prostorových dat je tomu jinak: jednotlivá pozorování jsou sice nezávislá, avšak hodnota pozorování v určité lokalitě souvisí s pozorováními v lokalitách sousedních, takže jednotlivá pozorování (v případě prostorové závislosti) jsou na sobě z tohoto pohledu závislá. Z toho vyplývá, že z opakovaných pozorování (v prostoru) je možné učinit odhad společně s variabilitou sledovaného jevu a chybou zatěžující tento odhad. V případě prostorových dat je idea stacionarity použita pro získání hodnot prostorových údajů. Existují dva typy stacionarity.

Definice 1.4. *První se nazývá průměrná stacionarita a předpokládá se, že průměr je konstantní mezi (prostorově) výběrovými soubory a je nezávislý na jejich poloze. To znamená, že*

$$E(Z(x)) = m(x) = m \quad (2)$$

a kovarianční funkce mezi libovolnými dvěma body x a $x + h$ závisí na vektoru h , ale ne na bodu x , tj.

$$E[Z(x) \cdot Z(x + h)] - m^2 = C(h) \quad (3)$$

Předpoklad rozptylu není nutný, jelikož se ukáže, že se rovná kovarianci nulové vzdálenosti, $C(0)$.

V praxi se často stává, že tyto předpoklady nejsou splněny. My se však budeme zabývat případy, kdy je průměr konstantní.

Definice 1.5. *Druhý typ stacionarity se nazývá stacionarita pro kovarianci a vnitřní stacionaritu v semivariogramu. Ve stacionaritě druhého typu platí předpoklad, že kovariance je stejná mezi jakýmkoli dvěma místy, která mají od sebe stejnou vzdálenost a směr – bez ohledu, na umístění těchto dvou míst.*

$$E[Z(x) - Z(x + h)] = 0 \quad (4)$$

U vnitřní stacionarity v semivariogramu se předpokládá, že rozptyl rozdílu je mezi jakýmkoli dvěma místy stejný. Ta mají stejnou vzdálenost a směr, bez ohledu na umístění těchto dvou bodů. Tj.

$$\text{var}[Z(x) - Z(x + h)] = 2\gamma(h), \quad (5)$$

kde $\gamma(h)$ se nazývá semi-variogram (v krátkosti variogram).

Stacionarita druhého typu a vnitřní stacionarita jsou nezbytnými předpoklady k odhadu prostorových závislostí, což umožňuje výpočet modelu a odhadnout chybu předpovědi.

1.4 Prostorová kovarianční funkce

Věta 1.1. *Základní vlastnosti:*

•

$$C(0) = \sigma^2 \quad (6)$$

•

$$C(h) = C(-h) \quad (7)$$

•

$$|C(h)| \leq C(0) \quad (8)$$

Důkaz: (převzato z [1], str.22)

- (6): Pro stacionární veličiny existuje průměr m . Kovarianci definujeme jako:

$$C(h) = E [(Z(x+h) - m)(Z(x) - m)]$$

dosazením za $h = 0$ dostáváme

$$C(0) = E [(Z(x+0) - m)(Z(x) - m)] = \sigma^2$$

- (7): Podle definice

$$C(-h) = E [(Z(x-h) - m)(Z(x) - m)]$$

označíme $t = x - h$ a dostaneme

$$C(-h) = E [(Z(t) - m)(Z(t+h) - m)] = C(h)$$

- (8): Musíme dokázat, že

$$C(h) \leq C(0) \text{ a } C(h) \geq -C(0)$$

vyjdeme ze vztahu

$$0 \leq E [\{Z(x+h) - Z(x)\}^2]$$

$$0 \leq E [(Z(x+h) - m)^2 + (Z(x) - m)^2 - 2(Z(x+h) - m)(Z(x) - m)]$$

$$0 \leq 2C(0) - 2C(h)$$

$$C(h) \leq C(0)$$

Obdobně získáme ze vztahu $0 \leq E [\{Z(x+h) + Z(x)\}^2]$, že $C(h) \geq -C(0)$.

Tím jsme získali $|C(h)| \leq C(0)$. Tato nerovnost se nazývá Schwartzova nerovnost.

Věta 1.2. *Základní vztah mezi variogramem a odpovídající kovariancí.*

$$\gamma(h) = C(0) - C(h) \tag{9}$$

Důkaz: (převzato z [1], str.21) Důkaz vychází z definice variogramu:

$$2\gamma(h) = E [\{Z(x+h) - Z(x)\}^2]$$

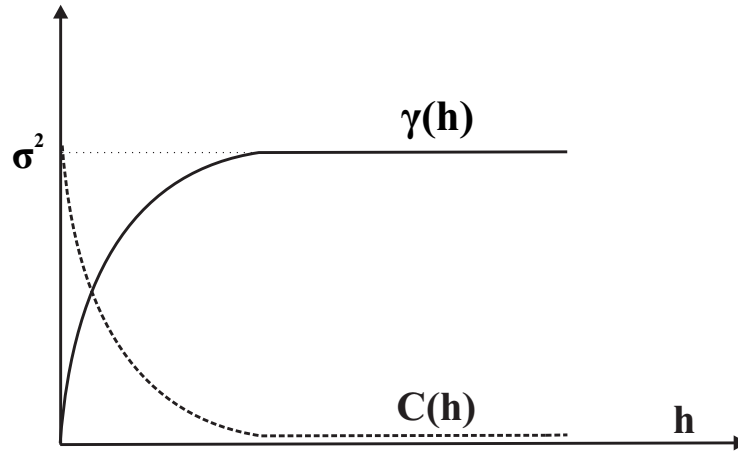
$$2\gamma(h) = E [(Z(x+h) - m)^2 + (Z(x) - m)^2 - 2(Z(x+h) - m)(Z(x) - m)]$$

$$2\gamma(h) = 2C(0) - 2C(h)$$

$$\gamma(h) = C(0) - C(h)$$

To dokazuje, že odpovídající kovariance je získána otočením variogramu vzhůru nohama.

Obr.1: Vztah variogramu k prostorové kovarianci (podle [3], str.11)



Vzhledem k tomu, že variogram začíná od nuly a stoupá k limitě, tak prostorová kovariance začíná od rozptylu a snižuje se. To je možné pouze v případě ohraničení variogramu horní limitou. Pouze stacionární regionální veličiny mají ohraničené variogramy.

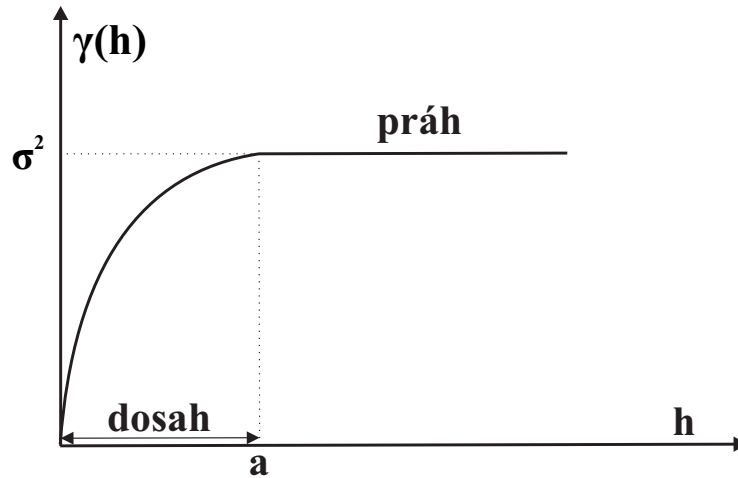
2 Variogram

Definice 2.1. V předchozí kapitole jsme variogram definovali jako (5). Pro stacionární a vnitřní veličiny je průměr ze $Z(x+h) - Z(x)$ roven nule a tak $\gamma(h)$ je rovno střední kvadratické diferenci. Díky tomu

$$\gamma(h) = 0.5 E[Z(x+h) - Z(x)]^2, \quad (10)$$

kde x a $x+h$ představují body v n -dimenzionálním prostoru. Přičemž $n = 1, 2$ nebo 3 .

Například pro $n = 2$ (v rovině), x označuje místo o souřadnicích (x_1, x_2) a h je vektor. V důsledku toho je variogram funkcí dvou složek h_1 a h_2 .



Obr.2: Typický variogram, který dosáhne limity (prahu) a vzdálenosti (dosahu) (podle [3], str.10)

Mezi jeho základní vlastnosti patří: vždy začíná v bodě $h = 0$, hodnota variogramu se zvyšuje s rostoucím h než dosáhne tzv. prahu a pak se vyrovná (alternativně by mohl jen růst). Tyto vlastnosti budeme nyní podrobněji zkoumat.

2.1 Dosah a oblast vlivu

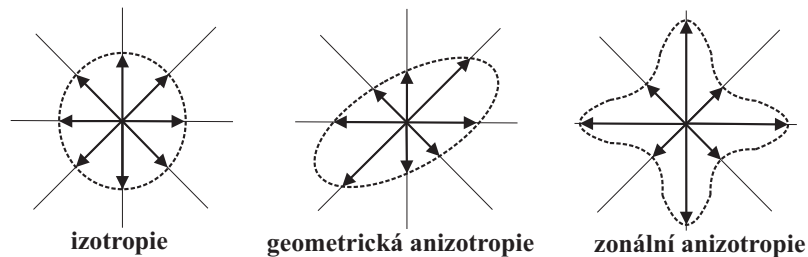
Míra zvýšení variogramu s rostoucí vzdáleností ukazuje, jak rychle klesá vliv vzorku se vzdáleností. Jakmile variogram dosáhne své mezní hodnoty (prahu), tak již mezi vzorky neexistuje žádná korelace. Tato kritická vzdálenost (dosah) dává přesnější definici tzv. zóně vlivu.

Definice 2.2. *Pro stacionární veličiny platí, že $\gamma(h)$ je rovno rozptylu pro vzdálenosti kolem dosahu. Tj.*

$$\gamma(h) = 0.5\text{var}[Z(x+h) - Z(x)] = 0.5[\text{var}(Z(x+h)) + \text{var}(Z(x))] = \sigma^2 \quad (11)$$

Ne všechny variogramy dosáhnou prahu. Některé se s rostoucí vzdáleností neustále zvyšují. Dosah nemusí být stejný ve všech směrech. To jen dokazuje anizotropii tohoto jevu. Ta se projevuje v charakteru směrových variogramů (tj. variogramů vypočtených v různých směrech objektem). Může se projevit ve změnách parametrů (dosahu, prahu, nugét efektu) nebo v rozdílech typů směrových

variogramů. Rozlišujeme pole izotropní a pole anizotropní geometrického a zonálního typu. Jsou-li dosahy variogramů stejného či příbuzného typu s blízkou úrovní prahů shodné, je těleso izotropní. Lze-li dosahy analogických či příbuzných typů variogramů proložit elipsou (elipsoid), jeví pole geometrickou anizotropii, kterou je možné eliminovat afinní transformací souřadnic. Budou-li směrové variogramy rozdílné úrovně prahů a rozdílných dosahů či budou-li i odlišného typu, jedná se o zonální anizotropii.

