Univerzita Palackého v Olomouci
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Klára Szkanderová

Matematické úlohy s dějepisnou tematikou na 2. stupni ZŠ

Olomouc 2024 doc. Mgr. Karel Pastor, Ph.D.

Bibliografický záznam

Autor: Bc. Klára Szkanderová

Pedagogická fakulta, Univerzita Palackého Olomouc

Katedra matematiky

Název práce: Matematické úlohy s dějepisnou tematikou na 2. stupni ZŠ

Studijní program: Učitelství matematiky pro 2. stupeň základních škol

Vedoucí práce: doc. Mgr. Karel Pastor, Ph.D.

Rok: 2024

Počet stran: 90

Bibliographic record

Author: Bc. Klára Szkanderová

Faculty of Education, Palacky University Olomouc

Department of Mathematics

Title of Thesis: Mathematical tasks with a historical theme at the 2nd grade of elementary school

Degree programme: Specialization in Pedagogy

Supervisor: doc. Mgr. Karel Pastor, Ph.D.

Year: 2024

Number of Pages: 90

Anotace

Diplomová práce se zaměřuje na propojení předmětů matematiky a dějepisu. Práce obsahuje matematické úlohy, v nichž se vyskytuje téma z oblasti dějepisu nebo z historie matematiky. V rámci práce jsou uvedeny úlohy, které můžeme najít v některých matematických učebnicích a dále také úlohy cíleně vytvořené pro účely této práce. Řešení těchto úloh žáky druhého stupně základní školy je součástí výzkumu, který srovnává jejich výsledky v jednotlivých ročnících, konkrétně z každého ročníku v rámci dvou tříd, jedné třídy studijní a jedné běžné. Výzkum si klade za cíl potvrdit hypotézu, která říká, že žáci tříd studijních dosáhnou při řešení matematických úloh výrazně lepších výsledků. V práci jsou také některá žákovská řešení podrobněji zkoumána za účelem ukázání rozdílných postupů a nápadů při řešení matematických úloh.

Klíčová slova: matematika, dějepis, matematické úlohy, Kruskal-Wallisův test, historie matematiky, úlohy s dějepisnou tematikou

Abstract

The diploma thesis focuses on connecting the subjects of mathematics and history. The thesis contains mathematical problems in which a topic from the field of history or the history of mathematics occurs. The work includes problems that can be found in some mathematics textbooks, as well as problems created for the purposes of this work. Solving these tasks by pupils of the second grade of primary school is part of the research, which compares their results in individual grades, specifically from each grade in two classes, one study class and one regular class. The research aims to confirm the hypothesis, which says that students in study classes achieve significantly better results when solving mathematical problems. In the thesis, some student solutions are also examined in more detail in order to show different procedures and ideas in solving mathematical problems.

Keywords: maths, history, math problems, Kruskal-Wallis test, history of math, tasks with a historical theme

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma „Matematické úlohy s dějepisnou tematikou na 2. stupni ZŠ“ vypracovala samostatně a s použitím uvedené literatury a pramenů.

V Olomouci dne 16.6. 2024 ……………………………..

Podpis autora:

Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala vedoucímu mé práce, doc. Mgr. Karlu Pastorovi, Ph.D., za přínosné rady a cenné připomínky, které mi byly nápomocné při celém procesu tvorby této diplomové práce.

Děkuji také svým kolegům, pedagogickému sboru Základní školy v Bystřici nad Olší, za vytrvalou podporu a pomoc při organizaci výzkumné části práce.

Obsah

Úvod

Diplomová práce Matematické úlohy s dějepisnou tematikou na 2. stupni ZŠ se zabývá problematikou spojení dvou zdánlivě odlišných předmětů – matematiky a dějepisu. Teoretická část práce je věnována popisu obou předmětů, jak jsou uvedeny v Rámcovém vzdělávacím programu pro základní školy, jaké učivo je v rámci těchto předmětů žákům druhého stupně prezentováno a co by po absolvování těchto předmětů měli žáci vědět a ovládat. Dále tato práce pojednává o mezipředmětových vztazích matematiky a dějepisu, popisuje, jak je možno jeden předmět zakomponovat do druhého v rámci běžné výuky.

Následně je provedena analýza nejpoužívanějších didaktických pomůcek při výuce matematiky, tedy učebnic. Z vybraných učebnic, konkrétně se jedná o učebnice matematiky pro 6. až 9. ročník od nakladatelství Prometheus – Odvárko – Kadleček a pracovních sešitů Matematika s nadhledem od nakladatelství Fraus, jsou vybrány úlohy, které obsahují nějaký historický kontext nebo odkazují na historickou událost či osobnost.

V další části je pak stručně popsána historie některých matematických jevů, jenž se následně objevují v zadání úloh. Vytvořené úlohy s dějepisnou tematikou jsou pak obsahem části praktické. Celkem bylo vytvořeno 12 úloh, tři pro každý ročník druhého stupně, z nichž každá obsahuje jiné dějepisné téma a učivo příslušné jednotlivým ročníkům. U každé úlohy je rovněž uvedeno řešení a bodování. Tyto úlohy pak byly řešeny žáky Základní školy v Bystřici nad Olší a jejich výsledky jsou v rámci výzkumné části práce porovnávány metodou Kruskal-Wallisova testu. Cílem výzkumné části je srovnání vždy dvou tříd stejného ročníku, z nichž jedna je třída studijní neboli výběrová a druhá je třída běžná. V rámci srovnávání je zkoumána platnost hypotézy, která říká, že žáci tříd studijních dosahují lepších výsledků než žáci ze tříd běžných. Součástí práce jsou rovněž ukázky některých zajímavých žákovských řešení.

1 Matematika v RVP

V rámcovém vzdělávacím programu pro základní školy spadá vyučovací předmět matematika do vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace. V základním vzdělávání je tato vzdělávací oblast založena především na aktivních činnostech, jež jsou pro práci s matematickými objekty typické. Oblast Matematika a její aplikace poskytuje dovednosti a vědomosti potřebné pro užití matematiky v reálných situacích, umožňuje získávat matematickou gramotnost. Vzdělávání klade důraz na osvojování některých pojmů, algoritmů, terminologie, symboliky a způsobů jejich užití. Vzdělávací obsah vzdělávacího oboru Matematika a její aplikace je rozdělen na čtyři tematické okruhy – Čísla a početní operace / Číslo a proměnná, Závislosti, vztahy a práce s daty, Geometrie v rovině a v prostoru, Nestandardní aplikační úlohy a problémy.

1.1 Čísla a početní operace / Číslo a proměnná

Tematický okruh Čísla a početní operace je název okruhu pro učivo prvního stupně, na nějž na druhém stupni navazuje okruh Číslo a proměnná. Je zaměřen na osvojování aritmetických operací ve třech složkách: dovednost provádět operaci, algoritmické porozumění čili proč je operace prováděna předloženým postupem a významové porozumění, tzn. schopnost operaci propojit s reálnou situací. Žáci se učí získávat číselné údaje měřením, odhadováním, výpočtem a zaokrouhlováním. Jsou seznamováni s pojmem proměnná, kterou se učí používat při matematizaci reálných situací.

Učivo druhostupňového okruhu Číslo a proměnná zahrnuje: dělitelnost přirozených čísel, kde patří znalosti o prvočíslech, čísla složená, pojmy násobek a dělitel, nejmenší společný násobek a největší společný dělitel a kritéria dělitelnosti. Dále se žáci učí o celých číslech, co jsou čísla navzájem opačná, znázornění na číselné ose, čísla desetinná a zlomky, rozvinutý zápis čísla v desítkové soustavě, převrácené a smíšené číslo, složený zlomek. Do tohoto okruhu patří také učivo o poměru, měřítko, přímá a nepřímá úměra, trojčlenka, procenta a promile, jejich základ, procentová část, počet procent a jednoduché úrokování, dále druhá mocnina a odmocnina, číselné výrazy, proměnná, výrazy s proměnnými, mnohočleny, rovnice lineární a soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých.

Od žáka se očekává, že bude schopen provádět početní operace v oboru celých a racionálních čísel, užívat ve výpočtech druhou mocninu a odmocninu, zaokrouhlovat a provádět odhady s danou přesností, účelně využívat kalkulátor, modelovat a řešit situace s využitím dělitelnosti v oboru přirozených čísel, užívat různé způsoby kvantitativního vyjádření vztahu celek-část (přirozeným číslem, poměrem, zlomkem, desetinným číslem, procentem), řešit modelováním a výpočtem situace vyjádřené poměrem, pracovat s měřítky map a plánů, řešit aplikační úlohy na procenta (i v případech, kdy procentová část je větší než celek), matematizovat jednoduché reálné situace s využitím proměnných, určit hodnotu výrazu, sčítat a násobit mnohočleny, provádět rozklad mnohočlenu na součin pomocí vzorců a vytýkáním, formulovat a řešit reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav, analyzovat a řešit jednoduché problémy, modelovat konkrétní situace a využívat v nich matematický aparát v oboru celých a racionálních čísel.

1.2 Závislosti, vztahy a práce s daty

V tematickém okruhu Závislosti, vztahy a práce s daty se žáci učí rozpoznávat určité typy změn a závislostí, jež jsou projevem běžných jevů reálného světa. Žáci jsou seznamováni s jejich reprezentacemi, uvědomují si změny a závislosti známých jevů, snaží se dojít k pochopení, že změnou může být růst i pokles nebo že změna může mít i nulovou hodnotu. Změny a závislosti jsou analyzovány z tabulek, diagramů a grafů, některé jednoduché případy jsou konstruovány a vyjadřovány matematickým předpisem nebo jsou podle možností modelovány za pomoci vhodného počítačového softwaru, případně grafických kalkulátorů. Zkoumání těchto závislostí směřuje k pochopení pojmu funkce.

Obsahem učiva jsou závislosti a data – příklady závislostí z praktického života a jejich vlastnosti, nákresy, schémata, diagramy, grafy, tabulky, pojmy jako četnost znaku a aritmetický průměr, dále zde patří funkce, pravoúhlá soustava souřadnic, přímá úměrnost, nepřímá úměrnost a lineární funkce.

Žáci by měli umět vyhledávat, vyhodnotit a zpracovat data, porovnávat soubory dat, určit vztah přímé nebo nepřímé úměrnosti vyjádřit funkční vztah tabulkou, rovnicí a grafem a matematizovat jednoduché reálné situace s využitím funkčních vztahů.

1.3 Geometrie v rovině a v prostoru

Třetím tematickým okruhem je Geometrie v rovině a v prostoru. V tomto okruhu žáci určují a znázorňují geometrické útvary, dále geometricky modelují reálné situace, hledají podobnosti a odlišnosti útvarů vyskytujících se všude kolem nás. V rovině, případně v prostoru si uvědomují vzájemné polohy objektů. Učí se porovnávat, odhadovat, měřit délku, velikost úhlu, počítat obvod, obsah, povrch a objem. Žáci si zdokonalují svůj grafický projev. Zkoumání tvarů a prostoru vede k řešení polohových a metrických úloh a problémů, které vycházejí z běžných životních situací.

Do učiva geometrie patří učivo o rovinných útvarech jako jsou přímka, polopřímka, úsečka, kružnice, kruh, úhel, trojúhelník, čtyřúhelníky (lichoběžník a rovnoběžník) a pravidelné mnohoúhelníky. Určuje se vzájemná poloha přímek v rovině, typy úhlů, shodnost a podobnost (věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků), metrické vlastnosti v rovině, tzn. druhy úhlů a vzdálenost bodu od přímky. Žáci se setkají s pojmy jako jsou trojúhelníková nerovnost a Pythagorova věta. Učí se nejen o rovinných, ale také o prostorových útvarech – kvádr, krychle, rotační válec, jehlan, rotační kužel, koule a kolmý hranol. Součástí jsou i konstrukční úlohy, kam patří sestrojení množiny všech bodů dané vlastnosti, tzn. osa úsečky, osa úhlu a Thaletova kružnice, dále také osová a středová souměrnost.

Od žáka se očekává zdůvodnění a využívání polohových a metrických vlastností základních rovinných útvarů při řešení úloh a jednoduchých praktických problémů, využívání potřebné matematické symboliky, charakterizace a třídění základních rovinných útvarů, určení velikosti úhlu měřením a výpočtem, odhadnutí a vypočtení obsahu a obvodu základních rovinných útvarů. Žák by měl využívat pojem množina všech bodů dané vlastnosti k charakteristice útvaru a k řešení polohových a nepolohových konstrukčních úloh, umět načrtnout a sestrojit rovinné útvary, užívat k argumentaci a při výpočtech věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků, umět načrtnout a sestrojit obraz rovinného útvaru ve středové a osové souměrnosti a osově a středově souměrný útvar určit. Dále by měl také být schopen určit a charakterizovat základní prostorové útvary (tělesa), analyzovat jejich vlastnosti, odhadnout a vypočítat jejich objem a povrch a načrtnout a sestrojit jejich síť a obraz v rovině. Mezi výstupy patří i schopnost analyzovat a řešit aplikační geometrické úlohy s využitím osvojeného matematického aparátu.

1.4 Nestandardní aplikační úlohy a problémy

Nestandardní aplikační úlohy a problémy jsou důležitou součástí matematického vzdělávání. Řešení takovýchto úloh může být do jisté míry nezávislé na znalostech a dovednostech školské matematiky, ale je při něm potřeba uplatnit logické myšlení. Tyto úlohy by měly prolínat všemi tematickými okruhy v průběhu celého základního vzdělávání. Žáci se učí řešit úlohy z běžného života, problémové situace, problém pochopit a analyzovat, utřídit údaje a podmínky, provádět náčrty daných situací, řešit optimalizační úlohy. Logické úlohy, jejichž obtížnost je závislá na míře rozumové vyspělosti žáka, posilují vědomí žáka ve vlastní schopnosti logického uvažování a mohou podchytit i ty žáky, kteří jsou v matematice méně úspěšní.

Do učiva tohoto celku patří číselné a logické řady, číselné a obrázkové analogie a také logické a netradiční geometrické úlohy.

Žáci by měli při řešení těchto úloh a problémů užívat logickou úvahu a kombinační úsudek a nalézat různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací, řešit úlohy na prostorovou představivost, aplikovat a kombinovat poznatky a dovednosti z různých tematických a vzdělávacích oblastí.

1.5 Cílové zaměření vzdělávací oblasti

Vzdělávání v dané vzdělávací oblasti směřuje k utváření a rozvíjení klíčových kompetencí tím, že vede žáka k:

- využívání matematických poznatků a dovedností v praktických činnostech – odhady, měření a porovnávání velikostí a vzdáleností, orientace
- rozvíjení paměti žáků prostřednictvím numerických výpočtů a osvojování si nezbytných matematických vzorců a algoritmů
- rozvíjení kombinatorického a logického myšlení, ke kritickému usuzování a srozumitelné a věcné argumentaci prostřednictvím řešení matematických problémů
- rozvíjení abstraktního a exaktního myšlení osvojováním si a využíváním základních matematických pojmů a vztahů, k poznávání jejich charakteristických vlastností a na základě těchto vlastností k určování a zařazování pojmů

- vytváření zásoby matematických nástrojů (početních operací, algoritmů, metod řešení úloh) a k efektivnímu využívání osvojeného matematického aparátu
- vnímání složitosti reálného světa a jeho porozumění; k rozvíjení zkušenosti s matematickým modelováním (matematizací reálných situací), k vyhodnocování matematického modelu a hranic jeho použití; k poznání, že realita je složitější než její matematický model, že daný model může být vhodný pro různorodé situace a jedna situace může být vyjádřena různými modely
- provádění rozboru problému a plánu řešení, odhadování výsledků, volbě správného postupu k vyřešení problému a vyhodnocování správnosti výsledku vzhledem k podmínkám úlohy nebo problému
- přesnému a stručnému vyjadřování užíváním matematického jazyka včetně symboliky, prováděním rozborů a zápisů při řešení úloh a ke zdokonalování grafického projevu
- rozvíjení spolupráce při řešení problémových a aplikovaných úloh vyjadřujících situace z běžného života a následně k využití získaného řešení v praxi; k poznávání možností matematiky a skutečnosti, že k výsledku lze dospět různými způsoby
- rozvíjení důvěry ve vlastní schopnosti a možnosti při řešení úloh, k soustavné sebekontrole při každém kroku postupu řešení, k rozvíjení systematičnosti, vytrvalosti a přesnosti, k vytváření dovednosti vyslovovat hypotézy na základě zkušenosti nebo pokusu a k jejich ověřování nebo vyvracení pomocí protipříkladů

2 Dějepis v RVP

Dějepis v rámcovém vzdělávacím programu pro základní školy spadá do vzdělávací oblasti Člověk a společnost. Tato oblast zahrnuje mimo vzdělávacího oboru Dějepis také obor Výchova k občanství. Žáci získávají znalosti a dovednosti potřebné pro jejich aktivní zapojení do života demokratické společnosti. Cílem vzdělávání je, aby žáci pochopili historické, sociální a kulturně historické aspekty lidského života ve všech jeho odstínech a vzájemných souvislostech. Jsou seznámeni s vývojem společnosti a důležitými společenskými jevy, které ovlivňují každodenní život a formují společenskou atmosféru. Důraz je kladen na podporu kladných občanských postojů, uvědomění si evropské civilizace a kultury a přijetí hodnot, na kterých stojí současná demokratická Evropa, včetně kolektivní obrany.

Tato vzdělávací oblast také dbá na prevenci rasismu, xenofobie a extremismu. Podporuje toleranci, respektování lidských práv, genderovou rovnost a úctu k životnímu prostředí, umění a kultuře. Důležitým prvkem je také rozvoj finanční gramotnosti a schopnost chování v různých situacích, včetně rizikových a mimořádných událostí.

V oblasti Člověk a společnost se u žáků formují dovednosti a postojí, které jsou klíčové pro aktivní využívání znalostí o společnosti a mezilidských vztazích v každodenním životě. Žáci se učí rozpoznávat a analyzovat společenské problémy, hledat informace potřebné k jejich řešení, vyvozovat závěry a aplikovat je v reálných situacích.

2.1 Vzdělávací obor Dějepis

Vzdělávací obor Dějepis se zaměřuje na základní informace o událostech z minulosti lidského jednání. Jeho hlavním cílem je formovat historické povědomí jednotlivců a uchovávat nepřetržitost historické paměti, zejména tím, že přenáší historické zkušenosti. Důraz je kladen zejména na pochopení událostí, činů a jevů, které významně ovlivnily vývoj společnosti a odrážejí se v naší současnosti. Zejména se zaměřuje na události 19. a 20. století, které mají kořeny v mnoha dnešních společenských jevech. Důležité je také propojení s hodnotami evropské kultury. Klíčové je rozvíjet schopnost žáků vnímat čas a místo událostí a získat empatii, což jim umožní lépe porozumět historickým událostem. Žáci jsou prováděni k poznání, že historie není pouze minulostí nebo shromážděním faktů a definitivních závěrů, ale je to proces položení otázek, kterými současnost zkoumá svou vlastní podstatu a možnou budoucnost prostřednictvím minulosti. Obecné historické problémy jsou upřesňovány skrze začlenění regionálních a místních dějin.

2.2 Cílové zaměření vzdělávací oblasti

Vzdělávání v dané vzdělávací oblasti směřuje k utváření a rozvíjení klíčových kompetencí tím, že vede žáka k:

- rozvíjení zájmu o současnost a minulost vlastního národa i jiných kulturních společenství, utváření a upevňování vědomí přináležitosti k evropské kultuře

- odhalování kořenů společenských jevů, dějů a změn, promýšlení jejich souvislostí a vzájemné podmíněnosti v reálném a historickém čase
- hledání paralel mezi minulými a současnými událostmi a jejich porovnávání s obdobnými či odlišnými jevy a procesy v evropském a celosvětovém měřítku
- utváření pozitivního hodnotového systému opřeného o historickou zkušenost
- rozlišování mýtů a skutečnosti, rozpoznávání projevů a příčin subjektivního výběru a hodnocení faktů i ke snaze o objektivní posouzení společenských jevů současnosti i minulosti
- vytváření schopnosti využívat jako zdroj informací různorodé verbální i neverbální texty společenského a společenskovědního charakteru
- rozvíjení orientace v mnohotvárnosti historických, sociokulturních, etických, politických, právních a ekonomických faktů tvořících rámec každodenního života; k poznávání a posuzování každodenních situací a událostí ve vzájemných vazbách a širších souvislostech včetně souvislostí mezinárodních a globálních
- úctě k vlastnímu národu i k jiným národům a etnikům; k rozvíjení respektu ke kulturním či jiným odlišnostem (zvláštnostem) lidí, skupin i různých společenství
- uplatňování aktivního přístupu k ochraně zdraví, života, majetku při běžných, rizikových i mimořádných událostech i poznávání otázek obrany státu
- získávání orientace v aktuálním dění v ČR, EU a ve světě, k rozvíjení zájmu o veřejné záležitosti
- utváření vědomí vlastní identity a identity druhých lidí, k rozvíjení realistického sebepoznávání a sebehodnocení, k akceptování vlastní osobnosti i osobnosti druhých lidí
- orientaci v problematice peněz a cen a k odpovědnému spravování osobního (rodinného) rozpočtu s ohledem na měnící se životní situaci
- utváření pozitivních vztahů k opačnému pohlaví v prostředí školy i mimo školu, k rozpoznávání stereotypního nahlížení na postavení muže a ženy v rodině, v zaměstnání i v politickém životě, k vnímání předsudků v nazírání na roli žen ve společnosti
- rozpoznávání názorů a postojů ohrožujících lidskou důstojnost nebo odporujících základním principům demokratického soužití; ke zvyšování odolnosti vůči myšlenkové manipulaci

- uplatňování vhodných prostředků komunikace k vyjadřování vlastních myšlenek, citů, názorů a postojů, k zaujímání a obhajování vlastních postojů a k přiměřenému obhajování svých práv

2.3 Vzdělávací obsah

Vzdělávací obsah vzdělávacího oboru Dějepis pro 2.stupeň základních škol se dělí do 8 tematických okruhů.

Prvním z nich je Člověk v dějinách. Do učiva tohoto okruhu spadá význam zkoumání dějin, získávání informací o dějinách; historické prameny a historický čas a prostor. Očekávaným výstupem žáka je například uvedení konkrétních příkladů důležitosti a potřebnosti dějepisných poznatků, uvedení příkladů zdrojů informací o minulosti, pojmenování institucí, které tyto zdroje shromažďují, orientace na časové ose a historické mapě a řazení historických epoch v chronologickém sledu.

Druhým okruhem jsou Počátky lidské společnosti. Učivem je pak člověk a lidská společnost v pravěku. Žáci by měli být schopni charakterizovat život pravěkých sběračů a lovců, také jejich materiální a duchovní kulturu, objasnit význam zemědělství, dobytkářství a zpracování kovů pro lidskou společnost.

Nejstarší civilizace. Kořeny evropské kultury – název okruhu třetího. Žáci se učí o nejstarších starověkých civilizacích a jejich kulturním odkazu, o antickém Řecku a Římu, střední Evropě a jejích stycích s antickým Středomořím. Očekávanými výstupy pak jsou rozpoznání souvislostí mezi přírodními podmínkami a vznikem prvních velkých zemědělských civilizací, uvedení nejvýznamnějších typů památek, které se staly součástí světového kulturního dědictví, demonstrace přínosu antické kultury a zrodu křesťanství na konkrétních příkladech, porovnání forem vlády a postavení společenských skupin v jednotlivých státech a vysvětlení podstaty antické demokracie.

Čtvrtý okruh s názvem Křesťanství a středověká Evropa má žákům předat informace o novém etnickém obrazu Evropy, o utváření států ve východoevropském a západoevropském kulturním okruhu a jejich specifickém vývoji, dále o islámu a islámských říších ovlivňujících Evropu. Do tohoto okruhu spadá také učivo o Velké Moravě a českém státě, jejich vnitřním vývoji a postavení v Evropě, pojmy jako křesťanství, papežství, císařství a křížové výpravy. Pojednává o struktuře středověké společnosti, funkce jejich jednotlivých vrstev, její kultuře, vzdělanosti a také o románském a gotickém umění. Žák by měl umět popsat podstatnou změnu evropské situace, která nastala v důsledku příchodu nových etnik, christianizace a vzniku státu, objasnit situaci Velkomoravské říše a vnitřní vývoj českého státu a postavení státních útvarů v evropských souvislostech, vymezit úlohu křesťanství a víry v životě středověkého člověka, konflikty mezi světskou a církevní mocí, ilustrovat postavení jednotlivých vrstev středověké společnosti a uvést příklady románské a gotické kultury.

Pátým okruhem jsou Objevy a dobývání. Počátky nové doby. Žákům jsou přiblíženy pojmy renesance, humanismus, husitství, reformace a jejich šíření Evropou. Dozvídají se o zámořských objevech a počátcích dobývání světa, českém státě a velmocích v 15. – 18. století, barokní kultuře a osvícenství. Měli by umět vysvětlit znovuobjevení antického ideálu člověka, nové myšlenky žádající reformu církve, vymezit význam husitské tradice pro český politický a kulturní život, popsat průběh zámořských objevů, jejich příčiny a důsledky, objasnit postavení českého státu v podmínkách Evropy a jeho postavení uvnitř habsburské monarchie, objasnit příčiny a důsledky vzniku třicetileté války a posoudit důsledky války, rozpoznat základní znaky jednotlivých kulturních stylů a uvést příklady významných kulturních památek.

Šestý okruh nese název Modernizace společnosti. Patří do něj učivo o Velké francouzské revoluci a napoleonském období, jejím vlivu na Evropu a svět. Dále se žáci učí o vzniku USA, industrializaci a jejich důsledcích pro společnost, o národních hnutích velkých i malých národů a také o utváření novodobého českého národa. Dalším tématem jsou revoluce 19. století jako prostředek řešení politických, sociálních a národnostních problémů, politické proudy – jmenovitě konzervatismus, liberalismus, demokratismus a socialismus, pojmy ústava, politické strany a občanská práva. Rozebírá se kulturní rozrůzněnost doby, konflikty mezi velmocemi a kolonialismus. Od žáků se očekává, že dokáží vysvětlit podstatné ekonomické, sociální, politické a kulturní změny ve vybraných zemích a u nás, které charakterizují modernizaci společnosti, objasnění souvislosti mezi událostmi Francouzské revoluce a napoleonských válek a rozbití starých společenských struktur v Evropě, porovnání jednotlivých fází utváření novodobého českého národa v souvislosti s národními hnutími vybraných evropských národů, vysvětlení rozdílného tempa modernizace a prohloubení nerovnoměrnosti vývoje jednotlivých částí Evropy a světa včetně důsledků, ke kterým tato nerovnoměrnost vedla a také že charakterizují soupeření mezi velmocemi a vymezí význam kolonií.

