



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
LABORATOŘ PŘENOSU TEPLA A PROUDĚNÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
HEAT TRANSFER AND FLUID FLOW LABORATORY

POKROČILÉ METODY PRO INVERZNÍ ÚLOHY VEDENÍ  
TEPLA  
ADVANCED INVERSE HEAT CONDUCTION METHODS

DIZERTAČNÍ PRÁCE  
DOCTORAL THESIS

AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

Ing. JAN KOMÍNEK

VEDOUCÍ PRÁCE  
SUPERVISOR

prof. Ing. MIROSLAV RAUDENSKÝ, CSc.

Ing. MICHAL POHANKA, Ph.D.

BRNO 2018

## **ABSTRAKT**

Numerické simulace tepelných procesů jsou založeny na znalosti geometrie, materiálových vlastností, počátečních a okrajových podmínek. Masivnímu používání těchto simulací v hutním průmyslu (například pro simulaci tepelného zpracování oceli) brání neznámost přesných okrajových podmínek, které na rozdíl od ostatních vstupních parametrů obvykle není snadné určit. Protože pro většinu netriviálních procesů neexistují dostatečně přesné empirické vztahy, je nutné okrajové podmínky získávat experimentální cestou. Okrajové podmínky nejde měřit přímo. Proto jsou místo nich zaznamenávány podpovrchové teploty, které jsou pomocí inverzní úlohy vedení tepla přepočítány na hledané okrajové podmínky.

Tato dizertační práce se zaměřuje na dva typy inverzních úloh, které jsou stávajícími metodami špatně řešitelné.

Prvním typem jsou úlohy, ve kterých dochází k prudkým (téměř skokovým) nárůstům/poklesům hodnoty okrajové podmínky. Pro tento typ úloh jsou v práci navrženy a srovnávány dva nové přístupy.

Druhým typem úlohy je nestacionárně nehomogenní chlazení. Pro tento případ jsou vyvinuty tři nové metody, které jsou aplikovány na případ vodního chlazení svislého povrchu hliníkového vzorku. Základní vlastností popisovaného případu je nehomogenita chlazení. Část povrchu je intenzivně chlazená stékající vodou na rozdíl od druhé části povrchu, který je chlazen jen s malou intenzitou, protože je od přímého kontaktu s vodou chráněn parní vrstvou (Leidenfrostův efekt). Rozložení těchto dvou částí je navíc nestacionární (v průběhu experimentu se mění).

Nově vyvinuté metody jsou vzájemně porovnávány.

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

Inverzní úloha vedení tepla, 2D inverzní úloha, sekvenční přístup

## **ABSTRACT**

Numerical simulations of thermal processes are based on known geometry, material properties, initial and boundaries conditions. The massive use of these simulations in the metallurgical industry (for example for simulation of heat treatment of steel) is limited by the knowledge of precise boundary conditions, which are not easy to determine in compare to other input parameters. Empirical formulas are not sufficiently accurate for most non-trivial processes. Therefore, it is necessary to obtain the boundary conditions by experimental way. Boundary conditions can not be measured directly. The boundary conditions are determined by solving inverse heat conduction problem based on the measured temperature records.

This doctoral thesis focuses on two types of the inverse heat conduction problems, which are poorly solved by existing methods.

The first type are tasks that contains sharp increase/decrease in the values of the boundary conditions. Two new approaches are proposed and compared in this thesis for this type of tasks.

The second type are tasks with non-stationary and non-homogeneous cooling. Three new methods were developed for this case. They are applied for the case of water cooling of vertical aluminum sample. The base characteristics of the current task is inhomogeneous cooling. One part of the surface is cooled intensively by flowing water in contrast to the other part of surface which is cooled only with low intensity since it is protected from direct contact with water by the vapor layer (Leidenfrost effect). The positions of these two part of surface are not stationary (they change during the experiment).

The newly developed methods are compared to each other.

## **KEYWORDS**

Inverse heat conduction problem, 2D inverse task, sequential approach

KOMÍNEK, Jan *Pokročilé metody pro inverzní úlohy vedení tepla*: dizertační práce. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Laboratoř přenosu tepla a proudění, 2018. 80 s. Vedoucí práce byl prof. Ing. Miroslav Raudenský, CSc.

## PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že svou doktorskou práci na téma „Pokročilé metody pro inverzní úlohy vedení tepla“ jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího doktorské práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor uvedené doktorské práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této doktorské práce jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a/nebo majetkových a jsem si plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č. 40/2009 Sb.

Brno .....

.....

podpis autora

## PODĚKOVÁNÍ

Rád bych poděkoval vedoucímu dizertační práce panu prof. ing. Miroslavu Raudenskému za odborné vedení, konzultace a trpělivost. Dále bych rád poděkoval Ing. Michalu Pohankovi, Ph.D. za přínosné konzultace v oblasti inverzních úloh vedení tepla.

Brno .....

.....

podpis autora

# Obsah

Úvod	8
<b>1 Přímá úloha vedení tepla</b>	<b>10</b>
<b>2 Inverzní úlohy vedení tepla</b>	<b>11</b>
2.1 Inverzní úloha . . . . .	11
2.2 Měření teplot během experimentů . . . . .	11
2.3 Metody řešení inverzních úloh vedení tepla . . . . .	12
2.3.1 Stolzův algoritmus . . . . .	13
2.3.2 Celo-doménová metoda . . . . .	14
2.3.3 Sekvenční Beckova metoda . . . . .	14
2.3.4 Regularizace . . . . .	15
2.3.5 Metoda numerického filtru . . . . .	17
2.3.6 Umělá neuronová síť . . . . .	17
2.3.7 Genetické algoritmy . . . . .	19
<b>3 Prudce se měnící okrajové podmínky</b>	<b>21</b>
3.1 Problémy při řešení klasickými metodami . . . . .	21
3.1.1 Testovací úlohy . . . . .	22
3.2 Dvoufázové řešení . . . . .	27
3.2.1 Popis realizace . . . . .	27
3.2.2 Shrnutí . . . . .	29
3.3 Sub-doménová metoda . . . . .	29
3.3.1 Popis metody . . . . .	29
3.3.2 Srovnání s různými modifikacemi sekvenčních metod . . . . .	33
3.3.3 Tolerance skoku . . . . .	35
3.3.4 Shrnutí . . . . .	41
3.3.5 Tepelné toky ve směru pohybu . . . . .	41
<b>4 Nestacionárně nehomogenní chlazení vysoce tepelně vodivých materiálů</b>	<b>47</b>
4.1 Testovací úloha . . . . .	48
4.2 Problémy při řešení klasickými metodami . . . . .	49

4.2.1	Základní řešení . . . . .	51
4.3	Metoda posouvání hranic . . . . .	52
4.3.1	Realizace . . . . .	53
4.4	Aproximace řešení parametrickou funkcí . . . . .	57
4.4.1	Realizace . . . . .	57
4.5	Iterační metoda . . . . .	60
4.5.1	Realizace . . . . .	61
4.6	Porovnání vyvinutých metod . . . . .	62
<b>5</b>	<b>Závěr</b>	<b>67</b>
	<b>Reference</b>	<b>70</b>
	<b>Vlastní publikace vztahující se k dizertaci</b>	<b>75</b>
	<b>Ostatní vlastní publikace</b>	<b>76</b>
	<b>Udělené patenty</b>	<b>76</b>
	<b>Užitné vzory</b>	<b>76</b>
	<b>Seznam symbolů</b>	<b>77</b>

# Úvod

V dnešní době se stává praxí, že se vliv chlazení, kalení a jiných tepelných procesů na vzniklé struktury, zbytkové napětí v materiálu, predikuje pomocí numerických simulací. K simulacím je zapotřebí znát geometrie, materiálové vlastnosti, počáteční a okrajové podmínky.

Geometrie jsou většinou dané zadáním problému. Materiálové vlastnosti jsou k nalezení v databázích nebo jsou stanoveny měřením. Počáteční podmínkou je často homogenní rozložení teploty v materiálu.

Problémem zůstávají okrajové podmínky. Pro jednoduché případy, jako jsou obtékání rovinné stěny nebo válce, existují přesné empirické vztahy popisující okrajové podmínky na základě rozměrů, geometrie, rychlostí a vlastnostech kapaliny. Pro složitější případy, které jsou běžné v průmyslových aplikacích, jsou empirické vztahy značně zjednodušené, nepřesné nebo často vůbec neexistují. Okrajové podmínky se tak získávají experimentální cestou.

Experimenty jsou navrhovány tak, aby co nejvěrněji reprodukovaly reálné počáteční a okrajové podmínky. Z praktických důvodů je snaha pracovat se zjednodušenými a zmenšenými vzorky oproti reálné situaci. To je vhodné i pro vyhodnocení experimentů pomocí inverzní úlohy, zejména z pohledu omezení dimenze modelu.

Případy, kdy může být reálná situace věrohodně nahrazena jednorozměrným modelem s malou změnou materiálových vlastností v průběhu experimentu, měřeními teplotami blízko povrchu atd., jsou většinou dobře řešitelné stávajícími „klasickými“ inverzními metodami. Podstatně komplikovanějšími případy je například situace, kdy geometrie chlazeného tělesa není možné zjednodušit, nebo pokud daný typ chlazení přirozeně způsobuje intenzivní vedení tepla ve více dimenzích.

Právě těmito úlohami, pro které klasické inverzní metody nejdou použít nebo nedosahují dobrých výsledků, se zabývá tato dizertační práce.

## Cíle dizertační práce

Cílem práce je vyvinout, otestovat a porovnat nové výpočetní metody pro dva typy inverzních úloh:

1. Prudce se měnící okrajové podmínky
  - Metoda využívající dvoufázové řešení
  - Metoda založena na sekvenčním přístupu



2. Nestacionárně nehomogenní chlazení vysoce tepelně vodivých materiálů

- Metoda posouvání hranic
- Metoda aproximace řešení parametrickou funkcí
- Iterační metoda

# KAPITOLA 1

## Přímá úloha vedení tepla

Vedení tepla tělesem s konstantními materiálovými vlastnostmi je popsáno diferenciální rovnicí (1.1):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{q} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.1)$$

kde,  $k$  je součinitel tepelné vodivosti,  $\dot{q}$  vnitřní tepelný zdroj vztažený na jednotkový objem,  $\rho$  hustota,  $c$  měrná tepelná kapacita,  $t$  je čas a  $T(x, y, z)$  je teplotní pole v kartézských souřadnicích  $x, y, z$ .

Rovnice vedení tepla v prostoru je parciální diferenciální rovnicí parabolického typu (pro úlohy nestacionárního typu). Speciální případy této úlohy jsou řešitelné analyticky metodou separace proměnných, Greenovy funkce, ... [1]. Úlohy se složitější geometrií, okrajovými podmínkami nebo zejména nekonstantními materiálovými vlastnostmi jsou řešeny numerickými metodami. Nejčastěji používaná je metoda konečných diferencí [24], metoda konečných objemů [3] a metoda konečných elementů [4]. Jedná se o tzv. síťové metody, jejich společným znakem je rozdělení (diskretizace) výpočetní oblasti pomocí sítě na elementy/objemy. Původní diferenciální rovnice je diskretizována, derivace jsou nahrazeny příslušnými diferencemi a splnění takto pozměněné rovnice je požadováno v každém elementu sítě. Vzniklá soustava  $n$  rovnic, kde  $n$  je počet elementů, je řešena běžným způsobem. Vzhledem k tomu, že inverzní úlohy vedení tepla ke svému řešení často vyžadují tisíce přímých výpočtů vedení tepla, je na výpočetní náročnost přímé úlohy kladený velký důraz.

Tato dizertační práce je zaměřena na případy, kdy je tepelná závislost materiálových vlastností  $(k, \rho)$  nezanedbatelná. Vznikající soustavy rovnic jsou nelineární a k jejich řešení se výhodně používá iterační přístup. Relativně efektivní a přesná metoda pro tento typ úloh je implicitní metoda konečných objemů s přidáním iterací v každém časovém kroku tak, aby bylo možné postihnout změny materiálových vlastností [5].

Výrazného snížení výpočetní náročnosti je možné dosáhnout vhodnou volbou samotné úlohy (vzorku a experimentálních podmínek). Zásadní je redukovat počet potřebných dimenzí ve výpočtu, pokud je to možné.

## Inverzní úlohy vedení tepla

### 2.1 | Inverzní úloha

Úlohu označujeme jako inverzní, pokud je cílem stanovení některé z příčin pozorovaných důsledků. Opačným případem je přímá úloha, při které jsou známé příčiny a hledají se jejich důsledky. Pro případ inverzních úloh vedení tepla, zkráceně IHCP (Inverse Heat Conduction Problem), jsou příčiny:

- počáteční podmínky (rozložení teplot)
- okrajové podmínky
- materiálové vlastnosti

Důsledkem je vývoj teploty v čase.

Typickou aplikací IHCP je stanovení okrajových podmínek za předpokladu známých materiálových vlastností, počáteční teploty a měřených teplot v několika bodech tělesa.

### 2.2 | Měření teplot během experimentů

Měření teplot může být provedeno kontaktně (např. termočlánky, odporové teploměry) nebo bezkontaktně (např. pyrometry, infrascannery, termokamery). Z kontaktních způsobů měření jsou přesnější odporové teploměry, které však nejsou vhodné pro velké rozsahy teplot. Pro tyto aplikace se dominantně používají termočlánky. [6], [7], [8], [9]

Pro vyhodnocování okrajové podmínky pomocí inverzní úlohy je nejlepší mít záznam teplot co nejbližší zkoumanému povrchu, v ideálním případě mít přímo povrchové teploty. To je ovšem z několika důvodů nerealizovatelné:

- Umístění čidla na chlazený povrch by značně změnilo proudění kolem povrchu a v důsledku i intenzitu chlazení.
- Termočlánek umístěný na povrchu funguje jako žebro a neměří skutečnou teplotu povrchu.

- Umístění na povrchu, nebo i těsně pod ním, není často možné z důvodu mechanického namáhání (například povrch pracovního válce ve válcovacím procesu). Běžně se termočlánky umísťují pod povrch. Vliv vzdálenosti od povrchu je patrný ze vztahu  $t = (cL^2)/\alpha$ , který udává čas  $t$ , za který se tepelný impulz na jedné straně homogenní stěny projeví 50% změnou teploty na straně druhé (50% z celkové změny, ke které v daném bodě dojde),  $c$  je konstanta. Podstatné je, že závislost na tloušťce stěny  $L$  je kvadratická. Zmíněný vztah přibližně platí i pro případ stěny dané tloušťky, kde  $L$  značí pouze vzdálenost teplotního senzoru od povrchu [10].

Na druhou stranu umístění termočlánku extrémně blízko pod povrch opět přináší komplikace v podobě narušení teplotního pole otvorem pro termočlánek [11], [12]. Tento efekt pak musí být kompenzován složitějším modelem, který zahrne narušení teplotního pole instalovaným termočlánkem.

Zásadní výhodou bezkontaktního měření je, že se měří přímo povrchová teplota, která navíc není zkreslena přítomností měření. Použití bezkontaktní měřicí techniky je však omezeno množstvím jiných podmínek, z nichž k nejzásadnějším patří:

- Vyžadují přímý výhled na měřený povrch.
- Mezi senzorem a povrchem nesmí být vodní tříšť, pára, ...
- Emisivita měřeného povrchu musí být dostatečně vysoká, homogenní a známá.

V případě vodního chlazení není možné měřit teploty přímo v chladicí zóně, protože je výhled stíněný vodním paprskem, párou, případně je povrch mokrá. I pro jiné typy chlazení je měření často komplikováno fyzickou konfigurací chladících zařízení, které mohou bezkontaktnímu měření stínit. V praxi se často měří povrchové teploty v určité vzdálenosti za chladicí sekci, tj. po určitém čase, během kterého se vzorek dostane z chladicí sekce k měření. Takto získaná data pak trpí podobným zkreslením jako záznamy získané z termočlánků uložených daleko od povrchu.

Zajištění průteplivého prostředí mezi měřicím zařízením a povrchem není vždy jednoduché a často je nutné ho řešit zvětšením vzdálenosti (času) mezi chlazením a měřením.

Všechny bezkontaktní měřicí systémy jsou závislé na emisivitě měřeného povrchu. Materiály s malou emisivitou, jako je například hliník, jsou téměř neměřitelné (bez provedení povrchových úprav). Problematické jsou i materiály, jejichž emisivita se během experimentu výrazně mění jak z důvodu změny teploty, tak i z důvodu změny povrchu způsobené například oxidací.

## 2.3 | Metody řešení inverzních úloh vedení tepla

Inverzní úlohy vedení tepla se dají rozdělit podle typu řešení do dvou skupin - na odhady parametrů a odhady funkcí [13]. Toto rozdělení není sice zcela korektní,

protože při odhadech funkcí se používají aproximace konečným počtem parametrů a je možné ji považovat za parametrické odhady, ale i přes to se tohoto rozdělení bude v této práci držet, protože je již zavedené [13] a poměrně dobře rozděluje inverzní úlohy podle složitosti. Za parametrické odhady považujeme případy, kdy se stanovují jednotky (výjimečně až desítky) parametrů. Zatímco o hledání funkce hovoříme v případě, že je řešení aproximováno pomocí stovek až tisíců parametrů.

Úlohy hledání funkcí jsou většinou označovány jako „Ill-posed“ tedy špatně podmíněné úlohy. Konkrétně pro inverzní úlohy vedení tepla to znamená, že i malá změna vstupních parametrů (změřených teplot) může způsobit extrémní změnu řešení (hustoty tepelných toků) [14].

V této kapitole jsou uvedeny běžně používané deterministické metody řešení inverzních úloh, tj. celo-doménová metoda a sekvenční Beckova metoda. Pro zajímavost je úvodem uveden i Stolzův algoritmus. Dále je uvedena problematika regularizace a metoda založená na použití numerického filtru.

Použití metod umělé inteligence pro výpočet inverzních úloh vedení tepla bylo v devadesátých letech minulého století studováno v Laboratoři přenosu tepla a proudění (součást FSI, VUT Brno) [15], [16], [17], [18], [19], [20]. V této kapitole jsou popsány neuronové sítě (dále jen NS) a genetické algoritmy (GA).

Obě metody jsou inspirované biologickými předlohami. Jejich základy byly položeny v 70. letech (Holland 1975 [21]) s rozvojem výkonu výpočetní techniky.

### 2.3.1 | Stolzův algoritmus

Stolzův algoritmus je sekvenční metoda používající pouze jeden dopředný krok a data z jednoho teplotního senzoru. Jde o nejstarší metodu, která je vhodná pouze pro jednoduché geometrie, lineární úlohy a „dlouhé“ časové kroky. Délka časových kroků musí být dostatečná, aby se změny okrajových podmínek stihly dostatečně projevit v měřených datech. Zkracování časových kroků vede k nestabilitě úlohy [22].

Metoda je odvozena z Duhamelova principu [23], podle kterého lze pro lineární úlohy vyjádřit teploty v materiálu s jednoduchou geometrií pomocí lineární kombinace hustot tepelných toků na povrchu vynásobených tepelnými odezvami na impuls jednotkové hustoty tepelného toku v daném místě a čase, viz rovnice 2.1:

$$T_M = T_0 + \sum_{n=1}^M \dot{q}_n \Delta\Phi_{M-n}; \Delta\Phi_i = \Phi_{i+1} - \Phi_i; \quad (2.1)$$

kde  $T_M$  je teplota v časovém kroku  $M$ ,  $T_0$  je počáteční teplota,  $\dot{q}_n$  hustota tepelného toku na povrchu v časovém kroku  $n$ ,  $\Phi_i$  teplotní odezva v  $i$ -tém kroku na jednotkovou hustotu tepelného toku, který nastal v prvním časovém kroku [14].

### 2.3.2 | Celo-doménová metoda

Metoda stanovuje celý průběh okrajové podmínky najednou s využitím celého záznamu teplot. Vychází též z Duhamelova principu, který může být maticově zapsaný vztahem 2.2. V rozepsané formě viz rovnice 2.3.

$$T = X\dot{q} + T_0 \quad (2.2)$$

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\Phi_0 & & & \\ \Delta\Phi_1 & \Delta\Phi_0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \Delta\Phi_{N-1} & \Delta\Phi_{N-2} & \dots & \Delta\Phi_0 \end{bmatrix} + * \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_0 \\ T_0 \\ \dots \\ T_0 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

kde  $\mathbf{T}$  je vektor teplot v daném bodě materiálu v ekvidistantních časových krocích  $T_i = i\Delta t$ . Vektor  $\dot{\mathbf{q}}$  udává hustoty tepelných toků na povrchu v odpovídajících časech ( $\dot{q}_i$  je hustota tepelného toku v časovém intervalu  $\langle T_{i-1}, T_i \rangle$ ). Matice  $\mathbf{X}$  je spodní trojúhelníková matice obsahující citlivostní koeficienty a poslední vektor  $T_0$  zachycuje počáteční teplotu.

Z uvedené rovnice se vyjádří vektor  $\dot{q}$  a vzniklá soustava rovnic se vyřeší. Náročnost výpočtu je přitom silně závislá na počtu neznámých. K výpočtu může být použita inverzní matice, jejíž výpočetní náročnost je úměrná třetí mocnině počtu neznámých [24]. Pokud je to možné, pak je hledaná okrajová podmínka aproximována vhodnou funkcí s minimem neznámých parametrů. Pro složitější případy (zejména rychle se měnící okrajové podmínky) je možné použít například nahrazení po částech lineární funkcí.

Metoda je omezena na lineární úlohy a vhodná je pouze pro jednoduché a krátké úlohy. Úlohy s velkým počtem neznámých jsou neřešitelné z důvodu extrémní výpočetní náročnosti.

### 2.3.3 | Sekvenční Beckova metoda

Metoda je založena na sekvenčním (postupném) výpočtu hustoty tepelných toků. K výpočtu hustoty tepelného toku v  $m$ -tém časovém kroku  $\dot{q}_m$  se používá změřených teplot v následujících  $r$  časových krocích. Tyto kroky se označují, jako dopředné kroky. V nejjednodušší variantě se předpokládá, že hustota tepelného toku je po dobu  $r$  dopředných kroků konstantní, viz (2.4).

$$\dot{q}_{M+i} = \dot{q}_M, \text{ pro } i = 1, \dots, r \quad (2.4)$$

Druhou variantou je předpokládat lineární průběh, viz (2.5).

$$\dot{q}_{M+i} = \dot{q}_M + i(\dot{q}_M - \dot{q}_{M-1}), \text{ pro } i = 1, \dots, r \quad (2.5)$$

Jinými slovy metoda stanovuje hustotu tepelného toku, která by musela působit po dobu  $r$  časových kroků tak, aby se minimalizoval rozdíl mezi tepelnou odezvou a změřenými teplotami (ve smyslu metody nejmenších čtverců) (2.6).

$$S = \sum_{i=1}^r (Y_{M+i-1} - T_{M+i-1})^2 \quad (2.6)$$

Obecně je možné tuto minimalizační úlohu řešit všemi běžnými metodami, jako jsou například metoda sdružených gradientů [25], Nean-Melderova metoda [26], ale též heuristickými metodami jako jsou Monte Carlo [27], Simulované žíhání [28]. Pro lineární typ úlohy je možné ze vztorce (2.6) odvodit přímo vztah (2.7) pro výpočet hustoty tepelného toku  $\hat{q}_M$  (viz [14]) za předpokladu konstantního průběhu v dopředných krocích:

$$\hat{q}_M = \frac{\sum_{i=1}^r (Y_{M+i-1} - \hat{T}_{M+i-1} | \dot{q}_M = \dots = 0) \Phi_i}{\sum_{i=1}^r \Phi_i^2} \quad (2.7)$$

kde  $\Phi_i$  jsou koeficienty citlivosti definované vztahem (2.8).

$$\Phi_i = \frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}} \quad (2.8)$$

Předchozí vztah se často používá i v nelineárních případech, kdy se předpokládá, že na dostatečně malém časovém intervalu  $\langle t_M; t_{M+r} \rangle$  je možné relativně přesně reálnou úlohu aproximovat úlohou lineární [5].

### 2.3.4 | Regularizace

Většina výše popsaných metod používá ke svému chodu minimalizaci rozdílů vypočtených a měřených teplot. Rozšíření minimalizovaného výrazu o členy obsahující hustotu počítaného tepelného toku se nazývá regularizací. Smyslem této metody je omezení šumu v řešení a celkové zlepšení stability výpočtu. Standartní zápis regularizačních členů je popsán výrazem 2.9 [14].

$$\alpha [W_0 \sum_{i=1}^r \dot{q}_{M+i-1}^2 + W_1 \sum_{i=1}^{r-1} (\dot{q}_{M+i} - \dot{q}_{M+i-1})^2 + W_2 \sum_{i=1}^{r-2} (\dot{q}_{M+i+1} - 2\dot{q}_{M+i} + \dot{q}_{M+i-1})^2 + \dots]; \quad (2.9)$$

kde  $\alpha, W_0, W_1, W_2, \dots$  jsou nezáporné koeficienty. Dále platí, že  $\sum W_i = 1$ . Speciální případy, kdy je pouze jeden nenulový koeficient  $W_i > 0$ , se označují názvy regularizace nultého řádu (pro  $i = 0$ ), prvního řádu ( $i = 1$ ), druhého řádu ( $i = 2$ ),

... [29]. Je zřejmé, že regularizační člen bude nulový pro speciální případy hustoty tepelných toků - viz výraz 2.10.

$$q(t) = \begin{cases} 0, & i = 0 \\ C_0, & i = 1 \\ C_0 + C_1 t, & i = 2 \end{cases} \quad (2.10)$$

Pokud správné řešení (hustoty tepelných toků) není příslušného typu (konstanta, lineární průběh, ...), pak při použití regularizace dochází vždy ke zkreslení výsledků. Při volbě  $\alpha \rightarrow 0$ , se efekt regularizace vůbec neprojeví. V opačném případě kdy  $\alpha \rightarrow \infty$  je řešení přehlazené do podoby odpovídající použitému řádu regularizace. Esenciální pro kvalitu výsledků je proto volba konstanty  $\alpha$ . Ta se nejčastěji určuje ručně metodou „pokus-omyl“. V praxi se občas využívá různých kritérií, například  $\alpha = \Phi_1^2$  pro regularizaci nultého řádu [14], které však nezaručují dobré výsledky. Případně je možné použít postup, který uvádí Woodbury [30]. Celo-doménovou metodu s regularizací lze zapsat v maticovém tvaru 2.11 jako minimalizaci součtu čtverců [14].

$$S = (Y - T)^T(Y - T) + \alpha[W_0(H_0q)^T H_0q + W_1(H_1q)^T H_1q + W_2(H_2q)^T H_2q + \dots]; \quad (2.11)$$

Kde

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}; T = \begin{bmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_n \end{bmatrix}; q = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}; H_0 = I;$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}; H_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ \vdots & & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

Řešení je pak vyjádřené vztahem 2.12.

$$\hat{q} = [X^T X + \alpha(W_0 1 + W_1 H_1^T H_1 + W_2 H_2^T H_2 + \dots)]^{-1} X^T (Y - T_0 1); \quad (2.12)$$

I přesto, že metoda regularizace jde stejně tak jako v celo-doménové metodě použít i v metodách sekvenčních (například v metodě odhadu funkce), není její použití příliš časté. Je to patrně z toho důvodu, že u sekvenčních metod je možné



výpočet stabilizovat pomocí použití dopředných kroků. Použití další metody regularizace (přídavných regularizačních členů) se zdá být nadbytečné. Použití regularizace v sekvenční metodě může být v určitých případech výhodné:

- Je možné použít méně dopředných kroků (kratší dopředný čas), čímž je možné ušetřit výpočetní čas.
- Může být použita regularizace vyšších řádů.
- Regularizace může tlumit kmitání spočteného řešení vůči předpočítané funkci (například odhadu řešení z předchozí iterace výpočtu).

