Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta
Katedra matematiky

Výuka množin bodů dané vlastnosti s podporou GeoGebra

Diplomová práce

Autor:	Bc. Lenka Hatriková
Studijní program:	N0114A170005, Učitelství matematiky a chemie pro střední školy
Studijní obor:	Učitelství matematiky a chemie pro střední školy
Vedoucí práce:	doc. RNDr. PaedDr. Pavel Trojovský, Ph.D.
Oponent práce:	Ing. Mgr. Eva Trojovská, Ph.D.

Hradec králové duben 2024

Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta

Zadání diplomové práce

Autor:	**Bc. Lenka Hatriková**
Studium:	S22MA005NP
Studijní program:	N0114A170005 Učitelství matematiky a chemie pro střední školy
Studijní obor:	
Název diplomové práce:	**Výuka množin bodů dané vlastnosti s podporou GeoGebra**
Název diplomové práce AJ:	Learning locus of points with the support of GeoGebra

Cíl, metody, literatura, předpoklady:

Cílem práce je vytvořit ucelenou sbírku řešených úloh věnujících se tématice množin bodů dané vlastnosti v učivu ZŠ a SŠ (s hlavním zaměřením na SŠ). Všechny úlohy budou nejprve vytvořeny v programu GeoGebra (včetně popisu konstrukce v GeoGebra). Bude vždy následovat metodický návod (např. návrh postupných otázek učitele studentům, aby byli studenti schopni s konstrukcí v GeoGebra dynamicky manipulovat tak, aby došli k hypotéze o typu hledané množiny bodů). Následně bude vždy hypotéza kompletně dokázána (tedy včetně odvození rovnic těchto množin bodů).

Struktura práce.

1. Manuál k programu GeoGebra.
2. Porovnání český učebnic a sbírek úloh z hlediska rozsahu, obtížnosti atd. ohledně tématiky "množin bodů dané vlastnosti".
3. Rešerže tématiky DP v existujících odborných článcích v časopisech a sbornících konferencí (celosvětově).
4. Sbírka kompletně vyřešených úloh na množiny bodů dané vlastnosti (řazená vzestupně dle obtížnosti od úloh pro ZŠ a následně SŠ).

1. Manuál k programu GeoGebra, https://wiki.geogebra.org/cs/P%C5%99%C3%ADru%C4%8Dka
2. GeoGebra Classic Manual, https://wiki.geogebra.org/en/Manual
3. České středoškolské učebnice a sbírky úloh
4. Zahraniční učebnice sbírky úloh (některé, dle dostupnosti)
5. Články v časopisech a sbornících konferencí, které se tématice množin bodů dané vlastnosti věnují

Zadávající pracoviště:	Katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta
Vedoucí práce:	doc. RNDr. PaedDr. Pavel Trojovský, Ph.D.
Oponent:	Ing. Mgr. Eva Trojovská, Ph.D.

Datum zadání závěrečné práce: 19.10.2022

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny prameny, z kterých jsem vycházela.

V Hradci Králové dne 24. 4. 2024 Lenka Hatriková

Poděkování

Děkuji svému vedoucímu diplomové práce doc. RNDr. PaedDr. Pavlu Trojovskému, Ph.D. za pomoc, odborné konzultace a trpělivost. Poděkování patří i mé rodině za psychickou podporu.

Anotace

HATRIKOVÁ, L. *Výuka množin bodů dané vlastnosti s podporou GeoGebra.* Hradec Králové, 2024. Diplomová práce na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové. Vedoucí diplomové práce doc. RNDr. PaedDr. Pavel Trojovský, Ph.D., 138 s.

Diplomová práce se zabývá výukou množin bodů dané vlastnosti, zaměřenou na kuželosečky. V teoretické části je popsána práce s programem GeoGebra, jsou zde charakterizovány základní pojmy a vlastnosti kuželoseček, které následně využíváme v praktické části pro řešení úloh. Sbírka úloh obsahuje řešené příklady pomocí programu GeoGebra, které jsou následně dokázány.

Klíčová slova

GeoGebra, kuželosečka, kružnice, elipsa, parabola, hyperbola, analytická geometrie

Annotation

HATRIKOVÁ, L. *Learning locus of points with the support of GeoGebra*. Hradec Králové, 2024. Diploma Thesis at Faculty of Science University of Hradec Králové. Thesis Supervisor doc. RNDr. PaedDr. Pavel Trojovský, Ph.D., 138 p.

The diploma thesis studies the learning and teaching of locus of points, focused on conic sections. The theoretical part describes using the software GeoGebra and defines the basic concepts and properties of conic sections. These concepts are used in the practical part to solve problems. The collection of problems contains solved problems in the GeoGebra program. All of these problems are proved in the text.

Keywords

GeoGebra, conic section, circle, ellipse, parabola, hyperbola, analytic geometry

Obsah

Úvod

V diplomové práci bude zpracováno téma množin bodů dané vlastnosti se zaměřením na kuželosečky. Kuželosečky jsou rovinné křivky, s kterými se setkáváme každý den.

Téma Výuka množin bodů dané vlastnosti s podporou GeoGebra jsem si vybrala, protože je aktuální a zajímavé. Jedná se o tvůrčí činnost, která rozvíjí nejen matematické a logické myšlení, ale podporuje i zdokonalování žáků v digitální kompetenci, na kterou je v poslední době kladen větší důraz. Práce má za úkol propojit elementární algebru s geometrií a vizualizovat tento vztah pomocí programu GeoGebra.

Cílem diplomové práce je vytvoření ucelené sbírky řešených úloh, které se týkají množin bodů dané vlastnosti, konkrétně kuželoseček, v učivu především středních škol. V teoretické části práce bude popsán program GeoGebra a objasněna pravidla práce s ním. Stručně zadefinujeme základní pojmy a zavedeme vlastnosti kuželoseček a provedeme krátkou srovnávací analýzu učebnic matematiky obsahujících téma kuželoseček. Definované pojmy v teoretické části budeme využívat při řešení první části příkladů, kde se seznámíme s kuželosečkami a s jejich vlastnostmi. Pochopení základních vlastností kuželoseček je nezbytné pro řešení následujících komplexnějších příkladů. Tyto příklady jsou obsaženy v další části sbírky a sestávají se převážně z polohových úloh, které budou řešeny především pomocí programu GeoGebra.

Dynamické softwary geometrie

V první kapitole teoretické části se zaměříme na matematický software GeoGebra, který podporuje dynamickou výuku matematiky. Poslední dobou je kladen velký důraz na využití výpočetní techniky a výukových softwarů nejen v matematice. Počítačové technologie usnadňují proces výuky a podporují aktivní zapojení studentů do svého vzdělávání. Dynamické softwary geometrie umožňují studentům vytvářet vztahy mezi různými matematickými objekty a graficky je zobrazit, usnadňují učení prostřednictvím animovaných a vizuálních materiálů a pozitivně ovlivňují výsledky studentů v matematice a jejich postoj k matematice.

Dynamický charakter těchto softwarů umožňuje uživatelům, aby porozuměli zadáním lépe než při statické reprezentaci problému. Podle Hohenwartera et al. (2009), používání softwaru, který umožňuje studentům a pedagogům zkoumat matematické pojmy z různých pohledů, je nezbytné pro efektivní výuku a učení. Navíc je dynamický software geometrie významným motivačním prvkem, protože umožňuje pracovat na konceptech z nové perspektivy. Počítačové softwary, jako je GeoGebra, Geometer's Sketchpad, Cabri atd. mají za cíl propojit vizuální obrázky s abstraktními symboly, pomoci studentům s porozuměním abstraktních pojmů. Tyto softwary tedy přispívají k efektivitě vyučování a k motivaci studentů (GÖKÇE, S. and P. GÜNER, 2022).

Software GeoGebra

GeoGebra je dynamický software určený pro vzdělávání především v oblasti matematiky, ale také vědy, techniky, inženýrství a to po celém světě. Používá se především při výkladu témat spjatých s geometrií, kterou lze propojit s algebrou, tabulkami, grafy a statistikou. GeoGebra nám mimo jiné nabízí i spoustu bezplatných materiálů, které vytvořili uživatelé a rozhodli se je veřejně sdílet (GeoGebra, 2024).

Program GeoGebra lze využívat již na základních školách, protože k jejímu ovládání nepotřebujeme znát programovací jazyky, složité příkazy a není časově náročný. Ovládá se myší. Na rozdíl od jiných softwarů je GeoGebra zdarma dostupný software a díky tomu nejsou učitelé ani studenti omezeni na jeho používání pouze ve škole. GeoGebru lze bezplatně stáhnout a nainstalovat do soukromých počítačů.

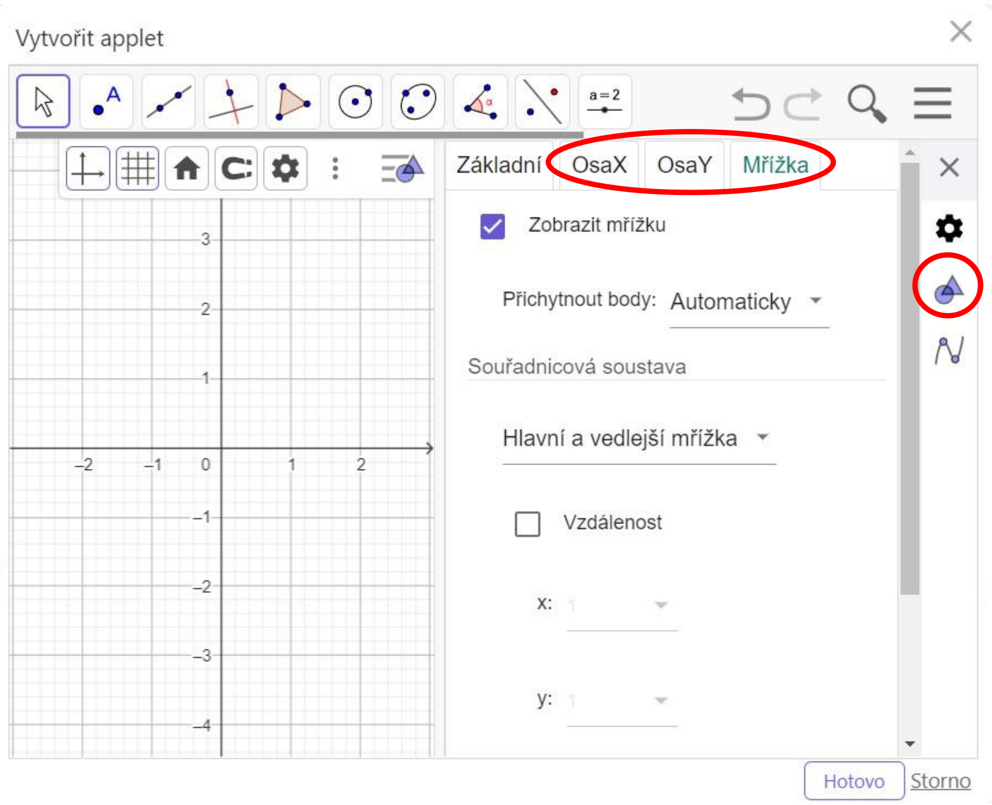
Pro učitele nabízí GeoGebra skvělou příležitost k vytváření interaktivních výukových materiálů, ale také k využití či inspiraci již zhotovených aktivit. Učitelé a výzkumní pracovníci na celém světě již vytvořili řadu pracovních listů a aktivit, dostupných na veřejném fóru.

Pomocí dynamického matematického softwaru jsou studenti schopni zkoumat a znovu objevovat matematické koncepty různými způsoby. Učitelé mohou poskytnout interaktivní konstrukci doprovázenou řadou otázek a úkolů. Tyto pracovní listy vedou studenty k bádání a hledání řešení zadaného problému.

Takovéto dynamické vizualizace mohou podporovat matematické experimenty, propojení mezi symbolickými a grafickými souvislostmi a diskuse o domněnkách a základních konceptech (HOHENWARTER, Markus, Judith HOHENWARTER, Yves KREIS and Zsolt LAVICZA, 2008).

Práce s GeoGebrou

Ukážeme si nyní, jaké funkce a nástroje lze při práci s GeoGebrou v geometrii použít. Po otevření programu se nám ukáže okno, applet, ve kterém budeme rýsovat. My si zde můžeme zobrazit, ale i skrýt, osu x, osu y či mřížku a nastavit si jejich vlastnosti.



Obr. 1: Applet

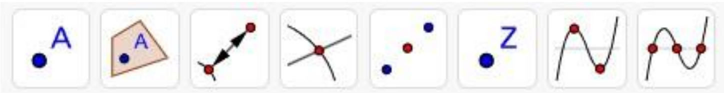
Pro tvorbu konstrukcí budeme využívat nástroje programu GeoGebra, které jsou přístupné v horní části appletu. Nástroje jsou rozděleny do několika sad. Po kliknutí na ikonku tematické sady nástrojů, se nám rozbalí nabídka a my si vybereme příslušný potřebný nástroj.

Panel nástrojů:

Výběr a manipulace s objekty – ukazovátko, objekt od ruky, pero

Obr. 2: Výběr a manipulace s objekty

Konstrukce bodů – bod, bod na objektu, připojit/odpojit bod, průsečík, střed, komplexní číslo, extrémy, kořeny

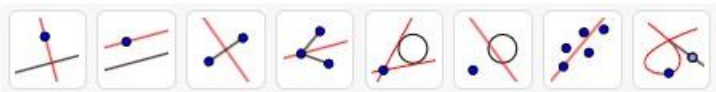


Obr. 3: Konstrukce bodů

Konstrukce přímky – přímka, úsečka, úsečka s pevnou délkou, polopřímka, lomená čára, vektor, vektor z bodu

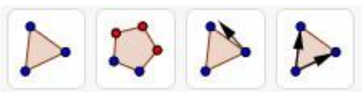
Obr. 4: Konstrukce přímky

Konstrukční nástroje – kolmice, rovnoběžka, osa úsečky, osa úhlu, tečny z bodu, polára, lineární regrese, množina bodů



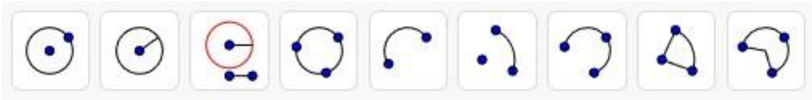
Obr. 5: Konstrukční nástroje

Mnohoúhelníky – mnohoúhelník, pravidelný mnohoúhelník, neměnný mnohoúhelník, vektorový mnohoúhelník



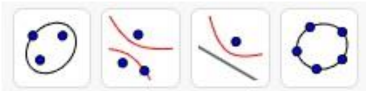
Obr. 6: Mnohoúhelníky

Nástroje pro konstrukci kružnice, kruhu a jejich části – kružnice dána středem a bodem, kružnice dána středem a poloměrem, kružítko, kružnice dána třemi body, polokružnice nad dvěma body, kruhový oblouk, kruhový oblouk procházející třemi body, kruhová výseč, kruhová výseč procházející třemi body



Obr. 7: Nástroje pro konstrukci kružnice, kruhu a jejich částí

Kuželosečky – elipsa, hyperbola, parabola, kuželosečka dána pěti body



Obr. 8: Kuželosečky

Měřící nástroje – úhel, úhel dané velikosti, vzdálenost, obsah, spád, seznam, vztah mezi objekty, kontrola funkce

Obr. 9: Měřící nástroje

Konstrukce zobrazení v rovině – osová souměrnost, středová souměrnost, kruhová inverze, otočení o úhel, posunutí, stejnolehlost

Obr. 10: Konstrukce zobrazení v rovině

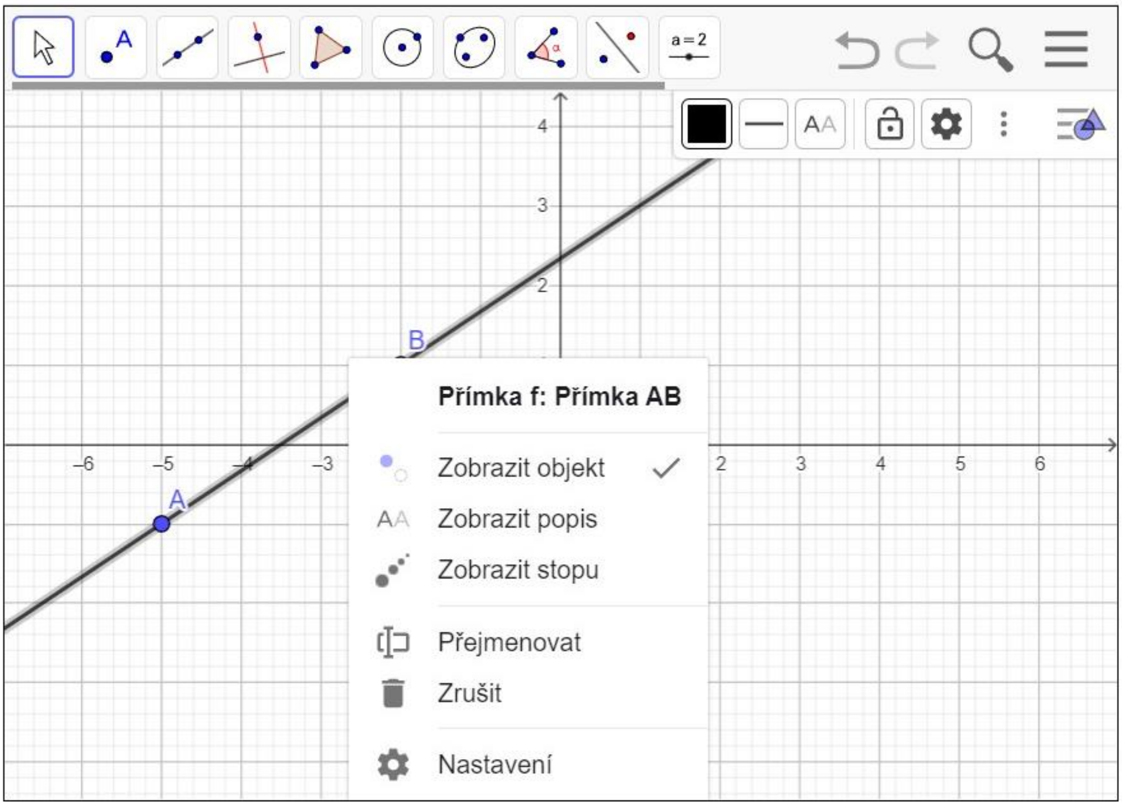
Nástroje pro vkládání pomocných objektů – posuvník, text, obrázek, tlačítko, zaškrtávací políčko, textové pole

Obr. 11: Nástroje pro vkládání pomocných objektů

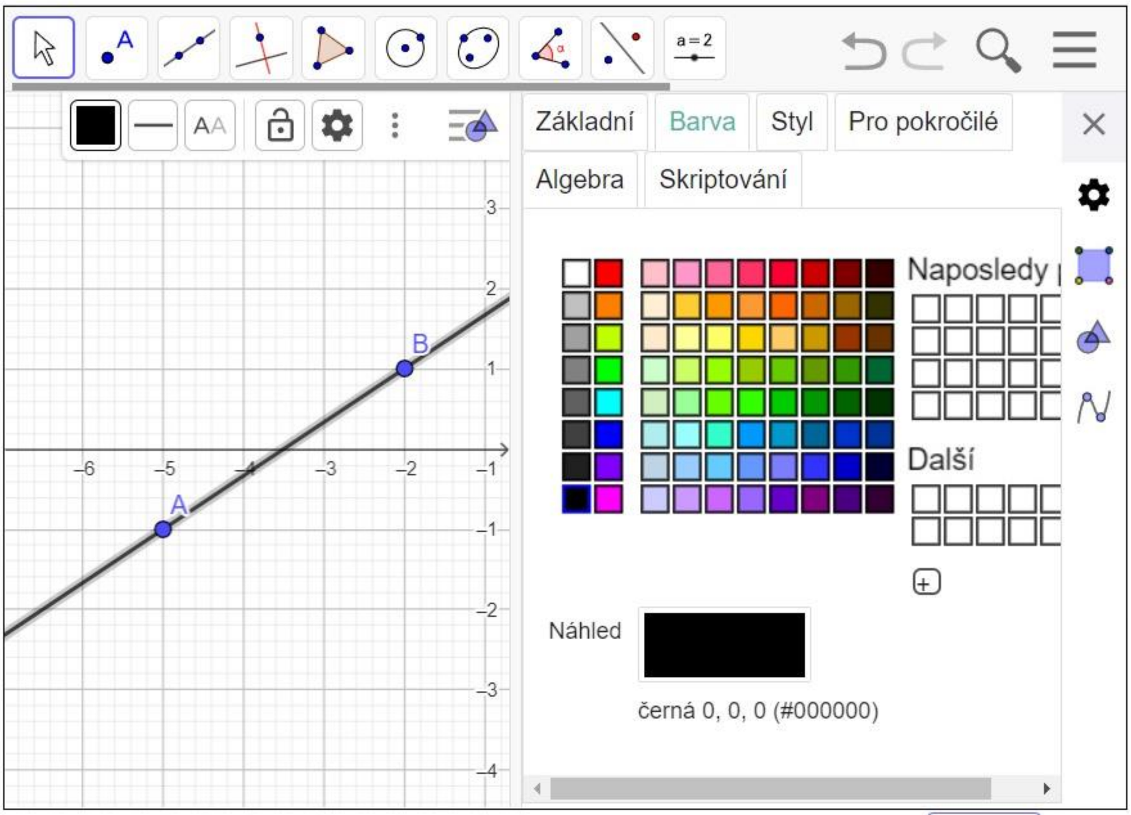
Nástroje pro úpravu zobrazování – pohybovat s nákresnou, zvětšit, zmenšit, zobrazit/skrýt objekt, zobrazit/skrýt popis, kopírovat formát, zrušit

Obr. 12: Nástroje pro úpravu zobrazování

Pokud chceme daný objekt přejmenovat, změnit mu barvu nebo ho jinak upravit, klikneme na něj pravým tlačítkem myši. Ukáže se nám několik možností (zobrazit objekt, zobrazit, popis, přejmenovat,…), pokud však chceme mít komplexní přehled úprav, zvolíme možnost nastavení, kde lze vše upravit dle našich představ (Gergelitsová, 2011).



Obr. 13: Rychlé nastavení objektu



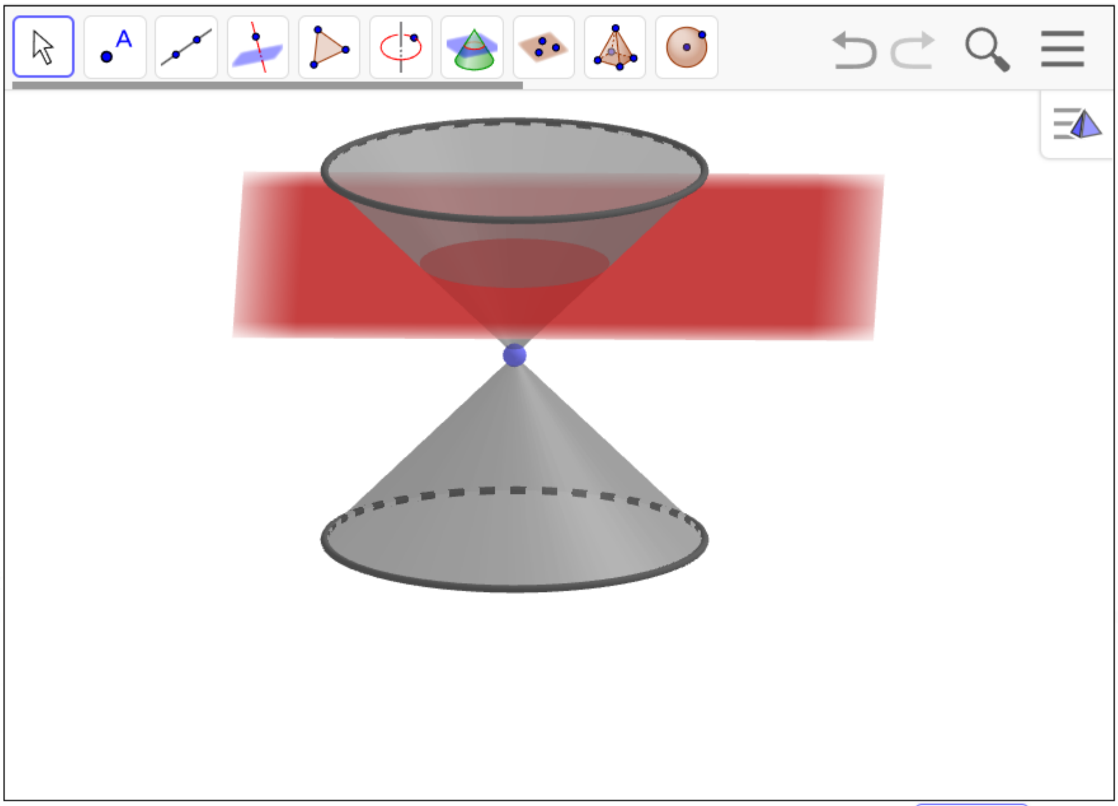
Obr. 14: Rozsáhlé nastavení objektu

Kuželosečky

V této kapitole se budeme věnovat teorii kuželoseček, kterou potřebujeme znát pro řešení úloh v praktické části práce. Protože je předpokládána určitá znalost pojmů a vztahů z analytické geometrie, je teorie zpracována stručně.

Kuželosečka je množina bodů v rovině, kterou lze získat jako průnik rotační kuželové plochy s a roviny ρ, která neprochází jejím vrcholem V.

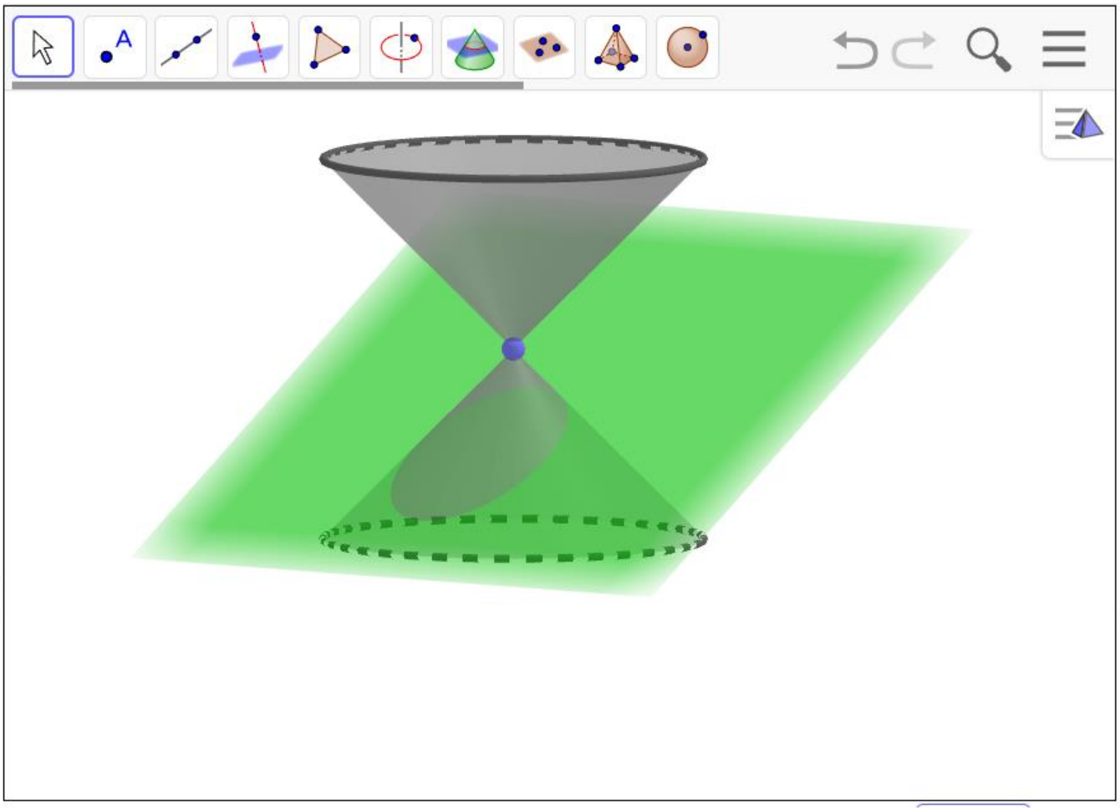
Kružnice – je-li rovina ρ kolmá k ose plochy o



Obr. 15: Řez kuželovou plochou – kružnice

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/x5yhpuub)

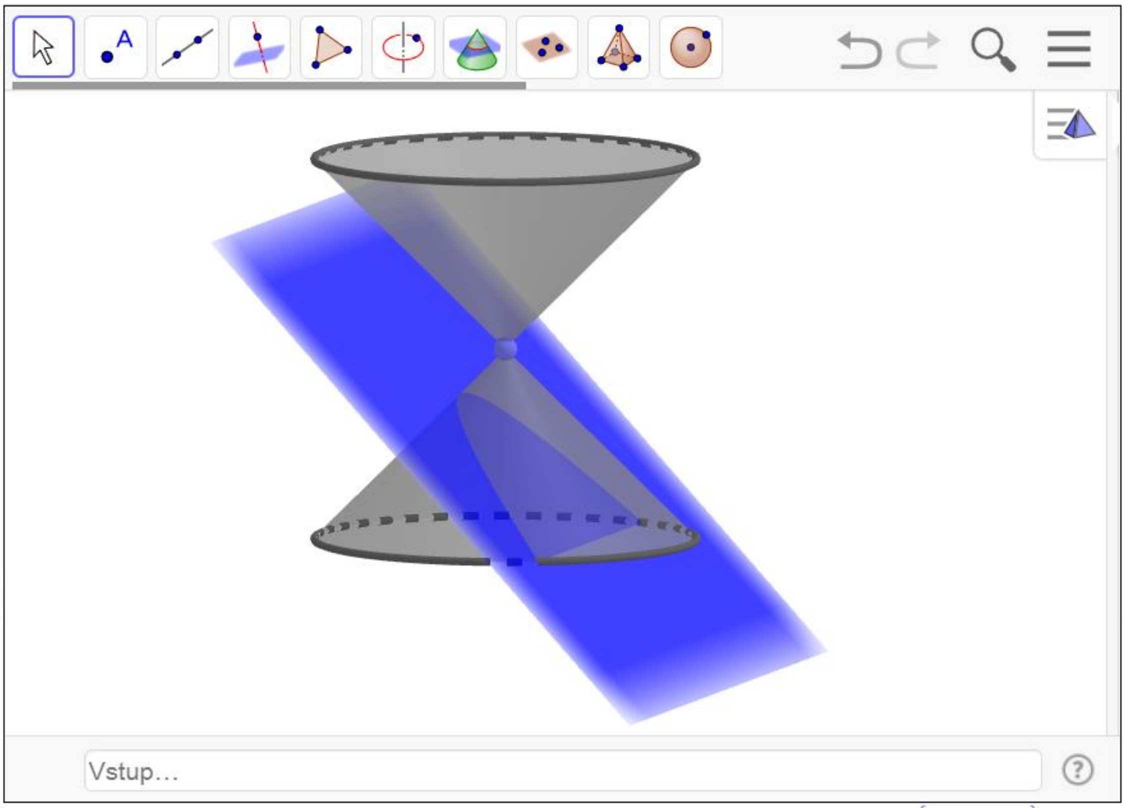
Elipsa – jestliže rovina ρ není kolmá k ose plochy o a rovina $\sigma \parallel \rho$, která prochází bodem V nemá s plochou s žádný společný bod



Obr. 16: Řez kuželovou plochou - elipsa

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/x5yhpuub)

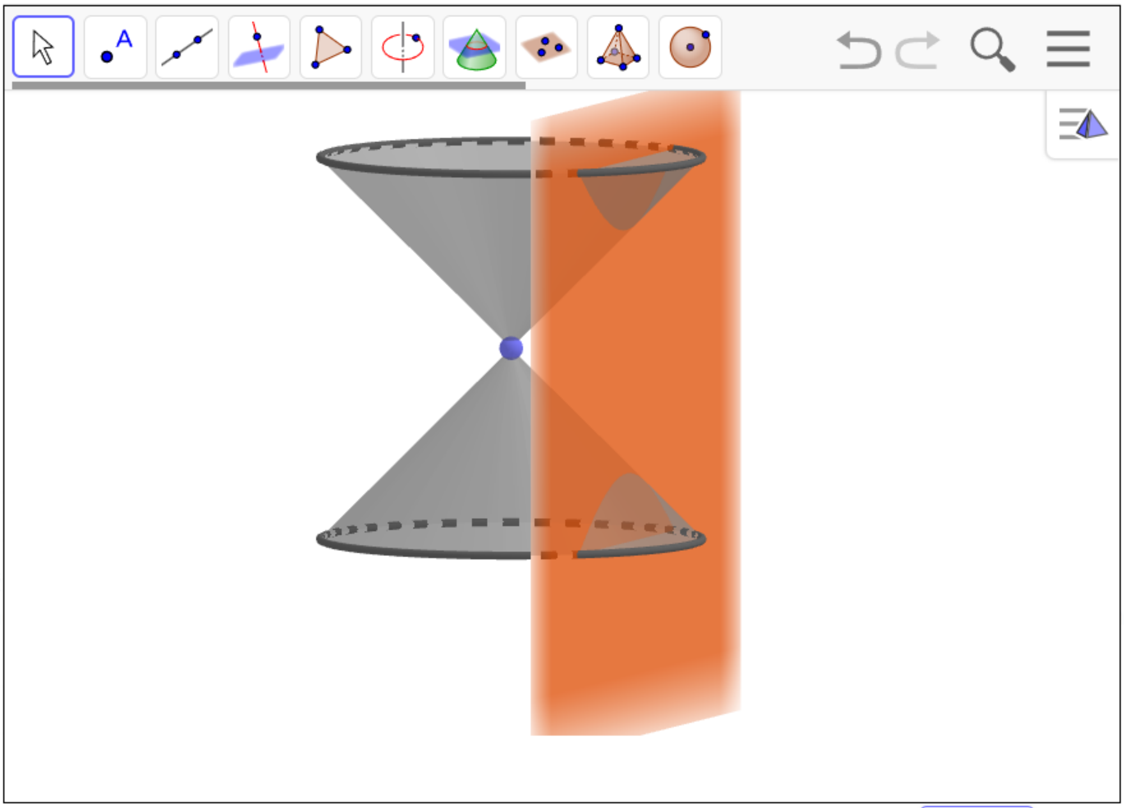
Parabola – rovina ρ není kolmá k ose o a rovina $\sigma \parallel \rho$, která prochází bodem V je tečnou rovinou plochy s



Obr. 17: Řez kuželovou plochou – parabola

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/x5yhpuub)

Hyperbola – není-li rovina ρ kolmá k ose o a rovina $\sigma \parallel \rho$, která prochází bodem V, má s plochou s společné dvě přímky (Vošický, 1999).

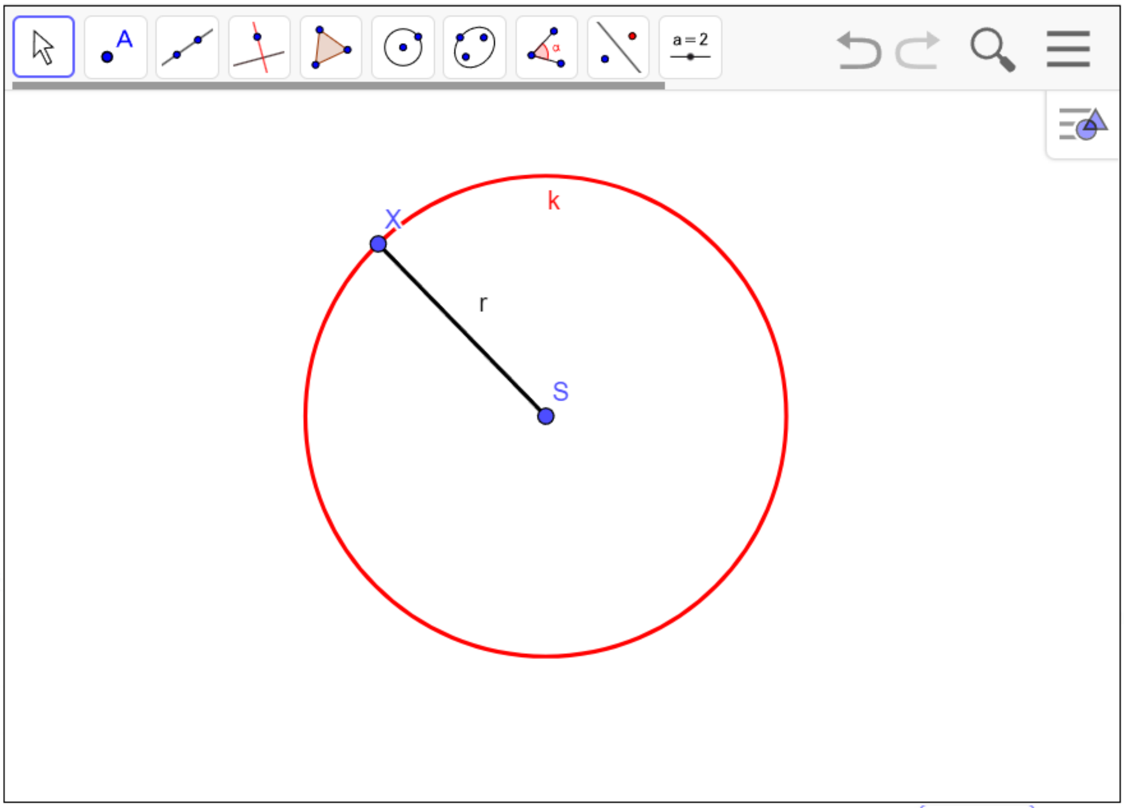


Obr. 18: Řez kuželovou plochou – hyperbola

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/x5yhpuub)

Kružnice

Kružnice je množina bodů v rovině, které mají od daného pevného bodu stejnou vzdálenost. Danému bodu říkáme **střed kružnice**. Je-li bod X bodem kružnice a bod S je její střed, pak úsečce SX říkáme **poloměr kružnice** (Vondra, 2016).



Obr. 19: Kružnice

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/juf5dnzd)

Máme-li v rovině zadanou kartézskou soustavu souřadnic a střed $S[m, n]$ s poloměrem r, je bod $X[x, y]$ bodem této kružnice právě tehdy, když platí

$$|XS| = r$$

$$\sqrt{(x-m)^2 + (y-n)^2} = r$$

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2.$$

Rovnici $\boldsymbol{(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2}$ nazýváme **středovou rovnicí kružnice**.

Umocněním rovnice $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$ dostaneme po úpravě **obecnou rovnici kružnice**:

$\boldsymbol{x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + p = 0}$, kde $p = m^2 + n^2 - r^2$ (Kočandrle, 1995).

Analogicky získáme analytické vyjádření vnitřní a vnější oblasti kružnice a zjistíme, zda bod $B[b_1, b_2]$ leží uvnitř, vně nebo na kružnici (Vondra, 2016).

Tab. 1: Vzájemná poloha bodu a kružnice

Kružnice Bod ***B*** leží na kružnici	$\lvert SB \rvert = r$	$(b_1 - m)^2 + (b_2 - n)^2 = r^2$ ${b_1}^2 + {b_2}^2 - 2mb_1 - 2nb_2 + p = 0$
Vnitřní oblast Bod ***B*** leží uvnitř kružnice	$\lvert SB \rvert < r$	$(b_1 - m)^2 + (b_2 - n)^2 < r^2$ ${b_1}^2 + {b_2}^2 - 2mb_1 - 2nb_2 + p < 0$
Vnější oblast Bod **B** leží vně kružnici	$\lvert SB \rvert > r$	$(b_1 - m)^2 + (b_2 - n)^2 > r^2$ ${b_1}^2 + {b_2}^2 - 2mb_1 - 2nb_2 + p > 0$

Pokud budeme chtít určit vzájemnou polohu kružnice a přímky, můžou nastat tři situace. První příklad situace je takový, že kružnice s přímkou nemá žádný společný bod. Takovou přímku nazýváme **vnější přímkou**. Další možností je **tečna**, přímka, která se kružnice dotýká v jediném bodě, **bodě dotyku**. Poslední variantou je **sečna**. Tedy přímka, která má dva body společné s kružnicí (Liška, 2017).

Odvodíme si rovnici tečny kružnice. Jestliže, bod $T[x_T, y_T]$ je bodem kružnice $k(S[m,n],r)$, pak je bod $T[x_T, y_T]$ bodem dotyku kružnice a její tečny. Tečna musí být kolmá k vektoru $T - S = (x_T - m; y_T - n)$, a má rovnici:

$(x_T - m)x + (y_T - n)y + d = 0.$

Hodnotu parametru d určíme z podmínky, že tečna prochází bodem T, tedy:

$(x_T - m)x_T + (y_T - n)y_T + d = 0.$

Obě rovnice od sebe odečteme, a proto má tečna rovnici:

$(x_T - m)x + (y_T - n)y - (x_T - m)x_T - (y_T - n)y_T = 0,$

$(x_T - m)(x_T - x) + (y_T - n)(y_T - y) = 0.$

Přičteme-li k této rovnici rovnost

${x_T}^2 + {y_T}^2 - 2mx_T - 2ny_T + m^2 + n^2 = r^2$, tedy rovnost

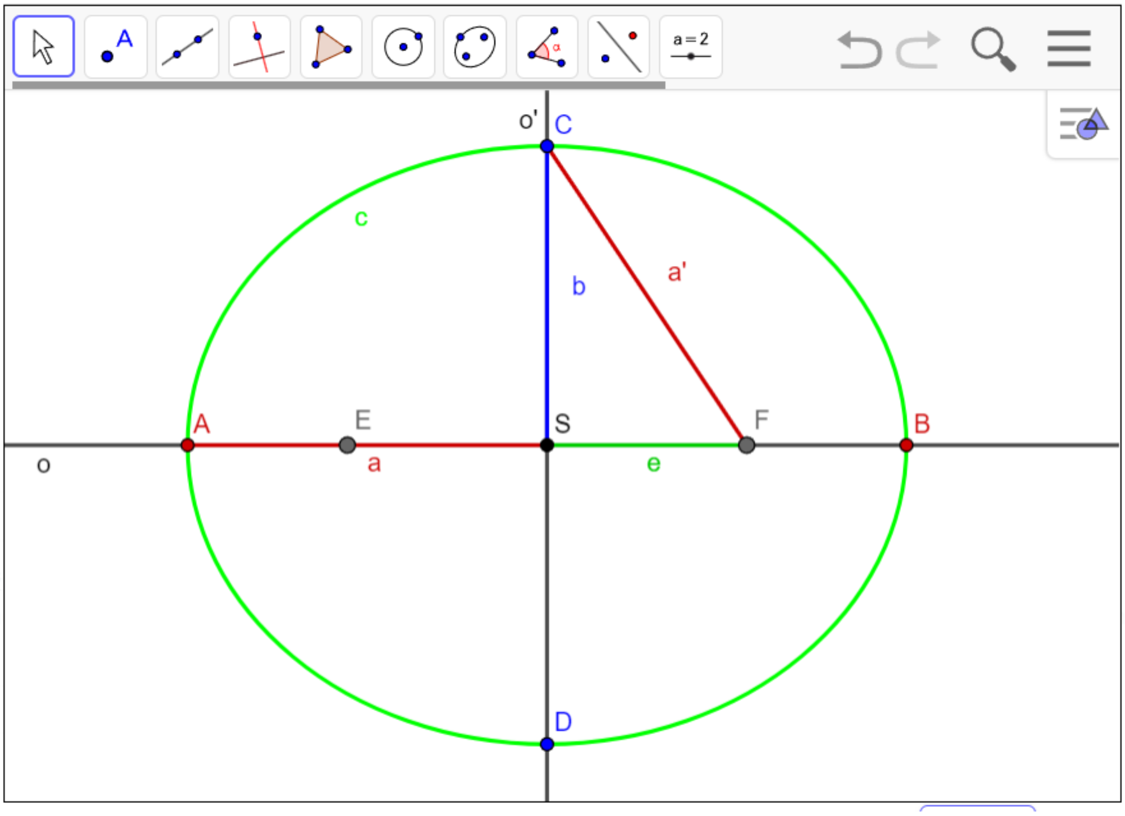
$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$, která vyjadřuje skutečnost, že bod T je bodem kružnice, dostaneme rovnici tečny.

Tedy **tečna** kružnice $k(S[m,n],r)$ s bodem dotyku $T[x_T, y_T]$ má rovnici:

$\boldsymbol{(x - m)(x_T - m) + (y - n)(y_T - n) = r^2}$ (Kočandrle, 1995).

Elipsa

V rovině jsou dány dva body E, F. Množina všech bodů X roviny, pro které se součet $|XE| + |XF|$ vzdáleností bodu X od bodů E, F rovná danému číslu většímu než $|EF|$, se nazývá **elipsa**. Body E a F se nazývají **ohniska** elipsy (Kočandrle, 1995).



Obr. 20: Elipsa

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/dn7f3gek)

Přímky o, o' nazýváme **hlavní a vedlejší osou** elipsy. Bod S, průsečík os o, o', nazýváme **střed** elipsy. Body A, B nazýváme **hlavní vrcholy** elipsy. Body C, D nazýváme **vedlejší vrcholy** elipsy. Parametr $a = |AS| = |BS|$ určuje **velikost hlavní poloosy**. Parametr $b = |CS| = |DS|$ určuje **velikost vedlejší poloosy**. Číslo e se nazývá **excentricita (výstřednost)** a platí, že $e^2 = a^2 - b^2, a > b$ (Vondra, 2016).

Z definice elipsy plyne platnost vztahu $|XE| + |XF| = 2a$, kde $X[x, y]$. Pokud má elipsa své osy rovnoběžné s osami soustavy souřadnic, a pokud známe střed elipsy $S[m, n]$, velikost hlavní poloosy a a velikost vedlejší poloosy b, pak má **středová rovnice elipsy** tvar $\boldsymbol{\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1}$. **Obecná rovnice elipsy** má pak tvar $\boldsymbol{px^2 + qy^2 + rx + sy + t = 0}$ (Vošický, 1999).

Vnitřní a vnější oblast elipsy a vzájemnou polohu bodu $C[c_1, c_2]$ a elipsy popisuje následující tabulka (Vondra, 2016).

Tab. 2: Vzájemná poloha bodu a elipsy

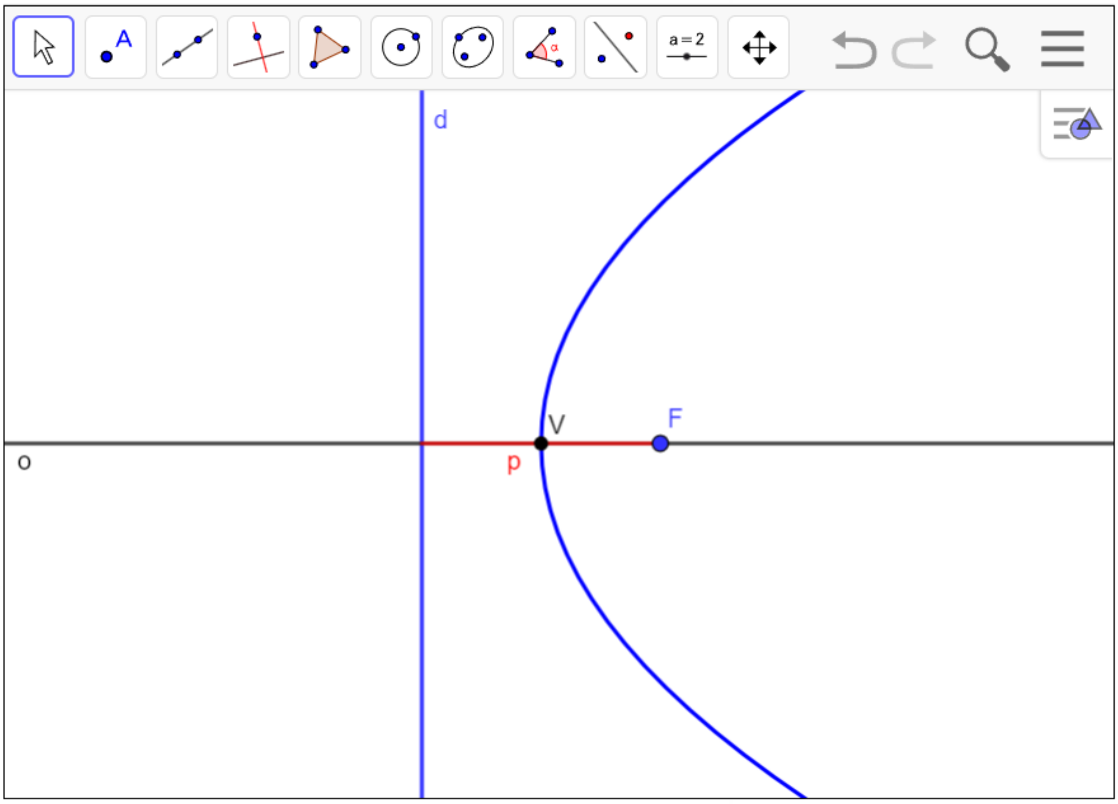
Elipsa Bod $\boldsymbol{C}$ leží na elipse	$\frac{(c_1-m)^2}{a^2}+\frac{(c_2-n)^2}{b^2}=1$
Vnitřní oblast Bod $\boldsymbol{C}$ leží uvnitř elipse	$\frac{(c_1-m)^2}{a^2}+\frac{(c_2-n)^2}{b^2}<1$
Vnější oblast Bod $\boldsymbol{C}$ leží vně elipse	$\frac{(c_1-m)^2}{a^2}+\frac{(c_2-n)^2}{b^2}>1$

Vzájemnou polohu elipsy a přímky, určujeme stejně jako u kružnice. Tedy, pokud nemá elipsa s přímkou žádný společný bod, pak ji nazýváme **vnější přímkou**. **Tečnou** nazýváme takovou přímku, která s elipsou má společný jediný bod, **bod dotyku,** a **sečna** je přímka, která má dva body společné s elipsou (Liška, 2017).

Je-li bod $T[x_T, y_T]$ bodem elipsy o rovnici $\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$, má tečna elipsy v tomto bodě rovnici $\boldsymbol{\frac{(x-m)(x_T-m)}{a^2}+\frac{(y-n)(y_T-n)}{b^2}=1}$ (Kočandrle, 1995).

Parabola

V rovině je dán bod F a přímka d, která jím neprochází. Množina všech bodů roviny, které mají stejnou vzdálenost od bodu F a od přímky d, se nazývá **parabola** (Kočandrle, 1995).



Obr. 21: Parabola

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/v2xnd7tg)

Bod F se nazývá **ohnisko**, přímka d **řídící přímka** paraboly. Přímka o, která prochází ohniskem F a je kolmá k řídící přímce d, se nazývá **osa** paraboly. Bod V se nazývá **vrchol** paraboly a leží na její ose. Číslo $p = |Fd|$ nazýváme **parametr** paraboly, pro který platí $\frac{p}{2} = |FV| = |Vd|$ (Vondra, 2016).

Z definice plyne platnost vztahu $|FX| = |Xd|$, kde $X[x, y]$, pak lze při vhodném umístění řídící přímky d a ohniska F do soustavy souřadnic získat **vrcholovou a obecnou rovnici paraboly**.

Pokud je osa paraboly rovnoběžná s osou y a vrchol paraboly má souřadnice $V[m, n]$, pak má parabola **vrcholovou rovnici** ve tvaru $\boldsymbol{(x - m)^2 = \pm 2p(y - n)}$, $p > 0$. **Obecná rovnice** paraboly bude mít tvar $\boldsymbol{x^2 + 2rx + 2sy + t = 0}$, $s \neq 0$.