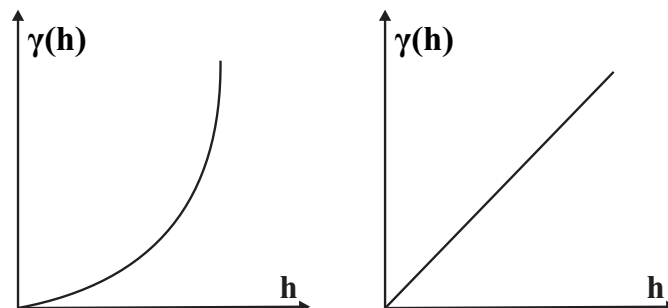


Obr.3: Projevy izotropie a anizotropie náhodného pole (podle [3], str.20)

2.2 Chování kolem počátku

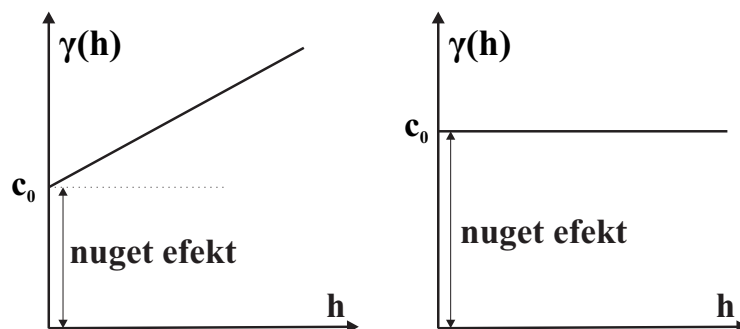
Chování variogramu na velké vzdálenosti je stejně důležité, jako chování pro malé hodnoty h . Existují čtyři typy chování kolem počátku.

1. Kvadratické: prostorová proměnná je pak kontinuální. Ve skutečnosti je diferencovatelná.
2. Lineární: prostorová proměnná je pak kontinuální, ale není diferencovatelná a je tudíž méně pravidelná než kvadratická.



Obr.4: Kvadratické a lineární chování kolem počátku (podle [1], str.28)

3. Diskontinuální kolem počátku tj. $\gamma(h)$ nesměruje k nule, když h směřuje k nule. To znamená, že veličina je velmi nepravidelná na krátké vzdálenosti.
4. Absolutní: čistě náhodné nebo bílý šum (nekorelovanost, nulová střední hodnota, konstantní rozptyl). Prostorové veličiny $Z(x+h)$ a $Z(x)$ jsou nekorelované pro všechny hodnoty h bez ohledu na to, jak blízko jsou.



Obr.5: Diskontinuální a absolutní chování kolem počátku (podle [1], str.28)

Variogramy většiny geologických veličin se kolem počátku chovají diskontinuálně. Tento jev nazýváme nuget efekt (efekt zbytkového rozptylu), protože byl poprvé objeven ve zlatých dolech v Jižní Africe (nuget zlata). Nuget efekt může být chápán jako rozptyl sledovaných hodnot při opakovaném měření na stejném místě.

2.3 Vnořené sktruktury

Popisují chování přírodního jevu v závislosti na vzdálenosti, kterou jsme schopni uvažovat.

- $h = 0$: Pokud zkoumáme vlastnosti jevu ve vzdálenosti 0, zabýváme se pouze chybou měřícího přístroje, popř. jinak způsobenými výkyvy bez změny polohy měření.
- $h < 1 \text{ cm}$: Jedná se o variabilitu způsobenou většinou chemickými vlastnostmi (např. fyzikálními vztahy mezi materiály)

- $h < 100 \text{ m}$: Jsou to tzv. čocky neboli místa s výskytem sledovaného jevu (např. když sledujeme znečištění prostředí)
- $h < 100 \text{ km}$: Variabilita způsobená rozložením jevu v celém prostoru (např. počasí)

2.4 Modely variogramu

Modely s prahem odpovídají stacionárním prostorovým proměnným, zatímco neomezené modely jsou přidruženy pouze vnitřním veličinám. Následující výčet modelů není úplný. Jde o nejčastěji používané modely.

2.4.1 Sférický model

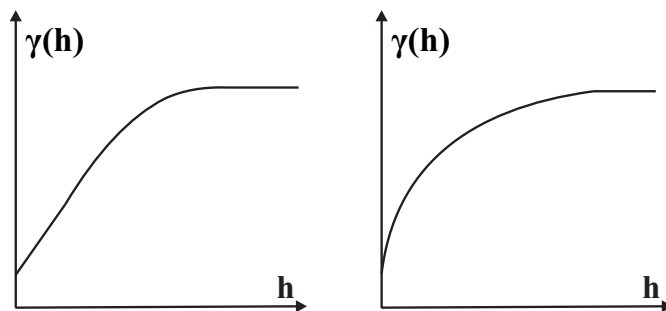
$$\gamma(h) = \begin{cases} C \left(\frac{3}{2} \frac{|h|}{a} - \frac{1}{2} \left(\frac{|h|^3}{a^3} \right) \right) & |h| < a \\ C & |h| \geq a \end{cases} \quad (12)$$

Často používaný model. Typicky se projevuje v případech, kdy v poli domínuje 1 zdroj variability. Má téměř lineární růst až do určité vzdálenosti, pak se stabilizuje.

2.4.2 Kvadratický model

$$\gamma(h) = \begin{cases} C \left(2 \left(\frac{h}{a} \right) - \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right) & h \leq a \\ C & |h| > a \end{cases} \quad (13)$$

Obr.6: Sférický a kvadratický model (podle [1], str.37)



2.4.3 Exponenciální model

$$\gamma(h) = C \left(1 - \exp\left(-\frac{|h|}{a}\right) \right) \quad (14)$$

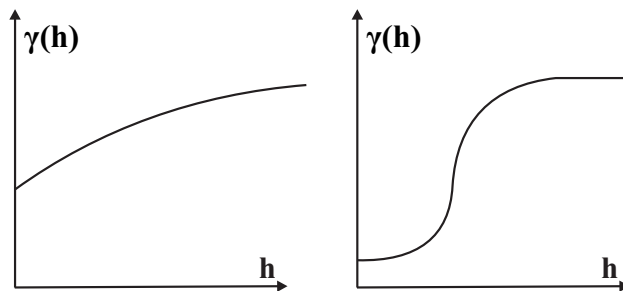
Teoreticky tento model nemá práh ani dosah. Dosah se prakticky určuje dle místa, kde dosáhne křivka 95 procent maximální hodnoty. Model se objevuje např. u polí, kde působí více významných zdrojů variability.

2.4.4 Gaussovský model

$$\gamma(h) = C \left(1 - \exp\left(-\frac{|h|^2}{a^2}\right) \right) \quad (15)$$

Praktický dosah je $1.73a$. Je dokumentován u dobře prozkoumaných polí. Naznačuje existenci plynulých změn hodnot. Setkáváme se s ním např. při modelování výškových dat. Zkušenosti ukazují, že při použití bez nugget efektu dochází často k numerickým nestabilitám.

Obr.7: Exponenciální a gaussovský model (podle [1], str.37-38)

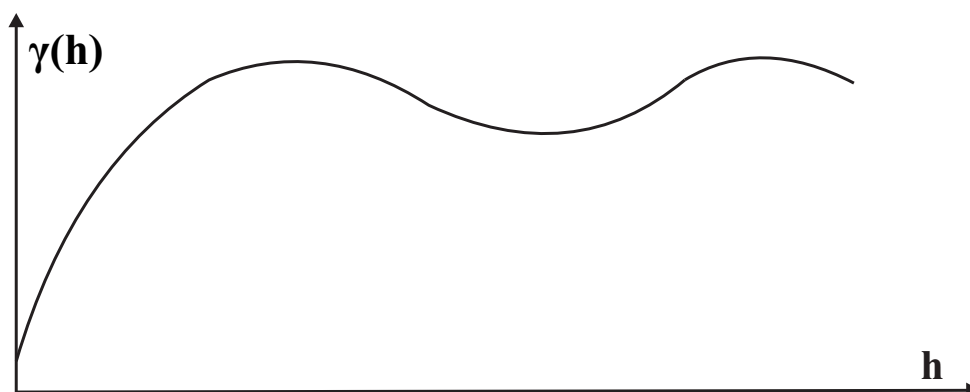


2.4.5 Sinový model

$$\gamma(h) = C \left(1 - \frac{\sin\left(\frac{h}{a}\right)}{\left|\frac{h}{a}\right|} \right) \quad (16)$$

Parametr $\frac{h}{a}$ je v radiánech.

Obr.8: Sinový model (podle [1], str.39)



2.5 Experimentální variogramy

Definice 2.3. *Experimentální variogram je empirická realizace zjišťovaná z množiny pozorování. Můžeme ji vypočítat jako*

$$\gamma^*(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [Z(x_i + h) - Z(x_i)]^2, \quad (17)$$

kde x_i je umístění vzorků, $Z(x_i)$ jsou jejich hodnoty a $N(h)$ je počet dvojic $(x_i, x_i + h)$ vzdálených od sebe h .

2.5.1 Použití na přímce při pravidelném rozmístění hodnot

Vzdálenosti mezi sousedními body jsou konstantní. Jako první krok h_1 se volí základní vzdálenost mezi sousedními body.

2.5.2 Použití na přímce při nepravidelném rozmístění hodnot

Vzdálenosti mezi sousedními body jsou různé. Základním problémem je volba správné délky prvního kroku, další kroky h se zpravidla volí jako n -násobky prvního kroku. Pro první krok se doporučuje průměrná minimální vzdálenost mezi sousedními body.

Příklad 2.1. *Vypočtěte experimentální variogram pro první tři vzdálenostní třídy, jestliže jsou vzorky rozmístěny pravidelně každých 5 metrů.*



Obr.9: Situace

Řešení:

$$\gamma^*(5) = \frac{1}{2x_{12}} [1^2 + 2^2 + 1^2 + 3^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 4^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 + 1^2]$$

$$\gamma^*(5) = 2.17$$

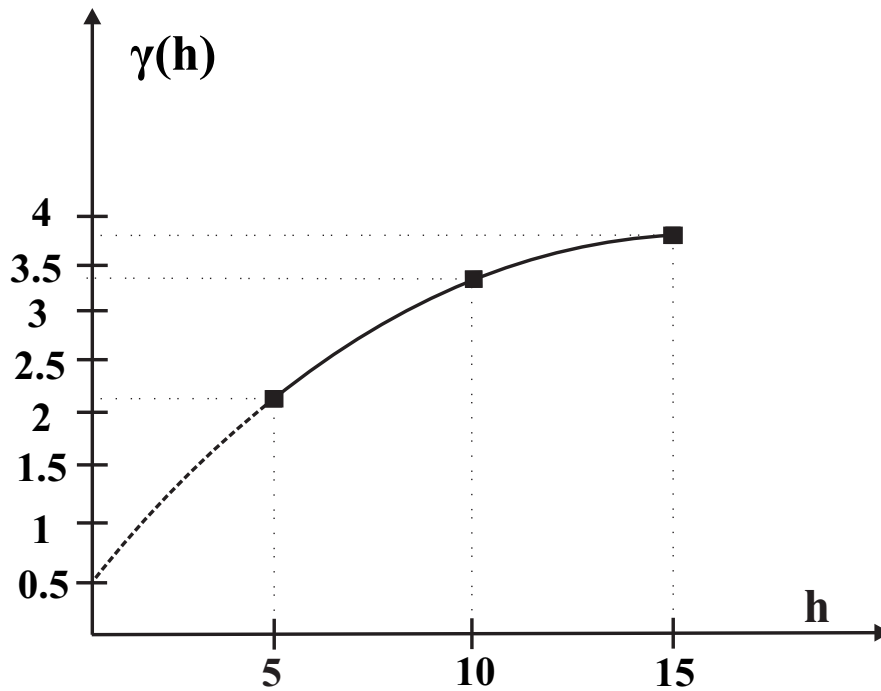
$$\gamma^*(10) = \frac{1}{2x_{11}} [1^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 + 4^2 + 2^2 + 5^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2]$$

$$\gamma^*(10) = 3.45$$

$$\gamma^*(15) = \frac{1}{2x_{10}} [2^2 + 0^2 + 1^2 + 4^2 + 3^2 + 0^2 + 3^2 + 6^2 + 1^2 + 1^2]$$

$$\gamma^*(15) = 3.85$$

Zaneseme tyto výsledky do grafu, v němž jsme použili ke spojení hodnot plnou čáru a tečkovanou k extrapolaci zpět na počátek.