### 2.3.5 | Metoda numerického filtru

Extrémně výpočetně nenáročnou metodou (opět s omezením pro lineární úlohy) je použití digitálního filtru. Filtr je tvořený koeficienty  $f_i$  viz rovnice 2.13, které jsou odvozeny podobným způsobem jako v případě sekvenční Beckově metodě odhadu funkce.

$$f_{i-r} = \frac{\delta \hat{q}_i}{\delta Y_r}; \quad (2.13)$$

kde  $r$  je počet dopředných kroků [14]. Konkrétní hustota tepelného toku  $\hat{q}_M$  v časovém kroku  $M$  je vyjádřena, jako lineární kombinace změřených teplot od počátku měření  $Y_1$  do časového kroku  $M + r - 1$ , tedy  $Y_{M+r-1}$ . Viz rovnice 2.14

$$\hat{q}_M = \sum_{i=1}^{M+r-1} f_{M-i}(Y_i - T_0); \quad (2.14)$$

přičemž platí, že  $f_i \rightarrow 0$ , pro  $i > N$ , kde  $N$  je relativně malé číslo. Proto je možné zmíněný filtr přibližně nahradit zjednodušeným filtrem, který se skládá pouze z hodnot  $f_{1-r}, \dots, f_0, \dots, f_N$ . [14]

Výsledná metoda s takto zkráceným filtrem je sice výpočetně efektivní, ale její použití je omezeno pouze na úlohy bez změny materiálových vlastností v průběhu výpočtu.

### 2.3.6 | Umělá neuronová síť

Za počátek neuronových sítí se dá považovat rok 1943, kdy McCulloch a Pitts poprvé popsali jednoduchý model neuronu. Též poukázali na to, že spojením dostatečného množství neuronů obdržíme síť, která je schopna reprezentovat téměř libovolnou funkci. [31] Neuronová síť je množina výkonných prvků (neuronů) pospojovaných vazbami. Základní funkcí NS je realizovat zobrazení vstupu  $X$  na výstup  $Y$ , kde  $X$  a  $Y$  jsou nejčastěji vektory délky  $N$  a  $M$ . Před tím, než je NS schopna vykonávat svoji funkci, předchází fáze učení. Běžně probíhá učení tzv. „s učitelem“, to je případ

kdy se NS učí na testovací množině zadání, pro něž jsou známá správná řešení. NS musí být po naučení schopná vyhodnotit i vstupy, které nebyly součástí testovací množiny, protože testovací množina je vždy menší než množina všech přípustných vstupů. [32]

### Model neuronu

Jako triviální model neuronu se často používá tzv. perceptron. Každý perceptron má svůj potenciál spočtený jako vážený součet všech budících signálů. Pokud je potenciál větší než určitá mez, pak je neuron excitován a jeho výstup nabývá hodnoty 1. V opačném případě je inhibován s výstupem 0. Toto chování popisuje rovnice 2.16.

$$y(x) = \text{Sgn}\left(\sum_{i=1}^n w_i x_i - \vartheta\right); \quad (2.15)$$

kde  $x_i$  jsou vstupy,  $w_i$  váhy a  $\vartheta$  je prahová hodnota. Přičemž  $\text{Sgn}$  značí funkci definovanou vztahem 2.16, která zde plní úlohu tzv. aktivační funkce.

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

V praxi se pak často používají složitější modely neuronu. Například spojitý perceptron, který má stejným způsobem počítaný potenciál, ale jeho aktivační funkce 2.17 je složitější.

$$y = S(z) = \frac{1}{1 + e^{-\lambda z}}; \quad (2.17)$$

kde  $z$  je potenciál neuronu a  $\lambda$  je strmota sigmoidu.

### Využití neuronových sítí pro inverzní úlohy vedení tepla

Neuronové sítě se dají pro inverzní úlohy vedení tepla použít více způsoby. Vzhledem k náročnosti učení rozsáhlých neuronových sítí jsou používány zejména ve formě numerických filtrů a odhadu parametrů [17], [33]. Použití NS celo-doménově je sice možné [34], ale pro rozsáhlé úlohy je silně neefektivní. Dalším příkladem použití NS je v kombinaci s jinou metodou, kde NS slouží pouze pro rychlý výpočet přímé úlohy vedení tepla [35].

### Použití ve formě filtru

V jednorozměrném případě s jedním tepelným čidlem do NS postupně vstupují posloupnosti změřených teplot, z kterých jsou stanovovány tepelné toky. Konkrétně

hustota tepelného toku  $\dot{q}_M$  je vyjádřena jako funkce změřených teplot  $Y_{M-N_1}, \dots, Y_{M-N_2}$  viz rovnice 2.18.

$$\dot{q}_M = f(Y_{M-N_1}, Y_{M-N_1+1}, \dots, Y_{M-1}, Y_M, Y_{M+1}, \dots, Y_{M+N_2-1}, Y_{M+N_2}) \quad (2.18)$$

kde  $N_1, N_2$  jsou malá kladná čísla. Struktura se tak podobá numerickým filtrům. Na rozdíl od předchozí kapitoly nejsou koeficienty filtru stanoveny deterministickým výpočtem. Vlastnosti filtru se daná NS „naučí“ pomocí testovací množiny, která se skládá z dvojic zadání – řešení. Tato množina může být sestavena na základě množiny jednoduchých zadání přímé úlohy (hustot tepelných toků), které jsou přímou úlohou řešeny (výsledkem je průběh teplot).

### Odhady parametrů

Zajímavé použití NS publikoval Deng [35], který používá dvě různé neuronové sítě. Jednodušší síť (mírně modifikovaná Hopfieldova NS<sup>1</sup> [36], [37]), která řeší přímou úlohu vedení tepla a druhá složitější, která řeší inverzní úlohu. K vytvoření testovací množiny úloh pro druhou NS pak s výhodou využívá urychleného přímého výpočtu díky první NS.

### 2.3.7 | Genetické algoritmy

Genetické algoritmy jsou inspirované evoluční teorií (Lamarck 1801, Darwin 1859) a využívají paralely s genetikou [39]. První použití pro optimalizaci pod názvem genetické algoritmy nastalo až v roce 1975 [21].

Základní myšlenkou GA je vytvoření populace jedinců, kde DNA každého jedince kóduje určité řešení daného problému. Počáteční populace (často náhodná) je pak vylepšována pomocí tzv. genetických operátorů, jako jsou: křížení, mutace a ohodnocení [40]. Tyto základní operátory je možné doplnit operátorem „smrt“ [39], případně o své vlastní operátory „manipulace“ a „seřazení“ cíleně konstruované pro inverzní úlohy vedení tepla v mé předchozí práci [41].

### GA pro řešení inverzních úloh vedení tepla

GA můžou i pro rozsáhlé úlohy dávat kvalitativně podobné výsledky, jako sekvenční Beckův algoritmus. Vzhledem k relativní efektivitě tohoto algoritmu, však není pravděpodobné, že by GA mohl poskytnout výhodu v podobě méně náročného výpočtu. Smysl použití GA, tak spočívá hlavně ve speciálních aplikacích, kde klasické metody

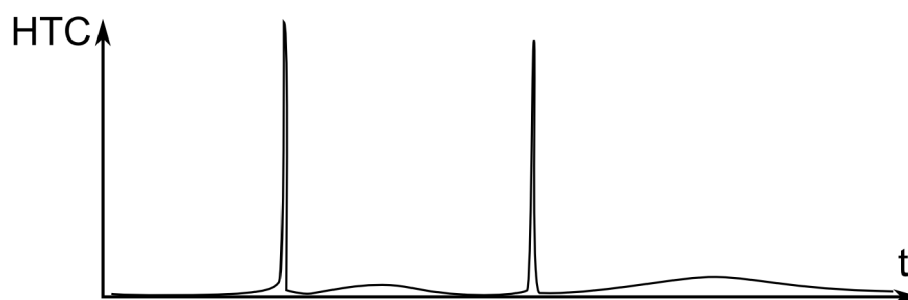
<sup>1</sup>Hopfieldova NS je tvořena pouze jednou vrstvou neuronů, kde je každý neuron napojen na všechny ostatní, přičemž spojení jsou oboustranné se stejnou vahou.

nedávají dostatečně přesná řešení nebo se z jiného důvodu nedají použít. Jednou z těchto aplikací je případ hledání intenzivního tepelného toku, který byl aplikován po extrémně krátkou dobu. Přesto, že se v literatuře objevují články, které dokládají úspěšné použití GA celo-doménově [20], nejsou GA vhodné pro stanovování velkého počtu parametrů najednou [41]. Články popisující tento přístup jsou většinou aplikované na jednoduché úlohy s malým počtem neznámých parametrů (řádově do 100), přičemž jejich přímé rozšíření na reálné úlohy (s desetitisíci parametry) není možné. Pro rozsáhlé úlohy je vhodné používat GA v sekvenční formě [41]. Jiným atypickým použitím je kombinace s neuronovými sítěmi, kde je GA použito ke zlepšení (zrychlení i zpřesnění) algoritmů zpětné propagace (základního algoritmu pro učení NS). [42]

# KAPITOLA 3 ■

## Prudce se měnící okrajové podmínky

Předpokládejme časově závislou úlohu s relativně dlouhým záznamem dat, kterou je potřebné vyhodnotit v celém časovém intervalu. Kromě pozvolně se měnících okrajových podmínek se v úloze vyskytuje i omezené množství extrémně prudkých změn viz 3.1. V průběhu experimentu dále dochází k významným změnám materiálových vlastností vlivem změny teplot.



Obr. 3.1: Příklad pozvolně se měnící okrajové podmínky (součinitele přestupu tepla (Heat Transfer Coefficient)) se dvěma extrémními změnami

V následujících kapitolách budou probrány problémy běžných způsobů řešení této úlohy a dvě nově navržená řešení:

- Dvofázové řešení – V první fázi se vyřeší úloha „běžným“ způsobem. Ve druhé fázi se provede korekce problematických úseků jejich přepočítáním jinou metodou.
- Sekvenční sub-doménový přístup, který používá celo-doménového přístupu sekvenčním způsobem na subdoménách.

### 3.1 | Problémy při řešení klasickými metodami

Délka úlohy a proměnlivost okrajových podmínek znemožňuje řešit úlohu stanovením parametrů jednoduché funkce, kterou by se popsal průběh okrajových podmínek. Obecně je potřeba použít některou z metod odhadu funkce. Úlohu zároveň není

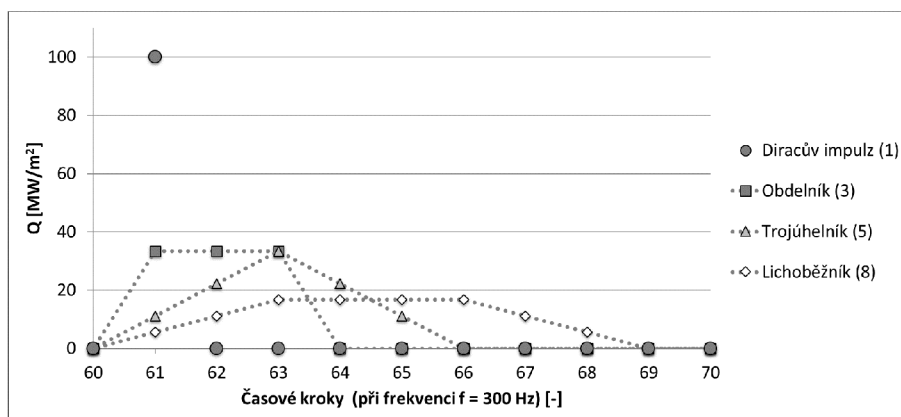
možné řešit efektivně jednokrokově kvůli její délce, viz podkapitoly celo-doménový přístup (2.3.2) a regulace (2.3.4). Ze sekvenčních metod pak můžeme vyřadit ty, které nejsou schopny postihnout vývoj materiálových vlastností. Za vhodnou metodu se dá považovat sekvenční Beckova metoda, jejíž dobrá funkčnost mimo extrémní změny v okrajových podmínkách je ověřena v LPTP [5]. K jak velkému zkreslení výsledku dochází, v oblastech s prudkou změnou okrajové podmínky, bude ilustrováno na testovacích úlohách.

### 3.1.1 | Testovací úlohy

Vzhledem k tomu, že všechny metody, které budou na testovací úlohy aplikovány dosahují dobrých výsledků pro pozvolné změny okrajových podmínek, tak je možné testovací úlohu omezit pouze na části s prudkými změnami okrajové podmínky a jejich blízké okolí.

Pro testy jsou nejčastěji použity následující typy okrajové podmínky (viz 3.2):

- Diracův impulz
- Trojúhelníkový průběh
- Obdélníkový průběh
- Lichoběžníkový průběh



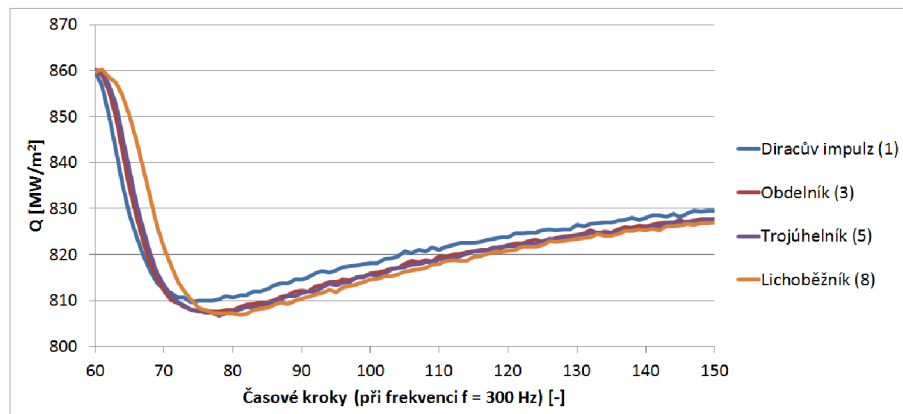
Obr. 3.2: Příklad testovacích okrajových podmínek

### Fiktivní experiment

Zvolené okrajové podmínky  $Q(t)$  se aplikují na povrch fiktivního vzorku. Výsledkem přímé úlohy vedení tepla je teplotní pole vzorku v závislosti na čase  $T(X, t)$ , kde  $X$  je libovolný bod vzorku a  $t$  je čas. Ve zvolených bodech  $X_1, X_2, \dots$  (fiktivních termočláncích) se vyjádří průběh teplot  $T_1(t) = T(X_1, t), T_2(t) = T(X_2, t), \dots$

Do takto fiktivně změřených teplot  $T_1, T_2, \dots$  se přidá šum, který odpovídá běžnému šumu při měření teplot. Z praktických experimentů byl zvolen šum s normálním rozdělením  $N(0, \sigma^2)$  s parametrem  $\sigma = 0.25$ .

Výsledné záznamy teploty v hloubce 0,7 mm pod povrchem jsou vyneseny v grafu 3.3.



Obr. 3.3: Záznamy teplot pro testovací okrajové podmínky

### Řešení sekvenční Beckovou metodou

Poměr mezi přesností a stabilitou výpočtu sekvenční Beckovy metody je dán vhodnou volbou počtu dopředných kroků  $N_f$  [43]. Pro názornost byly použity tři různé hodnoty:

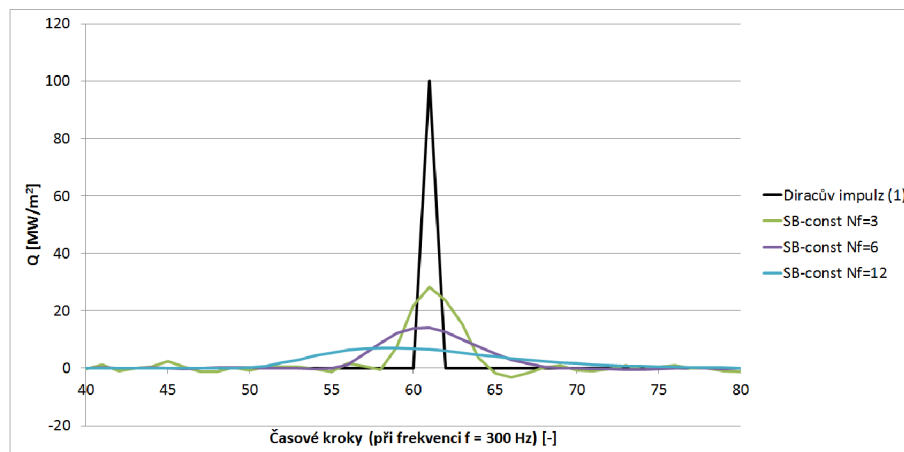
- $N_{f,1} = 3$  je zvoleno na hranici stability výpočtu
- $N_{f,2} = 6$
- $N_{f,3} = 12$ .

Testovací úlohy byly řešeny postupně pro všechny tři volby počtu dopředných kroků. Výsledky pro Diracův impuls a lichoběžníkový průběh jsou srovnány s přesnými řešeními v grafech 3.4 a 3.5. K výpočtům byly použity teplotně závislé materiálové vlastnosti.

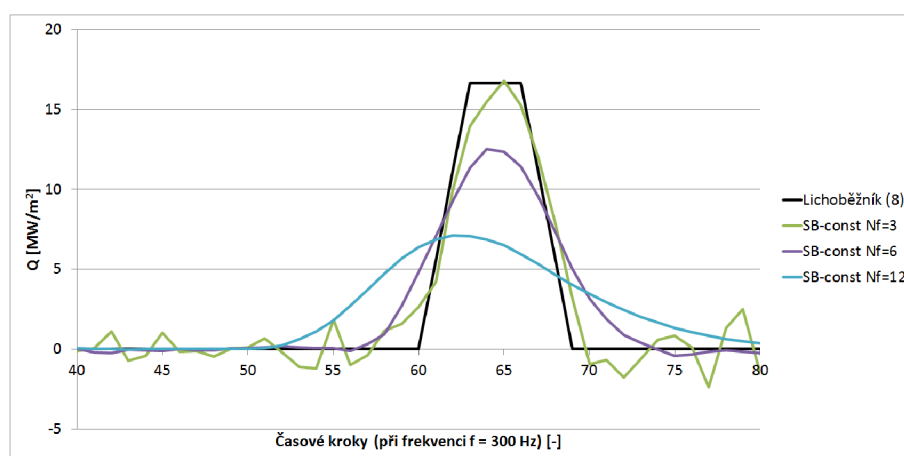
### Řešení celo-doménovou metodou s regularizací

Řešení testovací úlohy celo-doménovou metodou je silně závislé na šumu ve vstupních datech.

Pro nízkou úroveň šumu (normální rozdělení s parametrem  $\sigma = 0,02$ ) je možné úlohu řešit bez použití regularizace, zatímco pro větší šum (normální rozdělení s parametrem  $\sigma = 0,2$ ) je již regularizace nevyhnutelná. Srovnání řešení bez regularizací pro stejnou testovací úlohu se dvěma úrovněmi šumu je v grafu 3.6.



Obr. 3.4: Srovnání výsledků sekvenční Beckovy metody



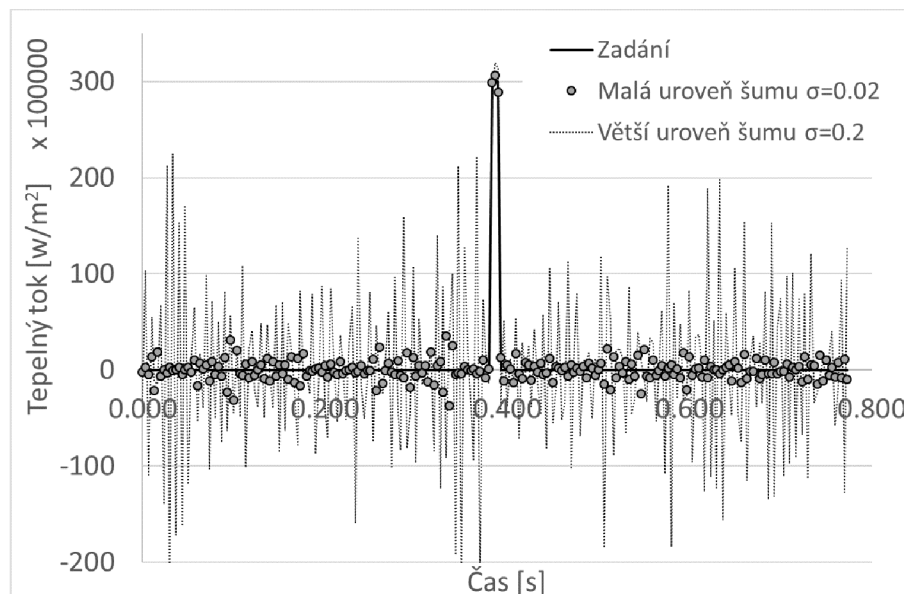
Obr. 3.5: Srovnání výsledků sekvenční Beckovy metody

Při vyhodnocování experimentů, které typově odpovídají popisované problematice, jsou v LPTP běžně používány teploty měřené termočlánky, které mívají charakter šumu s přibližně normálním rozdělení s parametrem  $\sigma = 0,2$ . Použití celodoménové metody na úlohy, které jsou řešeny v této kapitole, je tak téměř vždy spojeno s regularizací nebo s filtrováním dat před samotným inverzním výpočtem. Řešení testovací úlohy s různou úrovní regularizace je v grafu 3.7 společně s ideálním řešením (zadáním) této úlohy.

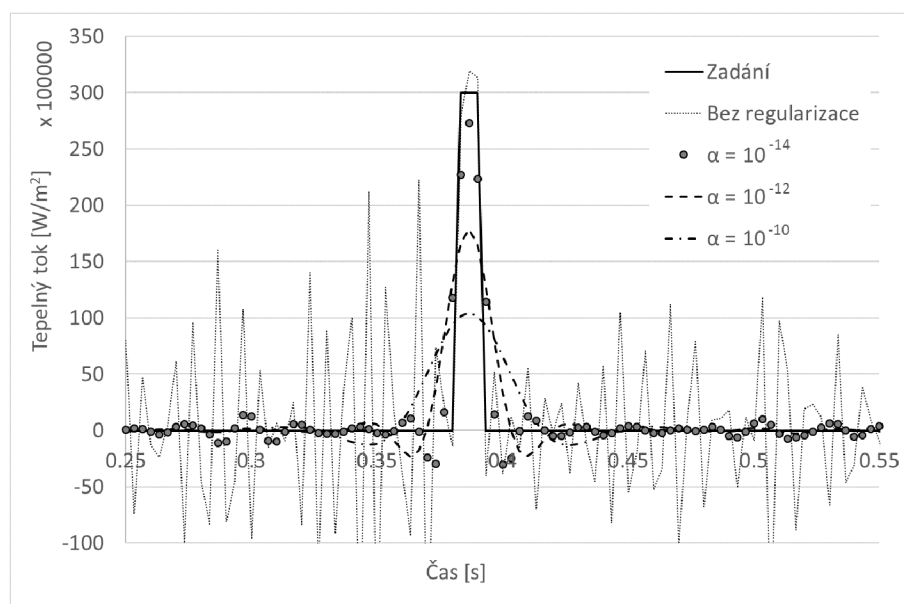
Z grafu 3.7 je patrné, že vhodnou volbou parametrů regularizace (v tomto případě  $\alpha = 10^{-14}$ ) je možné dosáhnout relativně dobrého řešení, které není příliš zkreslené a zároveň dostatečně potlačuje šum.

Jak bylo psáno v kapitole 2.3.2, tak jednou z nevýhod celodoménové metody je, že se ve výpočtu nezohledňují tepelně závislé materiálové vlastnosti. Vliv tohoto zjednodušení je znázorněn v grafech 3.8 a 3.9, které ilustrují inverzní výpočet celodoménovou metodou. Zvolená testovací úloha používá stejný model vzorku jako předchozí testovací úlohy. Okrajová podmínka je zvolena tak, aby model prošel





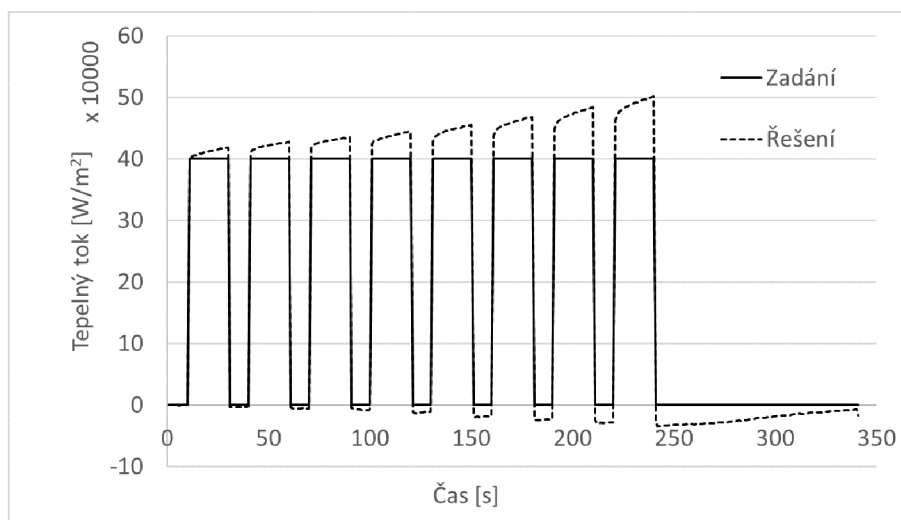
Obr. 3.6: Výsledky celo-doménové metody bez regularizace pro dvě úrovně šumu ve vstupních datech



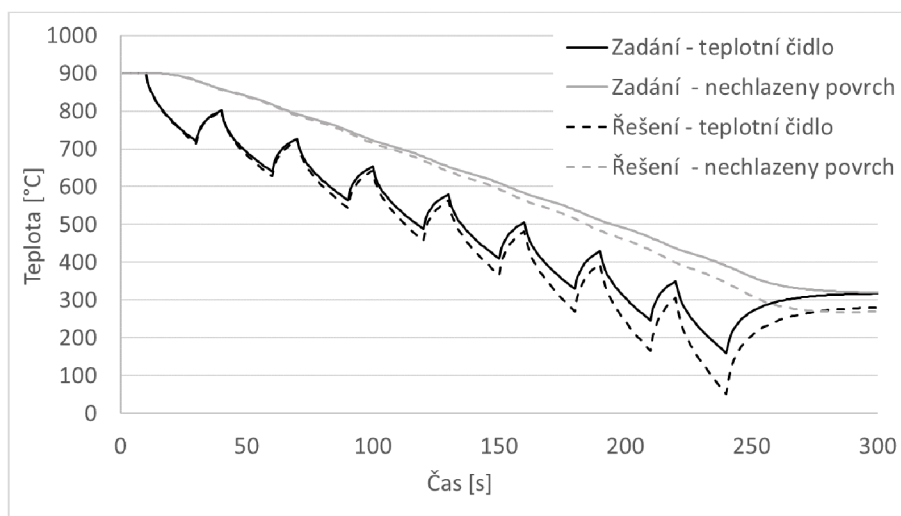
Obr. 3.7: Srovnání řešení pro různou míru regularizace (podle hodnoty koeficientu  $\alpha$ ) s přesným řešením a řešením bez regularizace

v průběhu výpočtu velkým rozsahem teplot, a tím i velkou změnou tepelně závislých materiálových vlastností. Tvar zvolené okrajové podmínky a zkreslené řešení celo-doménové metody je vyneseno v grafu 3.8. V souladu s předpokladem se zkreslení celo-doménového výpočtu zvětšuje se zvětšujícím se rozdílem počáteční a aktuální teploty, respektive se zvětšujícím se časem. Pro úplnost jsou v grafu 3.9 vyznačeny vstupní data inverzní úlohy (teploty) v porovnání s teplotami, které je možné dopočítat přímou úlohou na základě výsledku úlohy inverzní. Pro zadání i výsledek jsou

uvedeny vždy dva záznamy teplot. Podpovrchová teplota v místě teplotního čidla a teplota nechlazeného povrchu.