Předposlední okruh – Moderní doba. Spadá do něj první světová válka spolu s jejími politickými, sociálními i kulturními důsledky, nové politické uspořádání Evropy a úloha USA ve světě, vznik Československa, jeho hospodářsko-politický vývoj, sociální a národnostní problémy. Žáci se dále učí o mezinárodněpolitické a hospodářské situaci ve 20. a 30. letech, o totalitních systémech jako jsou komunismus, fašismus a nacismus a jejich důsledky pro Československo i svět, o druhé světové válce, holokaustu, situaci v našich zemích, domácím i zahraničním odboji, o politických, mocenských a ekonomických důsledcích války. Žák by měl umět demonstrovat na příkladech zneužití techniky ve světových válkách a jeho důsledky, rozpoznat klady a nedostatky demokratických systémů, charakterizovat jednotlivé totální systémy, příčiny jejich nastolení v širších ekonomických a politických souvislostech a důsledky jejich existence pro svět, rozpoznat destruktivní sílu totalitarismu a vypjatého nacionalismu, na příkladech vyložit antisemitismus, rasismus a jejich nepřijatelnost z hlediska lidských práv, zhodnotit postavení Československa v evropských souvislostech a jeho vnitřní sociální, politické, hospodářské a kulturní prostředí.

Poslední okruh s názvem Rozdělený a integrující se svět zahrnuje učivo o studené válce, rozdělení světa do vojenských bloků reprezentovaných supervelmocemi, soupeření hospodářské, politické, sociální a ideologické. Řeší se vnitřní situace v zemích východního bloku, která je na vybraných příkladech srovnávána s charakteristikou západních zemí, vývoj Československa od roku 1945 do roku 1989, vznik České republiky, rozpad koloniálního systému, mimoevropský svět, problémy současnosti, věda, technika, vzdělání, zábava a sport. Od žáků se očekává, že vysvětlí příčiny a důsledky vzniku bipolárního světa, uvedou příklady střetávání obou bloků, vysvětlí a na příkladech doloží mocenské a politické důvody euroatlantické hospodářské a vojenské spolupráce, posoudí postavení rozvojových zemí a prokáže základní orientaci v problémech současného světa.

3 Mezipředmětové vztahy matematiky a dějepisu

V pedagogickém kontextu se mezipředmětové vztahy označují jako "vzájemné propojení mezi jednotlivými učebními obory, pochopení příčin a vztahů, které přesahují rámec jednotlivých oborů, a prostředky mezipředmětové integrace." Tyto vztahy jsou vyjádřeny v osnovách jednotlivých předmětů, které obsahují tzv. mezipředmětová témata. Trendem v moderním vzdělávání je řešení těchto vztahů na úrovni školního osnovy jako celku. Klíčovým cílem mezipředmětových vztahů je propojení s předchozími znalostmi žáků, které získali v jiných vyučovacích oborech, a odstranění "izolace jednotlivých předmětů". Tato izolace se projevuje tím, že žáci nedokážou aplikovat znalosti získané v jednom předmětu na jiné a nerozumí vztahům mezi různými učebními obory.

Zavádění interdisciplinárních vztahů do výuky má za následek uspořádání a systemování znalostí v jednotlivých předmětech. To zahrnuje jak obsahovou, tak časovou koordinaci. Obsahová koordinace vychází z propojení obsahu učiva a využívání těchto spojitostí k posílení vědomostí a dovedností žáků. Časová koordinace se týká synchronizace vyučování obsahu učiva napříč různými předměty.

Pro účinné využití mezipředmětových vztahů je důležité, aby základní informace v jednotlivých učebních oborech byly prezentovány buď současně nebo v krátkém časovém rámci, aby se propojily s podobnými tématy v jiných oborech. Současný vzdělávací systém klade důraz na propojení učiva různých předmětů za účelem vytvoření komplexního vzdělání.

Pro studenty mohou mezipředmětové vztahy sloužit jako zdroj motivace během výuky humanitních i přírodovědných předmětů a zároveň představují důležitý prvek pro výchovu žáků. Interdisciplinární přístup je zohledněn již při tvorbě učebních plánů, které zdůrazňují, že studenti by měli během své školní činnosti vnímat vzájemné souvislosti a jevy. Současné pojetí pedagogického přístupu klade větší důraz na témata mezipředmětových vztahů, a proto je jim věnována významná pozornost ve výuce. Navíc jsou mezipředmětové vztahy reflektovány i v rámcovém vzdělávacím programu pro základní školy, kde jsou stanovena konkrétní témata přesahující jednotlivé obory.

Žáci ZŠ mohou rozvíjet matematickou gramotnost při výuce dějepisu. V první fázi, expoziční, se žáci učí používat čísla pro dataci historických událostí. Seznámí se s různými číselnými systémy, které se používaly v různých historických obdobích a oblastech. Prakticky si procvičí práci s časovými schématy, jako jsou časové přímky a chronologické řady. V druhé fázi, fixační a evaluační, se žáci učí pracovat s čísly a technickými údaji. Učí se sestavovat přehledná schémata historického vývoje, jako jsou grafy, tabulky, diagramy a chronologické systémy. Srovnávají matematické a technické systémy a možnosti technických věd v různých fázích vývoje lidstva a v současnosti.

V mezipředmětových vztazích lze pro rozvoj matematické gramotnosti využít slovních matematických úloh s historickými náměty. Děti si jejich prostřednictvím fixují určité historické situace a chronologické údaje, orientují se v čase, a na druhé straně mohou pochopit vliv přírodních věd a techniky na pokrok lidstva. Zde jsou některé konkrétní příklady úloh, které lze využít:

Výpočet doby pro sklizeň obilí na poli v keltské vesnici.

Stavba egyptských pyramid.

Čas věnovaný cestování na jednotnou vzdálenost a jeho srovnání v různých historických dobách.

Příprava počtu jídel, příborů a nádobí pro velkou hostinu na dvoře Přemyslovců.

Evidence sbírky na stavbu Národního divadla.

Reálná čísla pro analýzu státního rozpočtu za I. republiky s možností komparace se současností.

Tyto úlohy jsou vhodné pro žáky všech věkových kategorií a mohou být zařazeny do výuky dějepisu na různých stupních škol.

4 Úlohy s dějepisnou tematikou v učebnicích matematiky na ZŠ

Největší množství úloh, se kterými se žáci na základní škole setkají, pochází z učebnic, se kterými při výuce pracují. Provedla jsem analýzu učebnic a pracovních sešitů, které se používají při výuce na základní škole, jejíž žáci se zúčastnili výzkumu, kterým se tato práce zabývá. Cílem bylo zjistit, zda se v nich vyskytují úlohy s dějepisnou tématikou a jaké typy těchto úloh v učebnicích lze najít. Všechny učebnice, se kterými jsem pracovala, jsou určené pro druhý stupeň základních škol.

4.1 Odvárko – Kadleček

V této řadě jsem pracovala s učebnicemi pro 6., 7., 8., a 9. ročník, 3. vydání, rok 2017. Každý ročník obsahuje 3 díly. První dvě učebnice z řady pro 6. ročník (*Matematika pro 6. ročník základní školy, 1.díl a Matematika pro 6. ročník základní školy, 2. díl)* obsahují na úvodní stránce historické zajímavosti. V 1. díle najdeme zmínku o Cheopsově pyramidě: „Cheopsova (Chufuova) pyramida je vysoká přibližně 138 metrů (původní výška byla 147 metrů). Půdorys pyramidy je čtvercový o délce strany 230 metrů. Na její stavbu bylo použito asi 2 300 000 kamenných bloků, každý z nich o hmotnosti dvě a půl tuny. Kde vlastně byla tato pyramida postavena a ve které zemi ji najdeme?“

Na straně 40 (úloha 16) najdeme úlohu, která odkazuje na německého matematika Carla Friedricha Gausse: „Boží hod velikonoční je vždy v neděli po prvním jarním úplňku a nemá pevné datum. Dá se vypočítat, kdy bude velikonoční neděle třeba za 20 let? Německý matematik K. F. Gauss vymyslel tento postup: Letopočet roku, pro který chceme zjistit, kdy bude velikonoční neděle, budeme postupně dělit těmito čísly: 19, 4 a 7. Zbytky při dělení a jejich pořadí si poznamenáme. První zbytek vynásobíme číslem 19 a k výsledku připočteme číslo 24. Získané číslo vydělíme číslem 30 a dostaneme čtvrtý zbytek, který si také poznamenáme. K číslu 5 přičteme dvakrát druhý zbytek, čtyřikrát třetí zbytek a šestkrát čtvrtý zbytek. Výsledný součet dělíme číslem 7. Získáme tak pátý zbytek, který přičteme ke čtvrtému zbytku. Získaný výsledek přičteme k datu 22. března. A to je datum velikonoční neděle. Gaussovo pravidlo můžeme použít až do roku 2099. Zkus ho prověřit třebas pro tento rok nebo pro rok příští.“

Druhý díl učebnice pro 6. ročník na své úvodní straně zmiňuje slavný sportovní pár, Emila a Danu Zátopkovy. „Emil Zátopek, jeden z největších světových atletů, vytvořil 18 světových rekordů. Na olympijských hrách v Helsinkách v roce 1952 vyhrál běh na 5 kilometrů v čase 14 minut a 6 celých 6 desetin sekundy[1], běh na 10 kilometrů v čase 29 minut 17 sekund a maraton (který běžel vůbec poprvé v životě) za 2 hodiny 23 minut a 3 celé dvě desetiny sekundy.

Dana Zátopková jako první československá oštěpařka překonala vzdálenost 50 metrů. V Helsinkách v roce 1952 získala olympijské zlato výkonem 50 celých 47 setin metru (50 metrů a 47 centimetrů). V červnu 1958 vytvořila v Praze světový rekord o hodnotě 55 celých 73 setin metru a ten pak v témž roce ještě dvakrát překonala: v srpnu ve Stockholmu poslala oštěp do vzdálenosti 56 metrů a 2 centimetry a v září v Bukurešti se její oštěp zabodl ve vzdálenosti 56 celých 67 setin metru (56 metrů a 67 centimetrů).

Dana a Emil Zátopkovi se narodili ve stejný den, 9. září 1922. Číslo 1922 je zajímavé tím, že je dvojnásobkem součinu čísla 31 se sebou samým: 1922 = 2 * 31 * 31. Znáš jiné vynikající české atletky a atlety? Víš něco o jejich rekordech?“

Dále, na straně 14 nalezneme úlohu 11, která odkazuje na historické rekordy v cyklistice: „V roce 1986 byl v závodě žen na 200 metrů nejlepší čas jedenáct celých tři sta osmdesát tři tisícin sekundy.“ A „V roce 1984 ujel za jednu hodinu nejdelší vzdálenost italský závodník. Bylo to padesát jedna celých patnáct tisíc jedno sto třicet pět stotisícin kilometru.“ – Žáci mají za úkol zapsat tyto číselné údaje pomocí číslic.

Zákon o délce jednoho metru z Francie z roku 1790 zmiňuje úloha 8 na straně 37. „Délka jednoho metru byla tehdy určena jako jedna desetimiliontina čtvrtiny zemského poledníku.“

Decimálka – starý typ váhy, je vyobrazena na straně 39. Na decimálce je hmotnost závaží desetkrát menší než hmotnost váženého zboží. Úloha pro žáky je zadaná takto: „Pan Zemánek prodává brambory. K vyvážení prvního pytle brambor potřeboval závaží o hmotnosti 3 kg 20 dkg. Druhý pytel vyvážil závažím o celkové hmotnosti 3 kg 65 dkg. Jaké hmotnosti měly pytle brambor?“

V tomto díle učebnice najdeme také úlohu z učebnice matematiky z roku 1932 – „Stojí-li strava s bytem v Opatii v Itálii denně 35 lir a je-li lira za 1,74 Kč, kolik Kč bude tam státi pobyt čtyřnedělní?“

[1] Jiné zdroje uvádějí oficiální čas 14:06,72

Matematika pro 7. ročník, 1. díl

V učebnici obsahující učivo o zlomcích, celých a racionálních číslech, najdeme na straně 64 úlohu o Čínské dynastii Chan:

„Období čínské *dynastie* (tj. vlády jednoho panovnického rodu) *Chan* trvalo od roku 206 př. n. l. (*před naším letopočtem*) do roku 220 n. l. (*našeho letopočtu*). Toto období je považováno za zlatou éru v čínské historii. V 1. století n. l. byla např. dobudována Velká čínská zeď na severní hranici. Kolik let trvalo období dynastie Chan?“

O stranu dál, na straně 65, je úloha o římském císaři:

„Tiberius Ceasar Augustus, jeden z významných římských císařů a vojevůdců, se narodil 16. 11. 42 př. n. l. v Římě a zemřel 16. 3. 37 n. l. v Misenu. Kolika roků se Tiberius dožil?“

V souhrnných cvičeních pak lze najít tyto úlohy:

Z dávné historie lidstva

„Doba bronzová trvala přibližně od roku 2000 př. n. l. do roku 750 př. n. l. Doba železná, která následovala po době bronzové, trvala přibližně do roku 30 př. n. l. Vypočítej počet let trvání doby bronzové i doby železné.“

„Jakub si prohlíží knihu o dějinách Kanady. Jakub: - Kdybych mohl cestovat v čase, vrátil bych se od roku 2011 o 115 let zpět na Klondike. Právě tehdy tam bylo objeveno zlato a vypukla pověstná zlatá horečka. Petra: - To já bych se raději na stroji času vrátila do Kanady 514 let před rok 2011. Setkala bych se tu s lodí Giovanniho Cabota. Bylo to pět let po objevení Ameriky Kryštofem Kolumbem.“

a) Kdy bylo v údolí Klondike objeveno zlato?
b) Kdy přistál u Kanady Giovanni Caboto?
c) Kdy objevil Kolumbus Ameriku?

A ještě jedna úloha o Kanadě:

„Ani Giovanni Caboto nebyl v Kanadě první. Předkové dnešních Eskymáků-Inuitů, kteří tvoří malou část obyvatelstva dnešní Kanady, se přistěhovali do Severní Ameriky z Asie asi 4000 let před naším letopočtem. Před kolika lety to přibližně bylo?“

2. díl

V druhé knize pro 7. ročník najdeme pouze jednu úlohu s historickým kontextem:

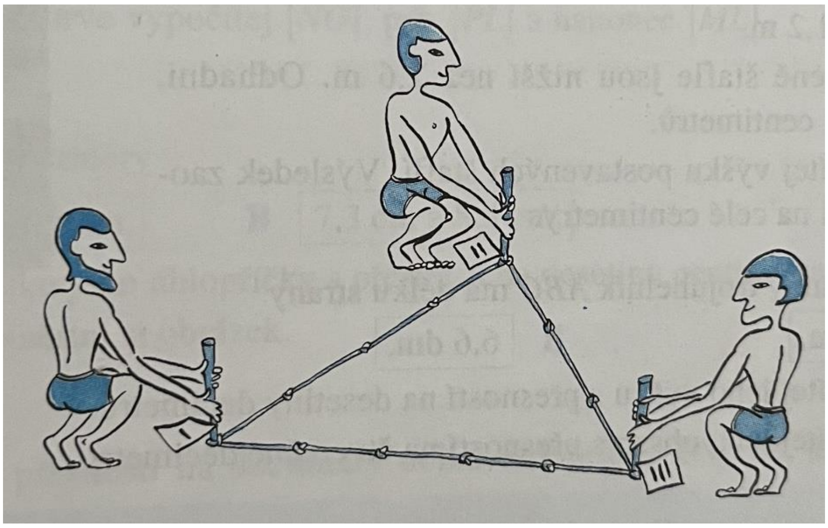
„Na přelomu 19. a 20. století vznikla na trase mezi Tanvaldem a Harrachovem speciální ozubnicová dráha, která je dnes technickou raritou. Lokomotiva si zde musí pomáhat ozubeným kolem, aby překonala stoupání až 58‰. Jaký maximální výškový rozdíl překoná vlak na této trati na jeden kilometr?“ (strana 76)

3. díl

Ve třetím díle najdeme historickou zmínku hned na úvodní straně, konkrétně o chrámu svatého Víta, Karlu IV., Václavu IV. a Petru Parléřovi a také o Kubistické lucerně stojící v Praze a jejím autorovi Emilu Králíčkovi (1877-1930, český secesní a kubistický architekt). V učebnici se žádné další úlohy s historickou tematikou nenacházejí.

Matematika pro 8. ročník, 1. díl

V tomto díle jsem očekávala větší množství úloh s dějepisnou tématikou, jelikož obsahuje učivo Pythagorovy věty. Našla jsem ale pouze dvě, první z nich na straně 27, pojednávající o hapedonaptech, což byli egyptští napínači lan. „Na obrázku vidíš, jak před více než 4000 lety, tedy dávno před Pythagorem, vytyčovali takzvaní haperdonapté pravé úhly pro základy egyptských chrámů. Napínali mezi sebou lana, na kterých byly ve stejných vzdálenostech uvázany uzly. Vyjde napínačům na obrázku pravý úhel? U kterého z napínačů?“



Obrázek 1- Haperdonapté, str.27, Matematika pro 8. ročník 1. díl

Haperdonapté – napínači lan ve starověkém Egyptě. „Před více než 4 000 lety při stavbách egyptských chrámů a pyramid vytyčovali pravý úhel napínači lan. Na provaze uvázali 13 uzlů stejně od sebe vzdálených. První uzel spojili s třináctým a provaz napnuli do trojúhelníku se stranami 3, 4, a 5 dílů. Z obr. je zřejmé, že pravý úhel leží proti nejdelší straně.“

Druhou úlohou je úloha ze staré učebnice z roku 1934 na straně 53. Její zadání zní: „Z místa, kde se kříží dvě silnice, z nichž jedna vede na sever, druhá na západ, vyjdou současně dva chodci; prvý urazí denně k severu 40 km, druhý jde k západu a urazí denně 42 km; jak daleko budou od sebe vzdáleni po třech dnech?“

Ve druhém díle ze sady učebnic pro 8. ročník najedeme úlohy z historických zdrojů, konkrétně z Ahmesova papyru, který je datován přibližně do roku 2000 př.n.l. a druhou z knihy Siddhantaciromani, datovanou do 12. století našeho letopočtu.

„Čtyřem lidem rozděl 700 chlebů. Prvnímu nechť se dostane $\frac{2}{3}$ množství, druhému $\frac{1}{2}$ množství, třetímu $\frac{1}{3}$ množství a čtvrtému $\frac{1}{4}$ množství. Kolik chlebů dostane každý z nich?“

„Z roje včel usedne $\frac{1}{3}$ na květech kadambových, $\frac{1}{5}$ na květech silindhy. Trojnásobný rozdíl obou těchto čísel letěl za květy kutaje. Jedna včela poletovala ve vzduchu, přitahována líbeznou vůní pandamu a jasmínu. Pověz mi počet včel.“

„Nejvyšší bod v Praze jest vrchol rozhledny na Petříně. Výšku jeho nad mořem lze vypočítat z udání, že $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ a $\frac{1}{10}$ této výšky činí dohromady číslo přesahující celou výšku o 19 m. Která jest tato výška?“ – úloha z historické Sbírky úloh z algebry (z roku 1902).

Ve třetím díle lze najít u učiva o Thaletově větě zmínku o jejím autorovi- Thaletovi. Učebnice říká, že Thalés byl matematik, Řek, který žil v letech 624 až 543 před naším letopočtem v řeckém městě Mílétu v nynějším Turecku. Kromě matematiky vynikl i ve filozofii a astronomii. Například na základě vržených stínů určil výšku pyramid a zjistil kulový tvar Země.

Je zde také zmínka o Ludolphu van Ceulenovi, podle kterého je pojmenováno Ludolphovo číslo, neboli číslo π.

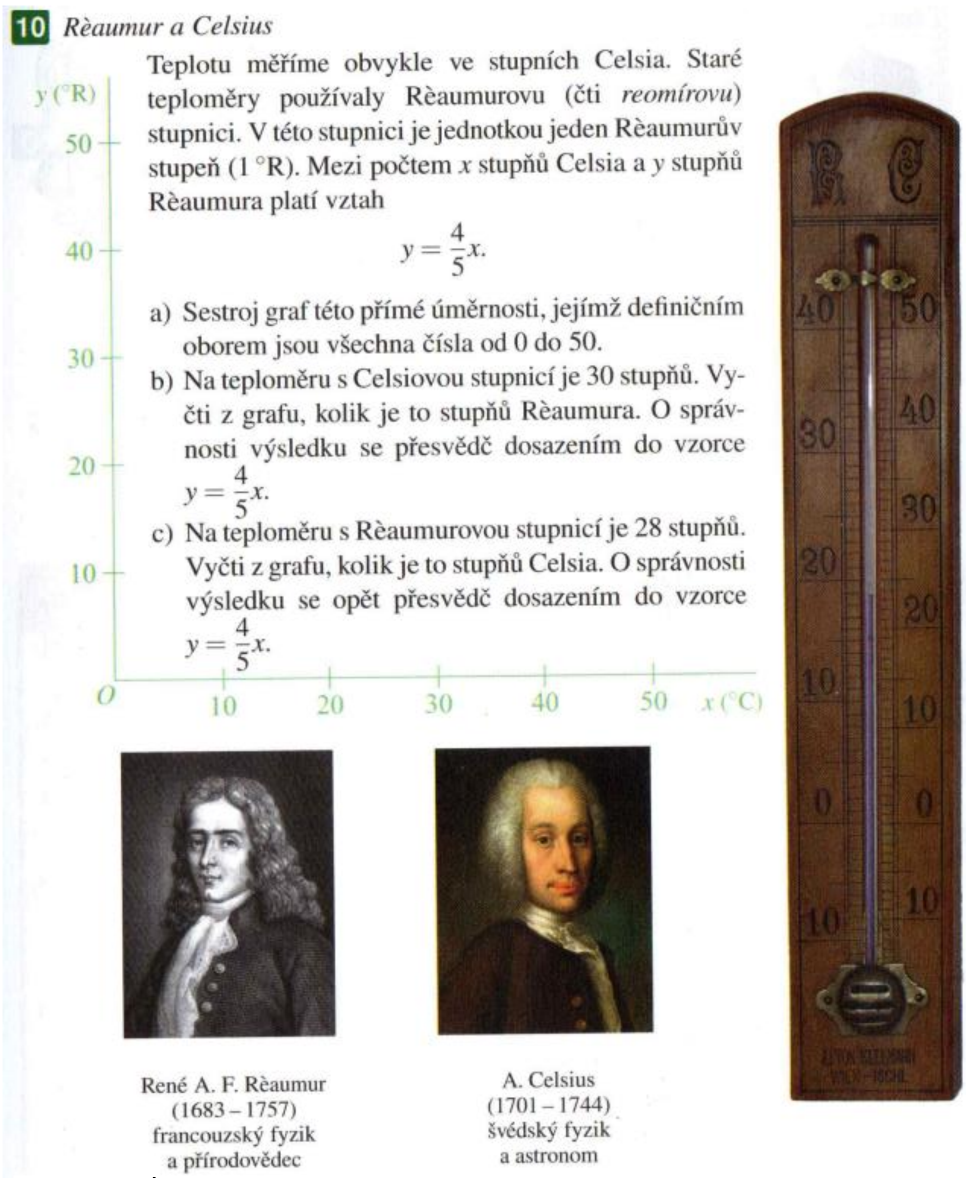
Znovu zde můžeme najít úlohy z historické učebnice, tentokrát z roku 1894. „Ke stromu na pastvě je přivázána kráva provazem 3,5 m dlouhým; jak velká plocha pastvy jest jí vykázána?“ (str.30)

„Šířka studnice i se zdivem má býti 1,8 m; kolik se zaplatí za vykopání studnice 16 m hluboké, platí-li se od m^3 průměrně 80 h?“ (str.42)

9. ročník

1. díl z učebnic pro 9. ročník obsahuje úlohy ze Sbírky úloh z algebry z roku 1902 a jejich znění je následující: „Vinař má dvojí víno. Smíchá-li je v poměru 2:1, jest litr smíšeniny za 78 h; smíchá-li je v poměru 1:2, jest litr za 79 h. Zač jest litr každého druhu? (h značí haléře)“

„Dva povozy vyjely současně ze dvou míst 3 km vzdálených. Kdyby jely proti sobě, setkaly by se za 15 minut; kdyby však jely za sebou, dohonil by jeden druhý za 1 hod. Kolik metrů ujede každý z nich za minutu?“



10 *Rèaumur a Celsius*

Teplotu měříme obvykle ve stupních Celsia. Staré teploměry používaly Rèaumurovu (čti *reomírovu*) stupnici. V této stupnici je jednotkou jeden Rèaumurův stupeň (1 °R). Mezi počtem x stupňů Celsia a y stupňů Rèaumura platí vztah

$$y = \frac{4}{5}x.$$

a) Sestroj graf této přímé úměrnosti, jejímž definičním oborem jsou všechna čísla od 0 do 50.

b) Na teploměru s Celsiovou stupnicí je 30 stupňů. Vyčti z grafu, kolik je to stupňů Rèaumura. O správnosti výsledku se přesvědč dosazením do vzorce $y = \frac{4}{5}x$.

c) Na teploměru s Rèaumurovou stupnicí je 28 stupňů. Vyčti z grafu, kolik je to stupňů Celsia. O správnosti výsledku se opět přesvědč dosazením do vzorce $y = \frac{4}{5}x$.