Obr.10: Experimentální variogram

2.5.3 Použití v rovině při pravidelném rozmístění hodnot

Znamé hodnoty jsou rozmístěny v ploše. Volí se význačné směry (např. horizontálně, vertikálně, po obou úhlopříčkách). Výpočet experimentálního variogramu se provádí pro každý směr stejně jako při výpočtu na přímce. Nesmíme jen zapomenout, že při diagonálním výpočtu na pravidelné mřížce se vzdálenost mezi body mění více, než při výpočtu horizontálním nebo vertikálním (Pythagorova věta).

2.6 Fit variogram modelu

Fit je nejlépe vidět z praktických příkladů. Na analytické podobě modelu moc nezáleží, pokud jsou respektovány hlavní rysy tohoto jevu (např. nuget efekt, dosah, práh, anizotropie...). Obecně dobrý fit můžeme získat součtem dvou nebo tří modelů. Použitím více modelů se výrazně zvyšují početní náklady. Fitování se provádí metodou pokus-omyl pomocí některého programu (např. ArcGis, R-ko).

3 Teorie krigingu

3.1 Základní poznatky

Kriging je odhadovací metoda, která dává nejlepší nestranné lineární odhady bodových hodnot nebo blokových průměrů. V tomto případě nejlepší znamená minimální rozptyl. V zahraničí se užívá BLUE (Best Linear Unbiased Estimator), který dobře vystihuje výchozí podmínky krigování. Existuje několik typů kriging odhadů, které se v této kapitole budu snažit vysvětlit a odvodit jejich rovnice.

3.2 Cíle metody

Odběr vzorků poskytuje přesné informace v datových bodech. Tyto informace nám ovšem neříkají, co se děje mezi datovými body. K tomu potřebujeme přesný způsob odhadu hodnoty mezi dvěma body nebo průměry kolem bloků. Přesnost odhadu závisí na několika faktorech:

1. Počet vzorků a kvalita dat v každém bodě.
2. Pozice vzorků v rámci ložiska. Rovnoměrné rozložení vzorků dosahuje lepšího pokrytí, čímž poskytuje více informací o ložisku než shluk vzorků.
3. Odhadnutí vzdálenosti mezi vzorky a bodem nebo blokem. Je přirozené se více spoléhat na sousední vzorky než na více vzdálené. Stejně tak očekáváme, že přesnost musí být nejlepší v blízkosti vzorků než u vzdálených vzorků.
4. Nutno vzít v úvahu prostorovou kontinuitu (ná vaznost). Je jednodušší odhadnout hodnoty více pravidelných proměnných než nepravidelných (např. odhady stupňů mědi jsou přesnější než pro zlato).

Kriging je metoda odhadu, která bere v úvahu všechny tyto faktory. Byla pojmenována po jihoafrickém důlním inženýrovi Dr. D.G.Krigeovi. Byl první, kdo rozvinul techniku klouzavého průměru pro odhad stupně zlata, který odstraňuje regresní účinek. Profesor G.Matheron tuto metodu zlepšil a nazval ji kriging. V podstatě je to způsob, jak najít nejlepší nestranný lineární odhad (ve smyslu nejmenšího rozptylu). To znamená, že zvolíme vážený průměr hodnot vzorků, které mají minimální rozptyl.

3.3 Odvození krigingových rovnic

K dispozici máme hodnoty dat $z(x_1), \dots, z(x_N)$ a chceme odhadnout lineární funkci proměnné $Z(x)$. Například bychom mohli chtít odhadnout jeho hodnotu v určitém bodě $Z(x_0)$ nebo jeho průměr kolem určité oblasti. Abychom se vyhnuli nutnosti vypsát všechny případy odděleně, označíme kvantitu tak, aby byla odhadnuta podle:

$$z_V = \frac{1}{V} \int_V z(x) dx \quad (18)$$

Pole V může představovat celé ložisko, těžební blok nebo může být malé jako bod v případě bodových odhadů. K tomu bychom odhadli $Z(V)$, zvažujeme

vážený průměr dat:

$$z_V^* = \sum \lambda_i z(x_i), \quad (19)$$

kde λ_i jsou váhové faktory. Podle konvence se hvězdička používá k označení odhadovaných hodnot na rozdíl od skutečných, ale neznámých hodnot. Problém je vybrat váhové faktory nejlepším způsobem. K tomu používáme geostatistické modely.

Věta 3.1. *Uvažujme prostorové proměnné:*

$$Z_V^* = \sum \lambda_i Z(x_i) \quad (20)$$

Váhy jsou vybrány tak, že odhad je:

1. *nestranný: $E[Z_V^* - Z_V] = 0$*
2. *má minimální rozptyl: $Var[Z_V^* - Z_V]$*

Definice 3.1. *Rozptyl $Var[Z_V^* - Z_V]$ budeme nazývat rozptylem krigingu.*

3.4 Typy krigingu

3.4.1 Základní kriging

Předpokládáme, že prostorová proměnná $Z(x)$ je stacionární a průměr m je neznámý. Kriging s neznámým průměrem se nazývá základní kriging. Nejprve ověříme podmínky nestrannosti a minimálního rozptylu. Poté odvodíme systém rovnic pro stacionární případ pomocí variogramu a následně kovariance.

Věta 3.2. *Nestrannost: Prostorová proměnná je stacionární s průměrem m . To znamená, že v každém bodě je rovna průměru m , a tak je průměrný kterýkoliv blok. Tj.*

$$E[Z(x)] = m = E[Z_V] \quad (21)$$

Většina odhadů jsou vážené klouzavé průměry kolem hodnot dat neboli jsou lineární kombinací dat (20). Průměrná odhadovaná chyba $E[Z_V^ - Z_V] = 0$ je dána vztahem:*

$$E \left[\sum \lambda_i z(x_i) \right] = \sum \lambda_i m - m = m \left[\sum \lambda_i - 1 \right] \quad (22)$$

Důkaz: (převzato z [1], str.86) Aby mohla být nestranná, očekávaná chyba musí být nula. Takže buď $m = 0$ nebo součet kriging vah musí být jedna. Jelikož jsme u základního krigingu, kde m je neznámé, pak součet vah musí být roven jedné.

Věta 3.3. *Minimální rozptyl: Rozptyl chyby $[Z_V^* - Z_V]$ může být vyjádřen pomocí kovariance nebo variogramu*

Důkaz: (převzato z [1], str.86)

$$\begin{aligned} \sigma^2 = E(Z_V^* - Z_V)^2 &= E(Z_V^*)^2 + E(Z_V)^2 - 2E(Z_V^*Z_V) = \sum \sum \lambda_i \lambda_j C(x_i, x_j) + \\ &+ \bar{C}(V, V) - 2 \sum \lambda_i \bar{C}(x_i, V) = 2 \sum \lambda_i \bar{\gamma}(x_i, V) - \sum \sum \lambda_i \lambda_j \gamma(x_i, x_j) - \bar{\gamma}(V, V), \end{aligned}$$

kde $\bar{\gamma}(x_i, V)$ je průměrná hodnota variogramu mezi každým bodem x_i se známou hodnotou sledované veličiny a odhadovaným polem V , tj.

$$\bar{\gamma}(x_i, V) = \frac{1}{V} \int_V \gamma(x_i - x) dx,$$

$\bar{\gamma}(V, V)$ je průměrná hodnota variogramu mezi jakýmkoliv dvěma body rozmístěnými nezávisle v celém odhadovaném poli V , tj. $\bar{\gamma}(V, V) = \frac{1}{V^2} \int \int_V \gamma(x - x') dx dx'$ a $\gamma(x_i, x_j)$ jsou hodnoty variogramu mezi body v množině bodů se známou hodnotou sledované veličiny.

Věta 3.4. *Abychom minimalizovali odhad rozptylu za podmínky omezení, že součet kriging vah musí být roven 1, dosadíme Lagrangeův multiplikátor μ do výrazu minimalizace:*

$$\Phi = 2 \sum \lambda_i \bar{\gamma}(x_i, V) - \sum \sum \lambda_i \lambda_j \gamma(x_i, x_j) - \bar{\gamma}(V, V) + 2\mu(1 - \sum \lambda_i) \quad (23)$$

Důkaz: (podle [1], str.88) Minimalizaci provádíme s ohledem na všechny neznámé a nastavením parciální derivace na nulu. To provedeme podrobně pro tři vzorky a následně zobecníme pro N vzorků.

$$\begin{aligned} \Phi &= 2\lambda_1 \bar{\gamma}_{1V} + 2\lambda_2 \bar{\gamma}_{2V} + 2\lambda_3 \bar{\gamma}_{3V} - (\lambda_1^2 \gamma_{11} + \lambda_2^2 \gamma_{22} + \lambda_3^2 \gamma_{33} + 2\lambda_1 \lambda_2 \gamma_{12} + \\ &+ 2\lambda_1 \lambda_3 \gamma_{13} + 2\lambda_2 \lambda_3 \gamma_{23}) - \bar{\gamma}(V, V) + 2\mu(1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3) \end{aligned}$$

Derivací postupně podle $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ a μ dostáváme:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_1} = 2\bar{\gamma}_{1V} - (2\lambda_1\gamma_{11} + 2\lambda_2\gamma_{12} + 2\lambda_3\gamma_{13} + 2\mu) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_2} = 2\bar{\gamma}_{2V} - (2\lambda_2\gamma_{22} + 2\lambda_1\gamma_{12} + 2\lambda_3\gamma_{23} + 2\mu) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_3} = 2\bar{\gamma}_{3V} - (2\lambda_3\gamma_{33} + 2\lambda_1\gamma_{13} + 2\lambda_2\gamma_{23} + 2\mu) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mu} = -2(-1 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3) = 0$$

a tudíž

$$\lambda_1\gamma_{11} + \lambda_2\gamma_{12} + \lambda_3\gamma_{13} + \mu = \bar{\gamma}_{1V}$$

$$\lambda_1\gamma_{12} + \lambda_2\gamma_{22} + \lambda_3\gamma_{23} + \mu = \bar{\gamma}_{2V}$$

$$\lambda_1\gamma_{13} + \lambda_2\gamma_{23} + \lambda_3\gamma_{33} + \mu = \bar{\gamma}_{3V}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

Následně kriging systém je:

$$\sum_{j=1}^3 \lambda_j \gamma(x_i, x_j) + \mu = \bar{\gamma}(x_i, V) \quad i = 1, 2, 3$$

$$\sum_{j=1}^3 \lambda_j = 1$$

Definice 3.2. *Zobecněním pro N neznámých dostáváme systém krigingu:*

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \gamma(x_i, x_j) + \mu = \bar{\gamma}(x_i, V) \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$$
(24)

Stejnými úpravami bychom dostali systém krigingu z hlediska kovariance:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \lambda_j C(x_i, x_j) + \mu' &= \bar{C}(x_i, V) & i = 1, 2, \dots, N \\ \sum_i^N \lambda_i &= 1 \end{aligned} \quad (25)$$

Přítom pro dva Lagrangovy multiplikátory platí, že $\mu' = \mu$

Definice 3.3. *Minimální rozptyl se nazývá rozptyl krigingu a je dán:*

$$\sigma_K^2 = \sum \lambda_i \bar{\gamma}(x_i, V) - \bar{\gamma}(V, V) + \mu \quad (26)$$