Pokud je osa paraboly rovnoběžná s osou x a vrchol paraboly má souřadnice $V[m, n]$, pak má parabola **vrcholovou rovnici** ve tvaru $\boldsymbol{(y - n)^2 = \pm 2p(x - m)}$,

$p > 0$. **Obecná rovnice** paraboly bude mít tvar $\boldsymbol{y^2 + 2rx + 2sy + t = 0}$, $r \neq 0$ (Vošický 1999).

Vnitřní a vnější oblast paraboly s vrcholovou rovnicí $(x-m)^2 = \pm 2p(y-n)$ a vzájemnou polohu bodu $K[k_1, k_2]$ a paraboly popisuje následující tabulka (Vondra, 2016).

Tab. 3: Vzájemná poloha bodu a paraboly

Parabola Bod $\boldsymbol{K}$ leží na parabole	$(k_1 - m)^2 = \pm 2p(k_2 - n)$
Vnitřní oblast Bod $\boldsymbol{K}$ leží uvnitř parabole	$(k_1 - m)^2 < \pm 2p(k_2 - n)$
Vnější oblast Bod $\boldsymbol{K}$ leží vně parabole	$(k_1 - m)^2 > \pm 2p(k_2 - n)$

Obdobné vztahy platí pro parabolu s vrcholovou rovnicí $(y-n)^2 = \pm 2p(x-m)$.

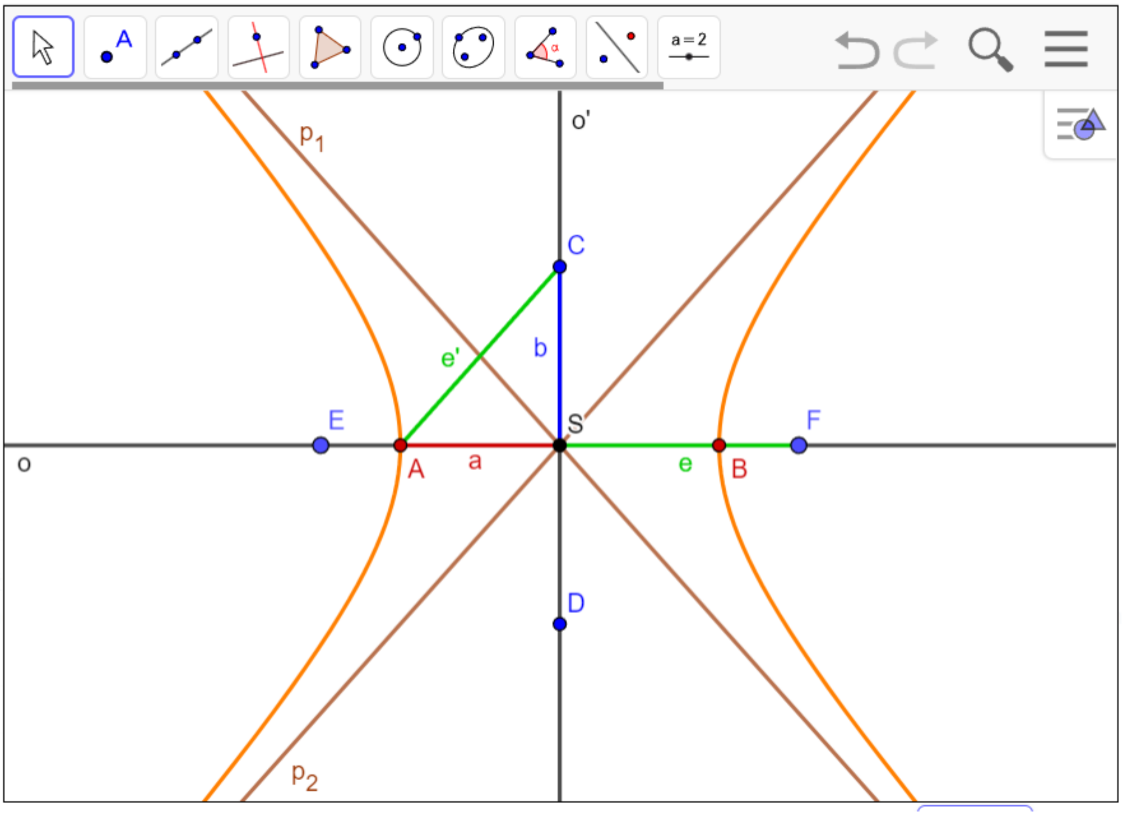
Vzájemná poloha paraboly a přímky je stále analogická jako u jiných kuželoseček. Pokud parabola nemá žádný společný bod s přímkou, jedná se o **přímku vnější**. Má-li parabola jeden společný bod s přímkou, pak se přímka nazývá **tečnou** paraboly. **Sečna** je přímka, která má dva společné body s parabolou. Přímka rovnoběžná s osou paraboly, která má s parabolou jeden společný bod, se také nazývá sečna.

Pokud je osa paraboly rovnoběžná s osou y, pak má **rovnice tečny** paraboly tvar $\boldsymbol{(x-m)(x_T-m) = \pm p(y-n) \pm p(y_T-n)}$, kde bod $T[x_T, y_T]$ je bodem dotyku.

Pokud je osa paraboly rovnoběžná s osou x, pak má **rovnice tečny** paraboly tvar $\boldsymbol{(y-n)(y_T-n) = \pm p(x-m) \pm p(x_T-m)}$**,** kde bod $T[x_T, y_T]$ je bodem dotyku (Kočandrle, 1995).

Hyperbola

Hyperbola je poslední kuželosečka, kterou se budeme zabývat. Jedná se o množinu bodů, pro které platí, že absolutní hodnota rozdílu vzdáleností od dvou pevně daných bodů E, F je vždy stejná (Liška, 2017).



Obr. 22: Hyperbola

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/gstjzmac)

Body E, F nazýváme **ohniska** hyperboly. Přímky o, o' nazýváme **hlavní a vedlejší osou** hyperboly. Bod S je **středem** hyperboly. Body A, B nazýváme **hlavní vrcholy** hyperboly. Parametru $a = |AS| = |BS|$ říkáme **velikost hlavní poloosy**. Parametru $e = |ES| = |BF|$ říkáme **excentricita (výstřednost)** a platí, že $e^2 = a^2 + b^2$, kde parametr $b = |CS| = |DS|$ udává **velikost vedlejší poloosy**. Hyperbola je složena ze dvou částí, které nazýváme **větve** hyperboly. Přímky p_1, p_2, které procházejí středem hyperboly, nazýváme **asymptoty** hyperboly. Asymptota se neustále blíží k hyperbole, ale nikdy ji neprotne. Svírají-li asymptoty pravý úhel, pak se jedná o rovnoosou hyperbolu. (Vondra, 2016).

Z definice hyperboly, lze odvodit vztah $||EX| - |FX|| = 2a$, kde $X[x, y]$.

Hyperbola, jejíž hlavní osa je rovnoběžná s osou x, a která má střed $S[m, n]$, má **středovou rovnic** ve tvaru $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$, **obecnou rovnici** ve tvaru

$\boldsymbol{px^2 + qy^2 + 2rx + 2sy + t = 0}$, $pq < 0$, a její **asymptoty** mají rovnici $\frac{\boldsymbol{x-m}}{\boldsymbol{a}} = \pm\frac{\boldsymbol{y-n}}{\boldsymbol{b}}$.

Hyperbola, jejíž hlavní osa je rovnoběžná s osou y, a která má střed $S[m, n]$, má **středovou rovnic** ve tvaru $-\frac{\boldsymbol{(x-m)^2}}{\boldsymbol{a^2}} + \frac{\boldsymbol{(y-n)^2}}{\boldsymbol{b^2}} = \boldsymbol{1}$, **obecnou rovnici** ve tvaru $\boldsymbol{px^2 + qy^2 + 2rx + 2sy + t = 0}$, $pq < 0$, a její **asymptoty** mají rovnici $\frac{\boldsymbol{x-m}}{\boldsymbol{a}} = \pm\frac{\boldsymbol{y-n}}{\boldsymbol{b}}$ (Kočandrle, 1995).

Vnitřní a vnější oblast hyperboly a vzájemnou polohu bodu $L[l_1, l_2]$ a hyperboly popisuje následující tabulka (Vondra, 2016).

Tab. 4: Vzájemná poloha bodu a hyperboly

Hyperbola Bod $\boldsymbol{L}$ leží na hyperbole	$\frac{(l_1 - m)^2}{a^2} - \frac{(l_2 - n)^2}{b^2} = 1$
Vnitřní oblast Bod $\boldsymbol{L}$ leží uvnitř hyperboly	$\frac{(l_1 - m)^2}{a^2} - \frac{(l_2 - n)^2}{b^2} > 1$
Vnější oblast Bod $\boldsymbol{L}$ leží vně hyperboly	$\frac{(l_1 - m)^2}{a^2} - \frac{(l_2 - n)^2}{b^2} < 1$

Vzájemnou polohu hyperboly a přímky, určujeme analogicky jako u předchozích kuželoseček. Tedy, pokud nemá hyperbola s přímkou žádný společný bod, pak ji nazýváme **vnější přímkou**. **Tečnou** nazýváme přímku, která s hyperbolou má společný jeden bod, **bod dotyku** a **sečna** je přímka, která má dva body společné s hyperbolou. Přímka rovnoběžná s asymptotou má jeden společný bod s hyperbolou a nazývá se sečnou hyperboly. (Vondra, 2016).

Je-li bod $T[x_T, y_T]$ bodem hyperboly o rovnici $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = \pm 1$, pak má tečna hyperboly v tomto bodě rovnici $\frac{\boldsymbol{(x-m)(x_T-m)}}{\boldsymbol{a^2}} - \frac{\boldsymbol{(y-n)(y_T-n)}}{\boldsymbol{b^2}} = \pm\boldsymbol{1}$ (Kočandrle, 1995).

Analýza učebnic

V poslední kapitole teoretické části diplomové práce se budu věnovat vybraným středoškolským učebnicím matematiky a jejich zpracování tématu kuželoseček. Při analýze učebnic jsem se zaměřila především na vizuální stránku textu, přítomnost obrázků a počty příkladů. Učebnice jsem volila na základě doporučení od středoškolských učitelů matematiky.

Matematika pro gymnázia: Analytická geometrie

Starší učebnice z roku 1995, která je určena především pro výuku matematiky na gymnáziích, je zaměřená na analytickou geometrii a je členěná do kapitol a podkapitol. Jedná se o učebnici formátu A5 s řadou černobílých obrázků, které znázorňují teorii a upřesňují zadání a řešení příkladů. Učebnice rozděluje téma kuželosečky do sedmi kapitol. Na začátku každé kapitoly je vždy povídání o dané kuželosečce, definice, vlastnosti a řešené příklady s vysvětlivkami. Myslím si, že ukázkové příklady jsou poměrně složité. Následuje pár neřešených příkladů na procvičení. Výsledky neřešených příkladů se vyskytují na konci učebnice. V závěru celé kapitoly je pak přehled o kuželosečkách, kde nalezneme charakteristické rovnice a pojmy.

Matematika pro střední školy – 7. díl A: Analytická geometrie v rovině

Jedná se o barevnou a novější učebnici matematiky zaměřenou na analytickou geometrii v rovině. V učebnici se vyskytuje spousta barevných obrázků, rámečků se zajímavostmi a kolonkou „Zamyslete se!“. Ke každému řešenému příkladu je zde i doplňující obrázek s řešením. Nenajdeme zde neřešené příklady, protože k učebnici existuje i pracovní sešit, ve kterém je neřešených příkladů víc než dost. Výsledky k příkladům z pracovního sešitu nalezneme na webových stánkách, kde si klíč k řešení můžeme zdarma stáhnout. Mně se učebnice moc líbí, protože hojně propojuje teorii s praxí a snaží se studenty motivovat. Přijde mi, že je místy méně přehledná, protože obsahuje velké množství informací.

Matematika pro spolužáky – Analytická geometrie

Matematika pro spolužáky patří také k novějším učebnicím matematiky. Jedná se o hezký přehledný počin zaměřený na analytickou geometrii, který jednoduchým způsobem vykládá daná témata studentům. Bohužel mi přijde dost stručná, nezabývá se kuželosečkami tak do hloubky, jak by se mně osobně líbilo. Nabízí menší počet řešených i neřešených příkladů. Co se mi naopak líbí, je její barevné zpracování textu a obrázků a souhrn pojmů na konci každé kapitoly.

Matematika v kostce pro střední školy

Učebnice se od ostatních liší tím, že obsahuje celé učivo matematiky, které se probírá na střední škole čtyři roky. V každé kapitole se vysvětlí základní pojmy a vyřeší poměrně jednoduché příklady. Neřešené příklady se zde vůbec neobjevují. Důležité informace jsou zvýrazněny barevně, nebo umístěny do barevné tabulky. Učebnice je vhodným materiálem pro rychlé opakování témat před maturitou, ale pro samotnou výuku kuželoseček nestačí.

Porovnání učebnic na základě mých postřehů a názorů je shrnuté v následující tabulce. Informace se týkají pouze tématu kuželoseček.

Tab. 5: Analýza učebnic

Téma KUŽELOSEČKY	Matematika pro gymnázia: Analytická geometrie	Matematika pro střední školy – 7.díl A: Analytická geometrie v rovině	Matematika pro spolužáky – Analytická geometrie	Matematika v kostce pro střední školy
Rok vydání	1995	2016	2017	1999
Počet stran	70 A5	29 A4	35 A4	10 A4
Přehled, shrnutí pojmů a vztahů	ANO	NE	ANO	NE
Názornost	dobrá	výborná	dobrá	dobrá
Barevnost	žádná	výborná	chvalitebná	dobrá
Počet řešených příkladů	42	43	17	18
Počet neřešených příkladů	70	155 (Pracovní sešit)	14	0
Výsledky neřešených příkladů	ANO	ANO (dostupné online)	ANO	NE
Příklady řazeny vzestupně	ANO	ANO	ANO	ANO
Náročnost příkladů	Středně náročné až dost náročné	Nenáročné až dost náročné	Nenáročné až středně náročné	Nenáročné až středně náročné

Sbírka úloh

Sbírka úloh nabízí příklady týkající se kuželoseček. První část tvoří příklady z analytické geometrie, díky kterým se seznámíme s vlastnostmi kuželoseček. Získané dovednosti pak aplikujeme v další části příkladů, kde se řeší komplexnější, polohové úlohy. Všechny příklady jsou konstruovány v programu GeoGebra.

Kružnice

Úloha 1

Určete rovnici kružnice, která prochází body $A[1,2]$, $B[13,7]$ a $C[1,7]$ (Janeček, 1994).

Postup řešení:

Úlohu vyřešíme výpočtem pomocí analytické geometrie. Postupně dosadíme body A, B a C do středové rovnice kružnice $(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$. Tím dostaneme soustavu tří rovnic o třech neznámých.

$(1-m)^2+(2-n)^2=r^2$,

$(13-m)^2+(7-n)^2=r^2$,

$(1-m)^2+(7-n)^2=r^2$.

Nejprve od první rovnice odečteme rovnici třetí, tím nám v rovnici zůstane pouze neznámá n a upravíme.

$(2-n)^2-(7-n)^2=0$

$4-4n+n^2-49+14n-n^2=0$

$10n-45=0$

$n=4{,}5$

Nyní od druhé rovnice odečteme rovnici třetí, tím nám v rovnici zůstane pouze neznámá m a upravíme.

$(13-m)^2-(1-m)^2=0$

$169-26m+m^2-1+2m-m^2=0$

$-24m+168=0$

$m=7$

Na závěr dosadíme do jedné rovnice vypočítané hodnoty $m=7$, $n=4{,}5$ a vyjádříme si r.

$(1 - m)^2 + (2 - n)^2 = r^2$

$(1 - 7)^2 + (2 - 4{,}5)^2 = r^2$

$36 + 6{,}25 = r^2$

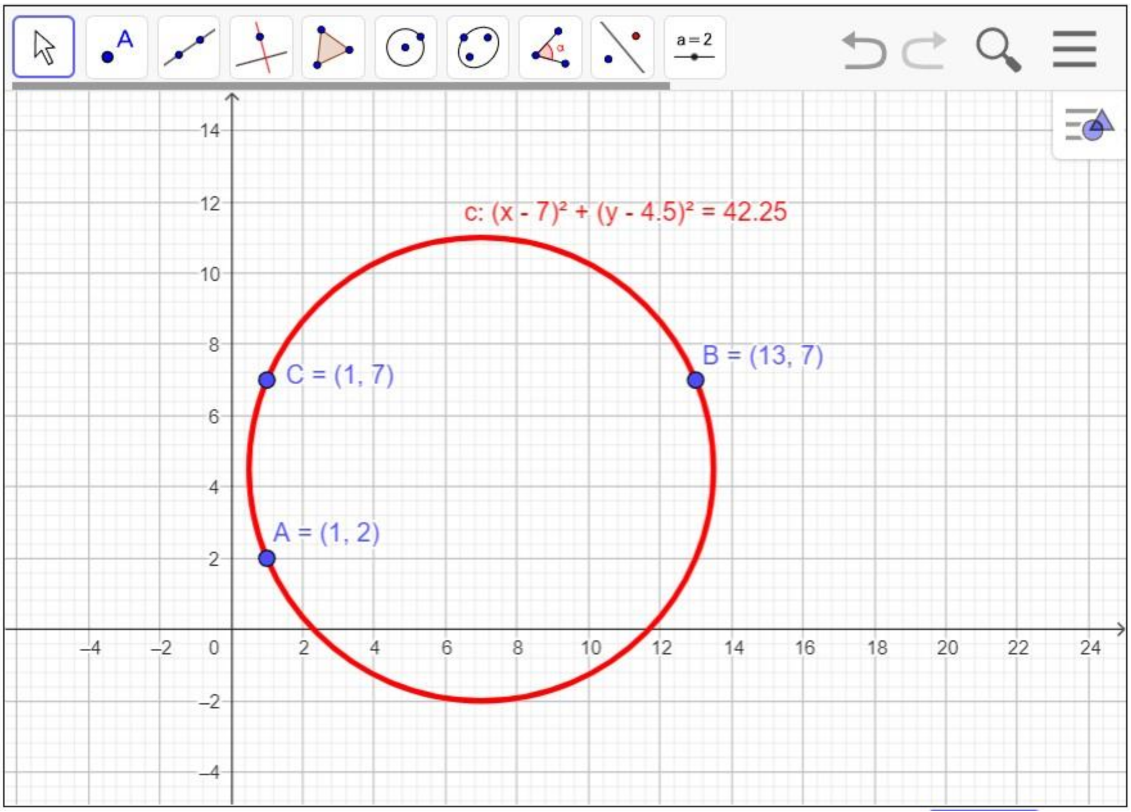
$\sqrt{42{,}25} = r$

$r = 6{,}5$

Nalezli jsme střed kružnice $S[7; 4{,}5]$ a její poloměr $r = 6{,}5$. Nyní stačí jen dosadit do rovnice kružnice $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$.

Kružnice má rovnici $(x - 7)^2 + (y - 4{,}5)^2 = 42{,}25$.

Správnost řešení si ověříme pomocí programu GeoGebra. Vyznačíme si zadané tři body $A[1{,}2]$, $B[13{,}7]$ a $C[1{,}7]$ a pomocí nástroje kružnice dána třemi body sestrojíme kružnici. Zapneme si zobrazit název a hodnotu a ověříme si, že kružnice v GeoGebře má rovnici shodnou s námi získanou rovnicí..



Obr. 23: Kružnice - úloha 1

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/w33zjbs5)

Úloha 2

Zjistěte, pro které hodnoty parametru p jsou dané rovnice rovnicemi kružnice. Určete souřadnice středu kružnice a její poloměr.

a) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + p = 0$
b) $x^2 + y^2 - 3x + 5y + p = 0$

(Bušek, 1996)

Postup řešení:

a) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + p = 0$

Doplníme na úplné čtverce (tzn. na druhé mocniny jistých dvojčlenů).

$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) = -p + 4 + 9$

$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 13 - p$

Levá strana rovnice se musí rovnat, dle rovnice kružnice, poloměru umocněného na druhou, tedy r^2.

$r^2 = 13 - p$

$r = \sqrt{13 - p}$

Odmocnit můžeme pouze číslo, které je větší nebo rovno nule. Tím dostáváme nerovnici $13 - p \geq 0$, ale kružnice nemůže mít nulový poloměr, proto hledáme jen všechna řešení nerovnice $13 - p > 0$:

$13 - p > 0$

$13 > p$

$p \in (-\infty, 13)$

Kružnice bude mít střed v bodě $S[-2,3]$ a poloměr $r = \sqrt{13 - p}$.

b) $x^2 + y^2 - 3x + 5y + p = 0$

Doplníme na úplné čtverce.

$\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + \left(y^2 + 5y + \frac{25}{4}\right) = -p + \frac{9}{4} + \frac{25}{4}$

$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{34}{4} - p$

Podobně jako v případě a) dojdeme k požadavku:

$r^2 = \frac{34}{4} - p$

$r = \sqrt{\frac{34}{4} - p}$

Odmocnit můžeme pouze číslo, které je větší nebo rovno nule. Tím dostáváme nerovnici $\frac{34}{4} - p \geq 0$, ale kružnice nemůže mít nulový poloměr, proto platí nerovnice $\frac{34}{4} - p > 0$, kterou vyřešíme.

$\frac{34}{4} - p > 0$

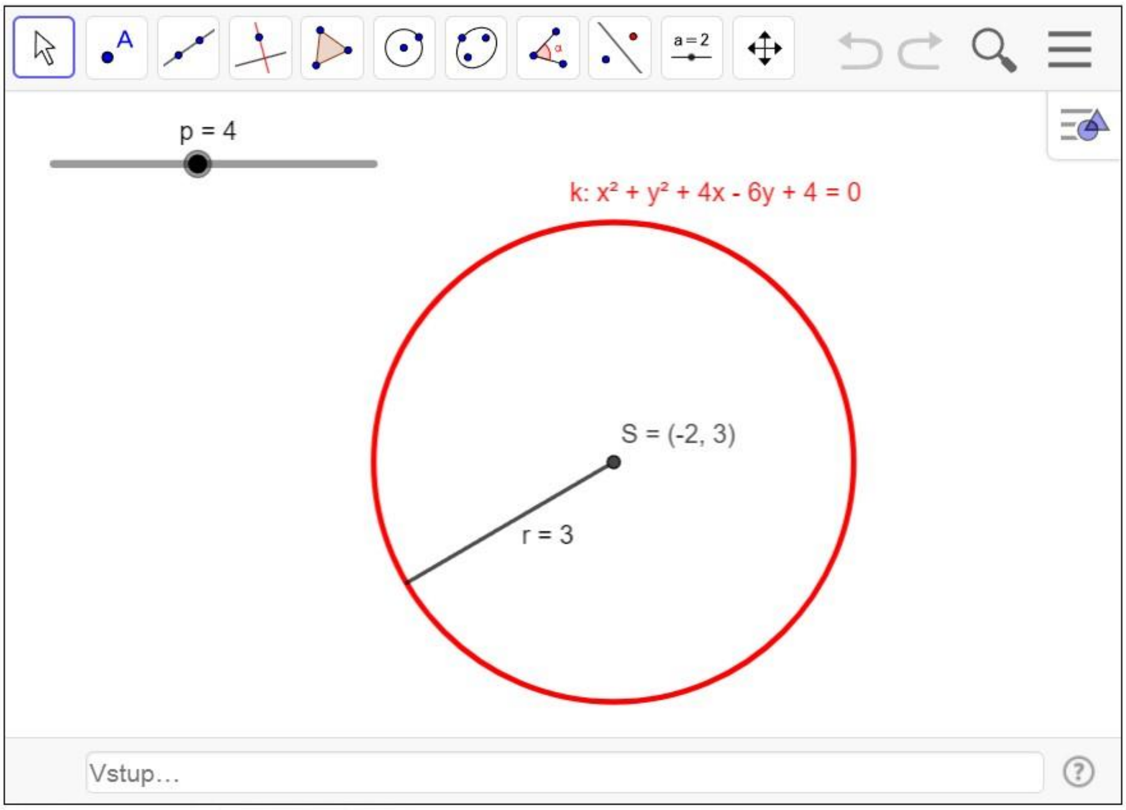
$\frac{34}{4} > p$

$\frac{17}{2} > p$

$p \in \left(-\infty, \frac{17}{2}\right)$

Kružnice bude mít střed v bodě $S\left[\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right]$ a poloměr $r = \sqrt{\frac{17}{2} - p}$.

Úlohu si můžeme ověřit v programu GeoGebra. Ověření provedeme pro variantu a) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + p = 0$. Nejprve použijeme nástroj posuvník, který budeme mít pro parametr p v intervalu $(-5,15)$. Do vstupního pole napíšeme zadanou rovnici kružnice $x^2 + y^2 + 4x - 6y + p = 0$. Sestrojíme si střed kružnice a poloměr, u kterých si zobrazíme jejich hodnotu. Pokud se parametr $p = 13$, pak máme místo kružnice bod. Pokud je $p > 13$, pak se nám nezobrazí žádný útvar.



Obr. 24: Kružnice - úloha 2

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/bqgttqwj)

Úloha 3

Určete polohu bodu $T[-2,1]$ vzhledem ke kružnici a k její vnitřní a vnější oblasti.

a) $x^2 + y^2 = 2$
b) $x^2 + y^2 - 5 = 0$
c) $x^2 + y^2 = 25$
d) $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0$
e) $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$

(Bušek, 1996)

Postup řešení:

Souřadnice bodu $T[-2,1]$ dosadíme do rovnice kružnice a zjistíme, zda je levá strana rovnice menší, větší nebo rovna pravé straně rovnice.

a) Rovnice kružnice: $x^2 + y^2 = 2$
$L = (-2)^2 + 1^2 = 5$
$P = 2$
$L > P$ a tedy bod T je bodem vnější oblasti kružnice

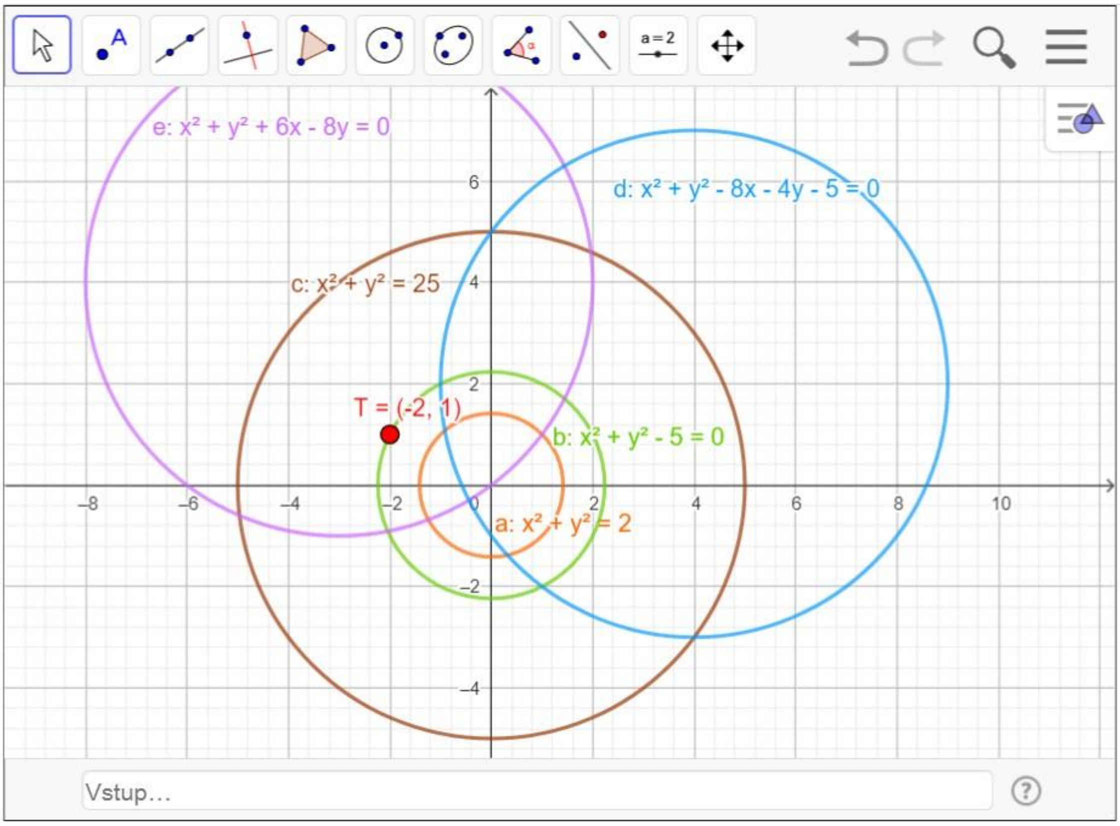
b) Rovnice kružnice: $x^2 + y^2 - 5 = 0$
$L = (-2)^2 + 1^2 - 5 = 0$
$P = 0$
$L = P$ a tedy bod T je bodem kružnice

c) Rovnice kružnice: $x^2 + y^2 = 25$
$L = (-2)^2 + 1^2 = 5$
$P = 25$
$L < P$ a tedy bod T je bodem vnitřní oblasti kružnice

d) Rovnice kružnice: $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0$
$L = (-2)^2 + 1^2 - 8(-2) - 4 - 5 = 12$
$P = 0$
$L > P$ a tedy bod T je bodem vnější oblasti kružnice

e) Rovnice kružnice: $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$
$L = (-2)^2 + 1^2 + 6(-2) - 8 = -15$
$P = 0$
$L < P$ a tedy bod T je bodem vnitřní oblasti kružnice

Ověření provedeme pomocí programu GeoGebra. Do vstupního pole zadáme rovnice všech kružnic a vyznačíme si bod $T[-2,1]$. Rovnou vidíme, zda bod leží na kružnici, uvnitř kružnice nebo mimo kružnici.



Obr. 25: Kružnice - úloha 3

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/vruw3rdw)

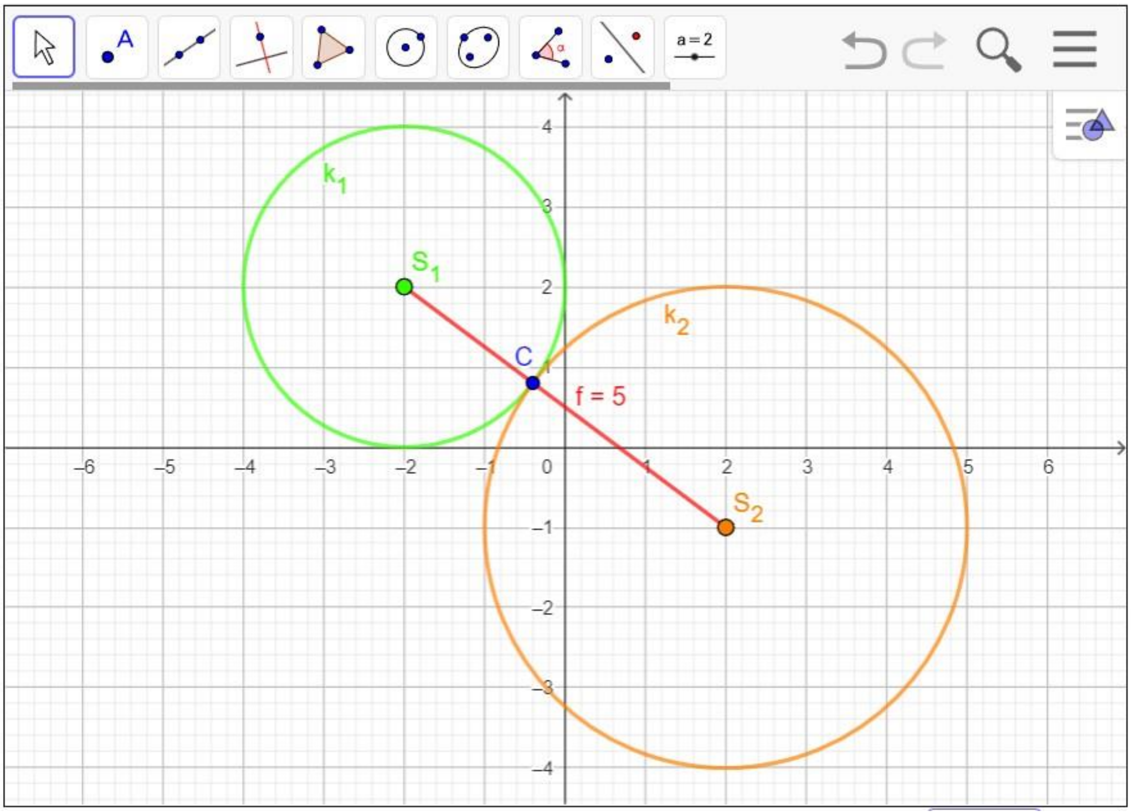
Úloha 4

Jsou dány dvě kružnice k_1: $(x+2)^2+(y-2)^2=4$ a k_2: $(x-2)^2+(y+1)^2=9$ Rozhodněte, zda jsou následující tvrzení pravdivá. Nepravdivá tvrzení opravte.

a) Vzdálenost středů kružnic je větší než 6.
b) Součin velikostí poloměrů kružnic je 6.
c) Kružnice mají společné dva body.

Postup řešení:

a) Nepravdivé tvrzení
Kružnice k_1: $(x+2)^2+(y-2)^2=4$ má střed $S_1[-2,2]$ a kružnice k_2: $(x-2)^2+(y+1)^2=9$ má střed $S_2[2,-1]$. Vzdálenost středů kružnic se rovná $|S_1S_2|=\sqrt{(2-(-2))^2+(-1-2)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$.
b) Pravdivé tvrzení
Kružnice mají poloměry $r_1=2$, $r_2=3$ a součin poloměrů je roven $r_1\cdot r_2=2\cdot 3=6$.
c) Nepravdivé tvrzení
Vzdálenost středů kružnic $|S_1S_2|=5$ je rovna součtu poloměrů $r_1+r_2=5$, tedy kružnice mají společný pouze jeden bod.



Obr. 26: Kružnice - úloha 4

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/kxfr3tzq)

Úloha 5

Kružnice k_1 je dána středem $S_1[-2,3]$ a poloměrem $r_1 = 5$. Kružnice k_2 má střed $S_2[x, 1]$ a poloměr $r_2 = 1$. Pro vzdálenost středů kružnic platí $|S_1S_2| = \sqrt{20}$. Řešte následující úlohy.

a) Určete chybějící souřadnici středu S_2, víte-li, že tato souřadnice je kladná.
b) Napište parametrické vyjádření úsečky, která spojuje středy S_1 a S_2.
c) Určete, kolik průsečíků mají kružnice k_1 a k_2.

(Kalová, 2016)

Postup řešení:

a) Víme, že pro vzdálenost středů platí vztah $|S_1S_2| = \sqrt{20}$, do kterého dosadíme souřadnice středů a vypočítáme souřadnici, která nám chybí.
$|S_1S_2| = \sqrt{20}$
$\sqrt{(x-(-2))^2 + (1-3)^2} = \sqrt{20}$
$\sqrt{x^2 + 4x + 4 + 4} = \sqrt{20}$
Nyní obě strany rovnice umocníme na druhou a odstraníme tak odmocniny.
$x^2 + 4x + 8 = 20$
$x^2 + 4x - 12 = 0$

$(x+6)(x-2)=0$
$x_1=-6$
$x_2=2$
My ze zadání víme, že neznámá souřadnice má být kladná, tedy střed S_2 musí mít souřadnice $S_2[2,1]$.

b) Pro parametrické vyjádření přímky potřebujeme znát směrový vektor přímky a jeden její bod.
Směrový vektor zjistíme ze středů kružnic.
$\vec{s}=(S_2-S_1)=(2-(-2),1-3)=(4,-2)$
Parametrické vyjádření úsečky má tvar:
$x=2+4t$
$y=1-2t, t\in\langle 0,1\rangle$

c) Tuto část úlohy budeme řešit logickou rozvahou. Protože vzdálenost středů je rovna číslu $\sqrt{20}$, pro které platí, že $\sqrt{20}<5<\sqrt{20}+1$, kde $5=r_1$ a $1=r_2$, musí kružnice mít dva společné body. Tedy kružnice se protínají ve dvou bodech.

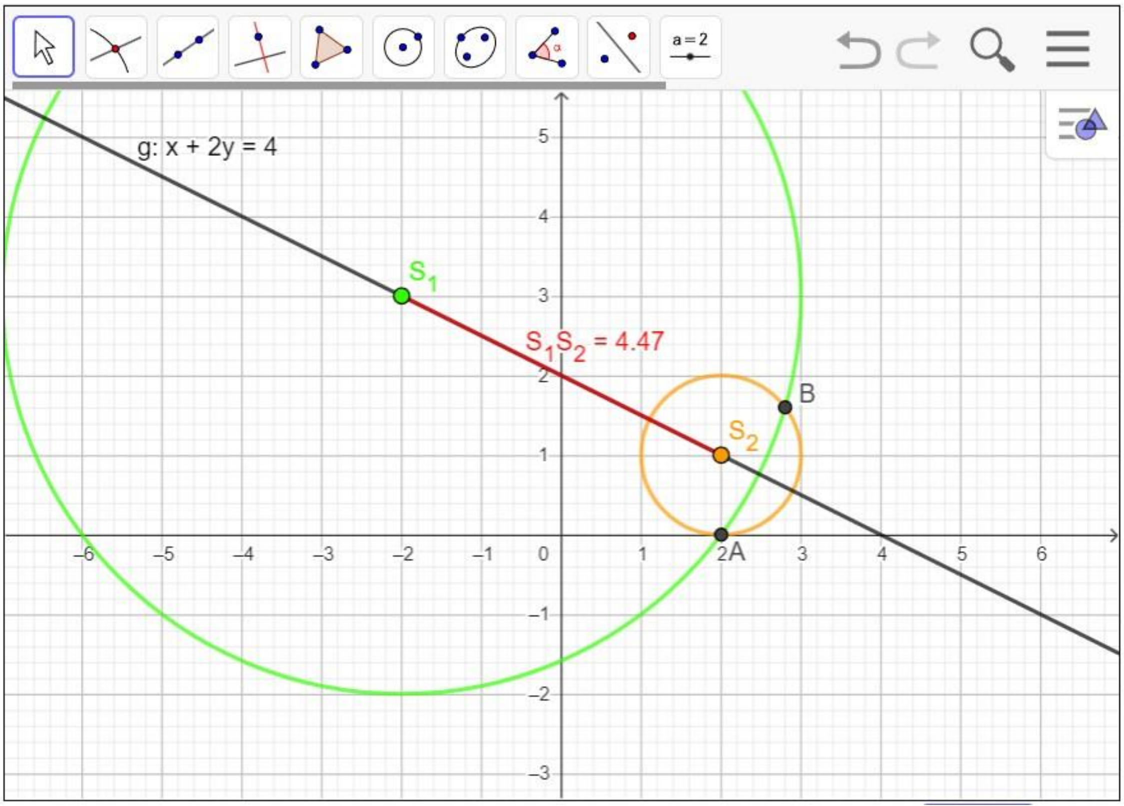
Úlohu si můžeme zkonstruovat v programu GeoGebra a ověřit si správnost našeho řešení. Zkonstruujeme si kružnice k_1 a k_2. Vyznačíme si úsečku S_1S_2 a zapneme si zobrazení názvu a hodnoty. Hodnota, tedy velikost úsečky, by měla být rovna číslu $\sqrt{20}$. Dále sestrojíme přímku určenou body S_1 a S_2 a zobrazíme si její název a hodnotu. Tentokrát hodnota odpovídá obecné rovnici přímky. Abychom rovnice přímky mohli porovnat, vypočítáme si obecnou rovnici přímky.

Obecnou rovnici přímky zjistíme pomocí normálového vektoru a jednoho bodu přímky. Normálový vektor má souřadnice $\vec{n}=(2,4)$ a bod $S_2[2,1]$.

$2x+4y+c=0$
$2\cdot 2+4\cdot 1+c=0$
$c=-8$

Obecná rovnice přímky má pak tvar $x+2y-4=0$, což odpovídá zobrazené rovnici přímky v GeoGebře.

Průsečíky kružnic sestrojíme pomocí nástroje průsečík.



Obr. 27: Kružnice - úloha 5

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/swmmraxb)

Úloha 6

Napište rovnici tečny kružnice $x^2 + y^2 + 10x - 6y - 70 = 0$, která je rovnoběžná s přímkou AB, kde $A[1, -5]$, $B[3, -1]$.

Postup řešení:

Nejprve si určíme obecnou rovnici přímky. Nalezneme směrnicový vektor a následně z něj uděláme normálový vektor.

$\overrightarrow{AB} = (3 - 1; -1 - (-5)) = (2,4) = (1,2)$

$\vec{n} = (2, -1)$

Rovnice přímky bude mít tvar $2x - y + c = 0$. Dosazením bodu $A[1, -5]$ do rovnice přímky zjistíme neznámou c.

$2 \cdot 1 - (-5) + c = 0$

$c = -7$

Rovnice přímky má tedy tvar $2x - y - 7 = 0$, nebo $y = 2x - 7$. Rovnoběžná přímka bude mít tvar $y = 2x + k$. Protože hledáme tečnu kružnice, můžeme do rovnice kružnice dosadit za y výraz $2x + k$.

$x^2 + (2x + k)^2 + 10x - 6(2x + k) - 70 = 0$

$x^2 + 4x^2 + 4xk + k^2 + 10x - 12x - 6k - 70 = 0$

$5x^2 + x(4k - 2) + k^2 - 6k - 70 = 0$

Hledáme hodnotu parametru k, pro kterou má kvadratická rovnice jedno řešení, tedy diskriminant musí být roven nule.

$D = 0$

$(4k - 2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (k^2 - 6k - 70) = 0$

$16k^2 - 16k + 4 - 20k^2 + 120k + 1400 = 0$

$-4k^2 + 104k + 1404 = 0$

$k^2 - 26k - 351 = 0$

$D_2 = (-26)^2 - 4 \cdot (-351) = 676 + 1404 = 2080 = \left(4\sqrt{130}\right)^2$

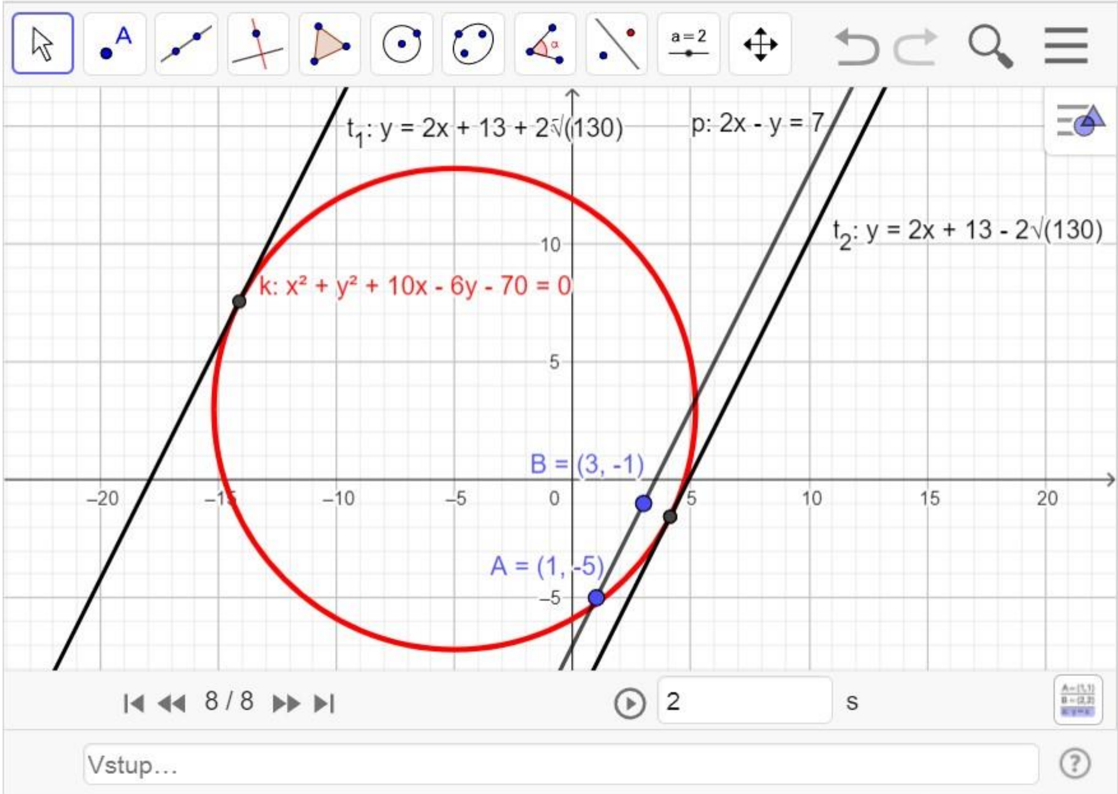
$k_1 = \frac{26+4\sqrt{130}}{2} = 13 + 2\sqrt{130}$

$k_2 = \frac{26-4\sqrt{130}}{2} = 13 - 2\sqrt{130}$

Hledané tečny rovnoběžné se zadanou přímkou budou mít rovnice:

$t_1: y = 2x + 13 + 2\sqrt{130}$ a $t_2: y = 2x + 13 - 2\sqrt{130}$.

Správnost řešení si ověříme pomocí programu GeoGebra. Do vstupního pole napíšeme rovnici kružnice, přímky a tečen. Pokud tečny mají s kružnicí společný jeden bod, počítali jsme správně.



Obr. 28: Kružnice - úloha 6

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/e5txucvq)

Úloha 7

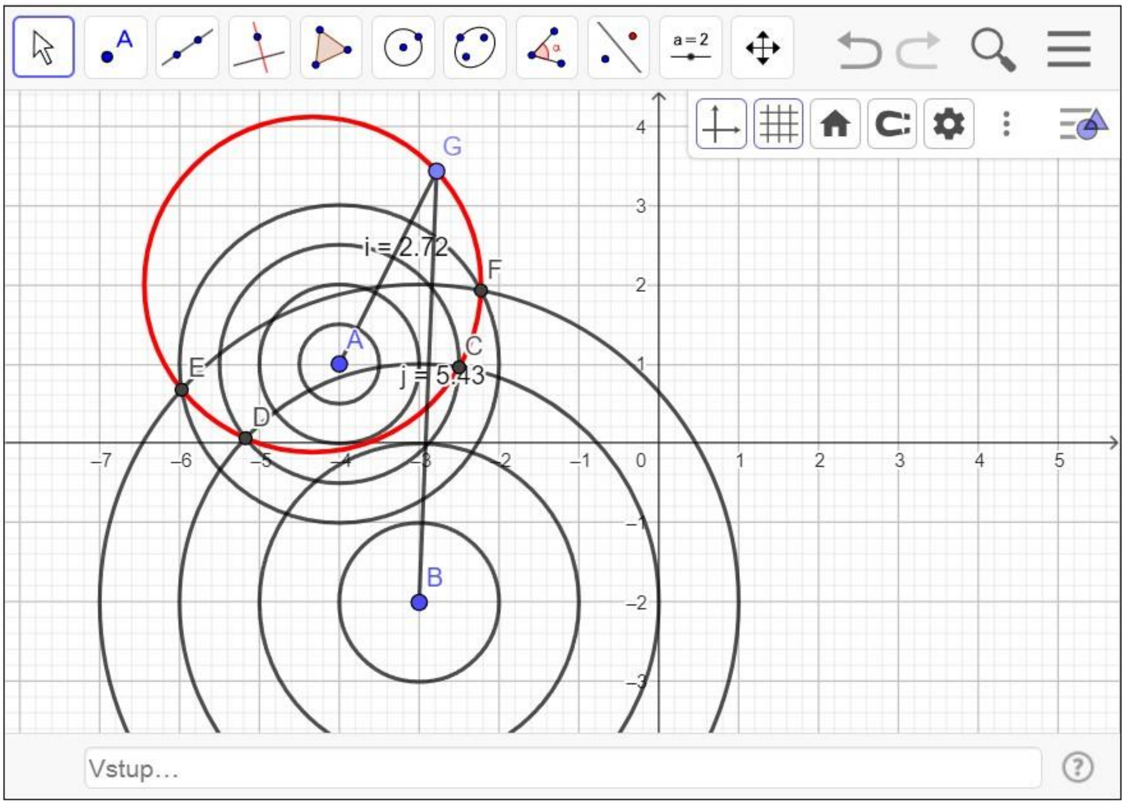
Nalezněte množinu všech bodů $X[x,y]$, které splňují následující podmínku, pro body $A[-4,1], B[-3,-2]$ platí: $2|AX| = |BX|$.

Použité nástroje: bod, kružnice (střed a poloměr), průsečík, kuželosečka dána pěti body

Postup řešení:

Nejprve sestrojíme zadané body $A[-4{,}1]$ a $B[-3,-2]$. Postupně sestrojíme kružnice, které budou mít poměr vzdáleností od bodů $\frac{|AX|}{|BX|}$ vždy roven poměru $\frac{1}{2}$.

Např.: $k_1(A, r_1 = 1)$ a $k_2(B, r_2 = 2)$, $k_3(A, r_3 = 2)$ a $k_4(B, r_4 = 4)$, $k_5(A, r_5 = 3)$ a $k_6(B, r_6 = 6)$. Až budeme mít alespoň pět průsečíků, použijeme nástroj kuželosečka dána pěti body a vykreslíme hledanou množinu bodů. V tomto případě se jedná o kružnici.



Obr. 29: Kružnice – úloha 7

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/m55fw8j8)

Důkaz provedeme pomocí výpočtů, za využití analytické geometrie.