René A. F. Rèaumur
(1683 – 1757)
francouzský fyzik
a přírodovědec

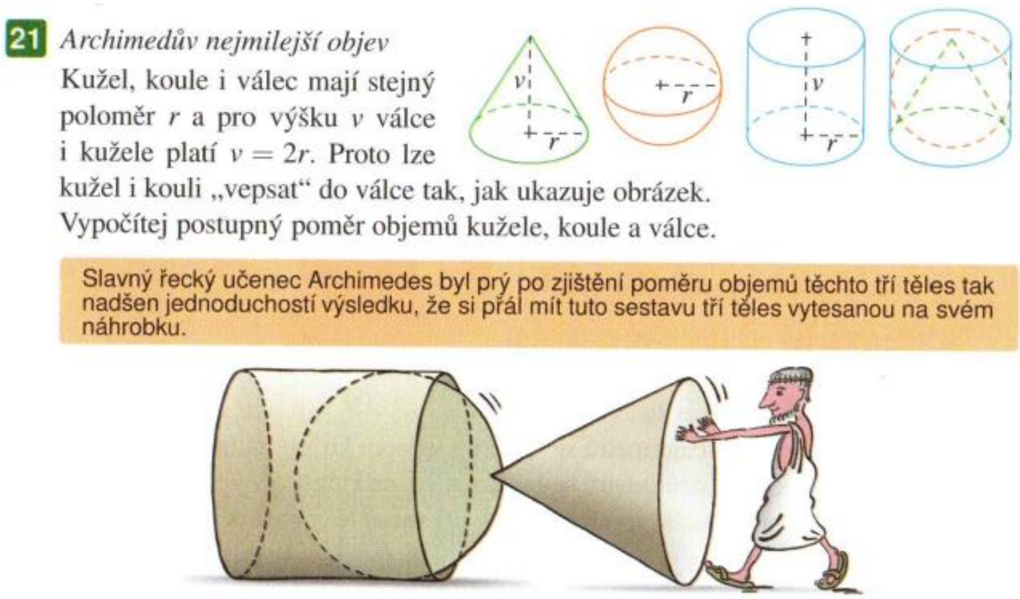
A. Celsius
(1701 – 1744)
švédský fyzik
a astronom

Obrázek 2- Úloha o Reaumurově stupnici, Matematika pro 9. ročník, 1. díl

2. díl

Druhý díl matematiky pro 9. ročník obsahuje učivo o tělesech – jehlan, kužel a koule. Jako jednu z úloh pro výpočet objemu jehlanu využívá stavbu egyptské pyramidy:

„Egyptské pyramidy jsou hrobky faraonů. Známá Chufewova pyramida má tvar pravidelného čtyřbokého jehlanu s výškou přibližně 147 metrů a s délkou podstavné hrany přibližně 247 metrů. Na stavbu pyramidy bylo údajně použito 2,5 milionů krychlových metrů kamene. Z uvedených údajů je možné velmi zhruba určit celkový objem nezastavěného prostoru (pohřebních komor, schodišť, chodeb a větracích průduchů) v pyramidě. Udělej to!“ (strana 15)



21 *Archimedův nejmilejší objev*
Kužel, koule i válec mají stejný poloměr r a pro výšku v válce i kužele platí $v = 2r$. Proto lze kužel i kouli „vepsat“ do válce tak, jak ukazuje obrázek. Vypočítej postupný poměr objemů kužele, koule a válce.

Slavný řecký učenec Archimedes byl prý po zjištění poměru objemů těchto tří těles tak nadšen jednoduchostí výsledku, že si přál mít tuto sestavu tří těles vytesanou na svém náhrobku.

Obrázek 3 – Zadání úlohy Archimedův nejmilejší objev, Matematika pro 9. ročník, 2. díl

3. díl

Ve třetím díle najdeme učivo finanční matematiky a náhled do historie bankovek:

Čím platili naši pradědečkové a naše prababičky

Poznáš, které významné osobnosti jsou na bankovkách Československé republiky (1918–1939)?

Na bankovce je portrét prvního ministra financí ČSR, ekonoma a právníka. Jak se jmenoval?

Chcete i tady napovědět? Byl prvním prezidentem Československé republiky, ale i významným vědcem, profesorem filozofie a sociologie.

Jde o českého historika, organizátora kulturního a politického dění, který žil v 19. století. Je zobrazen i na tisícikorunové bankovce, která je v současnosti platná.

Víš, které významné osobnosti jsou na bankovkách, jež jsou v naší republice v oběhu?

Nesmíme zapomenout na mince, se kterými se tenkrát platilo. Aspoň dvě na ukázku:

Které motivy jsou na naší desetikoruně, dvacetikoruně a padesátikoruně? Dokážeš odpovědět bez nahlížení do peněženky?

Obrázek 4 – Úloha Čím platili naši pradědečkové a naše prababičky, Matematika pro 9. ročník, 3. díl

Z pracovní knihy počtů (1935)

„Živnostenská záložna v Opavě měla r. 1931 6 881 063 Kč vkladů. Vypočítejte $4\frac{1}{2}$ % úrok z těchto vkladů za jeden den.“ (str.71)

Ze Sbírky úloh z algebry (1902)

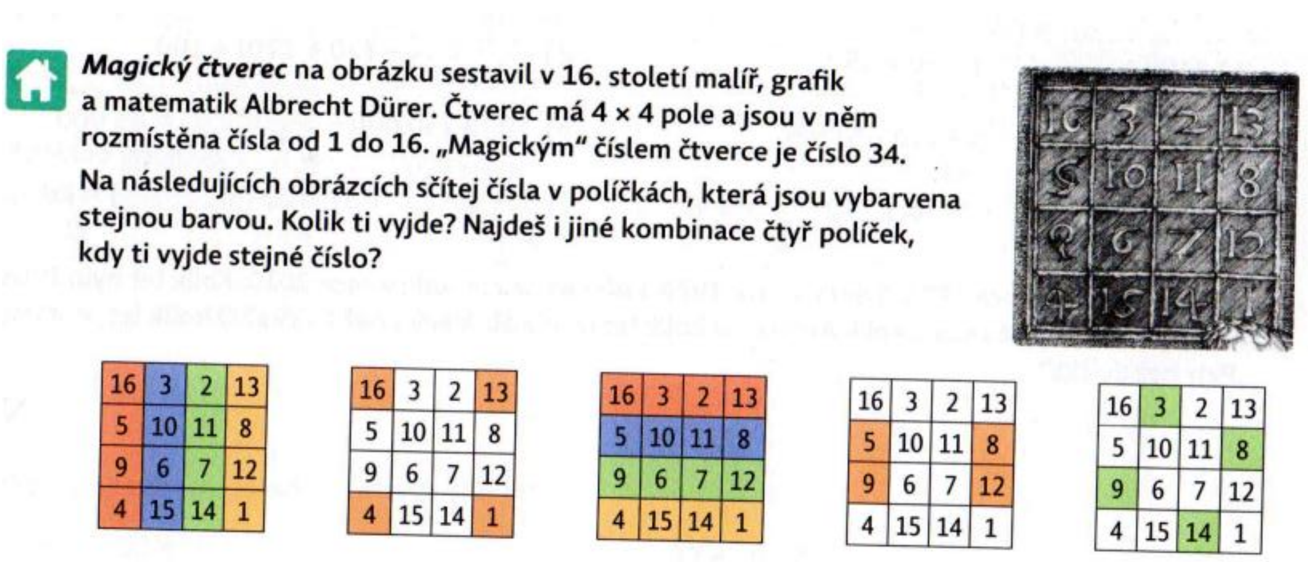
„Někdo uložil do spořitelny 2500 K na 4%. Kolik korun obdrží nazpět vkladu i úroků na konci 30. roku spoření?“ (str. 73)

4.2 Matematika s nadhledem

Jako další jsem zvolila sadu pracovních sešitů Matematika s nadhledem pro druhý stupeň, tedy díly 6,7,8 a 9. Žáci tyto pracovní sešity nevlastní, ovšem úlohy z nich jsou ve výuce matematiky běžně používány. V těchto pracovních sešitech lze najít řadu zajímavých úloh, navíc k tomuto sešitu existují i webové stránky, kde mohou žáci také procvičovat.

Matematika s nadhledem 6

V pracovním sešitě pro 6. třídu najdeme na straně 11 úlohu o magickém čtverci Albrechta Dürera, který je i součástí jedné ze sady úloh vytvořených pro výzkum.



Obrázek 5- Úloha o magických čtvercích, Matematika s nadhledem 6

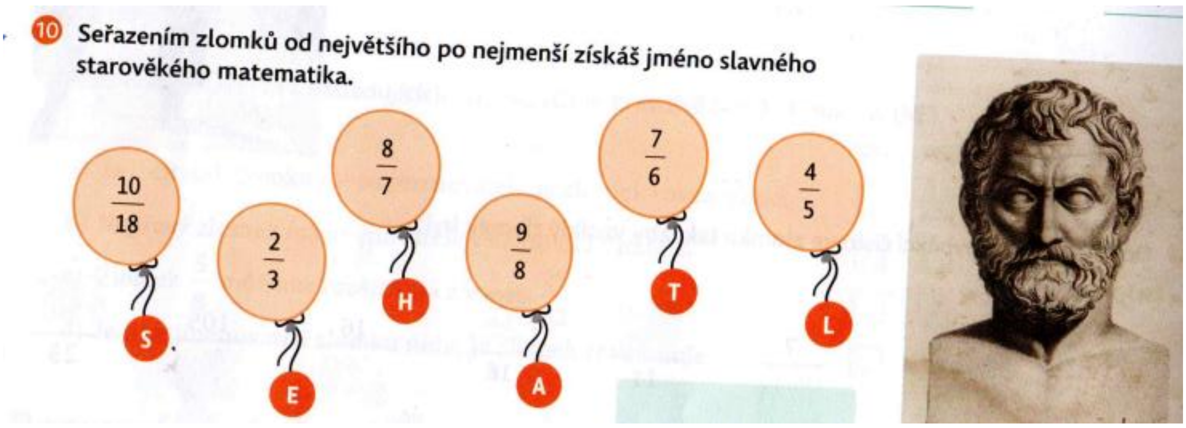
Obrázek

Dále zde najdeme úlohu odkazující na římské číslice: „Ivan Vedl Xavera Lesní Cestou Do Města je pomůcka pro zapamatování římských číslic. Římské číslice představují způsob zápisu čísel pomocí několika vybraných písmen latinské abecedy. Například MMXVIII je rok 2018 zapsaný římskými číslicemi. Zkus zapsat svůj věk těmito číslicemi."

V kapitole s učivem o dělitelnosti přirozených čísel, na straně 79, je zajímavá úloha, která odkazuje na Goldbachovu hypotézu – jeden z nejstarších, dosud nevyřešených matematických problémů z teorie čísel. Formulovaná byla roku 1742 v korespondenci mezi Christianem Goldbachem a Leonharden Eulerem. Zadání úlohy je následující: „S prvočísly je spojena řada slavných a dosud nevyřešených otázek. K nejznámějším patří tzv. *Goldbachova hypotéza*, podle které lze každé sudé číslo větší než 2 vyjádřit jako součet dvou prvočísel. Například 4= 2+2, 6= 3+3 atd. vyjádři všechna sudá čísla menší než 20 jako součet dvou prvočísel."

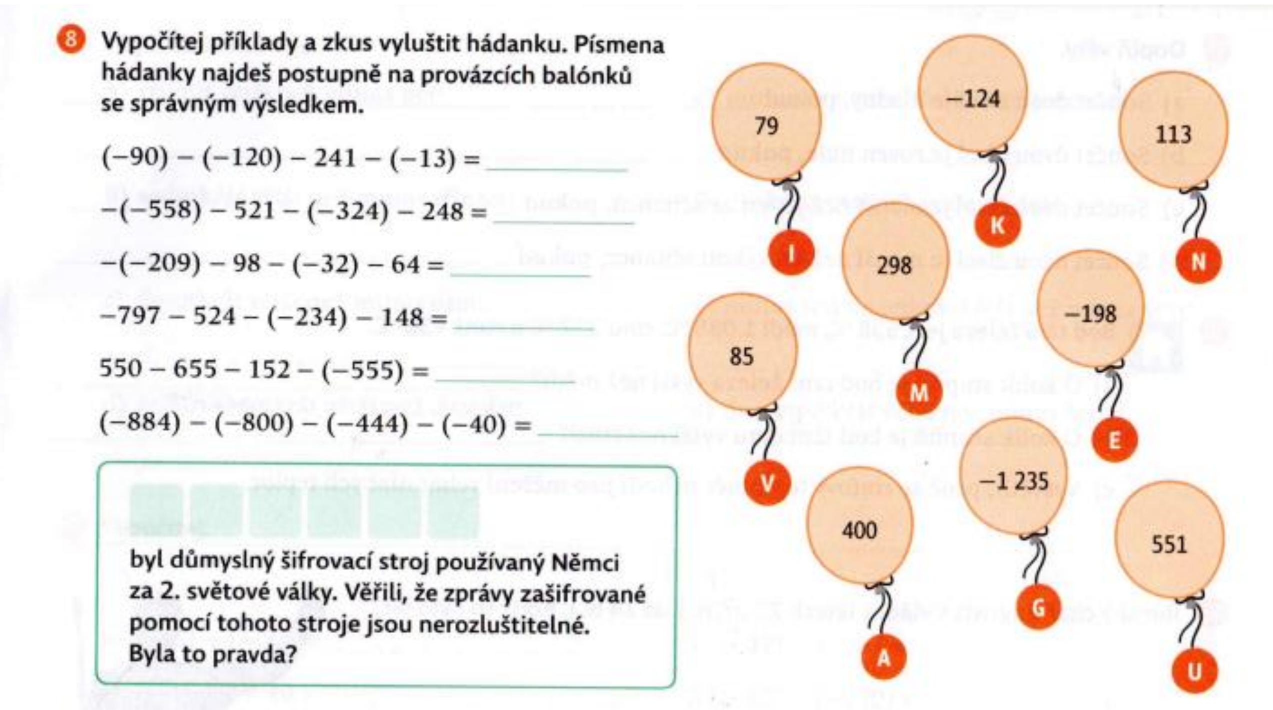
Matematika s nadhledem 7

V pracovním sešitě určeném 7. ročníkům základní školy je na straně 16 úloha na řazení zlomků, po jejímž vyřešení dostanou žáci jméno jednoho ze slavných matematiků. (Thales)



Obrázek 6- Úloha se zlomky, Matematika s nadhledem 7

Úloha na straně 47 rovněž vyžaduje vyřešení zadání pro získání tajenky – tentokrát se jedná o název šifrovacího stroje používaného Němci za 2. světové války. (Enigma)



8 **Vypočítej příklady a zkus vyluštit hádanku. Písmena hádanky najdeš postupně na provázcích balónků se správným výsledkem.**

(−90) − (−120) − 241 − (−13) = ________

−(−558) − 521 − (−324) − 248 = ________

−(−209) − 98 − (−32) − 64 = ________

−797 − 524 − (−234) − 148 = ________

550 − 655 − 152 − (−555) = ________

(−884) − (−800) − (−444) − (−40) = ________

byl důmyslný šifrovací stroj používaný Němci za 2. světové války. Věřili, že zprávy zašifrované pomocí tohoto stroje jsou nerozluštitelné. Byla to pravda?

Obrázek 7- Úloha s celými čísly, Matematika s nadhledem 7

Letmou zmínku o římském císaři Augustovi obsahuje úloha na straně 48: „Římský císař Augustus vládl v letech 27 př.n.l. až 14 n.l. Kolik to bylo let?“

Práci s číselnou osou vyžaduje zadání následující úlohy, která pracuje s některými z významných historických událostí:

5 **Vyhledej na internetu, kdy se odehrály následující události (rok). Podle roků přiřaď obrázkům písmena A–E (A – nejdříve, E – nejpozději). Všechny události a roky pak vyznač na číselnou osu.**

vstup ČR do NATO

založení Karlovy univerzity v Praze

atentát na J. F. Kennedyho

úmrtí Julia Caesara

bitva u Slavkova

Obrázek 7 –Práce s číselnou osou, Matematika s nadhledem 7

Další z úloh, jejíž vyřešení vede na rozklíčování tajenky, tentokrát dalšího slavného matematika, fyzika a filozofa, najdeme na straně 126. (Descartes)

Vypočítej příklady a výsledku přiřaď odpovídající písmenko z tabulky. Tajenkou je jméno slavného matematika, fyzika a filozofa, kterého vidíš na obrázku.

- Celkový počet hran desetibokého hranolu je _______.
- Povrch krychle o hraně délky 5 je roven _______.
- Dvanáct palců je jedna stopa, tři stopy je jeden yard. Kolik palců je 5 yardů? _______.
- Objem kvádru o rozměrech 2 × 3 × 6 je _______.
- Objem pěti betonových sloupů se čtvercovou podstavou o hraně délky 3 a výšce sloupu 7 je _______.
- Podstavou trojbokého hranolu je pravoúhlý trojúhelník se stranami délek 5, 12 a 13. Výška hranolu je 7. Objem trojbokého hranolu je _______.
- Počet vrcholů hranolu s 33 hranami je _______.
- Krychle o hraně 12,5 má součet délek všech hran roven _______.
- Bedna o objemu 900 000 má obdélníkové dno s rozměry 40 × 125. Výška bedny je _______.

180	36	315	150	30	22	210
S	C	A	E	D	T	R

tajenka:

Obrázek 9 – Úloha s tajenkou, Matematika s nadhledem 7

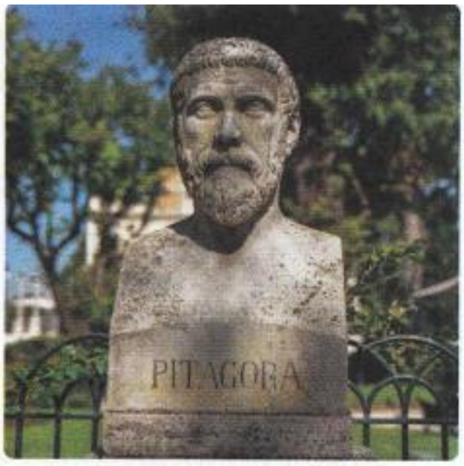
Matematika s nadhledem 8

V učebnici ze sady Odvárko-Kadleček pro 8. ročník byla v učivu o Pythagorově větě úloha o haperdonaptéch. Zde se vyskytuje také (str.22), dokonce v obdobném znění: „Vztahy mezi délkami stran v pravoúhlém trojúhelníku lidstvo využívá přibližně 4000 let. V této úloze si zahrajeme na napínače lan, kterým se říkalo *haperdonapté*. Znalosti využívali k vytyčení pravého úhlu na stavbách. Na libovolně dlouhém provaze uvaž 13 od sebe stejně vzdálených uzlů. První uzel spoj s třináctým a provaz napni do trojúhelníku se stranami 3,4 a 5 dílů. Ověř, že pravý úhel leží proti nejdelší straně.“

Úlohy spojené s Pythagorem pokračují úlohou o pythagorejských číslech na straně 24: „Pythagorejská čísla jsou trojice přirozených čísel, která představují délky stran pravoúhlého trojúhelníku. Ověř, zda následující trojice čísel jsou pythagorejská čísla. Zkus najít ještě další takovou trojici čísel.“

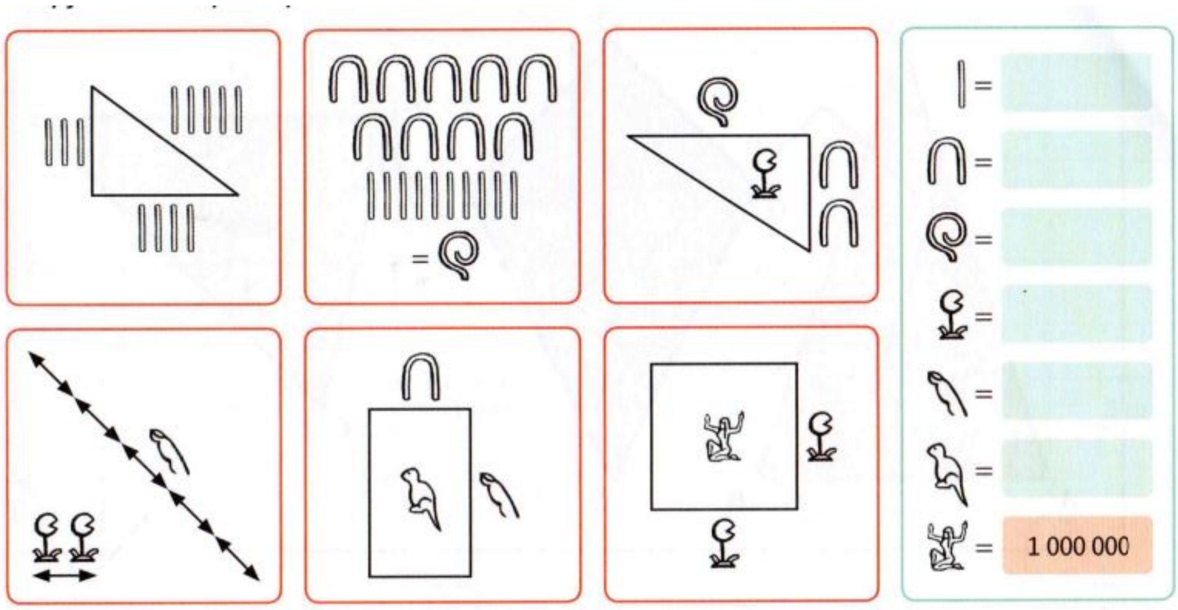
5,12,13 8,15,17 11, 60, 61 7, 24, 25 9, 40, 41 13, 84, 85

Další z nich, na straně 27: „Na ostrově Samos se r. 570 př. Kr. narodil slavný matematik Pythagoras. Přístavu dominuje bronzový monument tvaru pravoúhlého trojúhelníku. Vyznač v obrázku geometrický útvar, kterým se Pythagoras proslavil.“



Obrázek 10 – Obrázky k úloze o Pythagorovi, Matematika s nadhledem 8

Na straně 29 se pak nachází úloha s odkazem na starověký Egypt: „Egypťané ve starověkém Egyptě používali k výpočtům zvláštní symboly. Pro každou mocninu čísla 10 měli zvláštní hieroglyfický znak, který se opakoval v potřebném počtu od 1 do 9. Soustava neumožňovala zápis libovolně velkého čísla. Hieroglyf v podobě symbolu boha Slunce Ra vyjadřoval hodnotu 10^6 = 1 000 000. Zkus podle následujících indicií rozluštit, jakou hodnotu měly jednotlivé symboly.“



Obrázek 11 – Egyptské symboly, Matematika s nadhledem 8

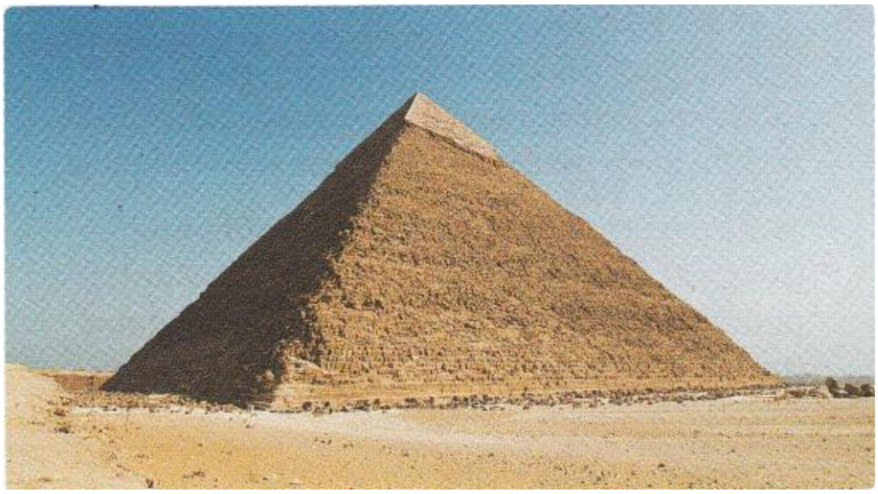
V kapitole s učivem o kruhu a kružnici je zmíněn Thales z Milétu: „Thales z Milétu (620-625 př. n. l.) byl řecký učenec. Řadíme ho mezi „sedm mudrců“, což je označení pro sedm údajně nejmoudřejších Řeků. Ve své době učinil následující objevy. Vyznač objev, který se týká geometrie.

a) Vypočítal podle délky stínu výšku pyramid.
b) Úspěšně předpověděl zatmění Slunce.
c) Dokázal, že průměr protne kružnici na dvě shodné části.
d) Vypracoval tabulky s předpovědí počasí.“

Na straně 86 je ještě jedna zmínka o starém Egyptu: „Naši předkové v dávných dobách uměli s pomocí lineárních rovnic řešit různé praktické úlohy. Zkus to také – následující úloha je z egyptského *Rhindova papyru* z roku 1560 př. n. l.: *Hromada a její čtvrtina dávají dohromady 15. Kolik je hromada?*“

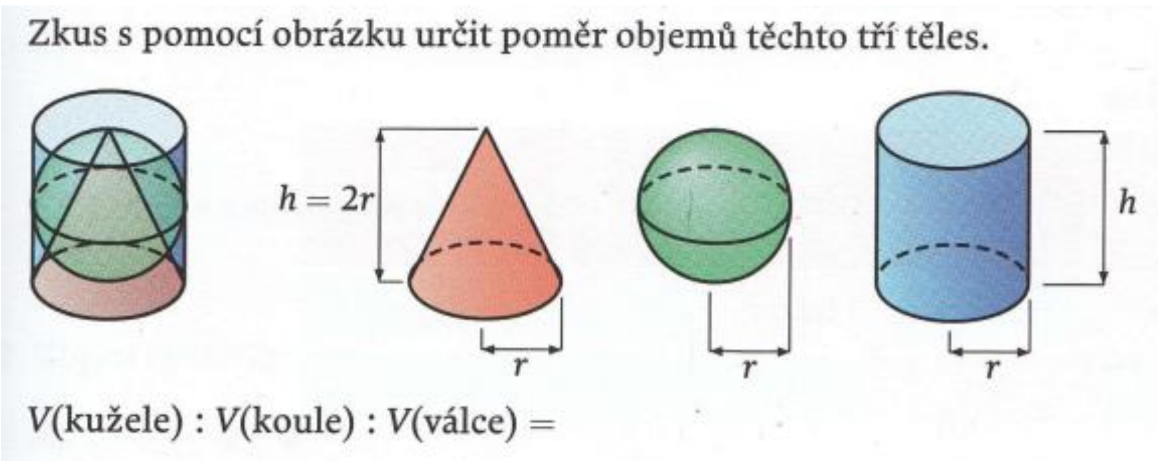
Matematika s nadhledem 9

„Nejznámější stavby ve tvaru jehlanu jsou Egyptské pyramidy. Chufuova pyramida má v současnosti rozměr základny 230,38 x 230,38 m, její současná výška je 138,8 m, i když původně byla ještě o 2 m na každé straně delší a o 9 m vyšší. Sklon pyramidy (odchylka boční stěny od roviny podstavy) je přibližně 51°50´. Vyznač uvedené rozměry do obrázku.“



Obrázek 12 – Obrázek k úloze o Chufuově pyramidě, Matematika s nadhledem 8

„Archimedes byl řecký matematik, fyzik, filozof a astronom. Na náhrobek si podle pověsti dal vytesat tři tělesa. Do válce je vepsána koule a kužel. Poměr objemů těchto těles byl jeho odkazem lidstvu.“

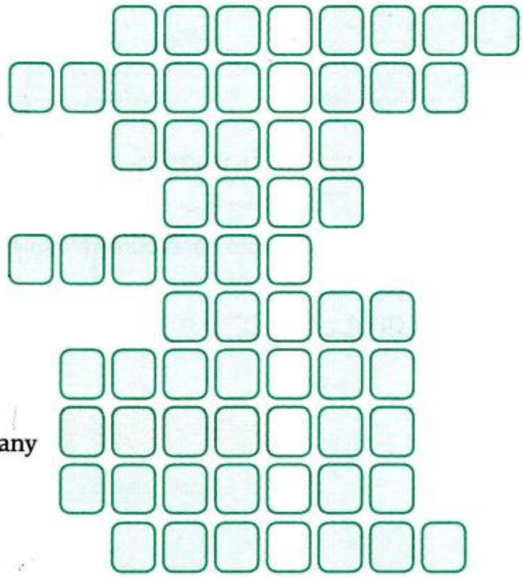


Obrázek 13- Obrázek k úloze o Archimédovi, Matematika s nadhledem 8

Úloha na straně 72 opět zmiňuje německý šifrovací stroj Enigma, se kterým jsme se již setkali v jedné z předchozích úloh. Nyní ovšem tajenka skrývá jméno britského matematika Alana Turinga, který slavný kód rozluštil.