Obr. 3.8: Zkreslení okrajové podmínky vlivem nezohlednění změny materiálových vlastností během výpočtu



Obr. 3.9: Zkreslení teplot simulovaných na základě zkreslené okrajové podmínky

Problematiku řešení tohoto typu úloh celo-doménovou metodou můžeme shrnout takto:

- Je potřebné použít regularizaci.
- Nejde použít na dlouhé záznamy z důvodu výpočetní náročnosti.
- Nejde použít při změně teploty ve velkém rozsahu, protože metoda používá konstantní materiálové vlastnosti.

## 3.2 | Dvoufázové řešení

Stejná problematika byla podobným přístupem řešena na VUT (LPTP 2002) [44]. K řešení byla tehdy použita sekvenční Beckova metoda, která byla v kritických místech nahrazena optimalizací parametrů funkce HTC (součinitele přestupu tepla) známého tvaru. Metoda dávala dobré výsledky za předpokladu, že typ (tvar) hledané funkce je neměnný a známý. Popsaný přístup, avšak s jinou metodou pro druhou fázi (bez požadavku na známý typ funkce), byl testován v rámci této dizertační práce a na závěr je srovnán s ostatními přístupy.

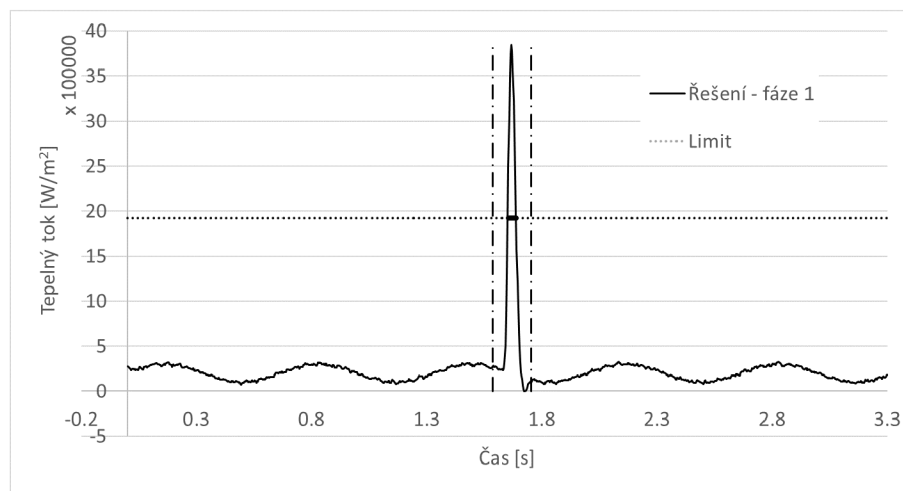
V první fázi se použije výpočetně efektivní metoda, schopná pracovat s tepelně závislými materiálovými vlastnostmi. Z vyhodnocených okrajových podmínek se vyberou kritická místa s prudkými změnami okrajových podmínek, které se přepočítají v druhé fázi jinou metodou. Díky tomu, že se v druhé fázi přepočítávají jen krátké úseky záznamu, je možné použít širší nabídku výpočetních metod. Není nutné, aby zvolená metoda byla výpočetně nenáročná. V některých případech je možné díky krátkému časovému úseku předpokládat, že se materiálové vlastnosti příliš nemění a model aproximovat jako model lineární.

### 3.2.1 | Popis realizace

Pro demonstraci tohoto přístupu byla zvolena testovací úloha kombinující pozvolně se měnící okrajovou podmínku tvaru sinusové funkce a jednu prudkou změnu obdélníkového tvaru. Model vzorku zůstal stejný jako v předchozích úlohách. Vzdálenost teplotního senzoru od chlazeného povrchu je 1 mm a frekvence vstupních dat je 300 Hz. Pro realizaci první fáze výpočtu byla použita sekvenční Beckova metoda. Počet dopředných kroků byl stanoven na 10, respektive na dopředný čas 0,033 s. Na základě tohoto řešení jsou stanoveny úseky výpočtu, které mají být přepočítány v druhé fázi. Konkrétně jsou vybrány intervaly, na kterých řešení první fáze překračuje stanovenou limitní hodnotu. Limitní hodnota pro uvedený příklad byla zvolena jako polovina maxima tohoto řešení. Nalezené intervaly musí být dále rozšířeny minimálně o počet dopředných kroků tak, aby pokrývaly celou oblast, kde je výpočet první fáze zkrácený prudkou změnou hledaného řešení. Pro případ zvolené testovací úlohy byl interval rozšířen o dvojnásobek počtu dopředných kroků  $Nf$  na každou stranu<sup>1</sup>. Ukázka první fáze řešení testovací úlohy je v grafu 3.10, kde je též vyneseno

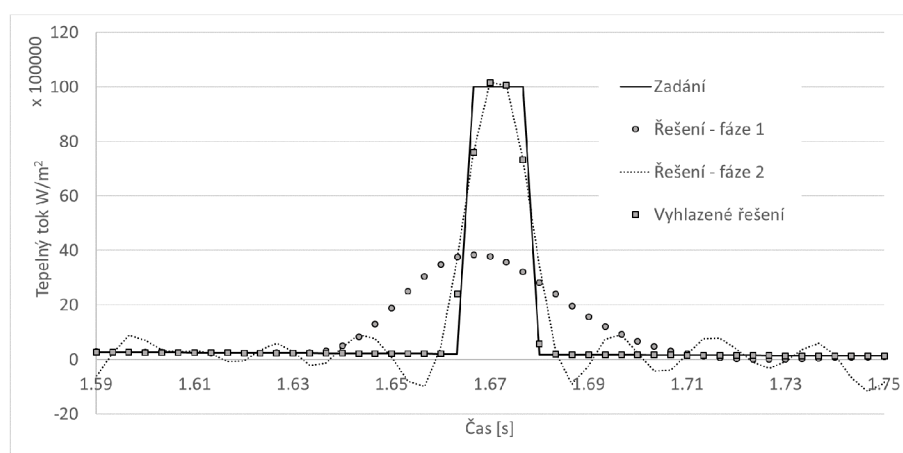
<sup>1</sup>Pro neznámý typ hledané okrajové podmínky není možné po první fázi výpočtu určit optimální délku intervalu pro fázi druhou. Vhodnost této volby se však dá ověřit zpětně po dokončení výpočtu druhé fáze, podle toho na jakém intervalu se shoduje výpočet první a druhé fáze výpočtu. Pokud se řešení na krajích intervalu neshodují, tak byl použit příliš malý interval a řešení druhé fáze by mělo být přepočítáno pro větší interval.

zvolený limit a rozšířený interval pro druhou fázi výpočtu.



Obr. 3.10: Výsledky první fáze výpočtu s vyznačeným intervalem pro druhou fázi výpočtu

Vybrané intervaly jsou v druhé fázi řešeny celo-doménovou metodou, kterou je možné použít díky krátké délce řešených úseků. Ke stabilizaci výpočtu je opět použita "slabá" regularizace. Tj. regularizace s malou hodnotou parametru  $\alpha$  tak, aby regularizace příliš neovlivňovala průběh řešení, zvláště pak maximální vypočtené hodnoty. Důsledkem této volby je šum v řešení, který je ve srovnání s šumem z první fáze mnohonásobně větší. Na druhou stranu je tento šum stále přijatelný ve srovnání s výsledky druhé fáze potažmo se zadáním. Popsaná řešení obou fází ve srovnání se zadáním jsou v grafu 3.11. V uvedeném grafu je dále uvedeno vyhlazené řešení, které je možné získat bez toho, aniž bychom rozostřili průběh řešení v okolí jeho maxima.



Obr. 3.11: Srovnání řešení obou fází se zadáním

### 3.2.2 | Shrnutí

Dvoufázové řešení je jednoduché a efektivní řešení pro případy, kdy v dlouhém záznamu plynule se měnící okrajové podmínky je omezený počet izolovaných prudkých změn. Přičemž intervaly pro vyhodnocení v druhé fázi by měly být relativně krátké a nesmí v nich docházet k velkým změnám materiálových vlastností při použití celo-doménové metody pro druhou fázi výpočtu. Metoda není vhodná v případě, že časové intervaly pro druhou fázi řešení jsou příliš dlouhé (počtem vzorků) a nedělitelné.

## 3.3 | Sub-doménová metoda

Hlavní myšlenkou je použití celo-doménové metody sekvenčním způsobem. Tj. hodnota okrajové podmínky v časovém kroku  $M$  je stanovena celo-doménovou metodou na základě změřených teplot v  $Nf$  budoucích krocích. Jde o extrémní případ použití sub-doménové metody, kterou v nedávné době (rok 2015) vyvíjela V. Hříbová v rámci své diplomové práce pod vedením M. Pohanky, který je zároveň školitelem specialistou této práce [45]. Zmíněná metoda výpočetní doménu (celý záznam teplot v čase) rozdělí do menších sub-domén s mírným překryvem. Na sub-doménách pak probíhá výpočet celo-doménového typu. Dizertační práce se bude zabývat extrémním případem, kdy každá subdoména je dlouhá  $Nf$  hodnot a z toho  $Nf - 1$  je překryv. V každém časovém kroku se tak použije pouze jedna spočtená hodnota tepelného toku.

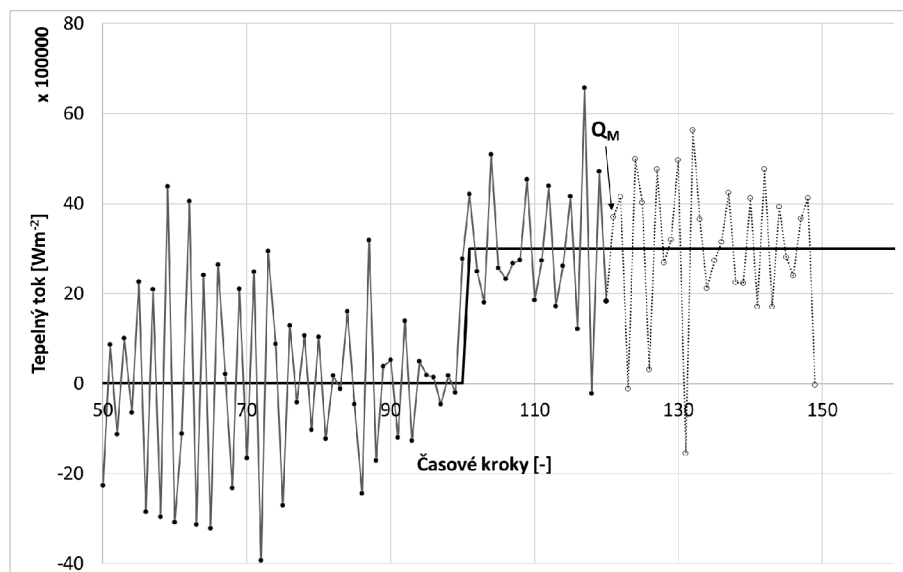
### 3.3.1 | Popis metody

Úloha je řešena sekvenčním způsobem od začátku do konce. Hledanou okrajovou podmínkou je tepelný tok  $Q_i$  pro  $i = 1, \dots, N - Nf$ , kde  $N$  je počet časových kroků celé úlohy a  $Nf$  délka sub-domény (počet dopředných časových kroků). V každém kroku  $M$  se stanoví okrajová podmínka  $Q$  v časových krocích  $M, M + 1, \dots, M + Nf - 1$ , z těchto hodnot se vybere pouze první z nich, tj.  $Q_M$ .

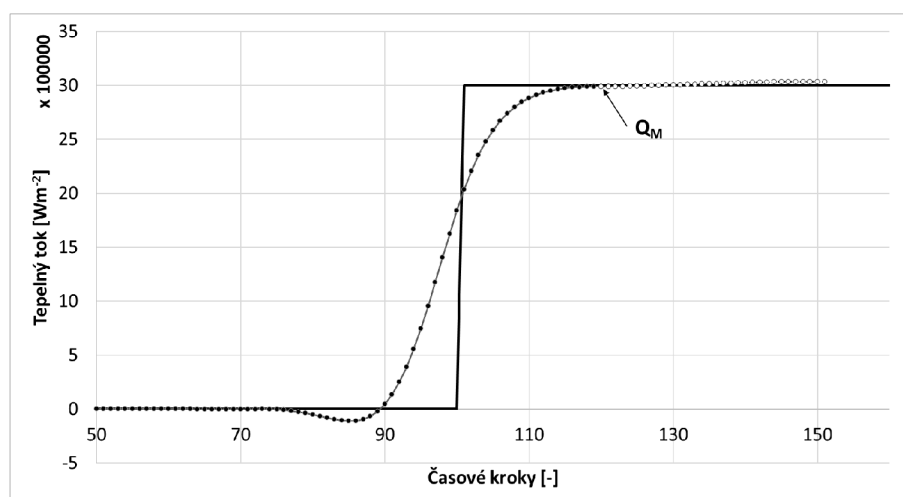
Vhodnou délku sub-domén  $Nf$  je možné stanovit stejným způsobem, jako u sekvenční Beckovy metody, na základě teplotní odezvy na okrajovou podmínky typu Diracův impuls. Příliš malá hodnota způsobí, že samotná hodnota  $Q_M$  je obsažena ve vstupních datech s tak malou citlivostí, že se dílčí řešení každé sub-domény stane nestabilním. Ze stejného důvodu jsou méně stabilní a přesné hodnoty ke konci sub-domény.

Na rozdíl od sekvenční Beckovy metody, kde je okrajová podmínka v  $Nf$  dopředných krocích nahrazena jednou hledanou hodnotou  $Q_M$  (nebo směrnici přímky), nejsou v sub-doménové metodě tepelné toky  $Q_M, Q_{M+1}, \dots, Q_{M+Nf-1}$  spočtené v rámci

jedné sub-domény striktně svázaný. Z tohoto důvodu nedochází k přehlazení dílčích výsledků, ani pro volbu velkého počtu dopředných kroků  $Nf$ . Zároveň to znamená, že v dílčích řešeních není potlačován šum, který je pro běžné praktické úlohy nepřijatelně vysoký. Ukázka řešení inverzní úlohy do kroku  $M - 1$  a dílčího řešení pro krok  $Q_M$  je v grafu 3.12. K potlačení šumu, se použije vhodný typ regularizace. Pro ilustraci je uvedeno řešení stejného příkladu, jako je v grafu 3.12, ale nyní s použitím regularizace prvního řádu, viz graf 3.13.



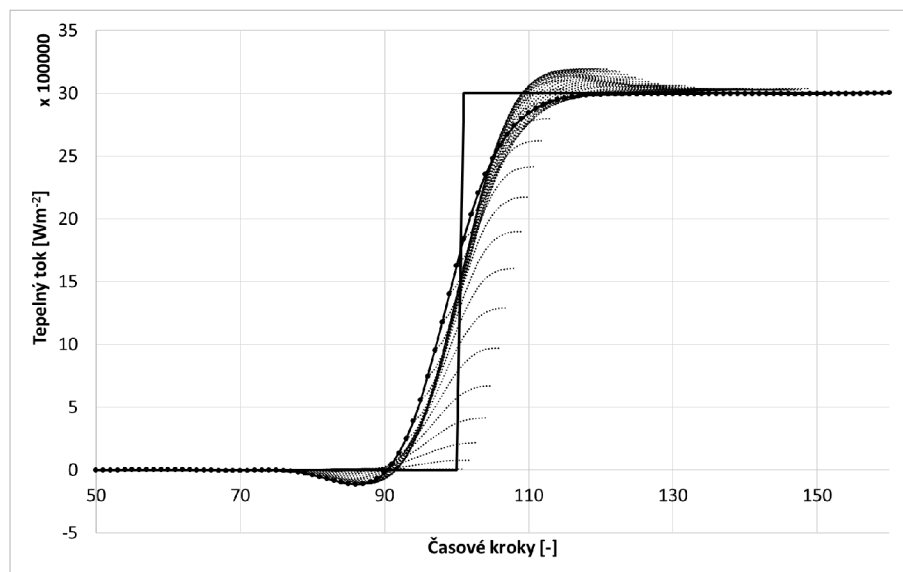
Obr. 3.12: Ukázka řešení sub-doménovou metodou do kroku  $M - 1$  ( $M = 120$ ) a navazujícího dílčího řešení pro časové kroky  $M$  až  $M + Nf - 1$ .



Obr. 3.13: Ukázka řešení s regularizací prvního řádu do kroku  $M - 1$  a navazujícího dílčího řešení  $M + Nf - 1$ .

Používání regularizace má samozřejmě své negativní důsledky, které jsou ilustrovány v grafu 3.14. Tento graf zobrazuje dílčí řešení v průběhu řešení stejné úlohy

jako v předchozím grafu (3.13).

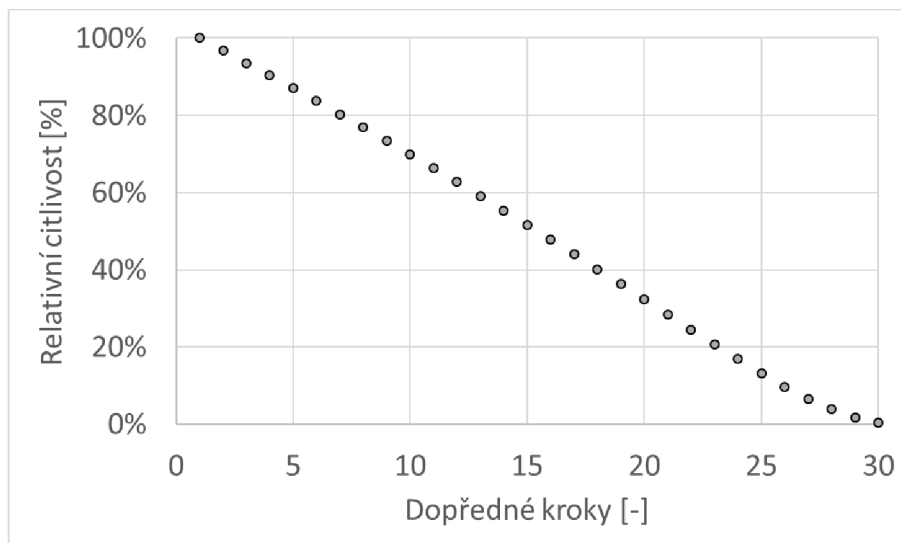


Obr. 3.14: Ukázka řešení s regularizací prvního řádu a dílčích řešení.

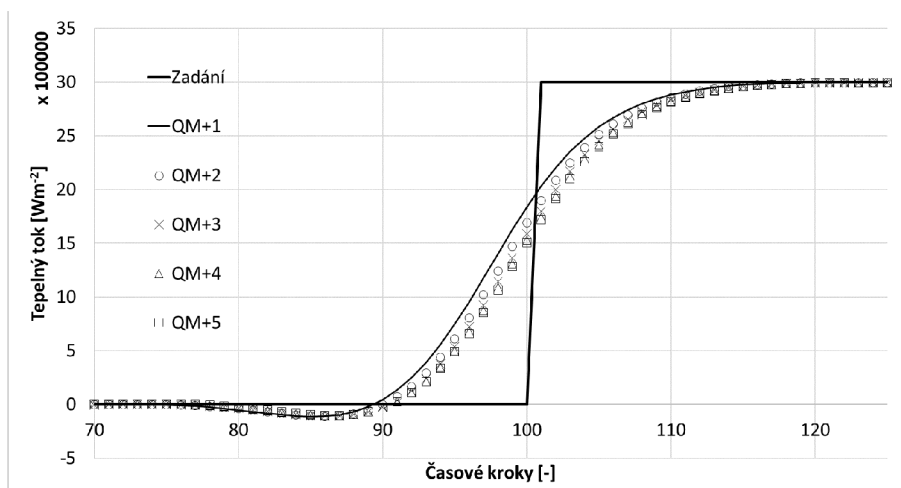
Prvním negativním důsledkem regularizace, na který se zaměříme, je viditelné zkreslení konců dílčích řešení. Způsobeno je to tím, že použitá regularizace tlumí derivaci řešení se stejnou silou na celé sub-doméně, zatímco citlivost stanovení hodnot  $Q_i$  ke konci sub-domény výrazně klesá, viz graf 3.15. Regularizace má proto ke konci sub-domény dominantní vliv a převáží nad hledaným řešením. Popsané zkreslení je možné výrazně potlačit úpravou regularizační matice tak, aby obsahovala váhy, které budou větší na začátku záznamu a menší ke konci. Vhodnou volbou jsou váhy kopírující citlivost výpočtu hodnot  $Q_i$ , viz graf 3.15. Nastíněná vážená regularizace není v této práci dále řešena, protože k realizaci popsané sub-doménové metody, která používá pouze první hodnotu ze sub-domény není potřeba, aby byl dílčí výpočet přesný i na konci sub-domény.

Druhým důsledkem regularizace, který není z grafu 3.13 úplně zřejmý, je chování prvních dvou (respektive tří, podle typu regularizace) vypočtených hodnot každé sub-domény. Problematika je zachycena v grafu 3.16, který kromě zadání (plná čára) znázorňuje prvních pět stanovených hodnot pro každou sub-doménu. První hodnoty (tj. stanovené řešení celé inverzní úlohy) jsou proloženy plnou čarou. Další jsou označeny značkami v pořadí: kolečko, křížek, trojúhelník a čtverec. Na uvedeném příkladu je vidět, že se začátky (první dvě hodnoty) dílčích řešení dvou po sobě jdoucích sub-domén příliš neshodují. Naopak třetí až pátá hodnota již vykazuje dobrou shodu.

Příčina je opět v regularizaci. Konkrétně pro regularizaci prvního řádu se každá hodnota  $Q_i$  vyskytuje ve dvou výrazech, kromě první a poslední hodnoty. Proto je



Obr. 3.15: Součet koeficientů, které ovlivňují výpočet hodnot  $Q_{M+i}$  v rámci jedné sub-domény. Respektive citlivost  $Q_{M+i}$  na vstupní data.



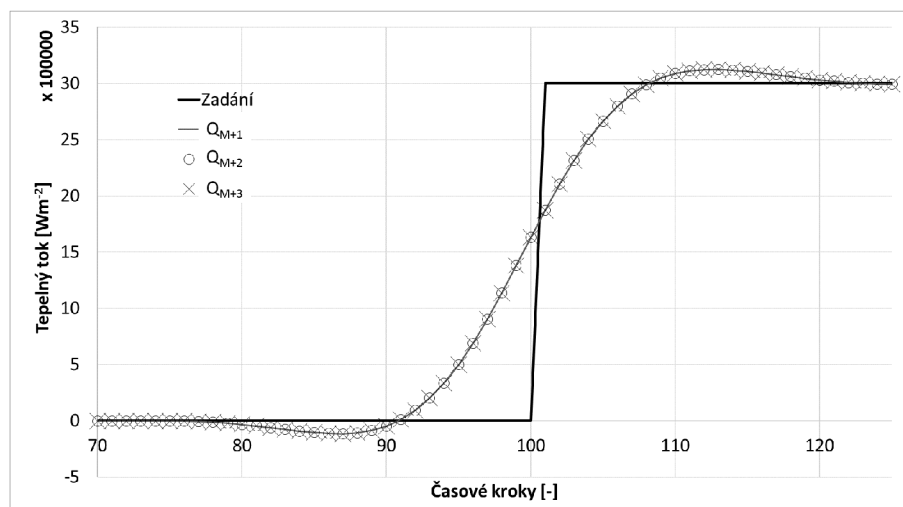
Obr. 3.16: Prvních pět hodnot z každé sub-domény

první hodnota sub-domény tlumena výrazně jinak, než zbytek hodnot. Včetně hodnoty druhé z předchozí sub-domény, která by jinak měla být téměř stejná. V případě regularizace druhého řádu jsou tímto způsobem ovlivněny první dvě hodnoty. Zkreslení hodnoty následující je pak způsobeno vynucenou návazností na předcházející silně zkreslenou hodnotu.

Řešením je rozšířit regularizační matici a s ní i celou citlivostní matici o dvě hodnoty (pro regularizaci druhého řádu) předcházející první vypočtené hodnotě sub-domény. Koeficienty na prvních dvou řádcích citlivostní matice a pravé straně soustavy jsou nastaveny tak, aby řešení prvních dvou tepelných toků odpovídalo řešením z předchozích dvou sub-domén. Regularizace tak zaručí, že začátek každé sub-domény bude ve smyslu regularizace navazovat na výpočet předchozí sub-domény.



Vliv této modifikace je patrný ze srovnání grafů 3.17 a 3.16, které zobrazují řešení stejné úlohy.



Obr. 3.17: Řešení s rozšířenou regularizací na jednu hodnotu z předchozí sub-domény.

Vzhledem k tomu, že princip i vlastnosti sub-doménové metody jsou velmi podobné sekvenční Beckově metodě, která má několik různých variant s mírně odlišnými vlastnostmi, tak je nedostatečné používat pro srovnání pouze jednu variantu. V následující podkapitole je proto sub-doménová metoda srovnávána s dalšími sekvenčními metodami.