Rozptyl z hlediska kovariance:

$$\sigma_K^2 = \bar{C}(V, V) - \mu' - \sum \lambda_i \bar{C}(x_i, V) \quad (27)$$

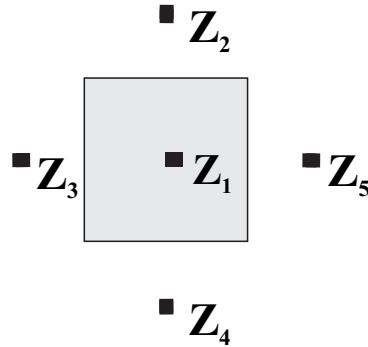
Definice 3.4. *K řešení systému je vhodné použít maticový zápis: $AX = B$*

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1N} & 1 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2N} & 1 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \gamma_{N1} & \gamma_{N2} & \dots & \gamma_{NN} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_N \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\gamma}(x_1, V) \\ \bar{\gamma}(x_2, V) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{\gamma}(x_N, V) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (28)$$

Důsledek 3.1. *Jestliže γ je přípustný model a jestliže neobsahuje vícenásobné body, pak matice A je vždy regulární. Inverzní matice A^{-1} existuje. Řešení tedy existuje a je jednoznačné. Rozptyl krigingu tedy můžeme přepsat jako:*

$$\sigma_K^2 = X^T B - \bar{\gamma}(V, V) \quad (29)$$

Příklad 3.1. *Obr.11: Situace (podle [1], str.90)*



(převzato z [1], str.90) Blok o rozměrech 200 m x 200 m je třeba krigovat pomocí 5 vzorků na pravidelné 200 m dlouhé síti. Předpokládáme, že prostorová proměnná je stacionární s izotropním sférickým variogramem s prahem ve výši 2 a dosahem 250 m. Jsou uvedeny některé hodnoty.

$$\bar{\gamma}(x_1, V) = 0.88, \bar{\gamma}(x_2, V) = 1.86, \bar{\gamma}(V, V) = 1.13$$

Řešení: Dle definice 3.4

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{14} & \gamma_{15} & 1 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \gamma_{24} & \gamma_{25} & 1 \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \gamma_{34} & \gamma_{35} & 1 \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & \gamma_{43} & \gamma_{44} & \gamma_{45} & 1 \\ \gamma_{51} & \gamma_{52} & \gamma_{53} & \gamma_{54} & \gamma_{55} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\gamma}(x_1, V) \\ \bar{\gamma}(x_2, V) \\ \bar{\gamma}(x_3, V) \\ \bar{\gamma}(x_4, V) \\ \bar{\gamma}(x_5, V) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hodnoty v matici byly získány výpočtem vzdálenosti mezi body a následně srovnány s hodnotou variogramu. Například pro γ_{23} je vzdálenost mezi body $200\sqrt{2}$ a to je větší vzdálenost, než je dosah. Hodnota γ_{23} je tedy rovna prahu.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1.89 & 1.89 & 1.89 & 1.89 & 1 \\ 1.89 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1.89 & 2 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1.89 & 2 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1.89 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.88 \\ 1.86 \\ 1.86 \\ 1.86 \\ 1.86 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Řešením soustavy dostáváme:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.12 \end{pmatrix}$$

Odhad průměrné hodnoty bloku je:

$$\begin{aligned} Z^* &= 0.6Z_1 + 0.1(Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5) \\ Z^* &= 0.6 \cdot 0.88 + 0.1(1.86 + 1.86 + 1.86 + 1.86) \\ Z^* &= 1.27 \end{aligned}$$

Odhad rozptylu (26): $\sigma_K^2 = 1.27 - 1.13 + 0.12 = 0.26$

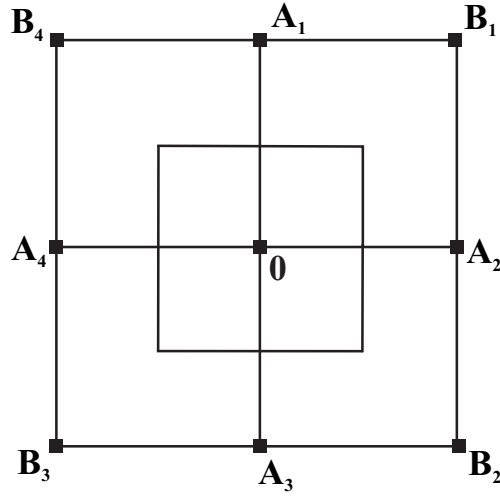
Popsaný postup se nazývá blokový kriging. Je-li cílem získat odhady v jistých bodech, jde o bodový kriging. V takovém případě se postup zjednoduší, protože není nutné počítat průměrné hodnoty variogramů v bloku (pravou stranu soustavy tvoří vektor hodnot variogramů mezi odhadovaným bodem a body pozorování).

Je třeba upozornit, že existuje více krigingových metod, které ke zjednodušení postupu řešení využívají specifčnosti různých typů systému pozorování nebo které jsou vhodné pro určité modely strukturálních funkcí. Jako příklad lze uvést tzv. pravidelný kriging nebo kriging se sdružováním pozorování.

Definice 3.5. *Pravidelný kriging: Je-li síť pozorování čtvercová a pole izotropní, lze odhadovaný vzorec vzhledem k symetrickému uspořádání míst pozorování k odhadovanému bloku upravit na:*

$$Z^* = (1 - \lambda_A - \lambda_B)Z_0 + \lambda_A Z_A + \lambda_B Z_B, \quad (30)$$

kde Z_0 je hodnota veličiny v centrálním bodě, Z_A je střední hodnota veličiny z pozorování první aureoly s vahou λ_A a Z_B je střední hodnota veličiny z pozorování druhé aureoly s vahou λ_B .



Obr.12: Princip pravidelného krigingu (podle [3], str. 29)

$$Z_A = \frac{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{4} \quad (31)$$

$$Z_B = \frac{B_1 + B_2 + B_3 + B_4}{4} \quad (32)$$

Definice 3.6. *Kriging se sdružováním pozorování:* Vychází z nahrazení reálných pozorování v každé jednotce myšlené čtvercové sítě jejich průměrem. Postup redukuje rozměr soustavy krigingu (úspora času), ale vede k jisté ztrátě přesnosti řešení.

3.4.2 Jednoduchý kriging

Kriging se známým průměrem m prostorové proměnné se nazývá jednoduchý kriging. Předpokládejme prostorovou proměnnou $Y(x)$ s nulovým průměrem. Je zřejmé, že původní prostorová proměnná je získána ze vztahu $Z(x) = Y(x) + m$. Odhad $Y(x)$ bude:

$$Y_V^* = \sum_{i=1}^N \lambda'_i Y(x_i) \quad (33)$$

Věta 3.5. *Stejně jako u základního krigingu musí být odhad chyby nestranný a mít minimální rozptyl.*

Důkaz: (převzato z [1], str.93)

$$E[Y_V^* - Y_V] = E \left[\sum_{i=1}^N \lambda'_i Y(x_i) - Y_V \right] = 0$$

Vzhledem k tomu, že průměr $Y(x) = 0$, tak odhad chyby je automaticky nestranný. Takže není nutná podmínka pro součet vah. Pro rozptyl odhadované chyby platí:

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y_V^* - Y_V] &= E \left[\sum \lambda'_i Y(x_i) - Y_V \right]^2 = \sum \sum \lambda'_i \lambda'_j C(x_i, x_j) + \\ &+ \overline{C}(V, V) - 2 \sum \lambda'_i \overline{C}(x_i, V) \end{aligned}$$

Definice 3.7. *Jelikož není potřebná podmínka pro součet vah, tak systém krigingu nepotřebuje Lagrangův multiplikátor. Systém krigingu je ve tvaru:*

$$\sum_j \lambda'_j C(x_i, x_j) = \overline{C}(x_i, V) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (34)$$

Rozptyl krigingu je:

$$\sigma_K^2 = \overline{C}(V, V) - \sum_i \lambda'_i \overline{C}(x_i, V) \quad (35)$$

Věta 3.6. *Řešením systému jsou krigingové váhy a tím je dán odhad Y_V . Odhad Z_V lze odvodit nahrazením Y_x za $Z_x - m$*

Důkaz: (převzato z [1], str.93) $Z'_V = Y'_V + m = \sum \lambda'_i [Z(x_i) - m] + m = \sum \lambda'_i Z(x_i) + m [1 - \sum \lambda'_i] = \sum \lambda'_i Z(x_i) + m \lambda_M$,

kde λ_M se nazývá váha průměru v jednoduchém krigingu.

Jednoduchý kriging je zřídka používán v praxi, protože průměr nebývá známý. Je především využíván ve velkých dolech v Jižní Africe, kde je průměr každé oblasti známý, protože těžba probíhala po mnoho let. Ale jedním z nejdůležitějších důvodů pro studium jednoduchého krigingu je, že váha průměru poskytuje jedno z nejlepších kritérií pro testování kvality krigingu.

3.4.3 Univerzální kriging

V případě nesplnění podmínek stacionarity (prostorová proměnná nemá v bloku stejnou očekávanou hodnotu) je nutné použít univerzální kriging. Prostorová

proměnná pak představuje součet trendu (driftu- vyjadřuje průměrnou hodnotu v bloku) a reziduí. Univerzální kriging tedy předpokládá, že existuje trend v datech (např. směr eroze svahu). Po výpočtu trendu lze získat hodnot rezidua odečtením hodnoty trendu v daném místě od skutečné hodnoty.

Lemma 3.1. *K popisu trendu se obvykle používají polynomy prvního nebo druhého stupně.*

$$m(x) = a_1x_i + a_2y_i \text{ nebo}$$

$$m(x) = a_1x_i + a_2y_i + a_3x_i^2 + a_4x_iy_i + a_5y_i^2,$$

kde x_i, y_i jsou souřadnice i -tého sledovaného bodu,
 a_1, \dots, a_5 jsou neznámé koeficientu trendu (driftu),
 $m(x)$ je hodnota trendu (driftu) ve sledovaném bodě.

Definice 3.8. *Výrazy trendu jsou začleněny do soustavy rovnic užívaných k nalezení vah krigingu. Soustava rovnic pro polynom prvního stupně je ve tvaru:*

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1N} & 1 & x_1 & y_1 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2N} & 1 & x_2 & y_2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{N1} & \gamma_{N2} & \dots & \gamma_{NN} & 1 & x_N & y_N \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_N & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & \dots & y_N & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_N \\ \mu \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\gamma}(x_1, V) \\ \bar{\gamma}(x_2, V) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{\gamma}(x_N, V) \\ 1 \\ x_P \\ y_P \end{pmatrix}, \quad (36)$$

kde x_i, y_i jsou souřadnice vstupního bodu,
 x_P, y_P jsou souřadnice výstupního bodu

3.4.4 Kokriging

V případě vzájemné závislosti více zkoumaných veličin je možné provádět kokriging, kdy existuje prostorová proměnná Z_1 , která je autokorelována a další prostorové proměnné Z_n , které mají také své prostorové vyjádření. Tato situace je jistě blíže realitě, protože většina jevů neexistuje sama o sobě, ale váže se

na jevy jiné. To může být situace, kdy vedle přímých měření zkoumané veličiny máme k dispozici měření jiných veličin, která jsou mnohem levnější a máme jich k dispozici mnohem více. Tato metoda zajišťuje nestranné odhady s minimálním a známým rozptylem.