$A[-4, 1], B[-3, -2]$ a $2|AX| = |BX|$

Hledané úsečky $|AX|$ a $|BX|$ zapíšeme jako vektory.

$$2|(X - A)| = |(X - B)|$$

Tato rovnost platí i po umocnění na druhou.

$$4|(X - A)|^2 = |(X - B)|^2$$

Rozepíšeme si vektory pomocí jednotlivých souřadnic a upravíme.

$$4[(x + 4)^2 + (y - 1)^2] = (x + 3)^2 + (y + 2)^2$$

$$4[x^2 + 8x + 16 + y^2 - 2y + 1] = x^2 + 6x + 9 + y^2 + 4y + 4$$

$$4x^2 + 32x + 64 + 4y^2 - 8y + 4 = x^2 + 6x + 9 + y^2 + 4y + 4$$

$$3x^2 + 26x + 3y^2 - 12y = -55$$

$$3\left(x^2 + \frac{26}{3}x + \frac{169}{9}\right) + 3(y^2 - 4y + 4) = -55 + 12 + \frac{169}{3}$$

$(x + \frac{13}{3})^2 + (y - 2)^2 = \frac{40}{9}$

Jedná se tedy o kružnici se středem $S[-\frac{13}{3}, 2]$ a poloměrem $r = \frac{2\sqrt{10}}{3}$

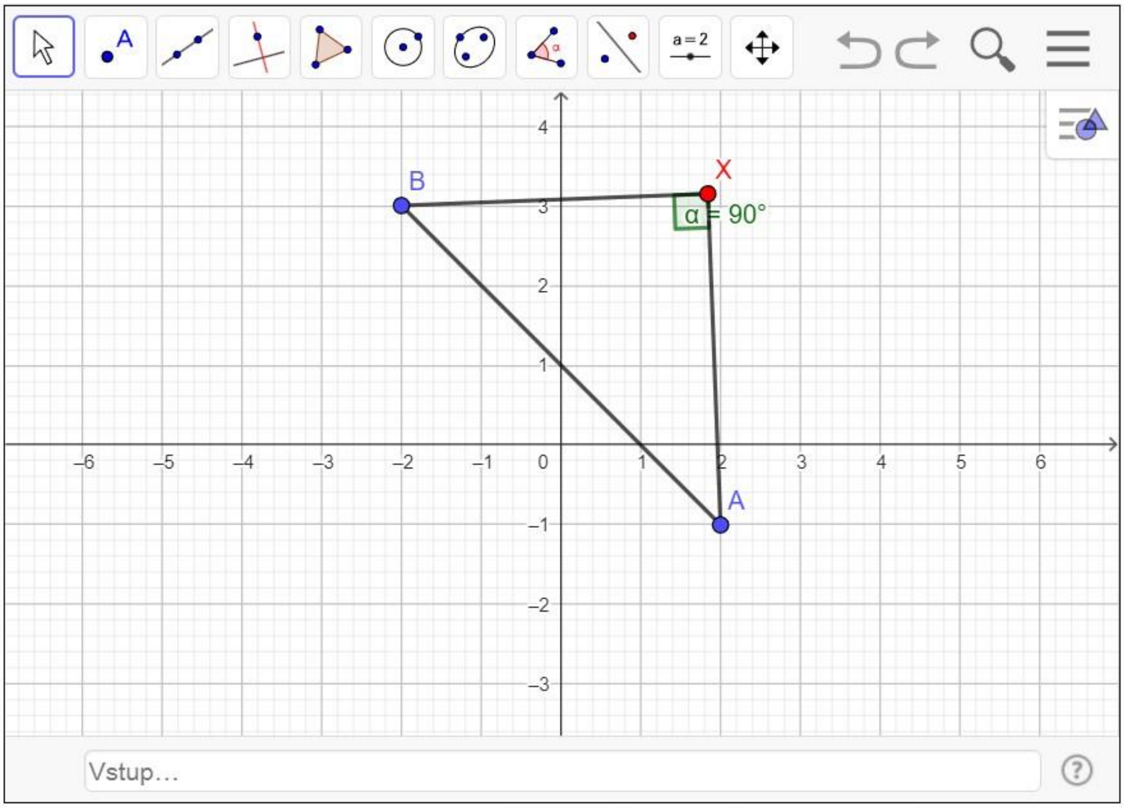
Úloha 8

V rovině jsou dány body $A[2, -1]$ a $B[-2, 3]$. Určete množinu všech bodů X, pro které jsou přímky AX a BX navzájem kolmé. Jinými slovy, máme určit množinu všech bodů, ze kterých je vidět úsečka AB pod pravým úhlem (Kočandrle, 1995).

Použité nástroje: bod, úsečka, střed, kružnice (střed a bod kružnice)

Postup řešení:

Pro lepší pochopení zadání zde máme obrázek vytvořený v programu GeoGebra.



Obr. 30: Kružnice - úloha 8 - zadání

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/g58cegyd)

1. Analytická metoda za využití skalárního součinu dvou vektorů
   $(X - A)(X - B) = 0$
   $(x - 2, y + 1)(x + 2, y - 3) = 0$
   $(x - 2)(x + 2) + (y + 1)(y - 3) = 0$
   $x^2 - 4 + y^2 - 2y - 3 = 0$
   $x^2 + y^2 - 2y + 1 = 7 + 1$

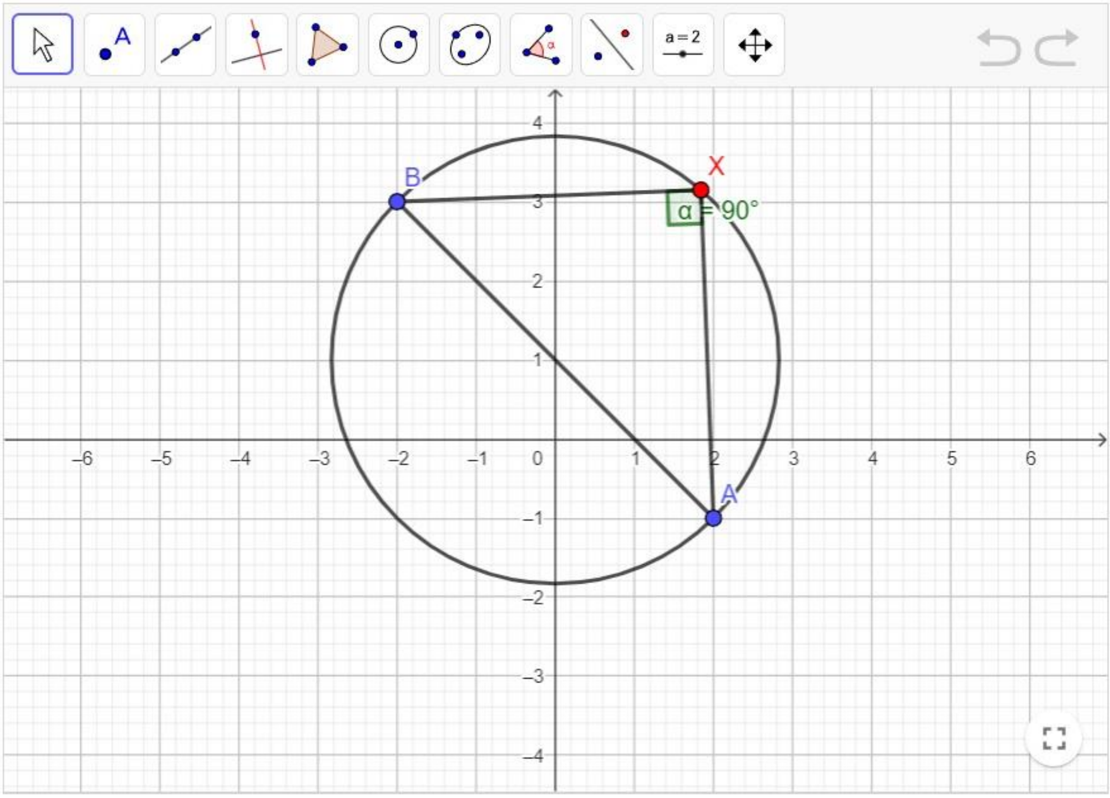
$x^2 + (y - 1)^2 = 8$

Což je rovnice kružnice se středem $S[0, 1]$ a poloměrem $r = 2\sqrt{2}$

2. Analytická metoda za využití Pythagorovy věty
   $|AX|^2 + |BX|^2 = |AB|^2$
   $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = (-2 - 2)^2 + (3 + 1)^2$
   $x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 + x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 32$
   $2x^2 + 2y^2 - 4y = 32 - 18$
   $x^2 + y^2 - 2y + 1 = 7 + 1$
   $x^2 + (y - 1)^2 = 8$

Což je rovnice kružnice se středem $S[0, 1]$ a poloměrem $r = 2\sqrt{2}$

3. Pomocí sestrojení Thaletovy kružnice
   Sestrojíme úsečku AB a nalezneme její střed S. Dále sestrojíme kružnici $k(S, r = |SA| = |SB|)$. Díky Thaletově větě víme, že jakýkoliv trojúhelník sestrojený nad průměrem kružnice k, s vrcholem C, který náleží kružnici k, je pravoúhlý. Tímto jsme nalezli množinu všech hledaných bodů X.



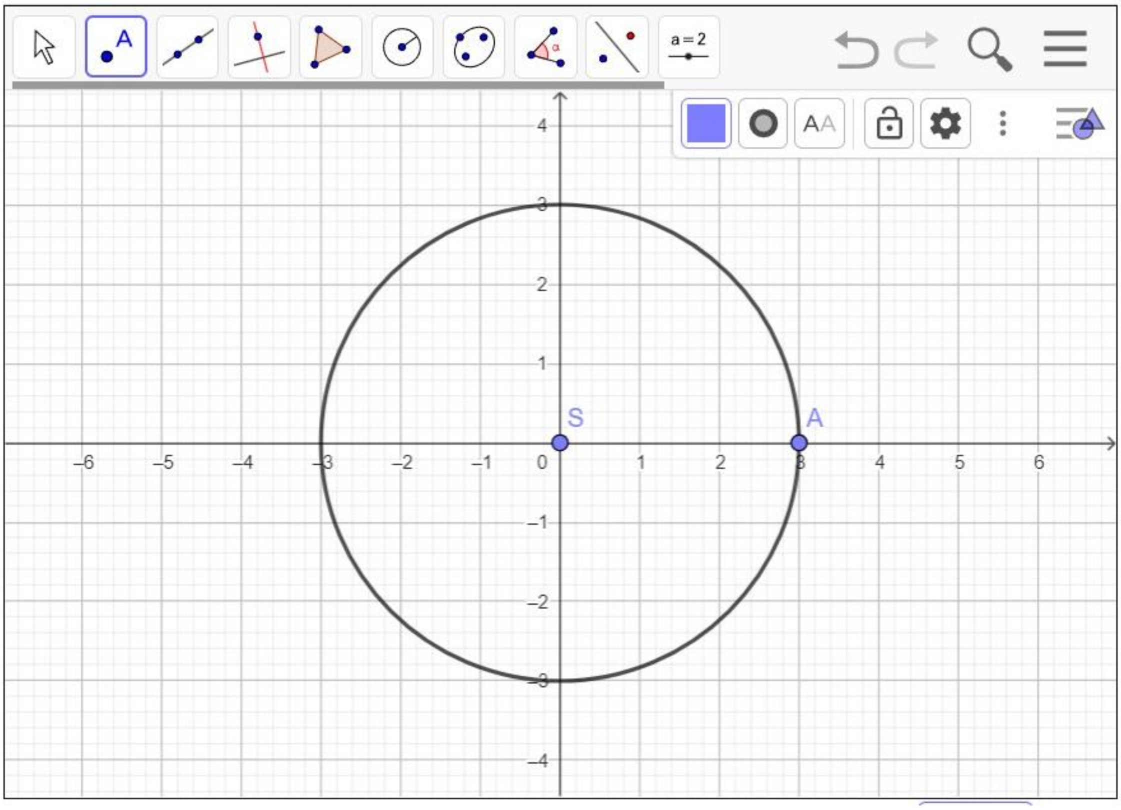
Obr. 31: Kružnice - úloha 8 - řešení

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/g58cegyd)

Musíme si ovšem uvědomit, že body A a B nepatří do této množiny, protože by se jednalo o přímku AB a ne o dvě kolmé přímky.

Úloha 9

Je dána kružnice k a na ní bod A. Bodem A jsou vedeny všechny možné tětivy dané kružnice. Najděte množinu středů těchto tětiv (Hrubý, 2008).



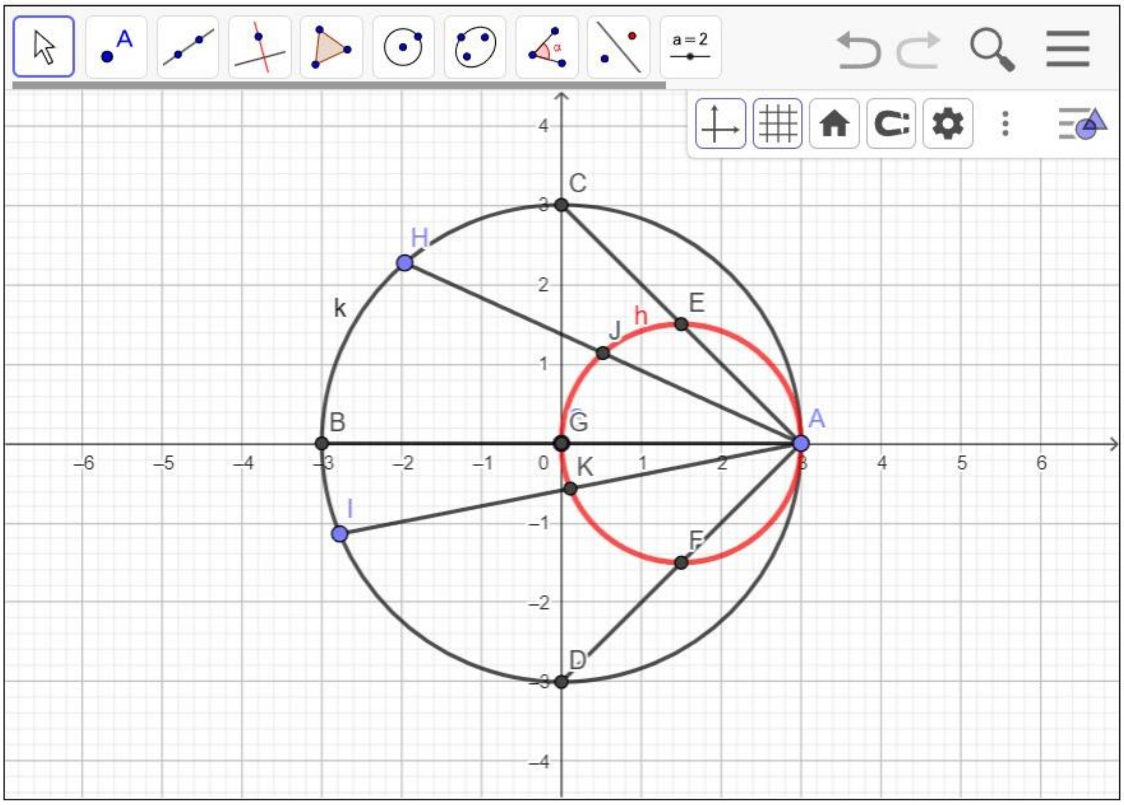
Obr. 32: Kružnice - úloha 9 - zadání

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/nkx5rmzm)

Použité nástroje: bod, kružnice (střed a poloměr), úsečka, střed, kuželosečka dána pěti body

Postup řešení:

Sestrojíme kružnici k se zvoleným středem S a poloměrem r. Já zvolila kružnici $k(S[0,0], r_k = 3)$. Na kružnici vyznačíme bod A, v mém případě bod $A[3,0]$. Vybereme si pět libovolných různých bodů, které leží na kružnici. Já volila průsečíky s osou x, osou y a dva libovolné. Sestrojíme tětivy, které prochází bodem A a vybranými body kružnice k. Nalezneme středy těchto tětiv a proložíme je kuželosečkou určenou pěti body. Hledanou množinou středů tětiv procházejících bodem A je červeně zvýrazněná kružnice h bez bodu A.



Obr. 33: Kružnice - úloha 9 – řešení 1

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/nkx5rmzm)

Abychom nalezli rovnici kružnice pomocí analytické geometrie, zvolíme si tři středy našich tětiv a dosadíme je do obecné rovnice kružnice $h: (x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$.

Já si zvolila tětivy AC, AB a AD a jejich středy $E\left[\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$, $G = S = [0,0]$ a $F\left[\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right]$. Nyní dosadíme do rovnice kružnice h.

$$\left(\frac{3}{2} - m\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - n\right)^2 = r^2,$$

$$(0-m)^2 + (0-n)^2 = r^2,$$

$$\left(\frac{3}{2} - m\right)^2 + \left(-\frac{3}{2} - n\right)^2 = r^2.$$

Díky dosazení středů tětiv jsme získali soustavu tří rovnic o třech neznámých, kterými jsou souřadnice $[m, n]$ středu kružnice h a její poloměr r. Nalezneme řešení soustavy rovnic. V prvním kroku odečteme od první rovnice rovnici třetí.

$$\left(\frac{3}{2} - m\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - n\right)^2 = r^2$$

$$\left(\frac{3}{2} - m\right)^2 + \left(-\frac{3}{2} - n\right)^2 = r^2$$

$\left(\frac{3}{2} - n\right)^2 - \left(-\frac{3}{2} - n\right)^2 = 0$

$\frac{9}{4} - 3n + n^2 - \frac{9}{4} - 3n + n^2 = 0$

$-6n = 0$

$n = 0$

Nyní do druhé rovnice dosadíme $n = 0$, tedy $m^2 + 0 = r^2$, upravíme na výraz $m^2 = r^2$, dosadíme do jedné ze zbývajících rovnic a upravíme.

$\left(\frac{3}{2} - m\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - 0\right)^2 = x^2$

$\frac{9}{4} - 3m + m^2 + \frac{9}{4} = x^2$

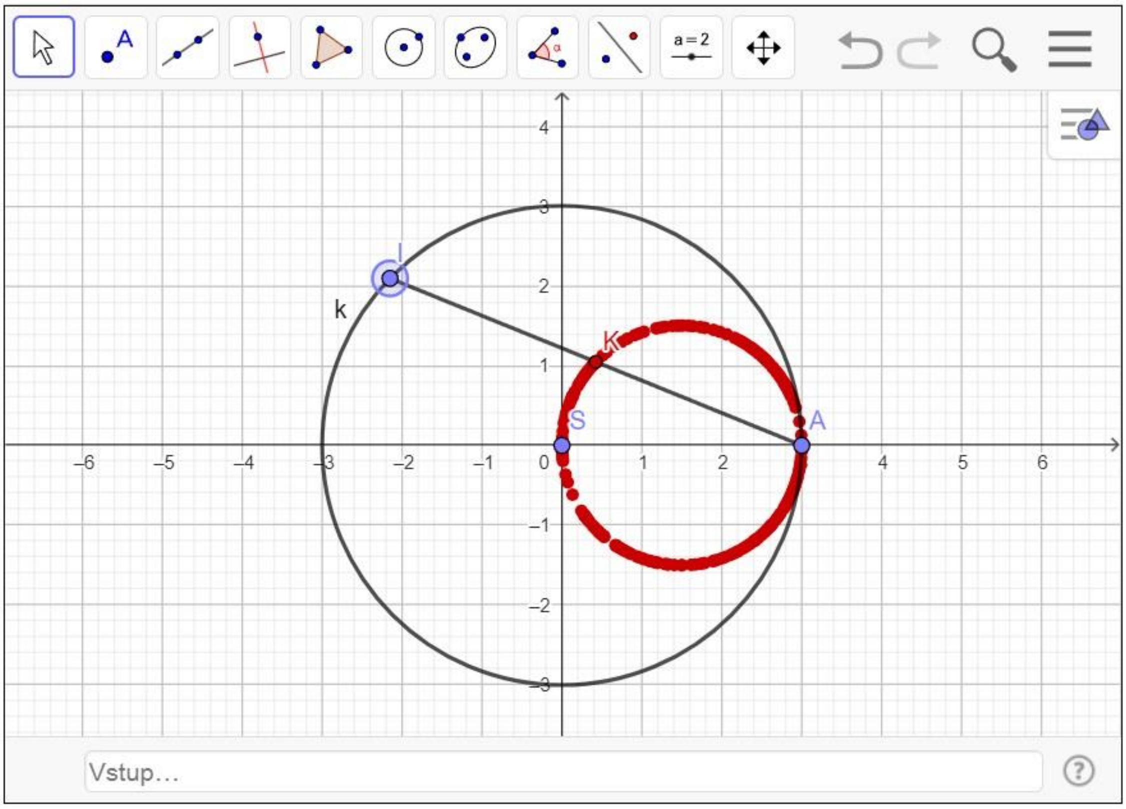
$\frac{18}{4} = 3m$

$\frac{18}{12} = m$

$m = \frac{3}{2}$ a tedy i $r = \frac{3}{2}$

Tímto výpočtem jsme dostali rovnici kružnice h se středem $\left[\frac{3}{2}, 0\right]$a poloměrem $r = \frac{3}{2}$, tedy h: $(x - \frac{3}{2})^2 + y^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$.

Tuto úlohu můžeme také vyřešit tím, že nalezneme jednu tětivu a její střed, u kterého zapneme zobrazení stopy a pokud budeme pohybovat koncovým bodem tětivy (opačným než je bod A) po kružnici k, vykreslí se nám hledaná množina.



Obr. 34: Kružnice - úloha 9 - řešení 2

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/hsy5exzg)

Úloha 10

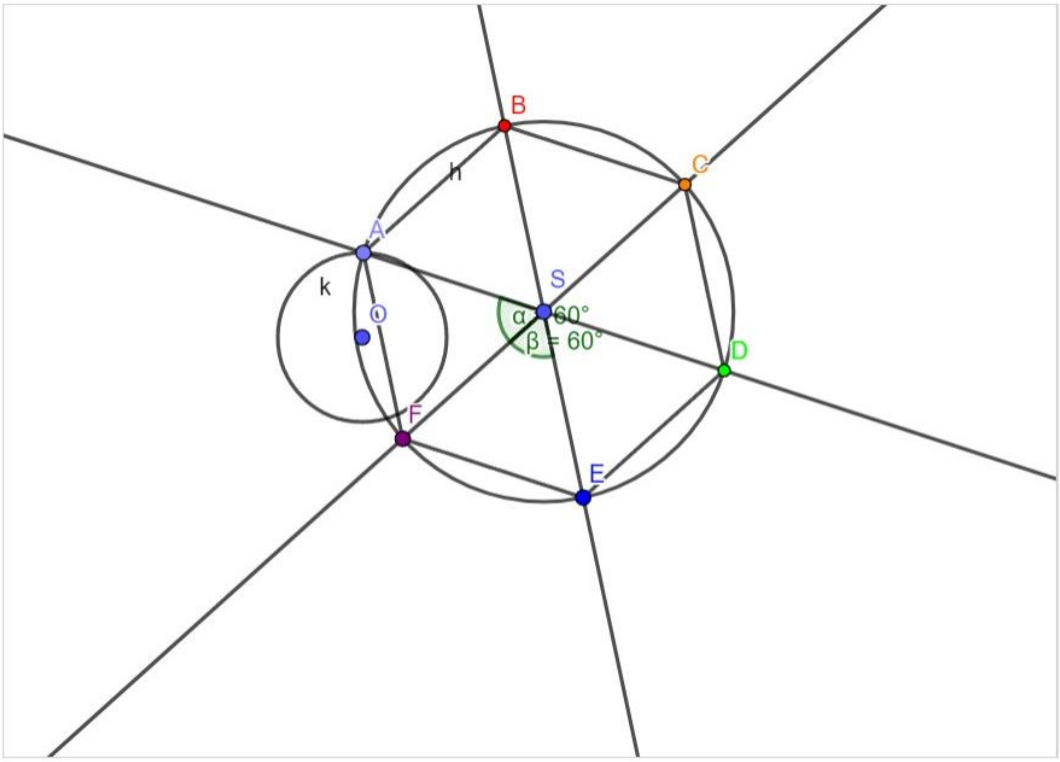
Máte kružnici k se středem O a poloměrem r, bod A, který leží na kružnici a bod S, který leží vně kružnice k. Nejprve sestrojte pravidelný šestiúhelník určený body A a S tak, aby bod A byl jeho jedním vrcholem a bod S byl průsečíkem jeho úhlopříček. Následně nalezněte množiny bodů všech vrcholů tohoto pravidelného šestiúhelníku, když se bude bod A pohybovat po kružnici k.

Použité nástroje: bod, kružnice (střed a poloměr, střed a bod kružnice), přímka, úhel (bod ramene, vrchol a velikost úhlu), průsečík, úsečka/mnohoúhelník

Postup řešení:

Zvolíme si libovolný bod, který pojmenujeme O. Uděláme kružnici k se středem O a poloměrem r. Na kružnici k si zvolíme libovolný bod A a mimo kružnici libovolný bod S. Nyní máme připravené zadání.

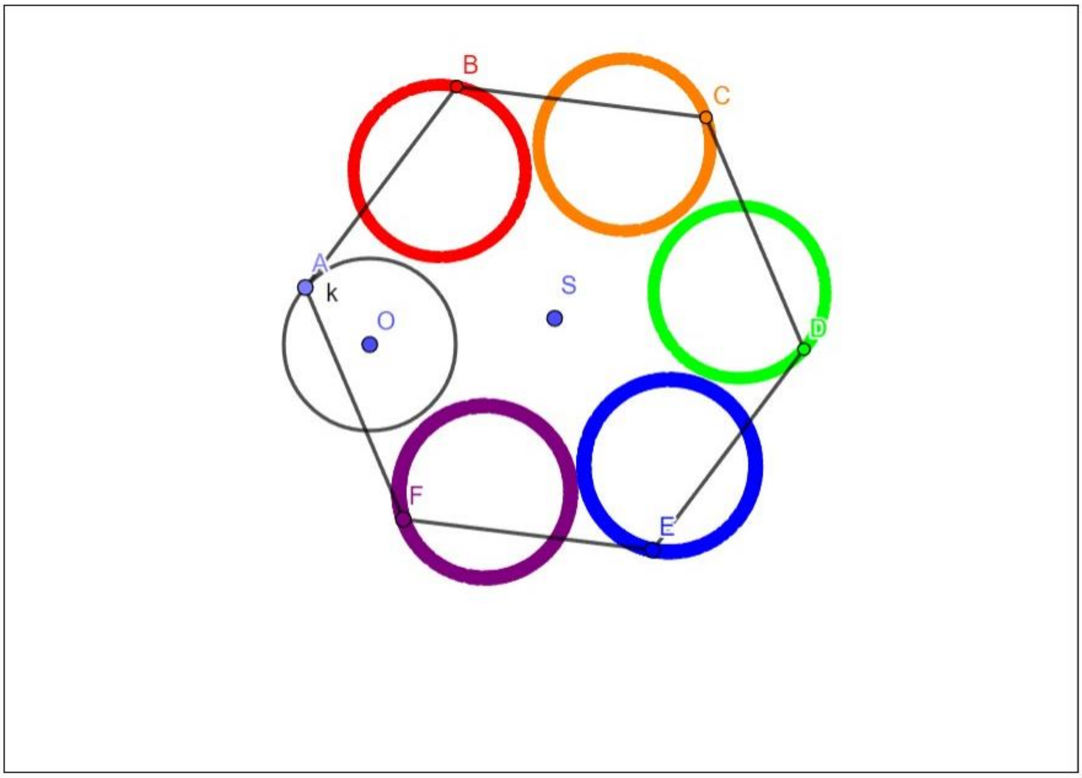
Nejprve si sestrojíme šestiúhelník $ABCDEF$. Narýsujeme kružnici $h(S, r = |AS|)$ a vyznačíme si přímku AS, tím nalezneme jeden z vrcholů D. Protože hledáme vrcholy pravidelného šestiúhelníku, víme, že se skládá z šesti rovnostranných trojúhelníku, které svírají úhel 60°. Nalezneme úhel u vrcholu S s bodem A na rameni o velikosti 60°, tím dostaneme bod F a to zopakujeme s bodem F na rameni a dostaneme bod E. Sestrojíme přímky FS a ES, tím dostaneme body B a C jako průsečíky přímek s kružnicí h.



Obr. 35: Kružnice - úloha 10 - konstrukce šestiúhelníku

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/banqwm7h)

Nyní zapneme u vrcholů B, C, D, E a F zobrazení stopy. Chytneme bod A a pomalu s ním pohybujeme po kružnici k, díky tomu se nám vykreslí jednotlivé množiny ostatních vrcholů, kterými jsou kružnice.

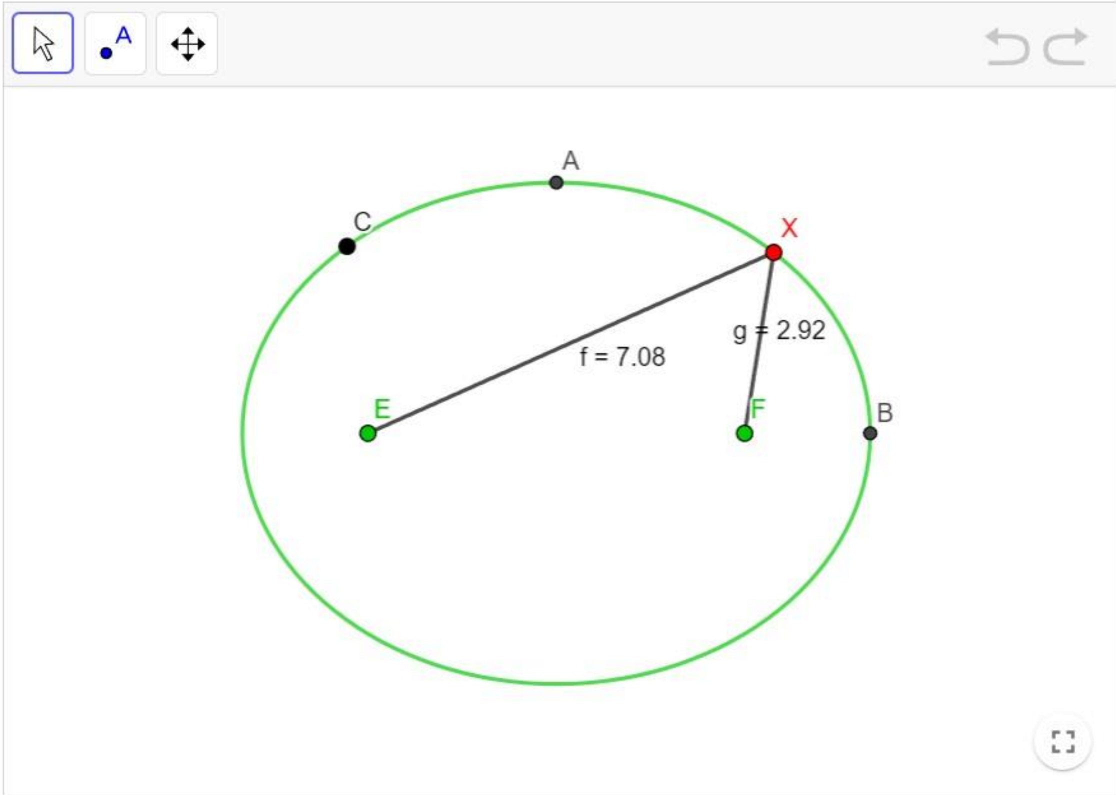


Obr. 36: Kružnice - úloha 10 - řešení

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/czymge83)

Důkaz provedeme pro bod B (pro ostatní vrcholy šestiúhelníku je situace analogická jen bychom uvažovali úhel ASX roven $120°$, $180°$, $240°$ a $300°$). Vzhledem k tomu, že bod A musí ležet stále na kružnici k, bod S je pevný bod a úhel ASB je stále roven $60°$, musí body B ležet na kružnici k_B, která je obrazem kružnice k ve shodném zobrazení, kterým je rotace okolo bodu S o úhel $60°$.

Elipsa
Úloha 1



Obr. 37: Elipsa - úloha 1

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/s75gt7me)

Úkol č. 1
Posuňte červený bod X postupně do bodů A, B, C a v jednotlivých situacích změřte velikosti úseček $f = |EX|$ a $g = |FX|$. Poznamenejte si naměřené hodnoty.

Úkol č. 2
Pomocí nástroje bod si na elipsu vyznačte ještě další dva libovolné body a opět zjistěte jednotlivé vzdálenosti úseček $f = |EX|$ a $g = |FX|$. Poznamenejte si naměřené hodnoty.

Úkol č. 3
Pohrajte si s naměřenými hodnotami. Zkuste je sečíst, odečíst, vynásobit a vydělit. Zarazilo vás něco? Popište, na co jste přišli.

Úkol č. 4
Na základě vámi zjištěných faktů, zkuste svými slovy napsat, jak by mohla být elipsa definována.

Úkol č. 5
Vyberte definici elipsy.

a) Množina všech bodů, které mají konstantní rozdíl vzdáleností od ohnisek E a F.
b) Množina všech bodů, které mají konstantní součet vzdáleností od ohnisek E a F.
c) Množina všech bodů, které mají konstantní vzdálenost od středu S.
d) Množina všech bodů, které mají konstantní vzdálenost od bodu F a přímky d.

Úloha 2

Zjistěte, zda rovnice $9x^2 + 16y^2 + 36x - 32y - 92 = 0$ je rovnicí elipsy. Je-li tomu tak, určete její střed, ohniska a poloosy (Janeček, 1994).

Postup řešení:

Úlohu vyřešíme výpočtem pomocí analytické geometrie.

$9x^2 + 16y^2 + 36x - 32y - 92 = 0$

$9(x^2 + 4x) + 16(y^2 - 2y) = 92$

Nyní doplníme na úplné čtverce.

$9(x^2 + 4x + 4) + 16(y^2 - 2y + 1) = 92 + 36 + 16$

$9(x + 2)^2 + 16(y - 1)^2 = 144$

$\frac{9(x+2)^2}{144} + \frac{16(y-1)^2}{144} = 1$

$\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

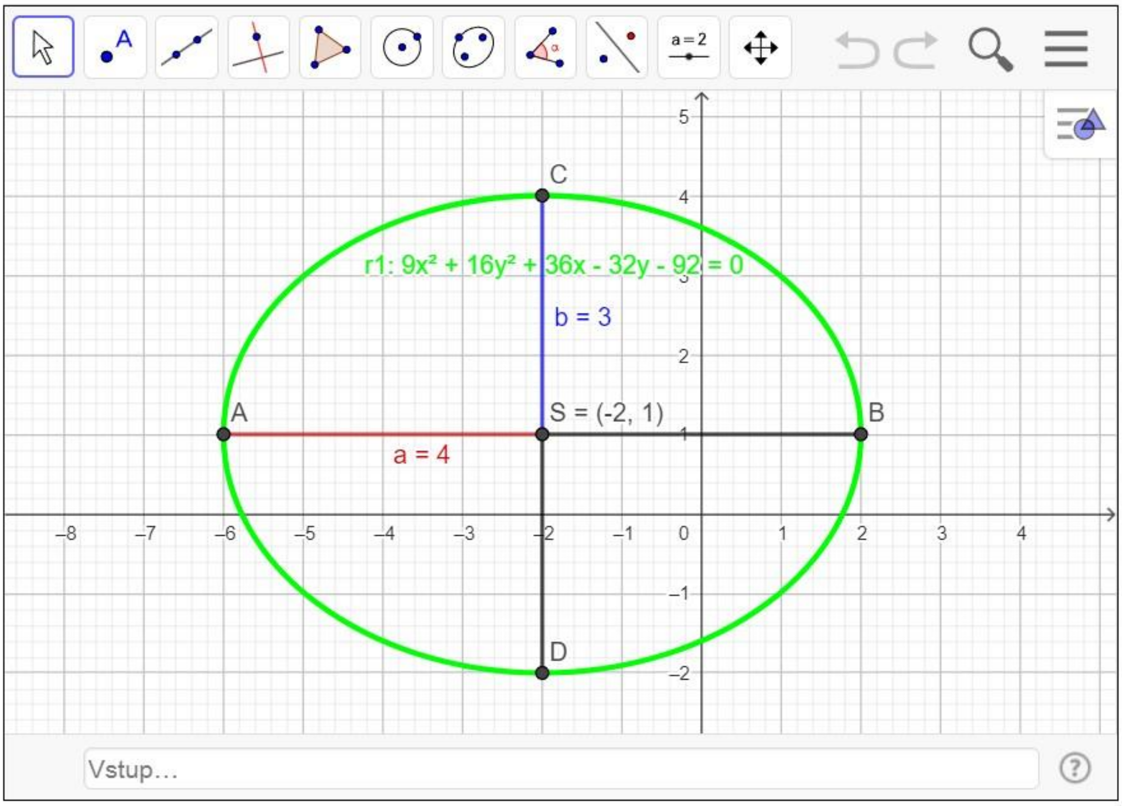
Rovnice je rovnicí elipsy se středem v bodě $S[-2,1]$ a poloosami $a = 4, b = 3$. Souřadnice ohnisek $E[-2 - e, 1], F[-2 + e, 1]$ zjistíme pomocí excentricity, kterou vypočítáme pomocí poloos, protože platí vztah $e = \sqrt{a^2 - b^2}$.

$e = \sqrt{16 - 9}$

$e = \sqrt{7}$

Ohniska budou tedy mít souřadnice $E[-2 - \sqrt{7}, 1]$ a $F[-2 + \sqrt{7}, 1]$.

Správnost řešení si ověříme pomocí programu GeoGebra. Do vstupního pole opíšeme zadanou rovnici, tím se nám opravdu vykreslí elipsa. Pomocí nástroje střed nalezneme střed kuželosečky, který odpovídá bodu $S[-2,1]$. Osy elipsy nalezneme pomocí nástroje rovnoběžná přímka. Osy musí procházet středem elipsy a v tomto příkladu jsou rovnoběžné s osou x a osou y. Průsečíky os a elipsy jsou vrcholy. Vzdálenost bodů $|AS| = |BS| = 2a = 8$, tedy velikost hlavní poloosy je $a = 4$ a vzdálenost bodů $|CS| = |DS| = 2b = 6$, tedy velikost vedlejší poloosy je $b = 3$.



Obr. 38: Elipsa - úloha 2

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/zcdk3kgy)

Úloha 3

Napište rovnici elipsy, jejíž osy splývají s osami soustavy souřadnic, a která prochází body $K[2\sqrt{3}, \sqrt{6}]$, $L[6,0]$ (Bušek, 1996).

Postup řešení:

Pokud osy elipsy splývají s osami soustavy souřadnic, znamená to, že středem elipsy je počátek soustavy souřadnic, tedy bod $S[0,0]$. Rovnice elipsy bude mít tvar $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Nyní do rovnice dosadíme body elipsy K, L a dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

$$\frac{(2\sqrt{3})^2}{a^2} + \frac{(\sqrt{6})^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{6^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} = 1$$

Z druhé rovnice si můžeme rovnou vyjádřit $a^2 = 6^2$. Dosadíme a^2 do první rovnice a vyjádříme b^2.

$$\frac{(2\sqrt{3})^2}{6^2} + \frac{(\sqrt{6})^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{12}{36} + \frac{6}{b^2} = 1$$

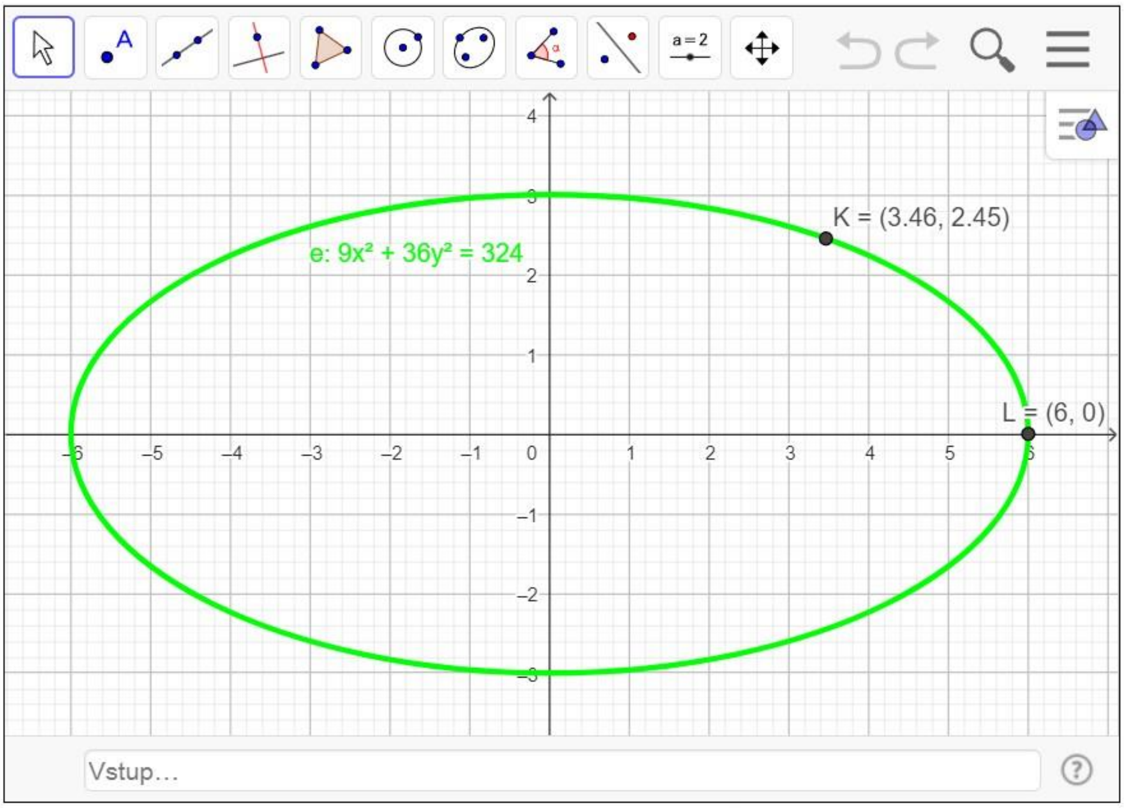
$$\frac{6}{b^2} = 1 - \frac{1}{3}$$

$$6 = \frac{2}{3}b^2$$

$$\frac{18}{2} = b^2 \Longrightarrow b = \pm 3\,.$$

Číslo b je velikost vedlejší poloosy a tedy nesmí nabývat záporných hodnot, z tohoto důvodu $b = 3$ a hledaná rovnice elipsy má tvar $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Ověření provedeme pomocí programu GeoGebra. Nejprve si vyznačíme body $K[2\sqrt{3}, \sqrt{6}]$ a $L[6,0]$. Do vstupního pole napíšeme námi vypočítanou rovnici elipsy, a pokud protne oba body, řešili jsme úlohu správně.



Obr. 39: Elipsa - úloha 3

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/cg7tbrgk)

Úloha 4

Napište osovou rovnici elipsy, která má excentricitu $e = 3$ a prochází bodem $[2, \sqrt{7}]$. Hlavní osa leží na ose x a střed je v počátku souřadné soustavy.

Postup řešení:

Rovnice elipsy bude mít tvar $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ a platí, že $a^2 - b^2 = e^2$, tedy $a^2 = 9 + b^2$. Do rovnice elipsy můžeme dosadit souřadnice bodu $[2, \sqrt{7}]$ a za a^2 můžeme dosadit výraz $9 + b^2$.

$\frac{2^2}{9+b^2} + \frac{\sqrt{7}^2}{b^2} = 1$

$4b^2 + 7(9 + b^2) = (9 + b^2)b^2$

$4b^2 + 63 + 7b^2 = 9b^2 + b^4$

$b^4 - 2b^2 - 63 = 0$

$D = 4 - 4 \cdot (-63) = 4 + 252 = 256 = 16^2$

${b_1}^2 = \frac{2+16}{2} = 9,$

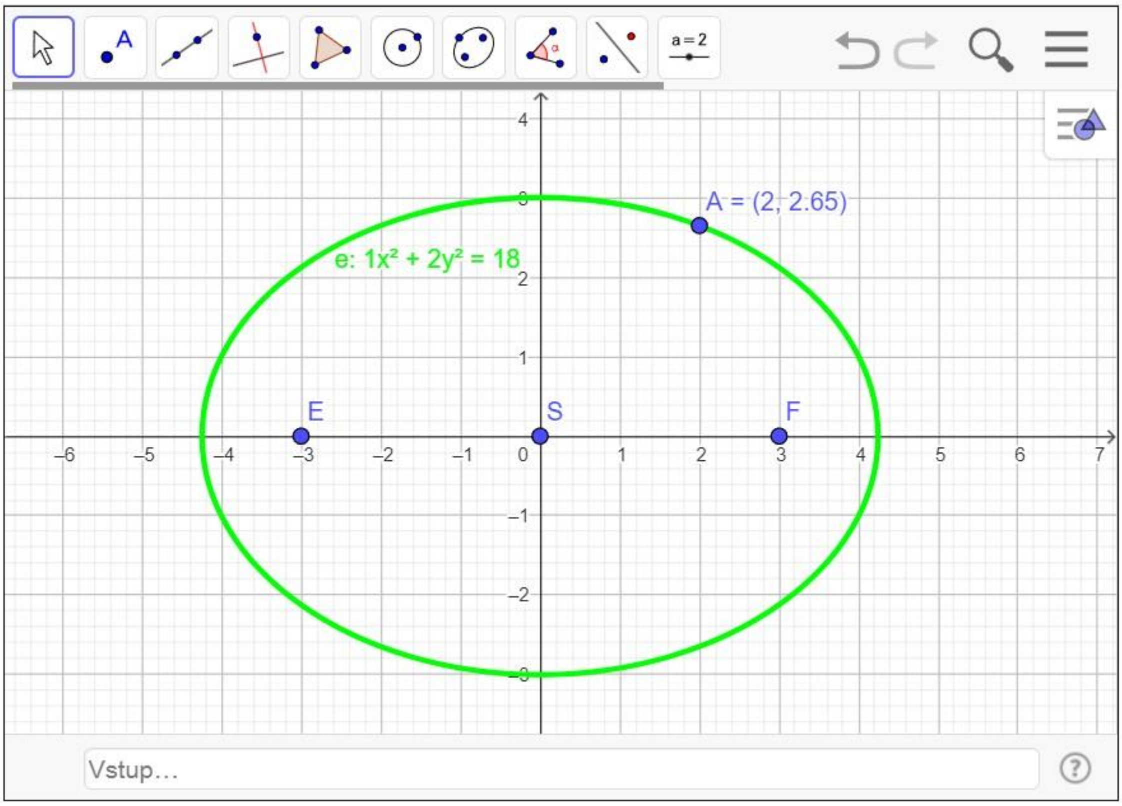
${b_2}^2 = \frac{2-16}{2} = -7$, což není možné,

tedy $b_1 = \pm\sqrt{9} = \pm 3$, ale b musí být větší než 1, tedy $b = 3$.

Dopočítáme si a, kde $a = \pm\sqrt{9 + 9} = \pm\sqrt{18} = \pm 3\sqrt{2}$, ale a musí být větší než 1, tedy $a = 3\sqrt{2}$.

Hledaná rovnice elipsy musí mít tvar $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Správnost řešení si ověříme v programu GeoGebra. Nalezneme střed elipsy $S[0,0]$ a ohniska elipsy musejí mít souřadnice $E[-3,0]$ a $F[3,0]$ vzhledem k tomu, že excentricita má velikost $e = 3$. Vyznačíme si zadaný bod elipsy $[2, \sqrt{7}]$ a pomocí nástroje elipsa sestrojíme elipsu a porovnáme její a námi vypočítanou rovnici.



Obr. 40: Elipsa - úloha 4

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/txsxtgax)

Úloha 5

Určete vzájemnou polohu daných bodů $K[2,-5]$, $L[9,-5]$, $M[2,1]$, $O[0,0]$ a elipsy $\frac{(x-2)^2}{49}+\frac{(y+5)^2}{27}=1$ (Kalová, 2016).

Postup řešení:

Daný bod vždy dosadíme do levé strany rovnice elipsy, a pokud bude výsledek menší než 1, leží bod uvnitř elipsy, pokud bude roven 1, leží bod na elipse a pokud bude výsledek větší než 1, pak je bod vně elipsy.

$K[2,-5]$: $\frac{(2-2)^2}{49}+\frac{(-5+5)^2}{27}=0+0=0$

$K[2,-5]$: $0<1$ proto bod $K[2,-5]$ leží uvnitř elipsy

$L[9,-5]$: $\frac{(9-2)^2}{49}+\frac{(-5+5)^2}{27}=1+0=1$

$L[9,-5]$: $1=1$ proto bod $L[9,-5]$ leží na elipse

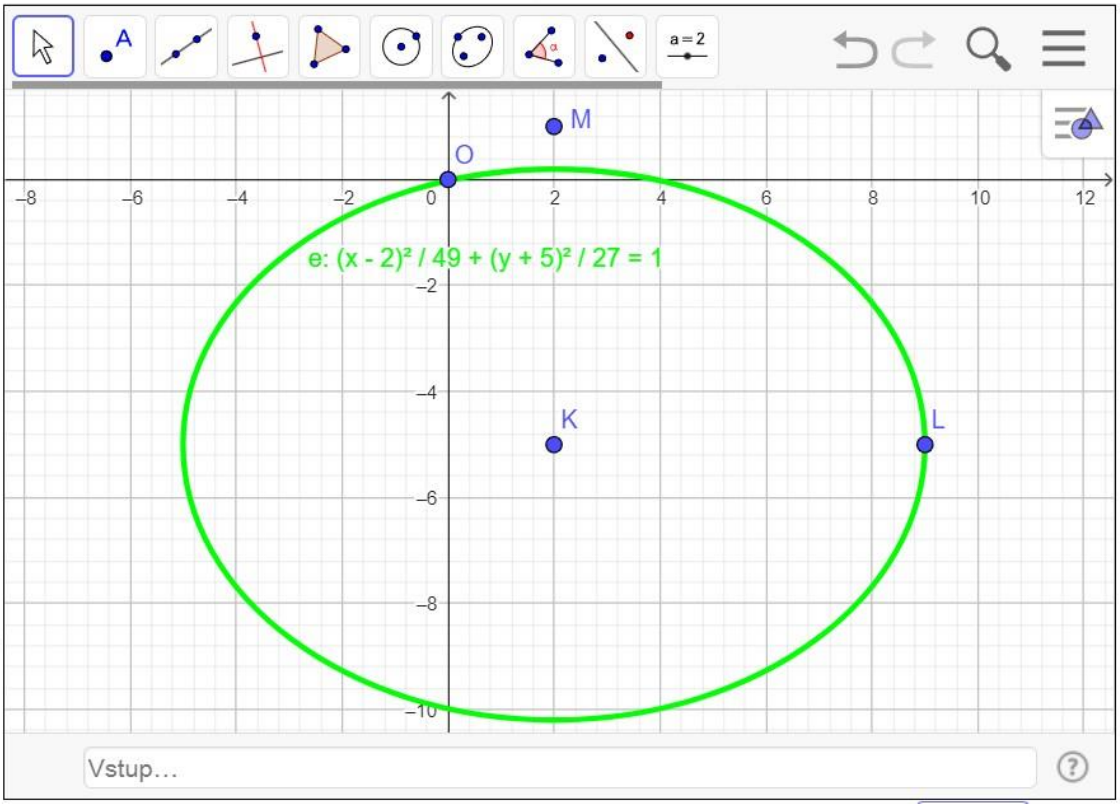
$M[2,1]$: $\frac{(2-2)^2}{49}+\frac{(1+5)^2}{27}=0+\frac{36}{27}=\frac{4}{3}$

$M[2,1]$: $\frac{4}{3}>1$ proto bod $M[2,1]$ leží vně elipsy

$O[0,0]: \frac{(0-2)^2}{49} + \frac{(0+5)^2}{27} = \frac{4}{49} + \frac{25}{27} = \frac{108+1225}{1323} = \frac{1333}{1323}$

$O[0,0]: \frac{1333}{1323} > 1$ proto bod $O[0,0]$ leží vně elipsy

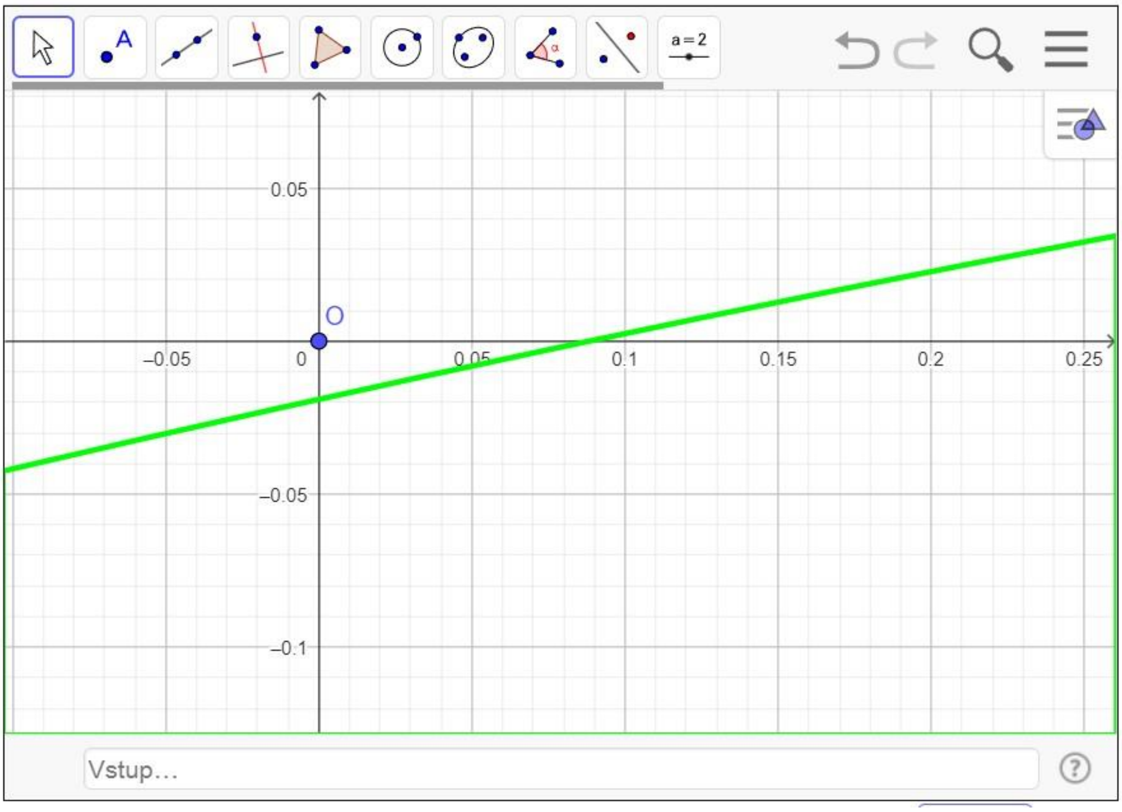
Správnost řešení si ověříme v programu GeoGebra. Do vstupního pole si zadáme rovnici elipsy, vyznačíme si zadané body a uvidíme vzájemnou polohu bodů a elipsy.