### 3.3.2 | Srovnání s různými modifikacemi sekvenčních metod

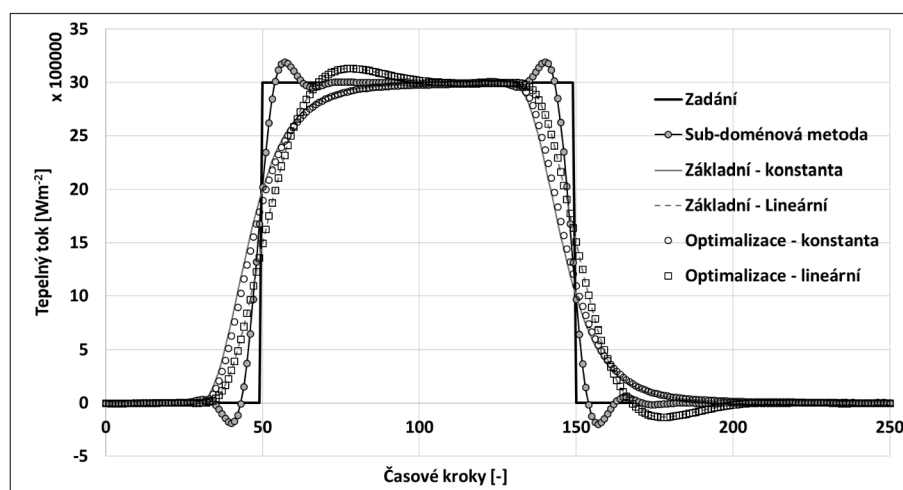
V této kapitole bude srovnávána sub-doménová metoda se čtyřmi variantami sekvenční metody:

- Základní metoda - konstanta: okrajová podmínka se nahrazuje konstantou a výpočet předpokládá lineární chování úlohy
- Základní metoda - lineární: okrajová podmínka se nahrazuje lineární funkcí a výpočet předpokládá lineární chování úlohy
- Optimalizace - konstanta: výpočet je proveden jako optimalizace hodnoty konstantní funkce tak, aby se minimalizoval rozdíl spočtených a zadaných teplot
- Optimalizace - lineární: výpočet je proveden jako optimalizace směrnice lineární funkce tak, aby se minimalizoval rozdíl spočtených a zadaných teplot

Pro ilustraci jsou v grafu 3.18 srovnány řešení všech čtyř uvedených variant sekvenční metody v porovnání se sub-doménovou metodou a zadáním. Poznamenejme, že smyslem tohoto porovnání není srovnávat přesnost uvedených metod, ale pouze poukázat na rozdílný typ zkreslení, kterého se metody dopouštějí. Za tímto účelem také nejsou parametry metod nastaveny optimálně, protože by rozdíly mezi zkresleními byly špatně pozorovatelné.

Za povšimnutí stojí, že se v tomto příkladu řešení základních metod a metod využívajících optimalizaci velmi dobře shodují. To je možné při splnění dvou podmínek:

- Během výpočtu nedochází v rámci  $Nf$  dopředných kroků k zásadním změnám materiálových vlastností, tj. úloha se chová téměř lineárně.
- V rámci optimalizační metody byly zvoleny rovnoměrné váhy pro vyhodnocení odchylky vypočtených a změřených teplot. Tato volba se sice nabízí, ale není jedinou možnou.



Obr. 3.18: Porovnání řešení sub-doménové metody s dalšími sekvenčními metodami.

Zaměřme se nyní pouze na srovnání sub-doménové metody se základní sekvenční Beckovou metodou z grafu 3.18. V hrubých rysech jsou obě uvedená řešení stejně přesná, respektive podobnou měrou zkreslená. Rozdílný je tvar zkreslení, který vyplývá z různých metod stabilizace výpočtu. Beckova metoda (verze s konstantní predikcí) je zkreslena výrazně nesymetricky a na uvedeném příkladu nemá tendenci překmitávat správné řešení. Zatímco sub-doménová metoda se chová téměř symetricky a to dokonce i s překmitnutími na začátku a konci každé prudší změny okrajové podmínky. Velikost a typ překmitů je dán volbou regularizace. V příkladu je použita regularizace druhého řádu, která omezuje druhou derivaci řešení. Zjednodušeně řečeno se v grafu řešení nemůže objevit ostrý přechod mezi dvěma výrazně odlišnými směrnici. Důsledkem jsou právě pozorované překmity.

Co se symetričnosti týká, tak jde o velmi podstatnou vlastnost. Proč tomu tak je a k čemu je možné této vlastnosti využít je popsáno v následující podkapitole.

Mírně odlišné vlastnosti než základní Beckova metoda s predikcí konstantního průběhu, má varianta s průběhem lineárním. V grafu jsou patrné dva rozdíly:

1. Řešení varianty s konstantou vypadá, jako by bylo na časové ose mírně posunutá doleva.

2. Varianta s lineární funkcí má větší tendence kmitat. Konkrétně překmitává maximální hodnotu a následně po poklesu okrajové podmínky klesá do záporných hodnot.

První pozorovaná skutečnost je částečně způsobena tím, že metoda používající konstantní funkci nemá přímou vazbu na předchozí vypočtenou hodnotu (na rozdíl od verze s lineární funkcí, která z předchozí hodnoty vychází). Stanovené hodnoty těchto funkcí, tak snáze "rychleji" reagují na vývoj změřených teplot v čase.

### 3.3.3 | Tolerance skoku

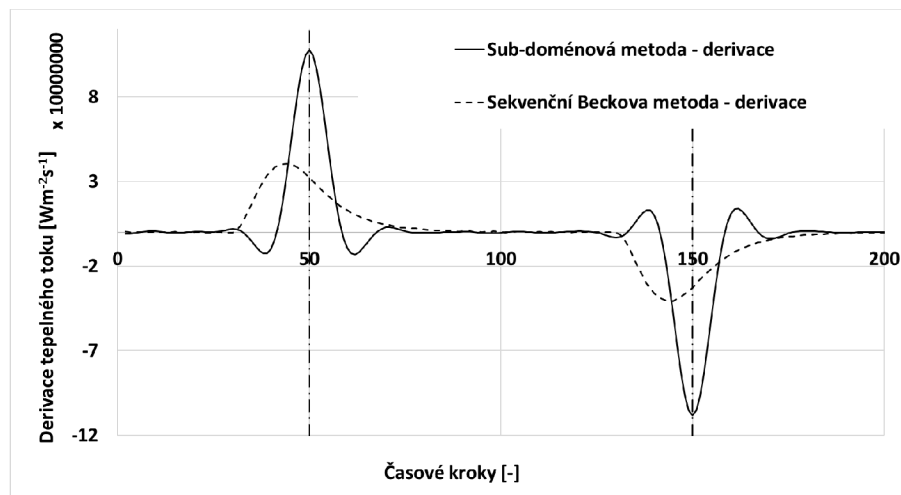
V reálných úlohách se často vyskytují extrémně prudké změny okrajové podmínky. Základním problémem je, jak tyto oprávněné změny odlišit od šumu, který se též vyznačuje extrémními změnami ve spočtených průbězích okrajové podmínky. V praxi používané metody tento problém nedokáží řešit a jejich použití je vždy kompromisem mezi redukcí šumu a mírou zkreslení prudkých změn v řešení. Tato problematika byla částečně řešena v rámci mé předchozí práce [41], ve které byla testována sekvenční verze genetického algoritmu pro řešení inverzních úloh vedení tepla s různými typy regularizací. Na problematiku omezeného počtu extrémně prudkých změn okrajové podmínky byla v práci testována metoda označená jako "tolerance skoku".

V praxi jde o to, že v určitém časovém kroku se cíleně vynechá jeden regularizační člen. V daném bodě, pak není vyžadována „spojitost“ (pro případ regularizace prvního řádu). Předpokladem pro použití této metody je ovšem znalost počtu a polohy skoků, které mají být tolerovány. V předešlé práci bylo předpokládáno, že počet skoků je známý, respektive, že jsme schopni určit interval, ve kterém leží právě jeden skok. Jeho konkrétní poloha se pak může určit předřazením běžného výpočtu bez tolerance skoků. Tolerance skoku se pak provede v bodě, pro který je gradient řešení v daném intervalu největší.

V této práci je testován stejný princip tolerance skoku navázaný na sub-doménovou metodu, která je díky svým vlastnostem vhodnější než dříve testovaný genetický algoritmus.

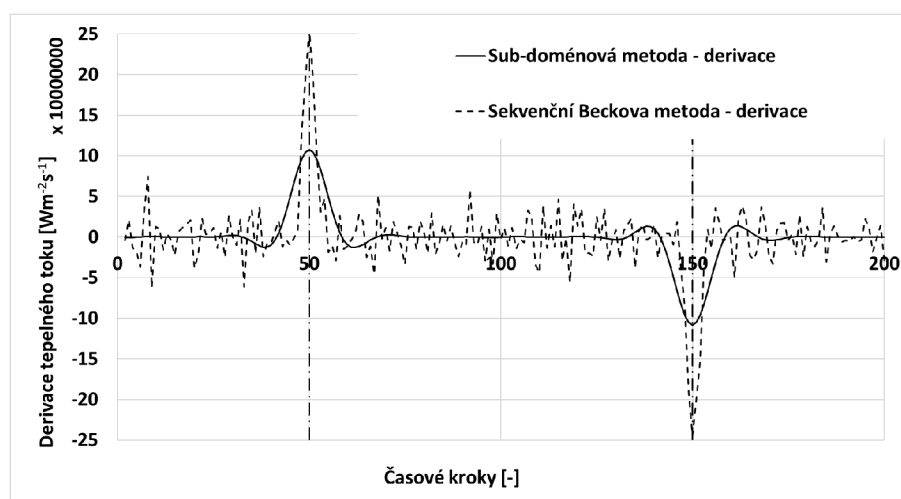
Pro účely detekce časového kroku, ve kterém má dojít ke skoku, byly v této práci vyzkoušeny dvě metody: sekvenční Beckova (konstanta) a sub-doménová.

V případě prudkých dějů obě metody podávají přehlazené výsledky. Zajímavé ovšem je, že každá metoda výsledky zkresluje jiným způsobem, jak již bylo zmíněno v předchozí podkapitole, viz graf 3.18. Pro určení bodů, ve kterých se budou tolerovat skoky jsou podstatné první derivace nalezených řešení, které jsou pro uvedený příklad vyneseny v grafu 3.19. V témže grafu jsou kromě derivací (numerických) vyneseny i polohy skokových změn zadání této testovací úlohy.



Obr. 3.19: První derivace přehlazeného řešení sub-doménové a Beckovy metody. Čerchovanou čarou jsou označeny skutečné polohy skokové změny v zadání.

Na uvedeném příkladu je demonstrováno, že i silně přehlazené řešení sub-doménovou metodou respektuje polohy největších změn v zadání (ideálním řešení). První derivace nabývá svých extrémů v bodech, kde i první derivace správného řešení nabývá svých extrémů. Na rozdíl od toho silně přehlazená sekvenční Beckova metoda má své extrémy v první derivaci mírně posunutá „doleva“ od správné polohy. Míra tohoto posunutí je navíc závislá i na míře zkreslení celého řešení. Tento efekt je patrný z grafu 3.20, který opět zachycuje první derivace řešení stejné úlohy s tím rozdílem, že je použita sekvenční Beckova metoda s menším počtem dopředných kroků (řešení je tedy méně zkreslené, ale obsahuje větší šum).



Obr. 3.20: První derivace řešení sub-doménové a Beckovy metody. Čerchovanou čarou jsou označeny skutečné polohy skokové změny v zadání.

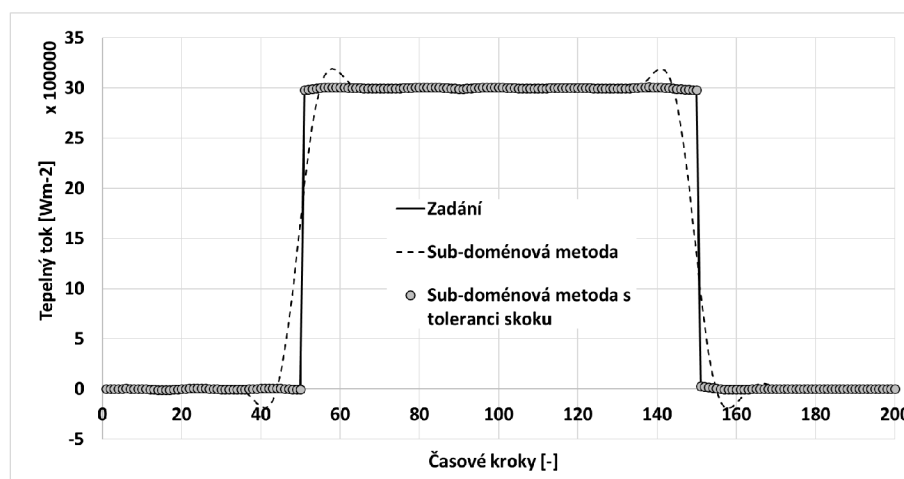
V uvedeného grafu 3.20 se již trend posouvání maxima a minima první derivace „doleva“ zcela vytratil. I přesto není sekvenční Beckova metoda vhodná pro detekci

skoku a to hned ze dvou důvodů:

- Dodržování podmínky malého přehlazení není účelné a pro reálné úlohy bez znalosti správného řešení je též těžko kontrolovatelné.
- Pro malé přehlazení se u sekvenční Beckovy metody objevuje nový problém s šumem v první derivaci, který může detekované body náhodně posunovat v okolí optima.

V dalším textu bude pro detekci bodů vhodných pro toleranci skoku používána výhradně sub-doménová metoda.

Poté, co jsou nalezeny body pro toleranci skoku, je možné provést samotný výpočet, ve kterém budou tyto body oproštěny od regularizace. Výsledek modelové úlohy s obdélníkovým průběhem okrajové podmínky je v grafu 3.21. Pro srovnání je v grafu i zadání a běžné řešení sub-doménovou metodou.

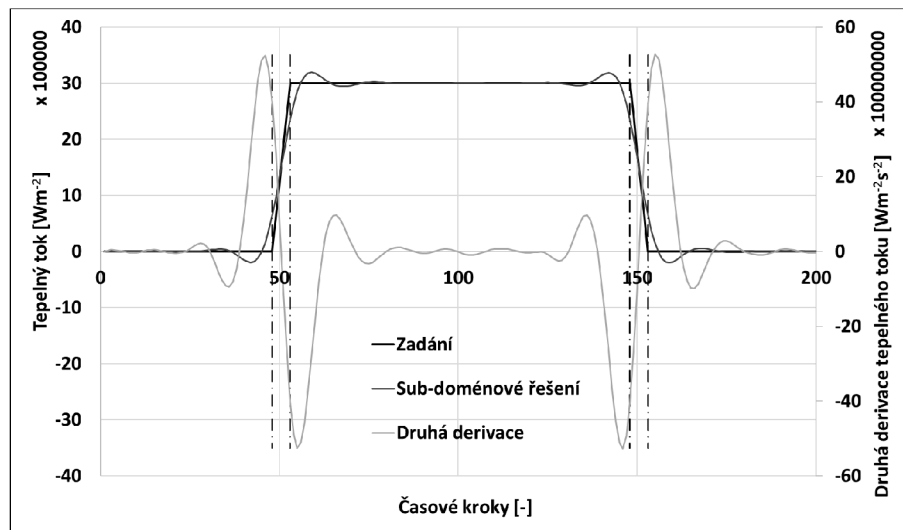


Obr. 3.21: Řešení testovací úlohy obdélníkového tvaru pomocí metody tolerance skoku.

Princip tolerance „skoku“ byl v předchozím textu vysvětlen na jednoduchém příkladu obdélníkového průběhu okrajové podmínky, který je složený ze skokového nárůstu a posléze poklesu hodnoty okrajové podmínky. V praxi existuje mnoho příkladů velmi prudce se měnících okrajových podmínek, které však nejsou přímo skokové („nespojité“). Potřebná modifikace bude vysvětlena na modelovém příkladu lichoběžníkového průběhu okrajové podmínky, který se skládá ze strmě rostoucí, konstantní a strmě klesající funkce. Jednotlivé části jsou od sebe odděleny čtyřmi body, ve kterých dochází ke změně směrnice. Pro řešení této úlohy proto stačí použít regularizaci druhého řádu, ve které se bude tolerovat změna směrnice právě v těchto čtyřech bodech.

K detekci těchto bodů může posloužit druhá derivace (numerická) přehlazeného řešení. Společně se zadáním a řešením sub-doménovou metodou je vynesena v grafu 3.22. Svislé čerchované čáry označují body, ve kterých dochází ke změně směrnice v

zadání. Z grafu 3.22 je zřejmé, že pro druhé derivace již neplatí, že by extrémy v přehlazeném řešení přímo korespondovaly s extrémy v zadání. I přesto lze nalezených extrémů druhé derivace využít, protože se nacházejí v blízkosti hledaných bodů.



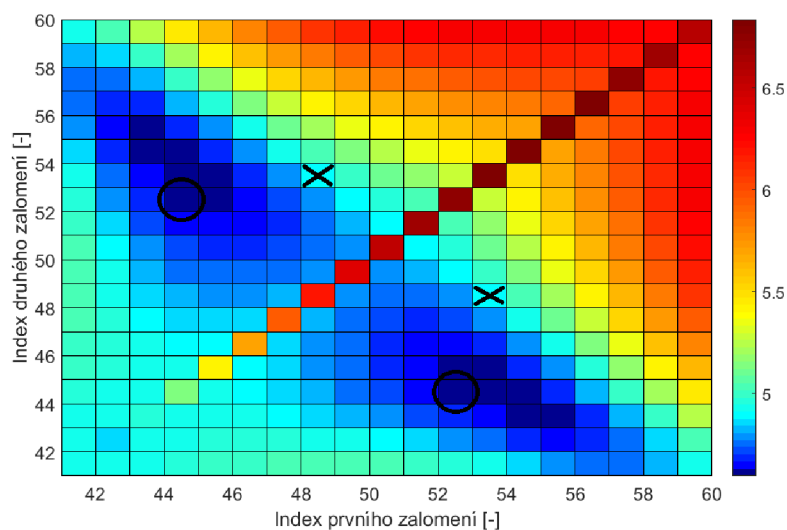
Obr. 3.22: Druhá derivace přehlazeného řešení testovací úlohy.

Zaměřme se nejprve na první dvojici zlomů (náběh), které jsou v uvedeném příkladu dostatečně daleko od druhé dvojice zlomů (poklesu), aby bylo možné jejich polohu řešit samostatně. Cílem je nalezení dvojice časových kroků, ve kterých se bude tolerovat změna směrnice tak, aby vypočtená okrajová podmínka co nejlépe odpovídala realitě. Správná okrajová podmínka je ovšem obecně neznámá. K určení polohy těchto bodů je vhodné použít optimalizaci, která minimalizuje buď rezidua (součet čtverců rozdílů změřených a vypočítaných teplot) nebo součet čtverců druhé derivace řešení vyjma tolerovaných extrémů. Vzhledem k tomu, že součet čtverců druhé derivace řešení je přesně to, co je potlačováno regularizací druhého řádu (s použitím tolerance skoku), tak bude v dalším textu tento součet označován jako "regularizační penalizace".

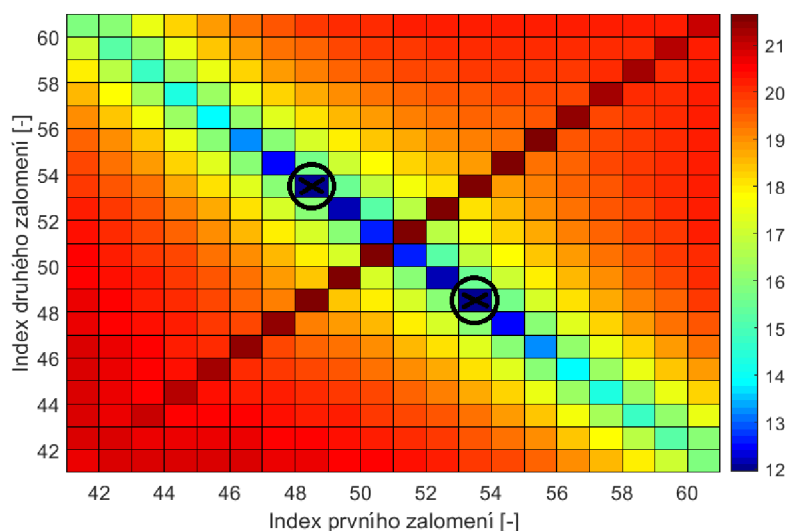
Lepší je druhá metoda. V blízkosti správného řešení má relativně větší rozsah a dává přibližně správné výsledky, na rozdíl od residuí, které v okolí správného řešení nemají dostatečný rozsah a jsou silněji ovlivňovány náhodným šumem ve změřených datech. Příklad, kdy se lokální minimum residuí neshoduje se správným řešením je v grafu 3.23. Graf zobrazuje residua v logaritmickém měřítku pro kombinace poloh tolerovaných zlomů okrajové podmínky. Pro srovnání je uveden stejný graf zobrazující regularizační penalizaci 3.24. Lokální minimum je v obou grafech zakroužkováno. Pozice správného řešení je vyznačena křížkem.

V obou grafech, ale obzvláště v 3.24, je vidět několik společných vlastností:

- Největší hodnoty účelových funkcí jsou pro případ, kdy se body pro relaxaci překrývají (v grafech jsou na diagonále), protože se tak provede tolerance pouze



Obr. 3.23: Hodnoty reziduí v blízkosti optima. Kolečky označují nalezená lokální minima. Křížky značí skutečné polohy zlomů.



Obr. 3.24: Hodnoty regularizačních penalizací v blízkosti optima. Kolečky označují nalezená lokální minima. Křížky značí skutečné polohy zlomů.

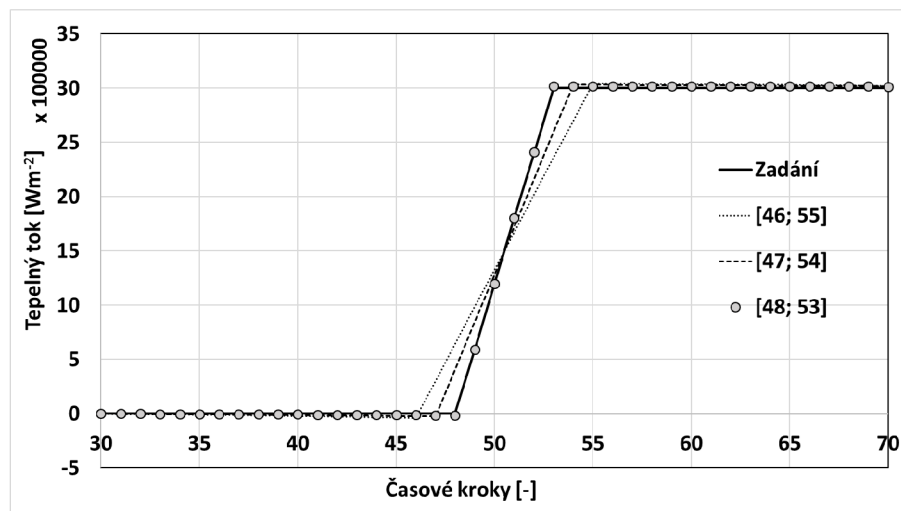
jednoho zlomu namísto dvou.

- Naopak nejnižší hodnoty jsou koncentrovány podél vedlejší diagonály. Zvláště pak pro případ regularizačních penalizací jsou výrazně preferovány symetricky rozložené body zlomu vůči jejich správné poloze.

Vzhledem k tomu, že se tento text zabývá problematikou prudkých změn, tak je běžné, že mezi začátkem a koncem prudkého nárůstu hodnoty, se nachází pouze malý počet časových kroků (jednotky až desítky). Je tedy z praktického pohledu možné při optimalizaci polohy začátku a konce náběhu postupovat diskrétně po

nejmenších možných krocích (jeden časový krok). Zároveň je z grafu 3.24 zřejmé, že se musí použít optimalizační metoda, která umožní v jednom kroku provést posun v obou směrech zároveň. Příkladem může být bod  $[54, 47]$ , z kterého se dá minima  $[53, 48]$  dosáhnout pouze diagonálním krokem, protože všechny ostatní směry vedou k navýšení účelové funkce.

Graf 3.25 je příkladem, jak se v průběhu optimalizace posouvají body zlomu a tím i řešení postupně konverguje k finálnímu řešení.



Obr. 3.25: Posouvání bodů "zlomu" v průběhu optimalizace.

Dalším krokem k řešení reálných úloh je případ, kdy prudký nárůst a pokles okrajové podmínky navazuje tak těsně po sobě, že se výsledná okrajová podmínka svým tvarem podobá trojúhelníku. Tento případ je sice výpočetně náročnější než předchozí varianta, ale princip řešení zůstává stejný. Pouze se místo optimalizace dvou neznámých parametrů (poloh dvou tolerovaných změn), provede optimalizace s třemi neznámými parametry zároveň. Za řešení inverzní úlohy se pak může vzít řešení s tolerovanou změnou směrnice ve třech nalezených bodech.

Pokud je požadována větší přesnost a zároveň nalezené tři body nejsou přímo sousední, tak je možné pokračovat v hledání podrobnějšího řešení. Prostřední bod se rozdvojí na dva a provede se dodatečná optimalizaci všech čtyř bodů zároveň. Optimalizace tohoto rozsahu je obecně výpočetně náročná, ale pro tento konkrétní případ to neplatí, protože je počáteční bod nastaven v bezprostřední blízkosti hledaného řešení.

Popsaný přístup k výpočtu není samostatnou výpočetní metodou. Jde pouze o modifikaci libovolné výpočetní metody, která pro stabilizaci výpočtu používá regularizaci. Hlavním smyslem této modifikace je umožnit v inverzních výpočtech použít jinak těžko postihnutelné vlastnosti řešení, jako jsou například přibližný tvar okrajové podmínky nebo znalost přesného času začátku nebo výrazné změny v okrajové



podmínce. Pokud je řešení zcela neznámého tvaru, pak tuto modifikaci není možné použít. Pro modelové úlohy dosahuje modifikace velmi dobrých výsledků, viz graf 3.21. Objektivní zhodnocení přínosu pro řešení reálných úloh je podstatně složitější, protože záleží především na konkrétní řešené úloze a přibližné znalosti řešení.

Podstatným faktem je, že uváděná modifikace nemůže výsledky "pokazit z globálního pohledu", protože celkové odebrané teplo za daný časový interval zůstává neměnné. Pouze jeho rozložení v čase, které bývá pro většinu metod rozmazané, se koncentruje do několika prudších nárůstu/poklesů (respektive změn směrnice).

### 3.3.4 | Shrnutí

Vlastnosti sub-doménové metody se nejvíce podobají sekvenční metodě s optimalizační lineární funkcí. Sub-doménová metoda však navíc poskytuje přesnější predikci okrajové podmínky v  $Nf$  dopředných krocích. Této predikce je možné použít pro další modifikace výpočetní metody.

Případné modifikace použité regularizace (respektive regularizačních členů), pak umožňuje základní vlastnosti metody dále modifikovat. Jako například výše popsaná "tolerance skoku".

### 3.3.5 | Tepelné toky ve směru pohybu

Úvodem této kapitoly (3) byla položena otázka, jak velké chyby se dopustíme zanedbáním tepelného toku ve směru pohybu v případě těles, které se pohybují pod statickým chlazením.

V mnoha praktických aplikacích se setkáváme se situací, kdy se testovací vzorek pohybuje vůči statické chladicí nebo topné sekci (respektive statické okrajové podmínce, která je ve směru pohybu nehomogenní). Vlivem toho dochází k nerovnoměrnému rozložení teplot ve směru pohybu, které způsobí tepelné toky v tomto směru.