10 Vylušti křížovku. Její tajenka skrývá jméno slavného britského matematika, který měl zásadní podíl na rozluštění kódu německého šifrovacího stroje Enigma používaného během 2. světové války.

1) křivka ($y = x^2$)
2) 100 litrů
3) součin velikostí stran obdélníku
4) 1 000 kg
5) výsledek sčítání
6) nejsymetričtější těleso
7) pravidelný čtyřúhelník
8) spojnice vrcholu trojúhelníku se středem protější strany
9) číslo, které dělíme
10) goniometrická funkce



Obrázek 14 – Křížovka, Matematika s nadhledem 8

5 Historické pozadí

Tato kapitola se věnuje historii některých matematických jevů, které jsou součástí vytvořených úloh.

5.1 Magické čtverce

Magické čtverce obsahují $n \times n$ polí, kde je vepsáno n^2 čísel. Magický čtverec řádu n vytvoříme umístěním přirozených čísel 1 až n^2 do čtverce tak, že se každé z čísel ve čtverci vyskytuje právě jednou a součet čísel v každém sloupci, řádku a úhlopříčce je stejný. Součty v řádcích, sloupcích a diagonálách jsou stejné a nazývají se konstanta čtverce. Ta se dá určit podle vzorce pro součet prvních několika členů aritmetické posloupnosti 1, 2, …, n^2

$$\frac{1}{2}(1+n^2)n$$

Poprvé se objevuje magický čtverec ve starověké Číně ve dvou odlišných legendách. Jedna z těchto legend, nazvaná Velký plán nebo též Legenda o Lo Shu, má prý původ kolem roku 650 před naším letopočtem. Příběh vypráví o císaři Yu, který během povodně způsobené řekou Lo objevil magickou želvu. Na krunýři této želvy byl vyryt magický čtverec o rozměrech 3x3. Tento čtverec je zajímavý tím, že všechny ostatní čtverce 3x3 lze získat zrcadlením nebo rotací čtverce Lo Shu. Magická konstanta čtverce je 15 a kolem ní se střídají sudá a lichá čísla. Číslo 5 je vždy uprostřed, symbolizující střed, považovaný v Číně za pátou, nejdůležitější stranu světa. V taoismu se součet dvou vedle sebe položených čísel v čtverci Lo Shu považuje za symbol základních prvků (kov, dřevo, oheň, voda a země). Druhá legenda o Říční mapě vypráví, že se posvátná želva vynořila z řeky Ho s magickým čtvercem (opět 3x3) připomínajícím mapu s příslušnými atributy.

V dalších částech světa, jako například v Indii, Číně a starověkém Egyptě, lze najít amulety s magickým čtvercem. Tyto čtverce se poté rozšířily do Persie, Mezopotámie a mezi Araby, kde byly spojeny s amulety a talismany, jak naznačuje text z desátého století známý jako Traktáty Bratří čistoty. Arabové byli schopni vytvářet čtverce až o straně 6, a když směřovali do Evropy, přenesli tuto matematickou hru na starý kontinent.

V Evropě se magický čtverec poprvé objevil kolem roku 1300 v díle řeka Manuela Maschopula. Zajímavý magický čtverec se objevil na mědirytině Melancholie I od Albrechta

Dürera z roku 1514. V nedostavěné katedrále Sagrada Família od Gaudího lze najít lehce pozměněný Dürerův magický čtverec. Tyto čtverce si udržely popularitu až do 21. století díky svým zajímavým až tajemným vlastnostem.

5.2 Pythagorova věta

Pythagorova věta byla pojmenována podle Pythagora ze Samu (asi 580 až 500 př. naším letopočtem, řecký filozof, vědec a politik), který zřejmě jako první tuto větu dokázal. Věta byla pravděpodobně známa i v jiných starověkých civilizacích dávno před starověkým Řeckem, v Číně a částečně i v Egyptě.

Pythagorova věta popisuje vztah mezi délkami stran libovolného pravoúhlého trojúhelníku v euklidovské rovině. Umožňuje dopočítat délku třetí strany takového trojúhelníka, pokud jsou známy délky dvou zbývajících stran. Věta zní:

Součet obsahů čtverců nad oběma odvěsnami se rovná obsahu čtverce nad přeponou.

Formálně Pythagorovu větu vyjadřuje rovnice $a^2 + b^2 = c^2$, kde c označuje délku přepony pravoúhlého trojúhelníka a a, b jsou odvěsny tohoto trojúhelníku.

Čtverce v Pythagorově větě můžeme nahradit i jinými plošnými obrazci (kružnicí, obdélníkem, trojúhelníkem, pětiúhelníkem) za předpokladu, že jsou si navzájem podobné a jejich šířka je přímo úměrná délce příslušné strany trojúhelníku. Součet obsahů těchto obrazců nad odvěsnami bude opět shodný s obsahem obrazce nad přeponou. Tuto myšlenku zveřejnil již Eukleides v 31. větě 6. knihy Základů - nejznámější Eukleidovo dochované dílo, jež obsahuje 13 knih. Toto dílo ovlivnilo mnoho odvětví vědy, nejvíce však samozřejmě matematiku. Základy byly studovány a zkoumány po dobu téměř 24 století a byly přeloženy do mnoha jazyků. V češtině byl vydán jediný kompletní pře-klad z roku 1907 od Františka Servíta. V některých vydáních bývá i kniha čtrnáctá a patnáctá, čtrnáctá kniha je však prací Hypsicleovou (pozn. Hypsicles/Hypsiklés z Alexandrie), který žil asi 120 let po Eukleidovi. Jeho kniha se zabývá vpisováním pravidelných těles do koule. Patnáctá kniha je dílem neznámého autora odhaduje se, že vznikla až v 6. století našeho letopočtu.

První kniha se zabývá přímkami, trojúhelníky, rovnoběžníky a je-jich vzájemností, na konci knihy najdeme důkaz Pythagorovy věty. Ve druhé knize najdeme poznatky o dělení přímek a jeho důsledcích. Třetí a čtvrtá kniha hovoří o kružnici a kruhu, jejich vlastnostech, vpisování a opisování. Pátá a šestá kniha se zabývají poměry a geometrickou podobností.

Knihy sedm, osm a devět pojednávají o teorii čísel, prvočíslech a důkazu, že prvočísel je nekonečně mnoho. V desáté knize najdeme teorii racionálních a iracionálních čísel. V knize jedenácté se píše o protínání a styku rovin, ve dvanácté o geometrii v prostoru a tě-lesech jako jehlan, hranol, kužel, válec a koule. Poslední Eukleidova třináctá kniha hovoří o pěti pravidelných Platónských tělesech.

Pythagorovu větu můžeme zobecnit pro obecný trojúhelník do tvaru tzv. kosinové věty $c^2 = a^2 + b^2 - 2 * ab * \cos\gamma,$ kde a, b, c jsou strany obecného trojúhelníku. Toto zobecnění znal už Eukleides, který ale nepoužíval funkci kosinus.

5.3 Lanchesterův model boje

Vojenští stratégové odedávna znají pravidlo 3:1 . Podle něho musí mít v bitvě útočník trojnásobnou převahu, aby měl šanci překonat obránce. V roce 1916 zobecnil tuto poučku anglický vynálezce a matematik Frederick William Lanchester. Odvodil několik modelů boje -jednoduché soustavy dvou obyčejných diferenciálních rovnic, které popisují dynamiku ztrát obou válčících stran. Ztráty útočníka jsou přímo úměrné síle obránce a naopak. Za druhé světové války Lanchesterovo pravidlo fungovalo například v bitvách u Kurska, v ponorkové válce v Atlantiku a na bojištích v Pacifiku. Perfektně například popisuje průběh bitvy na ostrově Ivodžima - probíhala od 16. února 1945 do 26. března 1945 mezi Spojenými státy a Japonskem. Americké jednotky zaútočily na japonský ostrov Iwodžima s cílem obsadit zdejší letiště a vytvořit si tak leteckou základnu pro útok na hlavní japonské ostrovy. Jednalo se o první případ druhé světové války, kdy bylo cílem spojeneckých jednotek obsazení vlastního japonského území, čemuž také odpovídala i intenzita odporu japonských vojáků. Americká útočná síla čítala přes 70 000 mužů, v cestě jim stálo přibližně 22 000 japonských vojáků (což odpovídá trojnásobné převaze). Vojenské řady Spojených států přišly přibližně o 7 000 vojáků, přičemž Japonci ztratili kolem 21 000 mužů.

Vaněčková (2010) ve své práci uvádí tři typy Lanchesterových modelů boje:

Konvenční boj – popisuje například historické bitvy z období Napoleonských válek nebo Americké občanské války. Vojska se střetávají a útočí, dokud jedno nezvítězí a druhé není poraženo. Základním předpokladem tohoto modelu je, že každý voják z armády X je schopný boje a může přímo zaútočit na jakéhokoliv bojeschopného vojáka z opačné armády Y a naopak.

Partyzánský boj – partyzánský boj většinou probíhá mezi malými skupinami bojovníků. Popisuje situace, které se odehrály například mezi partyzánskými skupinami v Libanonu. Partyzáni své protivníky nevidí, ale ví, že se nachází na určitém ohraničeném území. Čím větší skupina partyzánů se na území nachází, tím větší je pravděpodobnost zásahu.

Smíšený konvenční a partyzánský boj – využívá kombinaci konvenčního vojska Y a partyzánské skupiny bojovníků X. Příkladem může být třeba válka ve Vietnamu nebo některé boje ve válce mezi Afganistánem a Irákem.

Model lze použít například k předpovědi výsledku bitvy mezi dvěma armádami, k analýze účinnosti různých vojenských taktik a k posouzení dopadu nových zbraní nebo technologií na průběh boje. Samozřejmě tento model je zjednodušením reality. V praxi existuje mnoho dalších faktorů, které mohou ovlivnit výsledek bitvy, jako je například kvalita vojáků, jejich zbraně a taktika, nebo podmínky na bojišti.

5.4 Historický vývoj numeračních soustav a měrových jednotek

Už pravěcí lidé používali základní aritmetiku. Při sčítání ovcí, které ráno vyháněli na pastvu, kladli za každou ovci na hromádku kamínek a večer pomocí těchto kamínků kontrolovali, zda se všechny ovce vrátily. Tímto způsobem, aniž by počítali kamínky, vytvářeli jednoznačná zobrazení mezi dvěma množinami. Dalším způsobem, jak lidé počítali věci, bylo dělání zářezů do hole nebo kosti. Nejstarší důkaz tohoto způsobu záznamu pochází z doby před 30 000 lety (věstonická vrubovka). Číselné záznamy byly také uchovávány pomocí uzlů na provaze, oblázků nebo lastur, obvykle seřazených do skupin po pěti. Při tomto způsobu numerace se používal jeden číselný znak – čárka, zářez, uzel apod., který označoval číslo 1. Opakováním těchto znaků bylo možné zapsat větší čísla, a pro přehlednost se větší čísla sdružovala do skupin po pěti. Počítání na prstech se vyvinulo až na určitém stupni společenského vývoje a počet deseti prstů položil základ dnešní desítkové soustavy.

Jedním z nejstarších způsobů zápisu čísel je egyptská numerace. Staří Egypťané zapisovali čísla pomocí čárek a vytvářeli skupiny po deseti. Tímto způsobem dostávali stále větší skupiny a pro ně zaváděli další číselné znaky. Egyptský systém byl založen na čísle deset a nezáleželo na pořadí znaků. Egypťané nepotřebovali znak pro nulu. Dalším zajímavým systémem byla babylonská numerace, kombinující základy 10 a 60, řecká, římská a mayanská numerace, kde základ dvacet pravděpodobně vznikl díky počítání všech prstů na rukou i nohou. Pro současnost je nejvýznamnější římská numerace, protože s římskými číslicemi se setkáváme i dnes.

Historický vývoj desítkových čísel zaznamenal významné milníky. Čísla, která nejsou přirozená, byla používána už v egyptské a římské numeraci, a to formou zlomků s čitatelem jedna. S rozvojem průmyslu, obchodu, mořeplavby, vědy a techniky rostla potřeba složitějších aritmetických výpočtů, což vedlo k rozšiřování číselných oborů. Ve 14.–15. století al-Káší poprvé vyložil teorii desetinných čísel ve své knize Klíč k umění výpočtů (1427) a v roce 1585 Simon Stevin vydal dílo O desetinných výpočtech.

Motivující témata najdeme také ve vývoji měrových jednotek. Když lidé začali měřit, používali části svého těla; měřilo se na lokte, sáhy, stopy apod., ale takové měření bylo nejednotné. Český král Přemysl Otakar II. (1628) se snažil sjednotit jednotky délky ve svém království (např. čtyři zrna ječmene vedle sebe tvořila jeden prst, čtyři prsty jednu dlaň, deset prstů jednu píď a tři pídě jeden loket pražský či český). V Čechách a na Moravě byla metrická soustava zavedena v roce 1871. V Anglii ještě donedávna používali staré jednotky délky jako palec, stopa, yard, kde yard byla vzdálenost od královy špičky nosu ke konci jeho natažené ruky.

Požadavky zemědělství, stavebnictví a vojenství daly vzniknout geometrii již ve starověku. Na babylonské hliněné destičce z 21. stol. př. n. l. byl nalezen plán nepravidelného pozemku, jehož obsah zeměměřič určil rozdělením na obdélníky, trojúhelníky a další čtyřúhelníky, jejichž obsahy sečetl. Římský systém měření obsahu měl propracované jednotky jako ingerum (9,25 ha), heredium (0,5 ha) a centurie (50 ha). V našich zemích se měření obsahu rozvíjelo ve středověku v souvislosti se zakládáním vesnic, budováním hradů a vyměřováním zemědělské půdy. Hlavní jednotkou se stal lán, který ve 13. století určoval počet jiter na určité ploše nebo množství zasetých zrn měřených korcem. Korec byl dále rozdělen na čtvrtiny, zvané věrtele, označované jako královská míra už v roce 1249. Ve 14. století se jitro měřilo jako obdélník s poměrem stran 3:1 a délkou nejvýše 52 loktů. Nižší jednotkou byl prut (1 prut = 8 loktů = 16 stop). Díky tomuto přepočtu se sjednotily duté a plošné míry, a korec, původně dutá míra, se začal používat jako plošná míra pro určení velikosti pole.

5.5 Egyptská matematika

Egyptská matematika využívala dva typy čísel: přirozená čísla a zlomky. Symboly pro přirozená čísla se v Egyptě objevily již v Archaickém období, avšak jejich podoba se teprve formovala. Za vlády I. dynastie již existoval symbol pro tisíc. Ve Staré říši pak vznikl symbol pro milion, ale v Nové říši tento symbol zmizel. Egypťané používali desítkovou číselnou soustavu, podobnou římské soustavě, ve které bylo obtížné provádět násobení nebo dělení. Čísla se zapisovala kombinací potřebného počtu symbolů pro jednotlivé řády. Egypťané používali matematiku pro praktické účely a čísla chápali vždy jako konkrétní počet nějakých předmětů, nikoli jako abstraktní hodnoty. Egypťané neznali pouze čísla přirozená, ale znali také čísla racionální a zapisovali je zlomky. Tyto zlomky zahrnovaly převrácené hodnoty přirozených čísel a v zápisu se odlišovaly pouze použitím speciálního symbolu. Nejstaršími zlomky, které se v Egyptě objevily, byly jedna polovina a jedna čtvrtina, jenž vznikly pravděpodobně pomocí půlení. V době Střední říše se v Egyptě používaly pouze kmenné zlomky. Tyto zlomky byly zapsány jako převrácená hodnota přirozených čísel, tedy čitatel byl vždy 1. K odlišení zlomku od přirozeného čísla sloužil znak zapsaný nad číslicí, který by se dal považovat za zlomkovou čáru. V hieratickém písmu byl tento znak nahrazen tečkou. Všechny zlomky byly převáděny na součty kmenných zlomků. Výjimkou byl pouze zlomek $\frac{2}{3}$, pro který se používal speciální symbol. Pro převod na součty kmenných zlomků se používaly tabulky, které udávaly rozklady zlomků ve tvaru $\frac{n}{2}$, což byly jediné rozklady potřebné pro násobení dvěma.

Zachovaly se různé hospodářské záznamy a výkazy, které obsahují matematické výpočty, ale také některé významné matematické dokumenty sloužící k výuce v písařských školách. Mezi nejdůležitější matematické papyry patří Londýnský a Moskevský papyrus. Londýnský, známý také jako Rhindův papyrus, byl pojmenován po skotském egyptologovi, který ho v roce 1858 objevil v Luxoru. Tento papyrus, uložený v Britském muzeu v Londýně, je asi 6 metrů dlouhý a 33 centimetrů široký a obsahuje 87 úloh. Pochází přibližně z roku 1650 př. n. l. a jeho autorem je písař Ahmose, který uvádí, že pouze přepisoval starší dokument zhruba 200 let starý. Moskevský, známý také jako Goleniščenův papyrus, pochází přibližně z roku 1850 př.n.l., obsahuje 25 úloh a je uložen v Puškinově muzeu výtvarných umění v Moskvě. Z těchto papyrů zjistíme, jak Egypťané prováděli základní matematické operace. Sčítání a odčítání byly prováděny podobně jako dnes. Při sčítání se jednotky stejného řádu sčítaly, a pokud počet jednotek přesáhl deset, přidala se jednička k dalšímu vyššímu řádu. Odčítání se provádělo pouze s menšími čísly odečítanými od větších. Egyptské násobení mělo aditivní charakter, což znamená, že každé násobení bylo převedeno na opakované sčítání.

5.6 Dokonalá čísla

Dokonalé číslo je v matematice takové přirozené číslo, pro které platí, že je součtem všech svých dělitelů (kromě sebe samotného).

Pokud je číslo 2^k-1 prvočíslo, kde k > 1, pak lze obecný tvar dokonalého čísla zapsat takto:

$$\mathbf{n = 2^{k-1} (2^k-1)}.$$

První dochovaný matematický záznam o dokonalých číslech nalezneme v Euklidových Základech. Zmínku o dokonalých číslech můžeme najít v knize IX., v části XXXVI. Eukleidés zde dokazuje tvrzení:

Když jest dáno po řadě od jednotky několik čísel v poměru jedné ku dvěma, až součet všech se stane prvočíslem, a když se ten součet znásobí číslem posledním a vznikne jiné, vniklé číslo bude dokonalé.

Jinak řečeno, je-li 1+2+4+8+ … +2n prvočíslo, pak je číslo 2n * (1+2+4+8 + … + 2n) dokonalé. Protože však 1+2+4+8+ … +2n = 2n+1 – 1, lze Eukleidův výsledek zformulovat takto: je-li Mn = 2n – 1 prvočíslo, je číslo Pn = Mn * (2n – 1) dokonalé. Označení Mn = 2n – 1 známe také pod názvem Mersennovo prvočíslo. Přesněji, když n není prvočíslo, nemůže být prvočíslem ani číslo 2n – 1. Pro prvočíslo n číslo 2n – 1 může, avšak nemusí být prvočíslem. Mersennova prvočísla M2 = 3, M3 = 7, M5 = 31, M7 = 127, M13 = 8 191 znali již staří Řekové. Do dnešního dne bylo nalezeno celkem 40 Mersennových prvočísel.

K roku 2020 je známo 51 dokonalých čísel. Zatím posledním, ne však největším číslem nalezeném výpočty bez použití technologií je číslo 288 (289 – 1), objeveno roku 1911.

Největším dosud známým Mersenovým prvočíslem je 282 589 933 – 1, jenž je rovněž největším známým prvočíslem. Díky objevu tohoto prvočísla bylo v roce 2018 nalezeno zatím poslední, 51. dokonalé číslo, tvaru: 282 589 932 (282 589 933 – 1), obsahující více než 23 miliónů cifer. Je tak velké, že by zabralo okolo tisíce stránek velikosti A4.

6 Úlohy

Tato část obsahuje mnou vytvořené matematické úlohy obsahující nějaké dějepisné téma, historickou událost nebo zjednodušený problém z historie matematiky. Úlohy jsou seřazeny podle ročníků čili od 6. po 9. ročník. Každému ročníku byly vytvořeny tři úlohy s příslušnou obtížností. Záměrem také bylo, aby úlohy obsahovaly již probrané učivo anebo takové matematické problémy, které budou žáci daného věku schopni zvládnout. Některé úlohy nejsou svým obsahem (učivem) zařazeny správně do příslušného ročníku (dle ŠVP) z důvodu provádění testu během měsíce března, kdy ještě nebylo dané učivo probíráno. Každé zadání úlohy obsahuje také stručný historický popis dané události či matematického problému, se kterým pak žáci v úloze pracují. Tento pohled do historie může sloužit jako motivační aspekt úloh.

6.1 Úlohy pro 6. ročník

Dokonalá čísla

Dokonalé číslo je v matematice takové přirozené číslo, pro které platí, že je součtem všech svých dělitelů (kromě sebe samotného).

První 4 dokonalá čísla: 6, 28, 496, 8128

Těmito čísly se zabýval například Pythagoras a jeho následovníci, ovšem spíše pro jejich mystičnost než teoretičnost. Těmto číslům byl přikládán také náboženský význam. Kupříkladu číslo 6 znázorňuje počet dnů, které potřeboval bůh ke stvoření světa. Lidé věřili, že si bůh vybral toto číslo právě pro jeho dokonalost. Dokonalé číslo 28 si pak vybral na počet dnů, které má měsíc na to, aby oběhl zeměkouli.

Najděte všechny dělitele prvních tří dokonalých čísel (6, 28, 496) a ověřte, zda skutečně platí, že tato čísla jsou součtem všech svých dělitelů (kromě sebe samotného).

Jednotky délky

Ve 13. století nebyla v Českých zemích jednotná míra a váha. Ku příkladu kupec z Moravy měřil nebo vážil mírou moravskou, kupec z Vídně zase vídeňskou, polský kupec polskou atd.

Podívejte se například na rozdíly mezi Prahou, Moravou a Slezskem:

- loket pražský = 0,503 m,
- loket moravský = 0,594 m,
- loket slezský = 0,579 m.

Postupem času se české míry a váhy ustálily a v takové podobě se užívaly až do roku 1764, kdy byly všechny české míry, váhy i peníze zrušeny a byly zavedeny míry vídeňské (neboli rakouské).

Dnes se při měření obecně užívá desetinná soustava (u nás od roku 1876).

Tabulka udává délkové míry platné v českých zemích mezi 13. a 15. stoletím. Nejsou v ní uvedeny všechny v tehdejší době užívané míry. Některé míry, jako například palec a pěst, jsou odvozeny od přibližné délky palce a pěsti, střevíc pak od délky chodidla panovníka.

Do tabulky doplňte chybějící hodnoty:

Základní jednotka	Menší jednotka	Metrická jednotka
zrno	---------------	4,92 mm
palec	5 zrn	mm
pěst	4 palce	mm
píď	8 palců	mm
střevíc	12 palců	cm
český loket	střevíce	59,15 cm
staročeský sáh	3 lokte	m
látro	lokte	2,366 m
prut	8 loktů	m
míle česká	----------------	9,1396438 km

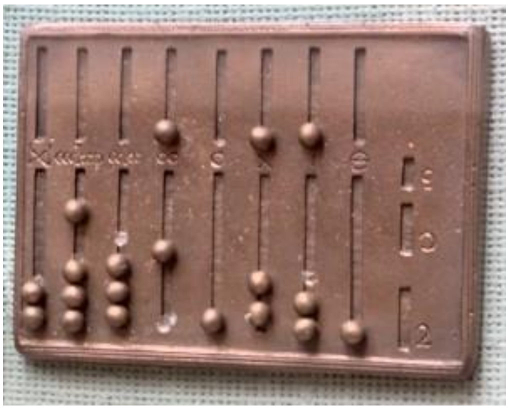
Tabulka 1 – Zadání k úloze Jednotky délky

Abakus a abaku

Abakus je jednoduchý nástroj, který nám pomáhá s počítáním. Vypadá jako destička s kuličkami na tyčkách, které můžeme posouvat. Abakus se používal už od starověku v Babylóně, Egyptě, Řecku a Číně. Dodnes se s ním můžeme setkat v prvních třídách, kde se mu říká "počítadlo". Na abakusu počítáme posouváním kuliček. Kuličky v určitých sloupcích představují jednotky, desítky, stovky a tak dále. Posouváním kuliček můžeme sčítat, odčítat, násobit i dělit.

Historie abakusu:

První abakusy se objevily už před 5 000 lety. Tehdy se používaly oblázky v rýhách na zemi. Později se abakusy vyráběly ze dřeva, kamene, kovu a dalších materiálů.



Obrázek 15 – Abakus – Historické počítadlo

Zajímavosti:

Slovo "abakus" pochází z řečtiny a znamená "destička".

Nejrychlejším počtářem na abakusu je Daniel Tammet z Velké Británie. Dokáže sčítat osmimístná čísla za pouhé 2,8 sekundy!

Abaku hra

Abaku hra je název originální české metody určené pro podporu výuky aritmetiky. Tato hra má více variant, ty si vyzkoušíš tzv. Abaku řady, což jsou řady číslic, ve kterých jsou schovány příklady.