Definice 3.9. *Jestliže chceme odhadnout prostorovou proměnnou "u" v bloku B s odběry vzorků proměnné "u" a druhou proměnnou "v", pak náš odhad bude:*

$$\hat{z}_u(B) = \sum_{i=1}^{N_u} \lambda_{ui} z_u(x_{ui}) + \sum_{j=1}^{N_v} \lambda_{vj} z_v(x_{vj}), \quad (37)$$

kde N_u a N_v je celkový počet míst odběru vzorků proměnné "u" a "v", x_{ui} a x_{vj} jsou místa odběru vzorků proměnné "u" a "v", λ_{ui} a λ_{vj} jsou příslušné váhy.

Definice 3.10. *Abychom zajistili nestrannost, musí být splněny následující omezení:*

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_u} \lambda_{ui} &= 1 \\ \sum_{j=1}^{N_v} \lambda_{vj} &= 0 \end{aligned} \quad (38)$$

Z prvního omezení vyplývá, že musí být k dispozici alespoň jedno pozorování z primární proměnné "u", které je nezbytné pro kokriging. Z druhého plyne, že součet vah sekundární proměnné "v" je rovno nule.

Definice 3.11. *Interpolační váhy se určí na základě minimalizace rozptylu:*

$$\sigma_u^2(B) = E[z_u(B) - \hat{z}_u(B)]^2 \quad (39)$$

Jedná se o optimalizační problém, kde pro každou kombinaci místa a atributu je jedna rovnice. Tedy celý systém rovnic je:

$$\sum_{i=1}^{N_u} \lambda_{ui} \gamma_{uu}(x_{ui}, x_{uk}) + \sum_{j=1}^{N_v} \lambda_{vj} \gamma_{uv}(x_{uj}, x_{vj}) + \psi_u = \bar{\gamma}_{uu}(B, x_{uk}), \quad k = 1, \dots, N_u \quad (40)$$

$$\sum_{i=1}^{N_u} \lambda_{ui} \gamma_{uv}(x_{ui}, x_{vl}) + \sum_{j=1}^{N_v} \lambda_{vj} \gamma_{vv}(x_{vj}, x_{vl}) + \psi_v = \bar{\gamma}_{uv}(B, x_{vl}), \quad l = 1, \dots, N_v \quad (41)$$

kde $\gamma_{uu}(x_{ui}, x_{uk})$ je semivariogram proměnné "u" mezi místy i a k , $\gamma_{uv}(x_{uk}, x_{vj})$ je křížový semivariogram mezi proměnnou "u" a "v" v místě k a v místě j , ψ_u je Lagrangeův multiplikátor a $\bar{\gamma}_{uu}(B, x_{uk})$ je křížový semivariogram mezi proměnnou "u" a "v" v bloku B a v místě l .

Pomocí této metody dostáváme $N_u + N_v + 2$ rovnic a $N_u + N_v + 2$ proměnných, které lze vyřešit pomocí lineární algebry. Poté, co získáme parametry λ_{ui} a λ_{vj} můžeme odhadnout $\hat{z}_u(B)$ pomocí rovnice (5).

Definice 3.12. *Rozptyl kokrigingu je možné získat jako vedlejší produkt kokriging procesu:*

$$\sigma_u^2(B) = \sum_{i=1}^{N_u} \lambda_{ui} \bar{\gamma}_{uu}(B, x_{ui}) + \sum_{j=1}^{N_v} \lambda_{vj} \bar{\gamma}_{uv}(B, x_{vj}) - \psi_u - \bar{\gamma}_{uu}(B, B) \quad (42)$$

3.4.5 Lognormální kriging

Klasický variogram je vysoce citlivý k silně pozitivní šikmosti dat, což vede k extrémním hodnotám. Mnoho typů dat obvykle vykazuje pozitivní šikmost. Šikmost může být snížena o rozptyl stabilizující transformace stejně tak jako logaritmické transformace.

Definice 3.13. *Pokud se data, která byla log-transformována, blíží normálně distribuovaným datům, potom o nich prohlašujeme, že jsou distribuovány lognormálně. To vede k lognormálnímu krigingu:*

$$Y(x) = \log(Z(x)), \quad (43)$$

kde předpokládáme, že $Y(x)$ je stacionární proces.

Variogram se odhaduje ze sledovaných dat $(y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_n))$ a jeho model je fitován. V případě jednoduchého krigingu se fitovaný model používá k odhadu hodnoty $Y(x_0)$ na nepozorovaném bodě x_0 , což je založeno na pozorovaných datech $(y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_n))$. Odhadnuté hodnoty jsou v logaritmické míře.

Definice 3.14. *Chceme-li získat odhady v původní míře, musíme provést zpětnou transformaci vedoucí k původnímu $Z(x_0)$ a navíc výsledek musíme ještě korigovat o vznikající systematickou chybu. Což v případě jednoduchého krigingu provedeme pomocí vztahu:*

$$\hat{Z}(x_0) = \exp\left(\hat{Y}(x_0) + \frac{\sigma_Y^2}{2}\right), \quad (44)$$

kde $\hat{Y}(x_0)$ je předpověď $\hat{Y}(x_0)$ a σ_Y^2 je rozptyl krigingu $\hat{Y}(x_0)$

Definice 3.15. *V případě jednoduchého krigingu je předpověď rozptylu $Z(x_0)$ dána:*

$$\text{var}(\hat{Z}(x_0)) = \mu^2 \exp(\sigma_Y^2) \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\sigma_Y^2}{2}\right) \right\}, \quad (45)$$

kde μ je známý průměr $Z(x)$

V případě použití základního krigingu v logaritmické míře je průměr μ neznámý, takže nelze vypočítat předpověď rozptylu.

3.4.6 Indikátorový kriging

Pod pojmem indikátor chápeme nominální (alternativní) proměnnou, která indikuje, zda pozorování jeví či nejeví sledovanou vlastnost. Původní zjištěné hodnoty se nahradí hodnotou indikátoru. Indikátor má hodnotu "0", budou-li hodnoty nižší než zvolená mezní hodnota, a hodnotu "1" v opačném případě. Pomocí krigingu můžeme odvodit průměrnou hodnotu indikátoru v oceňovaném bloku, tj. ve skutečnosti ocenit podíl bloku nad zvolenou mezní hodnotou. Výsledkem lokálního odhadu je pak pravděpodobnost, se kterou je v daném místě splněna testovaná podmínka. Opakujeme-li postup pro různé mezní úrovně, získáme obraz o distribuci hodnot veličiny v objektu. Předností indikátorového kri-

gingu je, že jako neparametrická metoda není ovlivňována extrémními hodnotami zkoumané veličiny (odlehými pozorováními).

II. Praktická část

4 Svahové pohyby, sesuvy

Svahovými pohyby rozumíme přemísťování hornin z vyšších poloh do poloh nižších, způsobené účinkem zemské gravitace. V ČR jsou známy četné případy sesouvání a skalních zřícení. Sesuvy ohrožují různé objekty (např. komunikace, železnice, domy...) zvláště podcení-li se nebezpečí během stavebních prací. Kromě umělých zásahů do svahu mají také vliv přírodní podmínky, dané geologickými, klimatickými a hydrogeologickými poměry.

Tyto podmínky mohou pohyb podporovat nebo znemožňovat. Mezi faktory, které porušují stabilitu svahu, řadíme zejména změnu sklonu svahu, otřesy a vibrace, změny obsahu vody, činnost mrazu, zvětrávání hornin, změny ve vegetačním porostu... Tyto faktory pak dále mohou být klasifikovány podle vzniku na přírodní a antropogenní.

4.1 Rozdělení svahových pohybů

Dělení přihlíží k průběhu smykových ploch. Sesuvy dělí na asekvntní, konsekvntní a insekvntní. Asenkvntní sesuvy vznikají ve stejnorodých soudržných zeminách a k pohybu dochází po válcových (rotačních) smykových plochách. Ke konsekvntnímu sesuvům patří pohyby po plochách vrstevnatosti. Insekvntní sesuvy probíhají napříč vrstvami, jsou zpravidla velkých rozměrů a smykové plochy zasahují hluboko do svahu.

Podle mechanismu a rychlosti se dělí svahové pohyby na:

- Ploužení, má charakter pomalého tečení tuhé látky. Z geologického hlediska jde o dlouhodobý a nezrychlující se pohyb horninových hmot. Rozhraní mezi pohybující se hmotou a jejím nepohyblivým podložím je málo zřetelné.

- Sesouvání, je relativně rychlý krátkodobý klouzavý pohyb horninových hmot po svahu podle jedné nebo více smykových ploch. Charakteristické je, že část hmot se nasune na původní terén.
- Stékání, je katastroficky rychlý krátkodobý pohyb horninových hmot ve viskózním stavu (bláto). Stékající hmoty jsou odděleny od nepohybujícího se podloží ostrou hranicí. Výslednou formou stékání je proud. V konečném stádiu může stékání přejít v plazení. Jako svahový pohyb se tento typ sesuvu označuje tehdy, jestliže podíl vody ve stékající hmotě není větší než podíl horninových úlomků.
- Řícení, je náhlý katastrofický krátkodobý pohyb horninových hmot na strmých svazích. Po uvolnění se horninové hmoty zřítí volným pádem za krátkodobé ztráty kontaktu se svým podložím. Vzdálenosti přemístění hmot jsou značné.

4.2 Prevence svahových pohybů

- Úprava profilu svahu zmenšením jeho sklonu.
- Odvodnění svahu pomocí drenážních systémů pro povrchovou i podpovrchovou vodu.
- Obnovení vegetačního porostu. Kořenové systémy zpevňují svahový materiál. Koruny stromů navíc chrání svah před přímými účinky srážek.
- Bezpečnostní stavby jako jsou pilíře nebo ochranné zdi mohou zbrzdit posun svahových hmot, ale vzhledem k jejich nákladnosti i rozměrům je použití tohoto opatření limitováno na menší svahy.
- Jiné metody zvyšující ochranu zahrnují chemickou stabilizaci a zpevňování svahu cementem nebo jinými materiály, které snižují propustnost půdního krytu.

4.3 Popis pozorovaného sesuvu

Sledovaná oblast leží blízko obce Halenkovice ve Zlínském kraji asi 4 kilometry od Napajedel v nadmořské výšce 250-280 metrů. Sesuvné území se nachází na poli, kde v blízkosti nejsou žádné obytné ani jiné stavby. Plocha svahové deformace je přibližně 4400 m^2 , jeden jeho rozměr dosahuje velikosti 80 m a druhý 70 m. Svah na svém konci směřuje ke korytu potoka se sklonem mezi 10° - 15° . Celý svah je na povrchu zdevastován deformacemi. Sesuv vznikl na jaře roku 2006, pravděpodobně díky bohatým srážkám. Měření se na tomto sesuvu provádí pravidelně od roku 2008. Na svahu je již rozmístěno několik geoharpon (stabilizační geodetický hraniční znak skládající se z plastové hlavy a ocelového hřebu s kotvou), které zůstávají pevně v zemi a pokud se pohybuje svah, kde jsou umístěny, tak se pohybují s ním. K měření posunu jsme použili totální stanici Trimble 5503 DR Standard. Totální stanice je zeměměřický přístroj využívaný především geodety pro měření a registraci měřených hodnot vodorovných úhlů, výškových úhlů, vzdáleností a jejich přepočítání na pravoúhlé souřadnice. Měřené hodnoty je možno přenést do počítače k dalšímu zpracování a to buď kontaktní cestou (kabelem), nebo bezkontaktně (Bluetooth, Infrared, GSM). Fotografie geoharponu a totální stanice nafocené přímo na svahu je přiložena v příloze 4.