Aby bylo možné v modelu postihnout vedení ve směru pohybu, tak je nutné model rozšířit na alespoň dvourozměrný a přepočítat citlivostní koeficienty tak, aby kromě na čase byly závislé i na pozici části vzorku, na kterou působí okrajová podmínka<sup>2</sup>. Koeficient  $\theta(t, x)$  nyní odpovídá teplotní odezvě v místě teplotního senzoru a čase  $t$  na jednotkový tepelný tok aplikovaný na část povrchu odpovídající souřadnici  $x$ . Ve výpočtech se funkce  $\theta(t, x)$  opět používá v diskretizované podobě, tj.

---

<sup>2</sup>Při řešení jednorozměrné úlohy celo-doménovou metodou značí citlivostní koeficienty  $\Theta(t)$  pozorovanou změnu teplot v místě teplotního čidla, která je důsledkem jednotkového tepelného toku homogenně aplikovaného na chlazeném povrchu v čase  $t = 0$ . V numerických výpočtech je funkce diskretizována vektorem hodnot.

jako matice  $\Theta$  jejichž řádky odpovídají časovým krokům  $t = 0, 1, \dots, Nt$  a sloupce odpovídají polohám elementů výpočetní sítě.

Vzniklá matice obsahuje citlivostní koeficienty pro různé body povrchu a jejich průběhy v čase, ale není ve tvaru potřebném pro výpočet inverzní úlohy. K převodu na tento tvar se použije předpoklad, že konkrétní tvar a velikost okrajové podmínky se při přechodu přes vzorek nemění. Například stejná hodnota tepelného toku  $Q$  je postupně aplikována na každou část chlazeného povrchu pouze v různých časech podle toho, s jakou rychlostí se okrajová podmínka pohybuje po povrchu vzorku. Pro zjednodušení budeme uvažovat takovou volbu rychlosti a velikosti elementů, že se okrajová podmínka bude pohybovat právě jeden element (délky  $Dx$ ) za časový krok  $Dt$ .

Změna teploty způsobená tepelným tokem šířky jednoho elementu, kterou můžeme pozorovat v místě teplotního senzoru, je součtem dílčích citlivostních koeficientů. V našem zjednodušeném případě se bere z každého sloupce matice  $\Theta$  právě jedna hodnota s odpovídajícím časem (z odpovídajícího řádku), podle toho před jakou dobou tepelný tok přes dané místo prošel. Vybrané prvky proto leží na diagonálách. Začínají vždy prvním sloupcem v čase (řádku) podle počtu časových kroků, před kterými působil na kraj vzorku a končí v prvním řádku sloupce, který odpovídá aktuální poloze tepelného toku. Schématicky je situace zakreslena na obrázku 3.26, kde  $D_i$  označuje součty vyznačených diagonál. Konkrétně:

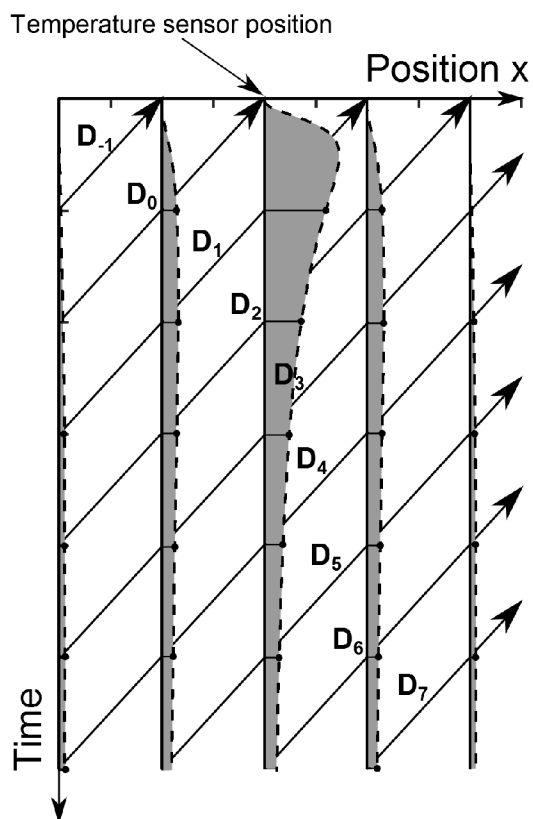
$$D_k = \sum_{i=1}^{t+k} (\theta_{t+k-i+1;i}),$$

kde  $t$  je počet elementů od okraje vzorku do polohy teplotního čidla.

Vyčíslené součty diagonál je nyní možné použít běžným způsobem pro sestavení soustavy rovnic, jejichž řešením získáme hledanou okrajovou podmínku. Citlivostní matice v rovnici 3.1 je opět diagonální, přičemž hodnoty  $D_{-n}$  jsou zanedbatelně malé pro určité malé číslo  $n$ . Hodnota  $n$  závisí na několika faktorech, především na vodivosti materiálu, rychlosti posuvu a vzdálenosti teplotního senzoru od povrchu.

$$\begin{bmatrix} D_0 & D_{-1} & \cdots & \cdots & D_{-N} \\ D_1 & D_0 & \ddots & & D_{-N+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & D_{-1} \\ D_N & D_{N-1} & \cdots & D_1 & D_0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_N \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Za povšimnutí stojí, že rozšíření modelu o tepelné toky ve směru pohybu téměř nezvýšilo výpočetní náročnost vzniklé soustavy rovnic. Oproti tomu náročnost výpočtu citlivostních koeficientů vzrostla hned dvojnásobkem:



Obr. 3.26: Součty diagonál v dvourozměrné matici THETA

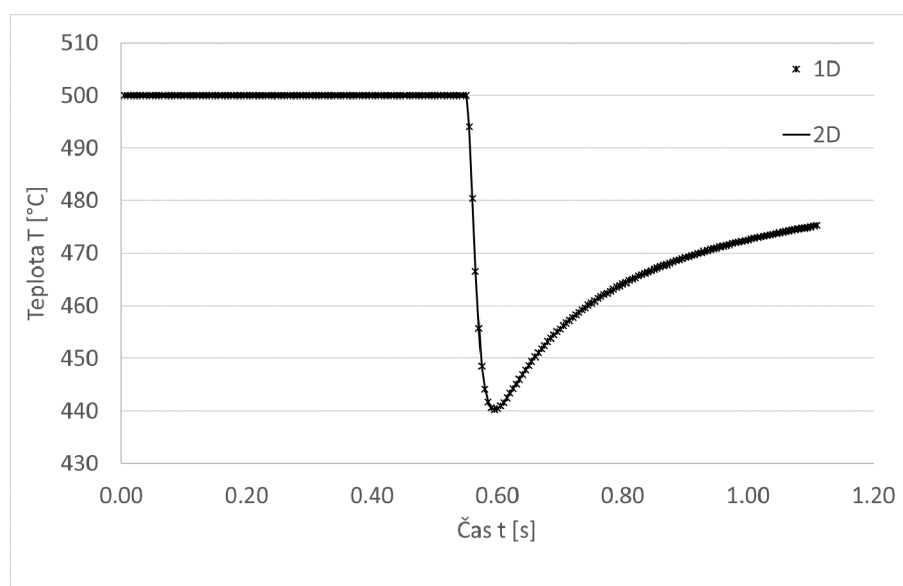
- Přímé úlohy jsou počítány jako dvourozměrné vedení tepla na místo jednorozměrného
  - Je nutné stanovit citlivostní koeficienty pro různé polohy okrajové podmínky
- Pro úlohy s větším počtem časových kroků opět platí, že výpočetní náročnost je dominantně dána řešením soustavy rovnic 3.1, nikoliv přípravou této soustavy.

Dříve, než se budeme zabývat srovnáváním výsledků inverzních úloh s a bez vedení ve směru pohybu, tak je vhodné se podívat, jaký vliv má pohyb okrajové podmínky a jeho zahrnutí do modelu na rozložení teplot. Srovnávání bude provedeno na příkladu kovové desky běžných parametrů a rozměrů, jakých se v LPTP běžně používá pro experimentální stanovení okrajové podmínky pro vodní vysokotlaké trysky. Deska je z austenitické oceli tloušťky  $25 \text{ mm}$  a teplota je měřena pod povrchem ( $0,7 \text{ mm}$  od chlazeného povrchu). Deska se pohybuje rychlostí  $0,5 \text{ m/s}$ . Jako testovací okrajová podmínka je zvolen rovnoměrně rozložený tepelný tok  $Q = 3 \cdot 10^7 \text{ W/m}^2$  na intervalu délky  $5 \text{ mm}$ . Převáděno na čas je každý bod povrchu vystaven nenulové

okrajové podmínce po dobu 0,01 s. Ke srovnání byly použity dva přístupy:

- Bez tepelného toku ve směru pohybu - který aproximuje zadání úlohy na jednorozměrné vedení tepla. Na celý chlazený studovaný povrch je po dobu 0.01 s aplikován tepelný tok  $3 \cdot 10^7 \text{ W/m}^2$
- S tepelným tokem ve směru pohybu - úloha je dvourozměrná a okrajová podmínka se po povrchu posouvá zmiňovanou rychlostí 0,5 m/s

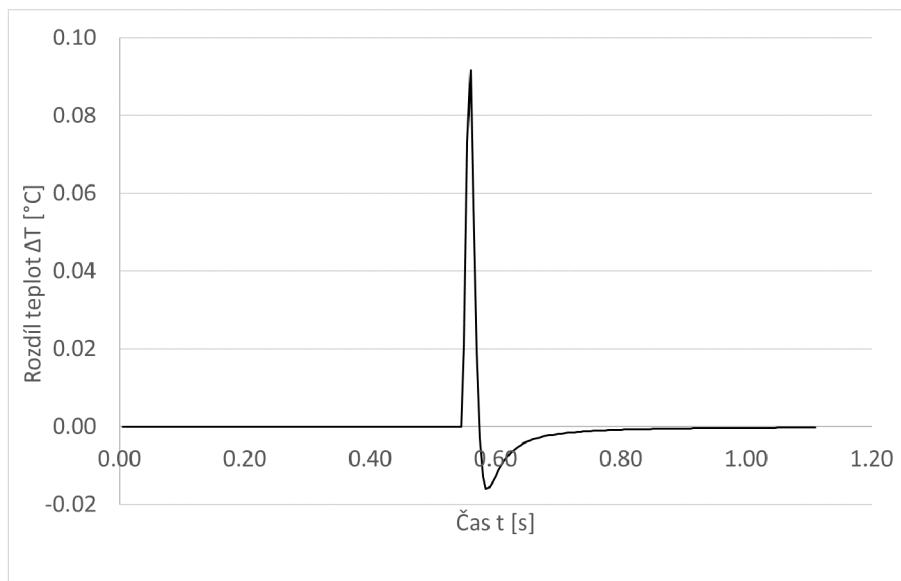
Ke srovnání jsou použity podpovrchové teploty (0,7 mm od studovaného povrchu). Průběhy těchto teplot jsou pro oba přístupy vyneseny v grafu 3.27, z kterého je patrné, že oba přístupy dávají pro zvolené (reálně používané) parametry téměř stejné výsledky. Konkrétní rozdíl je vidět v grafu 3.28, kde je vynesena rozdíl stanovených podpovrchových teplot.



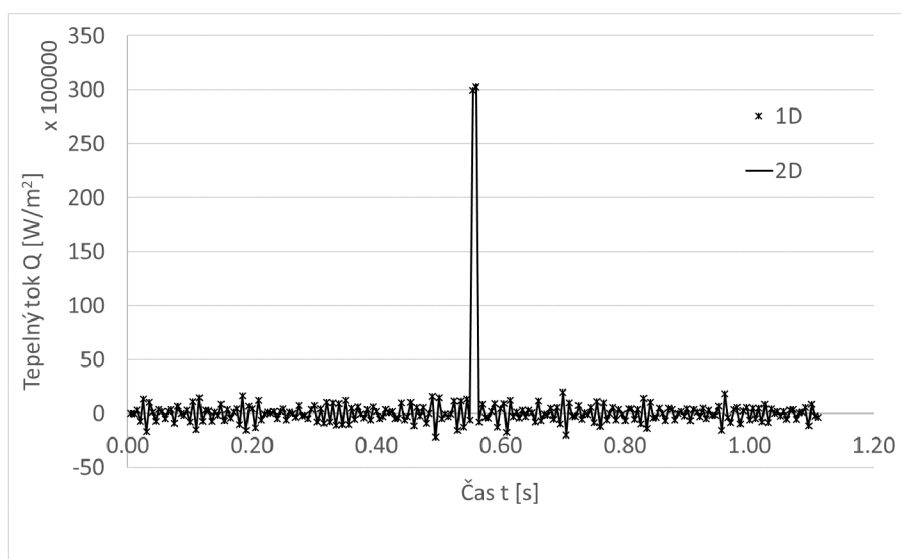
Obr. 3.27: Srovnání vypočtených teplot pro jednorozměrný a dvourozměrný model (nerezová deska)

Z předchozích grafů (3.27, 3.28) plyne, že rozdíl teplot spočtených přímou úlohou vedení tepla není velký. V dalším ověříme, jaký vliv má vedení ve směru pohybu na výsledky inverzní úlohy. K tomuto srovnání poslouží stejný příklad jako pro přímou úlohu. Konkrétně jako vstupní data se použijí výsledky dvourozměrné varianty přímého výpočtu se zohledněním vedení tepla ve směru pohybu. Inverzní úloha vedení tepla je pak opět řešena ve dvou variantách - s a bez uvažování posuvu okrajové podmínky. Výsledky, nalezené okrajové podmínky obou metod, jsou vyneseny v grafu 3.29, kde je opět vidět dobrá shoda obou metod.

Dílčím závěrem je, že pro zvolené parametry (typické pro měření na ocelové desce) může být vedení tepla ve směru pohybu zanedbáno. Pro jiné parametry však může být vliv vedení tepla ve směru pohybu podstatný. Jako příklad můžeme použít stejnou úlohu, ale s hliníkovou deskou, teplotou snímanou 1 mm pod povrchem a



Obr. 3.28: Teplotní rozdíl pro jednorozměrný a dvourozměrný model pro austenitickou ocel ( $T_{1D} - T_{2D}$ )

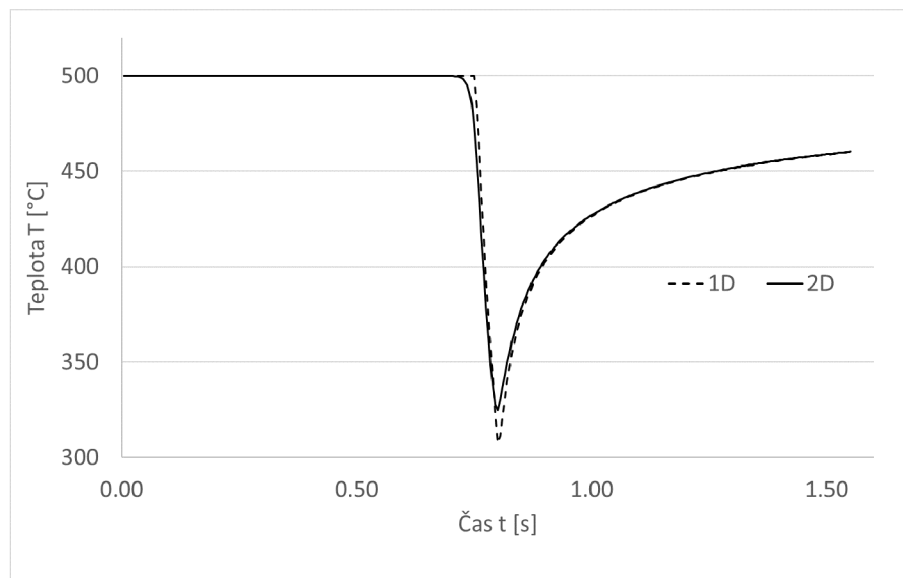


Obr. 3.29: Srovnání výsledků inverzní úlohy pro jednorozměrný a dvourozměrný model (austenitická deska)

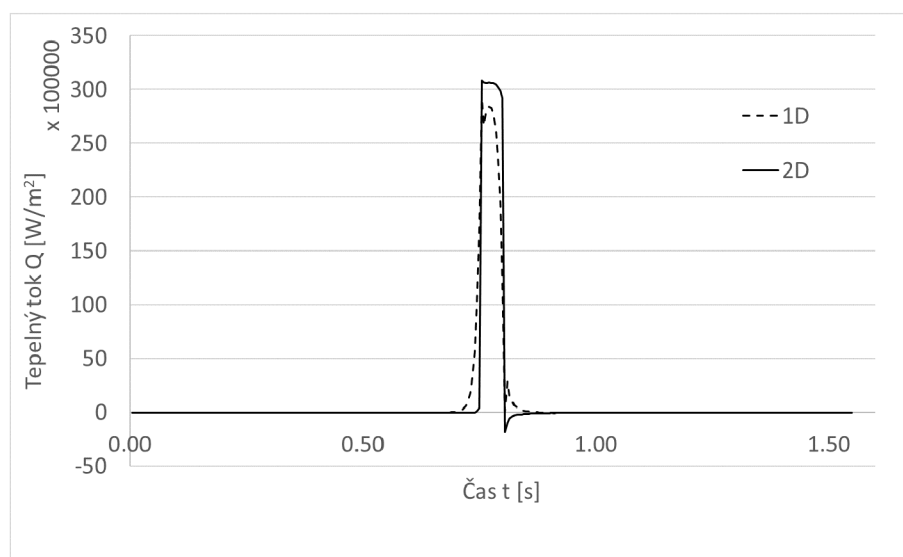
rychlostí posuvu  $0,1 \text{ m/s}$ . Rozdíl ve vypočtených teplotách přímé úlohy (graf 3.30) se tak výrazně zvětší. Zvětší se také rozdíly výsledků inverzní úlohy (graf 3.31), kde je jednorozměrné řešení oproti dvourozměrnému značně zkreslené.

Je zřejmé, že vliv popsaného vedení ve směru pohybu je závislý na několika parametrech; hlavně na tepelné vodivosti materiálu a rychlosti posuvu a dále pak na vzdálenosti teplotního senzoru od povrchu, geometrii a tvaru okrajové podmínky.

Příčemž pro většinu experimentu, při kterých je použit ocelový (austenitický) vzorek, který se pohybuje pod vodními tryskami rychlostí větší než  $0,1 \text{ ms}^{-1}$ , je



Obr. 3.30: Srovnání vypočtených teplot pro jednorozměrný a dvourozměrný model (hliníková deska)



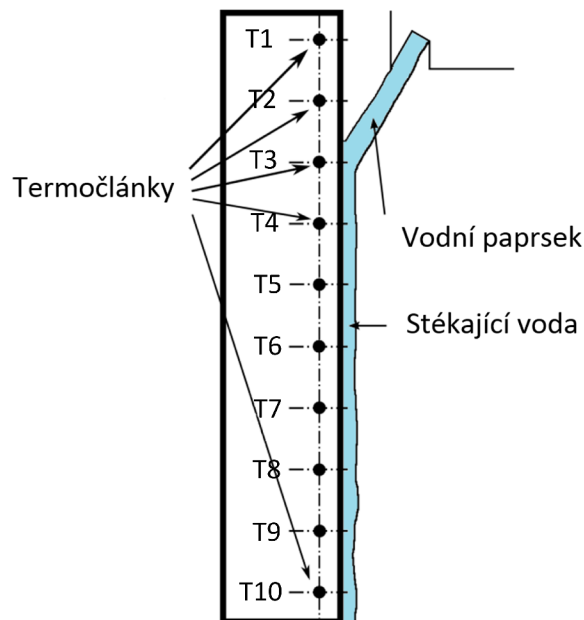
Obr. 3.31: Srovnání výsledků inverzní úlohy pro jednorozměrný a dvourozměrný model (hliníková deska)

možné vliv vedení tepla ve směru pohybu zanedbat.

# KAPITOLA 4

## Nestacionárně nehomogenní chlazení vysoce tepelně vodivých materiálů

Uvažujme chlazení svislé plochy s relativně vysokou počáteční teplotou (nad Leidenfrostovou teplotou pro tento typ chlazení). Cílem je stanovit okrajovou podmínku na chlazeném povrchu. Chlazení je realizováno pomocí plochého paprsku vody, který dopadá na horní okraj svislé plochy. Poté, co se proud dotkne povrchu, po něm volně stéká směrem dolů. Okrajovou podmínku je potřeba stanovit nejen jako funkci teploty, protože je též závislá na vertikální vzdálenosti od místa dopadu paprsku. K dispozici je  $N$  záznamů teplot z podpovrchových teplotních senzorů, které jsou rozmístěny v různých výškách. Situace je zobrazena na schématu 4.1.



Obr. 4.1: Průřez chlazeným vzorkem

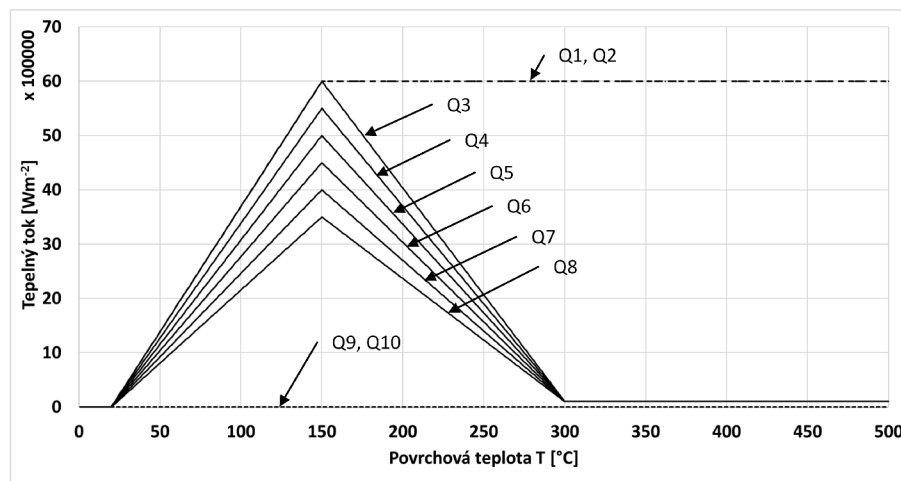
V této kapitole bude často zmiňovaný Leidenfrostův (LF) efekt, který se týká

varu kapaliny při kontaktu s horkým povrchem. Je-li teplota povrchu dostatečná (větší než Leidenfrostova teplota), pak se mezi povrchem a kapalinou vytvoří souvislá parní vrstva, která brání přímému kontaktu kapaliny s povrchem. Přítomnost této parní vrstvy funguje jako tepelná izolace a výrazně zpomaluje přenos tepla mezi povrchem a kapalinou.

Dále se v následujícím textu často objevuje pojem "LF hranice", kterým se rozumí rozhraní mezi částí povrchu s teplotou menší než LF teplota a částí povrchu s teplotou větší než LF teplota.

## 4.1 | Testovací úloha

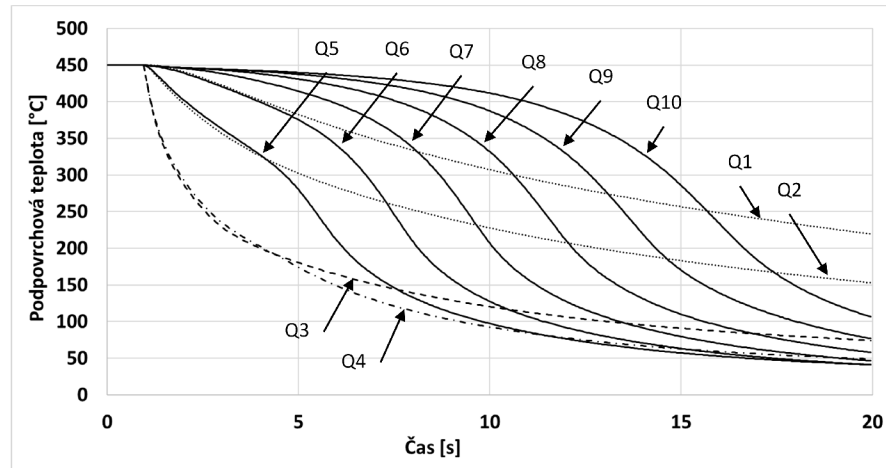
Testovací úloha byla zvolena tak, aby byla podobná výše popsané reálné úloze. Zůstává tak zachován specifický charakter chlazení silně ovlivněný Leidenfrostovým efektem s tím rozdílem, že pro tuto testovací úlohu známe správné řešení. Povrch je rozdělen do 10 oblastí, každá s jedním teplotním senzorem. První dvě oblasti jsou nechlazené. Třetí a čtvrtá oblast je intenzivně chlazená i za vysokých teploty. Okrajové podmínky pro zbylé oblasti mají trojúhelníkové průběhy v závislosti na povrchové teplotě. Navzájem se liší pouze velikostí maxima tepelného toku, která ve směru dolů po povrchu vzorku rovnoměrně klesají. Okrajové podmínky v závislosti na teplotě jsou vyneseny v grafu 4.2.



Obr. 4.2: Okrajové podmínky testovací úlohy

Výše popsané okrajové podmínky byly použity pro simulování chlazení hliníkového vzorku. Ve stanovených místech vzorku, byly odečteny průběhy teplot, které simulují měření podpovrchových teplot během experimentu. Do záznamů teplot byl dále přidán šum simulující reálné měření teplot. Takto upravené záznamy jsou vyneseny v grafu 4.3.

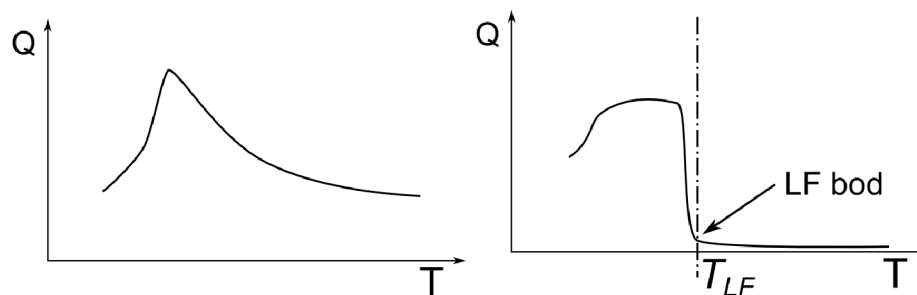




Obr. 4.3: Teplotní průběhy v místech teplotních senzorů

## 4.2 | Problémy při řešení klasickými metodami

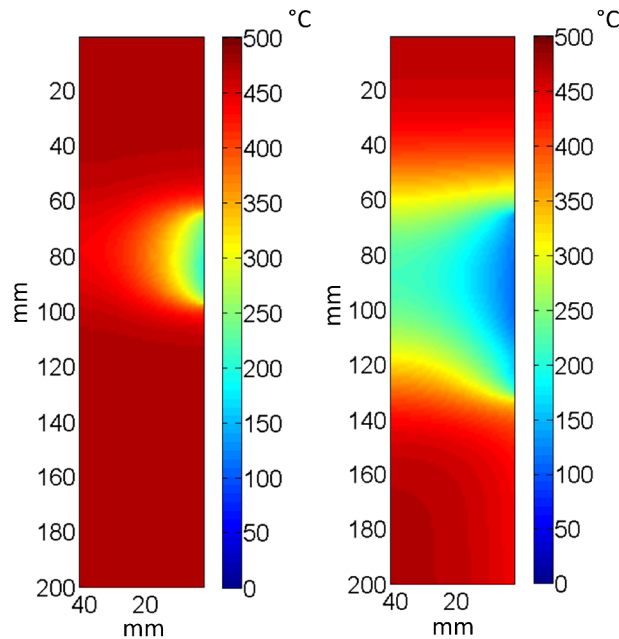
Při řešení je potřebné rozlišit minimálně dvě oblasti s výrazně odlišným režimem chlazení. „Dopadovou zónu“, kde se voda dostává do kontaktu s povrchem, a zbytek chlazeného povrchu, kde voda volně stéká. Okrajová podmínka v druhé oblasti je silně závislá na povrchové teplotě. Leidenfrostův efekt, který je obecně popisován pro povrch zanořený ve vodě [48], je v tomto případě výrazně posílen tím, že zde chybí přítlačné síly, které by tekoucí vodu tlačily proti vznikající parní vrstvě. Tepelný tok  $Q$  je pro teploty  $T > T_{LF}$  zanedbatelný v porovnání s tepelným tokem pro  $T < T_{LF}$ , kde  $T_{LF}$  je Leidenfrostova teplota. Na rozdíl od toho v dopadové oblasti je  $T_{LF}$  posunuta do vysokých teplot (často vyšších než je počáteční teplota vzorku, takže LF efekt není vůbec v dopadové oblasti pozorován). Typický průběh hustoty tepelného toku v závislosti na povrchové teplotě je na obr. 4.4.