Pravidla:

- Příklady jdou vždy z leva doprava.
- Čísla v příkladu jdou vždy po sobě, bez přeskakování.
- Řada obsahuje operace sčítání, odčítání, násobení, dělení, umocňování a odmocňování.
- Čísla lze použít ve více příkladech, každé číslo je použito alespoň v jednom příkladu.

Vzorová abaku řada s řešením:

8	5	4	0	4	5	9	6	3	9	3	2	7	1	4

Řešení: $85-40=45$ | $8\cdot5=40$ | $5+40=45$ | $4+59=63$ | $4+5=9$ | $9-6=3$ | $96-3=93$ | $6+3=9$ | $3^2=9$ | $\sqrt{9}=3$ | $39+32=71$ | $39-32=7$ | $9\cdot3=27$ | $3^3=27$ | $2\cdot7=14$.

Zkuste najít všechny příklady v této řadě: (celkem je jich zde schováno 13)

3	1	4	2	7	4	9	8	3	5	8	8	1	2	3

A teď zkuste vytvořit svou vlastní abaku řadu, která bude mít alespoň 6 číslic. Nezapomeňte, každé číslo musí být součástí alespoň jednoho příkladu.

6.1.1 Řešení a bodování

Dokonalá čísla: Nalezení dělitelů lze například pomocí rozkladu na součin prvočísel:

6 = 2×3, tj. dělitelé jsou 1, 2 , 3 a 6. Sečteme 1 + 2 + 3 = 6. (samotné číslo 6 nepřičítáme)

28 = 2×2×7, tj. dělitelé jsou 1, 2, 4, 7, 14 a 28. Sečteme 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28

496 = 2×2×2×2×31, tj. dělitelé jsou 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248. Sečteme 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496

Ano, všechna tato čísla jsou součtem svých dělitelů.

Bodování: celkem 10 bodů (0,5 bodu za každého dělitele)

Převody jednotek:

Základní jednotka	Menší jednotka	Metrická jednotka
zrno	---------------	4,92 mm
palec	5 zrn	24,6 mm
pěst	4 palce	98,4 mm
píď	8 palců	196,8 mm
střevíc	12 palců	29,5 cm
český loket	2 střevíce	59,15 cm
staročeský sáh	3 lokte	1,7745 m
látro	4 lokte	2,366 m
prut	8 loktů	4,732 m
míle česká	----------------	9,1396438 km

Tabulka 2 – řešení úlohy

1 palec = 5 zrn, 1 zrno = 4,92 mm. 1 palec se tedy rovná 5×4,92 mm.

1 pěst jsou 4 palce. 1 pěst je tedy 4×24,6 mm.

1 píď je 8 palců. 1 píď je tedy 8×24,6 mm.

1 střevíc je 12 palců. 1 střevíc je tedy 12×24,6 mm = 295,2 mm = 29,5 cm.

1 loket je 59,15 cm. 1 střevíc je 29,5 cm. 1 loket je tedy 59,15 ÷ 29,5 ≐ 2, tj. 2 střevíce

1 sáh jsou 3 lokte, 1 sáh se tak rovná 3×59,15cm. 177,45 cm = 1,7745 m.

1 látro jsou 2,366 m = 236,6 cm. 1 loket je 59,15 cm. 1 látro je tedy 236,6 ÷ 59,15 = 4 lokte

1 prut je 8 loktů. 1 prut je tedy 8×59,15 cm = 473,2 cm = 4,732 m.

Bodování: celkem 8 bodů (1 bod za každý správně doplněný údaj)

Abakus a abaku: Řešení abakové řady: 31 − 4 = 27 | 3 + 1 = 4 | 14 : 2 = 7 | √4 = 2 | 42 + 7 = 49 | 7^2 = 49 | 74 + 9 = 83 | 83 + 5 = 88 | 8 − 3 = 5 | 3 + 5 = 8 | 8 : 8 = 1 | 1 + 2 = 3 | 35 + 88 = 123

Jelikož žáci v 6. ročníku ještě neznají pojem mocniny a odmocniny, nepočítám dva příklady do bodování. Mohli tedy bez mocnin najít 11 příkladů (v zadání úlohy jsem schválně nechala 13 příkladů, žáci mají prostor přijít na princip mocnin sami pomocí vzorového příkladu).

Bodování: 11 bodů (1 bod za každý nalezený příklad) + 3 body za vytvoření vlastní abakové řady. (14 celkem)

(poznámka: žáci již abakové řady řešili a znají jejich princip, znají také základní mocniny a odmocniny, např. ví, že 2^2 chápeme jako 2*2 a je to tedy rovno 4)

6.2 Úlohy pro 7. ročník

Magické čtverce

Magický čtverec je tabulka s čísly:

- Čísla jsou uspořádána do řádků a sloupců.
- V tabulce jsou všechna čísla od 1 do (počet řádků * počet sloupců).
- Každé číslo se v tabulce objeví pouze jednou.
- Součet čísel v každém řádku, sloupci a úhlopříčce je stejný.

První zmínky o magických čtvercích pocházejí z Číny. Legenda o Lo Shu (650 př. n. l.) vypráví o želvě s magickým čtvercem na zádech. Za obrovské potopy řeky Lo objevil císař Yu želvu, která měla na zádech vzor čísel. Jak je již zřejmé, šlo o magickou želvu, protože na zádech měla magický čtverec o straně 3. Lo Shu čtverec je ještě zajímavý tím, že kterýkoli magický čtverec o straně 3 lze vytvořit právě z Lo Shu čtverce pomocí zrcadlení a rotace. Magická konstanta v tomto čtverci má hodnotu 15, tzn., že součet prvků v každém řádku, sloupci a úhlopříčce je stále stejný.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Obrázek 16 – Želva s magickým čtvercem na zádech

Nejznámější magický čtverec je namalován na obrazu Melancholia od známého německého malíře Albrechta Dürera (1471 - 1528) z roku ____ . Název obrazu neznamená melancholii, ale spíše nějaké zamyšlení. Na obrazu je tento magický čtverec (nyní zakrytý), protože tehdejší vědci věřili, že magické čtverce mohou vyléčit lidi trpící melancholií.

Doplňte chybějící číslice v magickém čtverci. (číslice od 1 do 16). Prostřední dvě číslice ve spodním řádku jsou zároveň rokem, kdy byl obraz namalován.

Obrázek 17 – Obraz Albrechta Dürera Melancholia

16			13
	10	11	
	6		
4			1

Trisekce úhlu

V roce 430 před naším letopočtem sužoval starořecké Athény mor. Athéňané se vydali na ostrov Délos v Egejském moři (na tomto ostrově se podle pověstí narodil bůh Apollón, do jehož resortu všechny problémy s morem spadaly), aby od místních věštců získali informaci, jak se s morem vypořádat. Bylo jim řečeno, že mají ve svém domovském chrámu postavit nový oltář, jehož objem bude dvojnásobkem objemu současného oltáře. Protože tento oltář měl přesně krychlový tvar, byli Athéňané (z matematického pohledu) postaveni před úkol zkonstruovat krychli o dvojnásobném objemu než je zadaná krychle. Provést v oné době nějakou geometrickou konstrukci navíc znamenalo provést ji pouze s pomocí pravítka (které na sobě nemá žádné značky, jednotky délky apod.) a kružítka.

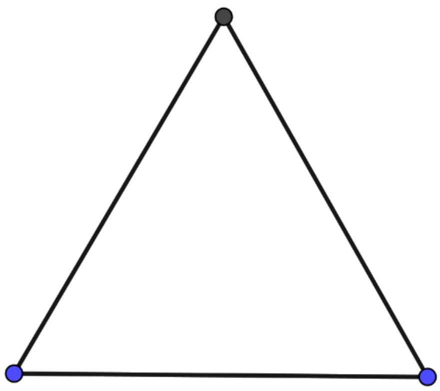
Taková je (velmi stručná) historie jednoho ze tří slavných starověkých geometrických problémů, tzv. Delského problému. Tři problémy starověku jsou:

• Zdvojnásobení krychle (Délský problém), to je nalezení hrany krychle o dvojnásobném objemu než je zadaná krychle.

• Trisekce úhlu, to je rozdělení daného úhlu na třetiny. (ve speciálních případech)

• Kvadratura kruhu, to je nalezení strany čtverce, jehož obsah je roven zadanému kruhu.

Zkuste vyřešit druhý z problémů, tzn. trisekci úhlu (který je ve speciálních případech řešitelný). Proveďte trisekci úhlu, který má 90°. Můžete použít kružítko, pravítko s ryskou a tento rovnostranný trojúhelník.



Egyptské zlomky

Staří Egypťané neznali pojem čitatele a měli znaky pouze pro zlomky jedna polovina, jedna třetina, jedna čtvrtina atd. Dnes pro tyto zlomky s čitatelem 1 užíváme název kmenné zlomky. Egypťané tyto zlomky zapisovali tak, že nad číslo udávající velikost jmenovatele umístili značku připomínající tvar oka. Počítání s těmito zlomky bylo velmi pracné. Každý zlomek museli zapsat jako součet navzájem různých kmenných zlomků.

Jakým způsobem by zapsali např. zlomek $\frac{9}{16}$?

Snažíme se rozložit čitatele ve sčítance, kteří jsou děliteli jmenovatele, aby krácením vznikly zlomky s čitatelem jedna: $\frac{9}{16} = \frac{8+1}{16} = \frac{8}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{16}$

Zapište tímto způsobem tyto zlomky: $\frac{5}{12}, \frac{7}{20}, \frac{13}{36}$

6.2.1 Řešení a bodování

Magické čtverce: Součet čísel ve všech řádcích, sloupcích a úhlopříčkách má být stejný. Jedna úhlopříčka je kompletní, tedy určíme součet na této úhlopříčce:

3 + 6 + 11 + 13 = 34

Součet na úhlopříčce je 34, 34 tak bude hledaným součtem na každém řádku, sloupci a zbývající úhlopříčce.

Druhá úhlopříčka: 34 – 16 – 10 – 1 = 7

Nyní máme více možností jak pokračovat, když se ale podíváme na první řádek, jsou v něm dva docela velká čísla: 34 – 16 – 13 = 5, musíme tedy do dvou polí doplnit čísla tak, aby jejich součet byl 5. Číslice 1 a 4 již ve čtverci jsou, zbývající možnost jsou tedy čísla 2 a 3. Víme tedy, že do prvního řádku máme doplnit čísla 2 a 3, nevíme však, v jakém pořadí. Zkusme proto spočítat druhý a třetí sloupec:

34 – 10 – 6 = 18. Toto nám stačí, teď už víme, že musíme doplnit trojku, jelikož kdybychom do tohoto sloupce doplnili číslo 2, zbývalo by nám doplnit číslo 16 a to se už ve čtverci nachází. Nyní doplníme zbývající číslice ve spodním řádku, čili 15 a 14. Ze zadání úlohy víme, že tato dva čísla zároveň představují rok namalování obrazu – 1514.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

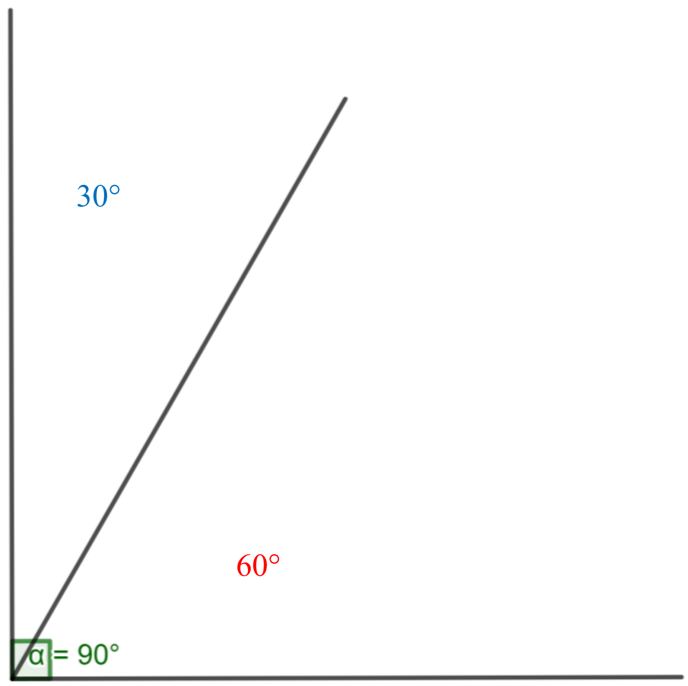
Dále zbývají doplnit dva prostřední řádky. Máme k dispozici čísla 5, 8, 9 a 12. Spočteme druhý řádek: 34 – 10 – 11 = 13. Máme tedy doplnit dva čísla tak, aby jejich součet byl 13, což splňuje ze zbývajících čísel pouze dvojice 5 a 8. Tedy víme, že do třetího řádku zbývá doplnit čísla 9 a 12, nevíme ale, v jakém pořadí. Součet čísel ve čtvrtém sloupci je 14,

34 – 14 = 20, součet 20 nám dají čísla 8 a 12. Nyní už máme magický čtverec kompletní.

Postupů řešení je více, lze najít rychlejší a jednodušší způsoby řešení.

Bodování: celkem 4 body (1 bod doplnění čísla 7, 2 body doplnění zbytku čtverce, 1 bod doplnění roku namalování obrazu)

Trisekce úhlu: V rovnostranném trojúhelníku je velikost jednoho úhlu 60°, lze tedy vyřešit pomocí odčítání úhlů. Sestrojíme si pravý úhel (90°) a přeneseme do něj úhel z trojúhelníku. 90°- 60° = 30°.



Druhým způsobem řešení by bylo sestrojit osu jednomu z úhlů v trojúhelníku, čili jej rozpůlit: 60 ÷ 2 = 30, dostaneme tak dva úhly o velikosti 30°. Třetím způsobem by bylo doplnit úhel 60°na úhel pravý.

Bodování: celkem 2 body (1 bod správné vyvození, že úhel v rovnostranném trojúhelníku má velikost 60°, 1 bod za sestrojení úhlu o velikosti 30°)

Egyptské zlomky: Chceme upravit zlomek na součet zlomků tak, aby čitatelé byly rovny jedné. Rozdělíme tedy pětku na součet 3 + 2 a upravíme:

$$\frac{5}{12} = \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$$

Druhý způsob:

$$\frac{5}{12} = \frac{4}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$$

Takto postupujeme i u dalších dvou zlomků:

$$\frac{7}{20} = \frac{5}{20} + \frac{2}{20} = \frac{1}{4} + \frac{1}{10}$$

$$\frac{13}{36} = \frac{12}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{3} + \frac{1}{36}$$

Nebo:

$$\frac{13}{36} = \frac{9}{36} + \frac{4}{36} = \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$$

Bodování: celkem 3 body (1 bod za každý vyřešený zlomek)

6.3 Úlohy pro 8. ročník

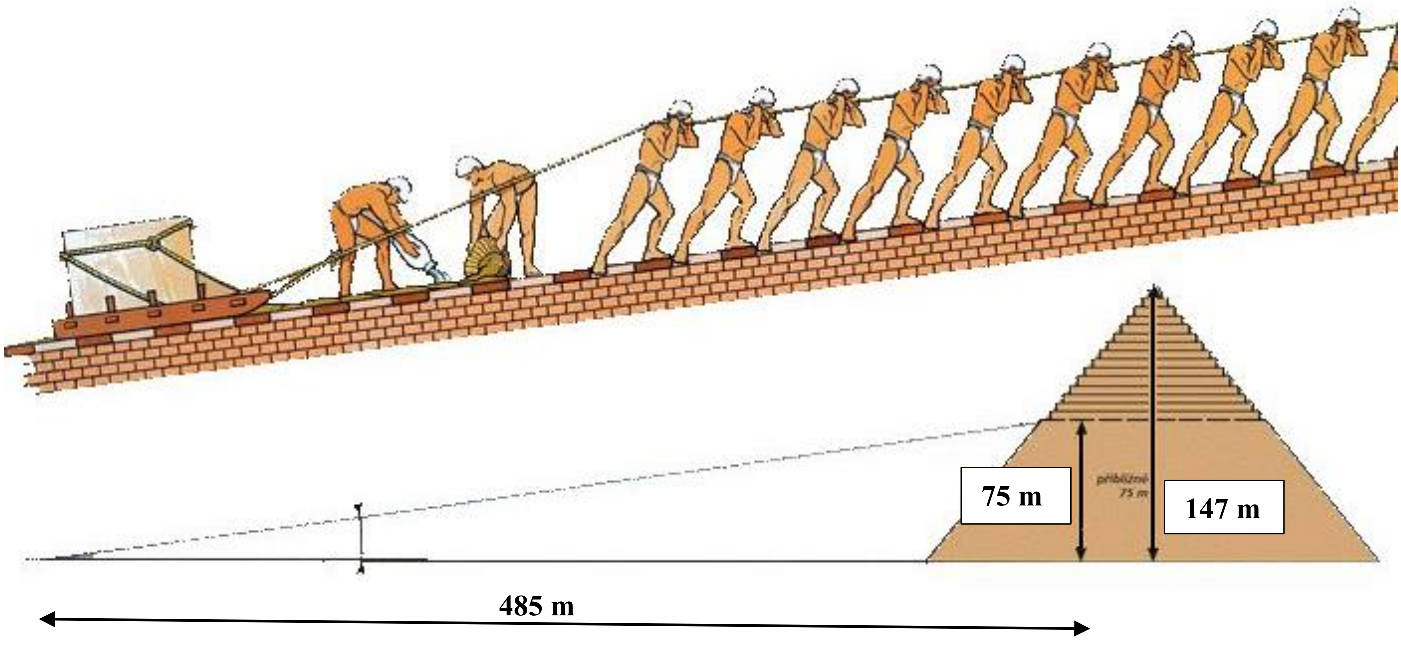
Cheopsova (Chufuova) pyramida

Velká pyramida je jeden ze sedmi antických divů světa a stojí více než 4000 let. Nechal ji postavit faraon Chufu (Cheops).

Největší záhadou Cheopsovy pyramidy zůstává její výstavba. Jak mohli Egypťané zvedat kamenné kvádry do výšky až 150 metrů. Nedochoval se o tom totiž žádný zápis, ale některé stopy nám umožňují předložit určitou teorii. Víme, že Egypťané využívali bahno z Nilu k „promazávání“ ramp. Tyto rampy se stavěly z neustále zvlhčovaných nepálených cihel, které vyráběli řemeslníci v dílnách v sousedství staveniště. Rampy neměly příliš vysoký sklon (maximálně 9 stupňů, jinak by totiž byly pro zlezení příliš strmé) a využívaly se k vytahování největších kvádrů, používaných ve spodní části pyramidy.

Představte si, že jste starověcí egyptští stavitelé pyramid. Vaším úkolem je postavit rampu, po které lze vynášet na pyramidu materiál potřebný ke stavbě.

Na základě údajů z obrázku vypočítejte délku rampy.



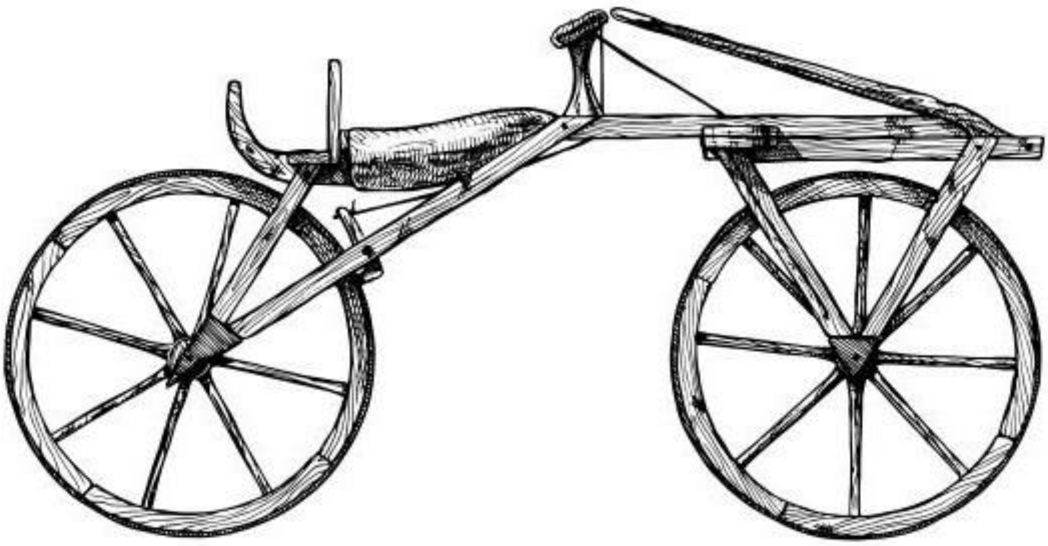
Obrázek 18 – Obrázek k zadání úlohy o Cheopsově pyramidě

Nejstarší jízdní kolo

Psal se rok 1817, kdy světlo světa spatřil první předchůdce kola. Bývalý úředník Karl von Drais z Mannheimu sestrojil první běžící stroj. Byl vyroben ze dřeva a měl dvě kola. Jezdec ho poháněl svými nohami, kterými se odrážel od země, přičemž dosáhl rychlosti asi 15 kilometrů za hodinu. Mohli bychom ho přirovnat k dětskému odrážedlu nebo koloběžce, protože fungoval na stejném principu. Přední kolo se dalo otáčet do stran a tak jezdec mohl řídit i směr.

Obrázek 19 – První běžící stroj podobný jízdnímu kolu

Vypočítejte průměr jednoho kola u stroje na obrázku, jestliže jeho obvod je 326 cm.



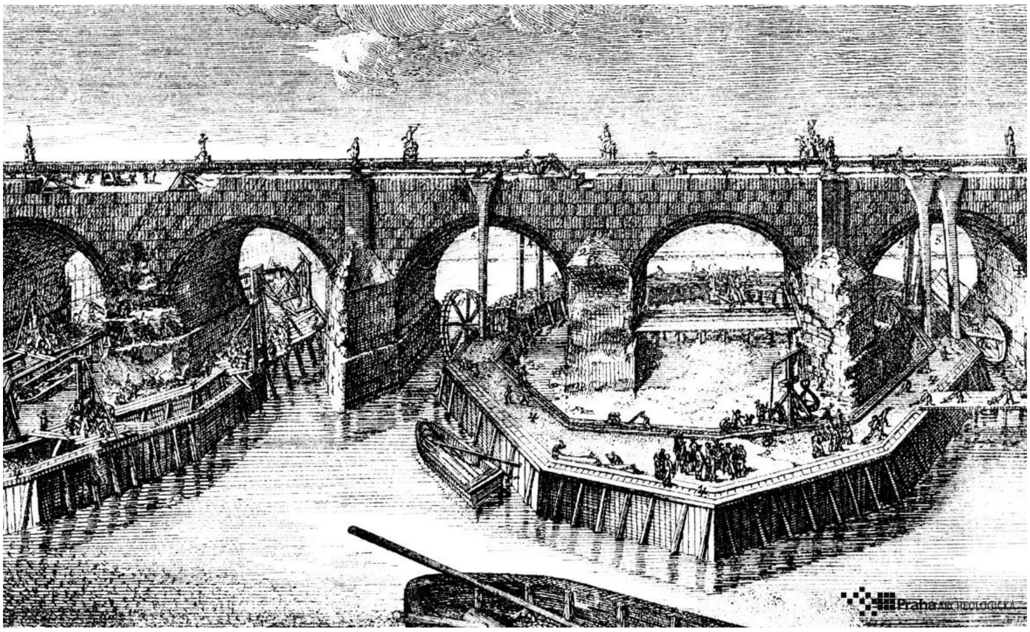
Obrázek 20 – Kresba prvního běžícího stroje – předchůdce kola

Karlův most

Karlův most je nejstarším dochovaným mostem přes Vltavu v Praze. Most byl postaven na místě Juditina mostu, který byl stržen povodní v roce 1342. Stavba nového mostu začala v roce 1357 pod záštitou krále Karla IV. a byla dokončena v roce 1402, trvala tedy 45 let. Most byl postaven z pískovcových kvádrů, které byly spojeny železnými sponami. Pilíře mostu, kterých je celkem 15, jsou založeny na dřevěných roštech. Most byl několikrát poškozen povodněmi a požáry. Na mostě se nachází 30 soch, z nichž nejznámější je socha svatého Jana Nepomuckého.

Představte si, že jste stavitel na dvoře Karla IV. a máte za úkol postavit Karlův most v Praze. Máte k dispozici 100 kameníků, kterým trvá postavit jeden pilíř za 30 dní. Most potřebuje 15 pilířů

Určete, kolik dní potrvá postavit Karlův most s daným počtem kameníků.



Obrázek 21 – Kresba zachycující výstavbu Karlova mostu

6.3.1 Řešení a bodování

Cheopsova pyramida: Úlohu lze řešit pomocí Pythagorovy věty. Podle údajů z obrázku doplníme příslušné rozměry do vzorce. Počítáme délku nejdelší strany čili přepony:

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 485^2 + 75^2$

$c = \sqrt{240850}$

$c \triangleq 490{,}765$

Odpověď: Délka rampy je přibližně 490,765 metrů.

Bodování: celkem 3 body (1 bod správné dosazení do vzorce, 1 bod výpočet a 1 bod výsledek)

Nejstarší jízdní kolo: Průměr kola vypočteme ze vzorce pro obvod kruhu:

$O = \pi \times d$

Obvod je znám ze zadání, proto dosadíme do vzorce:

$326 = \pi \times d$

Vyjádříme d:

$d = 326/\pi$

A dopočítáme:

$d \doteq 103{,}769$ cm

Odpověď: Průměr kola na obrázku je přibližně 103,769 cm.

Bodování: celkem 3 body (1 bod správné dosazení do vzorce, 1 bod výpočet a 1 bod výsledek)

Karlův most: Úlohu lze řešit pomocí trojčlenky:

100 kameníků …………. 1 pilíř ………….. 30 dní

100 kameníků …………... 15 pilířů ………… x dní

Větší počet pilířů bude stejnému počtu kameníku trvat postavět za více dní, jedná se tedy o přímou úměru.

$X = \frac{15 \times 30}{1}$

X = 450 dní

Odpověď: Karlův most potrvá 100 kameníkům postavit 450 dní.

Bodování: celkem 3 body (1 bod správně sestavená trojčlenka, 1 bod výpočet a 1 bod výsledek), jakýkoliv jiný správný postup se správným výsledkem rovněž 3 body.

6.4 Úlohy pro 9. ročník

Kryštof Kolumbus

V roce 1492 se italský mořeplavec Kryštof Kolumbus vydal na svou první expedici, která nakonec vedla k objevení Ameriky. Tato událost změnila světovou historii a ovlivnila budoucí vývoj Evropy a Ameriky.