Obr. 41: Elipsa - úloha 5

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/wcyrhfmf)

V tuhle chvíli to vypadá, že bod $O[0,0]$ je bodem elipsy, ale pokud si applet přiblížíme, zjistíme, že jsme počítali správně a bod $O[0,0]$ je vnějším bodem elipsy.



Obr. 42: Elipsa - úloha 5 - bod O

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/wcyrhfmf)

Úloha 6

Je dána elipsa s rovnicí $\frac{(x-5)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{25}=1$. Určete rovnice tečen, které prochází bodem $A[5,8]$ a rovnice tečen, které prochází bodem $B[9,8]$ k zadané elipse.

Postup řešení:

Nejprve zjistíme, zda bod $A[5,8]$ je vnějším bodem, vnitřním bodem nebo bodem na elipse.

$\frac{(5-5)^2}{16}+\frac{(8-3)^2}{25}=1$

$0+\frac{25}{25}=1$

Tedy bod $A[5,8]$ je bodem elipsy a tudíž je i bodem dotyku. Tečna bude mít tvar:

$t_A: \frac{(x-5)(5-5)}{16}+\frac{(y-3)(8-3)}{25}=1$

$t_A: \frac{(y-3)}{5}=1$

$t_A: y=8$

Dále zjistíme, zda bod $B[9,8]$ je vnějším bodem, vnitřním bodem nebo bodem na elipse.

$L = \frac{(9-5)^2}{16} + \frac{(8-3)^2}{25} = 1 + 1 = 2$

$P = 1$

$L > P$ tedy bod $B[9,8]$ je vnějším bodem elipsy.

Nyní dosadíme bod B[9,8] do rovnice tečny.

$\frac{(9-5)(x_T-5)}{16} + \frac{(8-3)(y_T-3)}{25} = 1$

$\frac{(x_T-5)}{4} + \frac{(y_T-3)}{5} = 1$

$5x_T - 25 + 4y_T - 12 = 20$

$5x_T = 57 - 4y_T$

$x_T = \frac{57-4y_T}{5}$.

Protože bod dotyku náleží i elipse, můžeme dosadit do její rovnice:

$\frac{\left(\frac{57-4y_T}{5}-5\right)^2}{16} + \frac{(y_T-3)^2}{25} = 1$

$25\left(\frac{32}{5} - \frac{4}{5}y_T\right)^2 + 16(y_T - 3)^2 = 400$

$25\left(\frac{1024}{25} - \frac{256}{25}y_T + \frac{16}{25}{y_T}^2\right) + 16({y_T}^2 - 6y_T + 9) = 400$

$1024 - 256y_T + 16{y_T}^2 + 16{y_T}^2 - 96y_T + 144 - 400 = 0$

$32{y_T}^2 - 352y_T + 768 = 0$

${y_T}^2 - 11y_T + 24 = 0$

$(y_T - 8)(y_T - 3) = 0$

$y_{T_1} = 8$ a $y_{T_2} = 3$.

Dopočítáme si x-ové souřadnice bodů dotyku.

$x_{T_1} = \frac{57-32}{5} = 5$ a $x_{T_2} = \frac{57-12}{5} = 9$.

Body dotyku mají souřadnice $T_1[5,8]$ a $T_2[9,3]$. Bod $T_1[5,8]$ odpovídá bodu $A[5,8]$, tedy tečna má rovnici $t_A: y = 8$. Rovnici druhé tečny musíme vypočítat následovně

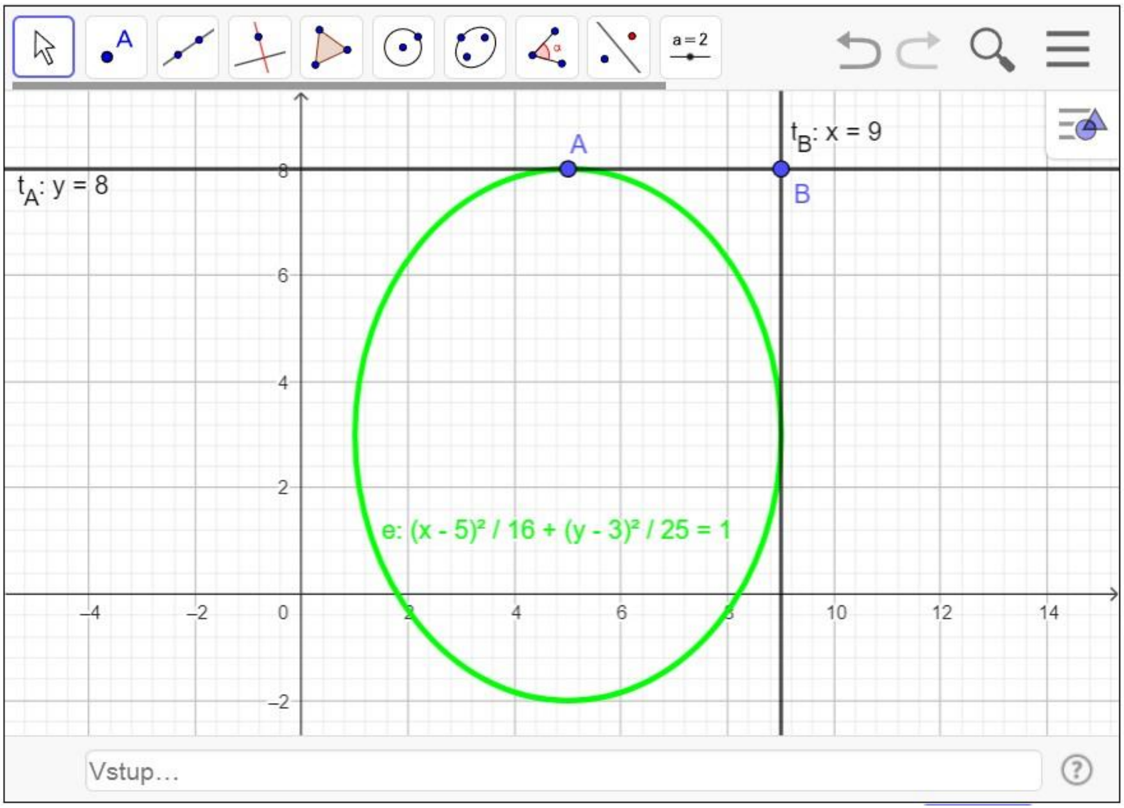
$t_B: \frac{(x-5)(9-5)}{16} + \frac{(y-3)(3-3)}{25} = 1$

$t_B: \frac{(x-5)}{4} = 1$

$t_B: x = 9\,.$

Tedy tečny vedené z bodu $B[9,8]$ mají rovnice $t_A: y = 8$, $t_B: x = 9$.

Správnost řešení si ověříme pomocí programu GeoGebra. Do vstupního pole zadáme rovnici elipsy $\frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$, vyznačíme si body $A[5,8]$ a $B[9,8]$ a pomocí nástroje tečna vykreslíme tečny procházející body. U tečen si zobrazíme jejich popis, tedy jejich rovnice, a pokud se rovnají námi spočítaným rovnicím, řešili jsme úlohu správně.



Obr. 43: Elipsa - úloha 6

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/b6g5a4vu)

Úloha 7

Elipsa je dána středovou rovnicí $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$. Napište rovnici tečen této elipsy, které jsou rovnoběžné s přímkou $y = \frac{2}{3}x - 2$ (Kalová, 2016).

Postup řešení:

Přímka, která bude rovnoběžná se zadanou přímkou, musí mít rovnici $y = \frac{2}{3}x + k$. Protože hledáme tečnu elipsy, můžeme najít průsečík, respektive bod dotyku tak, že dosadíme za y do rovnice elipsy výraz $\frac{2}{3}x + k$ a upravíme.

$$\frac{x^2}{16} + \frac{\left(\frac{2}{3}x+k\right)^2}{4} = 1$$

$$x^2 + 4\left(\frac{2}{3}x + k\right)^2 = 16$$

$$x^2 + 4\left(\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{3}xk + k^2\right) = 16$$

$$x^2 + \frac{16}{9}x^2 + \frac{16}{3}xk + 4k^2 = 16$$

$$\frac{25}{9}x^2 + \frac{16}{3}xk + 4k^2 + 16 = 0$$

Hledáme hodnotu parametru k, pro kterou má kvadratická rovnice jedno řešení, tedy diskriminant musí být roven nule:

$$D = 0 \iff \left(\frac{16}{3}k\right)^2 - 4 \cdot \frac{25}{9} \cdot (4k^2 - 16) = 0$$

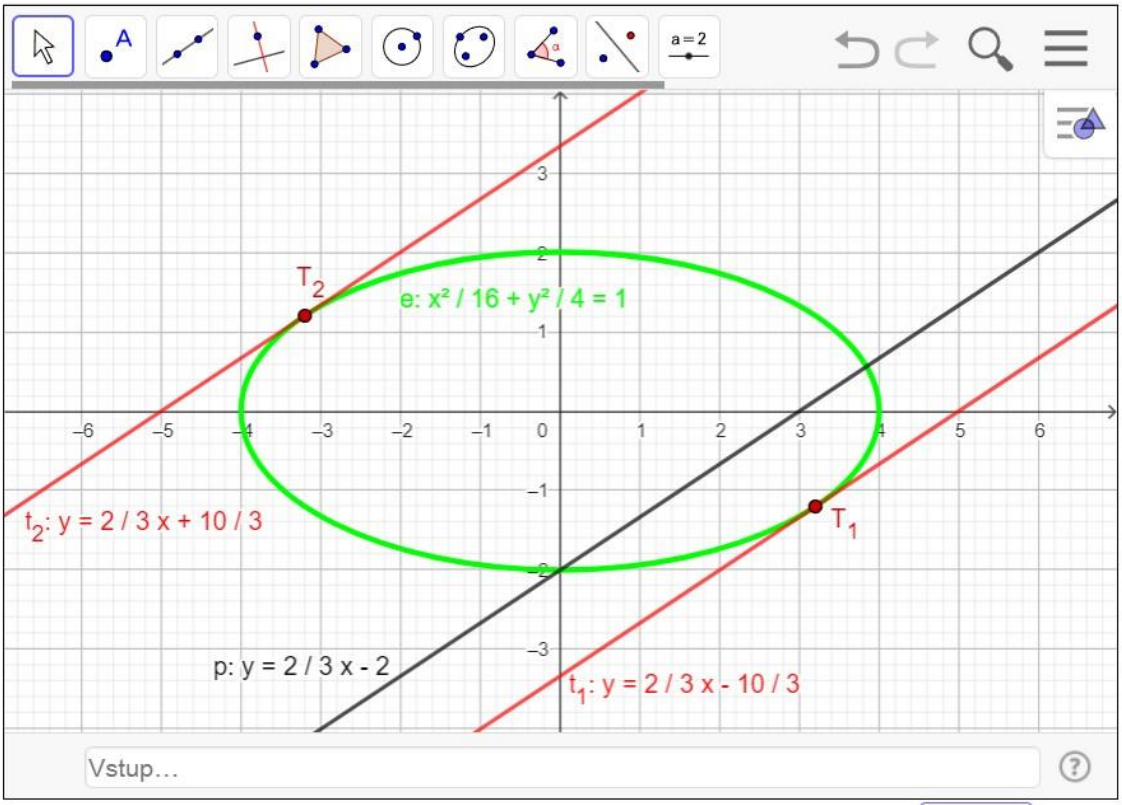
$$\frac{256}{9}k^2 - \frac{400}{9}k^2 + \frac{1600}{9} = 0$$

$$-144k^2 = -1600$$

$$k^2 = \frac{1600}{144} \Longrightarrow k = \pm\sqrt{\frac{1600}{144}} = \pm\frac{40}{12} = \pm\frac{10}{3}.$$

Hledané tečny mají rovnice $t_1: y = \frac{2}{3}x - \frac{10}{3}$ a $t_2: y = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$.

Správnost řešení si ověříme v programu GeoGebra. Do vstupního pole zadáme rovnici elipsy, přímky a tečen. Pokud mají tečny s elipsou pouze jeden průsečík, jsou to opravdu tečny zadané elipsy.



Obr. 44: Elipsa - úloha 7

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/qbdrmxvm)

Úloha 8

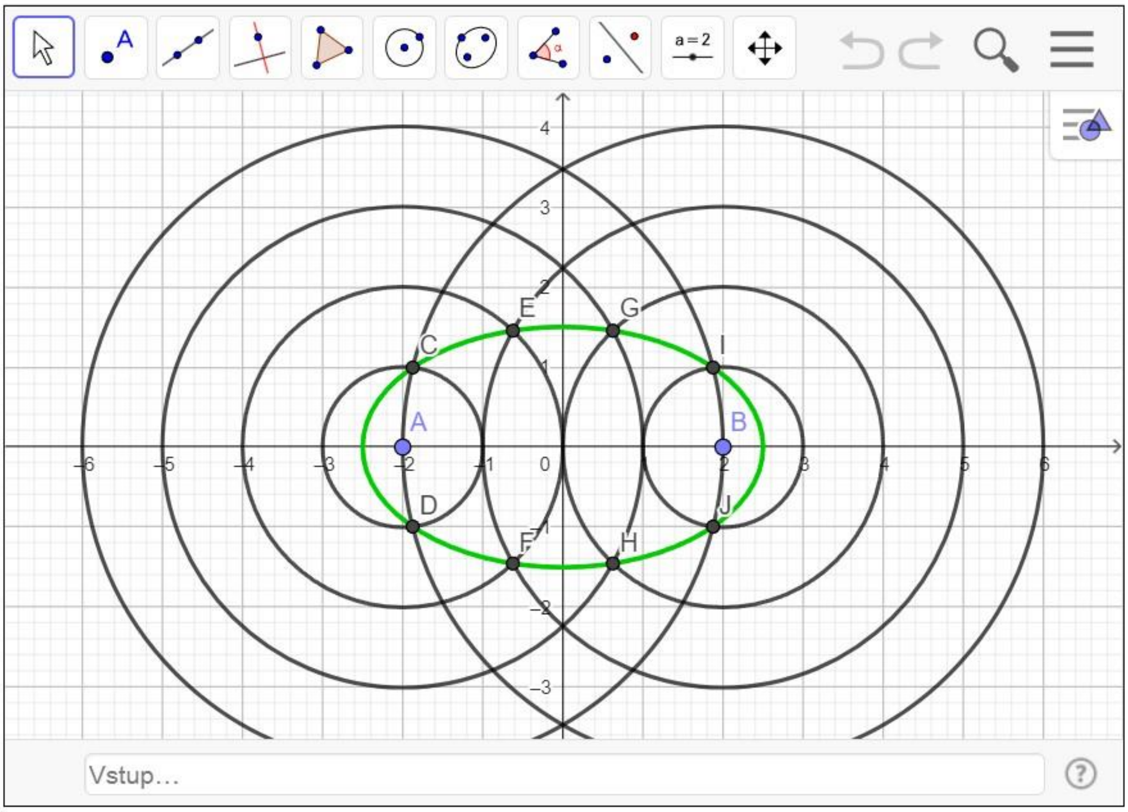
Nalezněte množinu všech bodů $X[x,y]$, které splňují následující podmínku, pro body $A[-2,0], B[2,0]$ platí: $|AX| + |BX| = 5$.

Použité nástroje: bod, kružnice (střed a poloměr), průsečík, kuželosečka dána pěti body

Postup řešení:

Nejprve sestrojíme zadané body $A[-2{,}0]$ a $B[2{,}0]$. Postupně sestrojíme kružnice, které budou mít součet poloměrů roven 5, tedy $r_A + r_B = 5$.

Např.: $k_1(A, r_1 = 1)$ a $k_2(B, r_2 = 4)$, $k_3(A, r_3 = 2)$ a $k_4(B, r_4 = 3)$, $k_5(A, r_5 = 3)$ a $k_6(B, r_6 = 2)$. Až budeme mít alespoň pět průsečíků, použijeme nástroj kuželosečka dána pěti body a vykreslíme hledanou množinu bodů. V tomto případě se jedná o elipsu.



Obr. 45: Elipsa - úloha 8

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/mkvex8uj)

Důkaz provedeme pomocí analytické geometrie.

$A[-2, 0], B[2, 0]$ a $|AX| + |BX| = 5$

$\sqrt{[(x + 2)^2 + y^2]} + \sqrt{[(x - 2)^2 + y^2]} = 5$

$\sqrt{[(x + 2)^2 + y^2]} = 5 - \sqrt{[(x - 2)^2 + y^2]}$

$(x + 2)^2 + y^2 = 25 - 10\sqrt{[(x - 2)^2 + y^2]} + (x - 2)^2 + y^2$

$x^2 + 4x + 4 + y^2 = 25 - 10\sqrt{[(x - 2)^2 + y^2]} + x^2 - 4x + 4 + y^2$

$8x - 25 = -10\sqrt{[(x - 2)^2 + y^2]}$

$64x^2 - 400x + 625 = 100[x^2 - 4x + 4 + y^2]$

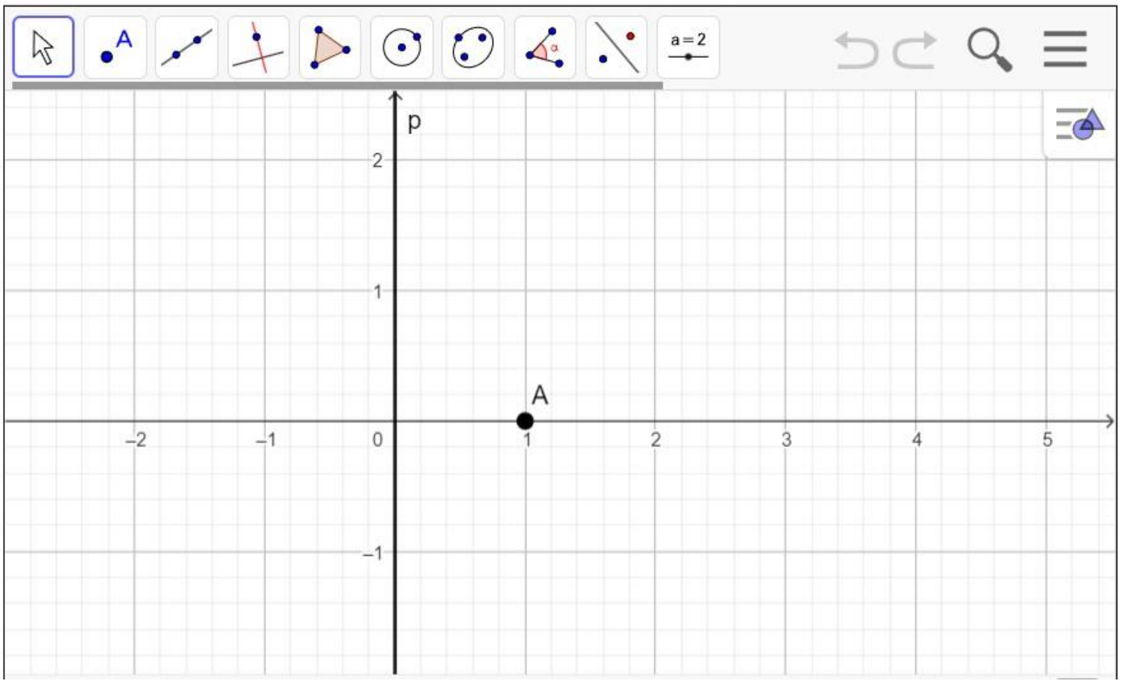
$225 = 36x^2 + 100y^2$

$\frac{36}{225} x^2 + \frac{100}{225} y^2 = 1$

Jedná se tedy o elipsu se středem S[0, 0].

Úloha 9

Je dán bod A a přímka p, která bodem A neprochází. Nalezněte množinu všech bodů, které mají tu vlastnost, že poměr jejich vzdáleností od bodu A a od přímky p je $1: \sqrt{2}$ (Hrubý, 2008).



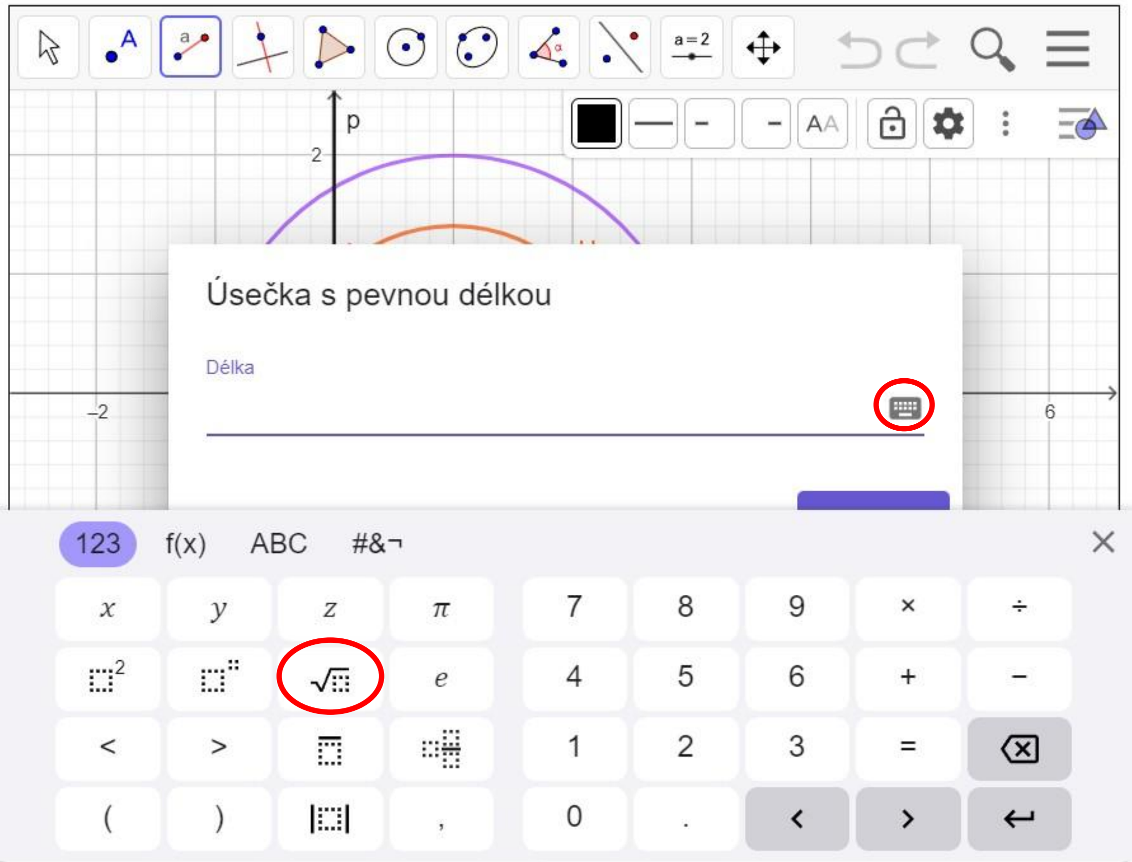
Obr. 46: Elipsa - úloha 9 - zadání

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/cj3c4czv)

Použité nástroje: bod, přímka, úsečka s pevnou délkou, kružnice (střed a poloměr), rovnoběžka, průsečík, kuželosečka určená pěti body

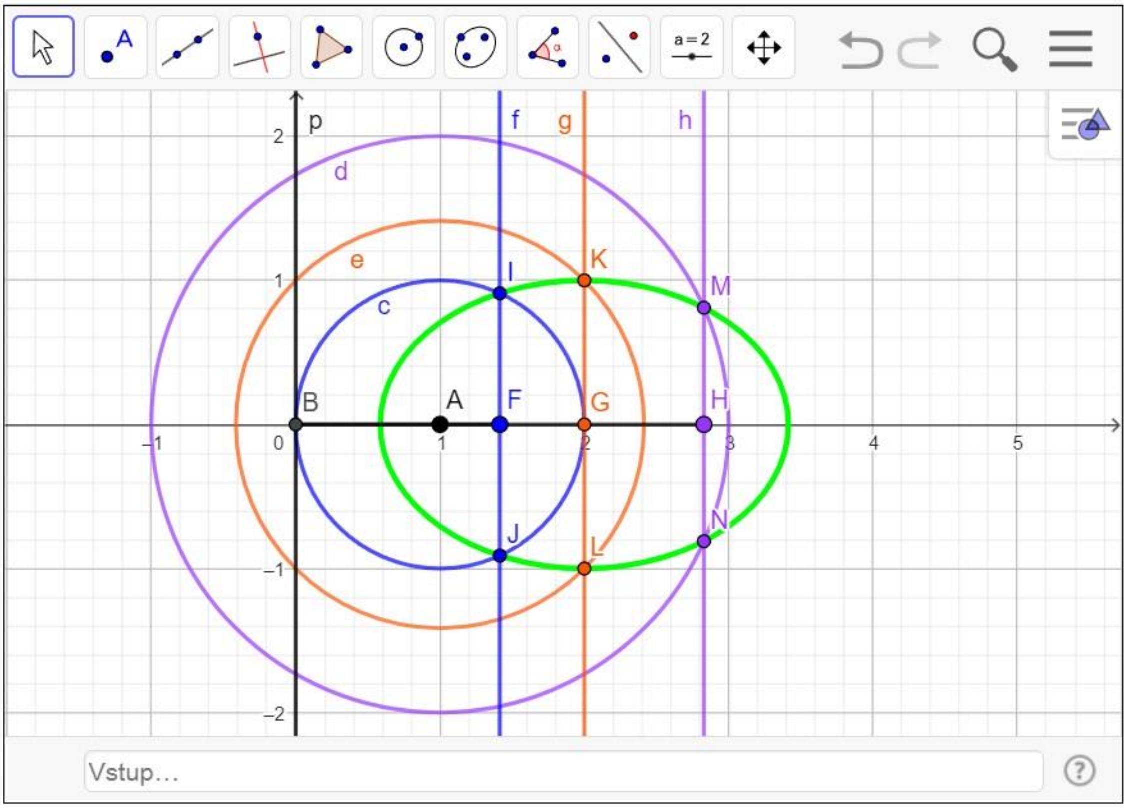
Postup řešení:

Zvolíme si bod $A[1,0]$ a přímku p jako osu y. Abychom nalezli hledanou množinu, budeme postupně sestrojovat průsečíky přímek, které jsou v určité vzdálenosti od zadané přímky p, a kružnic, tedy bodů v určité vzdálenosti od bodu A. Nejprve nalezneme bod $F\left[\sqrt{2}, 0\right]$, který má vzdálenost od přímky p rovnou číslu $\sqrt{2}$, tak, že z bodu $[0,0]$ vedeme úsečku o velikosti $\sqrt{2}$ (pokud použijeme nástroj úsečka s pevnou délkou, objeví se nám okno a vpravo malý obrázek klávesnice. Tam lze bez problémů napsat číslo $\sqrt{2}$).



Obr. 47: Elipsa - úloha 9 - zápis odmocniny

Bodem F vedeme přímku f rovnoběžnou s přímkou p. Dále sestrojíme kružnici c se středem v bodě A a poloměrem $r = 1$. Vyznačíme si průsečíky rovnoběžky f a kružnice c. Průsečíky přímky f a kružnice c splňují zadaný poměr vzdáleností. Ve stejném duchu budeme hledat další průsečíky. Tedy sestrojíme bod $G[2{,}0]$ a povedeme jím přímku g rovnoběžnou s přímkou p. Dále sestrojíme kružnici e se středem v bodě A a poloměrem $r = \sqrt{2}$. Vyznačíme si průsečíky rovnoběžky g a kružnice e. Nalezneme bod $H\left[2\sqrt{2}, 0\right]$, tak že sestrojíme z bodu $[0{,}0]$ úsečku o velikosti $2\sqrt{2}$. Bodem H povedeme přímku h rovnoběžnou s přímkou p. Dále sestrojíme kružnici d se středem v bodě A a poloměrem $r = 2\sqrt{2}$. Vyznačíme si průsečíky rovnoběžky h a kružnice d. Nyní proložíme průsečíky kuželosečkou určenou pěti body a tím získáme hledanou množinu bodů, kterou je elipsa.



Obr. 48: Elipsa - úloha 9 - řešení

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/cj3c4czv)

Důkaz provedeme pomocí analytické geometrie.

Hledáme množinu všech bodů $X[x, y]$, které mají vzdálenost od bodu $A[1,0]$ a od přímky $p: x = 0$ v poměru $\frac{|AX|}{|pX|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Tedy musí platit vztah $\sqrt{2}|AX| = |pX|$.

$$\sqrt{2}|AX| = |pX|$$

Obecně tedy platí vztahy:

$$\sqrt{2}\sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2} = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Dosadíme konkrétní hodnoty:

$$\sqrt{2}\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 0)^2} = \frac{|1x+0y+0|}{\sqrt{1^2+0^2}}$$

$$\sqrt{2}\sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2} = \frac{|x|}{1}$$

Obě strany umocníme na druhou a odstraníme tak odmocninu a výraz postupně upravíme.

$$2(x^2 - 2x + 1 + y^2) = x^2$$

$$x^2 - 4x + 2 + 2y^2 = 0$$

$x^2 - 4x + 2y^2 = -2$

Nyní doplníme na čtverec.

$x^2 - 4x + 4 + 2y^2 = -2 + 4$

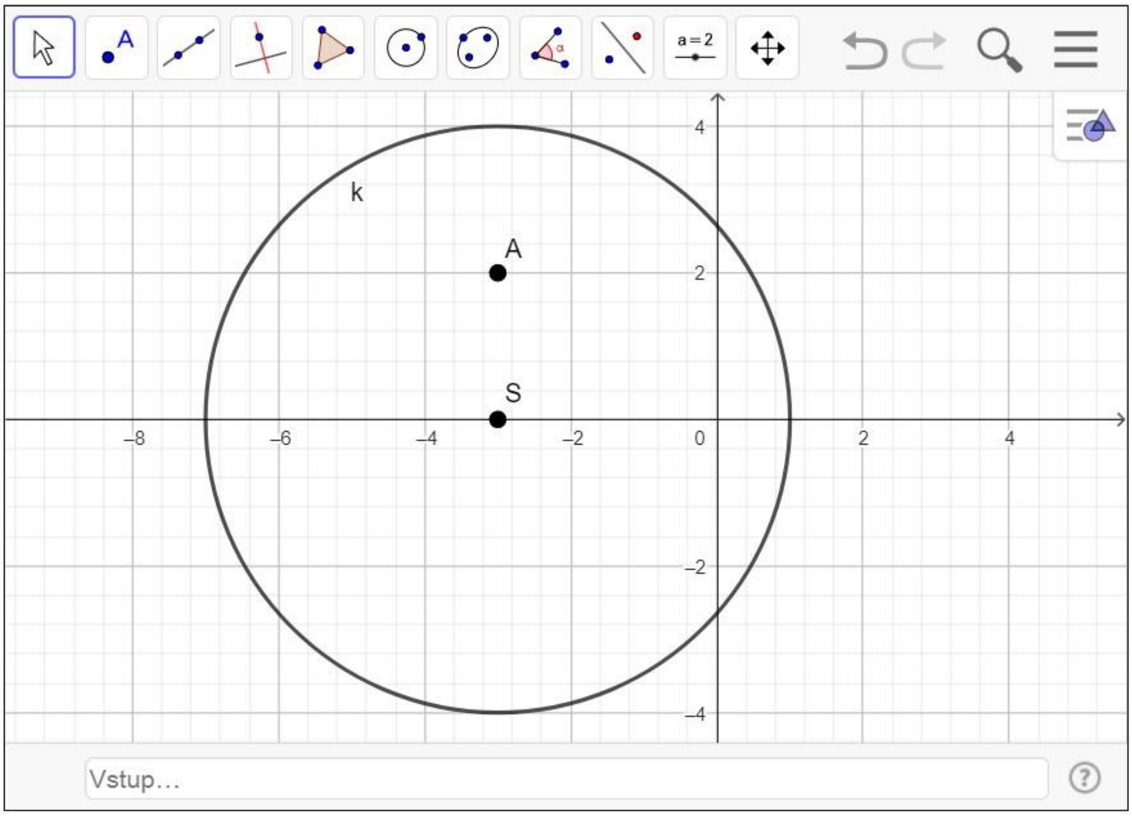
$(x-2)^2 + 2y^2 = 2$

$\frac{(x-2)^2}{2} + y^2 = 1$

Úpravou výrazu jsme dostali rovnici hledané množiny bodů, tedy rovnici elipsy.

Úloha 10

Je dána kružnice k a bod A v její vnitřní oblasti. Vyšetřete množinu středů všech kružnic, které procházejí bodem A a dotýkají se kružnice k (Benda a kol., 1983).



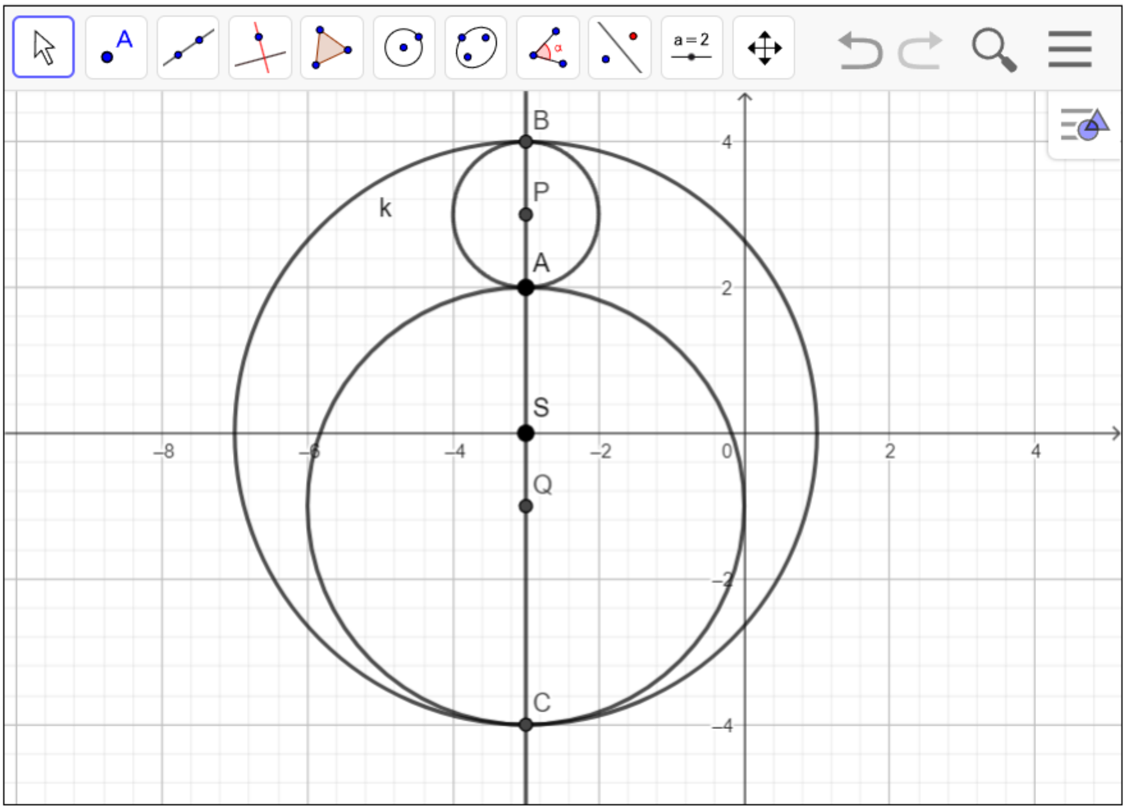
Obr. 49: Elipsa - úloha 10 - zadání

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/s37hrg2u)

Požité nástroje: bod, kružnice (střed a poloměr), přímka, průsečík, střed, kolmá přímka, úsečka

Postup řešení:

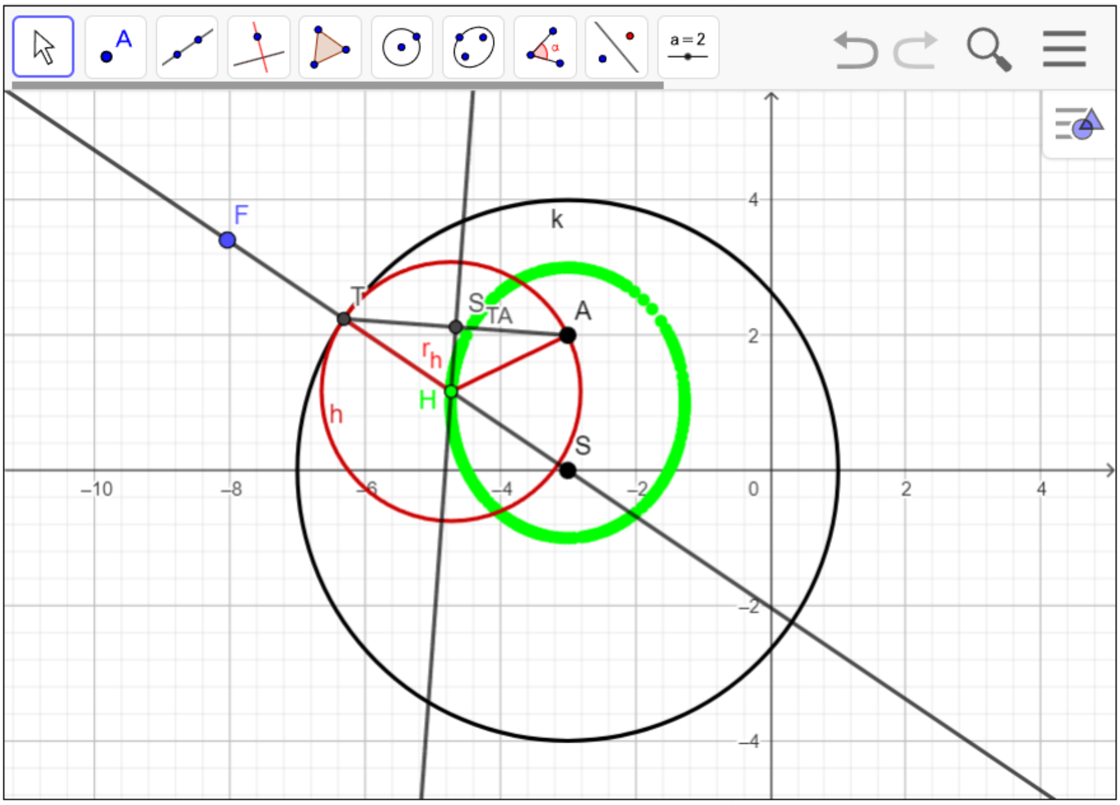
Zvolíme si konkrétní případ zadání, například kružnici $k(S[-3,0], r = 4)$ a bod $A[-3,2]$, který je různý od středu kružnice, jinak by hledanou množinou byla kružnice $l\left(S, r_l = \frac{r}{2} = 2\right)$. Sestrojíme přímku AS a nalezneme její průsečíky B, C s kružnicí k. Určíme střed úsečky AB, AC a označíme je P, Q. Sestrojíme kružnice $d(P, |AP|), e(Q, |AQ|)$, které splňují zadání. Tedy body P, Q náleží hledané množině.



Obr. 50: Elipsa - úloha 10 - část řešení

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/s37hrg2u)

Nyní si sestrojíme libovolný bod F vně kružnice k, kterým vedeme přímku do středu kružnice k. Průsečík sestrojené přímky a kružnice k nazveme T. Sestrojíme úsečku TA a nalezneme její střed, kterým vedeme kolmou přímku k úsečce TA. Tam, kde nám kolmá přímka protne přímku FS, je střed H kružnice, která prochází bodem A a dotýká se kružnice k. U bodu H zapneme zobrazení stopy, a pokud budeme pohybovat bodem F, vykreslí se nám hledaná množina.



Obr. 51: Elipsa - úloha 10 - řešení

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/s37hrg2u)

Dospějeme k hypotéze, že jde o elipsu s ohnisky v bodech S, A a s hlavními vrcholy P, Q. Přičemž velikost úsečky PQ představuje dvojnásobek velikosti hlavní poloosy, tedy $|PQ| = 2a$.

Rovnici elipsy nalezneme výpočtem, protože platí vztah $|AX| + |SX| = 2a$.

Nejprve si spočítáme velikost hlavní poloosy $|PQ| = 2a$. Souřadnice bodů P, Q vyčteme z konstrukce v GeoGebře. Bod P má souřadnice $P[-3,3]$ a bod Q má souřadnice $Q[-3,-1]$.

$2a = |PQ|$

$2a = \sqrt{(-3+3)^2 + (-1-3)^2}$

$2a = \sqrt{0^2 + (-4)^2}$

$2a = \sqrt{16} \Longrightarrow 2a = 4\,.$

Nyní dosadíme do vztahu $|AX| + |SX| = 2a$.

$\sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 4$

$\sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} = 4 - \sqrt{(x+3)^2 + y^2}$

Nyní obě strany umocníme na druhou.

$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 16 - 8\sqrt{(x+3)^2 + y^2} + (x+3)^2 + y^2$

$-4y + 4 - 16 = -8\sqrt{(x+3)^2 + y^2}$

$y + 3 = 2\sqrt{(x+3)^2 + y^2}$

Obě strany opět umocníme na druhou a odstraníme tak odmocninu.

$y^2 + 6y + 9 = 4[(x+3)^2 + y^2]$

$9 = 3y^2 - 6y + 4x^2 + 24x + 36$

Doplníme na úplné čtverce.

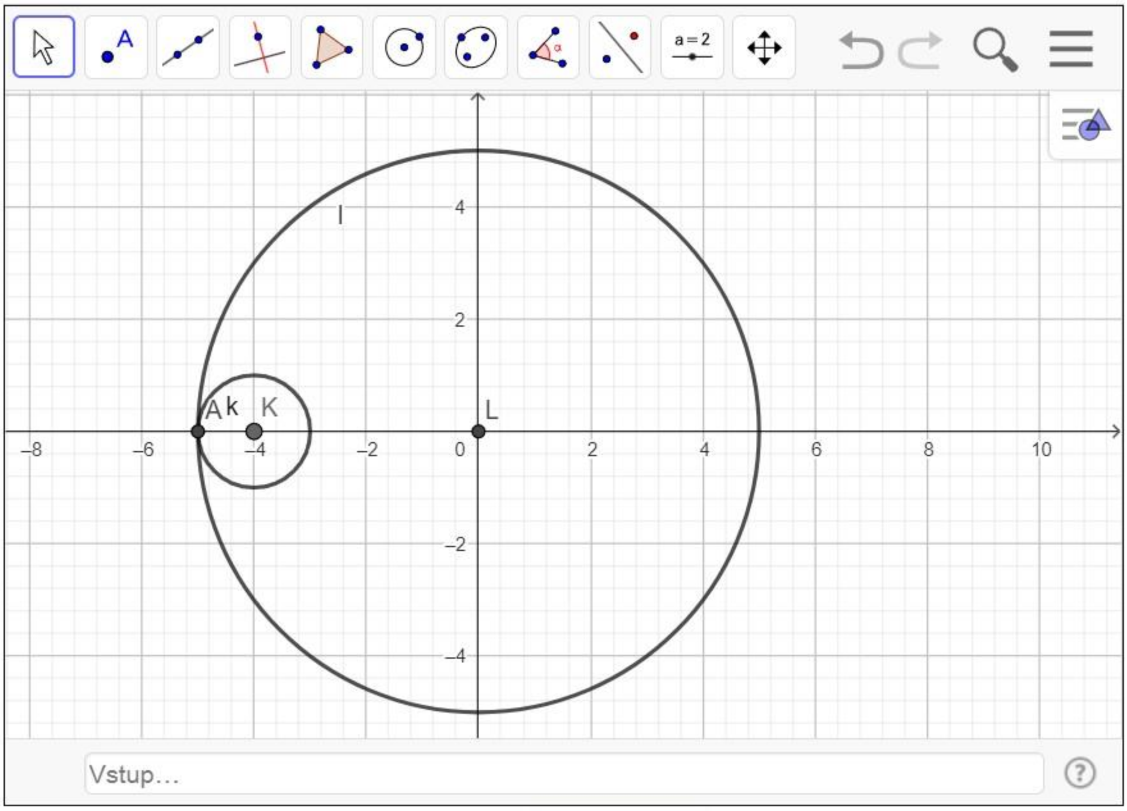
$-27 + 36 + 3 = 3(y-1)^2 + 4(x+3)^2$

$1 = \frac{(y-1)^2}{4} + \frac{(x+3)^2}{3}$

Námi hledaná elipsa bude mít rovnici $\frac{(y-1)^2}{4} + \frac{(x+3)^2}{3} = 1$.

Úloha 11

Kružnice $k(K, r)$ se dotýká zevnitř kružnice $l(L, R)$ v bodě A. Vyšetřete geometrické místo středů X kružnic x, které mají vnější dotyk s kružnicí k a vnitřní dotyk s kružnicí l (Kuřina, Cachová, 2024).

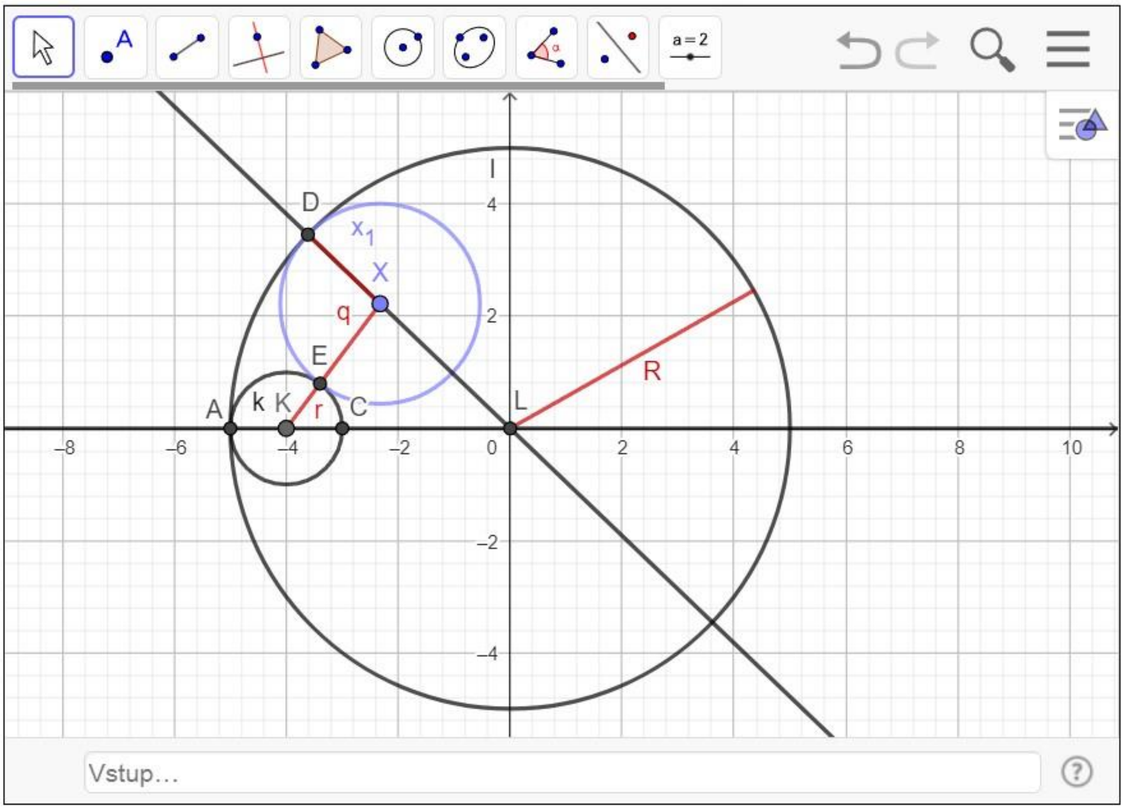


Obr. 52: Elipsa - úloha 11 - zadání

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/m4twrewy)

Požité nástroje: bod, kružnice (střed a poloměr), přímka, úsečka, průsečík, elipsa

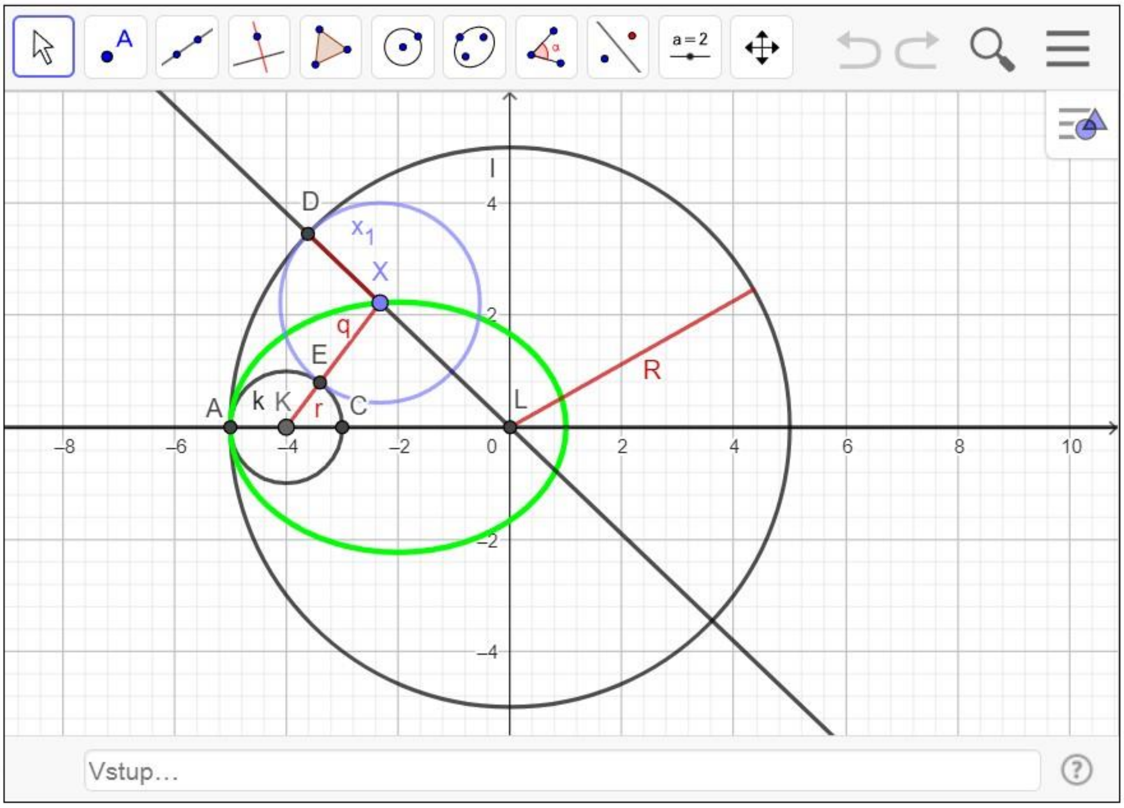
Postup řešení:



Obr. 53: Elipsa - úloha 11 - hypotéza

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/m4twrewy)

Bod X je hledaným geometrickým místem, pak musí podle obrázku platit vztahy $|KX| = r + q$ a $|LX| = R - q$. Když obě rovnice sečteme, dostaneme výraz $|KX| + |LX| = r + R$, což naznačuje, že by výslednou množinou byla elipsa s ohnisky v bodech K a L a hlavní poloosou velikosti $r + R$.