Obr. 4.4: Typický průběh hustoty tepelného toku v závislosti na teplotě. Vlevo pro dopadovou oblast a vpravo pro zbytek chlazeného povrchu

Popsané diametrálně odlišné chování vede k tomu, že se po začátku experimentu vytvoří podchlazená oblast v dopadové zóně, viz graf 4.5 (vlevo). Tato oblast se nadále rozšiřuje směrem dolů díky vedení tepla uvnitř materiálu. Teprve poté, co je

povrchová teplota v určitém bodě snížena kondukcí, začne výrazné chlazení konvekcí z povrchu, viz graf 4.5 (vpravo).

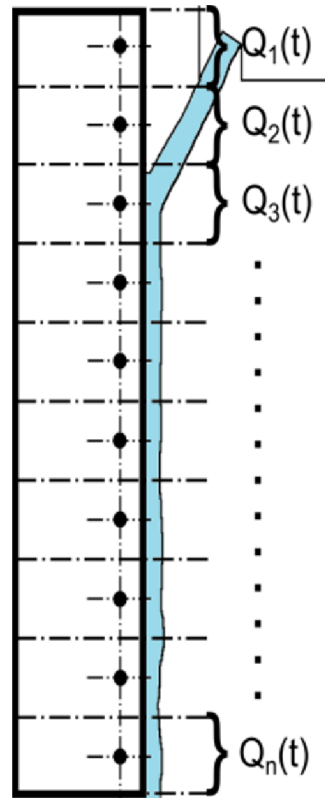


Obr. 4.5: Typické rozložení teplot uvnitř vzorku 1,5 s (vlevo) a 6,5 s (vpravo) po začátku experimentu. Vzorek je chlazený vodním paprskem, který dopadá na pravou stranu 70 mm od horní hrany, ostatní strany jsou izolovány.

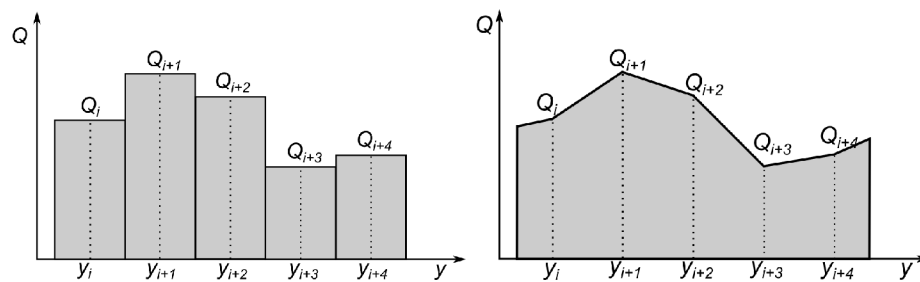
K výpočtu je zapotřebí dvourozměrný model, který je schopen postihnout tepelné toky, jak do hloubky materiálu, tak i ve vertikálním směru. Okrajovou podmínku je možné aproximovat pomocí souboru  $N$  funkcí hustot tepelných toků v závislosti na čase, viz obr. 4.6. Při této aproximaci vyvstává otázka, jaké hodnoty okrajových podmínek používat na hranicích mezi oblastmi, pro které budou funkce konstruovány. Nejjednodušším řešením je ponechat na hranicích sousedních funkcí nespojitě body. Propracovanějším přístupem je hodnoty interpolovat například lineární funkcí. Tvar okrajových podmínek v čase  $t$  pro obě metody je znázorněn na obr. 4.7.

Obě metody by byly dobře použitelné, pokud by se okrajové podmínky ve vertikálním směru měnily pozvolna. To ovšem vůbec neplatí v rozebírané úloze. Zde je průběh okrajové podmínky téměř skokový (viz obr. 4.4) a navíc se pozice skokové změny neustále pohybuje v čase.

Teoreticky by mělo jít problém potlačit zvětšováním počtu aproximujících funkcí  $N$ . To s sebou však přináší i adekvátní navýšení počtu teplotních čidel. V praxi je možné použít pouze omezený počet čidel, protože přítomnost každého z nich způsobuje mírné zkreslení teplotního pole [12].



Obr. 4.6: Rozvržení povrchu do kontrolních oblastí

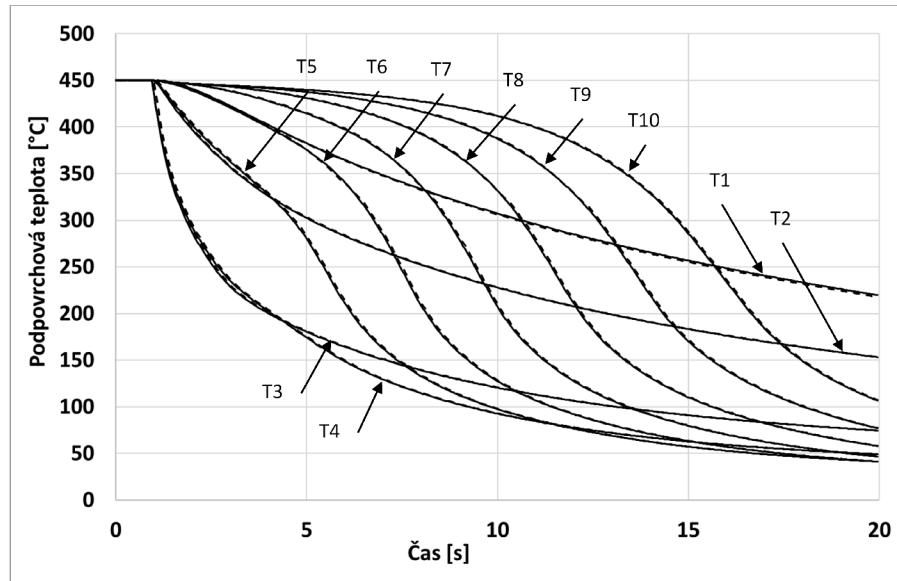


Obr. 4.7: Použití konstantního (vlevo) a lineárního (vpravo) průběhu okrajové podmínky mezi vyhodnocenými hodnotami  $Q_i$  pro termočlánky v pozicích  $y_i$

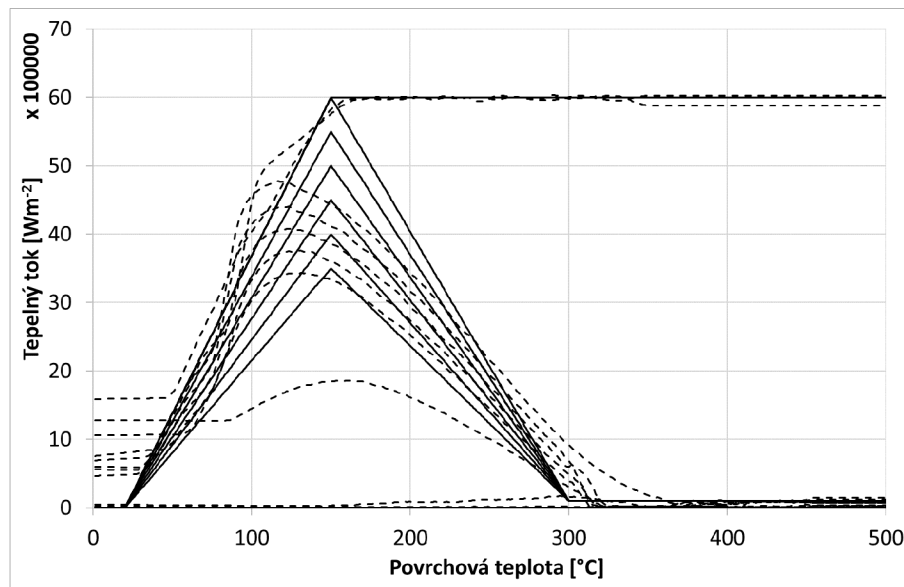
### 4.2.1 | Základní řešení

Testovací úloha byla řešena sekvenční metodou. V každém kroku jsou optimalizovány hodnoty konstantních průběhů okrajových podmínek po dobu  $Nf$  dopředných kroků. Optimalizace pro všechny teplotní čidla probíhá zároveň, takže je umožněno vzájemné ovlivňování právě optimalizovaných okrajových podmínek prostřednictvím dvourozměrného modelu.

V grafu 4.8 je srovnání průběhů zadaných podpovrchových teplot s průběhy teplot, které odpovídají nalezenému řešení okrajových podmínek. I přes tuto dobrou shodu zadaných a spočtených teplot se stanovené okrajové podmínky značně odlišují, viz graf 4.9.



Obr. 4.8: Srovnání podpovrchových teplot - zadaných (plné čáry) s vypočtenými (čárkované)

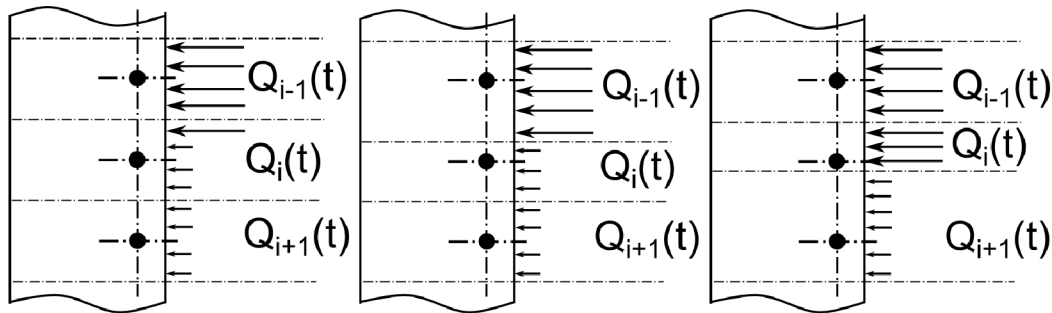


Obr. 4.9: Srovnání základního řešení (čárkované křivky) se zadáním (plné křivky)

### 4.3 | Metoda posouvání hranic

K největším nepřesnostem základního řešení dochází v situaci, kdy se LF hranice nachází blízko středu kontrolní oblasti. V tom případě je spočtená hodnota nejen zkreslená, ale je i chybně aplikována na největší část kontrolní oblasti. Vzniklá chyba je výrazně menší ve chvíli, kdy se LF hranice nachází na rozhraní oblastí dvou funkcí. Protože se však LF hranice pohybuje, je nutné, aby se pohybovaly i hranice mezi oblastmi vypočítaných funkcí. Tento princip je ilustrován na obr. 4.10. Obrázek vlevo

znázorňuje situaci, kdy na část povrchu působí dvě odlišné hustoty tepelných toků bez plynulého přechodu mezi sebou. Rozhraní mezi nimi neleží na hranici kontrolních oblastí, a tak dochází ke zkreslení vypočtených hodnot  $Q_i(t)$ , které jsou aplikovány na celou kontrolní oblast. Obrázek uprostřed znázorňuje řešení této situace pomocí posunuté hranice kontrolních oblastí. Celkový pohled na posouvající se hranice dokresluje obrázek vpravo, který znázorňuje rozložení hranic poté, co se LF hranice přesune přes  $i$ -tý termočlánek. [49]



Obr. 4.10: Princip posouvání hranic

Samostatným problémem zůstává stanovení rychlosti (respektive polohy) s jakou se LF hranice pohybuje. Záznam polohy v čase je možné získávat:

- přímo z měření pomocí obrazové analýzy videozáznamu
- stanovit pomocí postupné minimalizace reziduí teplot z inverzního výpočtu nebo jiných charakteristických projevů ve spočtených tepelných tocích

### 4.3.1 | Realizace

Stěžejním faktorem pro realizaci posuvu hranic je znalost polohy LF hranice v průběhu výpočtu. Pokud by byla tato poloha předem známá s dostatečnou přesností (například ze zmiňované obrazové analýzy), pak by realizace této metody byla triviální. Hledání polohy LF hranice z videozáznamu reálného experimentu je již poměrně vzdálené od tématu této dizertační práce, a proto se jím dále v této práci zabývat nebudeme. Pro názornost je pouze uvedena fotografie reálného vzorku, na které je vidět, že se smáčená a nesmáčená část povrchu dá rozlišit pohledem, viz obr. 4.11.

V následující části se budeme zabývat variantou, kdy pohyb rozhraní mezi smáčenou a nesmáčenou částí desky nebyl zaznamenán a je nezbytné jeho polohu získat výpočetní cestou pouze z naměřených dat (záznamů teplot).

Z teplotních záznamů je možné stanovit časy, kdy byla LF hranice nejbližší konkrétnímu teplotnímu čidlu. Během řešení popsané testovací úlohy tak existuje pouze 8 bodů (teplotních čidel), ve kterých je možné stanovit čas průchodu LF hranice. Mezi těmito body se předpokládá, že se hranice pohybuje konstantní rychlostí.

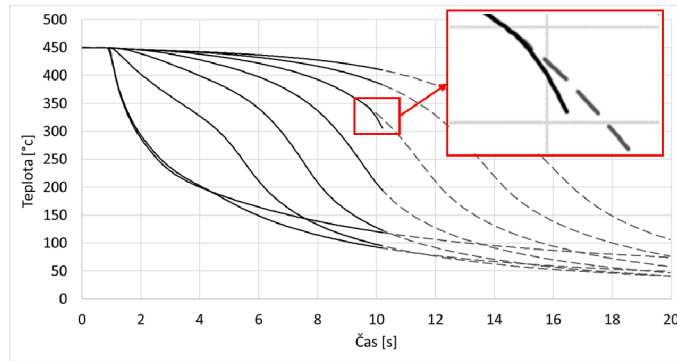


Obr. 4.11: Fotografie stékající vody, která díky nerovnoměrnému rozložení teplot a LF efektu, smáčí pouze horní část hliníkové desky

Úloha je řešena po částech, které budou v následujícím textu označovány jako segmenty. Každý segment je určen časovým intervalem, po který přes oblast mezi dvěma sousedními termočlánky přechází LF hranice. Protože je rychlost LF hranice před začátkem výpočtu neznámá, tak jsou neznámé i délky jednotlivých segmentů a délka prvního segmentu musí být odhadnuta.

Výpočet inverzní úlohy v rámci jednoho segmentu probíhá běžným způsobem, který byl popsán jako základní varianta řešení této úlohy 4.2.1 s tím rozdílem, že se během výpočtu LF hranice pohybuje mezi dvěma sousedními oblastmi. Rychlost posunu  $v_{LF}$  je konstantní a je nastavena podle odhadnuté časové délky segmentu ( $t_s = d/v_{LF}$ , kde  $d$  je vzdálenost sousedních teplotních čidel). Na konci každého segmentu jsou srovnávány záznamy teplot změřených a simulovaných. Obecně jsou tyto rozdíly malé, protože minimalizace těchto rozdílů je přímo cílem inverzní úlohy, která probíhala na daném segmentu. Přesto můžeme pozorovat rozdíl právě na jednom teplotním záznamu (na pozici teplotního čidla, ke kterému se v průběhu výpočtu blíží LF hranice), viz obr. 4.12. Důvodem je to, že teplota v této oblasti je před přechodem LF dominantně ovlivňována vedením tepla uvnitř vzorku do oblastí, které jsou již intenzivně chlazené. Pokles teploty je závislý nejen na teplotě v intenzivně chlazené části vzorku, ale především na vzdálenosti LF hranice od měřeného místa.

Pokud je počáteční rychlost ( $v_{LF}$ ) nastavena na příliš malou hodnotu, tak simu-



Obr. 4.12: Rozcházející se změřené a vypočtené teploty pro čidlo nejbližší LF hranici v důsledku nereálně vysoké rychlosti posuvu LF hranice. Čárkované křivky jsou "změřené" teploty. Plné křivky jsou vypočtené inverzní úlohou.

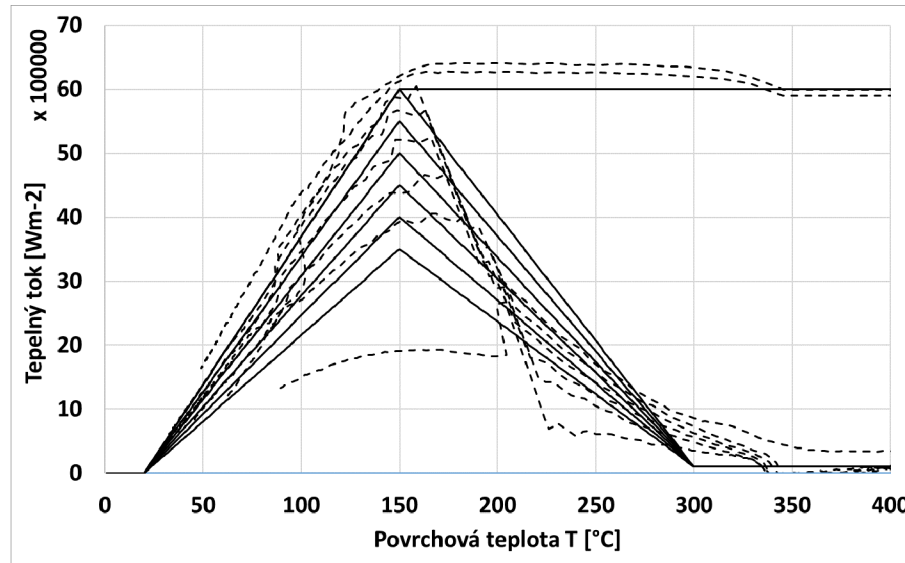
lovaný teplotní záznam není dostatečně (tak jako v realitě) ovlivněný vedením tepla v materiálu. V rámci inverzní úlohy na daném segmentu je situace chybně vyřešena nastavením nereálně vysokých hodnot tepelného toku na povrchu sledovaného teplotního čidla. Negativní důsledky jsou popsány v kapitole 4.2.1).

V opačném případě (viz 4.12), kde rychlost ( $v_{LF}$ ) je nastavena na vysokou hodnotu (větší než je reálná hodnota), je simulovaný záznam teplot ovlivňován odvodem tepla v materiálu dříve (a s větší intenzitou) než je reálné. Důsledkem je rychlejší pokles teplot oproti změřeným datům, který inverzní úloha nemůže odstranit, protože by to znamenalo použít záporný tepelný tok (ohřev), který je z pochopitelných důvodů při řešení této úlohy zakázán. Konečným důsledkem je, že se simulovaný a měřený záznam teplot na konci segmentu výrazně liší.

Pro automatickou korekci rychlosti  $v_{LF}$  v rámci jednotlivých segmentů byla vyvinuta metoda, která popsaný rozdíl na konci segmentu využívá. Metoda funguje iteračně, kde každá iterace zahrnuje výpočet inverzní úlohy na daném segmentu. V první iteraci se použije odhadnutá hodnota  $v_{LF}$ , která musí být pro správnou funkci metody vždy nadhodnocená. Na konci každé iterace je stanovený časový rozdíl mezi časem konce segmentu a časem, kdy záznam změřených teplot dosáhne stejné teploty, jako je na konci segmentu simulovaná teplota. Pokud je časový rozdíl větší než zvolená mez (například jeden časový krok), tak se výpočet segmentu opakuje v následující iteraci s upravenou rychlostí.

Výpočetní metoda byla aplikována na stejnou testovací úlohu, která byla použita v předchozí podkapitole. Stanovené okrajové podmínky jsou srovnány se zadáním v grafu 4.13.

Výrazně jednodušším přístupem pro určení průběhu LF hranice po povrchu vzorku je hledání extrémů v prvních nebo druhých derivacích teplotních záznamů [51]. Z povahy popsané úlohy vyplývá, že k nejprudšímu poklesu povrchové teploty (minimum první derivace) dochází těsně poté, co přes dané místo projde LF hranice.



Obr. 4.13: Srovnání řešení pomocí metody posouvání hranic (čárkované křivky) se zadáním (plné křivky)

Respektive k největšímu nárůstu rychlosti poklesu teplot (minimum druhé derivace teploty) dochází ve chvíli, kdy LF hranice přechází přes daný povrch. Tyto poklesy teplot je možné přibližně zachytit v měřených podpovrchových teplotách s mírným posunem v čase. Praktický postup je následující: Teplotní záznamy se přefiltrují, aby se zredukoval šum v datech, který by se jinak numerickým derivováním zvýraznil. Filtrované záznamy teplot se zderivují a naleznou se jejich minima (respektive časy, ve kterých derivace nabývají svých minim). Na základě nalezených časů a známých vertikálních poloh teplotních senzorů se stanoví průběh LF hranice během experimentu (předpokládá se konstantní rychlost mezi stanovenými časy).

Z teorie je zřejmé, že pro stanovení polohy LF hranice by měla být použita druhá derivace. V praxi je však několik důvodů, proč může být lepší použít derivaci první:

1. Druhá derivace teploty je mnohem výrazněji zatížena šumem ze změřených dat, který může zkreslit polohu nalezených extrémů.
2. Časové rozestupy mezi detekovanými průchody LF hranice přes sousední teplotní senzory jsou přibližně stejné pro obě metody.
3. Optimalizace časového posunu nalezených bodů je stejně nevyhnutelná, protože ani použití druhé derivace neodstraní časový posun mezi detekovanými časy a realitou, který je způsoben zpožděním podpovrchových teplot oproti povrchovým teplotám.

Ze srovnání takto odvozeného průběhu LF hranice (derivace teplotních záznamů) s předchozí variantou (průběžná optimalizace polohy LF hranice podle koncových teplot) plyne, že obě varianty dávají přibližně stejné rychlosti posuvu LF hranice ve všech výpočetních oblastech testovacího vzorku. Rozdílné jsou pouze absolutní



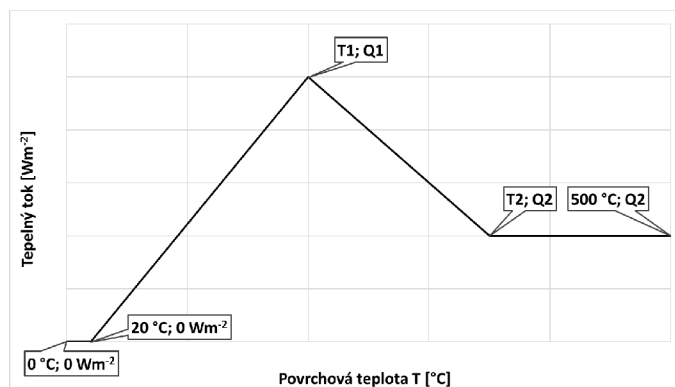
časy, ve kterých dochází k přechodu LF hranice přes teplotní čidla. Pro metody využívající derivace teplotních záznamů je nutné najít vhodný posun stanovených časů pomocí dodatečné optimalizace.

## 4.4 | Aproximace řešení parametrickou funkcí

Výše popsaná metoda stanovuje hustotu tepelného toku v závislosti na čase a teprve posléze jsou výsledky přepočítány na funkce povrchové teploty. Nabízí se použít takovou metodu, která bude okrajové podmínky v závislosti na povrchové teplotě počítat přímo. Jednou z realizací je zvolení vhodné parametrické funkce teploty a polohy, které budou tvarově odpovídat reálné okrajové podmínce. Úloha se pak může řešit jako optimalizace parametrů, respektive minimalizace odchylek mezi měřenými a vypočtenými teplotami. Protože je prováděno velké množství přímých výpočtů, které jsou časově náročné, je vhodné výpočet urychlit. Jeden ze způsobů je použití hrubé výpočetní sítě a dlouhých časových kroků, které se ke konci optimalizace zjemní.

### 4.4.1 | Realizace

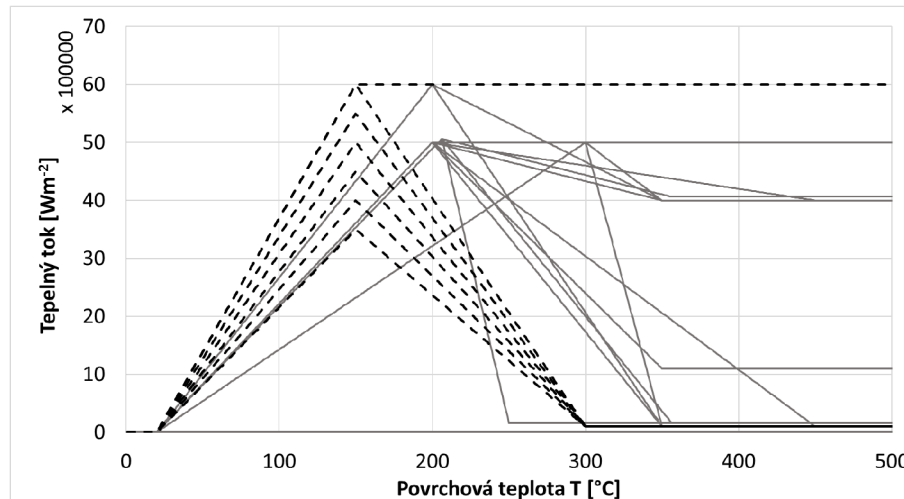
Metoda byla aplikována na testovací úlohu, která je popsána v úvodu této kapitoly (5). Řešení bylo hledáno v podobě parametrických funkcí. Pro každou z osmi výškových úrovní byla použita jedna parametrická funkce stejného typu nezávislá na ostatních. Každá funkce je popsána pomocí 4 parametrů ( $T_1$ ,  $T_2$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$ ), viz graf 4.14.