Obr.13: Sesuv Halenkovice (převzato z [4])

4.4 Použité programy

4.4.1 R

Jedná se o programovací jazyk a prostředí pro statistické analýzy a grafiku, které původně vyvinuli Robert Gentleman a Ross Ihaka z Aucklandské Univerzity. V současné době má projekt R 19 členů (základní tým vývojářů), 57 "contributors" (stálí přispěvatelé)- zjistíme přímo v R po zadáním příkazu "contributors()". Hlavními výhodami programu je:

- Dostupnost: R patří mezi tzv. "open source" programy, tedy volně šiřitelné. Je zařazen v rámci projektu GNU nadace "Free Software Foundation".
- Kompatibilita: R je vyvinuto pro operační systém Windows, Unix/Linux i Macintosh. Data je možno importovat z různých formátů včetně schránky (clipboard), csf formátů, některých aplikací pro GIS atd.
- Aktuálnost: Přispěvatelé velice rychle (často bezprostředně) reagují na vývoj nových metod ve statistice, takže se v R objevují metody, které často ještě nejsou implementovány do klasického komerčního software.
- Množství analytických nástrojů: Kromě základních funkcí obsahuje R velké množství doplňujících balíčků s knihovnami funkcí pro různé typy analýz.
- Velké možnosti grafických výstupů. Grafika v R obsahuje řadu grafických výstupů. Narozdíl od běžných programů je možno pracovat s grafikou na několika uživatelských úrovních, od nejjednoduššího nastavení až po uživatelem definované měřítko, osy, formáty bodů, kombinované grafy atd.

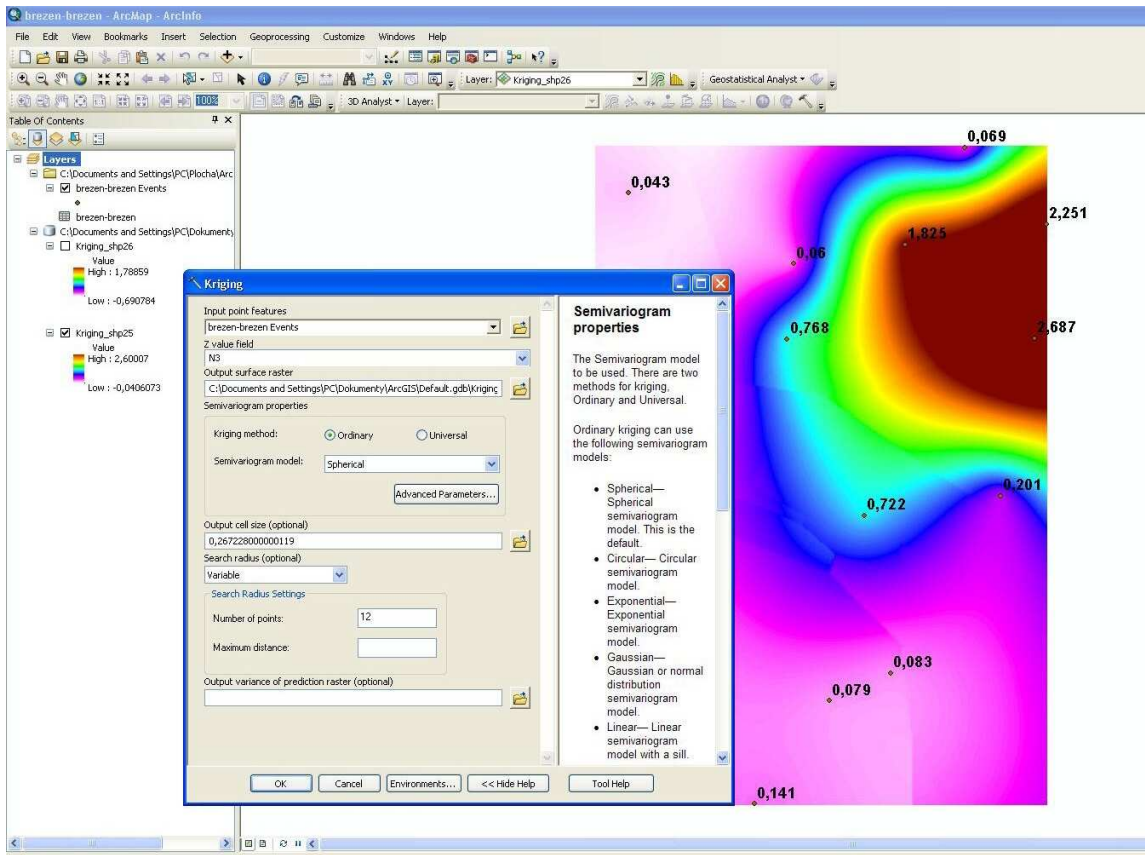
4.4.2 ArcGIS

Geoinformační systémy (GIS) jsou informační systémy s vizualizovanou prostorovou informací. Jsou to počítačově orientované systémy k získání, ukládání, editaci, správě, analýze a zobrazování prostorových dat. Jednoduše řečeno GIS je informační systém schopný zpracovávat prostorová data. Vytvořili jej v roce 1969

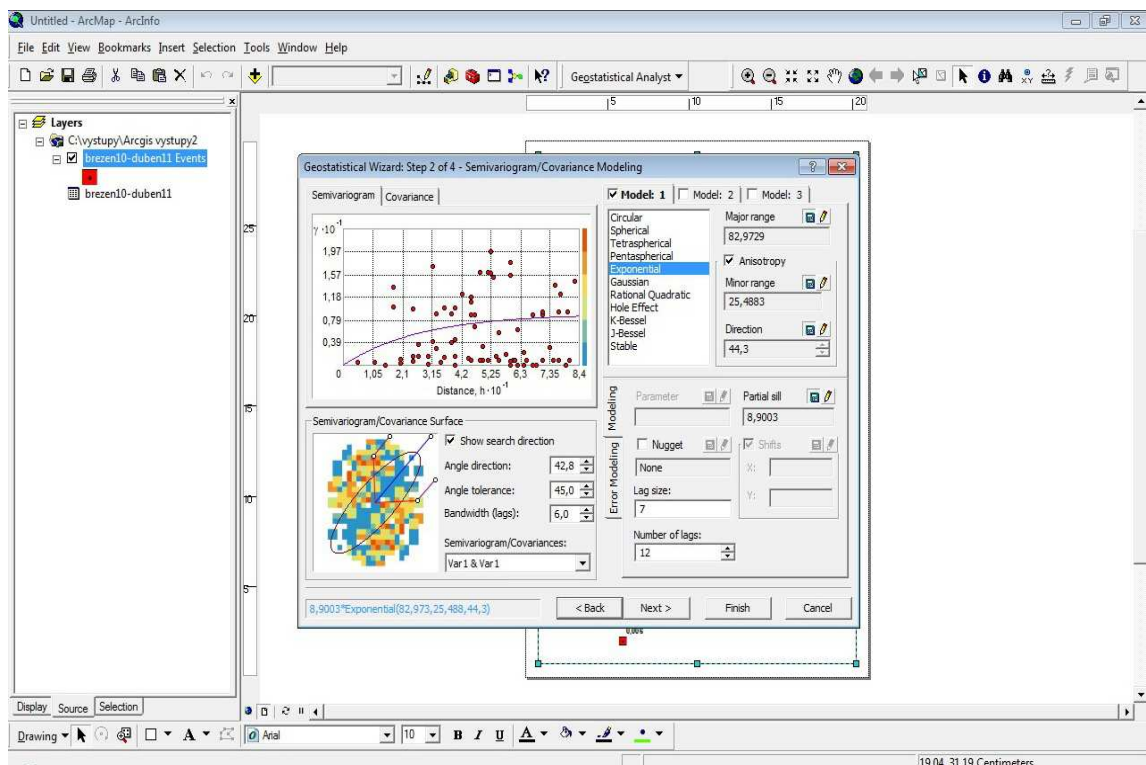
Jack a Laura Dangermondovi v Kalifornii a od té doby prošel několika vývojovými verzemi. Aktuální vývojovou verzí je ArcGIS 10. ArcGIS má tři úrovně:

- ArcView umožňuje prohlížet, organizovat, analyzovat, editovat a dokumentovat data. Je nezákladnějším a nejjednodušším modulem ArcGIS.
- ArcEditor má všechny funkce jako ArcView a navíc nástroje pro editaci shapefilů (výstup s koncovkou .shp) a geodatabází.
- ArcInfo je nejvyšší (a také nejdražší) verzí GIS software od firmy Esri. Obsahuje všechny funkce výše zmíněných komponent a obsahuje řadu dalších pokročilých nástrojů pro práci s geodety.

Modul ArcMap je jedním ze základních produktů a je jedním z nejrozšířenějších produktů zabývajících se tematikou Geografických informačních systémů (GIS). Používá se k prohlížení a editaci geografických dat. Umožňuje vytváření profesionálních map, grafů, projektů a zpráv. Geografická data jsou v mapě zobrazována jako vrstvy, každá vrstva obsahuje pouze jeden typ dat (bod, linie nebo polygon. . .).