Obr. 54: Elipsa - úloha 11 - řešení

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/m4twrewy)

V našem řešení máme kružnici $k(K[-4{,}0], r = 1)$ a kružnici $l(L[0{,}0], R = 5)$. Nyní dosadíme do výrazu $|KX| + |LX| = r + R$ a upravíme jej.

$$\sqrt{(x+4)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2} = 1 + 5$$

$$\sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 6 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

Obě strany umocníme na druhou.

$$(x+4)^2 + y^2 = 36 - 12\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2$$

$$-8x + 16 - 36 = -12\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$5 - 2x = 3\sqrt{x^2 + y^2}$$

Opět umocníme na druhou a odstraníme tak odmocninu.

$$25 - 20x + 4x^2 = 9(x^2 + y^2)$$

$$25 = 5x^2 + 20x + 9y^2$$

Nyní doplníme na úplné čtverce.

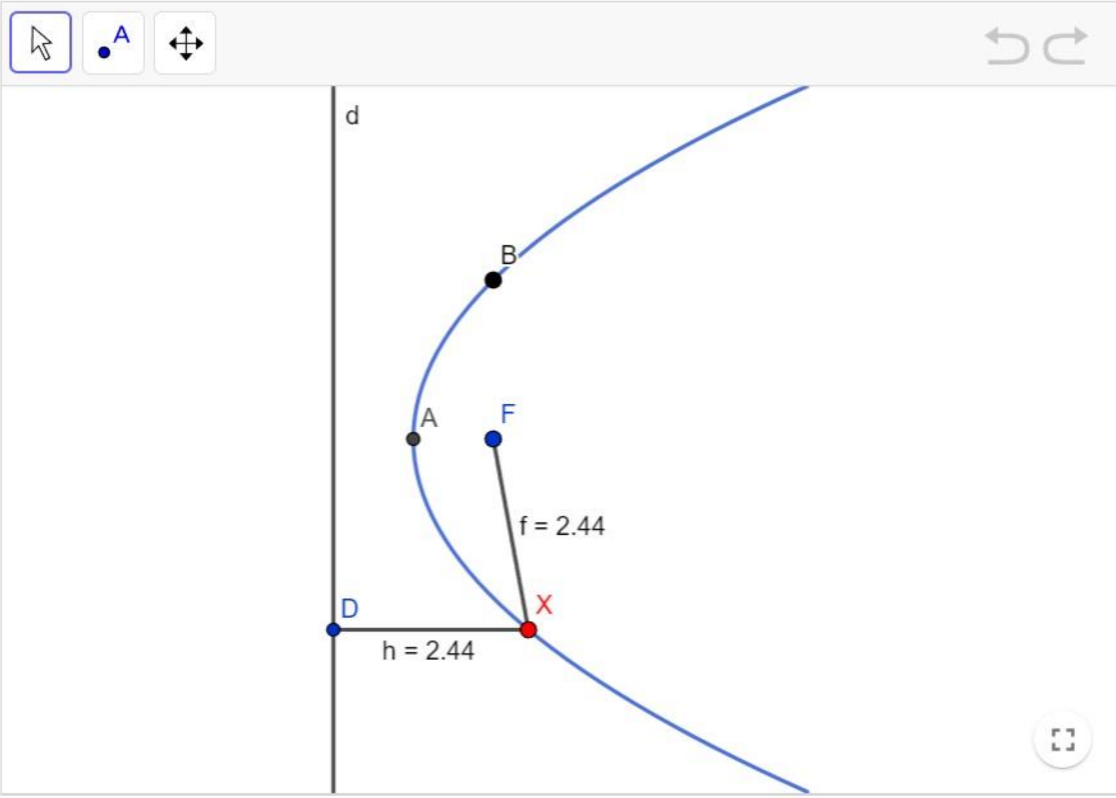
$$20 + 25 = 5(x+2)^2 + 9y^2$$

$$1 = \frac{(x+2)^2}{9} + \frac{y^2}{5}$$

Tímto jsme dostali rovnici hledané množiny, tedy rovnici elipsy ve tvaru $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$.

Parabola

Úloha 1



Obr. 55: Parabola - úloha 1

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/gqm6et5j)

Úkol č. 1
Posuňte červený bod X postupně do bodů A, B a v jednotlivých situacích změřte velikosti úseček $f = |FX|$ a $h = |DX|$. Poznamenejte si naměřené hodnoty.

Úkol č. 2
Pomocí nástroje bod si na parabolu vyznačte ještě další dva libovolné body a opět zjistěte jednotlivé vzdálenosti úseček $f = |FX|$ a $h = |DX|$. Poznamenejte si naměřené hodnoty.

Úkol č. 3
Co můžete říci o naměřených hodnotách? Jak byste tedy definovali parabolu?

Úkol č. 4
Vyberte definici paraboly.

a) Množina všech bodů, které mají konstantní součet vzdáleností od ohnisek E a F.
b) Množina všech bodů, které mají konstantní vzdálenost od středu S.
c) Množina všech bodů, které mají konstantní vzdálenost od ohniska F a řídící přímky d.

d) Množina všech bodů, které mají konstantní rozdíl vzdáleností od ohnisek E a F.

Úloha 2

Napište rovnici paraboly, která má vrchol $V[-2,1]$, prochází bodem $M[0,3]$ a má osu

a) rovnoběžnou s osou x,
b) rovnoběžnou s osou y.

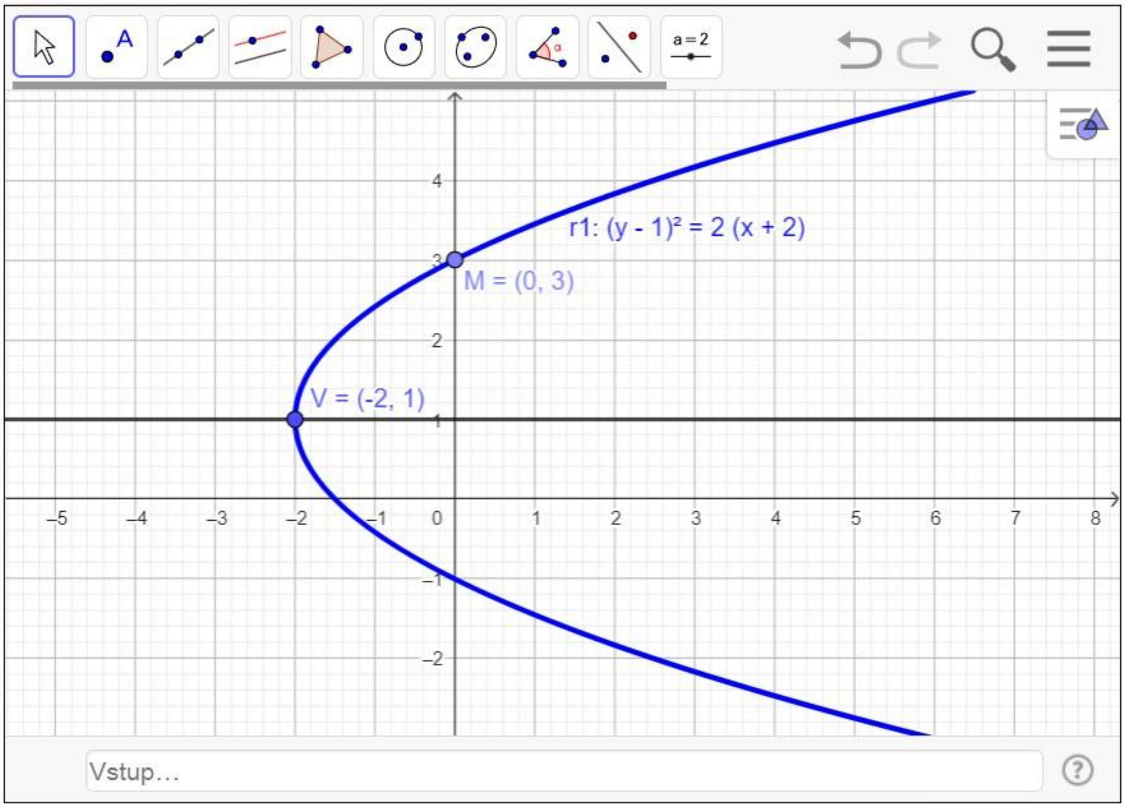
Určete její ohnisko F a rovnici její řídící přímky d (Janeček, 1994).

Postup řešení:

Úlohu vyřešíme výpočtem pomocí analytické geometrie.

a) Parabola, jejíž osa je rovnoběžná s osou x, má středový tvar rovnice $(y-n)^2 = 2p(x-m)$. Do této rovnice dosadíme vrchol $V[-2,1]$ a bod $M[0,3]$ a vypočítáme tak hodnotu parametru p.
$(3-1)^2 = 2p(0+2)$
$4 = 4p$
$p = 1$
Tedy parabola má v tomto případě rovnici $(y-1)^2 = 2(x+2)$. Ohnisko paraboly má souřadnice $F\left[-2+\frac{p}{2},1\right]$, tedy $F[-\frac{3}{2},1]$ a řídící přímka má rovnici $x = -2-\frac{p}{2}$, tedy $x = -\frac{5}{2}$.

Správnost řešení si ověříme pomocí programu GeoGebra. Vyznačíme si vrchol $V[-2,1]$ a bod $M[0,3]$. Do vstupního pole napíšeme námi vypočítanou rovnici paraboly. Pokud parabola prochází body $V[-2,1]$ a $M[0,3]$ a její osa je rovnoběžná s osou x, pak jsme počítali správně.

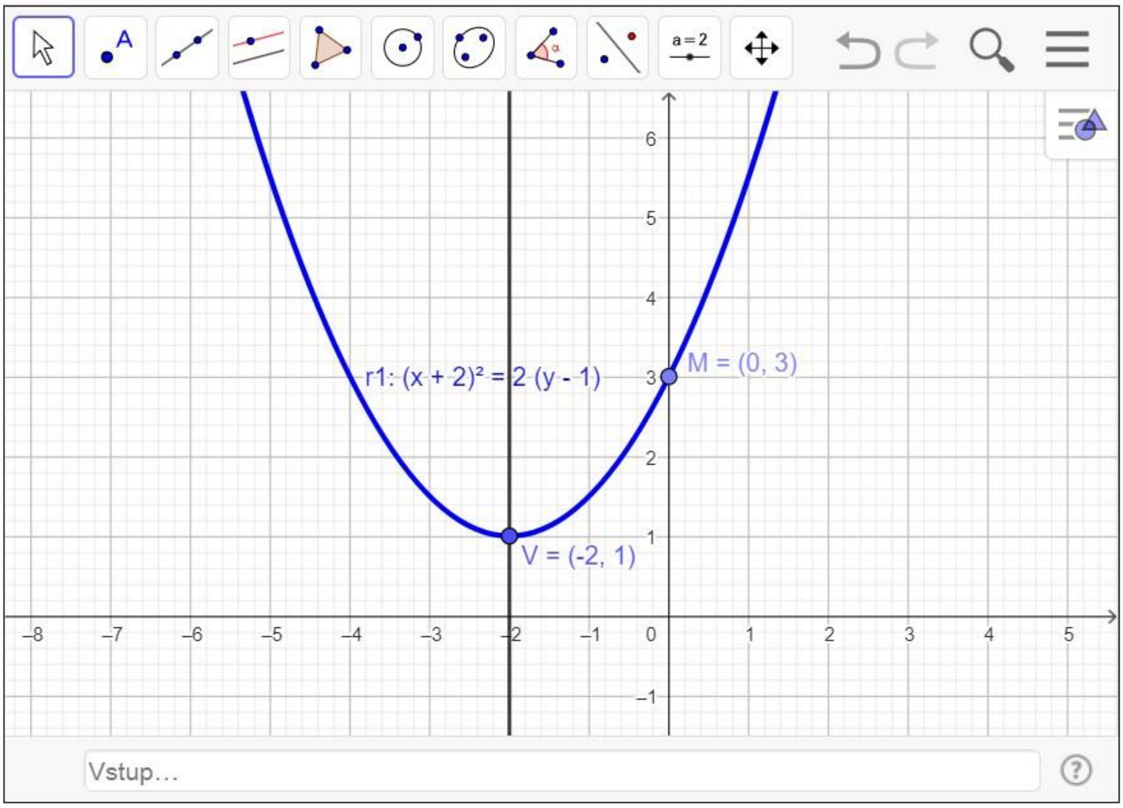


Obr. 56: Parabola - úloha 2 - a

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/c2awrara)

b) Parabola, jejíž osa je rovnoběžná s osou y, má středový tvar rovnice $(x-m)^2 = 2p(y-n)$. Do této rovnice dosadíme vrchol $V[-2{,}1]$ a bod $M[0{,}3]$ a vypočítáme tak hodnotu parametru p.
$(0+2)^2 = 2p(3-1)$
$4 = 4p$
$p = 1$
Tedy parabola má v tomto případě rovnici $(x+2)^2 = 2(y-1)$. Ohnisko paraboly má souřadnice $F\left[-2{,}1+\frac{p}{2}\right]$, tedy $F[-2,\frac{3}{2}]$ a řídící přímka má rovnici $y = 1-\frac{p}{2}$, tedy $y = \frac{1}{2}$.

Správnost řešení si ověříme pomocí programu GeoGebra. Vyznačíme si vrchol $V[-2{,}1]$ a bod $M[0{,}3]$. Do vstupního pole napíšeme námi vypočítanou rovnici paraboly. Pokud parabola prochází body $V[-2{,}1]$ a $M[0{,}3]$ a její osa je rovnoběžná s osou y, pak jsme počítali správně.



Obr. 57: Parabola - úloha 2 - b

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/c2awrara)

Úloha 3

Určete čísla a, b, c tak, aby parabola s rovnicí $y = ax^2 + bx + c$ procházela body $A[1,3]$, $B[2,-1]$, $C[-1,-7]$ (Bušek, 1996).

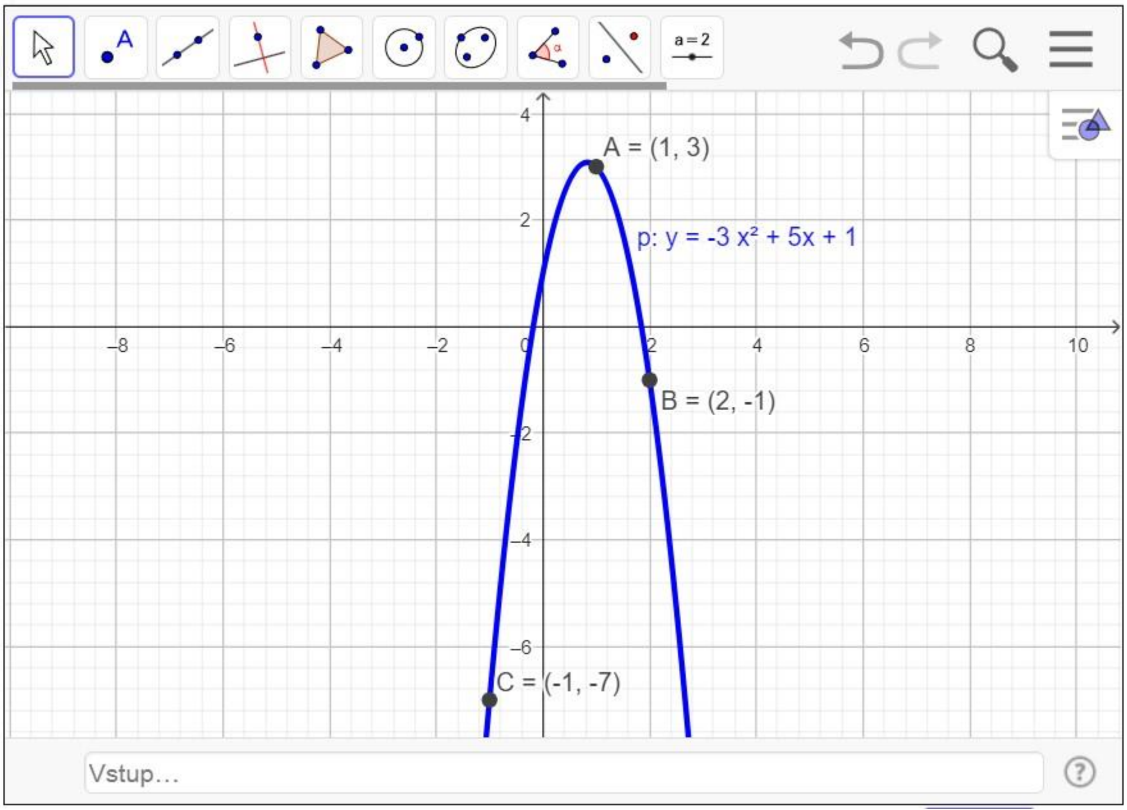
Postup řešení:

Do rovnice paraboly postupně dosadíme souřadnice bodů a tím dostaneme soustavu tří rovnic o třech neznámých, kterou vyřešíme.

$3 = a1^2 + b1 + c$
$-1 = a2^2 + b2 + c$
$-7 = a(-1)^2 + b(-1) + c$
Od první rovnice odečteme rovnici třetí.
$10 = 2b$
$5 = b$
Do rovnic dosadím $b = 5$.
$3 = a + 5 + c$
$-1 = 4a + 10 + c$
$-7 = a - 5 + c$
Od první rovnice odečteme rovnici druhou.
$4 = -3a - 5$

$3a = -9$
$a = -3$
Nyní dosadíme $a = -3$ do první rovnice a vyjádříme si c.
$3 = -3 + 5 + c$
$1 = c$
Rovnice paraboly má tvar $y = -3x^2 + 5x + 1$.

Důkaz provedeme pomocí programu GeoGebra. Nejprve si vyznačíme všechny zadané body $A[1,3]$, $B[2,-1]$, $C[-1,-7]$. Do vstupního pole napíšeme námi vypočítanou rovnici paraboly, a pokud protne všechny body, řešili jsme úlohu správně.



Obr. 58: Parabola - úloha 3

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/ydrehrcs)

Úloha 4

Určete vzájemnou polohu paraboly zadané rovnicí $x = -5y^2$ a daných bodů $A[1,0]$, $B[-5,0]$, $C[5,-1]$ a $D[-5,-1]$ (Kalová, 2016).

Postup řešení:

$A[1,0]: 1 + 5 \cdot 0^2 = 1$

$A[1,0]: 1 > 0$ tedy bod $A[1,0]$ leží vně paraboly

$B[-5{,}0]: -5 + 5 \cdot 0^2 = -5$

$B[-5{,}0]: -5 < 0$ tedy bod $B[-5{,}0]$ leží uvnitř paraboly

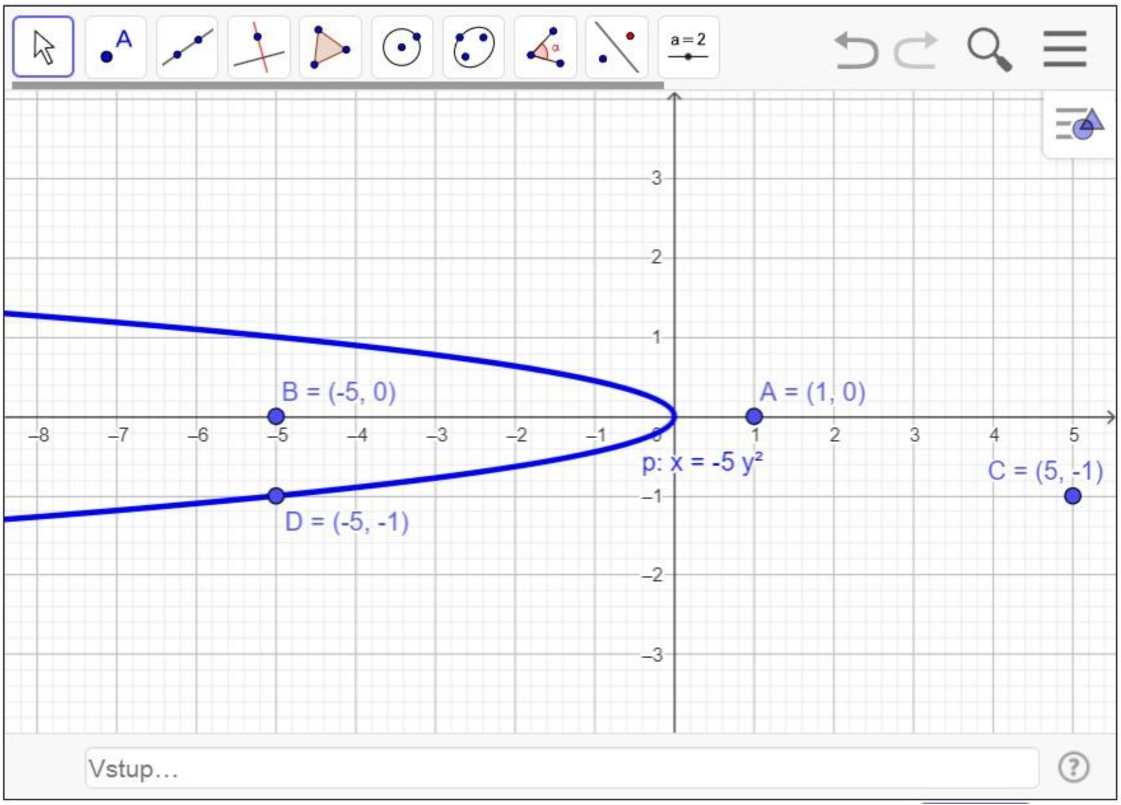
$C[5,-1]: 5 + 5 \cdot (-1)^2 = 10$

$C[5,-1]: 10 > 0$ tedy bod $C[5,-1]$ leží vně paraboly

$D[-5,-1]: -5 + 5 \cdot (-1)^2 = 0$

$D[-5,-1]: 0 = 0$ tedy bod $D[-5,-1]$ leží na parabole

Úlohu si můžeme zkonstruovat v programu GeoGebra a ověřit si, zda jsme počítali správně. Do vstupního pole napíšeme rovnici paraboly a vyznačíme si jednotlivé zadané body.



Obr. 59: Parabola - úloha 4

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/qxadwmbz)

Úloha 5

Určete koeficient c v obecné rovnici přímky $3x + y + c = 0$ tak, aby tato přímka měla s parabolou zadanou rovnicí $x^2 - 4x + 4y - 16 = 0$ právě jeden společný bod. Určete souřadnice tohoto bodu (Kalová, 2016).

Postup řešení:

Z rovnice přímky si vyjádříme závislost y na x.

$3x + y + c = 0$

$y = -3x - c$

Za y dosadíme do rovnice paraboly výraz $-3x - c$.

$x^2 - 4x + 4(-3x - c) - 16 = 0$

$x^2 - 4x - 12x - 4c - 16 = 0$

$x^2 - 16x - 4c - 16 = 0$

Hledáme hodnotu koeficientu c, pro kterou má kvadratická rovnice jedno řešení, tedy diskriminant musí být roven nule.

$D = 0 \iff (-16)^2 - 4 \cdot (-4c - 16) = 0,$

$256 + 16c + 64 = 0$

$16c = -320 \Rightarrow c = -20\,.$

Hledaná přímka bude mít rovnici $3x + y - 20 = 0$. Abychom zjistili společný bod přímky a paraboly, dosadíme opět do rovnice paraboly za y výraz $20 - 3x$ a upravíme.

$x^2 - 4x + 4(20 - 3x) - 16 = 0$

$x^2 - 4x + 80 - 12x - 16 = 0$

$x^2 - 16x + 64 = 0$

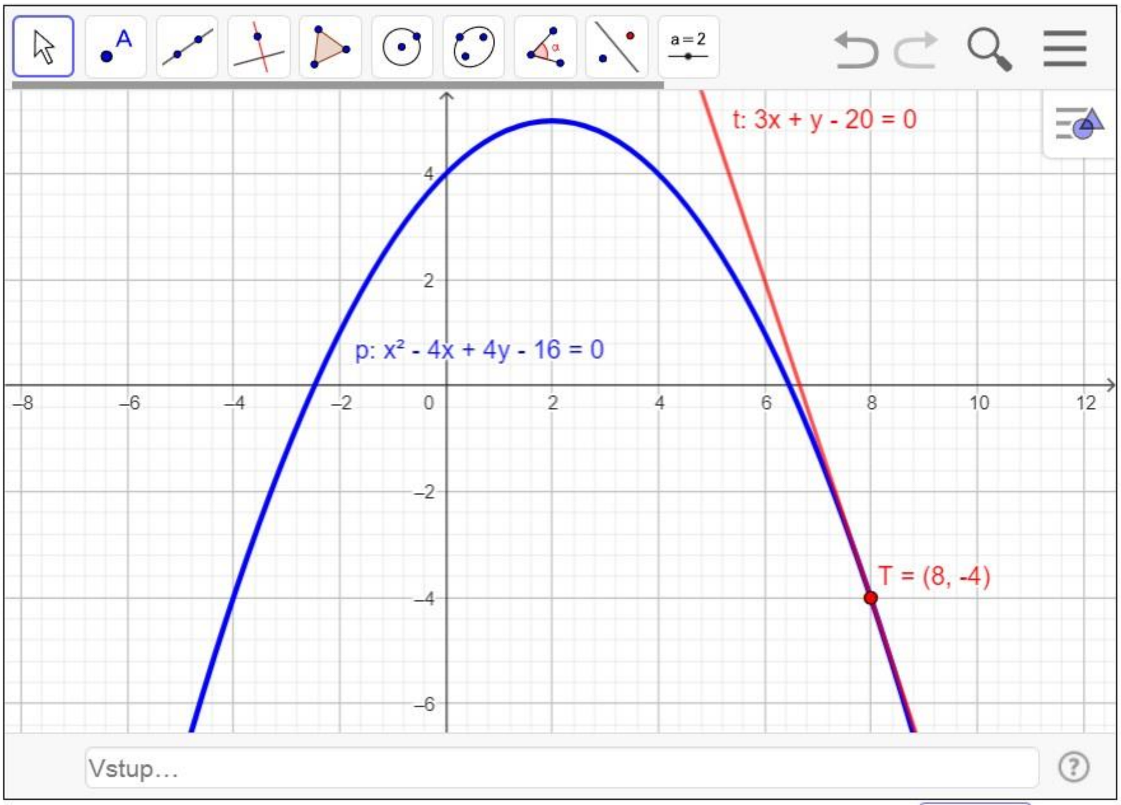
$(x - 8)^2 = 0 \Rightarrow x = 8\,.$

Nyní dopočítáme y:

$y = 20 - 3 \cdot 8 = -4\,.$

Společný bod přímky a paraboly má souřadnice $T[8, -4]$.

Úlohu si ověříme v programu GeoGebra. Do vstupního pole napíšeme rovnici paraboly a námi spočítanou rovnici tečny. Pokud parabola s přímkou mají jeden společný bod se souřadnicemi $T[8, -4]$, počítali jsme správně.



Obr. 60: Parabola - úloha 5

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/wdaahsey)

Úloha 6

U paraboly s rovnicí $f\colon (y-3)^2 = 6(x-1)$ určete tečnu procházející bodem

a) $A[1,3]$
b) $B[7,9]$

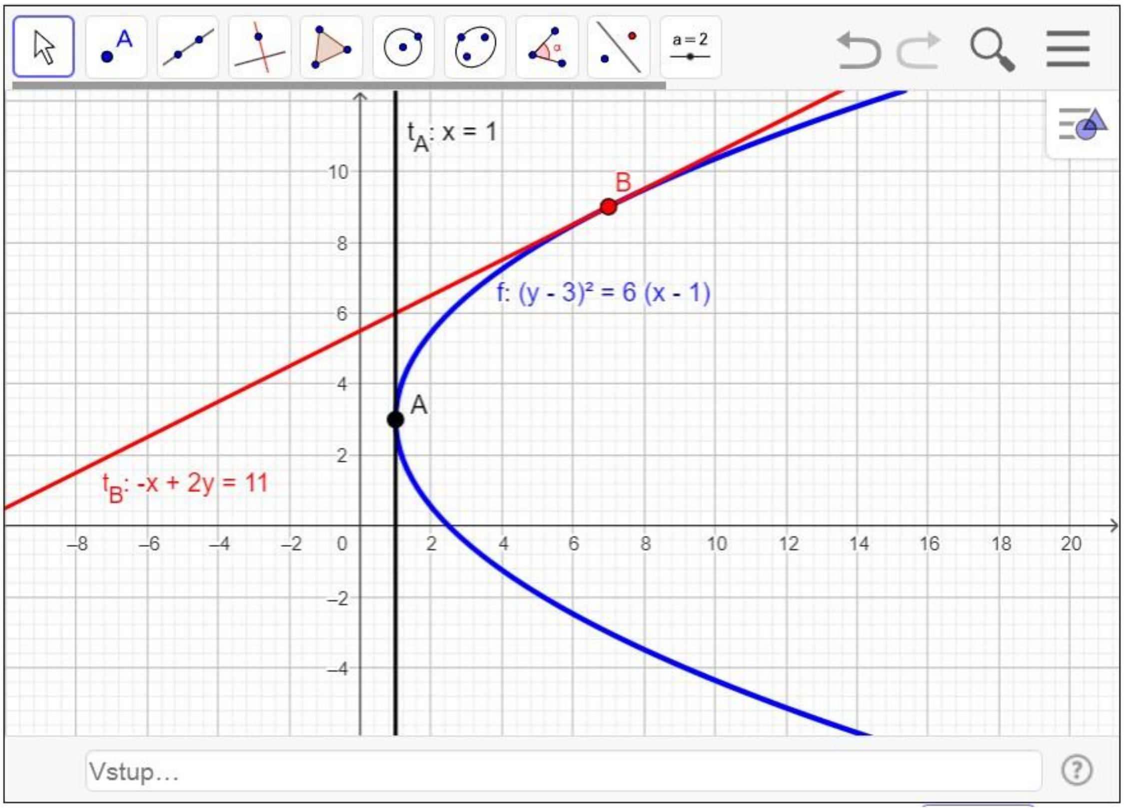
(Liška, 2017)

Postup řešení:

a) Nejprve zjistíme, zda zadaný bod $A[1,3]$ leží na parabole.
$A \in f\colon (3-3)^2 = 6(1-1)$
$A \in f\colon 0 = 0$
Bod $A[1,3]$ je bodem paraboly f, dokonce je jejím vrcholem a tedy je i bodem dotyku hledané tečny. Bod $A[1,3]$ dosadíme do rovnice pro tečnu paraboly a upravíme.
$t_A\colon (y-3)(3-3) = 3(x-1) + 3(1-1)$
$t_A\colon 0 = 3x - 3 + 0$
$t_A\colon x = 1$
Tečna procházející bodem $A[1,3]$ má rovnici $t_A\colon x = 1$.

b) Nejprve zjistíme, zda zadaný bod $B[7,9]$ leží na parabole.
$B \in f: (9-3)^2 = 6(7-1)$
$B \in f: 36 = 36$
Bod $B[7,9]$ je bodem paraboly f, tedy je i bodem dotyku hledané tečny. Bod $B[7,9]$ dosadíme do rovnice pro tečnu paraboly a upravíme.
$t_B: (y-3)(9-3) = 3(x-1) + 3(7-1)$
$t_B: 6y - 18 = 3x - 3 + 18$
$t_B: 2y - x = 11$
Tečna procházející bodem $B[7,9]$ má rovnici $t_B: 2y - x = 11$.

Správnost řešení si ověříme pomocí programu GeoGebra. Do vstupního pole zadáme rovnici paraboly $f: (y-3)^2 = 6(x-1)$, vyznačíme si body $A[1,3]$ a $B[7,9]$ a pomocí nástroje tečna vykreslíme tečny procházející body. U tečen si zobrazíme jejich popis, tedy jejich rovnice, a pokud se rovnají námi spočítaným rovnicím, řešili jsme úlohu správně.



Obr. 61: Parabola - úloha 6

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/u7zg6kyq)

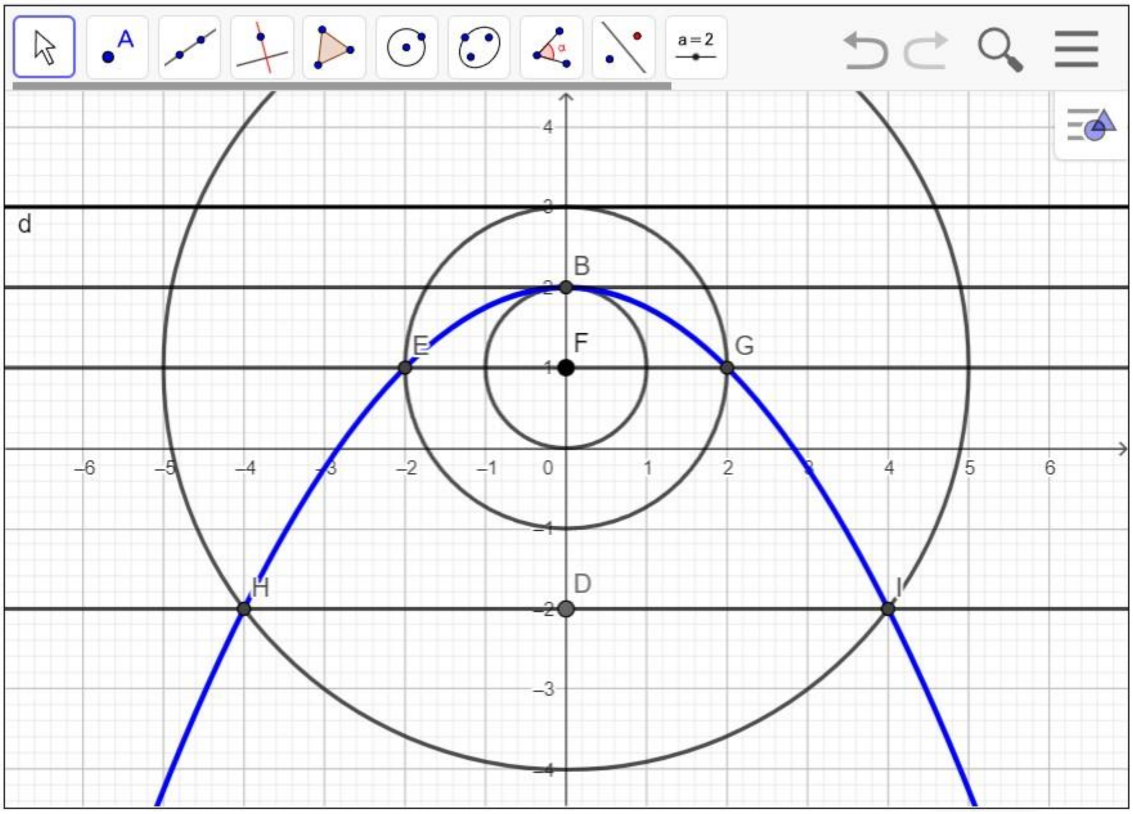
Úloha 7

Nalezněte množinu všech bodů $X[x, y]$, které splňují následující podmínku, pro bod $F[0,1]$ a přímku $d: y = 3$ platí $|FX| = |dX|$.

Použité nástroje: bod, kružnice (střed a poloměr), průsečík, rovnoběžka, kuželosečka dána pěti body

Postup řešení:

Nejprve sestrojíme zadaný bod $F[0,1]$ a přímku $d: y = 3$. Sestrojíme rovnoběžky s přímkou d pocházející body $B[0,2]$ ve vzdálenosti 1, $F[0,1]$ ve vzdálenosti 2 a $D[0, -2]$ ve vzdálenosti 5. Dále sestrojíme kružnice se středem v bodě F a poloměry 1, 2 a 5. Nalezneme příslušné průsečíky rovnoběžek s kružnicemi a sestrojíme kuželosečku danou pěti body. V tomto případě se jedná o parabolu.



Obr. 62: Parabola - úloha 7

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/xhbfezkd)

Důkaz provedeme pomocí analytické geometrie.

$F[0,1]$, $d: y = 3$ a $|dX| = |FX|$

$$\frac{|0x+y-3|}{\sqrt{0^2+1^2}} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2}$$

$$|y-3| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$

Obě strany umocníme na druhou.

$(y-3)^2 = x^2 + (y-1)^2$

$y^2 - 6y + 9 = x^2 + y^2 - 2y + 1$

$-4y + 8 = x^2$

$-4(y-2) = x^2$

Jedná se tedy o parabolu s vrcholem $B[0,2]$.

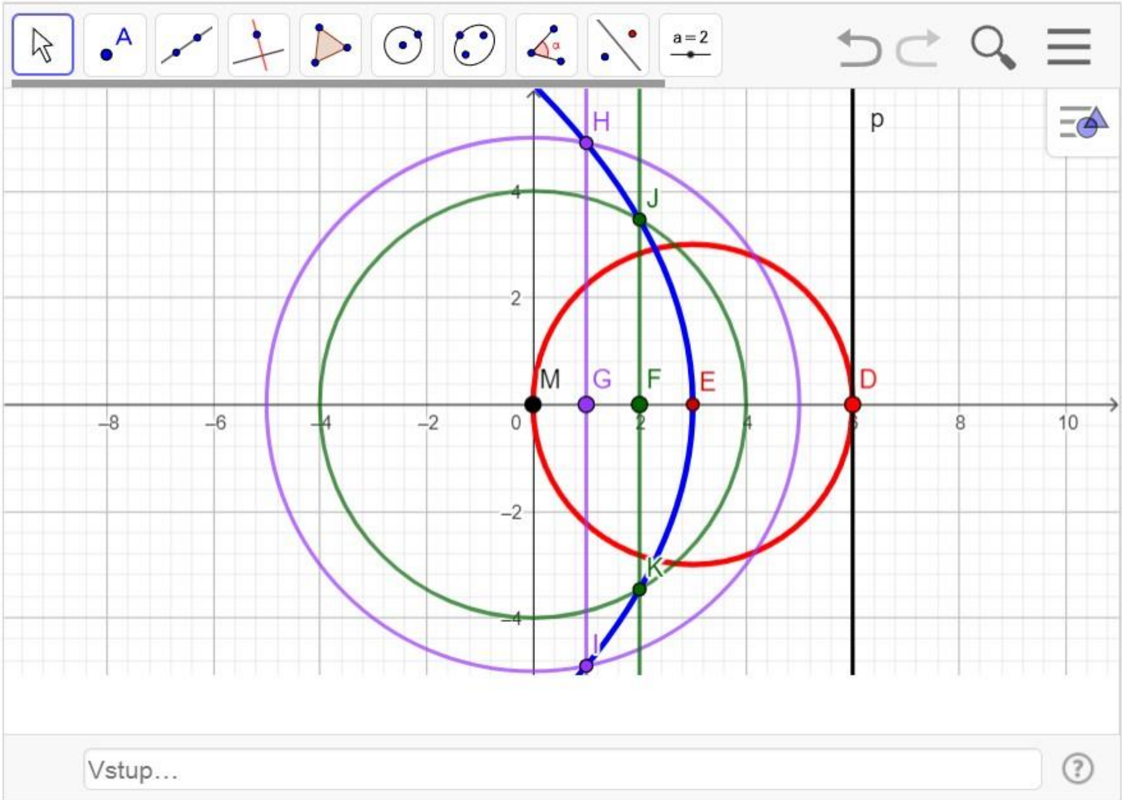
Úloha 8

Je dána přímka p a bod M, $|Mp| = 6$. Vyšetřete množinu středů všech kružnic, které procházejí bodem M a dotýkají se přímky p (Petáková, 1998).

Použité nástroje: bod, přímka, střed, kružnice (střed a bod), rovnoběžka, průsečík, kuželosečka dána pěti body

Postup řešení:

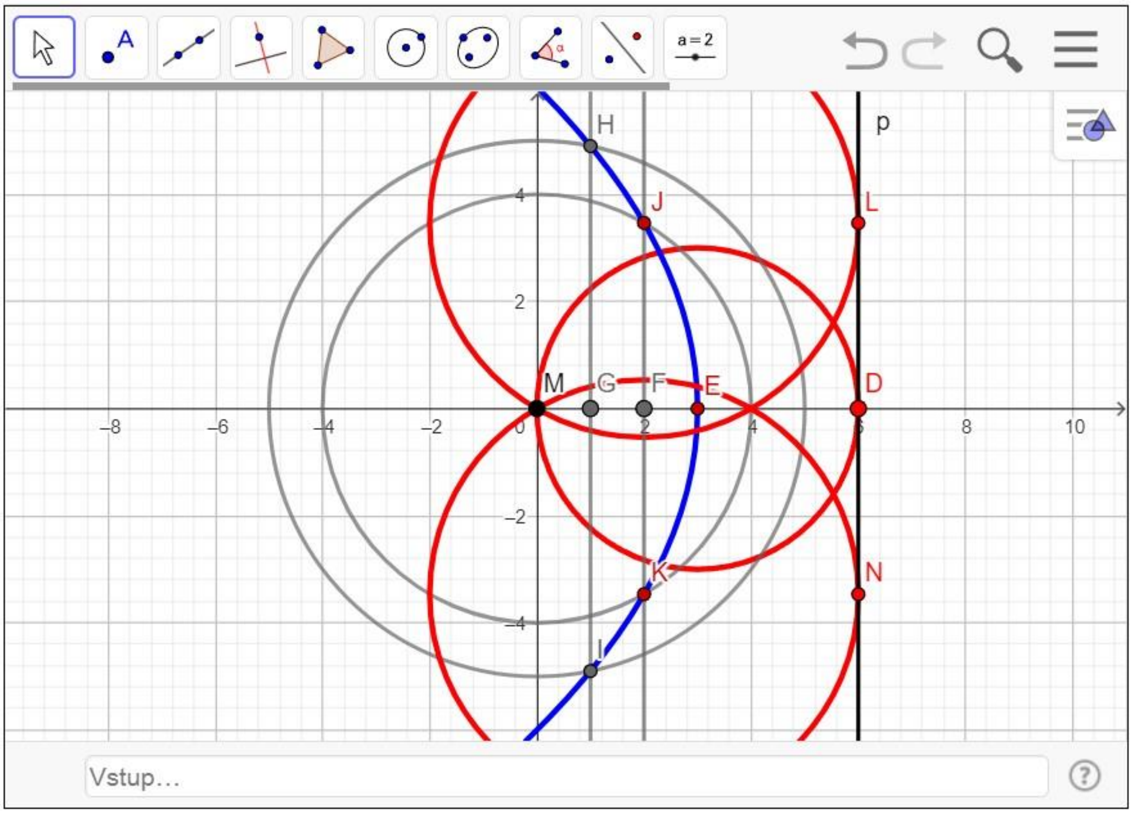
Sestrojíme si bod $M[0,0]$ a přímku $p: x = 6$, tedy pro vzdálenost platí $|Mp| = 6$. První střed jedné z hledaných kružnic je zřejmý sestrojíme kolmici k přímce p, která prochází bodem M a nalezneme střed úsečky MD. Tedy sestrojíme si rovnoběžky s přímkou p procházející bodem $F[2,0]$ a $G[0,1]$. Z bodu M sestrojíme kružnice o poloměrech 4 a 5. Nalezneme odpovídající si průsečíky kružnic a rovnoběžek. Docházíme k hypotéze, že středy kružnic musí ležet na parabole, protože kružnice se má dotýkat přímky p a procházet bodem M, tzn. že vzdálenost středů kružnic musí být od bodu M stejně vzdálená jako od přímky p, což je definice paraboly. Následně si sestrojíme kuželosečku pomocí nástroje „kuželosečka daná pěti body“ a vidíme, že se nám vykreslila parabola



Obr. 63: Parabola - úloha 8 - řešení

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/pvwtrcsd)

Pro ověření můžeme z daných průsečíku sestrojit kružnice, které prochází bodem M a ověřit si, že přímku p protínají v jediném bodu.



Obr. 64: Parabola - úloha 8 - ověření

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/pvwtrcsd)

Důkaz provedeme pomocí analytické geometrie.

$|MX| = |pX|$

$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{|x-6|}{1}$

Obě strany umocníme na druhou a odstraníme tak mocninu na levé straně.

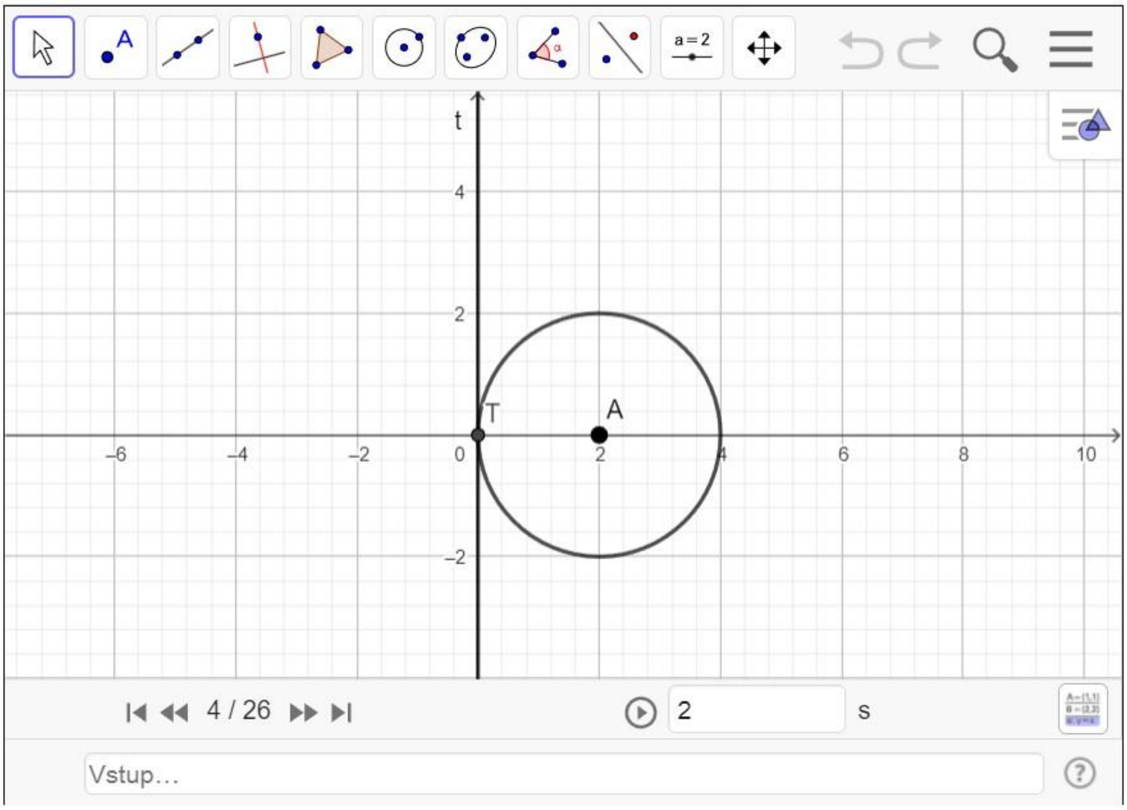
$x^2 + y^2 = x^2 - 12x + 36$

$y^2 = -12(x - 3)$

Tedy hledanou množinou je parabola s rovnicí $y^2 = -12(x - 3)$ a vrcholem $E[3,0]$.

Úloha 9

Je dána kružnice k a její tečna t. Nalezněte množinu středů všech kružnic, které se dotýkají kružnice k i přímky t (Hrubý, 2008).



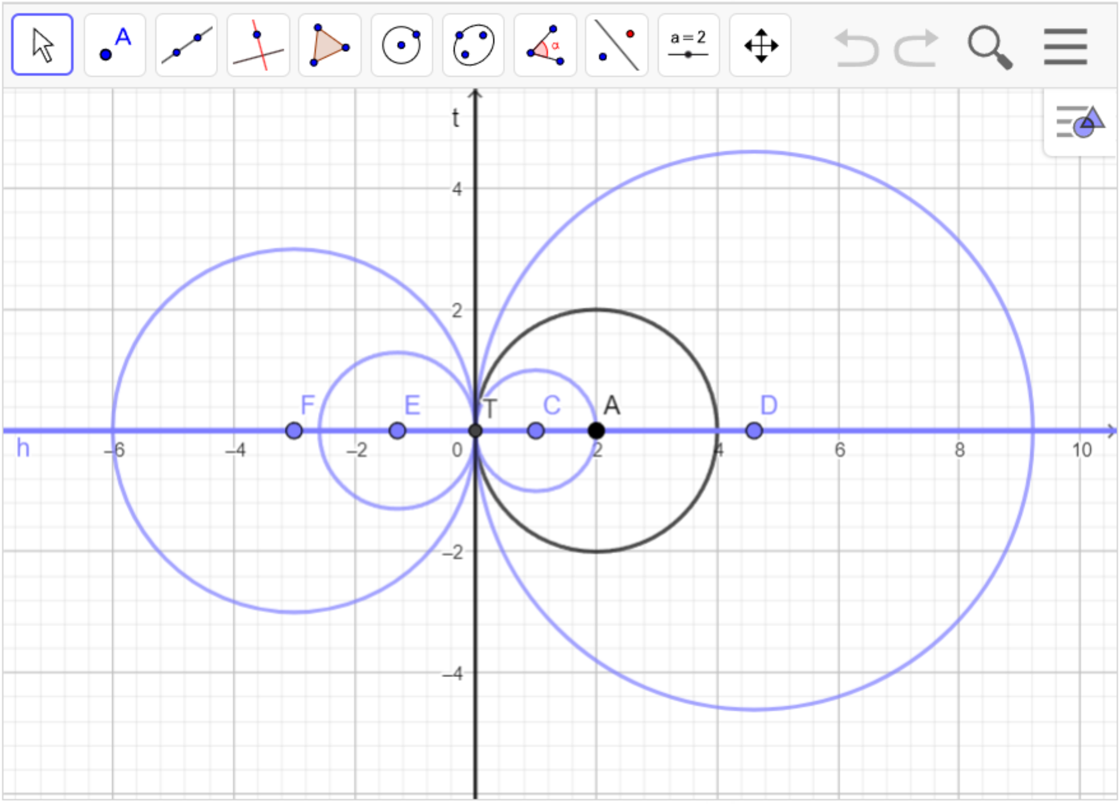
Obr. 65: Parabola - úloha 9 - zadání

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/dpzpcnjy)

Použité nástroje: bod, kružnice (střed a poloměr), tečna z bodu, přímka, průsečík

Postup řešení:

Nejprve si sestrojíme několik kružnic, které mají střed na ose x, dotýkají se kružnice k a procházejí bodem bodem T.