Obr. 4.14: Schéma parametrizace

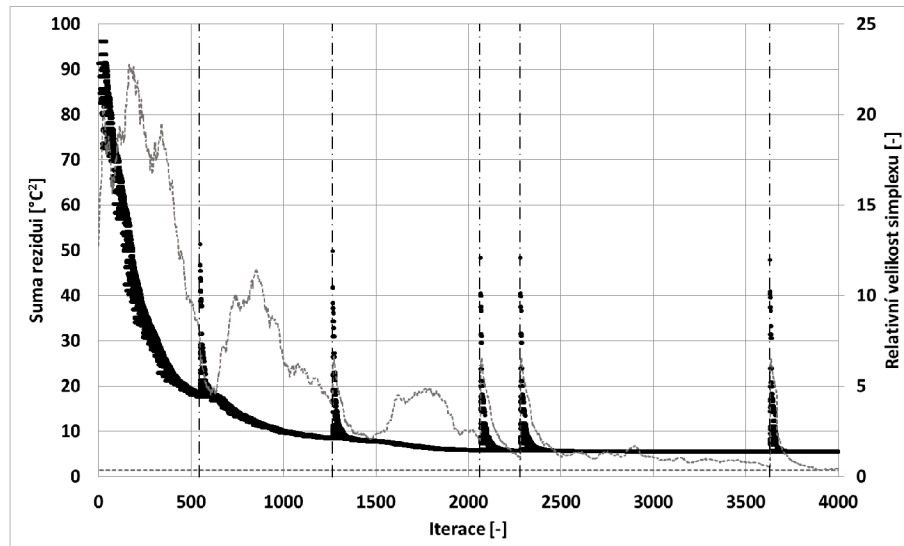
Optimalizace hledaných parametrů byla realizována pomocí tzv. simplexové metody (Nelder–Meadova metoda [50]). Počáteční simplex může být vytvořen na základě aproximace přibližného řešení jiné výpočetní metody. Pro účely testovací úlohy byl počáteční simplex zvolen tak, aby parametrické funkce byly v blízkosti správného

řešení a jejich tvar přibližně odpovídal hledanému řešení. Počáteční stav simplexu (respektive funkcí okrajových podmínek, které kóduje) je vyneseno v grafu 4.15. Křivky pro jednotlivé výškové úrovně (8 úrovní) ani vrcholy simplexu (33 vrcholů) nejsou v grafu barevně rozlišeny, protože celkový počet zobrazených křivek je příliš velký  $8 * 33 = 264$  a jejich vzájemné rozlišování není smyslem tohoto grafu. Pro srovnání je v grafu vyneseno i správné řešení (čárkované křivky).



Obr. 4.15: Počáteční stav simplexu: Černé čárkované křivky jsou správné řešení. Šedé křivky jsou počáteční stav simplexu

Průběh optimalizace během iterací dobře popisují dva parametry, které jsou právě v závislosti na iteracích vyneseny v grafu 4.16.



Obr. 4.16: Na hlavní ose je průběh reziduí během iterací výpočtu (tučné černé body). Na vedlejší (pravé) ose je vývoj velikosti simplexu (šedá tečkovaná křivka)

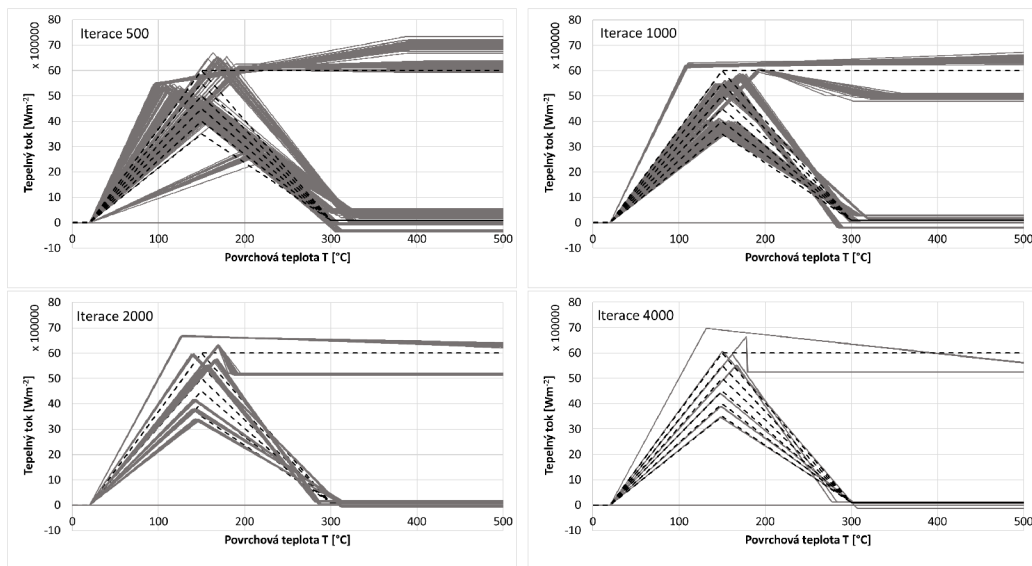
Prvním ukazatelem je suma reziduí, tj. součet absolutních hodnot odchylek zadaných a vypočtených teplot. Pro graf s rezidui je charakteristické, že jde o nerostoucí

funkci s daným nenulovým minimem, které je ovšem obecně neznámé. Minimální hodnota je dána nepřesností zvolené aproximace a nedokonalostmi modelu.

Druhým ukazatelem je průměrná relativní vzdálenost vrcholů simplexu od jeho těžiště. Relativních hodnot je použito proto, že různé parametry (které jsou kódované vrcholy simplexu) mohou mít diametrálně odlišný rozsah hodnot. Pro každý typ parametru je proto zavedeno měřítko, pomocí kterého se parametry převádí na relativní hodnoty přibližně stejných rozsahů. Takto spočtená průměrná vzdálenost vrcholů simplexu popisuje celkovou velikost simplexu, která se v průběhu výpočtu může zvětšovat i zmenšovat. Přibližně platí, že simplex je relativně velký (respektive se zvětšuje) pokud je simplex od lokálního minima účelové funkce daleko. Naopak se simplex zmenšuje v blízkosti lokálního minima.

Praktickým problémem, který je vidět v grafu 4.16, je předčasná degenerace simplexu. V grafu jsou tato místa označena svislou čerchovanou čarou. Použitým řešením je resetování simplexu v místě, kde došlo k jeho degeneraci. Jako kritérium pro resetování simplexu byla zvolena jeho velikost. Protože se velikost simplexu, který by ještě neměl být považován za degenerovaný, postupně zmenšuje, tak je vhodné, aby se též mez, při které dojde k resetování, postupně zmenšovala. Například při řešení testovací úlohy se zvolená mez při každém resetování zmenšila na polovinu.

Další průběh (stav v iteraci 500, 1000, 2000) a finální řešení (iterace 4000) jsou vyneseny v grafu 4.17. Ve všech případech jsou pro srovnání vyneseny správné řešení (čárkované křivky).



Obr. 4.17: Postupný vývoj řešení v iteraci 500, 1000, 2000, 4000: Černé čárkované křivky jsou správné řešení. Šedé křivky jsou nalezené řešení.

Metoda je schopná najít relativně přesné řešení za předpokladu, že jsou vhodně zvolené parametrické funkce. K úspěšnému řešení je proto nutná znalost tvaru hle-

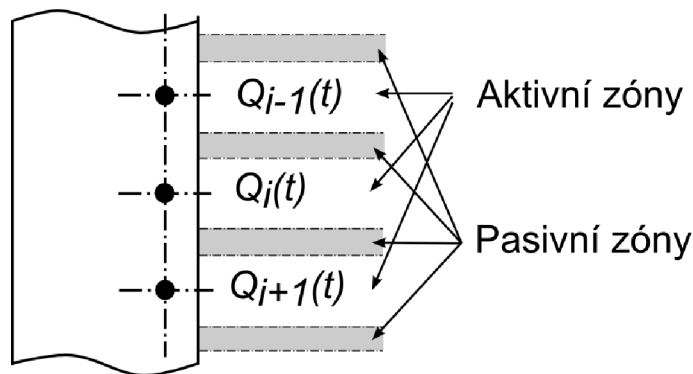
daných okrajových podmínek. Zároveň musí být zvolené aproximace jednoduché (z pohledu počtu parametrů), protože navyšování počtu parametrů značně zpomaluje konvergenci ke správnému řešení a narůstá tak potřebný počet iterací a tím i výpočetní čas. Pro ilustraci uvedme, že poměrně jednoduchá testovací úloha byla aproximována pomocí 32 parametrů a výpočet potřeboval řádově 4000 iterací.

## 4.5 | Iterační metoda

Metoda výpočtu je iterační, přičemž v každé iteraci proběhne celý výpočet 2D inverzní úlohy. Na chlazeném povrchu se opět předpokládá rozdělení do  $N$  zón příslušných k teplotním sensorům. V první iteraci je proveden přibližný výpočet pomocí 2D sekvenční Beckovy metody, která je popsána na začátku této kapitoly. Spočteny jsou hustoty tepelných toků, jako funkce času pro  $N$  různých výškových úrovní. Výsledky jsou převedeny do tvaru funkcí v závislosti na teplotě povrchu.

Původní rozdělení povrchu do  $N$  zón „aktivních“ je nadále rozšířeno o  $N + 1$  nových zón „pasivních“, které vzniknou na původních hranicích, viz obr. 4.18.

Tepelné toky v pasivních zónách jsou dány výsledky z předchozí iterace (ve formátu funkcí teploty), zatímco v aktivních zónách jsou nadále hustoty tepelných toků stanovovány inverzním výpočtem. Celková plocha pasivních zón se postupně během iterací zvětšuje na úkor aktivních zón.



Obr. 4.18: Přidání pasivních zón mezi kontrolní oblasti

Pro zvýšení stability metody se v pasivních zónách iterace  $j + 1$  použijí relaxované hodnoty namísto výsledků z aktivních zón iterace  $j$ , tj. použité hodnoty jsou váženým průměrem nově stanovených hodnot a hodnot použitých v předchozí iteraci, viz rovnice 4.1.

$$Q_{pasivní,j+1} = r * Q_{pasivní,j} + (1 - r) * Q_{aktivní,j} \quad (4.1)$$

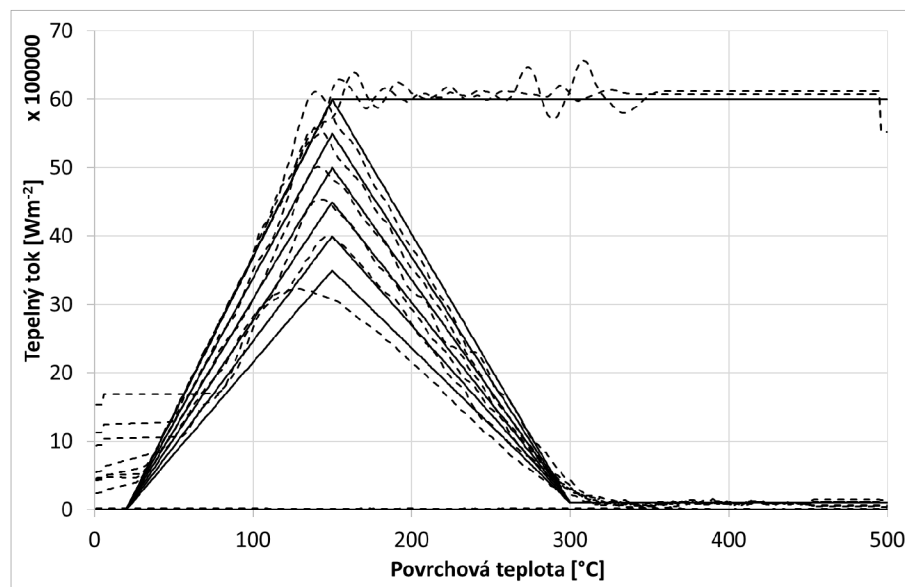
### 4.5.1 | Realizace

Metoda byla opět aplikována na testovací úlohu, viz úloha v kapitole 5. První iterace výpočtu odpovídá běžnému řešení se všemi výše popsány nepřesnostmi, viz kapitola 4.2 a konkrétně řešení na obrázku 4.9.

Pro další iterace se již používá systém aktivních zón (kde se okrajová podmínka právě optimalizuje) a zón pasivních (kde se používají hodnoty okrajových podmínek z předchozí iterace). Podíl aktivních zón v následujících iteracích byl pro tento příklad zvolen následovně: 50%, 40%, 30%, 20%, 10%, 5%, 5%, 5%, .... Pro stabilizaci výpočtu mezi jednotlivými iteracemi je na dílčí řešení aplikováno filtrování a relaxace. Pro snížení počtu potřebných iterací a tím i zrychlení celého výpočtu je možné použít relaxaci různé "síly" v průběhu iterací. Na začátku iterací je vhodné použít slabší relaxaci, která umožňuje větší změny okrajových podmínek mezi iteracemi. Ke konci výpočtu je naopak výhodné použít silnou relaxaci, aby se mohlo řešení ustálit.

V tomto příkladu byla použita relaxace s lineárně narůstající hodnotou parametru  $r$ , viz rovnice 4.1. Z  $r = 0,5$  na  $r = 0,8$ .

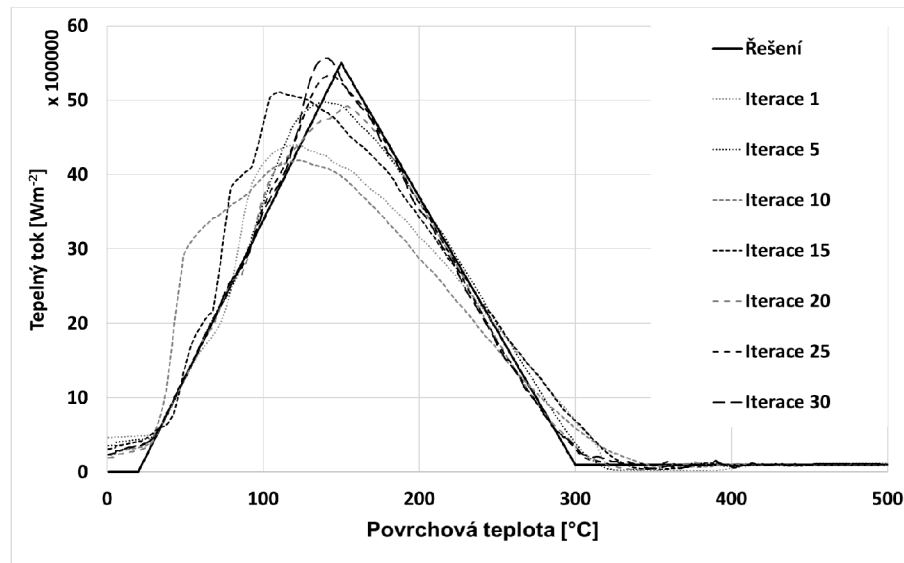
Výsledné řešení po třiceti iteracích je v grafu 4.19 srovnáno se správným řešením testovací úlohy.



Obr. 4.19: Srovnání průběžného řešení po 30 iteracích (čárkované křivky) se zadáním (plné křivky)

Pro ilustraci vývoje řešení v průběhu iterací je v grafu 4.20 vyneseno řešení  $Q_6$  v iteracích 1, 5, 10, 15, 20, 25 a 30.

Popsaná metoda je schopna vylepšit základní řešení a přinést tak přesnější výsledky. Její praktické používání je ovšem komplikované zejména z těchto důvodů:



Obr. 4.20: Postupné změny řešení v průběhu 30 iterací

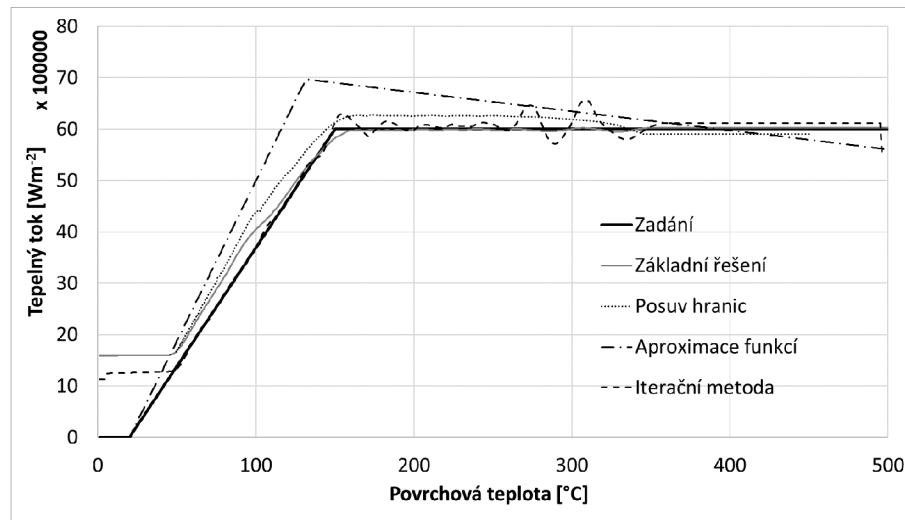
- Metoda nemusí zlepšit celé řešení. Místy může dojít k téměř náhodnému zkreslení (zhoršení), viz. kmitající hodnoty v pravé horní části grafu 4.19.
- Nedá se obecně stanovit pravidlo, kolik iterací je potřebných pro konkrétní výpočet. Jedno z mála použitelných vodítek je sestavit testovací úlohu podobných vlastností, na které je možné počet potřebných iterací odhadnout a otestovat.
- Obdobně je nutné konkrétnímu typu úloh přizpůsobit parametry relaxace a nastavit pozvolnou změnu zastoupení aktivních a pasivních oblastí.
- Každá iterace výpočtu je řádově stejně složitá, jako základní výpočet prezentovaný v úvodu této kapitoly. Pro  $I$  iterací, je tak tato metoda  $I$  krát časově náročnější, než metoda základní. Pro uvedený příklad bylo  $I = 30$ . Pro reálné úlohy by mělo být použito více iterací, aby se zaručila konvergence k řešení i při mírně odlišném chování reálné úlohy.

## 4.6 | Porovnání vyvinutých metod

V rámci této dizertační práce byly vyvinuty tři metody ("Posuv hranic", "Aproximace funkcí", "Iterační metoda") pro řešení úlohy popsané v této kapitole (5). K vzájemnému srovnávání těchto metod je dále použita čtvrtá metoda, označená jako "základní řešení". Před samotným srovnáním vyvinutých metod je nutné si uvědomit, že dosažené výsledky jednotlivých metod na testovacích úlohách jsou z velké části dány vlastnostmi a parametry testované úlohy samotné. Praktické zkušenosti s odladováním popsaných metod ukázaly, že i volba, zda zadání (a tím i hledaná řešení) bude ve tvaru funkcí tepelných toků nebo součinitelů přestupu tepla, má velký

vliv na kvalitu jednotlivých řešení. Nalezená řešení testovací úlohy jsou srovnány v grafech 4.21 a 4.22.

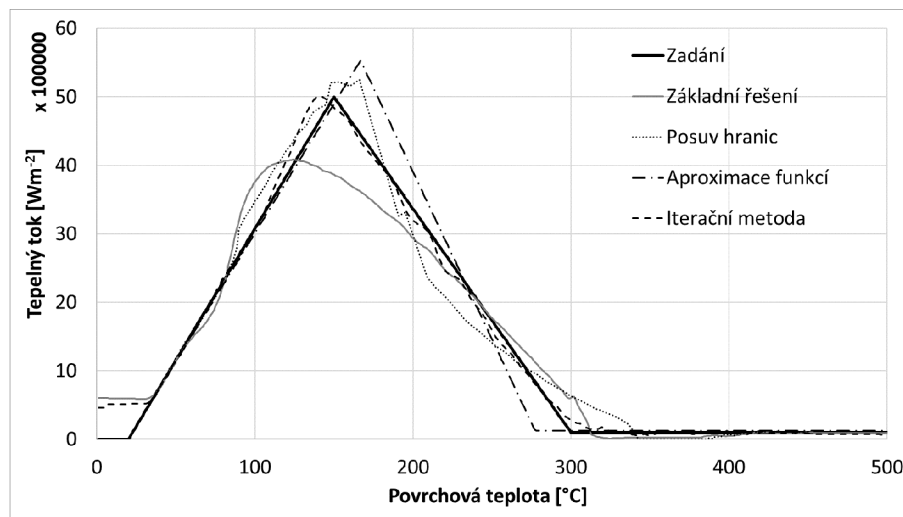
První graf (4.21) reprezentuje výsledky pro dopadovou oblast (třetí teplotní senzor). Okrajová podmínka testovací úlohy je v této oblasti zvolená tak, že má vysokou hodnotu i pro vysoké teploty. Není zde proto podstatný fenomén posouvání LF hranice a nejlepších výsledků dosahuje základní řešení. Obdobně přesného výsledku dosahuje metoda posuvu hranic. Méně přesná je pak iterační metoda, která sice kopíruje správný trend, ale je zatížena náhodnými oscilacemi a aproximační metoda, která se od správného řešení z porovnávaných metod odlišuje nejvíce.



Obr. 4.21: Srovnání výsledků vyvinutých metod na testovací úloze (dopadová oblast)

Druhý graf (4.22) reprezentuje výsledky mimo dopadovou oblast (sedmý teplotní senzor odshora). V tomto případě je již vidět vliv posouvající se LF hranice, který silně zkresluje základní řešení. Nejlépe v tomto případě vychází iterační metoda, která správné řešení věrně kopíruje a to i v kritickém bodě kolem teploty 300 °C (LF teplota). Řešení pomocí aproximace, stejně jako v předchozím případě řešení v dopadové oblasti, přibližně vystihuje trend správného řešení, ale konkrétní polohy významných bodů (maximum a LF teplota 300 °C) nejsou nalezeny přesně.

Relativně špatně též vychází metoda posuvu hranic a to především v okolí LF teploty (300 °C). Tento výsledek je z velké části ovlivněný volbou testovací úlohy, protože metoda posouvání hranic potřebuje pro svoji funkci prudký předěl mezi okrajovou podmínkou pod/nad LF teplotou. Optimální tvar okrajové podmínky pro metodu posouvání hranic je téměř nulová hodnota tepelného toku pro teploty nad LF teplotou se skokovou změnou na maximální hodnotu pro teploty pod LF teplotou. Testovací úloha samozřejmě nemůže být volena podle preferencí některé z výpočetních metod, ale současně není možné vyloučit, že se popsany tvar okrajové podmínky v praxi vyskytuje.



Obr. 4.22: Srovnání výsledků vyvinutých metod na testovací úloze (mimo dopadovou oblast)

Výpočetní metody je možné srovnávat podle dalších kritérií, jako jsou například ideální podmínky pro jejich použití, výpočetní náročnost a náročnost implementace. První tabulka srovnává ideální podmínky pro jednotlivé výpočetní metody.

Metoda	Ideální podmínky použití
Základní řešení	Malé vzdálenosti mezi sousedními teplotními senzory.
Posuv hranic	Skoková změna tepelného toku mezi případy s povrchovou teplotou nad a pod LF teplotou. Ideálně nulový tepelný tok pro povrchové teploty nad LF teplotou.
Aproximace funkcí	Jednoduchý tvar okrajové podmínky z pohledu složitosti aproximující funkce a potřebného počtu parametrů.
Iterační metoda	Malé rozdíly v hledaných sousedních okrajových podmínkách.

Výpočetní náročnost je v následující tabulce uvedena relativně vůči výpočetní náročnosti základní metody. Uvedené hodnoty jsou přibližné a platí pro úlohy obdobných parametrů, jako má zvolená testovací úloha. Metoda s aproximací řešení sice nepoužívá inverzní výpočet v klasickém smyslu, ale jeho náročnost je přepočítána přes počet přímých výpočtů v porovnání se základní metodou.



Metoda	Výpočetní náročnost
Základní řešení	1
Posuv hranic	1-10, pro polohu LF hranice stanovenou dopředu na základě derivací teplot 5-20, pro automatickou detekci polohy LF hranice
Aproximace funkcí	10-1000
Iterační metoda	10-100
Metoda	Problematicčnost použití (Náročnost implementace)
Základní řešení	
Posuv hranic	Je nutné zpětně kontrolovat, zda je průběh LF hranice správně časově posunut tak, aby odpovídal realitě. Pro kontrolu není jednoznačné kritérium, které by udávalo jak poznat správné výsledky.
Aproximace funkcí	1) Je nutná znalost tvaru řešení. 2) Musí se zvolit vhodná aproximace. 3) Před samotným výpočtem je nutné provést přibližné řešení, aby se mohl nastavit startovací bod dostatečně blízko správného řešení.
Iterační metoda	Je nutné nastavit vhodnou míru relaxace a postup změny aktivních a pasivních zón. Špatné nastavení může kromě zkreslení výsledků a značného zpomalení konvergence řešení, způsobit i to, že řešení bude divergovat.

Posledním srovnávaným kritériem je obecnost metod. Nejméně obecnou metodou je posuv hranic. Tato metoda byla vyvinuta pro vyhodnocování konkrétního typu experimentů, viz úvod kapitoly 5. Ke svému chodu potřebuje jasné rozhraní, mezi velkou a téměř nulovou intenzitou chlazení. Pro variantu s automatickou detekcí je potřebné znát i přibližnou rychlost, směr a počátek pohybu této LF hranice. Zbylé dvě metody jsou obecnější, protože nejsou striktně omezeny na jednu pohybující se hranici, nevyžadují extrémní rozdíl okrajové podmínky před a za hranicí. Omezení pro metodu aproximace funkcí je složitost hledaného řešení z pohledu složitosti

aproximujících funkcí (respektive počtu neznámých parametrů).

# KAPITOLA 5

## Závěr

Tato dizertační práce je rozdělena do dvou částí. První část je teoretická a obsahuje popis běžně používaných metod pro řešení inverzních úloh vedení tepla. Pro každou metodu je stručně popsán princip, na kterém funguje a její základní vlastnosti.

Druhá část se zabývá konkrétním návrhem metod pro řešení inverzních úloh vedení tepla pro dva různé specifické typy úloh. Pro řešení těchto úloh bylo v rámci této dizertační práce navrženo a otestováno celkem pět metod a několik modifikací (dvě pro "prudce se měnící okrajové podmínky" a tři pro "nestacionárně nehomogenní chlazení vysoce tepelně vodivých materiálů").

Ani pro jeden ze studovaných typů úloh není možné v porovnávaných metodách najít jednu obecně nejlepší. Důvodem je to, že i v poměrně konkrétně specifikovaných úlohách, kterými se zabývá tato práce, je stále velká variabilita. Volba nejuvhodnější metody je tak stále závislá na dalších vlastnostech zadané úlohy. Konkrétní stručná klasifikace vyvinutých metod je v následujícím textu.

### Prudce se měnící okrajové podmínky

Nově vyvinuté metody má smysl používat za předpokladu, že v řešených úlohách dochází k prudkým změnám okrajové podmínky. Za prudké změny se v tomto případě dá považovat zejména nárůst z nulové (téměř nulové) hodnoty okrajové podmínky na hodnotu blízkou maximální (v rámci dané úlohy) v čase kratším, než by byl dopředný čas při použití sekvenční metody.

Druhým předpokladem je, že je přesnější řešení požadováno. V praxi je mnoho aplikací, ve kterých rozostření nalezeného řešení nevádí, protože se pro další přímé výpočty používají například průměrné hodnoty. Na tomto místě je dobré si uvědomit, že rozdíl mezi "základním" a "zpřesněným" řešením je (v případě tepelných toků) pouze rozložení okrajové podmínky v čase. Integrál tepelných toků v čase (celkové odvedené teplo) by mělo být pro všechny uvažované metody stejné. Mírně komplikovanější situace je v případě, že je okrajová podmínka hledána ve formě HTC (součinitelů přestupu tepla), kdy do hry vstupují povrchové teploty.