Obr.14: Prostředí ArcGIS- funkce kriging

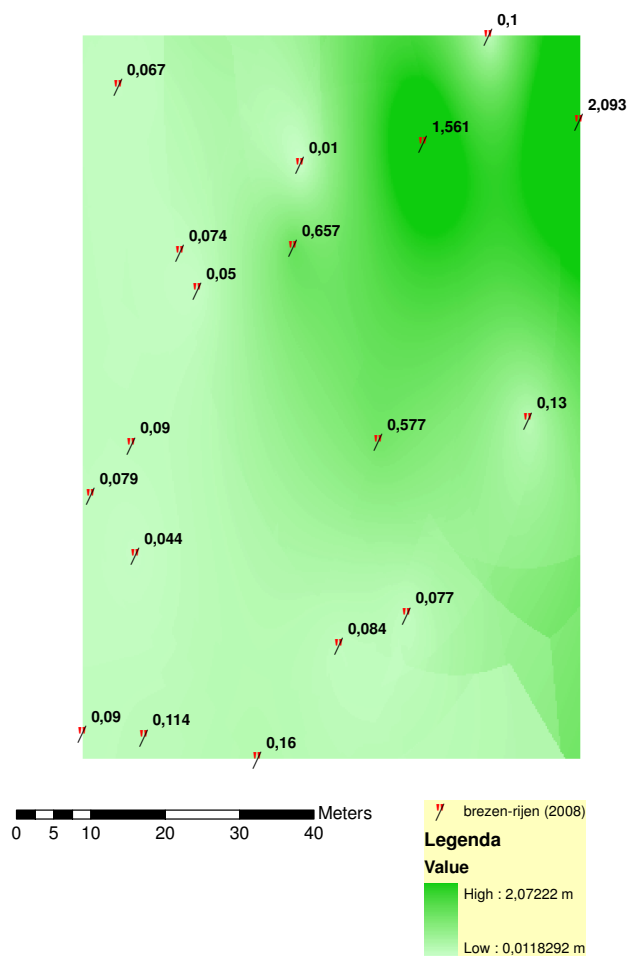


Obr.15: Prostředí ArcGIS- tvorba variogramu

4.5 Výsledné mapy

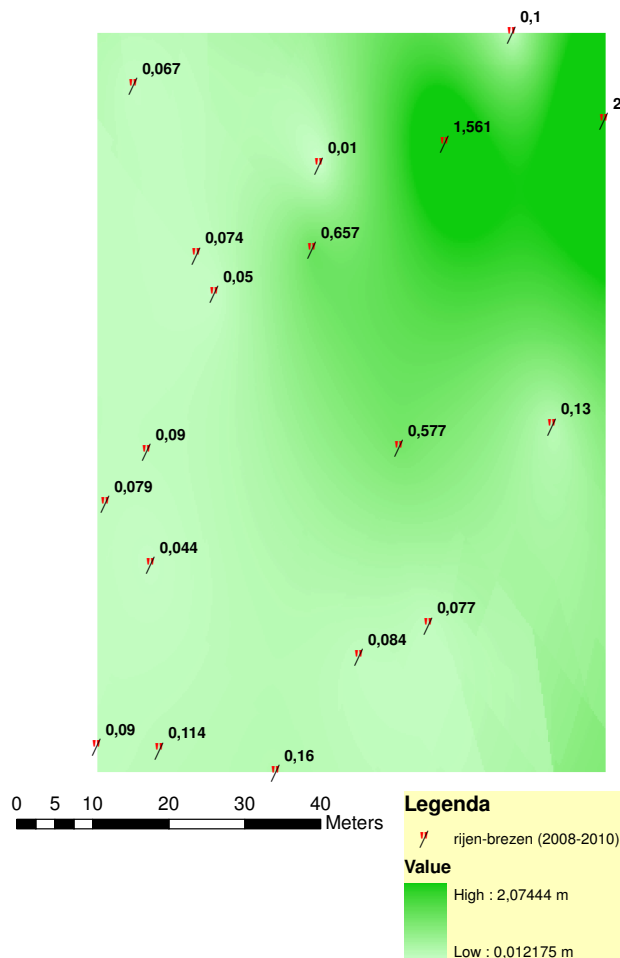
Vzhledem k méně kvalitnímu obrazovému výstupu programu R jsem použil pro interpretaci výsledků výstupy programu ArcGIS. K dispozici jsem měl souřadnice bodů z období března, října a prosince (2008), dvou měření v dubnu (2009), z března (2010) a z období dubna (2011), kterého jsem se osobně zúčastnil. Souřadnice bodů v jednotlivých obdobích jsou uvedeny v příloze 1. Chybějící hodnota souřadnic u některých bodů je způsobena ztrátou resp. nenalezením geoharponů. Všechny posuny uváděné ve výstupech jsou v metrech a představují posun jednotlivých geoharponů za dané období.

První mapa ukazuje posun svahu od března do října, kde došlo k největšímu posunu bodů č. 4, 6 a 17 (přes 2 metry), jak ukazuje obrázek 16.



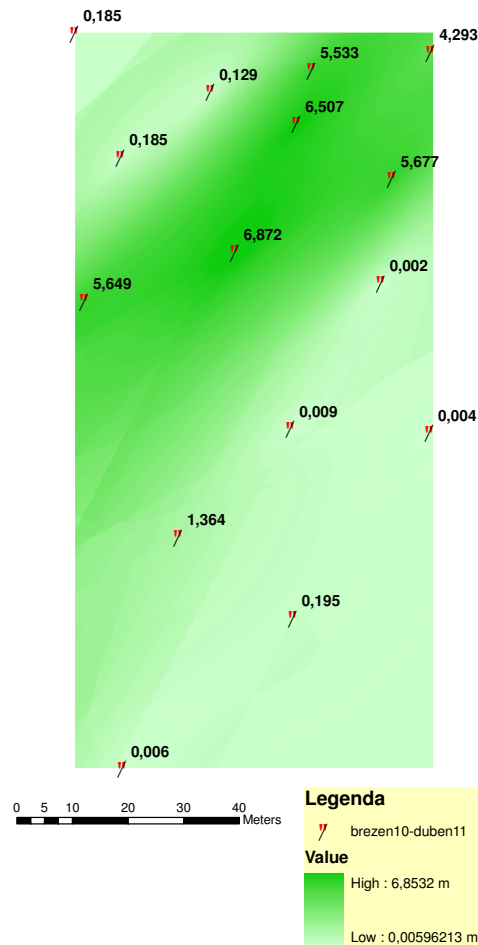
Obr.16: Posun březen-říjen (2008)

V dalších obdobích se sesuv zpomalil až do března (2010). Pokud tedy srovnáme posun od října (2008) do března (2010), pak už tento posun není tak drastický jako na počátku, ale pohybuje se jen v centimetrech oproti předcházejícímu období března (2008) až října (2008).



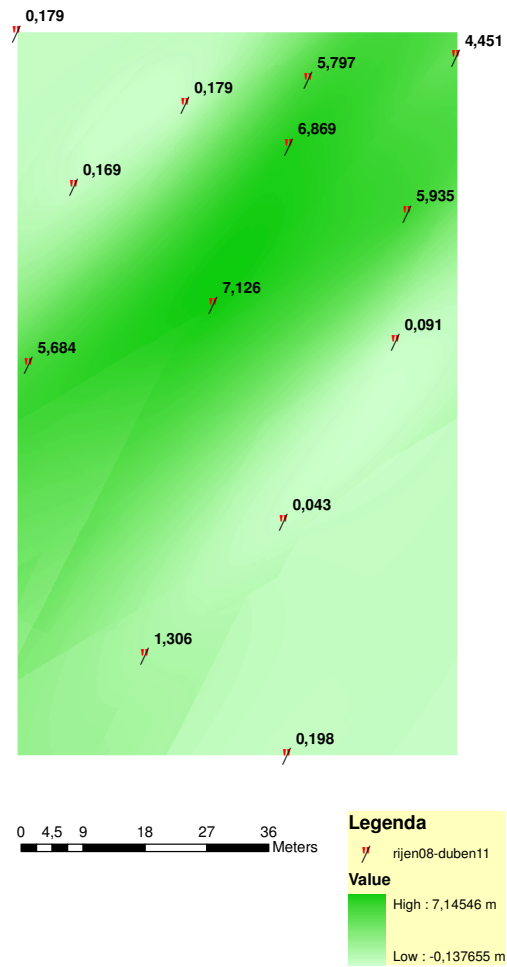
Obr.17: Posun říjen-březen (2008-2010)

Ovšem k významnému posunu došlo v období od března (2010) do dubna (2011), kdy se celý svah rozšířil a sesunul ještě více k potoku. Vzhledem k poměrně dlouho instalovaným geoharponům a velkému posunu od posledního měření se jich spousta nenašlo a pravděpodobně skončily zasypané zeminou. Z mapy vidíme, že body 1,10,11,12 a 28 se sesuly razantně v průměru kolem 6 metrů, přičemž největší posun, necelých 7 metrů, je zaznamenán u bodu 12.



Obr.18: Posun březem-duben (2010-2011)

V posledním mapovém výstupu srovnáváme sesuv od měření v říjnu (2008) až do posledního měření v dubnu (2011). Protože se z původních geoharponů zachoval jen zlomek, tak v mapě vidíme o poznání méně bodů. Největší posun se táhne zleva uprostřed až do dolní části svahu, která se za celou dobu pozorování nejvíce sesula.



Obr.19: Posun říjen-duben (2008-2011)

Závěr

Teoretická část práce dává čtenáři přehled o nejčastěji používaných modelech a metodách aplikovatelných v praxi. V praktické části jsem rozebral typy existujících sesuvů a také možnosti, jak jim zamezit. Dále analyzuji sesuv půdy na pastvině nedaleko Halenkovic, kde jsem se účastnil kontrolního měření letos v dubnu. Tento sesuv není nebezpečný a ani neohrožuje žádný majetek, nicméně byl pro mě cennou zkušeností a ukázal mi, jak funguje teorie v praxi. Při práci v terénu nebylo nejtěžší zaměřit body, ale vůbec se na místo dostat a hlavně v porostlém svahu najít geohrafony. Samozřejmě nesmím zapomenout na rozmarný počasí, které celé měření jen zkomplikovalo. Fotografie svahu z posledního měření uvádím v příloze 5.

Z dosažených výsledků mohu usoudit, že k největšímu pohybu došlo mezi březnem a říjnem roku 2008, a to zejména ve spodní části svahu. Avšak od té doby se svah stále sesouval, nicméně ne tak drastickým způsobem. Změna nastala mezi březnem (2010) a dubnem (2011), kdy se pravděpodobně díky bohatým srážkám v roce 2010 sesula spodní část v průměru o 6 metrů. Bylo by jistě zajímavé tento sesuv dále sledovat. Nicméně bych žádná opatření vedoucí k zamezení sesuvu nepodnikal, protože náklady by byly mnohem vyšší než účelnost.

Díky této bakalářské práci jsem získal mnoho nových zkušeností. V zimním semestru jsem úspěšně absolvoval předmět Geostatistika, kde jsem se dozvěděl o programu ArcGIS a naučil jsem se v něm základním dovednostem. Zároveň jsem si potvrdil univerzálnost programu R, který díky svým knihovnám patří k jednomu z nejlepších statistických programů. V příloze 2 nalezneme skript použitý při tvorbě map. Dále jsem vyexportoval v obou programech (ArcGIS a R) přes 30 map, ze kterých jsem vybral jen ty nejdůležitější. Pro srovnání uvádím v příloze 3 výstup z těchto dvou programů, z nichž považuji za kvalitnější výstup z ArcGISu, který jsem použil v této práci.

Příloha 1

bod	březen+červen 2008			říjen 2008			prosinec 2008			duben 2009		
	Y	X	Z	Y	X	Z	Y	X	Z	Y	X	Z
1	-536877,698	-1169857,858	267,913	-536877,672	-1169857,927	267,863	-536877,657	-1169857,844	267,880	-536877,784	-1169857,932	267,913
2	-536865,831	-1169841,709	263,880	-536865,838	-1169841,717	263,840	-536865,797	-1169841,734	263,870	-536865,871	-1169841,771	263,870
3	-536882,756	-1169855,506	267,640	-536882,743	-1169855,555	267,620	-536882,730	-1169855,572	267,650	-536882,827	-1169855,608	267,660
4	-536877,008	-1169842,632	264,420	-536876,582	-1169842,132	264,130	-536876,540	-1169842,087	264,130	-536876,573	-1169842,102	264,110
5	-536848,602	-1169816,358	256,683	-536848,528	-1169816,291	256,647	-536848,534	-1169816,375	256,660	-536848,679	-1169816,391	256,663
6	-536863,014	-1169825,170	260,360	-536862,170	-1169823,857	260,027	-536862,108	-1169823,828	260,060	-536862,087	-1169823,707	260,010
7	NA	NA	NA	-536891,999	-1169844,940	266,750	-536892,085	-1169844,969	266,770	-536892,061	-1169844,889	266,770
8	-536877,480	-1169828,561	262,840	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
9	-536897,529	-1169846,765	267,480	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
10	NA	NA	NA	-536871,808	-1169826,643	262,740	-536871,728	-1169826,680	262,740	-536871,731	-1169826,584	262,700
11	-536903,561	-1169864,397	268,960	-536903,525	-1169864,479	268,930	-536903,551	-1169864,433	268,960	-536903,606	-1169864,507	268,970
12	NA	NA	NA	-536894,855	-1169837,637	266,050	-536894,906	-1169837,562	266,090	-536894,827	-1169837,525	266,060
13	-536910,402	-1169869,847	272,223	-536910,404	-1169869,926	272,200	-536910,424	-1169869,857	272,230	-536910,512	-1169869,935	272,233
14	-536903,077	-1169831,170	265,760	-536902,580	-1169830,877	265,630	-536902,562	-1169830,893	265,630	-536902,531	-1169830,803	265,630
15	-536914,781	-1169849,978	269,480	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
16	-536876,919	-1169805,947	258,080	NA	NA	NA	NA	NA	NA	-536875,787	-1169803,728	257,550
17	-536860,026	-1169804,182	256,300	-536858,912	-1169802,410	256,000	-536858,784	-1169802,456	256,003	-536858,870	-1169802,367	255,980
18	-536918,439	-1169863,858	271,650	-536918,426	-1169863,900	271,630	-536918,392	-1169863,871	271,660	-536918,375	-1169863,969	271,640
19	-536900,204	-1169811,019	261,753	-536900,229	-1169811,147	261,700	-536900,213	-1169811,206	261,750	-536900,300	-1169811,201	261,740
20	-536926,406	-1169827,345	268,643	-536926,399	-1169827,422	268,600	-536926,394	-1169827,356	268,620	-536926,481	-1169827,419	268,637
21	-536930,544	-1169836,445	270,350	-536930,507	-1169836,521	270,320	-536930,461	-1169836,548	270,330	-536930,596	-1169836,564	270,350
22	-536942,384	-1169870,989	275,717	-536942,415	-1169871,074	275,690	-536942,386	-1169871,068	275,690	-536942,486	-1169871,068	275,710
23	-536942,835	-1169862,712	274,350	-536942,810	-1169862,824	274,340	-536942,774	-1169862,734	274,350	-536942,812	-1169862,826	274,323
24	-536945,819	-1169847,435	273,557	-536945,824	-1169847,595	273,530	-536945,782	-1169847,508	273,530	-536945,879	-1169847,500	273,533
25	NA	NA	NA	NA	NA	NA	-536927,048	-1169802,492	264,930	NA	NA	NA
26	NA	NA	NA	-536960,397	-1169826,982	273,580	-536960,412	-1169827,013	273,580	-536960,481	-1169827,009	273,590
27	NA	NA	NA	NA	NA	NA	-536987,524	-1169857,749	281,770	-536987,577	-1169857,772	281,770
28	NA	NA	NA	-536881,549	-1169809,449	259,330	-536881,508	-1169809,431	259,330	-536881,562	-1169809,303	259,300
0	-536855,395	-1169866,159	266,990	-536855,377	-1169866,224	266,910	-536855,392	-1169866,244	266,930	-536855,462	-1169866,257	266,940