Lodě pluly ze španělského přístavu Palos de la Frontea do ostrova Guanahani, známého také jako San Salvador v Karibiku. Tato vzdálenost byla přibližně 7500 kilometrů. Průměrná rychlost lodi byla **v** kilometrů za den. Celkový čas cesty byl vypočten na 75 dní, ovšem vlivem mořských proudů se cesta zrychlila. Mořské proudy dosahovaly průměrné rychlosti 20 km/den.

Obrázek 22 – Lodě Kryštofa Kolumba

Vypočítejte, o kolik dní byla cesta vlivem mořských proudů rychlejší.

Lanchesterův model boje

Bitva u Borodina proběhla 7. září 1812. Jednalo se o největší a nejkrvavější jednodenní bitvu napoleonských válek. Zúčastnilo se jí celkem na čtvrt miliónu vojáků. Tato bitva, v níž se utkala vojska francouzského císaře Napoleona I. a ruského generála Michaila Kutuzova, skončila podle vojenských historiků nerozhodně.

Lanchesterův model boje říká, že počet bojovníků v daném čase se rovná počátečnímu počtu bojovníků vynásobenému konstantou síly a časem. Model předpokládá, že obě strany mají konstantní bojovou sílu a že jejich ztráty jsou přímo úměrné velikosti jejich bojové síly. (tedy, čím více má armáda bojovníků, tím vyšší bude mít i ztráty)

Konstanta síly v Lanchesterově modelu představuje míru efektivity bojových jednotek jedné strany ve srovnání s jednotkami druhé strany.

Obecně platí, že konstanta síly (označovaná někdy jako k) se liší v závislosti na konkrétních okolnostech boje, včetně typů používaných zbraní, taktiky, výcviku jednotek atd.

Pomocí Lanchesterova modelu boje vypočítejte, která strana by měla větší konstantu síly za těchto podmínek:

- Čas boje – 24 hodin.
- Počáteční počet bojovníků: Napoleon – 130 000 (ztráta až 58 000 mužů)
  Kutuzov – 112 000 (ztráta až 45 000 mužů)
- Konstanta síly: k

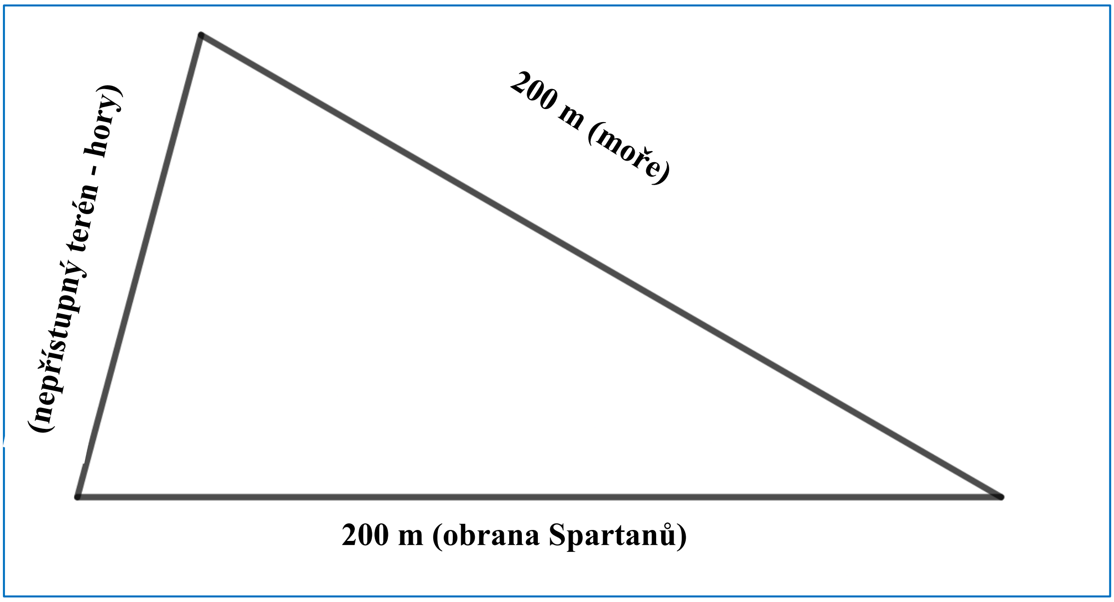
Obrázek 23 – Kresba bitvy U Borodina

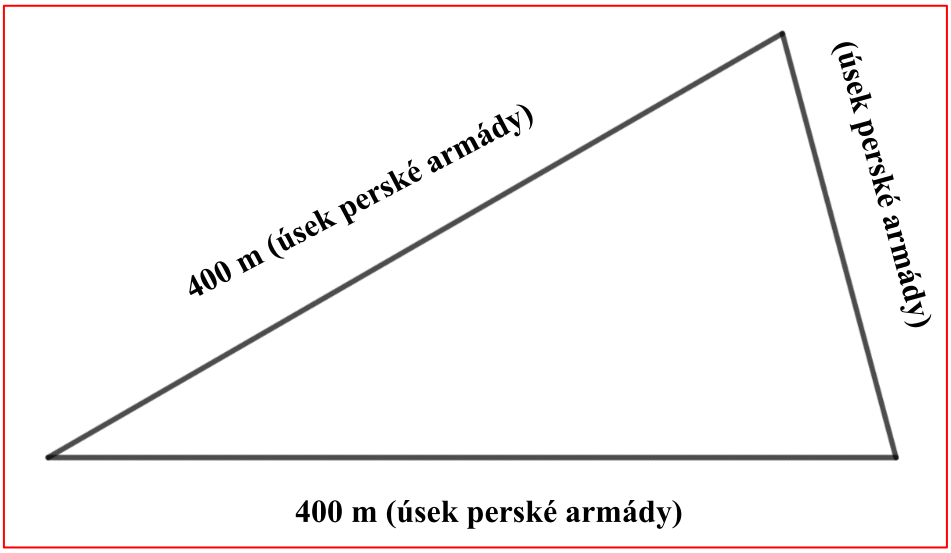
Bitva u Thermopyl

Bitva u Thermopyl, která se odehrála v roce 480 př. n. l. během řecko-perských válek, byla jednou z nejslavnějších bitev starověku. Řecký městský stát Sparta vedl král Leonidas s aliancí dalších řeckých měst, aby se postavil proti perské invazi vedené králem Xerxem I. Skončila sice porážkou řeckých vojsk, ale Spartští bojovníci vykázali nezdolnou statečnost a odvahu před přesilou perské armády.

Před bitvou byl připraven obranný postup, který byl založen na využití terénu, konkrétně průsmyku u Thermopyl, který byl ohraničen strmými horami a mořem – znázorňuje první trojúhelník. Druhý trojúhelník znázorňuje rozestavení perské armády.

Určete, zda jsou trojúhelníky podobné. Pokud ano, tak pomocí podobnosti trojúhelníků spočítejte, jaký je poměr délek stran řeckého opevnění v Thermopylách (trojúhelník v modrém rámečku) a úseku perské armády (trojúhelník v červeném rámečku). Určete koeficient podobnosti a přemýšlejte, jaká výhoda vyplývá pro řeckou armádu. Své nápady uveďte.





6.4.1 Řešení a bodování

Kryštof Kolumbus: Celková délky cesty byla 7500 km. Loď by tuto vzdálenost urazila bez vlivu proudů za 75 dní. Průměrná rychlost lodi byla tedy 100 km/den.

$$v = s/t$$

$$v = 7500/75$$

$$v = 100$$

Rychlost mořských proudů byla 20 km/den. Sestavíme tedy rovnici: (neznámou označíme jako t – čas)

$$100 * t + 20 * t = 7500$$

$$120\,t = 7500$$

$$t = 7500/120$$

$$t = 62{,}5\ dní$$

Původní délka cesty byla vypočtena na 75 dní, proudy tak tuto cestu urychlily o 12 a půl dne.

Jiné řešení: k rychlosti lodi přidáme rychlost mořských proudů, dostaneme tedy výslednou rychlost 120 km/den.

$$t = s/v$$

$$t = 7500/120$$

$$t = 62{,}5$$

Bodování: celkem 3 body (1 bod výpočet rychlosti lodi, 1 bod sestavení rovnice, 1 bod výsledek)

Lanchesterův model boje: počet bojovníků v daném čase se rovná počátečnímu počtu bojovníků vynásobenému konstantou síly a časem

- Čas boje – 24 hodin.
- Počáteční počet bojovníků: Napoleon – 130 000 (ztráta až 58 000 mužů)
  Kutuzov – 112 000 (ztráta až 45 000 mužů)
- Konstanta síly: k

Počet bojovníků na konci bitvy: Napoleon – 72 000

Kutuzov - 67 000

Vytvoříme rovnice:

$$72\,000 = 130\,000 * k1 * 24$$

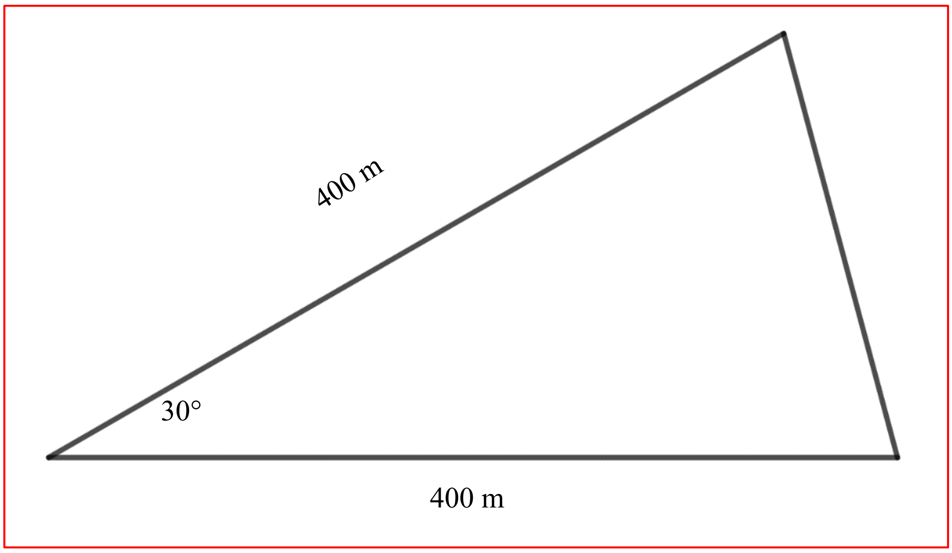
$$67\,000 = 112\,000 * k2 * 24$$

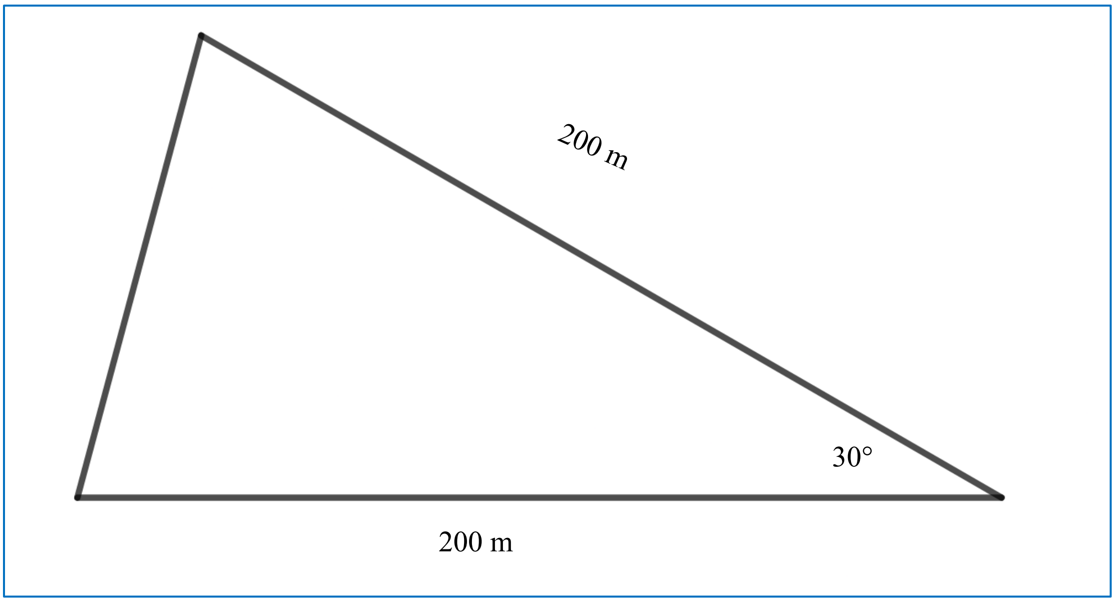
Z první rovnice je $k_1 \doteq 0{,}023$, z druhé rovnice je $k_2 \doteq 0{,}025$.

Větší konstantu bojové síly má tak armáda generála Kutuzova.

Bodování: celkem 4 body (2 body za každou rovnici – 1 bod sestavení rovnice, 1 bod správné řešení)

Bitva u Thermopyl: Z obrázků je patrné, že dvě strany mají stejnou velikost, navíc úhel jimi sevřený má v obou případech 30°. Můžeme tedy říct, že trojúhelníky jsou podobné podle věty sus.





Koeficient podobnosti: |x| = k × |y|

Stranu modrého trojúhelníka označíme jako x, stranu červeného jako y.

Dosadíme do rovnice:

200 = k * 400

k = 0,5

Poměr délek stran: 200:400 = 1:2

Bodování: celkem 3 body (1 bod určení podobnosti, 1 bod poměr, jeden bod koeficient)

7 Výzkumná část

Výzkumu se zúčastnili žáci základní školy v Bystřici nad Olší. Základní škola a mateřská škola Bystřice 848, okr. Frýdek-Místek, příspěvková organizace je úplná spádová škola s devíti postupnými ročníky. Školní areál je součástí většího celku, který tvoří základní školy, mateřské školy a dům dětí a mládeže. Tuto školu navštěvuje 515 žáků ve 27 třídách, z toho na I.stupni 253 žáků ve 13 třídách a na II.stupni 262 ve 14 třídách. Na druhý stupeň přicházejí žáci z okolních obcí a vesnic. Na druhém stupni je v každém ročníku vytvořena jedna výběrová třída, složena převážně z nadaných žáků. V matematice projevují většinou tito žáci kvalitní koncentraci, dobrou paměť, zálibu v řešení problémových úloh a svými znalostmi přesahují stanovené požadavky. Je jim nabízena možnost pracovat na počítači se speciálními vzdělávacími programy, individuálně pracovat s naučnou literaturou (hlavolamy, kvízy, záhady, problémové úlohy), navštěvovat vyučovací hodiny ve vyšších ročnících. Žákům jsou zadávány náročnější samostatné úlohy, jsou pověřováni vedením a řízením skupin při skupinové práci. Žákům je dáván prostor pro hlubší bádání a zkoumání.

7.1 Cíl výzkumné části

Cílem výzkumné části bylo srovnání žáků tzv. studijních tříd – výběrové třídy složené převážně z nadaných žáků a běžných tříd jednotlivých ročníků 2. stupně základní školy. Hypotézou, kterou jsem chtěla tímto testováním ověřit byla, že žáci studijních tříd dosáhnou při řešení úloh lepších výsledků, jelikož v matematice dosahují pravidelně lepších studijních výsledků (například při srovnávacích testech). Tito žáci celkově projevují větší zájem o vzdělání a vyšší míru kreativity a tvořivosti při řešení problémových či netypických úloh. Pro každý ročník byly vytvořeny 3 úlohy obsahující učivo, které by žáci měli mít již osvojené. V rámci srovnávání bylo zkoumáno, kolik úloh žáci zvládli vypočítat a zdali došli ke správnému výsledku. Za každou úlohu mohli získat daný počet bodů. Část bodů získali, pokud zvolili postup vedoucí ke správnému výsledku, ovšem ve výpočtu udělali chybu a plný počet pak za správný výsledek s jakýmkoliv postupem řešení. Pravidla bodování jsou uvedena vždy v části s řešením úlohy. Dále jsem přiložila ukázky některých žákovských řešení – zvolila jsem jednak ukázky správných postupů, dále některá řešení, která mi přišla zajímavá či netypická, ale také některá řešení zcela špatná nebo nedokončená.

7.2 Metody výzkumu

7.2.3. Kruskal – Wallisův test

Pro kvantitativní část výzkumu jsem se rozhodla využít neparametrické alternativy analýzy rozptylu – Kruskalův-Wallisův test, neboli jednofaktorová neparametrická ANOVA. Tento test je zobecněním neparametrického Mannova-Whitneyho testu. Stejně jako Mannův-Whitneyho test tak netestuje shodu konkrétních parametrů, ale shodu výběrových distribučních funkcí srovnávaných souborů s tím, že klíčovým předpokladem je zde nezávislost pozorovaných hodnot.

Je-li k počet srovnávaných výběrů, pak nulovou a alternativní hypotézu Kruskalova-Wallisova testu vyjádříme jako

$H_0 : F_1(x) = F_2(x) = \ldots = F_k(x)$, H_1 : nejméně jedna F_i je odlišná od ostatních.

Hlavní myšlenkou Kruskal-Wallisova testu je, že za platnosti H_0 jsou sloučené hodnoty ze všech výběrových souborů tak dobře promíchané, že průměrná pořadí odpovídající jednotlivým souborům jsou podobná. Pro výpočet testu tedy opět seřadíme všechna pozorování podle velikosti (jako by pocházely z jednoho výběru) a přiřadíme jednotlivým hodnotám pořadí (R_{ij} bude označovat pořadí j-té hodnoty v i-té skupině). Označme k celkový počet skupin, n celkový počet pozorování a $n_1, n_2, \ldots, n_k$ počty pozorování v jednotlivých skupinách ($n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$). Dále označme T_i součet pořadí v i-té skupině:

$$\boldsymbol{T_i = \sum_{j=1}^{ni} R_{ij}}$$

Stejně jako u jiných statistických testů hodnotíme hypotézu pomocí testové statistiky, která se v případě Kruskal-Wallisova testu nazývá H statistika. H statistika je dána následujícím vzorcem:

$$H = \left[\frac{12}{n(n+1)} \sum_{j=1}^{c} \frac{T_j^2}{n_j}\right] - 3(n+1)$$

Ve vzorci je n celkový počet pozorování ve všech skupinách, T_j je součet pořadí pro každou skupinu a n_i je počet pozorování v každé skupině. Hodnota 12 zůstává ve vzorci konstantní, protože se přirozeně vyskytuje ve vztahu k průměru součtu čtverců mezi pořadími skupin.

Pokud je v každé skupině alespoň 5 pozorování, kritická hodnota Kruskal-Wallisova testu je přibližně stejná jako hodnota Chi-kvadrát - Chí-kvadrát test, také známý jako $\chi 2$ test, je v matematické statistice jakýkoli test statistické hypotézy, u kterého má testovací kritérium za předpokladu platnosti nulové hypotézy chí-kvadrát rozdělení. Tyto testy se často používají při ověřování hypotéz o diskrétních rozděleních, kde se pracuje s četnostmi různých hodnot pozorovaných znaků.

Dále se určují tzv. stupně volnosti (*Degrees of freedom – df*), což je počet testovaných skupin mínus 1. Pokud je výsledná hodnota H vyšší než tabulková hodnota, lze zamítnout nulovou hypotézu.

degrees of	Significance level			
freedom	5%	2%	1%	0.01%
1	3.841	5.412	6.635	10.830

Tabulka 3 – Tabulka pro stupeň volnosti s hodnotou 1

Pro tento výzkum byla při výpočtu použita hodnota úrovně důležitosti (significance level) 5%.

7.3 Výzkumný soubor

Výzkumná část diplomové práce byla uskutečněna na ZŠ a MŠ Bystřice 848, okres Frýdek-Místek, příspěvková organizace. Výzkum pobíhal během měsíce března roku 2024.

Celkem se výzkumu účastnily dvě třídy 6. ročníku, dvě třídy 7. ročníku, dvě třídy 8. ročníku a dvě třídy 9. ročníku. Konkrétně se jednalo o skupiny 14 a 13 žáků 6. ročníků, 16 a 13 žáků 7. ročníku, 18 a 15 žáků 8. ročníku a 21 a 14 žáků 9. ročníku. V 6. ročníku jsou srovnávány dvě běžné třídy, a to z důvodu, že 6. ročník nemá vytvořenou studijní třídu a tudíž jsou nadaní žáci rozmístěni ve všech třídách.

7.4. Průběh výzkumu

Hlavní část výzkumu probíhala v den, kdy na škole nebyli přítomni pedagogové matematiky a třídy tak měly suplované hodiny matematiky – pedagogové, kteří v jednotlivých třídách tuto hodinu suplovali, dostali vytištěné úlohy s instrukcemi, jak žákům úlohy předložit a jak s nimi dále pracovat. Každý žák dostal papír se zadáním úloh svého příslušného ročníku, tj. tři úlohy. K nim dále dostal čistý list papíru určený pro výpočty, výpočty i výsledky mohli žáci ovšem vpisovat i přímo do zadání. Pracovat měli pokud možno individuálně. Na řešení úloh měli celou vyučovací hodinu, což bylo po odečtení času potřebného ke sdělení instrukcí a rozdání úloh přibližně 40 minut čistého času. Na konci hodiny odevzdal každý žák podepsaný papír s úlohami a podepsaný papír s výpočty (podpis byl nutný z důvodu pozdějšího přiřazení dvojic papírů k sobě, jelikož jsem počítala s variantou, že někteří žáci si budou dělat výpočty pouze na čistý papír a výsledky vpisovat do zadání), pro průběh výzkumu by ovšem stačily anonymní verze.

Třídy, které jsem do výzkumu chtěla zapojit a nemohly úlohy řešit v daný den, dostaly úlohy k řešení již v rámci standardní hodiny matematiky pod dohledem svého vyučujícího tohoto předmětu. Instrukce a průběh byly stejné.

Pro vyhodnocení kvantitativní části a porovnání tříd jsem použila již zmíněný Kruskal-Wallisův test, potřebné hodnoty jsem zadávala do online Kruskal-Wallis Test Calculator. (*https://www.socscistatistics.com/tests/kruskal/default.aspx*)

7.5 Vyhodnocení a interpretace výsledků

Vyhodnocení výzkumu probíhalo ve třech krocích. Pro vyhodnocení kvantitativní části – ověření předem stanovené hypotézy a porovnání tříd jsem použila již zmíněný Kruskal-Wallisův test, potřebné hodnoty jsem zadávala do online Kruskal-Wallis Test Calculator. (*https://www.socscistatistics.com/tests/kruskal/default.aspx*)

Tabulka udává získaný počet bodů u jednotlivých žáků (1. sloupec) a 2. sloupec udává pořadí žáků, ovšem v obráceném sledu. Žák, který je v tabulce první v pořadí dosáhl nejmenšího počtu bodů a naopak. (tedy, je-li v obou 6. ročnících 27 žáků, kteří řešili úlohy, žák, který je v pořadí 27. je z tohoto souboru nejúspěšnějším řešitelem) Bodové hodnoty jsou v tabulce seřazeny vzestupně čili od nejmenšího bodového zisku po nejvyšší.

6.5.1 6. ročník

V 6. ročníku se do řešení úloh zapojilo celkem 27 žáků ze dvou tříd. Jak již bylo dříve zmíněno, v letošních 6. ročnících není vytvořena studijní třída, a proto zde předem stanovená hypotéza postrádá smysl. I přes tuto skutečnost jsem i zde volila test Kruskal-Wallis s očekávaným výsledkem zamítnutí hypotézy. Hodnota H by tedy měla vyjít vyšší, než je daná hodnota z tabulky a tím by mělo být vyvrácení počáteční hypotézy potvrzeno.

Běžná třída 1		**Běžná třída 2**	
Body	pořadí	Body	pořadí
2	1	4	6
3	3	4	6
3	3	6	8
3	3	6	9
4	6	7	10
10	11.5	11	14.5
10	11.5	13	19
10	13	13	19
11	14.5	15	22
12	16	16	23
12	17	16	24
13	19	20	25
14	21	21	26
28	27		
			T: 211.5
	T: 166.5		
Počet žáků: 14		Počet žáků: 13	

Tabulka 4 - Výsledky Kruskal-Wallisova testu pro 6. ročník

Interpretace výsledků: Žáci 6. ročníku mohli celkem za vyřešení úloh získat 32 bodů. Z tabulky lze vyčíst, že nejúspěšnější řešitel získal bodů 28, což je výrazně více, než získali ostatní žáci. V pořadí druhý nejúspěšnější řešitel ze stejné třídy (když bereme v potaz jen třídu číslo 1) dosáhl jen polovičního počtu bodů. Celkově lze říct, že ve třídě číslo 1 jsou výsledky různorodější neboli bodové zisky jsou výrazněji odstupňovány než ve třídě číslo 2, kde dosáhlo více žáků vyšších bodových zisků, rozdíly zde nejsou tak výrazné.

Písmeno T na konci sloupce znázorňujícího pořadí udává celkový součet žákovských pořadí. Jelikož platí, že čím je pořadí vyšší, řešitel je úspěšnější, platí tento fakt i pro hodnotu T. Lepších výsledků tak dosáhla třída číslo 2 s hodnotou T: 211,5.

Výpočet hodnoty H:

$$The\ H\ statistic\ is\ 2.0493\ (1,\ N\ =\ 27).$$

$$H\ =\ (12/(N(N+1))\ *\ (\sum T2/n)\ -\ 3(N+1)$$

$$H\ =\ 0.016\ *\ 5421.103\ -\ 84$$

$$H\ =\ 2.0493$$

Hodnota čísla H je rovna 2,0493. Tabulková hodnota pro ověření platnosti hypotézy je pro H=3,841. Výsledná hodnota je výrazně nižší, což hypotézu zamítá. I přes tento původní předpoklad je výsledek překvapivý, jelikož třída číslo 2 dosáhla v průměru lepších výsledků.

Průměr bodového zisku na žáka: Běžná třída 1 = 9,6429 bodu

Běžná třída 2 = 11,6923 bodu

6.5.2. 7. ročník

V 7. ročníku řešilo úlohy celkem 29 žáků, 16 z běžné třídy a 13 ze třídy výběrové. Lze zde tedy již brát plně v úvahu na počátku stanovenou hypotézu – žáci výběrové třídy by měli dosáhnout výrazně lepších výsledků.