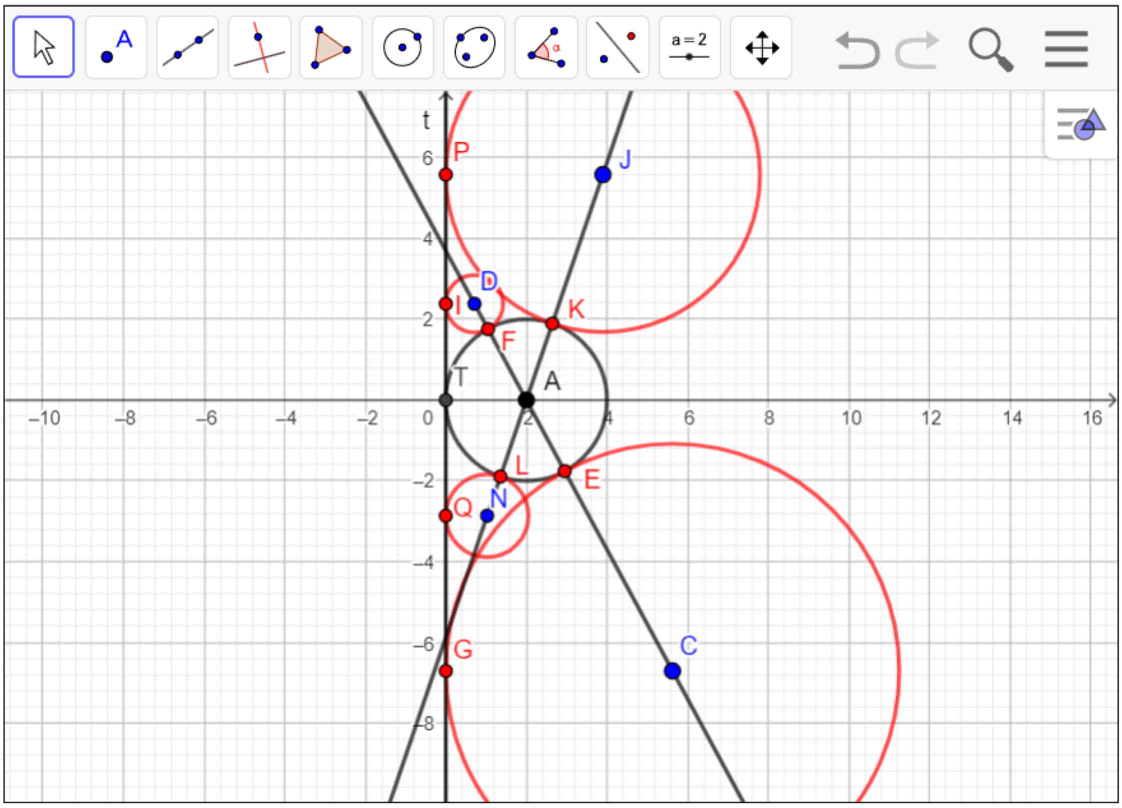


Obr. 66: Parabola - úloha 9 - první část řešení

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/dpzpcnjy)

Jednu část hledané množiny bude tvořit přímka, kterou je osa x.

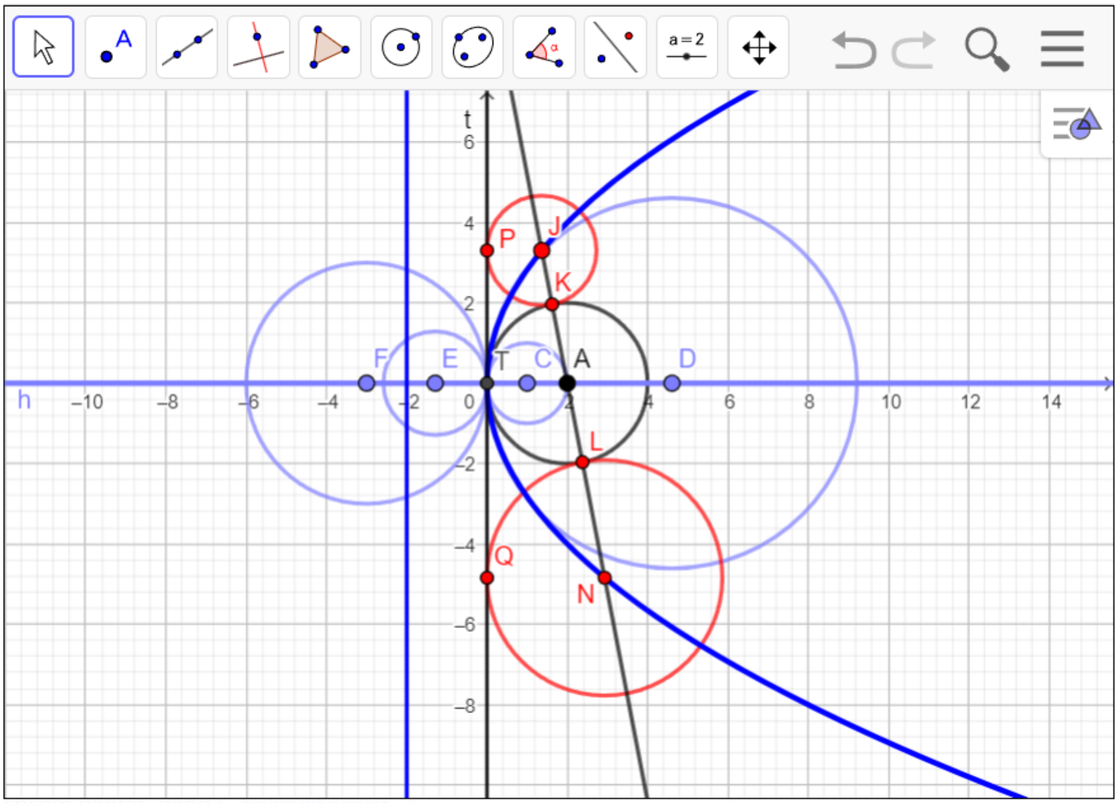
Dále si sestrojíme několik kružnic, které také vyhovují zadání.



Obr. 67: Parabola - úloha 9 - druhá část řešení

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/dpzpcnjy)

Když se koukáme na středy kružnic, tak docházíme k hypotéze, že druhou částí množiny bodů bude parabola s vrcholem v bodě dotyku T a s ohniskem v bodě A. Řídící přímka tedy musí být rovnoběžka s přímkou t ve stejné vzdálenosti od vrcholu T, jako je vzdálenost bodu A od vrcholu T.



Obr. 68: Parabola - úloha 9 - řešení

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/dpzpcnjy)

Zadaná úloha o přímce t a kružnici $k(A,r)$ se dá převést na úlohu o přímce d a bodu A, kde přímka d je rovnoběžná s přímkou t. Přímka t je ve vzdálenosti r od přímky d i od bodu A. Pak můžeme říci, že bod A je ohniskem paraboly a přímka d s rovnicí $x = -2$ je řídící přímkou paraboly. Nyní nalezneme rovnici paraboly výpočtem. Platí tedy vztah $|AX| = |dX|$.

$$|AX| = |dX|$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \frac{|x+2|}{\sqrt{1^2}}$$

Obě strany umocníme a odstraníme tak odmocninu.

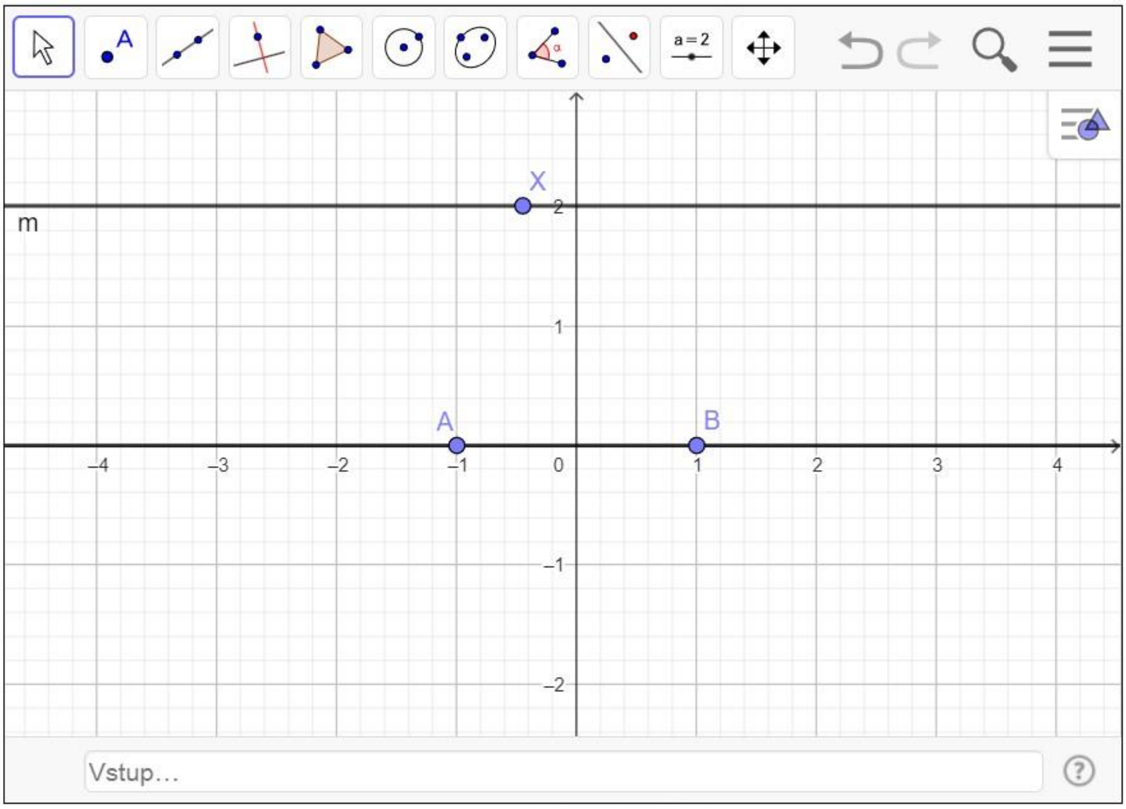
$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + 4x + 4$$

$$y^2 = 8x$$

Hledanou množinou bodů X je parabola s rovnicí $y^2 = 8x$ a vrcholem v bodě $T[0,0]$.

Úloha 10

Je dána úsečka AB a přímka m rovnoběžná s přímkou AB. Určete množinu ortocenter všech trojúhelníků ABX, přičemž bod X je bodem přímky m (Vaňatová, 1987)



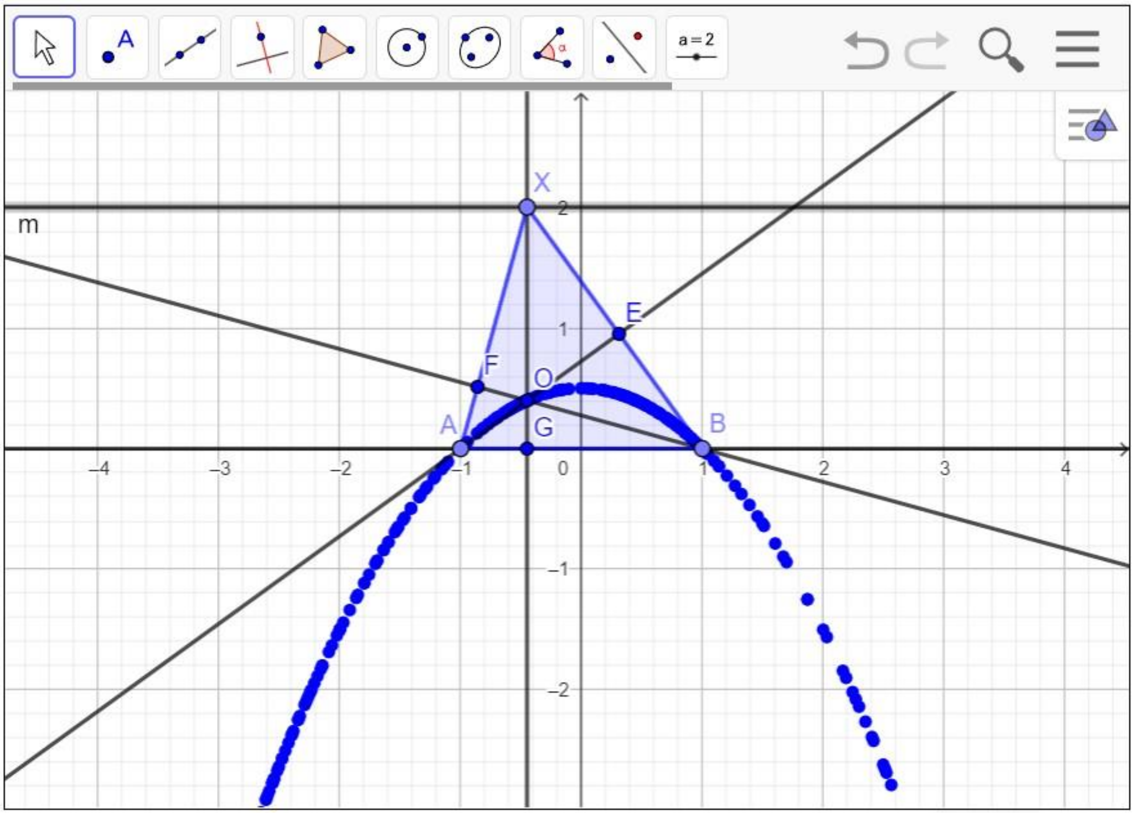
Obr. 69: Parabola - úloha 10 - zadání

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/hkpapubt)

Použité nástroje: bod, přímka, rovnoběžka, mnohoúhelník, kolmice, průsečík

Postup řešení:

Zvolíme si body $A[-1,0]$ a $B[1,0]$, kterými povedeme přímku. Bodem $[0,2]$ vedeme přímku m, která je rovnoběžná s přímkou AB. Na přímce si zvolíme libovolný bod X. Vyznačíme si trojúhelník ABX a nalezneme jeho výšky a jejich průsečík, který označíme O jako ortocentrum. U bodu O zapneme pole Zobrazit stopu. Nyní budeme pohybovat bodem X po přímce m a pozorovat, jakou křivku nám bod O vykreslí.



Obr. 70: Parabola - úloha 10 - řešení

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/hkpapubt)

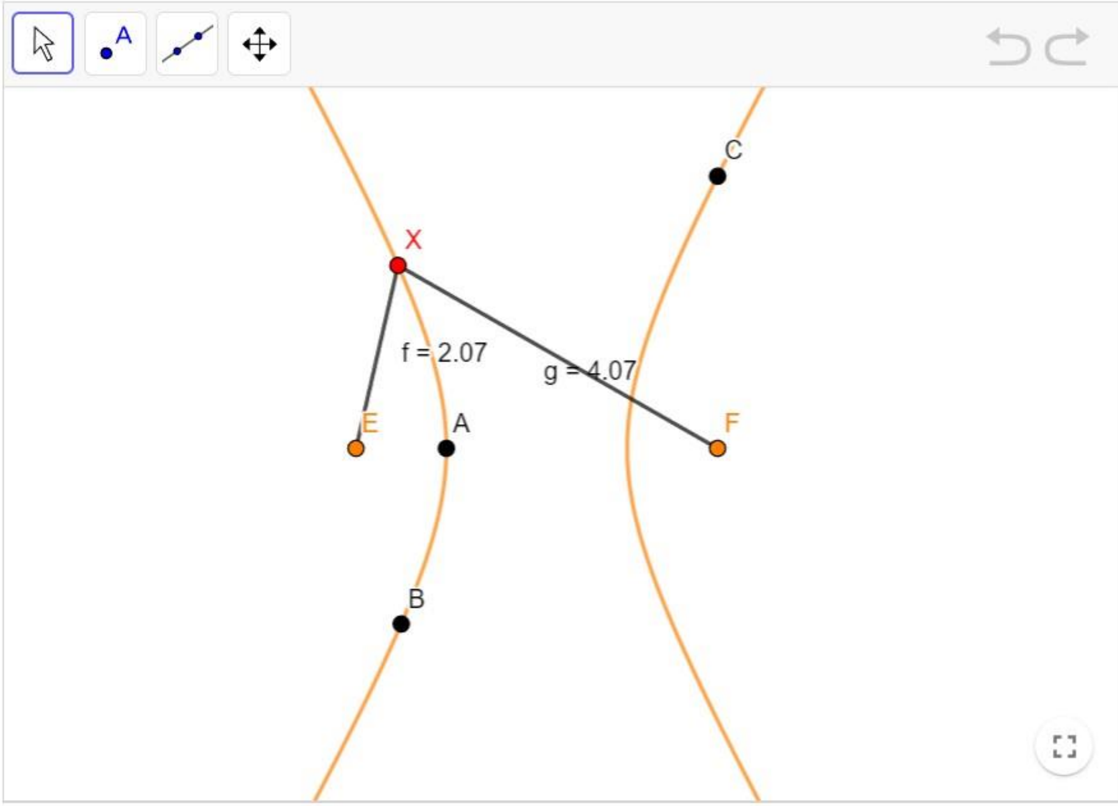
Důkaz provedeme pomocí analytické geometrie.

Máme body $A[-1{,}0]$ a $B[1{,}0]$, přímku $m\colon y = 2$ a bod X o souřadnicích $X[x, 2]$. Ortocentrum o souřadnicích $O[o_1, o_2]$ má x-ovou souřadnici stejnou jako bod X, tedy $o_1 = x$, protože leží na kolmici k první ose souřadnic.

Souřadnici o_2 nalezneme výpočtem.

Přímka BX má rovnici $y = \frac{2}{o_1 - 1}(x - 1)$, přímka AO, na níž leží výška procházející bodem A, kolmá na stranu BX, má rovnici $y = -\frac{o_1 - 1}{2}(x + 1)$. Pro $x = o_1, y = o_2$ dostaneme: $2o_2 = -({o_1}^2 - 1)$. Hledanou množinou je tedy parabola o rovnici $2y = -(x^2 - 1)$, neboli $x^2 = -2(y - \frac{1}{2})$.

Hyperbola
Úloha 1



Obr. 71: Hyperbola - úloha 1

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/mgp67uzr)

Úkol č. 1
Posuňte červený bod X postupně do bodů A, B, C a v jednotlivých situacích změřte velikosti úseček $f = |EX|$ a $g = |FX|$. Poznamenejte si naměřené hodnoty.

Úkol č. 2
Pohrajte si s naměřenými hodnotami. Zkuste je sečíst, odečíst, vynásobit a vydělit. Zarazilo vás něco? Popište, na co jste přišli.

Úkol č. 3
Na základě vámi zjištěných faktů, zkuste svými slovy napsat, jak by mohla být elipsa definována.

Úkol č. 4
Vyberte definici elipsy.

a) Množina všech bodů, které mají konstantní rozdíl vzdáleností od ohnisek E a F.
b) Množina všech bodů, které mají konstantní součet vzdáleností od ohnisek E a F.

c) Množina všech bodů, které mají konstantní vzdálenost od středu S.
d) Množina všech bodů, které mají konstantní vzdálenost od bodu F a přímky d.

Úloha 2

Rozhodněte, zda rovnice $9x^2 - 16y^2 - 36x - 96y - 252 = 0$ je rovnicí hyperboly. Je-li tomu tak, nejděte její střed a velikosti obou poloos (Janeček, 1994).

Postup řešení:

Úlohu vyřešíme výpočtem pomocí analytické geometrie.

$9x^2 - 16y^2 - 36x - 96y - 252 = 0$

$9(x^2 - 4x) - 16(y^2 + 6y) = 252$.

Doplníme na úplné čtverce.

$9(x^2 - 4x + 4) - 16(y^2 + 6y + 9) = 252 + 36 - 144$

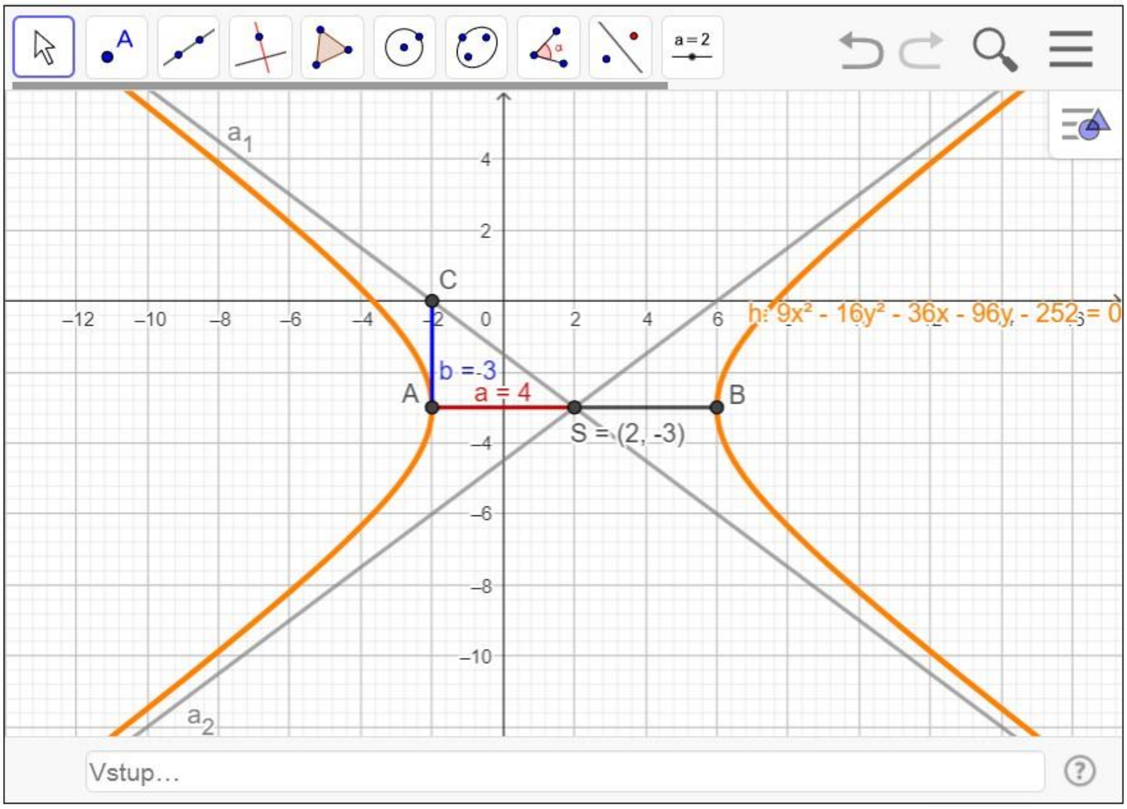
$9(x-2)^2 - 16(y+3)^2 = 144$

$\frac{9(x-2)^2}{144} - \frac{16(y+3)^2}{144} = 1$

$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1$.

Rovnice je rovnicí hyperboly se středem v bodě $S[2,-3]$ a poloosami $a = 4$, $b = 3$.

Správnost řešení si ověříme pomocí programu GeoGebra. Do vstupního pole opíšeme zadanou rovnici, tím se nám opravdu vykreslí hyperbola. Pomocí nástroje střed nalezneme střed kuželosečky, který odpovídá bodu $S[2,-3]$. Hlavní poloosu hyperboly nalezneme pomocí nástroje rovnoběžná přímka. Osa musí procházet středem hyperboly a v tomto příkladu je rovnoběžné s osou x. Průsečíky osy a hyperboly jsou vrcholy. Vzdálenost bodů $|AS| = |BS| = 2a = 8$, tedy velikost hlavní poloosy je $a = 4$. Přímky a_1 a a_2 jsou asymptoty hyperboly. Velikost vedlejší osy odpovídá vzdálenosti bodů $|CA| = 2b = 6$, tedy $b = 3$, a leží na asymptotě hyperboly.



Obr. 72: Hyperbola - úloha 2

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/nz6z72cx)

Úloha 3

Určete souřadnice bodů $A[6, y]$, $B[-6, y]$, $C\left[x, \frac{3}{2}\right]$, $D\left[x, -\frac{3}{2}\right]$ tak, aby body ležely na hyperbole, která má rovnici $9x^2 - 36y^2 = 324$ (Bušek, 1996).

Postup řešení:

Do rovnice budeme postupně dosazovat známou souřadnici bodu a vypočítáme si neznámou souřadnici bodu.

$A[6, y] : 9 \cdot 36 - 36y^2 = 324$

$324 - 324 = 36y^2$

$y = 0 \Longrightarrow$ bod A má souřadnice $[6,0]$.

$B[-6, y] : 9 \cdot 36 - 36y^2 = 324$

$324 - 324 = 36y^2$

$y = 0 \Longrightarrow$ bod B má tedy souřadnice $[-6,0]$.

$C\left[x, \frac{3}{2}\right] : 9x^2 - 36 \cdot \frac{9}{4} = 324$

$9x^2 = 405$

$x^2 = 45 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{45} = \pm 3\sqrt{5}$, tedy řešením jsou dva body:

bod C_1 má souřadnice $\left[3\sqrt{5}, \frac{3}{2}\right]$ a bod C_2 má souřadnice $\left[-3\sqrt{5}, \frac{3}{2}\right]$.

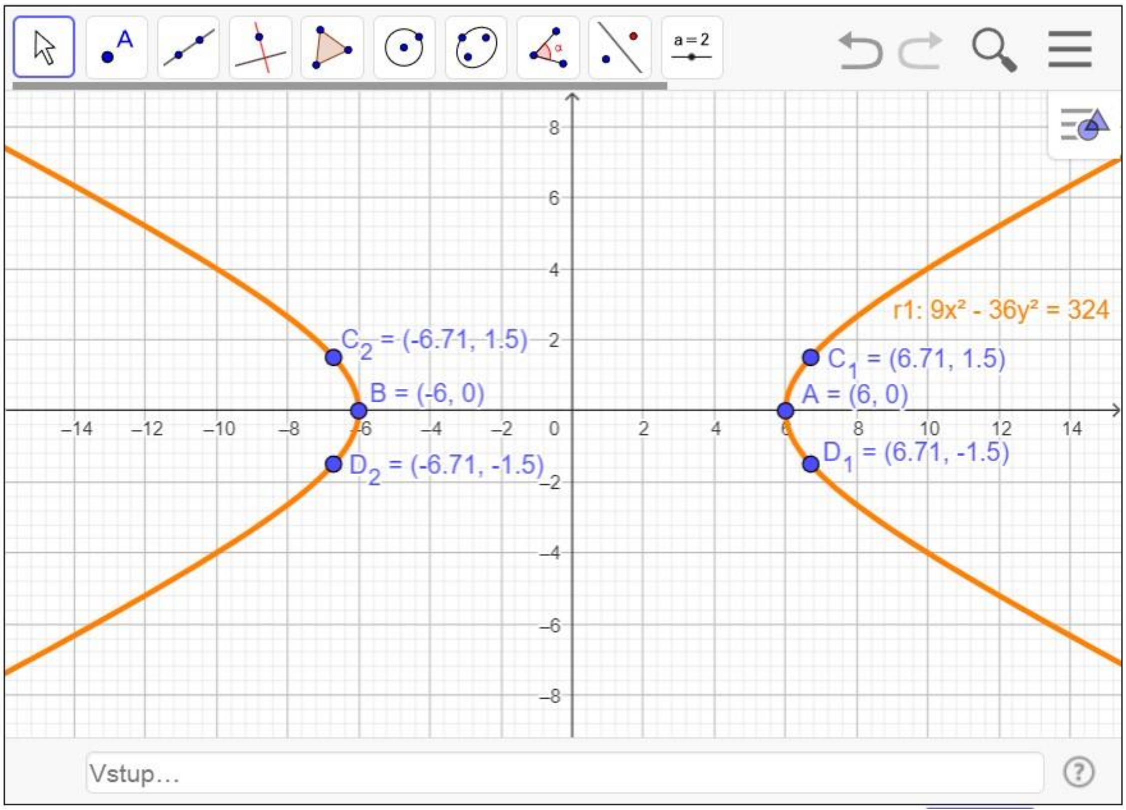
$D\left[x, -\frac{3}{2}\right] : 9x^2 - 36 \cdot \frac{9}{4} = 324$

$9x^2 = 405$

$x^2 = 45 \Longrightarrow \; x = \pm\sqrt{45} = \pm 3\sqrt{5}$, tedy řešením jsou dva body:

bod D_1 má souřadnice $\left[3\sqrt{5}, -\frac{3}{2}\right]$ a bod D_2 má souřadnice $\left[-3\sqrt{5}, -\frac{3}{2}\right]$.

Řešení si ověříme pomocí programu GeoGebra. Nejprve si do vstupního pole napíšeme rovnici hyperboly $9x^2 - 36 \cdot \frac{9}{4} = 324$. Poté si vyznačíme všechny body, které jsme zjistili výpočtem, a pokud leží na hyperbole, počítali jsme správně.



Obr. 73: Hyperbola - úloha 3

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/eckvqauru)

Úloha 4

Vypočítejte vzdálenost středu hyperboly $-\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{y^2}{144}=1$ od přímky $2x-y=3$ (Kalová, 2016).

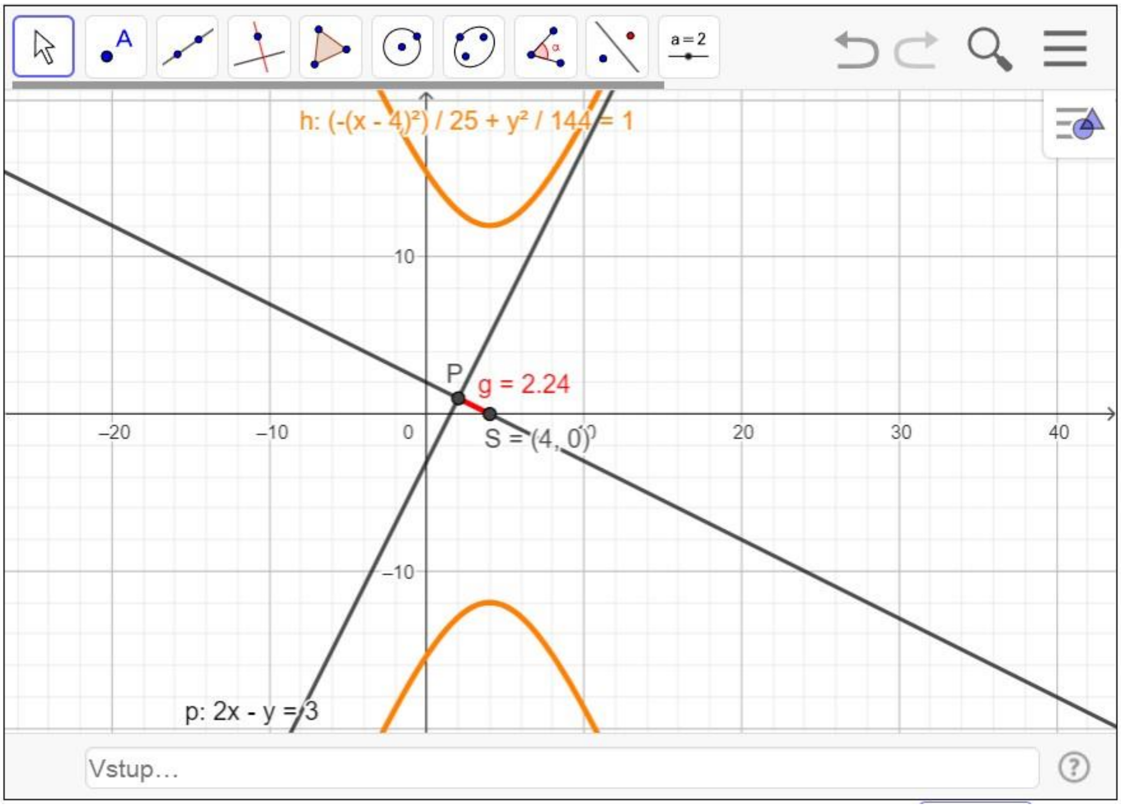
Postup řešení:

Střed hyperboly má souřadnice $S[4,0]$. Pro výpočet vzdálenosti bodu, středu hyperboly, od přímky použijeme vzorec $|Sp|=\frac{|as_1+bs_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

$$|Sp|=\frac{|2\cdot 4+(-1)\cdot 0+(-3)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|5|}{\sqrt{4+1}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{5}}{5}=\sqrt{5}.$$

Vzdálenost středu $S[4,0]$ hyperboly od přímky p: $2x-y=3$ je rovna číslu $\sqrt{5}$.

Úlohu můžeme sestrojit v programu GeoGebra a ověřit si tak správnost našeho řešení. Do vstupního pole zadáme rovnici hyperboly a vyznačíme si její střed. Stejně tak si do vstupního pole napíšeme rovnici přímky. Sestrojíme tečnu k zadané přímce, která povede středem hyperboly. Sestrojíme úsečku SP a zobrazíme si její velikost.



Obr. 74: Hyperbola - úloha 4

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/hufxvtjb)

Úloha 5

Hyperbola má asymptoty dané rovnicemi $y - 3 = \pm 2(x + 1)$ a prochází bodem $K[4,9]$; určete rovnici hyperboly (Bušek, 1996).

Postup řešení:

Upravíme si rovnici jedné asymptoty tak, abychom viděli, v jakém poměru jsou velikosti asymptot.

$$\frac{y-3}{2} - \frac{x+1}{1} = 0$$

Střed hyperboly leží v bodu $S[-1,3]$, tedy rovnice hyperboly má tvar:

$$\frac{(y-3)^2}{2^2} - \frac{(x+1)^2}{1} = c$$

Abychom zjistili neznámou c, musíme do rovnice dosadit souřadnice bodu $K[4,9]$.

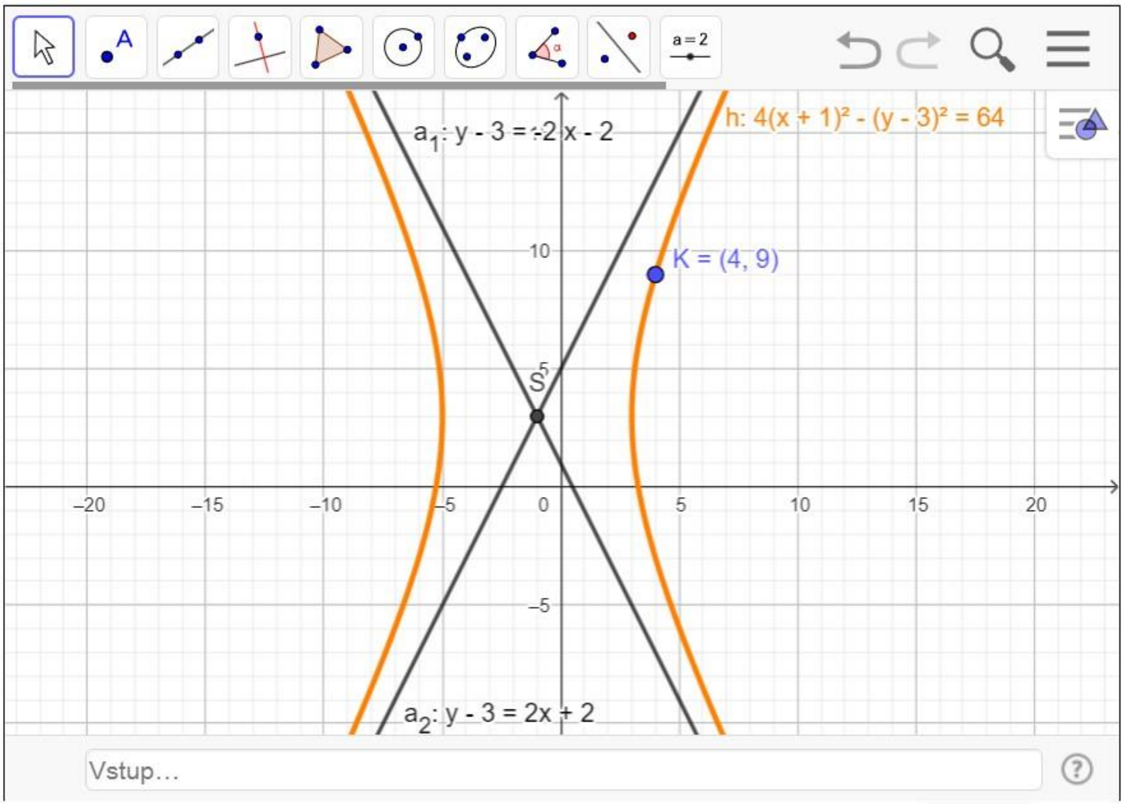
$$\frac{(9-3)^2}{2^2} - \frac{(4+1)^2}{1} = c$$

$$\frac{36}{4} - \frac{25}{1} = c$$

$$-16 = c$$

Tedy rovnice hyperboly má tvar $\frac{(y-3)^2}{4} - \frac{(x+1)^2}{1} = -16$. Rovnici ještě upravíme do středového tvaru rovnice hyperboly $\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{64} = 1$.

Řešení si ověříme pomocí programu GeoGebra. Do vstupního pole napíšeme rovnice asymptot, bod $K[4,9]$ a námi vypočítanou rovnici hyperboly. Pokud rovnice nemá žádný společný bod s asymptotami a prochází bodem K, počítali jsme správně.



Obr. 75: Hyperbola - úloha 5

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/qgpqzpn9)

Úloha 6

Určete tečnu hyperboly s rovnicí $h\colon \frac{(y-1)^2}{25} - \frac{(x-4)^2}{9} = 1$ v zadaném bodě $T[4,6]$ (Liška, 2017).

Postup řešení:

Nejprve ověříme, zda bod $T[4,6]$ leží na zadané hyperbole.

$$T \in h\colon \frac{(6-1)^2}{25} - \frac{(4-4)^2}{9} = 1$$

$$T \in h\colon \frac{25}{25} - \frac{0}{9} = 1$$

$$T \in h\colon 1 = 1$$

Bod $T[4,6]$ je bodem hyperboly h a tedy je i bodem dotyku hledané tečny.

$$t\colon \frac{(y-1)(6-1)}{25} - \frac{(x-4)(4-4)}{16} = 1$$

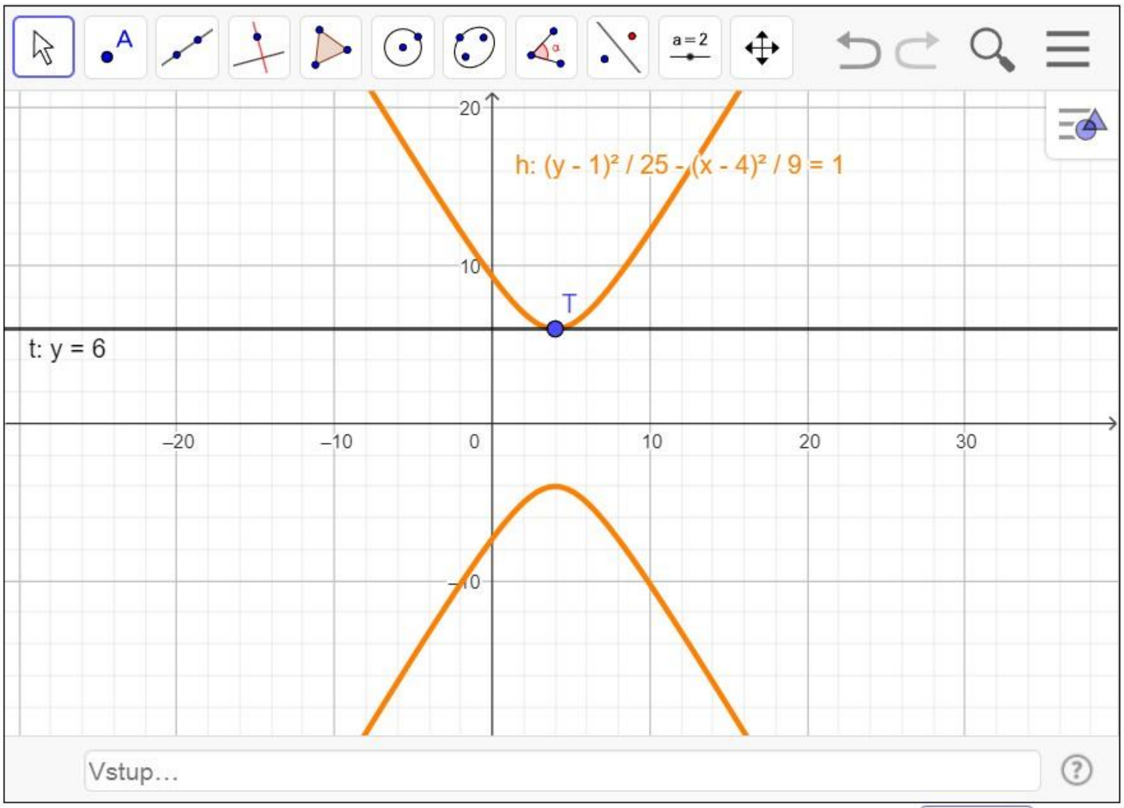
$$t\colon \frac{5(y-1)}{25} - 0 = 1$$

$$t\colon (y-1) = 5$$

$t: y = 6$

Hledaná tečna hyperboly má rovnici $t: y = 6$.

Správnost řešení si ověříme pomocí programu GeoGebra. Do vstupního pole zadáme rovnici hyperboly $h: \frac{(y-1)^2}{25} - \frac{(x-4)^2}{9} = 1$, vyznačíme si body $T[4,6]$ a pomocí nástroje tečna vykreslíme tečnu procházející bodem $T[4,6]$. U tečny si zobrazíme její rovnici, a pokud se rovná námi spočítané rovnici, řešili jsme úlohu správně.



Obr. 76: Hyperbola - úloha 6

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/yyre3jk6)

Úloha 7

Je dána hyperbola $4(x+1)^2 - y^2 = 36$. Určete rovnice všech tečen hyperboly, které jsou rovnoběžné s osami kartézské soustavy souřadnic (Kalová, 2016).

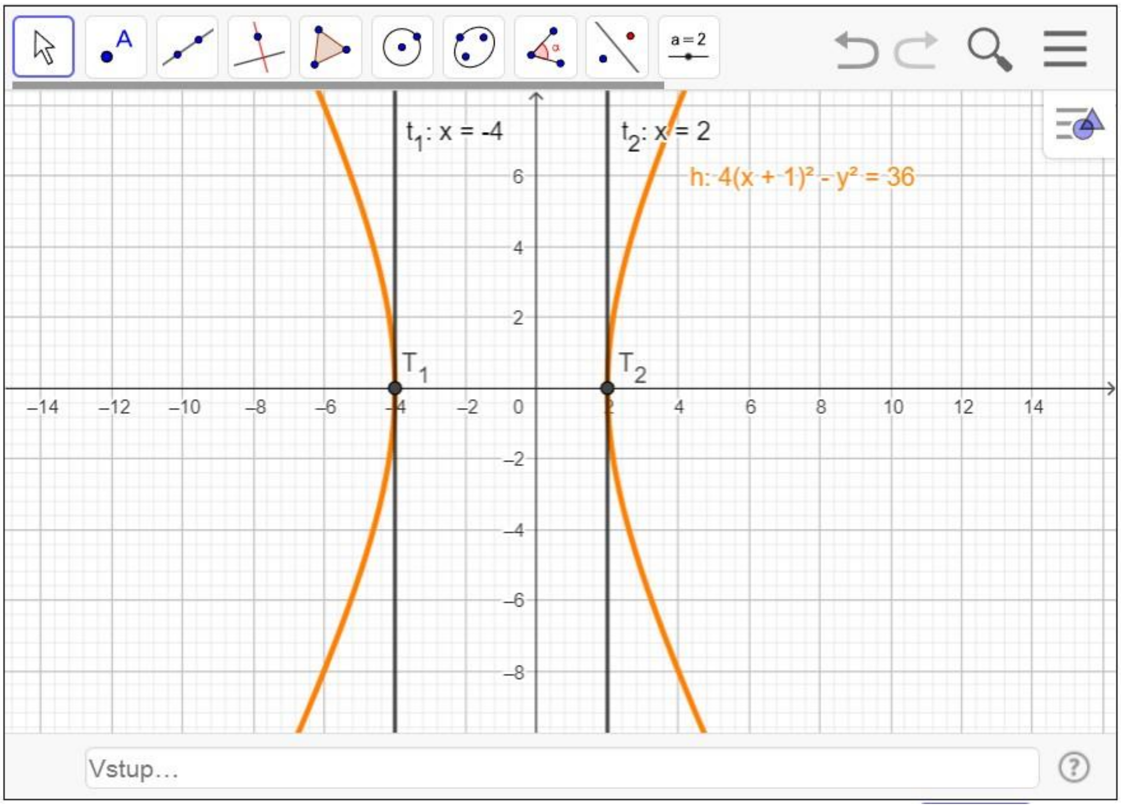
Postup řešení:

a) Osa y má rovnici $x = 0$ a s ní rovnoběžná přímka bude mít rovnici $x = k$. Protože hledáme tečnu hyperboly, můžeme do rovnice hyperboly dosadit $x = k$.
$4(k+1)^2 - y^2 = 36$
$4k^2 + 8k + 4 - y^2 - 36 = 0$

$y^2 - 4k^2 + 8k - 32 = 0$
Hledáme hodnotu parametru k, pro kterou má kvadratická rovnice jedno řešení, tedy diskriminant musí být roven nule.
$D = 0$
$0 - 4 \cdot (-4k^2 + 8k - 32) = 0$
$16k^2 + 32k - 128 = 0$
$k^2 + 2k - 8 = 0$
$(k - 2)(k + 4) = 0$
$k_1 = 2$
$k_2 = -4$
Tečny rovnoběžné s osou y mají rovnice t_1: $x = 2$ a t_2: $x = -4$.

b) Osa x má rovnici $y = 0$ a s ní rovnoběžná přímka bude mít rovnici $y = h$. Protože hledáme tečnu hyperboly, můžeme do rovnice hyperboly dosadit $y = h$.
$4(x + 1)^2 - h^2 = 36$
$4x^2 + 8x + 4 - h^2 - 36 = 0$
$4x^2 + 8x - h^2 - 32 = 0$
Hledáme hodnotu parametru h, pro kterou má kvadratická rovnice jedno řešení, tedy diskriminant musí být roven nule.
$D = 0$
$64 - 4 \cdot 4(-h^2 - 32) = 0$
$64 + 16h^2 + 512 = 0$
$h^2 + 36 = 0$
$h^2 = -36$ NELZE
Tedy tečna rovnoběžná s osou x neexistuje.

Správnost řešení si ověříme pomocí programu GeoGebra. Do vstupního pole napíšeme rovnici hyperboly a námi vypočítané rovnice tečen. Pokud mají tečny s hyperbolou jeden společný bod, počítali jsme správně.



Obr. 77: Hyperbola - úloha 7

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/afxbf8mv)

Úloha 8

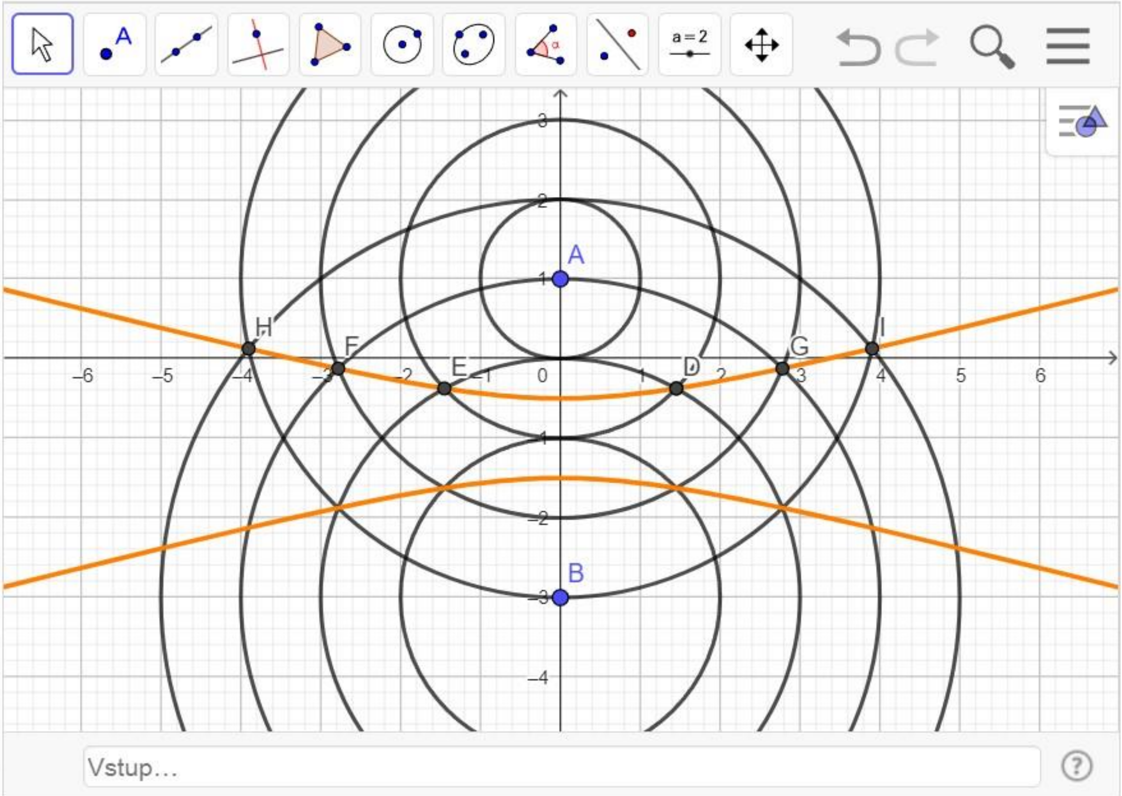
Nalezněte množinu všech bodů $X[x, y]$, které splňují podmínku, že pro body $A[0, 1], B[0, \ -3]$ platí $||AX| - |BX|| = 1$.

Použité nástroje: bod, kružnice (střed a poloměr), průsečík, kuželosečka dána pěti body

Postup řešení:

Nejprve sestrojíme zadané body $A[0,1]$ a $B[0, -3]$. Postupně sestrojíme kružnice se středy v bodech A a B, které budou mít rozdíl poloměrů roven 1, tedy $|r_A - r_B| = 1$.

Např.: první dvojice kružnic je $k_1(A, r_1 = 1)$ a $k_2(B, r_2 = 2)$, druhá dvojice kružnic je $k_3(A, r_3 = 2)$ a $k_4(B, r_4 = 3)$ a třetí dvojice kružnice je $k_5(A, r_5 = 3)$ a $k_6(B, r_6 = 4)$. Až budeme mít alespoň pět průsečíků, použijeme v GeoGebře nástroj kuželosečka dána pěti body a vykreslíme hledanou množinu bodů. Zjišťujeme, že v tomto případě by se mělo jednat o hyperbolu.



Obr. 78: Hyperbola - úloha 8

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/a65mscmt)

Důkaz provedeme pomocí výpočtů, za využití analytické geometrie.