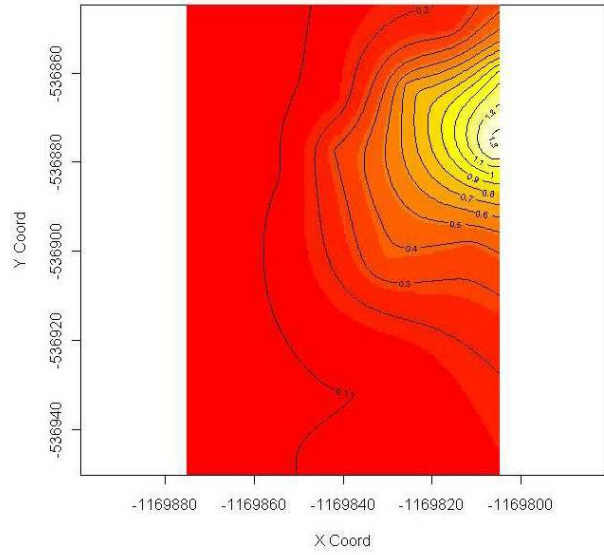
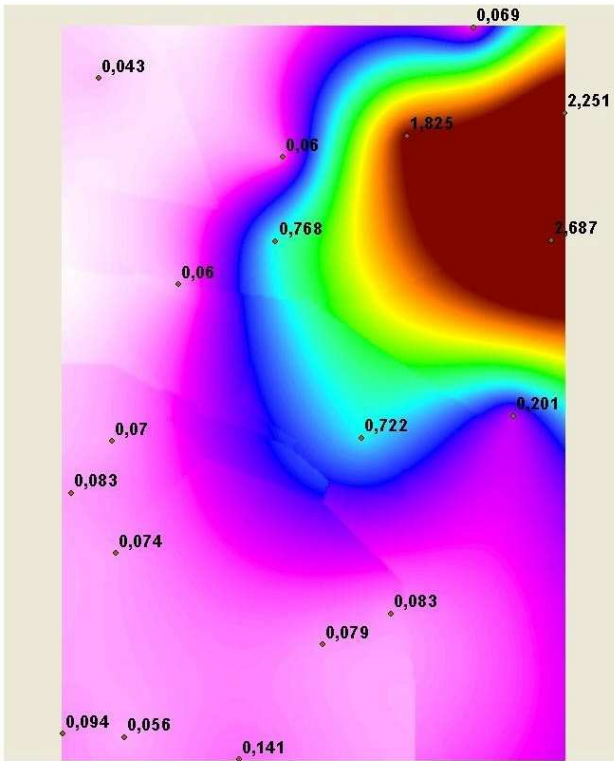
bod	duben 2 2009			březen 2010			březen 2011		
	Y	X	Z	Y	X	Z	Y	X	Z
1	-536877,733	-1169857,829	267,872	-536877,703	-1169857,921	267,856	-536877,568	-1169857,794	267,78
2	-536865,807	-1169841,697	263,852	-536865,862	-1169841,760	263,803	-536865,911	-1169841,880	263,76
3	-536882,719	-1169855,485	267,640	-536882,708	-1169855,542	267,600	NA	NA	NA
4	-536876,481	-1169842,043	264,060	-536876,514	-1169842,044	264,030	NA	NA	NA
5	-536848,603	-1169816,290	256,657	-536848,602	-1169816,289	256,657	NA	NA	NA
6	-536862,010	-1169823,604	259,973	-536862,032	-1169823,632	259,990	-536858,888	-1169819,079	258,84
7	-536892,002	-1169844,786	266,752	-536892,070	-1169844,809	266,728	NA	NA	NA
8	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
9	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
10	-536871,711	-1169826,464	262,690	-536871,659	-1169826,300	262,715	-536867,666	-1169821,163	261,96
11	-536903,482	-1169864,399	268,950	-536903,510	-1169864,445	268,919	-536899,427	-1169860,541	267,78
12	-536894,740	-1169837,396	266,050	-536894,699	-1169837,437	266,008	-536890,482	-1169832,011	264,78
13	-536910,462	-1169869,852	272,210	-536910,443	-1169869,919	272,199	NA	NA	NA
14	-536902,479	-1169830,689	265,600	-536902,503	-1169830,733	265,577	NA	NA	NA
15	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
16	-536875,697	-1169803,557	257,550	-536875,718	-1169803,544	257,522	NA	NA	NA
17	-536858,765	-1169802,267	255,986	-536858,824	-1169802,279	255,965	-536856,255	-1169798,839	255,35
18	-536918,362	-1169863,878	271,616	-536918,387	-1169863,910	271,596	-536900,309	-1169811,191	261,722
19	-536900,245	-1169811,075	261,720	-536900,309	-1169811,191	261,722	-536926,443	-1169827,419	268,608
20	-536926,417	-1169827,361	268,620	-536926,443	-1169827,419	268,608	NA	NA	NA
21	-536930,484	-1169836,522	270,330	-536930,510	-1169836,517	270,312	NA	NA	NA
22	-536942,465	-1169871,015	275,690	-536942,468	-1169871,032	275,689	NA	NA	NA
23	-536942,778	-1169862,687	274,340	-536942,833	-1169862,768	274,336	NA	NA	NA
24	-536945,830	-1169847,504	273,510	-536945,877	-1169847,564	273,517	-536944,551	-1169847,886	272,92
25	-536927,080	-1169802,505	264,910	-536927,079	-1169802,503	264,915	-536927,079	-1169802,503	264,915
26	-536960,404	-1169826,962	273,580	-536960,420	-1169826,974	273,580	-536960,491	-1169827,156	273,60
27	-536987,488	-1169857,686	281,776	-536987,489	-1169857,686	281,769	-536987,489	-1169857,686	281,769
28	-536881,448	-1169809,204	259,280	-536881,492	-1169809,192	259,240	-536879,242	-1169803,980	257,79
0	-536855,398	-1169866,197	266,92	-536855,409	-1169866,200	266,923	-536855,481	-1169866,370	266,95

Příloha 2

```
library(geoR)
library(mvoutlier)
x=read.table("brezen-duben.txt",header=TRUE)
hist(x$W, main="Histogram vzdalenosti")
hist(log(x$W), main="Histogram vzdalenosti")
shapiro.test(log(x$W))
shapiro.test(x$W)
data=matrix(0,ncol=3,nrow=19)
data
data[,1]=x$X
data[,2]=x$Z
data[,3]=log(x$W)
geodata=as.geodata(data,coords.col=1:2,data.col=3)
var=variog(geodata)
plot(var)
vario.fit=variofit(var)
lines(vario.fit,col="blue")
vario.fit2=variofit(var,cov.model="gaussian",weights="equal")
lines(vario.fit2,col="red")
vario.fit3=variofit(var,cov.model="spherical",weights="equal")
lines(vario.fit3,col="green")
vario.fit4=variofit(var,cov.model="exponential",weights="equal")
lines(vario.fit4,col="blue")

max=max(geodata$coords[,1])
max(geodata$coords[,1])
max(geodata$coords[,2])
min(geodata$coords[,1])
min(geodata$coords[,2])
loci=expand.grid(seq(-1169875,-1169800,b=0.4),seq(256,280,b=0.4))
kc=krige.conv(geodata,loc=loci,krige=krige.control(obj.model=vario.fit,type.krige = "ok"))
image(kc)
contour(kc,add=T)
image(kc,main=" ",ylab="souradnice y",xlab="souradnice x")
kc2=kc$predict
kc2=exp(kc$predict)
e=exp(1)
kc2=e^(kc$predict) #odlogaritmovani a vraceni zpet hodnoty
kc3=kc
kc3$predict=kc2
image(kc3)
contour(kc3,add=T)
```

Příloha 3



Příloha 4



Příloha 5





Literatura

- [1] Amstrong M.: Basic linear geostatistic, Springer, 1998
- [2] Arzu Erener, H. Sebnem and B. Düzgün: Improvement of statistical landslide susceptibility mapping by using spatial and global regression methods in the case of More and Romsdal (Norway), Landslides, 2010
- [3] Schejbal, C.: Úvod do geostatistiky. Skriptum, Ostrava, VŠB-TU Ostrava, HGF, 1996
- [4] Marek L.: Design experimentu pro posouzení stability svahu v prostředí ESRI produktů, Olomouc, 2009
- [5] Cressie N.A.C.: Statistics for spatial data, New York: John Wiley & Sons, 1991
- [6] Šamalíková M., Locker J., Pospíšil P.: Geologie, Electronic publishing ústav geotechniky FAST VUT v Brně, dostupný z WWW: <http://geotech.fce.vutbr.cz/studium/geologie/skripta/geologie.pdf>
- [7] Blišťan P.: Analýza a modelovanie kvantitatívnych a kvalitatívnych parametrov vybraných magnezitových ložísk a ich prezentácia v prostredí GIS systémov, Technická univerzita v Košicih, 2005, dostupný z WWW: <http://www.fberg.tuke.sk/blistan/download/Tezy%20habilitacnej%20prace.pdf>
- [8] Horák J.: Prosotorvé analýzy dat, VŠB-TU Ostrava, HGF, Institut geoinformatiky, 2008, dostupný z WWW: <http://gislinb.vsb.cz/hor10/PAD/Skripta/>
- [9] Wu Ch., Murray A.T.: A cokriging method for estimating population density in urban areas, Computers, 2005, dostupný z WWW: http://www.dpi.inpe.br/sil/06_2010_CST_310/Alunos/Crisitiano/Co_Kriging_urnban_CEUS.pdf
- [10] <http://genetics.agrsci.dk/statistics/courses/JBS-Geostatistics-2003/Day3/Lecture3/D3L3-handsout.pdf>
- [11] <http://www.r-project.cz/index.html>
- [12] <http://www.arcdata.cz/produkty-a-sluzby/software/>