Běžná třída		**Výběrová třída**	
Body	pořadí	Body	pořadí
1	1	3	5
3	5	4	12.5
3	5	4	12.5
3	5	5	18.5
3	5	6	22.5
3	5	6	22.5
3	5	6	22.5
4	12.5	6	22.5
4	12.5	7	22.5
4	12.5	7	26
4	12.5	7	26
4	12.5	8	28.5
4	12.5	8	28.5
5	18.5		
5	18.5		T: 273.5
5	18.5		
	T: 161.5		
Počet žáků: 16		Počet žáků: 13	

Tabulka 5 - Výsledky Kruskal-Wallisova testu pro 7. ročník

Interpretace výsledků: Žáci 7. ročníku mohli za vyřešené úlohy získat celkový počet 9 bodů. Z tabulkových údajů lze vidět, že téměř plný počet bodů, konkrétně 8, získali hned 2 řešitelé (oba ze studijní třídy). V této třídě bylo také dalších 7 žáků, kteří dosáhli celkově na 7 nebo 6 bodů. Z běžné třídy jsou pak nejúspěšnějšími řešiteli tři žáci, kteří získali po pěti bodech. Zde je velmi patrný rozdíl mezi oběma třídami, jelikož ve třídě studijní dosáhli pěti nebo méně bodů pouze čtyři žáci, kdežto ve třídě běžné žáci všichni. Dále si lze všimnout, že ve studijní třídě je bodová škála širší, kdežto ve třídě běžné získala většina žáků po čtyřech nebo třech bodech. Mezi všemi řešiteli z těchto tříd nikdo výrazně “nevyčnívá“, pouze snad řešitel z běžné třídy s jedním bodem.

Hodnoty T se taky výrazně liší, u třídy běžné je to 161,5 na rozdíl od třídy studijní, kde hodnota dosahuje čísla 273,5. Z této hodnoty lze určit i průměrné pořadí, kde by nejlepší v pořadí dosahoval čísla 29 (v tomto případě jsou zde 2 řešitelé s pořadím 28,5) – u třídy běžné by bylo průměrným pořadím číslo 10,09, u třídy výběrové by toto číslo dosahovalo hodnoty 21,04. Toto lze volně interpretovat jako rozdíl jedenácti míst v pořadí, tedy rozdíl velmi patrný.

Výpočet hodnoty H:

$$\textit{The H statistic is } 11.8505\ (1,\ N = 29).$$

$$H = (12/(N(N+1)) * (\sum T2/n) - 3(N+1)$$

$$H = 0.014 * 7384.16 - 90$$

$$H = 11.8505$$

Hodnota H zde dosahuje velmi vysokého čísla, H= 11,8505, což je přibližně 8 jednotek rozdíl oproti tabulkovému H= 3,841. V porovnání s hodnotou u 6. ročníků, kde rozdíl nebyl tak velký a dosažená hodnota H byla nižší než hodnota tabulková, je zde rozdíl obou hodnot velmi výrazný, a navíc číslo H je větší než hodnota z tabulky – tento fakt potvrzuje předem vyřčenou hypotézu. Žáci studijní třídy tedy dosáhli výrazně lepších výsledků než žáci třídy běžné.

Průměr bodového zisku na žáka: Běžná třída = 3,625 bodu

Výběrová třída = 5,923 bodu

6.5.3. 8. ročník

V 8. ročníku se do řešení úloh zapojilo celkem 33 žáků ze dvou tříd. Z běžné třídy celkem 18 žáků, ze třídy studijní pak žáků 15. Považuji za důležité zde zmínit, že sada úloh pro 8. ročník byla ze všech nejjednodušší, a proto také předpokládám, že výsledky mohou být touto skutečností poněkud zkreslené.

Běžná třída		**Výběrová třída**	
Body	pořadí	Body	pořadí
2	1	4	2
6	6	6	6
6	6	8	10
6	6	9	22
6	6	9	22
6	6	9	22
6	6	9	22
9	22	9	22
9	22	9	22
9	22	9	22
9	22	9	22
9	22	9	22
9	22	9	22
9	22	9	22
9	22	9	22
9	22		
9	22		T: 282
9	22		
	T: 279		
Počet žáků: 18		Počet žáků: 15	

Tabulka 6 - Výsledky Kruskal-Wallisova testu pro 8. ročník

Interpretace výsledků: Žáci 8. ročníku mohli za vyřešení úloh získat celkový počet devíti bodů. Tohoto maximálního bodového počtu dosáhlo celkem 23 žáků, což jsou dvě třetiny zúčastněných. Ve studijní třídě dosáhlo tohoto výsledků 12 žáků z celkových 15, tedy výrazná většina, ve třídě běžné pak 11 žáků z 18, což lze rovněž vyhodnotit jako vysokou úspěšnost, kterou ale přikládám ne příliš velké náročnosti úloh. V běžné třídě získalo pak zbytek žáků po šesti bodech a jeden řešitel body 2, ve třídě studijní dosahoval nejnižší bodový zisk hodnoty 4.

Hodnoty T se v těchto třídách liší pouze o 3, v běžné třídě je tato hodnota T=279, ve druhé třídě studijní je hodnota T = 282. Pokud spočítáme průměrné pořadí žáků, v první třídě dostaneme číslo 15,5. Ve třídě výběrové je to pak číslo 18,8.

Výpočet hodnoty H:

$$The\ H\ statistic\ is\ 0.9529\ (1,\ N\ =\ 33).$$

$$H\ =\ (12/(N(N+1))\ *\ (\sum T2/n)\ -\ 3(N+1)$$

$$H\ =\ 0.011\ *\ 9626.1\ -\ 102$$

$$H\ =\ 0.9529$$

Hodnota H vyšla 0,9529. Na první pohled je toto číslo výrazně menší než tabulková hodnota (3,841) a také menší než hodnoty u předchozích dvou ročníků. Jelikož je výsledná hodnota nižší než hodnota z tabulky, hypotéza je zamítnuta – v osmém ročníku tedy výběrová třída nedosáhla výrazně lepšího výsledku než třída běžná, ovšem je třeba připomenout možné ovlivnění výsledků náročností úloh.

Průměr bodového zisku na žáka: Běžná třída = 7,6111 bodu

Výběrová třída = 8,4 bodu

6.5.4 9. ročník

V 9. ročníku se do řešení úloh zapojilo celkem 35 žáků ze dvou tříd, řešitelů ze třídy běžné bylo celkem 21, ze třídy studijní bylo pak řešitelů 14.

Běžná třída		**Výběrová třída**	
Body	pořadí	Body	pořadí
0	1	3	8.5
1	2	4	15
2	4	4	15
2	4	4	15
2	4	6	24.5
3	8.5	6	24.5
3	8.5	6	24.5
3	8.5	6	24.5
3	8.5	6	24.5
3	8.5	6	24.5
4	15	8	31.5
4	15	9	34
4	15	9	34
4	15	9	34
6	24.5		
6	24.5		T: 334
6	24.5		
6	24.5		
6	24.5		
6	24.5		
8	31.5		
	T: 296		
Počet žáků: 21		Počet žáků: 14	

Tabulka 7 - Výsledky Kruskal-Wallisova testu pro 9. ročník

Interpretace výsledků: Žáci devátých ročníků mohli za vyřešené úlohy získat maximální počet 10 bodů. Tohoto výsledku se nepodařilo dosáhnout žádnému řešiteli, avšak mezi žáky studijní třídy dosáhli tři z nich na celkový počet devíti bodů. Nejúspěšnější řešitel z běžné třídy dosáhl skóre osmi bodů. Zde ve výsledcích běžné třídy poprvé vidíme, že jeden z žáků nezískal za úlohy ani jeden bod (odevzdal prázdný papír, nelze tedy určit, zda se o řešení úloh alespoň pokoušel a nedokázal žádnou vyřešit nebo řešit ani nezačal). Z bodových ohodnocení lze dále vyčíst, že žáci běžné třídy dosahovali celkově nižšího skóre, 10 z nich získalo 3 nebo méně bodů, což je nejnižší bodový zisk ve třídě studijní, kde ho dosáhl pouze jeden žák.

Hodnota čísla T se zde neliší až tak výrazně, ovšem toto je ovlivněno rozdílem v počtu žáků ve třídách. Když toto číslo přepočteme do průměrného pořadí, ve třídě studijní dosáhneme čísla 23,9, ve třídě běžné pak čísla 14,1, což už je rozdíl méně zanedbatelný.

$$The\ H\ statistic\ is\ 7.6236\ (1,\ N\ =\ 35).$$

$$H\ =\ (12/(N(N+1))\ *\ (\sum T2/n)\ -\ 3(N+1)$$

$$H\ =\ 0.01\ *\ 12140.476\ -\ 108$$

$$H\ =\ 7.6236$$

Výpočet hodnoty H: V tomto ročníku dosahuje hodnota H čísla 7,6236. Rozdíl od tabulkové hodnoty H=3,841 není tak výrazný jako u 7. ročníku, není ale zanedbatelný. Jelikož je výsledná hodnota vyšší než hodnota z tabulky, hypotéza o větší úspěšnosti řešitelů ze třídy výběrové je opět potvrzena.

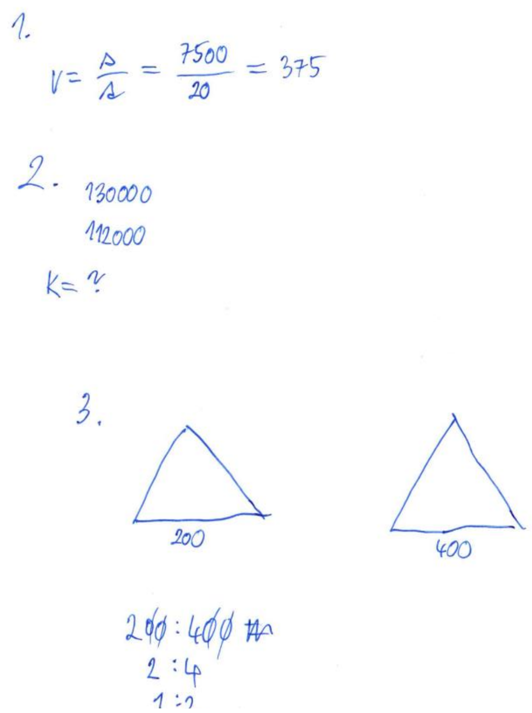
Průměr bodového zisku na žáka: Běžná třída = 3,9047 bodu

Výběrová třída = 6,1429 bodu

7.6 Ukázky vybraných žákovských řešení

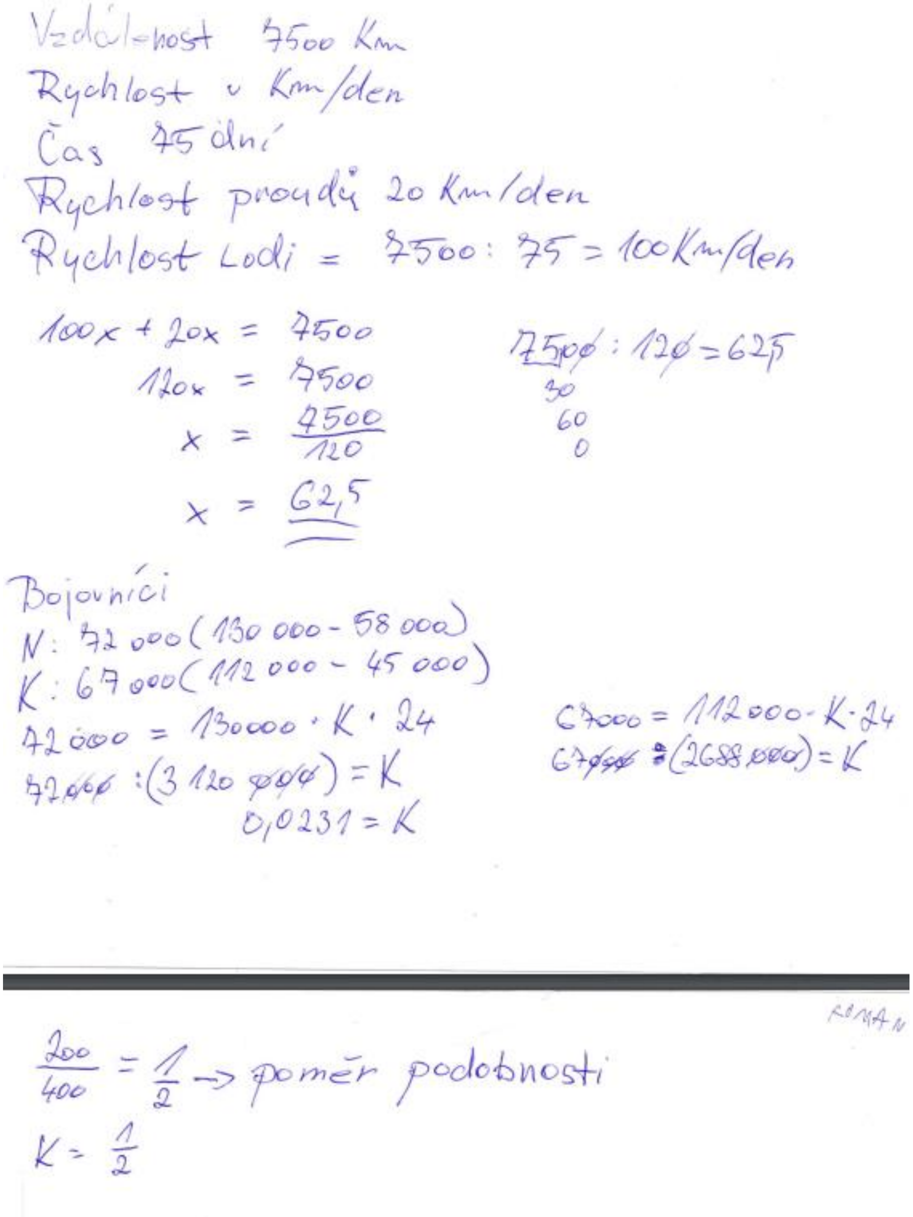
Do této kapitoly jsem se rozhodla zahrnout ukázky některých z žákovských řešení, které mě zaujaly, dále také těch, které byly zcela správně a i takových, které byly buď nedokončené nebo zmatené a vyskytovaly se v nich chyby.

Zde je ukázka ne zcela povedeného řešení jednoho z žáků 9. ročníku. Lze si všimnout, že v prvním příkladě je sice zvolen správný vzorec, ovšem za čas t je dosazen nikoliv správně čas cesty lodí, ale rychlost mořských proudů. Výsledkem je tedy číslo, které žákovi nijak dále nepomohlo ve výpočtech a tímto celé řešení první úlohy skončilo. Ve druhé úloze je náznak nějakého zápisu známých hodnot, ovšem úloha rovněž není dokončena. Třetí úloha je, jak se zdá z náčrtku a výpočtu poměru pochopena, alespoň z části, ovšem také zůstala nedokončena.



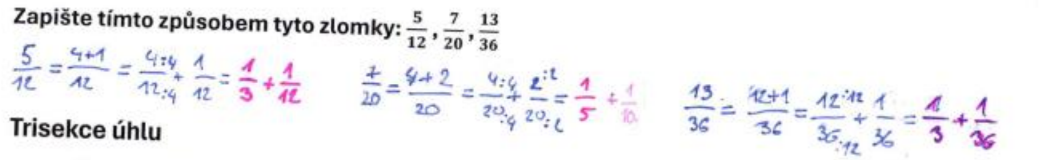
Obrázek 24 – Ukázka řešení

Další ukázka, tentokrát správného řešení sady úloh pro 9. ročníky. V první úloze žák správně dosadil potřebné údaje do rovnice, rovnice je vypočtena se správným výsledkem. Ve druhé úloze jsou rovněž všechny údaje vypočteny správně a dosazeny do rovnice, ze které je vypočten koeficient k. V poslední úloze je určen poměr podobnosti i koeficient.



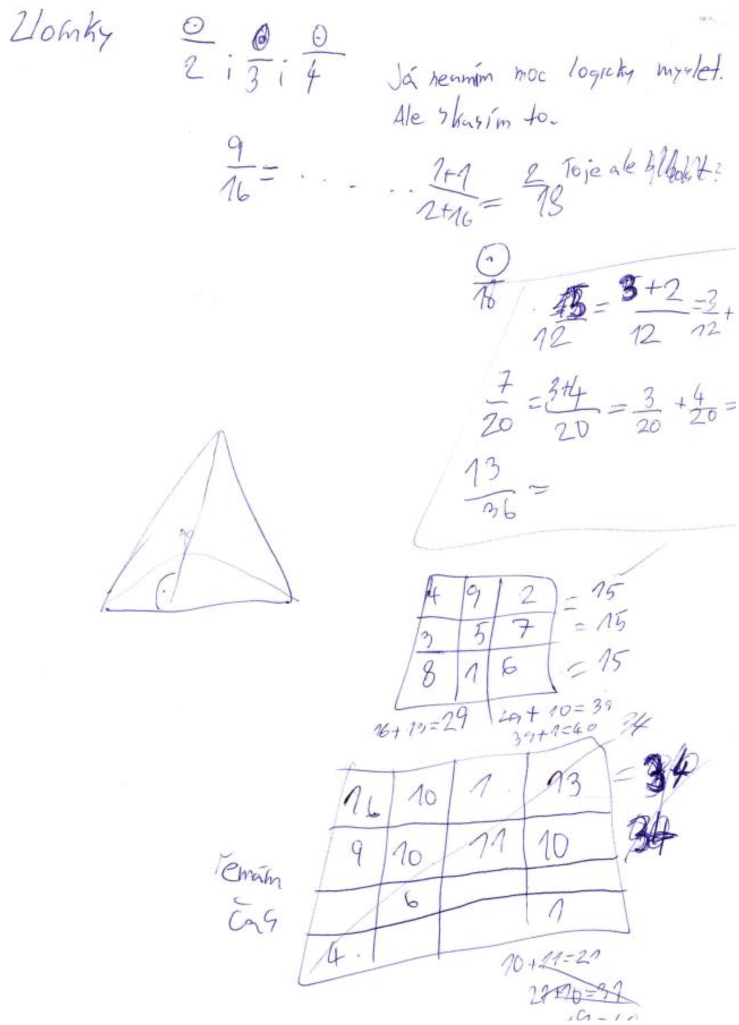
Obrázek 25 – Ukázka řešení

Ukázka řešení úlohy o egyptských zlomcích ze sady úloh pro 7. ročník. Žákyně úlohu pochopila správně a dokázala zadané zlomky rozložit na součty zlomků tak, aby výsledné zlomky obsahovaly v čitateli číslici 1.



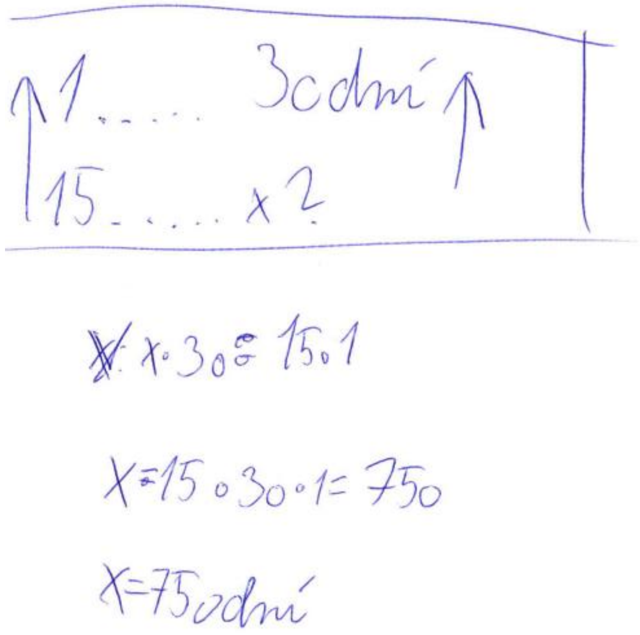
Obrázek 26 – Ukázka řešení

Následuje opět řešení úloh pro 7. ročník, tentokrát pokus o řešení všech tří úloh. První z nich, zlomky, obsahuje nějaký rozklad zadaného zlomku, ovšem nedokončený, žákyně neupravila zlomek na potřebného čitatele. Dále lze z řešení vyčíst řešení trisekce úhlu, ovšem není jasné, zdali jde jen o pokus nějakého náčrtku nebo se jedná o vědomé správné řešení. V úloze magických čtverců se nejprve nachází ověření, že čtverec nalezený na zádech želvy je skutečně čtvercem magickým. Dále lze vidět pokus o řešení Dürerova magického čtverce, bohužel však, zřejmě z časových důvodů, nedokončený.



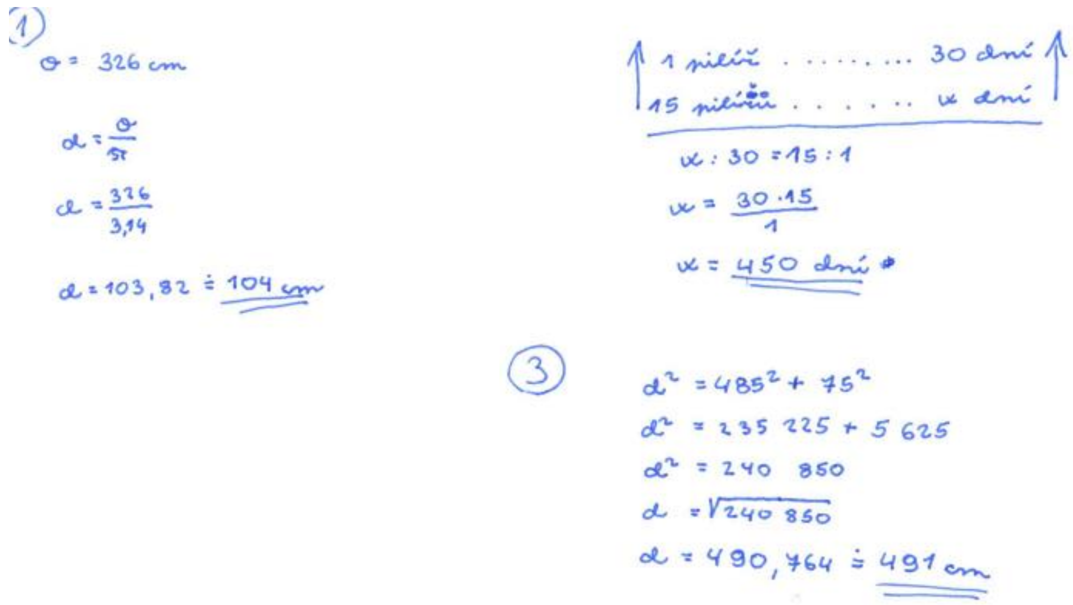
Obrázek 27 – Ukázka řešení

Následující ukázka zobrazuje řešení úlohy ze sady pro 8. ročník, konkrétně se jedná o úlohu o Karlově mostě. Trojčlenka je sestavena správně, následná rovnice je nejspíš zamýšlena správně, ale není už zcela správně napsaná (na prvním řádku). Druhý řádek rovnice je už zcela v pořádku, tento součin by skutečně vedl na správné řešení. Chyba je však v konečném výpočtu.



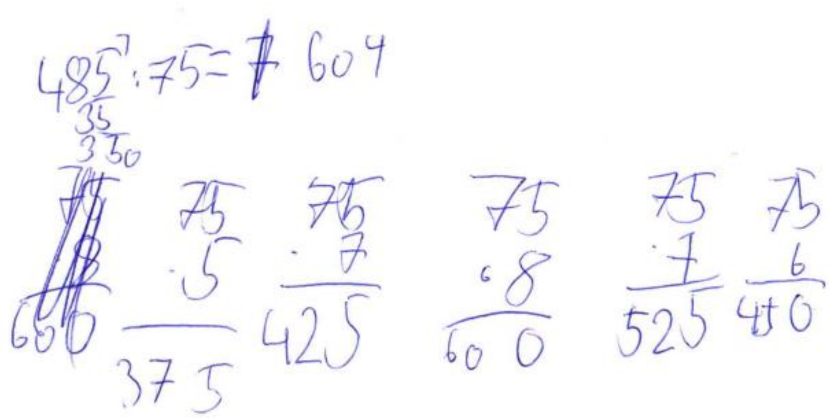
Obrázek 28 – Ukázka řešení

Následuje ukázka správného řešení všech úloh osmého ročníku. V první úloze je správně vyjádřen vzorec pro výpočet průměru, v pořádku je také dosazení hodnot do vzorce a samotný výpočet. V úloze druhé je opět správně sestavená trojčlenka, tentokrát i s dobrým výsledkem. Třetí úloha ukazuje korektní použití Pythagorovy věty a výpočet chybějící strany trojúhelníku.



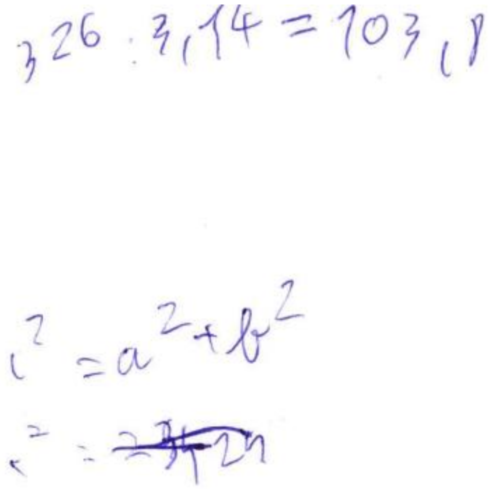
Obrázek 29 – Ukázka řešení

Další řešení úlohy o pyramidě, tentokrát však ne zcela zdařilé. Žák provedl dělení, které mu dále nijak nepomohlo ve výpočtu, jelikož je spočítáno špatně a také pro dosažení správného výsledku zcela nepotřebné.