Z podmínky $||AX| - |BX|| = 1$ pro body $A[0, 1], B[0, -3]$ a $X[x, y]$ získáváme:

$$\left|\sqrt{x^2 + (y-1)^2} - \sqrt{x^2 + (y+3)^2}\right| = 1$$

po umocnění máme

$$x^2 + (y-1)^2 - 2\sqrt{x^2 + (y-1)^2}\sqrt{x^2 + (y+3)^2} + x^2 + (y+3)^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 + x^2 + y^2 + 6y + 9 = 1 + 2\sqrt{x^2 + (y-1)^2}\sqrt{x^2 + (y+3)^2}$$

$$2x^2 + y^2 + 4y + 9 = 2\sqrt{x^2 + (y-1)^2}\sqrt{x^2 + (y+3)^2}$$

Nyní si upravíme výraz pod odmocnítkem.

$$[x^2 + (y-1)^2][x^2 + (y+3)^2] = (x^2 + y^2 - 2y + 1)(x^2 + y^2 + 6y + 9) =$$

$$= x^4 + x^2y^2 - 2x^2y + x^2 + x^2y^2 + y^4 - 2y^3 + y^2 + 6x^2y + 6y^3 - 12y^2$$

$$+6y + 9x^2 + 9y^2 - 18y + 9 =$$

$$= x^4 + y^4 + 4y^3 + 10x^2 - 2y^2 + 2x^2y^2 + 4x^2y - 12y + 9,$$

což dosadíme do rovnice pod odmocnítko.

$$2x^2 + y^2 + 4y + 9 = 2\sqrt{x^4 + y^4 + 4y^3 + 10x^2 - 2y^2 + 2x^2y^2 + 4x^2y - 12y + 9}\,.$$

Opět umocníme obě strany rovnice na druhou.

$$(2x^2 + y^2 + 4y + 9)^2 =$$

$$= 4[x^4 + y^4 + 4y^3 + 10x^2 - 2y^2 + 2x^2y^2 + 4x^2y - 12y + 9]$$

$$4x^4 + 4x^2y^2 + 8x^2y + 18x^2 + 4x^2y^2 + 4y^4 + 8y^3 + 18y^2 + 8y^3 + 16y^2 +$$

$$+36y + 18x^2 + 18y^2 + 36y + 81 =$$

$$= 4x^4 + 4y^4 + 16y^3 + 40x^2 - 8y^2 + 8x^2y^2 + 16x^2y - 48y + 36$$

Sečtením a odečtením jednotlivých členů dostaneme rovnici.

$$4x^2 - 60y^2 - 120y - 45 = 0$$

$$4x^2 - 60(y^2 + 2y + 1) = 45 - 60$$

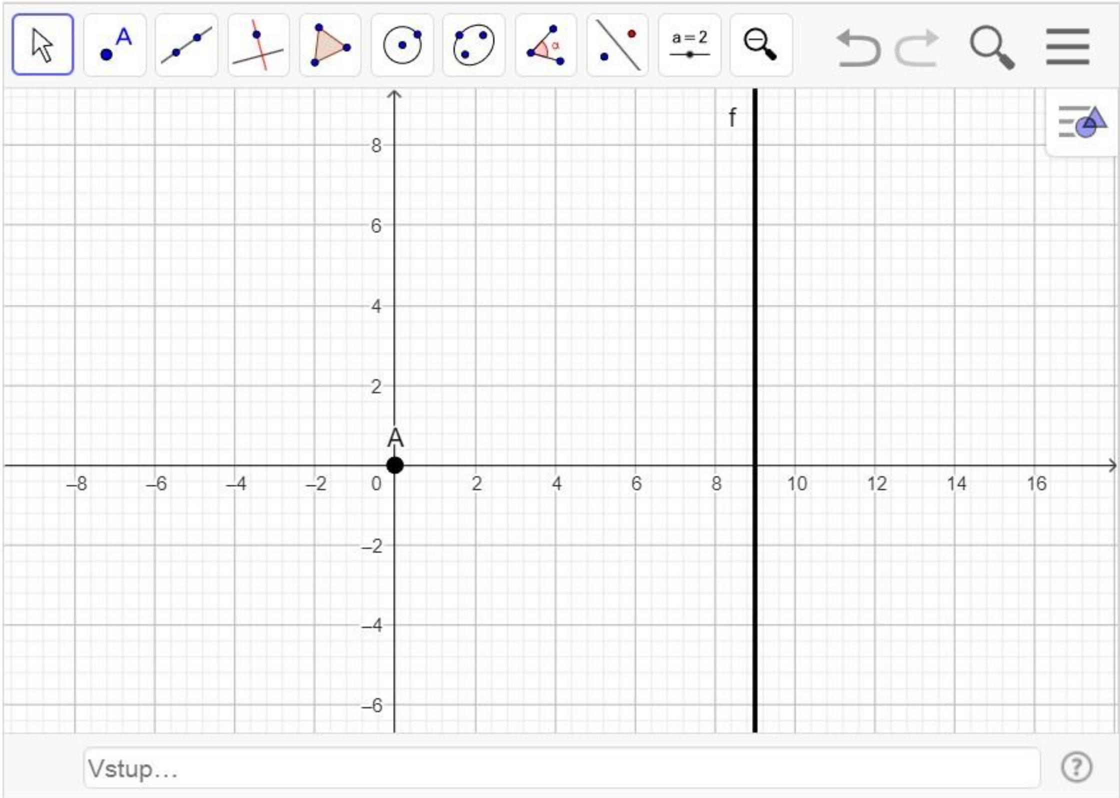
$$4x^2 - 60(y + 1)^2 = -15$$

$$4(y + 1)^2 - \frac{4x^2}{15} = 1$$

Jedná se tedy o hyperbolu se středem $S[0, -1]$.

Úloha 9

Určete množinu všech bodů $X[x, y]$, jejichž vzdálenost od počátku soustavy souřadnic a vzdálenost od přímky $x = 9$ jsou v poměru $5:4$ (Vaňatová a spol., 1987).



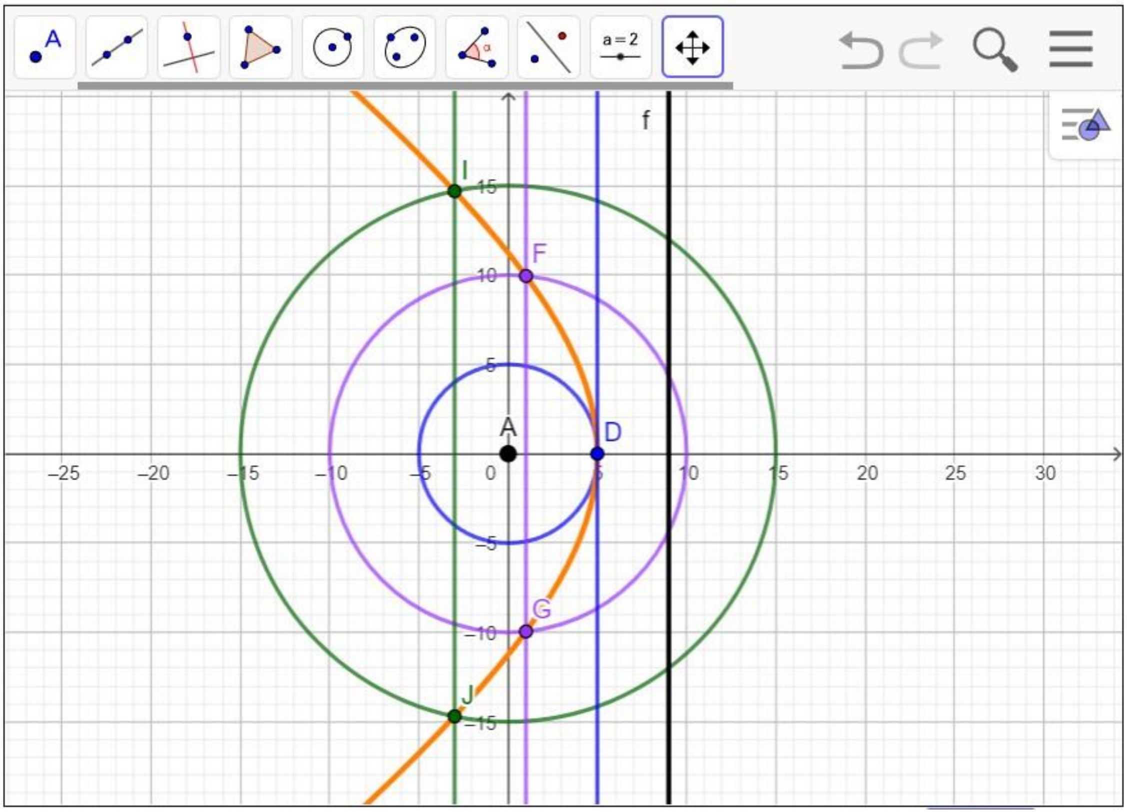
Obr. 79: Hyperbola - úloha 9 - zadání

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/rvmrmchc)

Použité nástroje: bod, přímka, rovnoběžka, kružnice (střed a poloměr), průsečík a kuželosečka určená pěti body

Postup řešení:

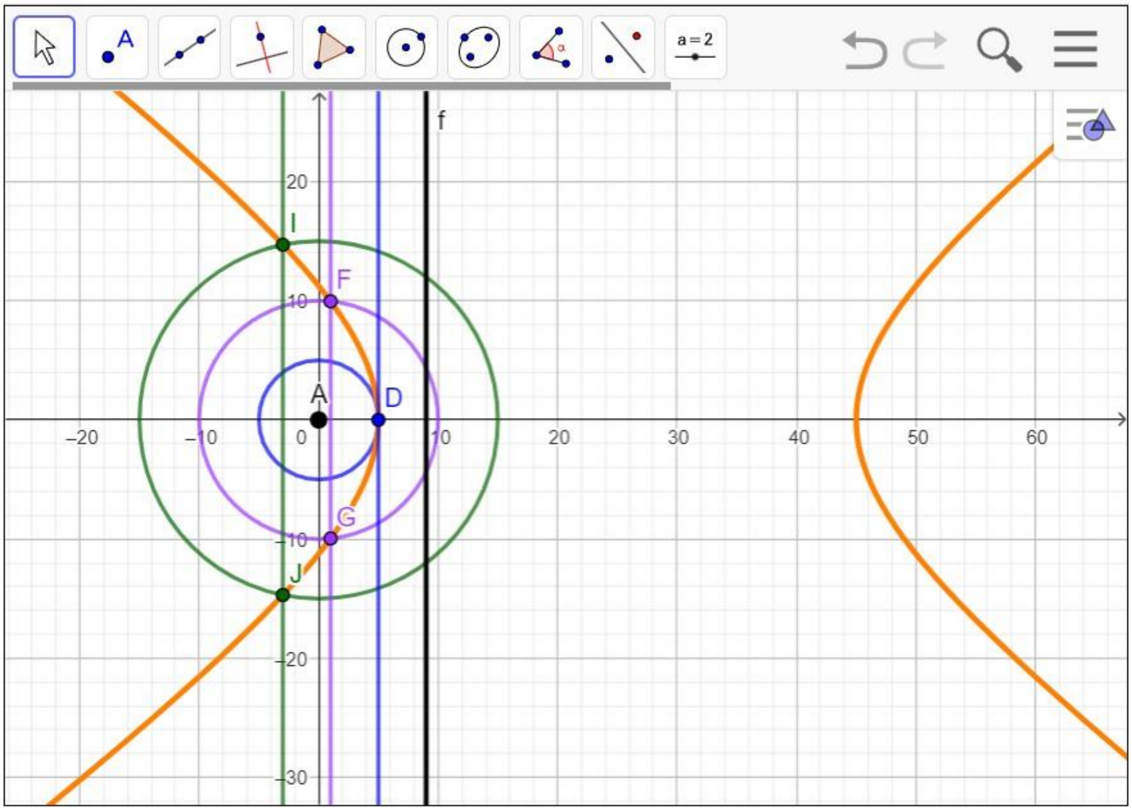
Vyznačíme si bod $A[0,0]$ jako počátek soustavy souřadnic a přímku $f: x = 9$. Nyní budeme uvažovat kružnice se středem v bodě A a poloměry $5, 10, 15$ a k nim postupně rovnoběžky s přímkou f ve vzdálenosti 4 (procházející bodem $[4,0]$), 8 (procházející bodem $[1,0]$) a 12 (procházející bodem $[-3,0]$). Nalezneme jednotlivé průsečíky a proložíme je kuželosečkou s pomocí nástroje GeoGebra kuželosečka určená pěti body. Objeví se nám křivka, která nás povede k hypotéze, že řešením je parabola.



Obr. 80: Hyperbola - úloha 9 - řešení 1

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/rvmrmchc)

Pozor ale, pokud si applet oddálíme, zjistíme, že se nejedná o parabolu, ale pravděpodobně o hyperbolu.



Obr. 81: Hyperbola - úloha 9 - řešení 2

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/rvmrmchc)

Důkaz, že jde o hyperbolu, provedeme pomocí analytické geometrie.

$4|AX| = 5|fX|$

$4\sqrt{[(x-0)^2 + (y-0)^2]} = 5\frac{|1 \cdot x + 0 \cdot y - 9|}{\sqrt{1^2+0^2}}$

$4\sqrt{x^2 + y^2} = 5|x - 9|$.

Obě strany umocníme na druhou a odstraníme tak odmocninu na levé straně.

$16(x^2 + y^2) = 25(x - 9)^2$

$16x^2 + 16y^2 = 25(x^2 - 18x + 81)$

$16x^2 + 16y^2 = 25x^2 - 450x + 2025$

$-9x^2 + 16y^2 + 450x = 2025$

$-9(x^2 - 50x) + 16y^2 = 2025.$

Nyní doplníme na úplný čtverec.

$-9(x - 25)^2 + 16y^2 = 2025 - 5625$

$$\frac{-9(x-25)^2}{-3600} + \frac{16y^2}{-3600} = 1$$

$$\frac{(x-25)^2}{400} - \frac{y^2}{225} = 1\ .$$

Tím jsme dostali rovnici hyperboly se středem v bodě [25,0] a poloosami $a = 20$ a $b = 15$.

Úloha 10

Je dána úsečka AB délky $2a$. Určete množinu všech bodů X v rovině, které mají tu vlastnost, že vzdálenost každého z nich od středu úsečky AB je rovna číslu $\sqrt{|XA||XB|}$.

Použité nástroje: bod, úsečka, vstupní pole

Postup řešení:

Tuto úlohu budeme řešit pomocí analytické geometrie pro volbu bodů $A[-a\ ,0]$ a $B[a, 0]$, a bod X o souřadnicích $[x, y]$.

Nejprve si vypočítáme souřadnice středu úsečky AB.

$$S_{AB} = \frac{A+B}{2} = \frac{[-a,0]+[a,0]}{2} = [0,0]$$

Zadání nám říká, že platí vztah $|XS_{AB}| = \sqrt{|XA||XB|}$.

$$|XS_{AB}| = \sqrt{(0-x)^2 + (0-y)^2}$$

$$|XA| = \sqrt{(-a-x)^2 + (0-y)^2}$$

$$|XB| = \sqrt{(a-x)^2 + (0-y)^2}$$

Dosadíme do vztahu $|XS_{AB}| = \sqrt{|XA||XB|}$.

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\sqrt{(-a-x)^2 + (0-y)^2}\sqrt{(a-x)^2 + (0-y)^2}}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\sqrt{[(-a-x)^2 + (0-y)^2][(a-x)^2 + (0-y)^2]}}$$

Obě strany umocníme na druhou a dostaneme výraz

$$x^2 + y^2 = \sqrt{[(-a-x)^2 + (0-y)^2][(a-x)^2 + (0-y)^2]}$$

Upravíme výraz pod odmocnítkem

$$[a^2 + 2ax + x^2 + y^2][a^2 - 2ax + x^2 + y^2] =$$

$= a^4 - 2a^3x + a^2x^2 + a^2y^2 + 2a^3x - 4a^2x^2 + 2ax^3 + 2axy^2 + a^2x^2 - 2ax^3 +$

$+x^4 + x^2y^2 + a^2y^2 - 2axy^2 + x^2y^2 + y^4 =$

$= a^4 - 2a^2x^2 + 2a^2y^2 + x^4 + y^4 + 2x^2y^2$

Upravený výraz dosadíme pod odmocnítko

$x^2 + y^2 = \sqrt{a^4 - 2a^2x^2 + 2a^2y^2 + x^4 + y^4 + 2x^2y^2}$

Obě strany rovnice umocníme na druhou a tím odstraníme odmocninu a upravíme.

$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = a^4 - 2a^2x^2 + 2a^2y^2 + x^4 + y^4 + 2x^2y^2$

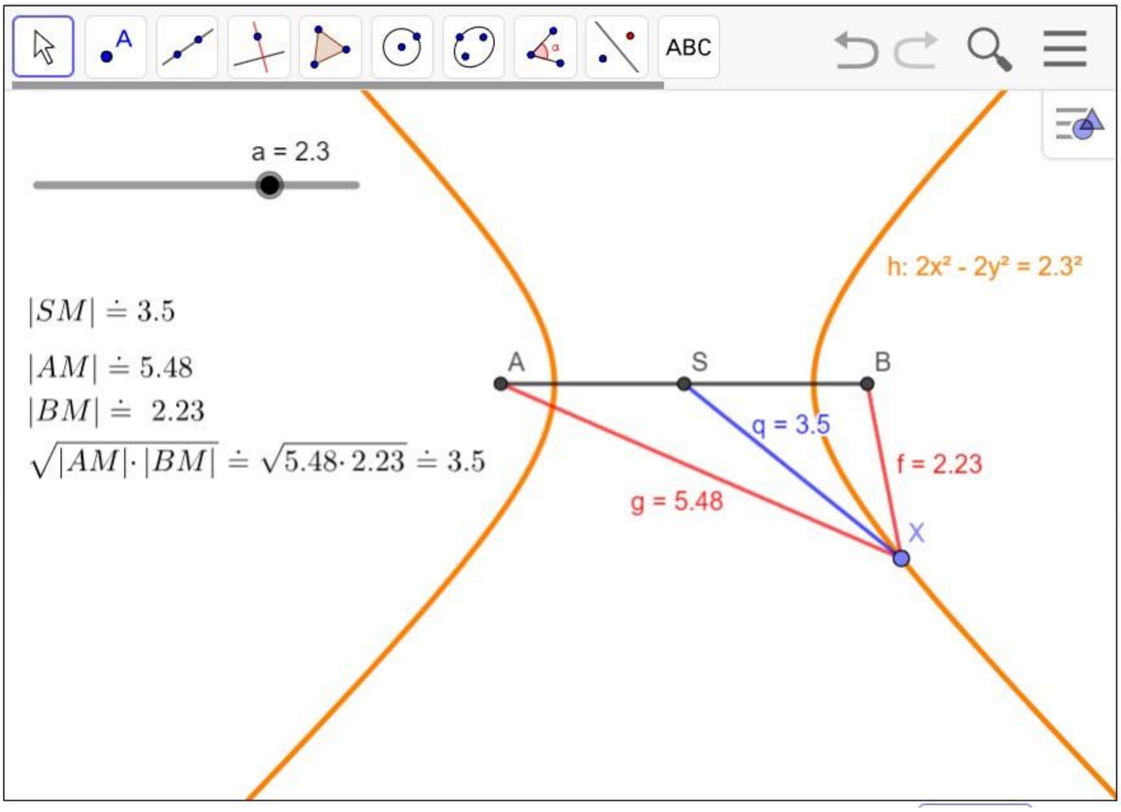
$0 = a^4 - 2a^2x^2 + 2a^2y^2$

$2x^2 - 2y^2 = a^2$

Tím jsme dostali rovnici hyperboly. Tedy hledanou množinou je hyperbola s rovnicí h: $2x^2 - 2y^2 = a^2$.

V GeoGebře si můžeme situaci vymodelovat. Nejprve použijeme nástroj posuvník s krokem 0,1. Pak si zadáme body $A[-a, 0]$, $B[a, 0]$ a vypočítanou rovnici hyperboly h: $2x^2 - 2y^2 = a^2$. Nalezneme střed úsečky AB a zvolíme si libovolný bod X na hyperbole. Sestrojíme si úsečky AX, BX a SX a zobrazíme si jejich hodnotu. Pomocí nástroje text si sepíšeme vztahy, které mají platit, tedy $|SX| = q$, $|AX| = g$, $|BX| = f$ a $\sqrt{|AX| \cdot |BX|} = \sqrt{g \cdot f}$.

Jestli platí rovnost $|SX| = \sqrt{|AX| \cdot |BX|}$, pak jsme počítali správně.



Obr. 82: Hyperbola - úloha 10

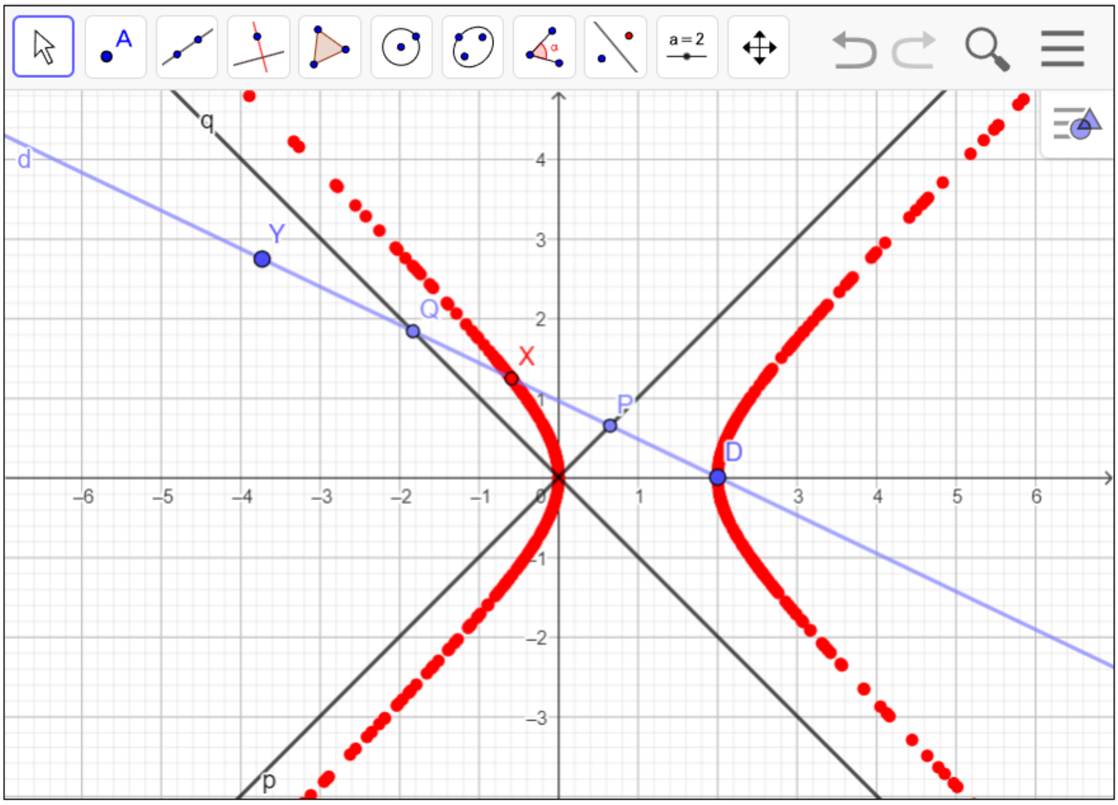
(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/su2m49rg)

Úloha 11

Uvažujme dvě různoběžné přímky $p: y = x$ a $q: y = -x$. Zvolme bod $D[2,0]$ a uvažujme libovolnou přímku d procházející bodem D se směrnicí různou od ± 1. Dále označme postupně body P, Q jako průsečíky přímky d s přímkami p, q. Nalezněte množinu všech středů úsečky PQ.

Postup řešení:

V programu GeoGebra si sestrojíme přímky $p: y = x$ a $q: y = -x$ a bod $D[2,0]$. Přímku d vedeme bodem $D[2,0]$ a libovolný bodem Y, tak aby směrnice přímky d byla různá od ± 1. Průsečíky přímky d s přímkou p a q nazveme postupně P, Q. Sestrojíme si střed úsečky PQ a nazveme ho X. Na bod X klikneme pravým tlačítkem myši a zapneme zobrazit stopu. Nyní chytneme bod Y a otočíme přímku d okolo bodu D, tím nám bod X vykreslí množinu všech středů přímky PQ. Dojdeme k hypotéze, že tato množina bodů představuje hyperbolu.



Obr. 83: Hyperbola - úloha 11

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/pw6dsev5)

Důkaz provedeme výpočtem za využití analytické geometrie. Přímka d, která prochází bodem $D[2,0]$, má rovnici $y = k(x-2)$. Nalezneme její průsečík s přímkou $p: y = x$.

$x = k(x-2)$

$x = kx - 2k$

$x = \frac{2k}{k-1}$

$y = k(y-2)$

$y = ky - 2k$

$y = \frac{2k}{k-1}$

Průsečík s přímkou p má souřadnice $P\left[\frac{2k}{k-1}, \frac{2k}{k-1}\right]$. Dále nalezneme průsečík přímky d s přímkou $q: y = -x$.

$-x = k(x-2)$

$-x = kx - 2k$

$x = \frac{2k}{k+1}$

$y = k(-y - 2)$

$y = -ky - 2k$

$y = \frac{-2k}{k+1}$

Průsečík s přímkou q má souřadnice $Q\left[\frac{2k}{k+1}, \frac{-2k}{k+1}\right]$. Vypočítáme souřadnice středu S úsečky PQ.

$$x = \frac{\frac{2k}{k-1}+\frac{2k}{k+1}}{2} = \frac{\frac{2k^2+2k+2k^2-2k}{(k-1)(k+1)}}{2} = \frac{2k^2}{k^2-1}$$

$$y = \frac{\frac{2k}{k-1}+\frac{-2k}{k+1}}{2} = \frac{\frac{2k^2+2k-2k^2+2k}{(k-1)(k+1)}}{2} = \frac{2k}{k^2-1}$$

Střed úsečky PQ má souřadnice $S\left[\frac{2k^2}{k^2-1}, \frac{2k}{k^2-1}\right]$. Dále pro souřadnice středu platí, že $\frac{x}{y} = k$. Pak platí:

$$y = \frac{2\frac{x}{y}}{\frac{x^2}{y^2}-1}$$

$$y = \frac{2\frac{x}{y}}{\frac{x^2-y^2}{y^2}}$$

$$y = \frac{2xy}{x^2-y^2}$$

$$x^2 - y^2 = \frac{2xy}{y}$$

$$x^2 - 2x - y^2 = 0$$

$$(x-1)^2 - y^2 = 1$$

Jedná se tedy o hyperbolu s rovnicí $(x-1)^2 - y^2 = 1$ a se středem v bodě $S_h[1,0]$.

Opakování

Úloha 1

Určete množinu všech bodů, jejichž souřadnice vyhovují rovnici:

a) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 23 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 12y - 13 = 0$
c) $9x^2 + 25y^2 - 54x - 100y - 44 = 0$
d) $4x^2 + 9y^2 - 8x - 32 = 0$

(Vaňatová a spol., 1987)

Postup řešení:

Ve všech případech musíme doplnit na úplný čtverec a výraz upravit.

a) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 23 = 0$
$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 = 23 + 9 + 4$
$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 36$
$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 6^2$

Díky úpravám jsme dostali rovnici kružnice $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 6^2$ se středem v bodě $S[3,-2]$ a poloměrem $r = 6$.

b) $x^2 + y^2 + 12y - 13 = 0$
$x^2 + y^2 + 12y + 36 = 13 + 36$
$x^2 + (y+6)^2 = 49$
$x^2 + (y+6)^2 = 7^2$

Díky úpravám jsme dostali rovnici kružnice $x^2 + (y+6)^2 = 7^2$ se středem v bodě $S[0,-6]$ a poloměrem $r = 7$.

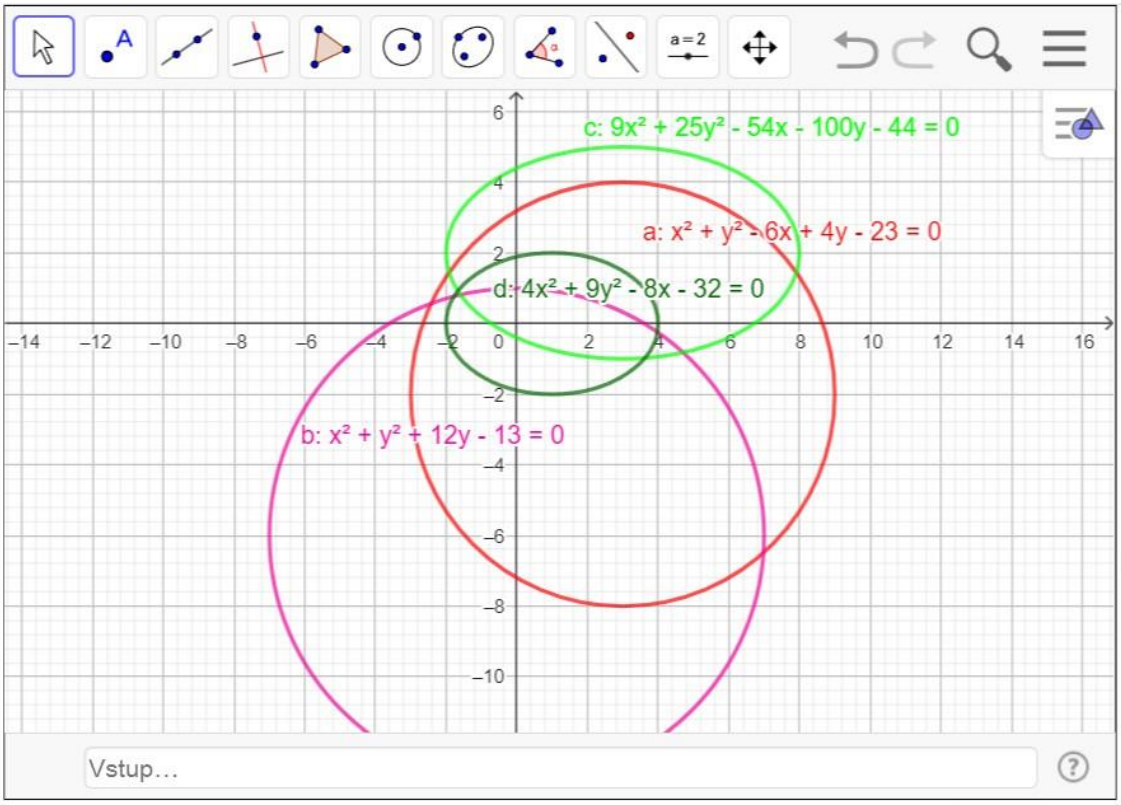
c) $9x^2 + 25y^2 - 54x - 100y - 44 = 0$
$9(x^2 - 6x + 9) + 25(y^2 - 4y + 4) = 44 + 81 + 100$
$9(x-3)^2 + 25(y-2)^2 = 225$
$\frac{9(x-3)^2}{225} + \frac{25(y-2)^2}{225} = 1$
$\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

Díky úpravám jsme dostali rovnici elipsy $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ se středem v bodě $S[3,2]$, hlavní poloosou $2a = 10$ a vedlejší poloosou $2b = 6$.

d) $4x^2 + 9y^2 - 8x - 32 = 0$
$4(x^2 - 2x + 1) + 9y^2 = 32 + 4$
$4(x-1)^2 + 9y^2 = 36$
$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

Díky úpravám jsme dostali rovnici elipsy $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ se středem v bodě $S[1,0]$, hlavní poloosou $2a=6$ a vedlejší poloosou $2b=4$.

Správnost řešení si ověříme v programu GeoGebra tak, že do vstupního pole napíšeme všechny zadané rovnice.



Obr. 84: Opakování - úloha 1

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/d2qv7pcw)

Úloha 2

Určete množinu všech bodů, jejichž souřadnice vyhovují rovnici:

a) $4x^2-25y^2+16x+50y-109=0$
b) $-16x^2+9y^2-144=0$
c) $x^2-8x-4y+12=0$
d) $y^2+8x-24=0$

Postup řešení:

a) $4x^2-25y^2+16x+50y-109=0$
$4(x^2+4x+4)-25(y^2-2y+1)=109+16-25$
$4(x+2)^2-25(y-1)^2=100$
$\frac{(x+2)^2}{25}-\frac{(y-1)^2}{4}=1$

Díky úpravám jsme dostali rovnici hyperboly $\frac{(x+2)^2}{25} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$ se středem v bodě $S[-2,1]$, hlavní poloosou $2a = 10$ a vedlejší poloosou $2b = 4$.

b) $-16x^2 + 9y^2 - 144 = 0$
$9y^2 - 16x^2 = 144$
$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

Díky úpravám jsme dostali rovnici hyperboly $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ se středem v bodě $S[0,0]$, hlavní poloosou $2a = 8$ a vedlejší poloosou $2b = 6$.

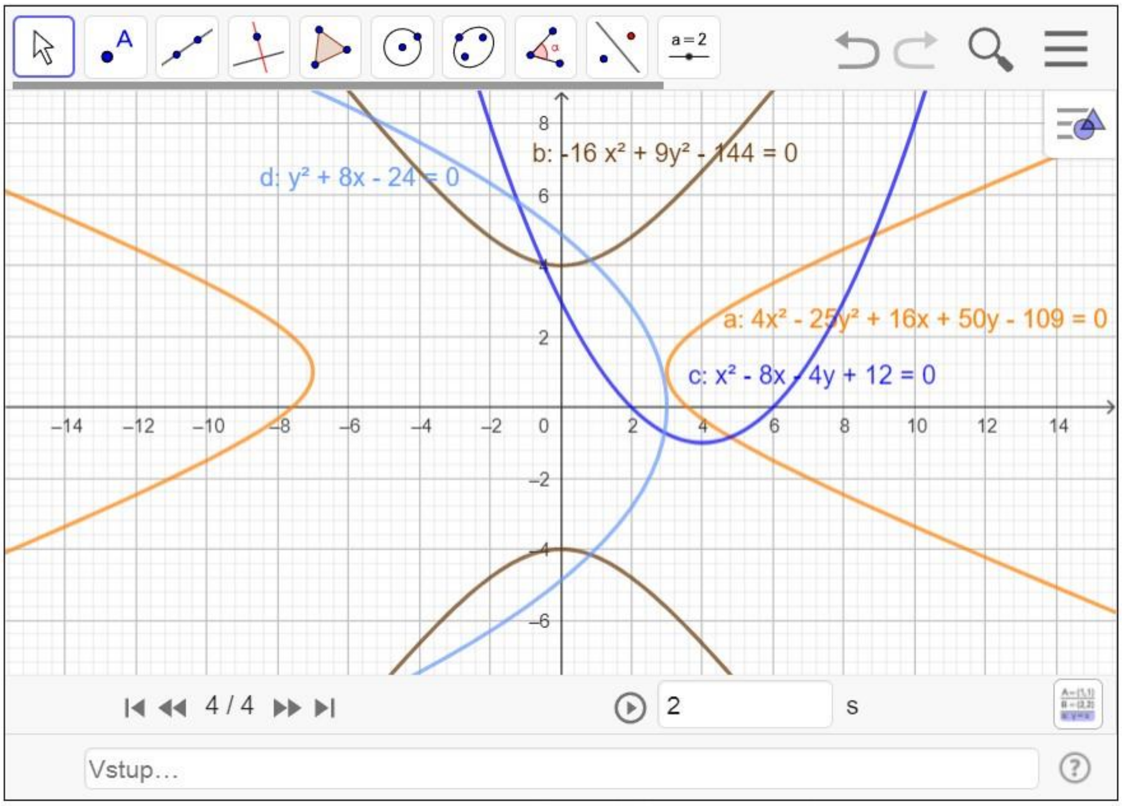
c) $x^2 - 8x - 4y + 12 = 0$
$x^2 - 8x + 16 = 4y - 12 + 16$
$(x-4)^2 = 4(y+1)$

Díky úpravám jsme dostali rovnici paraboly $(x-4)^2 = 4(y+1)$ s vrcholem $V[4,-1]$ a parametrem $p = 2$.

d) $y^2 + 8x - 24 = 0$
$y^2 = 24 - 8x$
$y^2 = -8(x-3)$

Díky úpravám jsme dostali rovnici paraboly $y^2 = -8(x-3)$ s vrcholem $V[3,0]$ a parametrem $p = 4$.

Správnost řešení si ověříme v programu GeoGebra tak, že do vstupního pole napíšeme všechny zadané rovnice.



Obr. 85: Opakování - úloha 2

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/qrqfaeu2)

Úloha 3

Napište rovnici přímky p, která prochází středy kružnic, jejichž středové rovnice jsou $(x-2)^2 + y^2 = 16, x^2 + (y-3)^2 = 9$ (Bušek, 1996).

Postup řešení:

Střed první kružnice má souřadnice $S_1[2,0]$ a střed druhé kružnice má střed $S_2[0,3]$. Vypočítáme si směrový vektor $(S_2 - S_1) = (0 - 2,3 - 0) = (-2,3)$. Nyní máme dvě možnosti, můžeme nalézt parametrické vyjádření přímky p nebo obecnou rovnici přímky p.

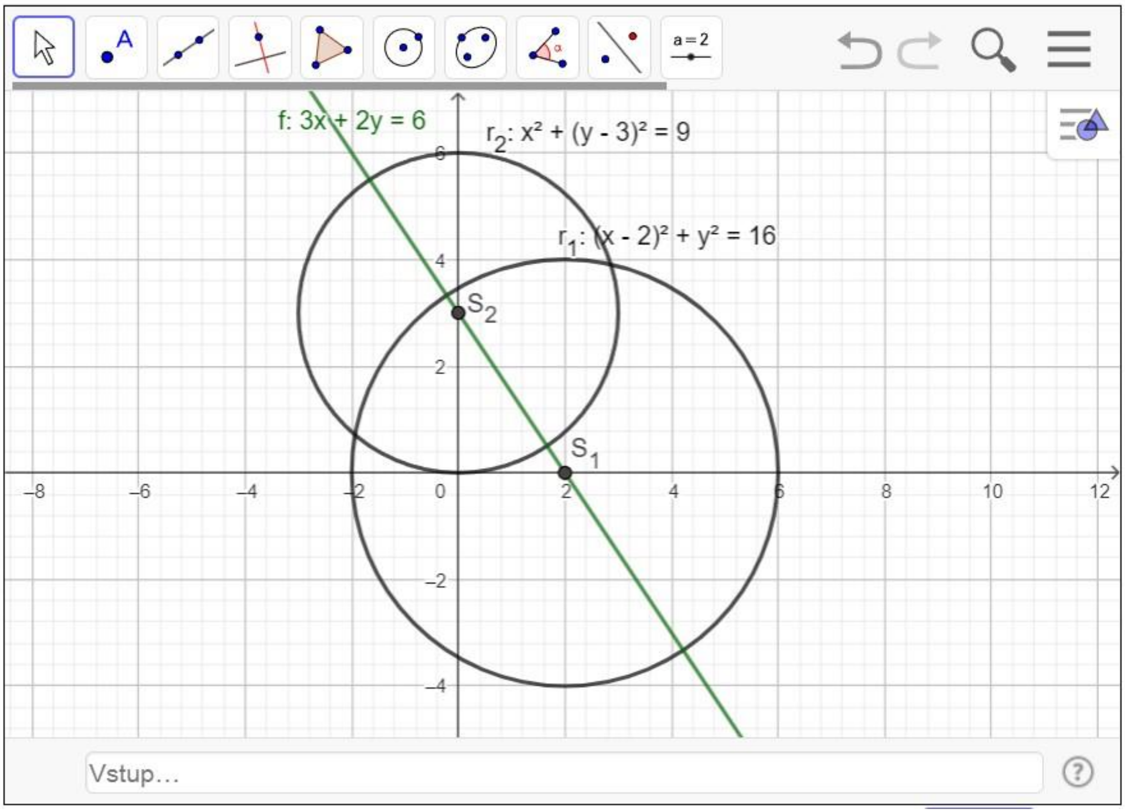
1. Parametrické vyjádření přímky p

   Potřebujeme znát jeden bod, který leží na přímce p a její směrový vektor. Bodem je jeden ze středů kružnic a směrový vektor jsme si vypočítali. Parametrické vyjádření přímky p tedy vypadá takto:
   $S_1 \in p$:
   $x = 2 - 2t$
   $y = 3t, t \in R$

2. Obecná rovnice přímky p

   Potřebujeme znát jeden bod, který leží na přímce p a její normálový vektor. Bodem je jeden ze středů kružnic a normálový vektor má souřadnice třeba $\vec{n}(3,2)$. Obecná rovnice přímky p bude mít tvar $3x + 2y + c = 0$. Číslo c vypočítáme tak, že do rovnice dosadíme souřadnice jednoho středu kružnice.
   $S_1 \in p$:
   $6 + 0 + c = 0$
   $c = -6$
   Obecná rovnice přímky p má tvar $3x + 2y - 6 = 0$.

Ověření provedeme pomocí programu GeoGebra. Sestrojíme si obě kružnice. Můžeme jejich rovnice napsat do vstupního pole, nebo si vyznačit střed kružnice a zadat její poloměr. Poté vedeme přímku body S_1 a S_2. Zobrazíme si rovnici přímky, a pokud je shodná s tou námi vypočítanou, tak jsme počítali správně.



Obr. 86: Opakování - úloha 3

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/eemk2ypy)

Úloha 4

Jsou dány body $A[1,3]$ a $C[5,7]$. Určete rovnici kružnice vepsané čtverci $ABCD$ s úhlopříčkou AC (Kalová, 2016).

Postup řešení:

Nalezneme střed úhlopříčky AC.

$S_{AC} = \left[\frac{1+5}{2}, \frac{3+7}{2}\right] = [3,5]$

Dále si spočítáme vzdálenost bodů $|S_{AC}C|$.

$|S_{AC}C| = \sqrt{(5-3)^2 + (7-5)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

Pro pravoúhlý trojúhelník $S_{AC}CS_{BC}$ musí platit Pythagorova věta, díky které vypočítáme poloměr kružnice, jehož velikost odpovídá vzdálenosti bodů CS_{BC}.

$|S_{AC}C|^2 = r^2 + r^2$

$\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 2r^2$

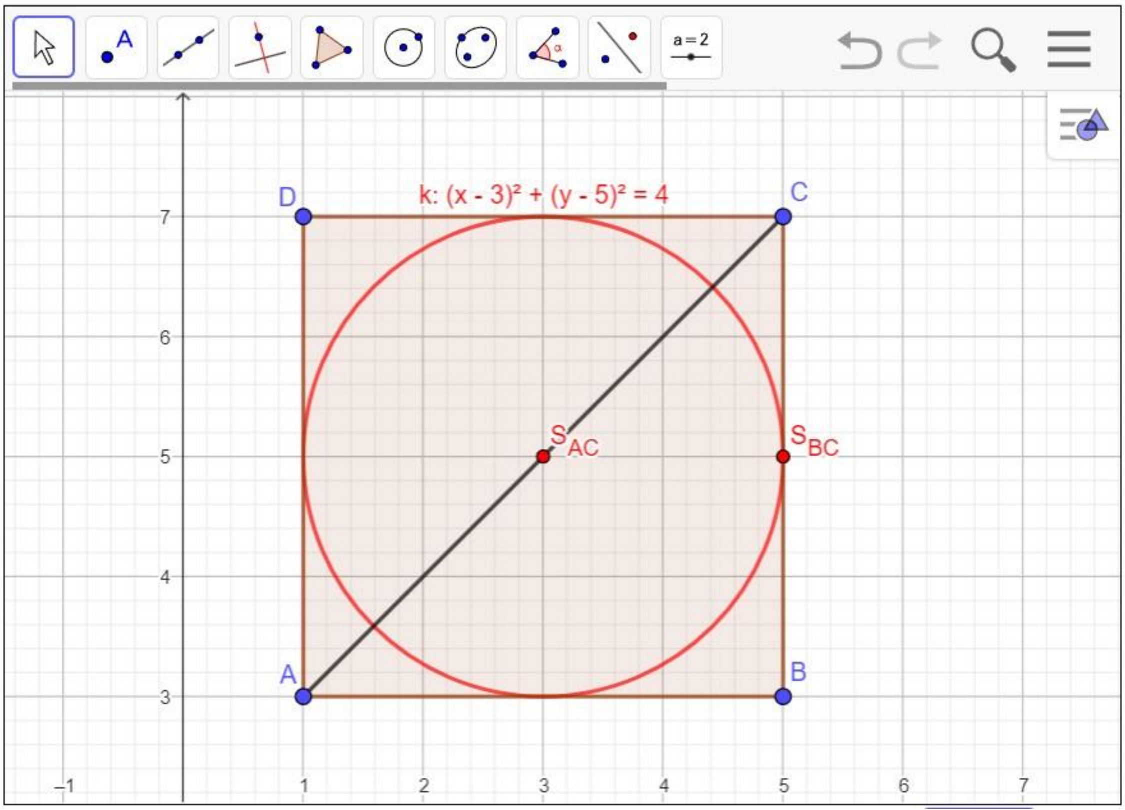
$8 = 2r^2$

$4 = r^2 \Longrightarrow r = \pm 2.$

Poloměr však nemůže nabývat záporné hodnoty, proto se $r = 2$.

Hledaná kružnice musí mít střed v bodě $S_{AC}[3,5]$ a poloměr rovný číslu $r = 2$. Rovnice kružnice má tedy tvar $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 4$.

Správnost řešení si ověříme pomocí programu GeoGebra. Vyznačíme si body $A[1,3]$ a $C[5,7]$. Sestrojíme čtverec $ABCD$. Dále nalezneme střed úsečky AC a střed úsečky BC. Sestrojíme kružnice se středem v bodě S_{AC} a poloměrem $r = |S_{AC}S_{BC}|$. U kružnice si zapneme zobrazení názvu a hodnoty. Pokud rovnice odpovídá té naší, řešili jsme úlohu správně.



Obr. 87: Opakování - úloha 4

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/sc3rhejz)

Úloha 5

Napište rovnici hyperboly, jejíž vrcholy jsou současně ohnisky elipsy dané rovnicí $16x^2 + 25y^2 = 400$ a jejíž ohniska jsou hlavní vrcholy elipsy (Bušek, 1996).

Postup řešení:

Nejprve si upravíme rovnici elipsy na rovnici středovou.

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Nyní víme, že elipsa má střed v bodě $S[0,0]$ a velikost hlavní poloosy je $a = 5$ a velikost vedlejší poloosy je $b = 4$. Hlavní vrcholy elipsy musí ležet na ose x a mít vzdálenost od středu elipsy rovnou číslu $a = 5$. Hlavní vrcholy elipsy, respektive ohniska hyperboly, mají souřadnice $E_h[-5,0]$, $F_h[5,0]$.

Dále si vypočítáme excentricitu elipsy, pro kterou platí vztah:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3.$$

Tím můžeme určit souřadnice ohnisek elipsy, respektive vrcholy hyperboly, které opět leží na ose x. Jsou jimi body $E_e[-3,0]$, $F_e[3,0]$.

Pro každý bod $X[x, y]$ hledané hyperboly musí platit vztah:

$\big||E_hX| - |F_hX|\big| = |E_eF_e|$.

Nejprve si vypočítáme vzdálenost ohnisek elipsy.

$|E_eF_e| = \sqrt{(-3-3)^2 + 0^2} = \sqrt{(-6)^2} = 6$

Dosadíme do vztahu $\big||E_hX| - |F_hX|\big| = |E_eF_e|$ a upravíme jej.

$\big||E_hX| - |F_hX|\big| = 6$

$\left|\sqrt{(x+5)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-5)^2 + (y-0)^2}\right| = 6$

Umocníme obě strany rovnice na druhou a upravíme.

$(x+5)^2 + y^2 - 2\sqrt{(x+5)^2 + y^2}\sqrt{(x-5)^2 + y^2} + (x-5)^2 + y^2 = 36$

$x^2 + 10x + 25 + y^2 + x^2 - 10x + 25 + y^2 = 36 + 2\sqrt{(x+5)^2 + y^2}\sqrt{(x-5)^2 + y^2}$

$2x^2 + 2y^2 + 50 - 36 = 2\sqrt{(x+5)^2 + y^2}\sqrt{(x-5)^2 + y^2}$

$x^2 + y^2 + 7 = \sqrt{(x+5)^2 + y^2}\sqrt{(x-5)^2 + y^2}$

Nyní obě strany opět umocníme na druhou a postupně upravíme.

$(x^2 + y^2 + 7)(x^2 + y^2 + 7) = (x^2 + 10x + 25 + y^2)(x^2 - 10x + 25 + y^2)$

$x^4 + x^2y^2 + 7x^2 + x^2y^2 + y^4 + 7y^2 + 7x^2 + 7y^2 + 49 =$

$= x^4 - 10x^3 + 25x^2 + x^2y^2 + 10x^3 - 100x^2 + 250x + 10xy^2 + 25x^2 + 625 +$

$+25y^2 + x^2y^2 - 10xy^2 + 25y^2 + y^4$

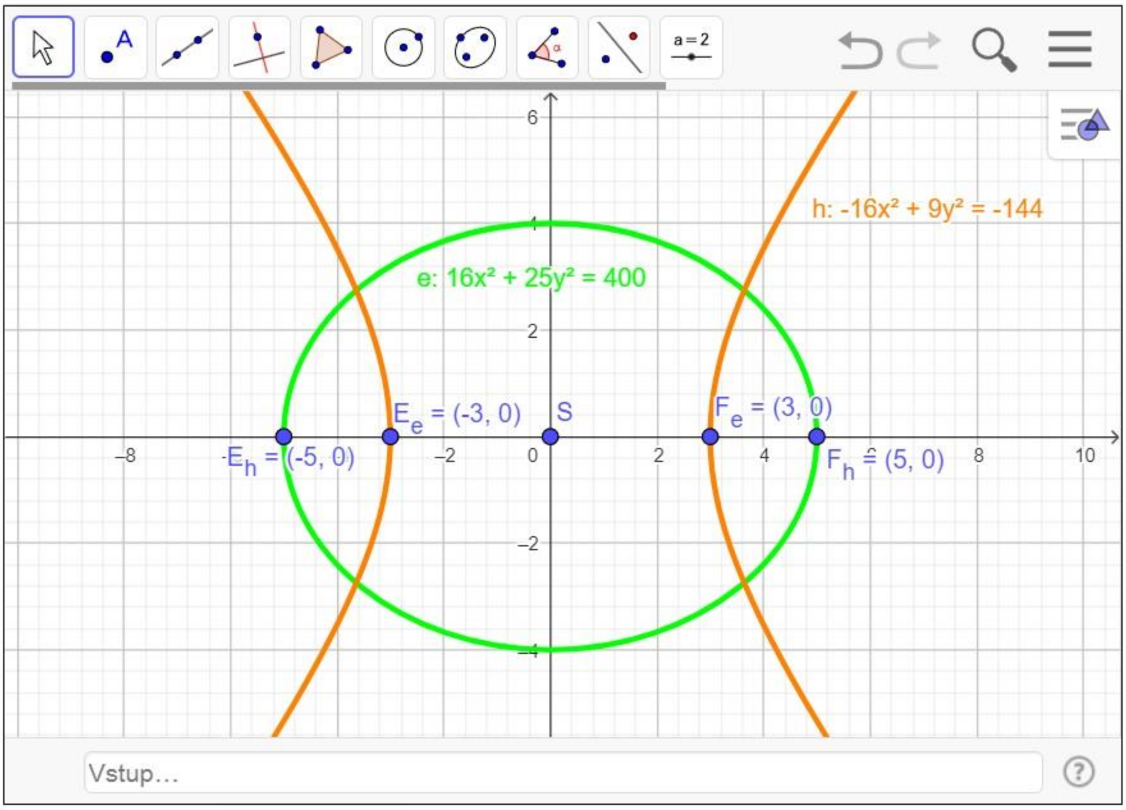
$14x^2 + 14y^2 + 49 = -50x^2 + 50y^2 + 625$

$64x^2 - 36y^2 = 576$

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

Hledaná hyperbola má rovnici $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

Správnost řešení si ověříme pomocí programu GeoGebra. Nejprve si do vstupního pole napíšeme rovnici zadané elipsy. Vyznačíme si ohniska a hlavní vrcholy elipsy. Pomocí nástroje hyperbola sestrojíme hyperbolu splňující podmínky uvedené v zadání a zobrazíme si její rovnici. Pokud je rovnice shodná s tou naší, řešili jsme úlohu správně.



Obr. 88: Opakování - úloha 5

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/wprnwudh)

Úloha 6

Určete průsečíky elipsy $x^2 + 2y^2 - 6 = 0$ a hyperboly $x^2 - y^2 - 3 = 0$ (Vošický, 1999).

Postup řešení:

Abychom nalezli průsečíky elipsy a hyperboly, budeme muset vyřešit soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

$x^2 + 2y^2 - 6 = 0,$

$x^2 - y^2 - 3 = 0.$

Od první rovnice odečteme druhou rovnici a odstraníme tak neznámou x.

$3y^2 - 3 = 0$

$y^2 = 1$

$y = \pm 1$

Nyní dosadíme vypočítanou hodnotu y do jedné z rovnic a vypočítáme si x.