**Dvoufázové řešení:** Metoda je vhodná pro dlouhé úlohy s omezeným počtem navzájem izolovaných prudkých změn v okrajové podmínce. V závislosti na použité metodě druhé fáze může být použitelnost metody omezena na krátké úseky s prudkými změnami (počtem časových elementů) a malou změnu materiálových vlastností v rámci jednotlivých intervalů řešených druhou fází metody. Tato omezení platí pro testovaný případ, kdy se v druhé fázi použije celo-doménová metoda.

Za předpokladu splnění výše uvedených podmínek může být dvoufázové řešení velmi efektivní a přitom jednoduchou metodou, jak vylepšit řešení inverzních úloh s dlouhými teplotními záznamy. Případná manuální kontrola nalezených řešení je zjednodušena tím, že všechny "kritické" části okrajové podmínky jsou nalezeny v rámci výpočtu dvoufázové metody a nalezené řešení druhé fáze může být na těchto intervalech srovnáváno s výsledky fáze první. Relativně jednoduchá je i implementace.

**Sekvenční sub-doménová metoda:** Základní varianta sub-doménové metody má podobné vlastnosti jako sekvenční metoda s optimalizací lineární funkce. Lepších vlastností dosahuje za předpokladu dobrého naladění parametrů na zadaný typ úlohy. Naladění je ovšem složitější než u běžných sekvenčních metod, protože sub-doménová metoda kromě počtu dopředných kroků téměř vždy potřebuje nastavit parametr/y pro regularizaci. Hlavními výhodami této metody jsou:

- Predikce okrajové podmínky v rámci sub-domény (Nf dopředných kroků)
- "Symetrické" chování řešení na "symetrický" tvar hledané okrajové podmínky (například obdélníkový tvar okrajové podmínky viz graf 3.18).
- Možnost díky předchozím dvěma vlastnostem snadno metodu modifikovat pro konkrétní účely. Například popsaná modifikace "tolerance skoku".

**Sumarizace:** Pokud zadaná úloha splňuje všechna omezení pro použití dvoufázového řešení a zároveň není některého předem známého typu (například s předem známým obdélníkovým tvarem průběhu prudkých změn v okrajové podmínce), tak je výhodné použít dvoufázové řešení. V ostatních případech je vhodnější použít sub-doménovou metodu.

## Nestacionárně nehomogenní chlazení vysoce tepelně vodivých materiálů

Pro tento typ úlohy byly vyvinuty/testovány tři metody "Posuv hranic", "Aproximace funkcí" a "Iterační metoda". Jejich vlastnosti jsou srovnávány v kapitole 4.6. Porovnání dosažených výsledků na testovací úloze je v grafech 4.21, 4.22.

Ve stručnosti je možné říct, že všechny tři navržené metody jsou schopny dosáhnout relativně přesného řešení (ve srovnání se základním řešením) za předpokladu, že jsou splněny podmínky pro jejich použití.

Pokud je předem známý tvar řešení zadané úlohy a je možné toto řešení aproximovat dostatečně malým počtem parametrů, pak je výhodné použít metodu "aproximace funkcí". Metoda je implementačně nejjednodušší a její naladění není složité. Vážnými nevýhodami můžou být vysoká výpočetní náročnost (v závislosti na zvolené aproximaci) a nepřilíš vysoká přesnost.

Nejméně výpočetně náročnou metodou z trojice uvedených je "posuv hranic". Metoda je však striktně omezena na případ, kdy po povrchu přechází jasné rozhraní mezi vysokou a téměř nulovou hodnotou okrajové podmínky. Na rozdíl od zbylých dvou metod, které je možné použít obecněji i pro jiné typy nestacionárně nehomogenního chlazení.

Poslední z vyvinutých metod, je metoda "iterační", která na zvolené testovací úloze dosahovala nejpřesnějšího řešení. Metodu je možné obecně aplikovat na širokou škálu úloh. Stěžejní je správné naladění metody, které zahrnuje volbu vývoje poměru aktivních/pasivních zón a vývoj míry relaxace. Nevhodné nastavení může způsobit pomalou konvergenci, zkreslení nebo i divergenci řešení.

# Reference

- [1] KEVORKIAN, J. *Partial differential equations: Analytical Solution Techniques*. 2nd Ed. Hong Kong: Springer, 2000, 636 s.
- [2] ČERMÁK, Libor. *Numerické metody II*. Vyd. 1. Brno: CERM, 2004, 179 s.
- [3] PATANKAR, Suhas V. *Numerical heat transfer and fluid flow*. Great Britain: Taylor, 1980, 197 s.
- [4] ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R.L. *The Finite Element Method*. Volume 1. 4 ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000, 689 s.
- [5] POHANKA, Michal *Technical Experiment Based Inverse Tasks in Mechanics = Inverzní úlohy mechaniky s vazbou na technický experiment*. Brno, 2006.
- [6] OMEGA *Omega Engineering* [online]. b.r. [cit. 2015-06-12]. Dostupné z: [www.omegaeng.cz](http://www.omegaeng.cz)
- [7] FLIR *FLIR System* [online]. b.r. [cit. 2015-06-12]. Dostupné z: [www.flir.com](http://www.flir.com)
- [8] *QTEST*. [online]. b.r. [cit. 2015-06-12]. Dostupné z: [www.qtest.cz](http://www.qtest.cz)
- [9] LYSENKO, V. *Detektory pro bezdotykové měření teplot*. 1. vyd. Praha: BEN - technická literatura, 2005, 153 s.
- [10] Flash Method of Determining Thermal Diffusivity, Heat Capacity, and Thermal Conductivity. *Journal of Applied Physics* [online]. AIP, 1961, 32: 1679 [cit. 2015-06-12]. DOI: 10.1063/1.1728417.
- [11] RAUDENSKÝ, M., HORSKÝ, J. Dynamické vlastnosti termočlánků. *Inženýrská mechanika '96*. Volume III: May 13th -16th, 1996 Svratka, Czech Republic. 1. vyd. Brno: Institute of Solid Mechanics, 1996, 81-86 s.
- [12] LI, D., WELLS, M.A. *Effect of subsurface thermocouple installation on the discrepancy of the measured thermal history and predicted surface heat flux during a quench operation*. b.r., 343-354.
- [13] WOODBURY, Keith A. *Inverse Engineering Handbook*. Boca Raton: CRC Press, 2003, 466 s.

- [14] BECK, J.V., BLACKWELL, B., CLAIR, C.R.ST.J. *Inverse heat conduction: ill-posed problems*. Wiley, 1985.
- [15] RAUDENSKÝ, M., DUMEK, V. Neural Network & Inverse Problems. *Inverse Problem in Engineering Seminar*. Michigan State University, 1992.
- [16] DUMEK, V., DRUCKMULLER, M., RAUDENSKY, M., WOODBURG, K. Novel approaches to the IHCP: neural networks and expert systems. *The 1st International Conference on Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice*. Palm Coast, FL, USA, 06/13-06/18/93 [online]. 1993 [cit. 2015-06-10].
- [17] RAUDENSKY, M., HORSKY, J., KREJSA, J., SLAMA, L. Usage of artificial intelligence methods in inverse problems for estimation of material parameters. *International Journal Of Numerical Methods For Heat & Fluid Flow* [online]. MCB UNIV PRESS LTD, 1996, 6(8): 19-29 [cit. 2015-06-10].
- [18] RAUDENSKY, M., HORSKY, J., KREJSA, J. Usage of neural network for coupled parameter and function specification inverse heat conduction problem. *International Communications in Heat and Mass Transfer* [online]. 1995, 22(5): 661-670 [cit. 2015-06-10]. DOI: 10.1016/0735-1933(95)00052-Z.
- [19] KREJSA, J., WOODBURY, K.A., RATLIFF, J.D., RAUDENSKY, M. Assessment of strategies and potential for neural networks in the inverse heat conduction problem. *Inverse Problems In Engineering* [online]. GORDON BREACH PUBLISHING, TAYLOR, 1999, 7(3): 197-213 [cit. 2015-06-18].
- [20] RAUDENSKY, M., WOODBURY, K. A., KRAL, J., BREZINA., T. Genetic Algorithm in Solution of Inverse Heat-Conduction Problems. *Numerical Heat Transfer Part B-Fundamentals* [online]. HEMISPHERE PUBL CORP, 1995, 28(3): 293-306 [cit. 2015-06-18].
- [21] HOLLAND, J.H. *Adaptation in natural and artificial systems: an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence*. University of Michigan Press, 1975.
- [22] STOLZ, G. Numerical Solutions to an Inverse Problem of Heat Conduction for Simple Shapes. *Journal of Heat Transfer* [online]. 1960, 82(1) [cit. 2015-06-15]. DOI: 10.1115/1.3679871.
- [23] MYERS, G.E. *Analytical Methods in Conduction Heat Transfer*. 1st Ed. Hong Kong: McGraw-Hill, 1971, 508 s.
- [24] ČERMÁK, L. *Numerické metody II*. Vyd. 1. Brno: PC-DIR, 1998, 97 s.

- [25] HESTENES, M.R., STIEFEL, E. *Methods of conjugate gradients for solving linear systems*. b.r.. DOI: 10.6028/jres.049.044.
- [26] PRESS, W., VETTERLING, W., TEUKOLSKYS, A., FLANNERY, B.P. *Numerical recipes in C the art of scientific computing*. Cambridge: University Press, 1996, 990 s.
- [27] ZIELINSKI, R. *Metody Monte Carlo*. 1. vyd. Warszawa: Wyd. naukowo-techniczne, 1970, 294 s.
- [28] LAARHOVEN, P.J.M., AARTS, E.H.L. *Simulated annealing: theory and applications*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1987, 186 s.
- [29] TIKHONOV, A.N., ARSENIN, V.I. *Solutions of ill-posed problems*. Winston & Sons, 1977.
- [30] WOODBURY, K.A., BECK, J.V. Estimation metrics and optimal regularization in a Tikhonov digital filter for the inverse heat conduction problem. *International Journal Of Heat And Mass Transfer* [online]. PERGAMON-ELSEVIER SCIENCE LTD, 2013, 62: 31-39 [cit. 2015-06-17]. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2013.02.052.
- [31] ŠUCHMAN, O. *Historie umělé inteligence – neuronové sítě*. VŠE, 2008.
- [32] VONDRÁK, I. *Umělá inteligence a neuronové sítě*. Ostrava: VŠB, 1995, 139 s.
- [33] DENG, H., GUESSASMA, S., MONTAVON, G., LIAO, H.L., CODDET, C., BENKRID, D., ABOUDDI, S. Combination of inverse and neural network methods to estimate heat flux. *Numerical Heat Transfer Part A-Applications* [online]. TAYLOR, 2005, 47(6): 593-607 [cit. 2015-06-18]. DOI: 10.1080/10407780590886296.
- [34] RAUDENSKY, M., HORSKY, J., KREJSA, J. Usage of neural network for coupled parameter and function specification inverse heat conduction problem. *International Communications in Heat and Mass Transfer* [online]. 1995, 22(5): 661-670 [cit. 2015-06-18]. DOI: 10.1016/0735-1933(95)00052-Z.
- [35] DENG, S., HWANG, Y. Applying neural networks to the solution of forward and inverse heat conduction problems. *International Journal of Heat and Mass Transfer* [online]. 2006, 49(25): 4732-4750 [cit. 2015-06-18]. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2006.06.009.
- [36] HOPFIELD, J.J. *Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons*. b.r., : 3088.



- [37] HOPFIELD, J.J., TANK, D.W. *Computing with neural circuits*. Science (New York, N.Y.) [online]. 1986, 233(4764) [cit. 2015-06-18].
- [38] LI, D., WELLS., M. Effect of subsurface thermocouple installation on the discrepancy of the measured thermal history and predicted surface heat flux during a quench operation. *Metallurgical and Materials Transactions B* New York: Springer-Verlag, 36(3), 343-354 [cit. 2016-10-10]. DOI: 10.1007/s11663-005-0064-6. ISSN 1073-5615.
- [39] ROUPEC, J. *Vývoj genetického algoritmu pro optimalizaci parametrů fuzzy regulátorů*. Brno: VUT, 2001, 137 s.
- [40] GOLDBERG, D.E. *Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning*. Boston: Addison-Wesley, 1989, 412 s.
- [41] KOMÍNEK, J. *Heuristické algoritmy pro optimalizaci. Vysoké učení technické v Brně*. Fakulta strojního inženýrství, 2012.
- [42] YAN, C.M.L., QINGPING. G. *A parallel GA-BP neural network algorithm for solving inverse heat conduction problem*. s. 4622-4625. DOI: 10.1109/EMEIT.2011.6024005.
- [43] KOMÍNEK, J., POHANKA, M. Estimation of the Number of Forward Time Steps for the Sequential Beck Approach Used for Solving Inverse Heat Conduction Problems. *Materiali in tehnologije*, 2016, vol. 50, no. 2, p. 207-210. ISSN: 1580-2949.
- [44] RAUDENSKÝ, M., POHANKA, M., HORSKÝ, J. Combined inverse heat conduction method for highly transient processes. *Computational Studies [online]*. 2002, s. 35-42 [cit. 2015-06-19].
- [45] HŘIBOVÁ, V. *Vývoj inverzní sub-doménové metody pro výpočet okrajových podmínek vedení tepla.*, Brno: Vysoké učení technické v Brně. Fakulta strojního inženýrství, 2015.
- [46] CHOI, J. W., CHOI, J.W. Convective heat transfer coefficient for high pressure water jet. *ISIJ International*, 2002, vol. 42, no. 3, p. 283-289.
- [47] SILK, N., SILK, N. Estimation of the Number of Forward Time Steps for the Sequential Beck Approach Used for Solving Inverse Heat Conduction Problems. *Materiali in tehnologije*, 2016, vol. 50, no. 2, p. 207-210. ISSN: 1580-2949.
- [48] INCROPERA, F.P., DEWITT, D.P. *Fundamentals of heat and mass transfer.*, 4. vyd., New York: Wiley, 1996, 886 s.

- 
- [49] KOMÍNEK, J., HŘIBOVÁ, V., POHANKA, M. Methodology of Evaluation of Heat Transfer Experiment on Aluminum sample. *In: METAL: International Conference on Metallurgy and Materials*, Ostrava: Tanger, Ltd, 2015, s. 1-6.
- [50] Nelder, J.A., Mead, R. A simplex method for function minimization. *Computer Journal*, 1965, 7, p. 308–313.
- [51] Etienne, C. *Secondary cooling in the direct-chill casting of light metals*, Vancouver: The University of British Columbia, 2008, 154 s.

# Vlastní publikace vztahující se k dizertaci

- [A1] KOMÍNEK, J. *Heuristické algoritmy pro optimalizaci*. Brno 2012. Diplomová práce (Ing)., Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2012.
- [A2] KOMÍNEK, J., POHANKA, M., ONDROUŠKOVÁ, J. *Determination of Temperature Dependent Cooling Intensity for the Simulation of In line Heat Treatment*. In Conference proceedings of 22nd Conference on metallurgy and materials, 1. 2013, s. 34-40, ISBN: 978-80-87294-39-0.
- [A3] ONDROUŠKOVÁ, J., KOMÍNEK, J., POHANKA, M. *Computing Cooling Intensity from Descaling Experiments*. In Steelsim 2013, s. 19-19, ISBN: 978-80-260-3912-9.
- [A4] KOMÍNEK, J., HŘIBOVÁ, V., POHANKA, M. *Methodology of Evaluation of Heat Transfer Experiment on Aluminum sample*. In METAL 2015 Full Texts of Papers, Ostrava: TANGER, 2015. s. 1-6. ISBN: 978-80-87294-58-1.
- [A5] HŘIBOVÁ, V., KOMÍNEK, J., RAUDENSKÝ, M. *Vliv teploty a koncentrace polymerních roztoků na intenzitu chlazení, při tepelném zpracování*. Hutnické listy, 2015, roč. 68, č. 1, s. 10-15. ISSN: 0018-8069.
- [A6] KOMÍNEK, J., POHANKA, M. *Estimation of the Number of Forward Time Steps for the Sequential Beck Approach Used for Solving Inverse Heat Conduction Problems*. Materiali in tehnologije, 2016, vol. 50, no. 2, s. 207-210. ISSN: 1580-2949.
- [A7] HORSKÝ, J., KOMÍNEK, J., GUZEJ, M. *Advanced methodology of determination water jet cooling intensity during the casting process*. In 12th International Conference on Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics. ASTFE, 2016. s. 685-688. ISBN: 978-1-77592-124-0.

## Ostatní vlastní publikace

- [B1] HŘIBOVÁ, V., KOMÍNEK, J., ASTROUSKI, I., RAUDENSKÝ, M., TSENG, A.A. *Heat Transfer Simulation of Heat Exchangers Made by Polymeric Hollow Fibers*. In Engineering Mechanics 2014, 20th International Conference 2014. Brno: Institute of Solid Mechanics, Mechatronics and Biomechanics, Faculty of Mechanical Engineering, Brno University of Technology, 2014, s. 236-239, ISBN: 978-80-214-4871-1.
- [B2] KOMÍNEK, J., KOTRBÁČEK, P., HORSKÝ, J. *Design of Cooling Systems for Grooved Rolls*. In METAL 2016, 25rd International Conference on Metallurgy and Materials, Conference Proceedings. Ostrava: TANGER Ltd., 2016. s. 255-260. ISBN: 978-80-87294-67-3.
- [B3] RAUDENSKÝ, M., TSENG, A.A., HORSKÝ, J., KOMÍNEK, J. *Recent developments of water and mist spray cooling in continuous casting of steels*. Metallurgical Research and Technology, 2016, vol. 113, no. 5, s. 1-24. ISSN: 2271-3654.

## Udělené patenty

- [C1] KOTRBÁČEK, P.; CHABIČOVSKÝ, M.; KOMÍNEK, J.; Vysoké učení technické v Brně, Brno, CZ: Zařízení pro nastavování polohy trysek chladičího systému. 27545, užitný vzor. (2014)

## Užitné vzory

- [D1] HRAZDIL, V.; GUZEJ, M.; KOMÍNEK, J.; BOKIŠOVÁ, L.: FV01/2/ 2013; Přístroj na obrábění plastových koncovek výměníků. LPTP/ D5/ 0428. (funkční vzorek)
- [D2] HORSKÝ, J.; BULEJKO, P.; KOMÍNEK, J.: FV15/LPTP/12/ 2013; Tlaková komora pro testování expanzních materiálů při tepelném zatížení. LPTP/ D3 (funkční vzorek)

# Seznam symbolů

$c$	$Jkg^{-1}K^{-1}$	měrná tepelná kapacita
$c, C, C_0, C_1$	–	konstanty
$d$	$m$	vzdálenost sousedních teplotních senzorů
$f$	–	koeficient filtru / funkce
$H_0, H_1, H_2$	$Wm^{-2}$	matice regularizačních koeficientů
$HTC$	$Wm^{-2}K^{-1}$	součinitel přestupu tepla
$k, \alpha$	$Wm^{-1}K^{-1}$	součinitel tepelné vodivosti
$L$	$m$	tloušťka materiálu
$M$	–	časový krok
$Nf$	–	počet dopředných kroků
$r$	–	parametr relaxace
$\dot{q}$	$Wm^{-2}$	hustota tepelného toku
$\dot{q}_z$	$Wm^{-3}$	měrný vnitřní zdroj tepla
$\dot{\mathbf{q}}$	$Wm^{-2}$	vektor hustot tepelných toků
$Q$	–	funkce hustoty tepelného toku
$t$	$s$	čas
$T$	$K$	teplota / vektor teplot
$T_0$	$K$	počáteční teplota / vektor počátečních teplot
$T_{LF}$	$K$	Laidenfrostopva teplota
$w_i$	–	váhy
$v_{LF}$	$ms^{-1}$	rychlost posuvu Laidenfrostopvy hranice
$x, y, z$	$m$	souřadnice v kartézské soustavě souřadnic
$x$	–	vstupní parametry
$X$	$m^2KW^{-1}$	matice koeficientů citlivosti
$y$	–	výstupní hodnota
$y$	$K$	vektor změřených teplot
$\alpha, W_0, W_1, W_2$	–	regularizační parametry
$\rho$	$kgm^{-3}$	hustota
$\vartheta$	–	prahová hodnota
$\sigma$	–	rozptyl normálního rozdělení
$\Phi$	$m^2KW^{-1}$	citlivostní koeficienty

# Seznam obrázků

3.1	Příklad pozvolně se měnící okrajové podmínky (součinitele přestupu tepla (Heat Transfer Coefficient)) se dvěma extrémními změnami . . .	21
3.2	Příklad testovacích okrajových podmínek . . . . .	22
3.3	Záznamy teplot pro testovací okrajové podmínky . . . . .	23
3.4	Srovnání výsledků sekvenční Beckovy metody . . . . .	24
3.5	Srovnání výsledků sekvenční Beckovy metody . . . . .	24
3.6	Výsledky celo-doménové metody bez regularizace pro dvě úrovně šumu ve vstupních datech . . . . .	25
3.7	Srovnání řešení pro různou míru regularizace (podle hodnoty koeficientu $\alpha$ ) s přesným řešením a řešením bez regularizace . . . . .	25
3.8	Zkreslení okrajové podmínky vlivem nezohlednění změny materiálových vlastností během výpočtu . . . . .	26
3.9	Zkreslení teplot simulovaných na základě zkreslené okrajové podmínky	26
3.10	Výsledky první fáze výpočtu s vyznačeným intervalem pro druhou fázi výpočtu . . . . .	28
3.11	Srovnání řešení obou fází se zadáním . . . . .	28
3.12	Ukázka řešení sub-doménovou metodou do kroku $M - 1$ ( $M = 120$ ) a navazujícího dílčího řešení pro časové kroky $M$ až $M + Nf - 1$ . . .	30
3.13	Ukázka řešení s regularizací prvního řádu do kroku $M - 1$ a navazujícího dílčího řešení $M + Nf - 1$ . . . . .	30
3.14	Ukázka řešení s regularizací prvního řádu a dílčích řešení. . . . .	31
3.15	Součet koeficientů, které ovlivňují výpočet hodnot $Q_{M+i}$ v rámci jedné sub-domény. Respektive citlivost $Q_{M+i}$ na vstupní data. . . . .	32
3.16	Prvních pět hodnot z každé subdomény . . . . .	32
3.17	Řešení s rozšířenou regularizací na jednu hodnotu z předchozí subdomény. . . . .	33
3.18	Porovnání řešení sub-doménové metody s dalšími sekvenčními metodami. . . . .	34
3.19	První derivace přehlazeného řešení sub-doménové a Beckovy metody. Čerchovanou čarou jsou označeny skutečné polohy skokové změny v zadání. . . . .	36

3.20	První derivace řešení sub-doménové a Beckovy metody. Čerchovanou čarou jsou označeny skutečné polohy skokové změny v zadání. . . . .	36
3.21	Řešení testovací úlohy obdélníkového tvaru pomocí metody tolerance skoku. . . . .	37
3.22	Druhá derivace přehlazeného řešení testovací úlohy. . . . .	38
3.23	Hodnoty reziduí v blízkosti optima. Kolečky označují nalezená lokální minima. Křížky značí skutečné polohy zlomů. . . . .	39
3.24	Hodnoty regularizačních penalizací v blízkosti optima. Kolečky označují nalezená lokální minima. Křížky značí skutečné polohy zlomů. . . . .	39
3.25	Posouvání bodů "zlomu" v průběhu optimalizace. . . . .	40
3.26	Součty diagonál v dvourozměrné matici THETA . . . . .	43
3.27	Srovnání vypočtených teplot pro jednorozměrný a dvourozměrný model (nerezová deska) . . . . .	44
3.28	Teplotní rozdíl pro jednorozměrný a dvourozměrný model pro austenitickou ocel ( $T_{1D} - T_{2D}$ ) . . . . .	45
3.29	Srovnání výsledků inverzní úlohy pro jednorozměrný a dvourozměrný model (austenitická deska) . . . . .	45
3.30	Srovnání vypočtených teplot pro jednorozměrný a dvourozměrný model (hliníková deska) . . . . .	46
3.31	Srovnání výsledků inverzní úlohy pro jednorozměrný a dvourozměrný model (hliníková deska) . . . . .	46
4.1	Průřez chlazeným vzorkem . . . . .	47
4.2	Okrajové podmínky testovací úlohy . . . . .	48
4.3	Teplotní průběhy v místech teplotních senzorů . . . . .	49
4.4	Typický průběh hustoty tepelného toku v závislosti na teplotě. Vlevo pro dopadovou oblast a vpravo pro zbytek chlazeného povrchu . . . . .	49
4.5	Typické rozložení teplot uvnitř vzorku 1,5 s (vlevo) a 6,5 s (vpravo) po začátku experimentu. Vzorek je chlazený vodním paprskem, který dopadá na pravou stranu 70 mm od horní hrany, ostatní strany jsou izolovány. . . . .	50
4.6	Rozvržení povrchu do kontrolních oblastí . . . . .	51
4.7	Použití konstantního (vlevo) a lineárního (vpravo) průběhu okrajové podmínky mezi vyhodnocenými hodnotami $Q_i$ pro termočlánky v pozicích $y_i$ . . . . .	51
4.8	Srovnání podpovrchových teplot - zadaných (plné čáry) s vypočtenými (čárkované) . . . . .	52
4.9	Srovnání základního řešení (čárkované křivky) se zadáním (plné křivky) . . . . .	52
4.10	Princip posouvání hranic . . . . .	53

4.11 Fotografie stékající vody, která díky nerovnoměrnému rozložení teplot a LF efektu, smáčí pouze horní část hliníkové desky . . . . .	54
4.12 Rozcházející se změřené a vypočtené teploty pro čidlo nejbliž LF hranici v důsledku nereálně vysoké rychlosti posuvu LF hranice. Čárkované křivky jsou "změřené" teploty. Plné křivky jsou vypočtené inverzní úlohou. . . . .	55
4.13 Srovnání řešení pomocí metody posouvání hranic (čárkované křivky) se zadáním (plné křivky) . . . . .	56
4.14 Schéma parametrizace . . . . .	57
4.15 Počáteční stav simplexu: Černé čárkované křivky jsou správné řešení. Šedé křivky jsou počáteční stav simplexu . . . . .	58
4.16 Na hlavní ose je průběh reziduí během iterací výpočtu (tučné černé body). Na vedlejší (pravé) ose je vývoj velikosti simplexu (šedá tečkovaná křivka) . . . . .	58
4.17 Postupný vývoj řešení v iteraci 500, 1000, 2000, 4000: Černé čárkované křivky jsou správné řešení. Šedé křivky jsou nalezené řešení. . . . .	59
4.18 Přidání pasivních zón mezi kontrolní oblasti . . . . .	60
4.19 Srovnání průběžného řešení po 30 iteracích (čárkované křivky) se zadáním (plné křivky) . . . . .	61
4.20 Postupné změny řešení v průběhu 30 iterací . . . . .	62
4.21 Srovnání výsledků vyvinutých metod na testovací úloze (dopadová oblast) . . . . .	63
4.22 Srovnání výsledků vyvinutých metod na testovací úloze (mimo dopadovou oblast) . . . . .	64