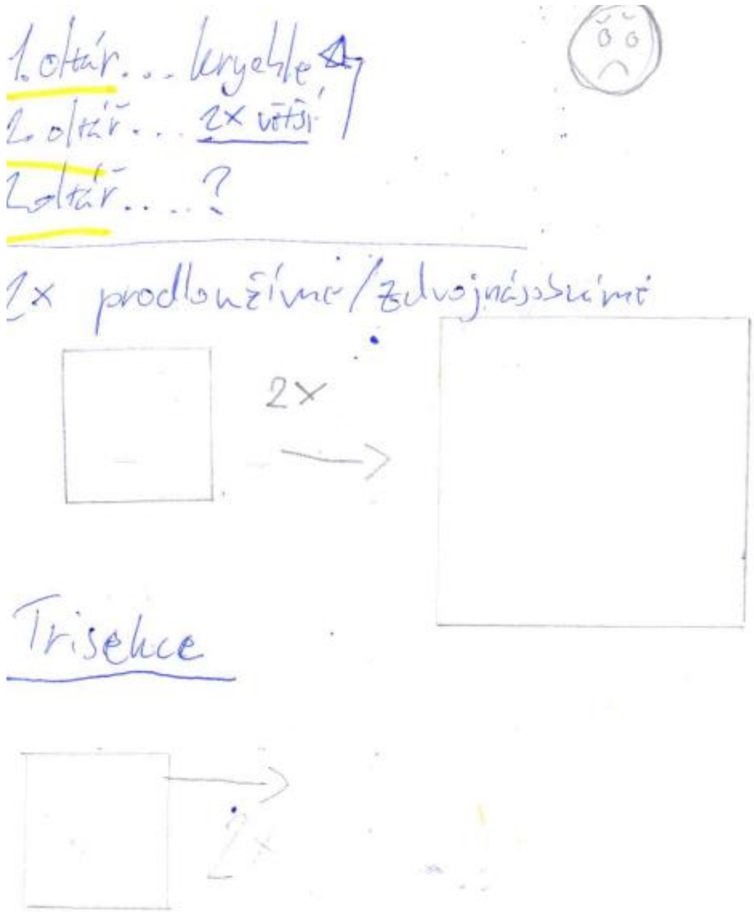
Obrázek 30 – Ukázka řešení

Následuje ještě jedna ukázka řešení úloh pro 8. ročník. Zde je proveden správný výpočet průměru, jen ve výsledku chybí jednotky. Úloha s Pythagorovou větou je nejspíš pochopena správně, jelikož žák přišel na to, že k výpočtu větu potřebuje, následný výpočet už ale neprovedl.



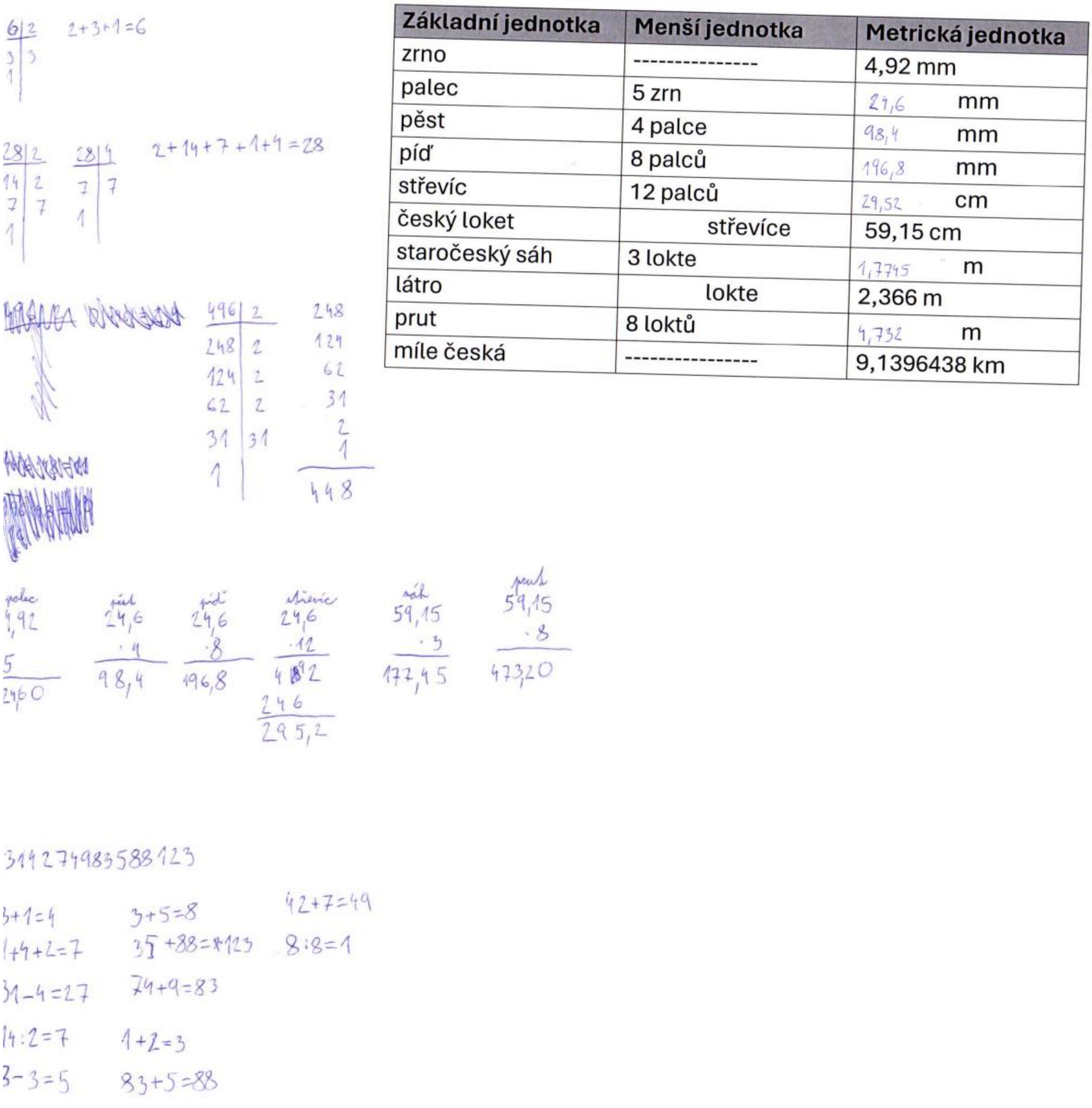
Obrázek 31 – Ukázka řešení

Následující řešení nejspíš zobrazuje pokus o vyřešení jednoho ze tří matematických problémů starověku, tj. zdvojení krychle. Žákyně 7. ročníku sestrojila čtverec a následně zdvojnásobila délku jeho strany a zřejmě se o totéž pokoušela při trisekci, což ovšem dále nevedlo.



Obrázek 32 – Ukázka řešení

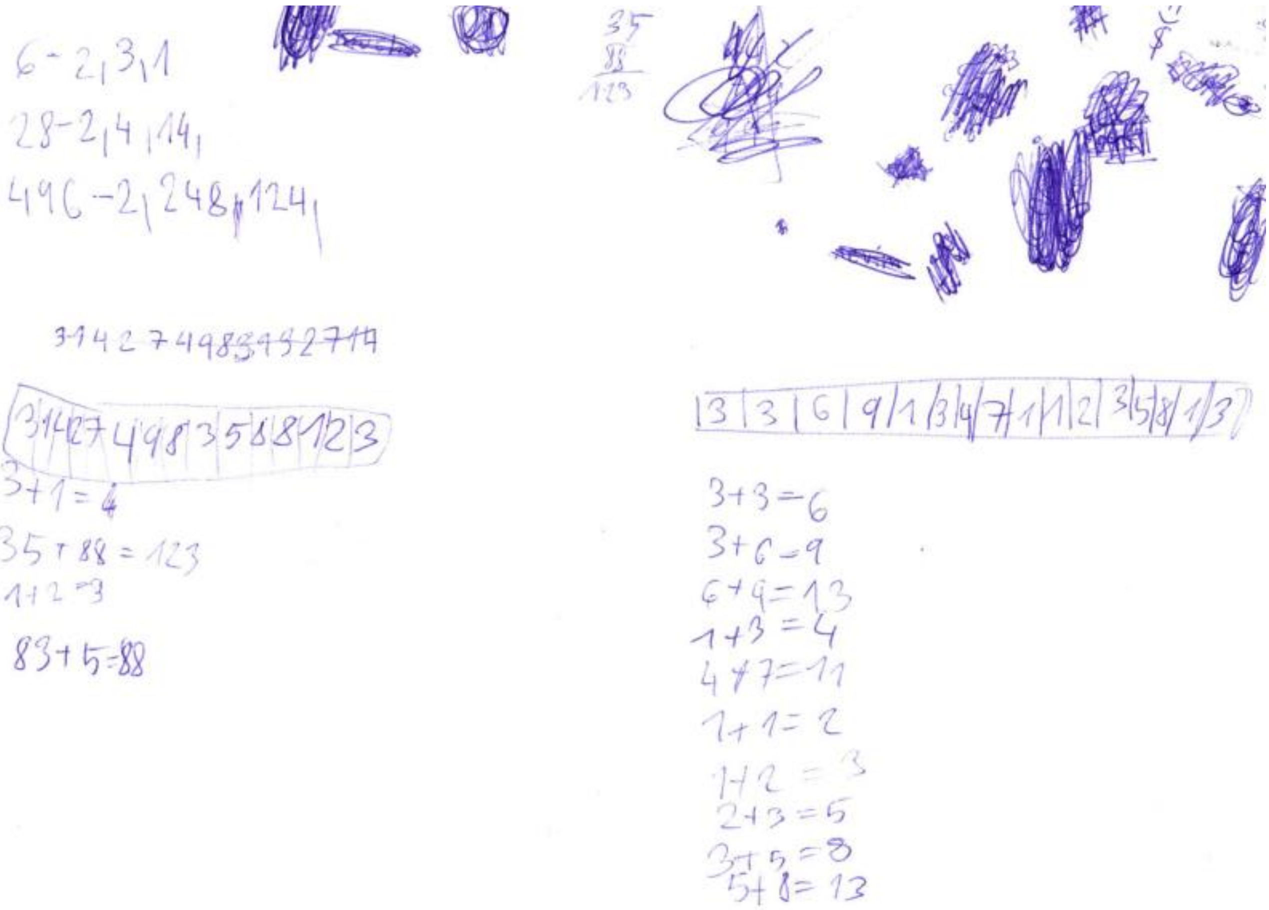
V této ukázce řešení jdou vidět prvočíselné rozklady a následné sčítání dělitelů, které má vést k ověření, zda je dané číslo dokonalé. U čísla 496 jsou ovšem někteří dělitelé nepřičteni, konkrétně číslo 4, 8 a 16, písemné sčítání je bohužel také nepřesné. Pod zmíněnými rozklady jsou vidět výpočty vedoucí k doplnění tabulky s převody jednotek, která je doplněna velmi pečlivě, ovšem místa na doplnění ve druhém sloupci tabulky byla nejspíš přehlídnuta.



Základní jednotka	Menší jednotka	Metrická jednotka
zrno	---------------	4,92 mm
palec	5 zrn	24,6 mm
pěst	4 palce	98,4 mm
píď	8 palců	196,8 mm
střevíc	12 palců	29,52 cm
český loket	střevíce	59,15 cm
staročeský sáh	3 lokte	1,7745 m
látro	lokte	2,366 m
prut	8 loktů	4,732 m
míle česká	----------------	9,1396438 km

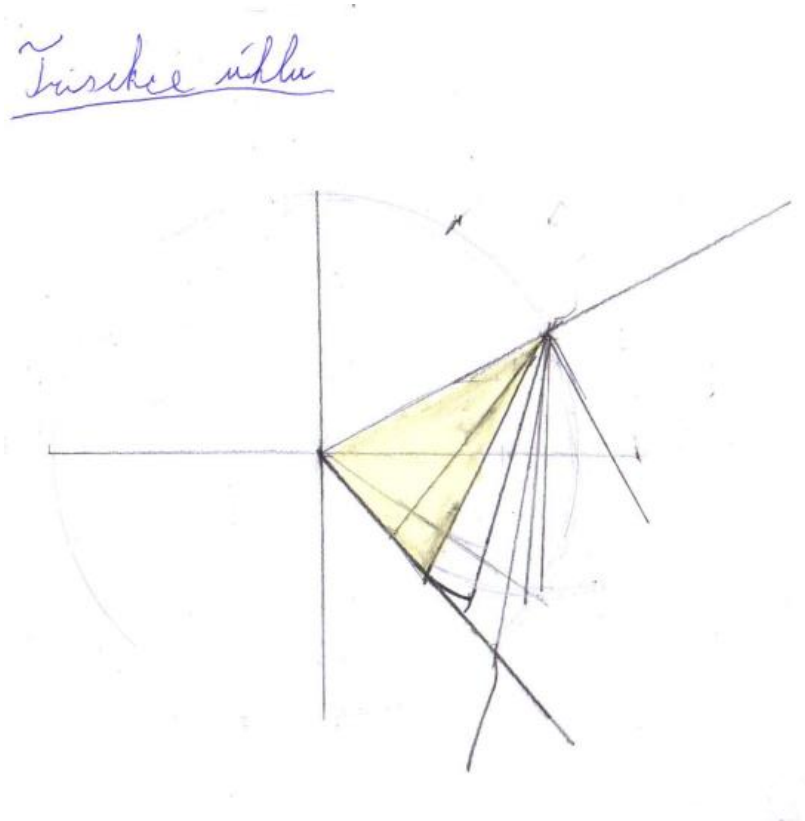
Obrázek 33 – Ukázka řešení

Následuje rovněž ukázka řešení ze sady úloh pro 6. ročník. V úloze o dokonalých číslech se žákyně pokusila o nalezení dělitelů, z těch, které vypsala, je patrné, že pojmu dělitele rozumí, ovšem nenašla všechny, nemohla tak úlohu dokončit. Abaková řada je rozpracovaná, nalezeny byly bohužel jen čtyři příklady. Následně se žákyně pokusila o vytvoření vlastní řady, což ji nejspíš zabralo nejvíce času – první čtyři čísla na sebe skutečně navazují a dodržují tak pravidla abaku řady, následně je však chybně proveden jinak dobře zamýšlený součet 6 + 9, který není roven 13, ale 15. Dále pak celá řada pokračuje už správně a jelikož je dost dlouhá (minimum bylo 6 čísel), mohly za ní být uděleny i patřičné body.



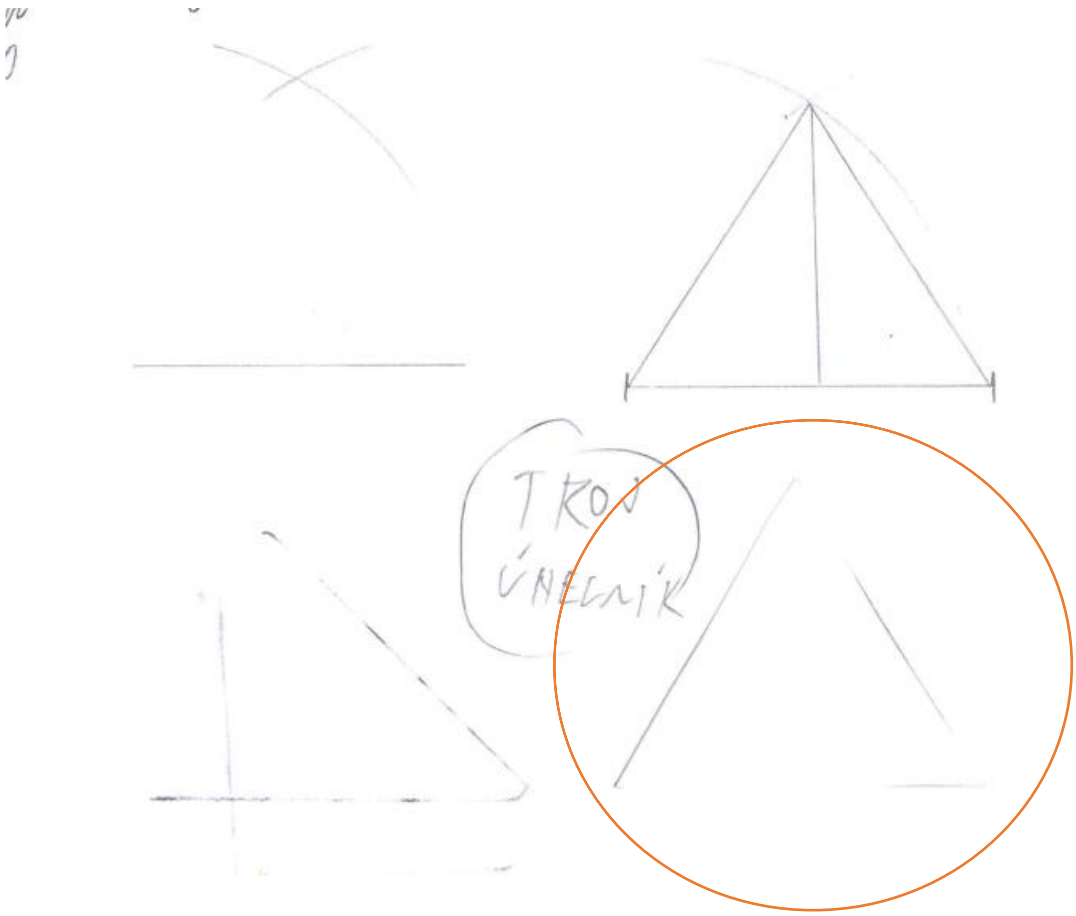
Obrázek 34 – Ukázka řešení

Na následující ukázce je zachycen zajímavý pokus o řešení úlohy s trisekcí úhlu. Z obrázku lze vyčíst, že žák sestrojil kružnici, její průměr a kolmici, čímž získal čtyři úhly o velikosti 90°, dále je jeden z těchto úhlů rozpůlen, tj. získání úhlu o velikosti 45°. Následný postup již není zcela jasný.



Obrázek 35 – Ukázka řešení

Následující ukázka jiného řešení úlohy o trisekci úhlu – trojúhelník zakroužkován oranžově je vystřižený trojúhelník z původního zadání úlohy (což na obrázku bohužel není vidět). Nad ním je sestrojený další totožný trojúhelník, rozdělený na poloviny, což by samo o sobě jako řešení úlohy stačilo, jelikož trojúhelník je rovnostranný, rozpůlením úhlu tedy vznikne úhel o velikosti 30°.



Obrázek 36 – Ukázka řešení

Závěr

Cílem této diplomové práce bylo vytvoření matematických úloh s dějepisnou tematikou pro žáky druhého stupně základní školy. Úlohy obsahovaly jak učivo, které je dáno rámcovým vzdělávacím programem a žáci daného ročníku by jej měli mít osvojené, tak také problémy, se kterými se žáci dosud při výuce nesetkali.

Následně bylo provedeno výzkumné zkoumání, ve kterém byly srovnány dvě třídy z každého ročníku druhého stupně. Výzkumu se zúčastnila vždy jedna třída tzv. studijní, tedy třída složená převážně ze žáků nadaných či se zájmem o vzdělávání a především matematiku, druhá třída pak byla třída běžná, tedy třída složená se žáků rozdílné úrovně a studijních předpokladů. Pouze mezi žáky šestých ročníků byly srovnávány dvě třídy běžné z důvodu neexistující třídy studijní pro tento ročník. Cílem výzkumu bylo ověření stanovené hypotézy, která říkala, že žáci studijních tříd dosáhnou viditelně lepších výsledků při řešení daných úloh než žáci ze tříd běžných. Těmto žákům byly předloženy vytvořené úlohy, každý se žáků dostal kompletní zadání se třemi úlohami odpovídajícími úrovni jeho věku a ročníku. Na řešení úloh měli žáci cca. 40 minut čistého času. Jejich odpovědi byly následně vyhodnoceny a obodovány dle příslušného bodování vytvořeného pro každou z úloh. Bodové zisky pak byly zapsány do tabulky pro výpočet hodnot pomocí Kruskal-Wallisova testu. Výpočty byly provedeny pomocí online kalkulátoru pro test Kruskal-Wallis.

Výsledné hodnoty testu prokázaly platnost hypotézy pro ročník sedmý a devátý – žáci studijních tříd dosáhli skutečně při řešení úloh podstatně lepších výsledků. V osmém ročníku výsledek hypotézu zamítl, toto ovšem bylo odůvodněno nízkou náročností úloh. V ročníku šestém byla hypotéza rovněž zamítnuta, což vzhledem k výjimce – absenci třídy studijní – není výsledek překvapivý.

Druhá část výzkumu se věnuje řešením některých žáků, která byla buď zajímavá, zcela správná nebo také ne zcela povedená. Cílem této části bylo ukázat různorodost řešení a případně objevit nějaký zajímavý postup uplatněný při řešení.

Zdroje

1) Abaku. (n.d.). *Abaku*. https://abaku.cz/

2) Bastl, B., Ježek, F., & Lávička, M. (2014). Pythagorův odkaz v geometrickém modelování. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, 59*(1), 6-16.

3) Beránek, J. (2010). *Využití historických témat ve vyučování matematice na 1. Stupni základní školy.*

4) Blahová, K. (2020). *Vývoj měr a vah v českých zemích.* [Bakalářská práce] Masarykova univerzita. https://is.muni.cz/th/h7mqj/BP_KB_Vyvoj_mer_a_vah_v_ceskych_zemich_finale_PDF.pdf

5) Breitfelder, M., Morávková, N., Východská, H., Kašparová, M., Mainz, D., & Vágnerová, P. (2016). Využití dostupných historických materiálů v popularizaci vědy: informatika, matematika, geografie.

6) Budínová, I. Historické poznatky pro téma zlomky.

7) Dvořáková, R. (2019). *Mezipředmětové vazby ve výuce matematiky a ostatních předmětů na prvním stupni ZŠ.* [Diplomová práce]. Západočeská univerzita v Plzni

8) Felgr, P. (2013). *Cheopsova pyramida - mistrovské dílo - Starověký Egypt*. Starověký Egypt. https://www.starovekyegypt.net/architektura-stare-rise/cheopsova-pyramida-mistrovske-dilo.php

9) Fuchs, E. (2004). Magické čtverce aneb od knihy I-ťing k internetové současnosti. *Matematika, fyzika a vzdelávaní*, *1,* 29-63.

10) Gněděnko, B. V., & Pogrebysskij, I. B. (1958). O některých úkolech historie matematiky. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, *3*(5), 526-535.

11) Hiťhová, D. (2015) *Počitadlo v mateřské škole* [Diplomová práce]. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta

12) *Kruskal-Wallis critical values. Statistics for Ecologists Exercises.* Data Analytics. https://www.dataanalytics.org.uk/critical-values-for-the-kruskal-wallis-test/#equal

13) *Kruskal-Wallis H Test in SPSS Statistics | Procedure, output and interpretation of the output using a relevant example.* (n.d.). SPSS Statistics Tutorials and Statistical Guides | Laerd Statistics. https://statistics.laerd.com/spss-tutorials/kruskal-wallis-h-test-using-spss-statistics.php

14) *Magické čtverce | Eduportál Techmania*. Eduportál | Eduportál Techmania. https://edu.techmania.cz/cs/encyklopedie/matematika/aritmetika/magicke-ctverce

15) *Magický čtverec - mystický rébus s tisíciletou historií • Mozkolam.cz*. Mozkolam.cz. https://mozkolam.cz/historie-hlavolamu/magicky-ctverec/

16) *Matematická biologie učebnice: Neparametrická alternativa analýzy rozptylu- Kruskallův -Wallisův test*. Matematická biologie učebnice: Úvod. https://portal.matematickabiologie.cz/index.php?pg=aplikovana-analyza-klinickych-a-biologickych-dat--biostatistika-pro-matematickou-biologii--analyza-rozptylu-anova--neparametricka-alternativa-analyzy-rozptylu-kruskalluv-wallisuv-test

17) Odvárko, O., & Kadleček, J. *Matematika pro 6. ročník základní školy.* 3., přeprac. vyd. Učebnice pro základní školy (Prometheus). Praha: Prometheus, 2010.

18) Odvárko, O., & Kadleček, J. *Matematika pro 7. ročník základní školy.* 3., přeprac. vyd. Učebnice pro základní školy (Prometheus). Praha: Prometheus, 2010.

19) Odvárko, O., & Kadleček, J. *Matematika pro 8. ročník základní školy.* 3., přeprac. vyd. Učebnice pro základní školy (Prometheus). Praha: Prometheus, 2010.

20) Odvárko, O., & Kadleček, J. *Matematika pro 9. ročník základní školy.* 3., přeprac. vyd. Učebnice pro základní školy (Prometheus). Praha: Prometheus, 2010.

21) *Online Kruskal-Wallis Test Calculator*. Social Science Statistics. https://www.socscistatistics.com/tests/kruskal/default.aspx

22) Písková, I., & Hodaňová, M. J. *Historie matematiky ve vztahu k vyučování matematiky na 2. Stupni základní školy.*

23) Rábová, K. (2008). *Matematika ve starém Egyptě.* [Diplomová práce] Masarykova univerzita. https://is.muni.cz/th/cjnts/Diplomova_prace.pdf

24) Roskovec, T. *Magické čtverce*. PraSe — matematický korespondenční seminář MFF UK. https://prase.cz/library/MagickeCtverceTR/MagickeCtverceTR.pdf

25) *RVP ZV - Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání - edu.cz*. edu.cz - Jednotný metodický portál MŠMT. https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcovy-vzdelavacici-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv/

26) Ryglewiczová, P. (2010). *Náměty na využití historie matematiky ve výuce* [Diplomová práce]. http://www.nusl.cz/ntk/nusl-299668

27) Sklářová, E. (2009). *Historie matematiky ve vztahu k vyučování matematiky na 2. stupni ZŠ* [Diplomová práce] Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta.

28) Soukupová, P., Zachová, M., Kohout, V., Baťko, J., & Benediktová, L. (2016). Mezipředmětové vztahy a badatelské metody v popularizaci vědy: informatika, matematika

29) Szkanderová, K. (2023) *Dokonalá čísla* [Seminární práce]. Univerzita Palackého Olomouc.

30) Vaněčková, P. (2007). *Matematické modely a jejich analýza* [Diplomová práce]. Masarykova Univerzita. https://is.muni.cz/th/grq7c/vaneckova_DP.pdf

31) Vaněk, P. (2011). *Motokolo šité na míru - design jízdního kola s pomocným spalovacím motorem* [Diplomová práce]. Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně. http://hdl.handle.net/10563/16124

32) Vymazalová, H. (2006). Počítání se zlomky. *Staroegyptská matematika. Hieratické matematické texty*, 23-32.

33) Tlustý, P. & Huclová, M. *Matematika s nadhledem 6: pracovní sešit pro základní školy a víceletá gymnázia*. *Škola s nadhledem*. Plzeň: Fraus, 2019

34) Tlustý, P. & Huclová, M. *Matematika s nadhledem 7: pracovní sešit pro základní školy a víceletá gymnázia*. *Škola s nadhledem*. Plzeň: Fraus, 2019

35) Tlustý, P. & Huclová, M. *Matematika s nadhledem 8: pracovní sešit pro základní školy a víceletá gymnázia*. *Škola s nadhledem*. Plzeň: Fraus, 2019

36) Tlustý, P. & Huclová, M. *Matematika s nadhledem 9: pracovní sešit pro základní školy a víceletá gymnázia*. *Škola s nadhledem*. Plzeň: Fraus, 2019

37) Turney, S. (2022) *How to Find Degrees of Freedom | Definition & Formula*. Scribbr. https://www.scribbr.com/statistics/degrees-of-freedom/