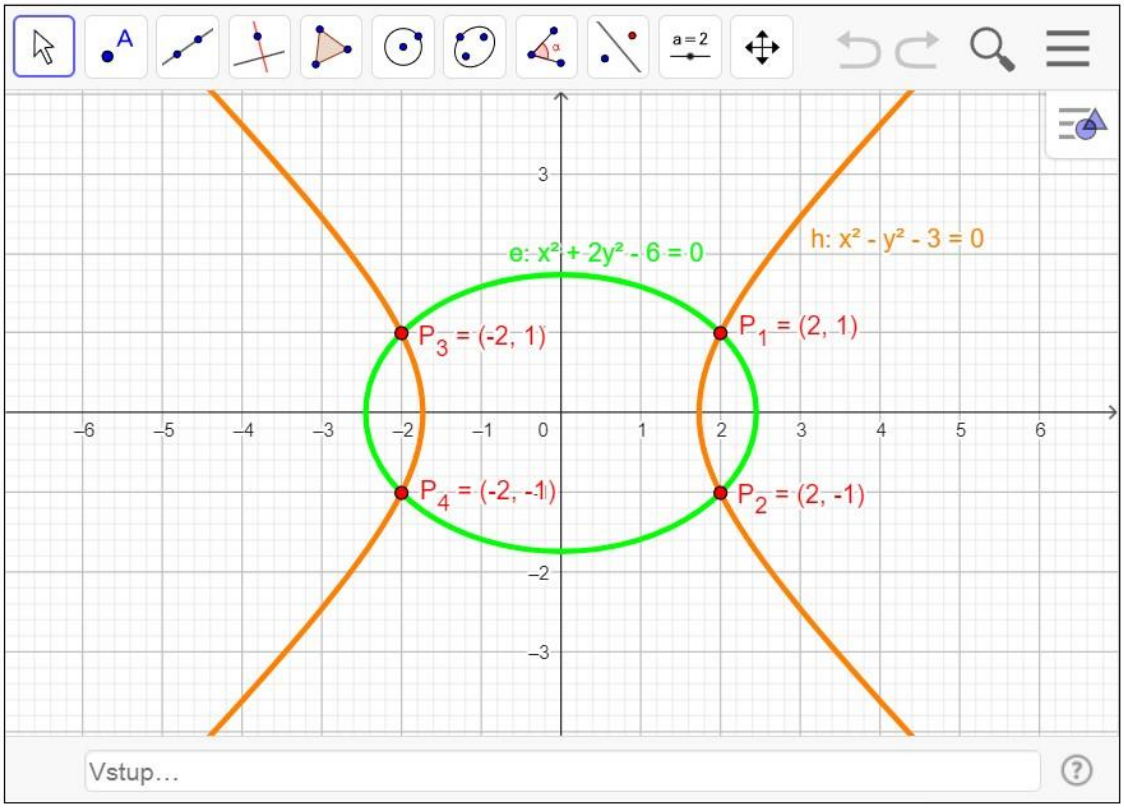
$x^2 - (-1)^2 - 3 = 0$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

Výpočtem jsme zjistili hodnoty souřadnic všech průsečíku elipsy a hyperboly. Průsečíky jsou tedy body $P_1[2,1]$, $P_2[2,-1]$, $P_3[-2,1]$ a $P_4[-2,-1]$.

Řešení si ověříme v programu GeoGebra, kde si do vstupního pole zadáme obě rovnice kuželoseček a pak nalezneme jejich průsečíky.



Obr. 89: Opakování - úloha 6

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/m7hjepzy)

Úloha 7

Je dána elipsa s rovnicí $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{12} = 1$.

a) Určete body elipsy M a $\overline{M}$, jejichž x-ová souřadnice je rovna 3.
b) Napište rovnice tečen elipsy v bodech M a $\overline{M}$.
c) Vypočítejte odchylku tečen elipsy v bodech M a $\overline{M}$.

(Kalová, 2016)

Postup řešení:

a) Body $M[3, y_M]$ a $\overline{M}[3, y_{\overline{M}}]$ jsou body elipsy. Tudíž nám stačí dosadit do rovnice elipsy za x číslo 3 a vyjádřit si neznámou souřadnici y.

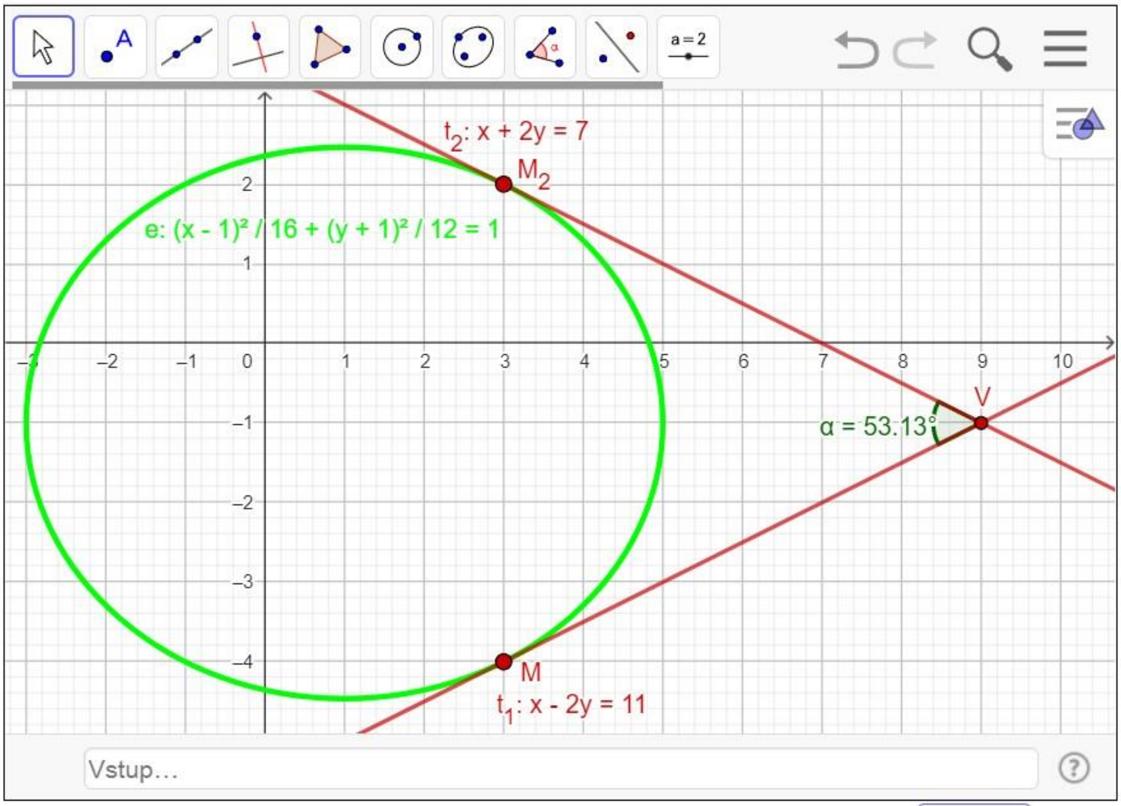
$\frac{(3-1)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{12} = 1$
$\frac{4}{16} + \frac{y^2+2y+1}{12} = 1$
$3 + y^2 + 2y + 1 = 12$
$y^2 + 2y - 8 = 0$
$(y+4)(y-2) = 0$
$y_M = -4$
$y_{\bar{M}} = 2$
Body mají souřadnice $M[3,-4]$ a $\bar{M}[3,2]$.

b) Body $M[3,-4]$ a $\bar{M}[3,2]$ jsou body dotyku hledaných tečen, proto můžeme dosadit do obecné rovnice tečny elipsy, která má tvar:
$\frac{(x-1)(x_T-1)}{16} + \frac{(y+1)(y_T+1)}{12} = 1.$
$M \in t_1: \frac{(x-1)(3-1)}{16} + \frac{(y+1)(-4+1)}{12} = 1$
$M \in t_1: \frac{2(x-1)}{16} + \frac{(-3)(y+1)}{12} = 1$
$M \in t_1: \frac{(x-1)}{8} - \frac{(y+1)}{4} = 1$
$M \in t_1: (x-1) - 2(y+1) = 8$
$M \in t_1: x - 2y - 11 = 0$

$\bar{M} \in t_2: \frac{(x-1)(3-1)}{16} + \frac{(y+1)(2+1)}{12} = 1$
$\bar{M} \in t_2: \frac{2(x-1)}{16} + \frac{3(y+1)}{12} = 1$
$\bar{M} \in t_2: \frac{(x-1)}{8} + \frac{(y+1)}{4} = 1$
$\bar{M} \in t_2: (x-1) + 2(y+1) = 8$
$\bar{M} \in t_2: x + 2y - 7 = 0$
Hledané tečny mají rovnice $t_1: x - 2y - 11 = 0$ a $t_2: x + 2y - 7 = 0$.

c) Směrový vektor tečny t_1 má souřadnice $(2,1)$ a směrový vektor tečny t_2 má souřadnice $(2,-1)$. Pro odchylku dvou přímek platí vztah:
$\cos\alpha = \frac{|u_1 v_1 + u_2 v_2|}{\sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2} \cdot \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2}}$
$\cos\alpha = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1)|}{\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2}}$
$\cos\alpha = \frac{|3|}{\sqrt{5}\sqrt{5}}$
$\cos\alpha = \frac{3}{5}$
$\alpha = 53°7'48''$
Tečny svírají úhel $\alpha = 53°7'48''$.

Správnost řešení si ověříme pomocí programu GeoGebra. Do vstupního pole si zadáme rovnici elipsy a souřadnice bodů $M[3,-4]$ a $\bar{M}[3,2]$. Body $M[3,-4]$ a $\bar{M}[3,2]$ vedeme tečny k elipse, u kterých si zapneme zobrazení názvu a hodnoty, tedy rovnice. Zobrazíme si úhel, který tečny svírají. Pokud se rovnice a hodnoty rovnají těm, které jsme vypočítali, řešili jsme úlohu správně.



Obr. 90: Opakování - úloha 7

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/pgjaf3qu)

Úloha 8

Vypočítejte délku tětivy, kterou na přímce $p: x = 1 + 2t, y = -2 + t, t \in R$, vytíná parabola popsaná rovnicí $(x-3)^2 = -4y$ (Kalová, 2016).

Postup řešení:

Nejprve si převedeme parametrické vyjádření přímky na obecnou rovnici přímky. Potřebujeme znát normálový vektor $\vec{n}(-1{,}2)$ a bod $A[1,-2]$.

$p: \; -x + 2y + c = 0$

$A \in p: -1 + 2 \cdot (-2) + c = 0$

$A \in p: c = 5$

Přímka p má obecnou rovnici $p: \; -x + 2y + 5 = 0$. Abychom nalezli průsečíky přímky a paraboly, za x dosadíme do rovnice paraboly výraz $2y + 5$ a upravíme.

$(2y + 5 - 3)^2 = -4y$

$4y^2 + 8y + 4 + 4y = 0$

$y^2 + 3y + 1 = 0$

Pomocí diskriminantu nalezneme kořeny rovnice.

$D = 9 - 4 = 5$

$y_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ a $y_2 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$

Dopočítáme si x-ové souřadnice bodů.

$x_1 = 2\frac{-3+\sqrt{5}}{2} + 5 = 2 + \sqrt{5}$

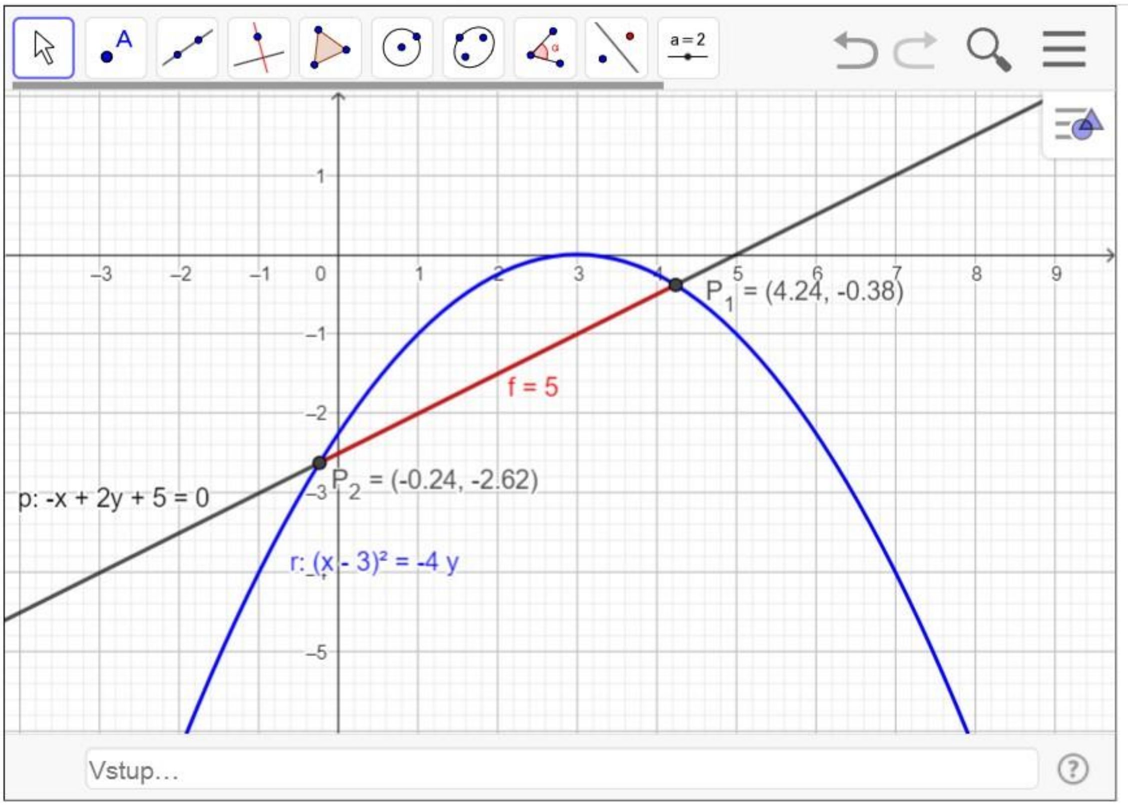
$x_2 = 2\frac{-3-\sqrt{5}}{2} + 5 = 2 - \sqrt{5}$

Průsečíky paraboly a přímky mají souřadnice $P_1\left[2+\sqrt{5}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right]$ a $P_2\left[2-\sqrt{5}, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right]$. Vypočítáme vzdálenost bodů $|P_1P_2|$.

$|P_1P_2| = \sqrt{\left(-2\sqrt{5}\right)^2 + \left(-\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{20+5} = \sqrt{25} = 5.$

Tětiva má délku rovnou číslu 5.

Úlohu si ověříme pomocí programu GeoGebra, kde do vstupního pole zadáme rovnici přímky a paraboly. Vyznačíme si průsečíky přímky a paraboly a úsečku P_1P_2, u které si zobrazíme název a hodnotu.



Obr. 91: Opakování - úloha 8

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/ywrreucn)

Úloha 9

Je dána elipsa $16x^2 + 25y^2 = 400$. Napište rovnici některé paraboly, která má vrchol ve středu dané elipsy a má s elipsou společné ohnisko. Určete průsečíky elipsy a paraboly.

Postup řešení:

Střed elipsy má souřadnice $S[0,0]$, tedy vrchol paraboly má také souřadnice $V[0,0]$. Pro elipsu platí, že $a^2 - b^2 = e^2$, kde $a = 5$, $b = 4$. Vypočítáme si excentricitu.

$e = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$

Tedy ohniska elipsy mají souřadnice $E[-3,0]$ a $F[3,0]$. Ohnisko $F[3,0]$ bude zároveň ohniskem paraboly, kde platí, že $F[3,0] = F\left[\frac{p}{2}, 0\right]$, tedy $p = 6$.

Parabola bude mít rovnici $y^2 = 2px$, tedy $y^2 = 12x$. Průsečíky elipsy a paraboly vypočítáme tak, že dosadíme $y^2 = 12x$ do rovnice elipsy.

$16x^2 + 25 \cdot 12x = 400$

$16x^2 + 300x - 400 = 0$

$D = 300^2 - 4 \cdot 16 \cdot (-400) = 90000 + 25600 = 115600 = 340^2$

$x_1 = \frac{-300+340}{32} = \frac{40}{32} = \frac{5}{4}$

$x_2 = \frac{-300-340}{32} = -\frac{640}{32} = -20$

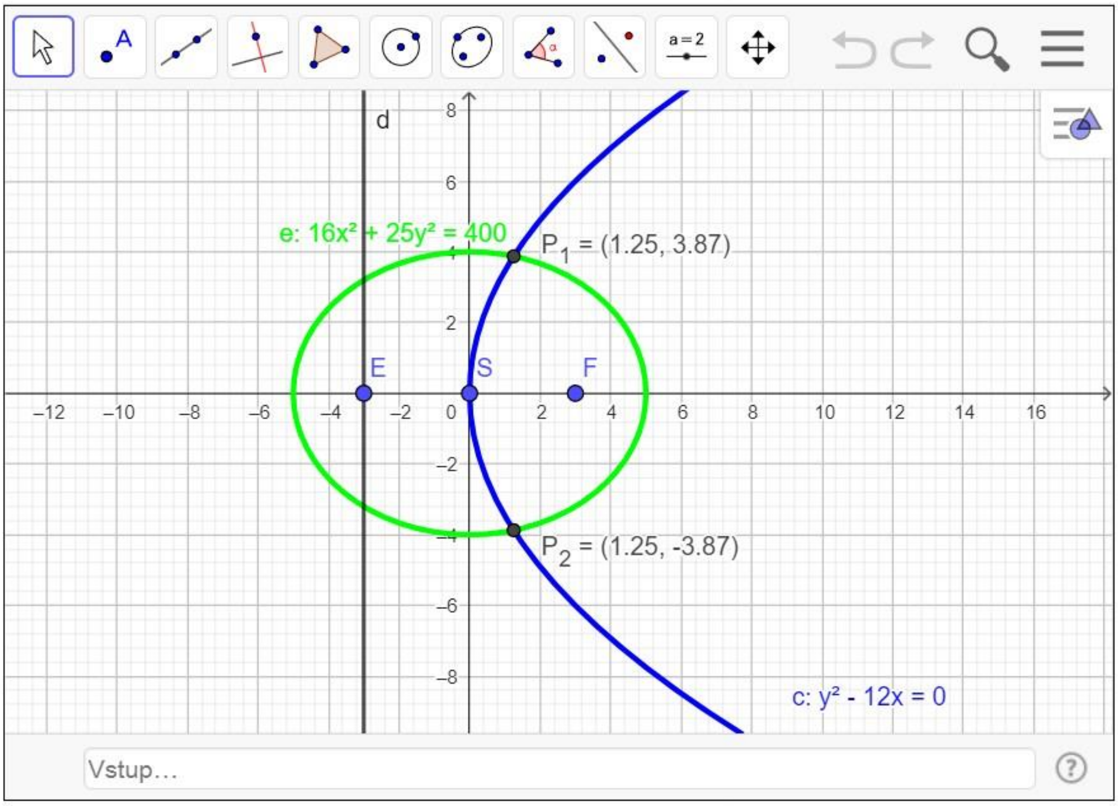
Dopočítáme si y.

$y_1 = \pm\sqrt{12 \cdot \frac{5}{4}} = \pm\sqrt{15}$

$y_2 = \pm\sqrt{12 \cdot (-20)} = \sqrt{-240}$ NELZE

Tedy průsečíky elipsy a paraboly mají souřadnice $P_1\left[\frac{5}{4}, \sqrt{15}\right]$ a $P_2\left[\frac{5}{4}, -\sqrt{15}\right]$.

Správnost řešení si ověříme sestrojením úlohy v programu GeoGebra. Do vstupního pole si napíšeme rovnici elipsy, vyznačíme si její ohniska a nalezneme střed. Jedno ohnisko elipsy je rovno ohnisku paraboly, střed elipsy je vrchol paraboly. To znamená, že druhým ohniskem elipsy musí vést řídící přímka paraboly kolmá na osu x. Pomocí nástroje parabola vykreslíme parabolu, a pokud je její rovnice shodná s tou naší, počítali jsme správně. Nakonec si zobrazíme souřadnice průsečíků elipsy a paraboly.



Obr. 92: Opakování - úloha 9

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/tm7xdzu8)

Úloha 10

Určete souřadnice středu obdélníku, jehož vrcholy leží na hyperbole $5x^2 - 3y^2 - 15x + 3y - 14 = 0$ a mají souřadnice $[-1, y_1]$ a $[4, y_2]$ (Kalová, 2016).

Postup řešení:

Nejprve si zjistíme chybějící souřadnice vrcholů, které leží na hyperbole.

$5(-1)^2 - 3y^2 - 15 \cdot (-1) + 3y - 14 = 0$

$5 - 3y^2 + 15 + 3y - 14 = 0$

$-3y^2 + 3y + 6 = 0$

$y^2 - y - 2 = 0$

$(y - 2)(y + 1) = 0$

$y_{11} = 2$

$y_{12} = -1$

První dva vrcholy obdélníku mají souřadnice $A[-1,2]$ a $D[-1,-1]$.

$5 \cdot 4^2 - 3y^2 - 15 \cdot 4 + 3y - 14 = 0$

$80 - 3y^2 - 60 + 3y - 14 = 0$

$-3y^2 + 3y + 6 = 0$

$y^2 - y - 2 = 0$

$(y - 2)(y + 1) = 0$

$y_{21} = 2$

$y_{22} = -1$

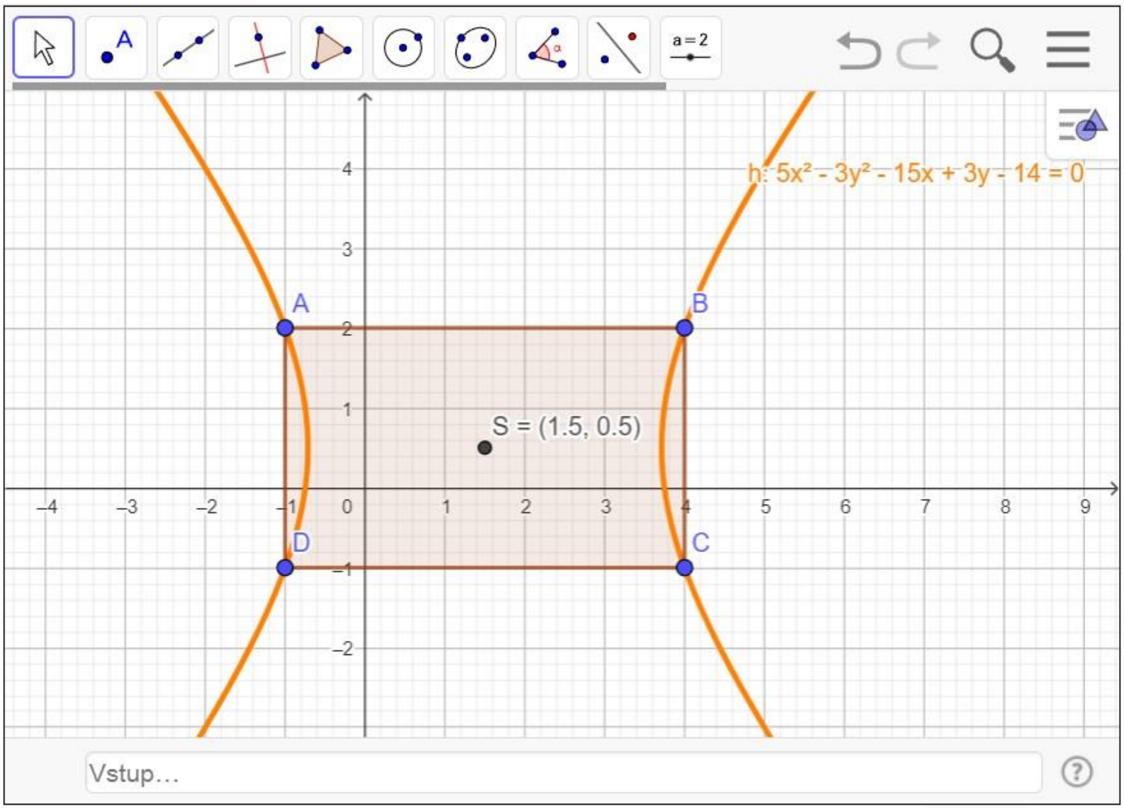
Druhé dva vrcholy obdélníku mají souřadnice $B[4,2]$ a $C[4,-1]$.

Střed obdélníku pak vypočítáme pomocí bodů úhlopříčky $A[-1,2]$ a $D[-1,-1]$.

$S = \left[\frac{4-1}{2}, \frac{-1+2}{2}\right] = \left[\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$

Střed obdélníku bude mít souřadnice $S = \left[\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Správnost řešení si ověříme pomocí programu GeoGebra. Do vstupního pole napíšeme rovnici hyperboly a vyznačíme si námi vypočítané body obdélníku. Sestrojíme obdélník a pomocí nástroje střed určíme střed úsečky AC. Pokud má střed S stejné souřadnice, pak jsme počítali správně.



Obr. 93: Opakování - úloha 10

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/d7weyq7m)

Úloha 11

Vypočítejte obsah trojúhelníku, který je ohraničen asymptotami hyperboly

$\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 0$ a její vrcholovou tečnou (Kalová, 2016).

Postup řešení:

Když si uděláme náčrtek, je nám hned z obrázku jasné, že trojúhelník má obsah

$S = \frac{2b \cdot a}{2} = ba = 2 \cdot 3 = 6.$

Úloha 12

Určete množinu všech vrcholů C trojúhelníku ABC, když znáte $A[-2, 0]$, $B[4,\ 0]$ a $C[x,\ y]$ a platí vztah $|AC|^2 - |BC|^2 = -12.$

Použité nástroje: bod, okno vstupu

Postup řešení:

$|AC|^2\ - |BC|^2 = -12$

$(x+2)^2 + y^2 - [(x-4)^2 + y^2] =\ -12$

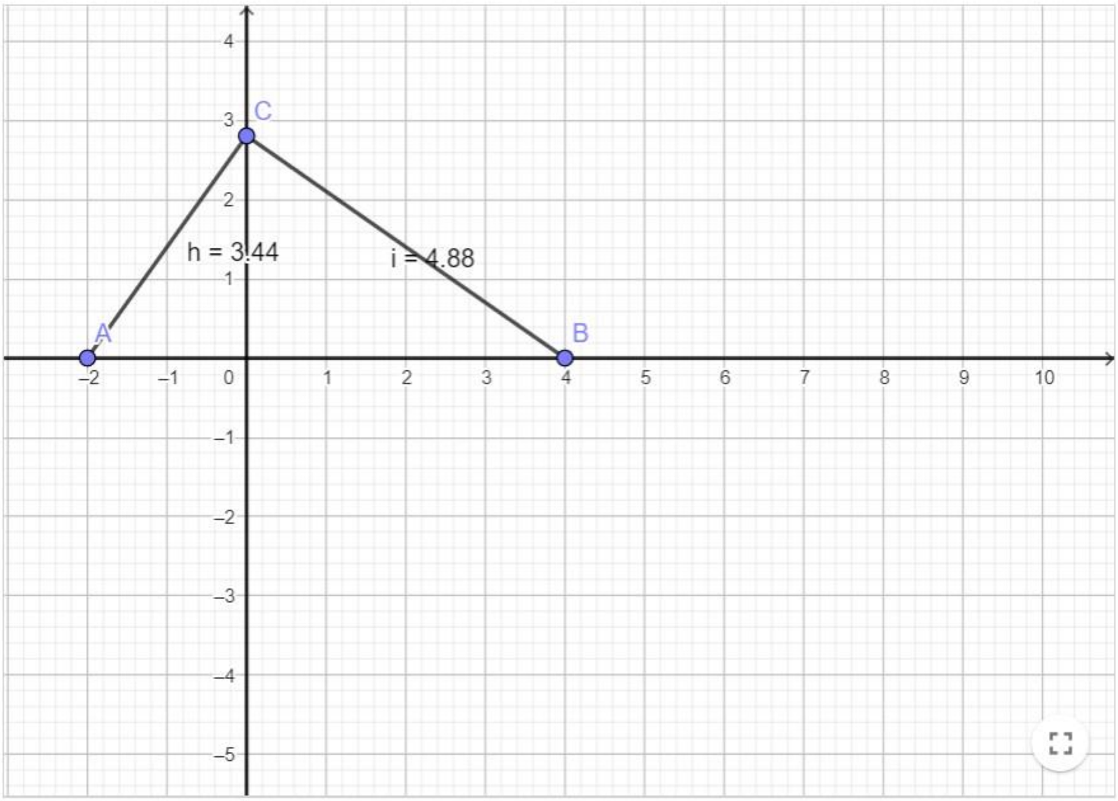
$x^2 + 4x + 4 + y^2 - x^2 + 8x - 16 - y^2 \ = \ -12$

$12x - 12 \ = -12$

$12x = 0$

$x = 0$ a $y \in \boldsymbol{R}$

Vyznačíme si body $A[-2, 0]$, $B[4, 0]$ a nalezneme přímku p: $x = 0$, přímka p je hledanou množinou vrcholů.



Obr. 94: Opakování - úloha 12

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/e7ufb9qv)

Úloha 13

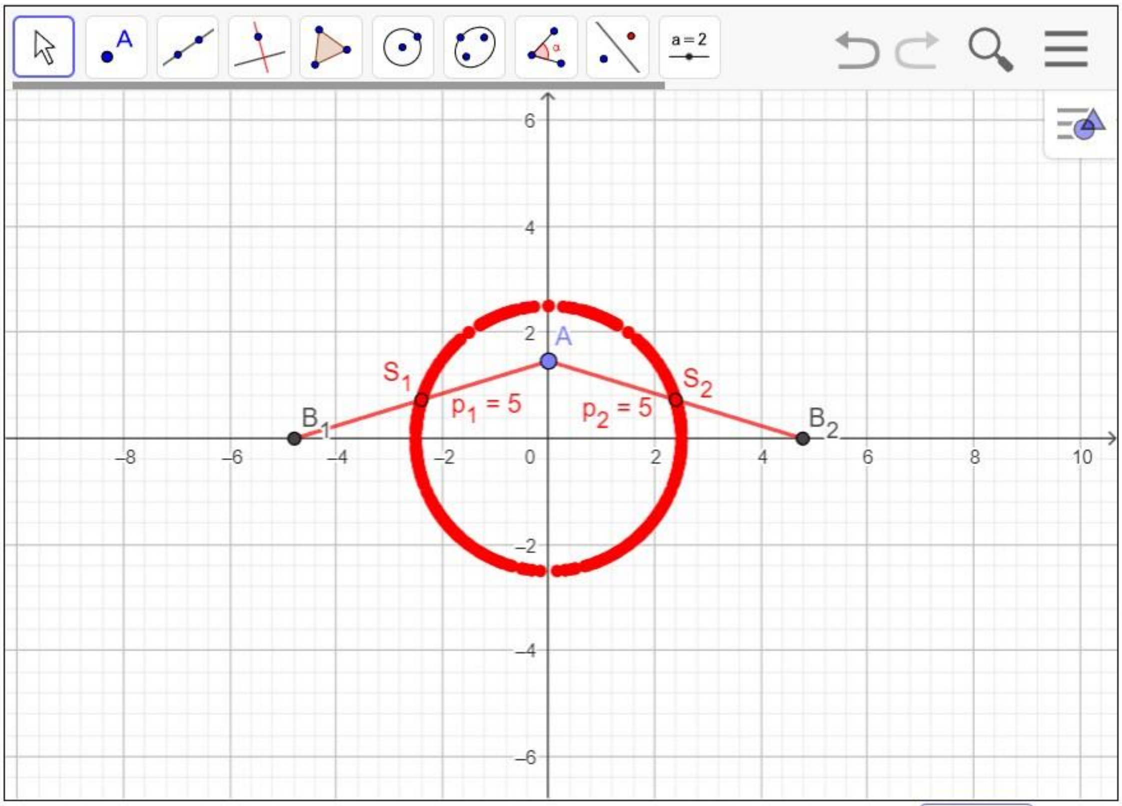
Úsečka AB s délkou 5 má krajní body na souřadnicových osách x, y (bod A je na jedné ose a bod B je na druhé). Zjistěte, po jaké křivce se pohybuje střed této úsečky, pokud se body A, B posouvají po osách x, y (Kalová, 2016).

Použité nástroje: bod, kružnice (střed a poloměr), úsečka, průsečík, střed

Postup řešení:

Nejprve si vyznačíme libovolný bod A na objektu, kterým je osa y, tím zajistíme možnost pochybu bodu A pouze po ose y. Sestrojíme kružnici se středem v bodě A a poloměrem $r = 5$. Zobrazíme si průsečíky kružnice s osou x a pojmenujeme je B_1

a B_2. Sestrojíme úsečky AB_1, AB_2 s zobrazíme si jejich středy. U středů úseček zapneme zobrazení stopy a budeme pohybovat bodem A po ose y. Tím se nám vykreslí hledaná množina, kterou je kružnice.



Obr. 95: Opakování - úloha 13

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/rwngc2ca)

Bod A má souřadnice $A[0, p]$, kde p je parametr. Souřadnice bodu B nalezneme jako průsečík osy x: $y = 0$ a kružnice $l(A, r_l = 5)$.

$k: x^2 + (y - p)^2 = 25,$

$x: y = 0.$

Nyní do rovnice kružnice dosadíme $y = 0$.

$x^2 + p^2 = 25$

$x = \sqrt{25 - p^2}$

Tedy bod B má souřadnice $B\left[\sqrt{25 - p^2}, 0\right]$. Střed úsečky AB má souřadnice $S\left[\frac{\sqrt{25-p^2}}{2}, \frac{p}{2}\right]$. Vyjádříme si parametr p v závislosti na x a y.

$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{25-p^2}}{p}$

Obě strany rovnice umocníme na druhou a upravíme. Platí, že $y \neq 0$ a $p \neq 0$.

$\frac{x^2}{y^2} = \frac{25-p^2}{p^2}$

$x^2p^2 = 25y^2 - p^2y^2$

$p^2 = \frac{25y^2}{x^2+y^2}$

Parametr p dosadíme do $y = \frac{p}{2}$, respektive $y^2 = \frac{p^2}{4}$ a upravíme.

$y^2 = \frac{\frac{25y^2}{x^2+y^2}}{4}$

$4y^2 = \frac{25y^2}{x^2+y^2}$

$x^2 + y^2 = \frac{25y^2}{4y^2}$

$x^2 + y^2 = \frac{25}{4}$

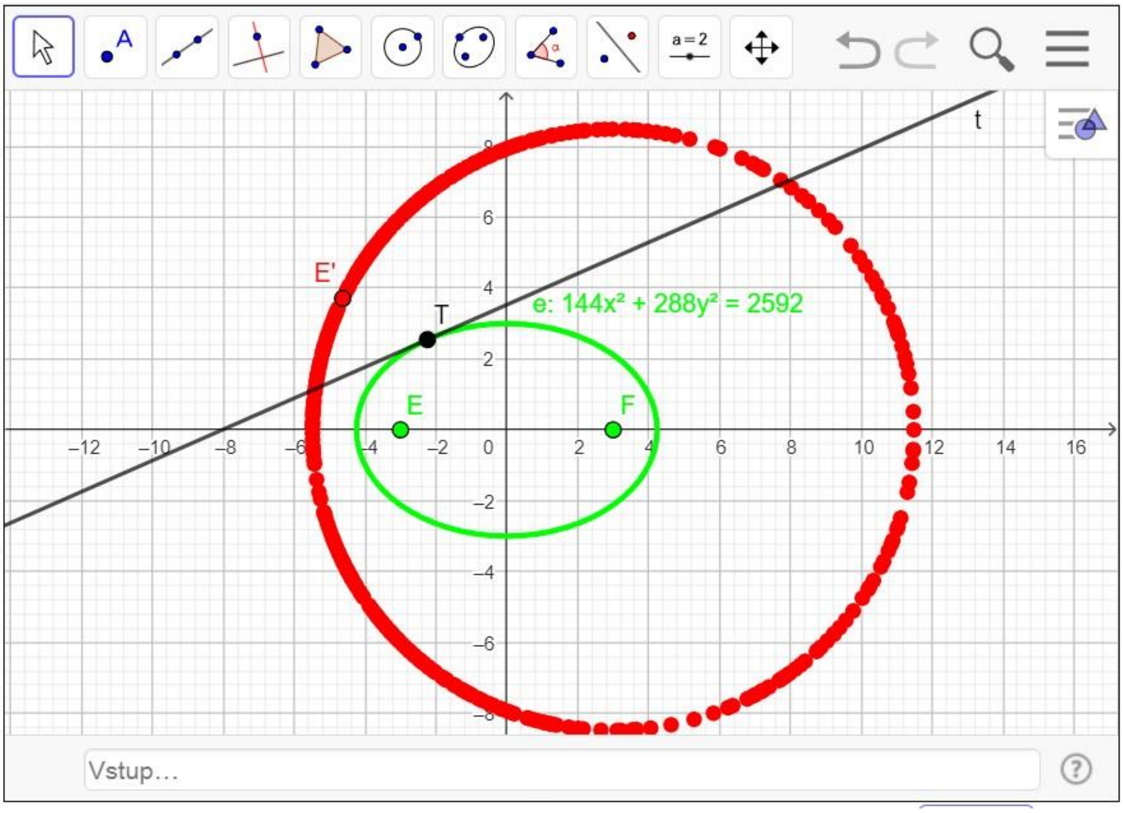
Jedná se tedy o kružnici s rovnicí $x^2 + y^2 = \frac{25}{4}$, se středem v bodě $S[0,0]$ a poloměrem $r = \frac{5}{2}$.

Úloha 14

Určete množinu všech bodů, které jsou souměrně sdružené podle tečen elipsy $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$ s ohniskem $E[-3,0]$ a $F[3,0]$.

Postup řešení:

V programu GeoGebra sestrojíme elipsu se zadanou rovnicí a vyznačíme si její ohnisko E. Na elipse vyznačíme jakýkoliv bod T, kterým vedeme tečnu t elipsy. Bod E osově přeneseme podle tečny t a dostaneme tak bod E'. U bodu E' si zapneme zobrazení stopy. Bodem dotyku T pohybujeme po elipse a pozorujeme, co nám vykreslí bod E'.



Obr. 96: Opakování - úloha 14

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/czt4t5b3)

Důkaz provedeme pomocí analytické geometrie.

Pro elipsu platí vztah $|ET| + |FT| = 2a$, kde $E[-3,0]$, $F[3,0]$ a T je bodem dotyku. Pro $E'[x,y]$ platí, že vzdálenost $|ET| = |E'T|$, tedy $|E'T| + |FT| = 2a$, což ale znamená, že:

$$|E'F| = 2a$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$(x-3)^2 + y^2 = 4a^2$$

Jedná se tedy opravdu o kružnici s rovnicí $(x-3)^2 + y^2 = 4a^2$, se středem $S[3,0] = F[3,0]$ a poloměrem $r = 2a$.

Takovou kružnici nazýváme řídící kružnicí kuželosečky.

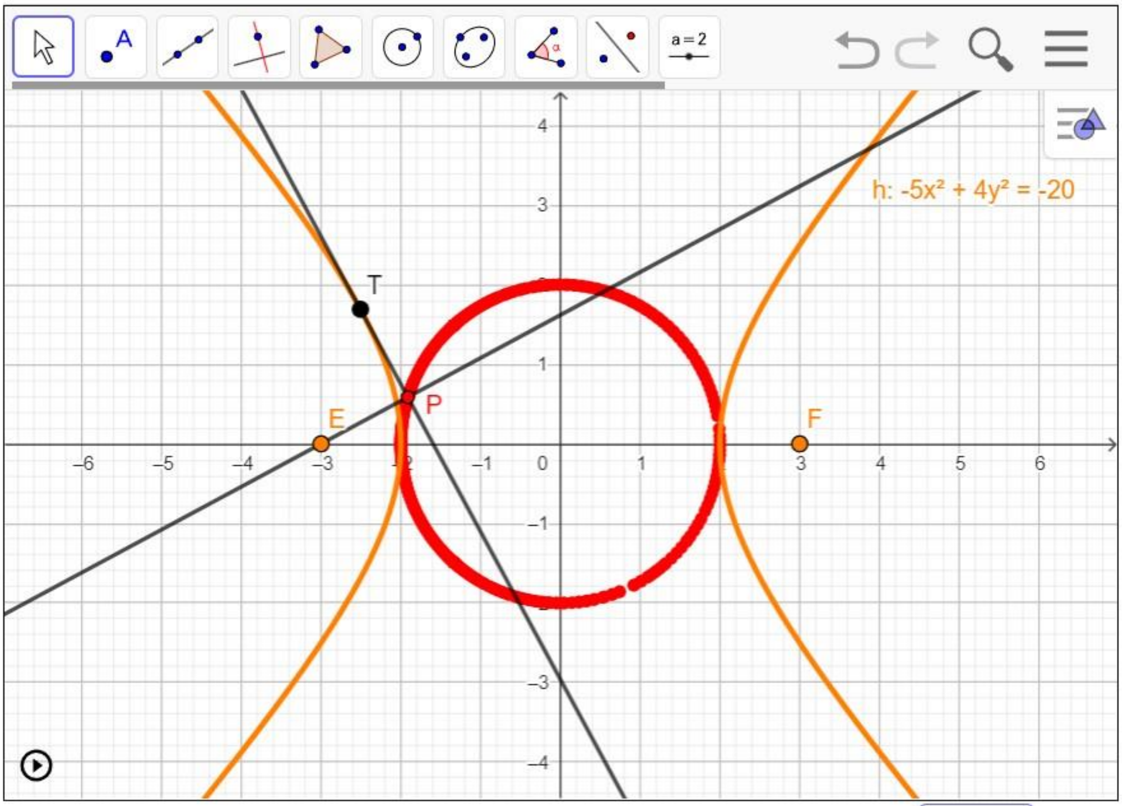
Všechny body Q_1 (resp. Q_2) souměrně sdružené podle tečen elipsy s ohniskem E (resp. F) leží na **řídící kružnici $\boldsymbol{d_2}$** (resp. d_1), která je opsaná z druhého ohniska F (resp. E) a má poloměr $2a$ (Effenberger, 2011).

Úloha 15

Určete množinu všech bodů, kterou tvoří paty všech kolmic sestrojených z ohnisek $E[-3,0]$, $F[3,0]$ hyperboly $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ na tečny této kuželosečky.

Postup řešení:

Sestrojíme zadanou hyperbolu a vyznačíme si její ohniska. Zvolíme libovolný bod T na hyperbole, kterým vedeme tečnu t hyperboly. Jedním ohniskem vedeme kolmici k tečně t. Průsečík na sebe kolmých přímek označíme písmenem P a zapneme u něj zobrazení stopy. U bodu T zapneme animaci a budeme sledovat, jaká křivka se nám vykreslí.



Obr. 97: Opakování - úloha 15

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/t7chdb4u)

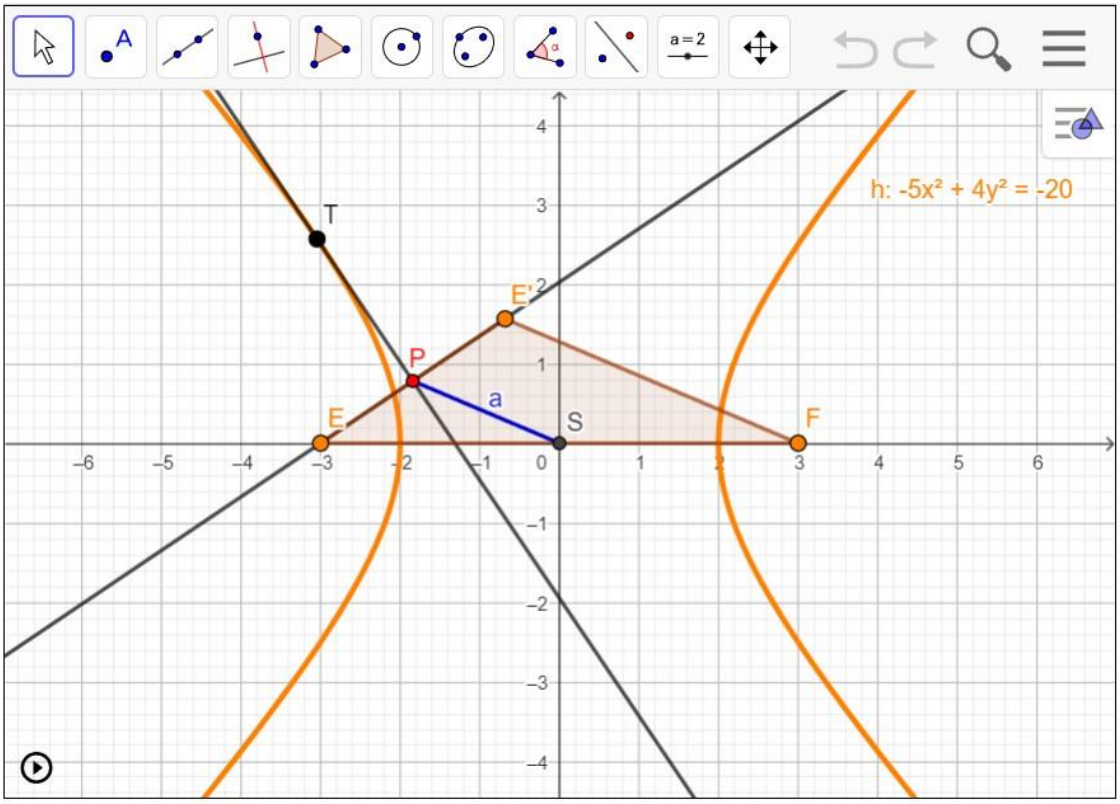
Ověříme si, že se jedná o kružnici. K ohnisku E, najdeme souměrně sdružený bod E' podle tečny t. Máme patu P kolmice sestrojené z tohoto ohniska na tečnu. Platí, že $P \in t \cap E'E$. Vznikl nám trojúhelník $E'EF$. Bod S je středem strany EF a bod P je středem $E'E$. Tedy úsečka SP je střední příčkou v tomto trojúhelníku a tedy platí $|SP| = 2|E'F| = a$.

$|SP| = a$

$\sqrt{x^2 + y^2} = a$

$x^2 + y^2 = a^2$

Vypočítaná rovnice odpovídá rovnici kružnice, kterou nazýváme vrcholovou kružnicí kuželosečky.



Obr. 98: Opakování - úloha 15 - ověření

(dostupné z: https://www.geogebra.org/m/t7chdb4u)

Paty P_1, P_2 všech kolmic sestrojených z ohnisek E, F na tečny této kuželosečky leží na **vrcholové kružnici** $\boldsymbol{v}$, která má střed ve středu hyperboly S a má poloměr délky hlavní poloosy a (Effenberger, 2011).

Závěr

Cílem diplomové práce bylo vytvoření sbírky úloh, která bude obsahovat přehledně zpracovanou teorii týkající se programu GeoGebra a kuželoseček, analýzu učebnic matematiky a řešené příklady především pomocí programu GeoGebra a ověření výsledků pomocí odvození rovnic daných množin bodů. Domnívám se, že stanovený cíl byl splněn. Vytvořila jsem sbírku, která obsahuje 57 vzorově řešených příkladů. Přibližně u třetiny příkladů jsem autorkou jak samotného zadání příkladu, tak jeho řešení v GeoGebře, u dalších příkladů jsem převzala zadání z literatury uvedené v seznamu literatury, ale opět jsem autorkou řešení těchto příkladů pomocí GeoGebry.

Díky diplomové práci jsme si upevnila znalosti z oblasti analytické geometrie týkajících se kuželoseček. Významným přínosem, pro mě osobně, bylo velké zdokonalení se v používání programu GeoGebra, ve kterém jsou všechny úlohy vyřešeny a zkonstruovány.

Obsah diplomové práce by mohl být inspirací či návodem pro učitele matematiky, kteří by chtěli téma kuželoseček vyučovat s podporou programu GeoGebra. Práce nabízí nový pohled na téma kuželoseček, který by mohl být pro žáky především středních škol přívětivější, zábavnější a motivující. Uvědomuji si však, že práce s GeoGebrou je časově náročná, proto by se na běžné hodině matematiky využilo malé množství příkladů jako motivačních a zbylé příklady by se daly řešit v rámci matematických seminářů či zájmových skupin.

Na diplomovou práci by se dalo navázat dalšími množinami bodů dané vlastnosti, které zde byly opomenuty. Mohly by se zpracovat další příklady z jiného odvětví geometrie v programu GeoGebra a tím ještě více přiblížit a upřesnit vlastnosti a vztahy geometrických objektů žákům středních i základních škol.

Seznam použité literatury

1. BENDA, P. a kol. *Sbírka maturitních příkladů: Matematika*. Praha: SPN, 1983.
2. BUŠEK, I. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia: Analytická geometrie*. Praha: Prometheus, 1996. ISBN 80-7196-055-1.
3. EFFENBERGER, V. *Využití internetu při výuce kuželoseček na střední škole* [online]. Praha, 2011 [cit. 2024-04-12].
   Dostupné z: https://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/vera.setmanukova.dp/
4. GEOGEBRA. *Co je GeoGebra?* [online]. [cit. 2024-02-08]. Dostupné z: https://www.geogebra.org/about?lang=cs
5. GERGELITSOVÁ, Š. *Průvodce Geogebrou: počítač ve výuce nejen geometrie*. Praha: Generation Europe, 2011. ISBN 978-80-904974-3-6
6. GÖKÇE, S. and P. GÜNER. Dynamics of GeoGebra ecosystem in mathematics education. *Education and Information Technologies* [online]. 2022, 27, 5301-5323 [cit. 2024-02-25].
7. HOHENWARTER, M., J. HOHENWARTER, Y. KREIS and Z. LAVICZA. Teaching and learning calculus with free dynamic mathematics software GeoGebra. *International congress on mathematical education* [online]. Mexico, 2008, 11, 1-10 [cit. 2024-02-12].
   Dostupné z:
   https://scholar.google.com/citations?view_op=view_citation&hl=en&user=1526ABEAAAAJ&citation_for_view=1526ABEAAAAJ:u5HHmVD_uO8C
8. HRUBÝ, D. *Matematická cvičení pro střední školy*. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-374-5
9. JANEČEK, F. *Maturujeme, připravujeme se na přijímací zkoušky na vysokou školu: matematika: soubor typových úloh: [pomocný text pro studenty].* Na pomoc studentům. Praha: Blug, 1994. ISBN 80-85635-39-9
10. KALOVÁ, J. a ZEMEK, V. *Matematika pro střední školy – 7. díl A: Analytická geometrie v rovině – Pracovní sešit*. Brno: Didaktis, 2016. ISBN 978-80-7358-237-1.
11. KOČANDRLE, M. a BOČEK, L. *Matematika pro gymnázia: Analytická geometrie*. 2. upr. vyd. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-163-9.
12. KUŘINA, F. a J. CACHOVÁ. Didaktická struktura geometrie. *Matematika-fyzika-informatika* [online]. Praha: Prometheus, 2024, 33(1), 7-9 [cit. 2024-04-08]. Dostupné z: https://www.mfi.upol.cz/index.php/mfi/issue/archive
13. LIŠKA, M., VALENTA, T., KRÁL, L. a kol. *Matika pro spolužáky: Analytické geometrie*. Hradec Králové: ProSpolužáky.cz, 2017. ISBN 978-80-88255-14-7.
14. PETÁKOVÁ, J. *Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. Praha: Prometheus, 2007. ISBN 978-80-7196-099-7
15. VAŇATOVÁ, L. a kol. *Seminář a cvičení z matematiky: Praktická cvičení*. Praha: SPN, 1987.

16. VONDRA, J., KALOVÁ, J. a ZEMEK, V. *Matematika pro střední školy – 7. díl A: Analytická geometrie v rovině – Učebnice*. Brno: Didaktis, 2016. ISBN 978-80-7358-236-4.
17. VOŠICKÝ, Z. *Matematika v kostce*. 2. vyd. V kostce (Fragment). Havlíčkův Brod: Fragment, 1999. ISBN 80-7200-333-X.

Seznam obrázků

Seznam tabulek