UNIVERZITA JANA AMOSE KOMENSKÉHO PRAHA

ZÁVĚREČNÁ PRÁCE

2021 **Ing. Andrea Čížků, Ph.D.**

UNIVERZITA JANA AMOSE KOMENSKÉHO PRAHA

STUDIUM V OBLASTI PEDAGOGICKÝCH VĚD PRO UČITELE ODBORNÝCH PŘEDMĚTŮ, PRAKTICKÉHO VYUČOVÁNÍ A ODBORNÉHO VÝCVIKU

CELOŽIVOTNÍ VZDĚLÁVÁNÍ – KOMBINOVANÉ STUDIUM

2021-2022

ZÁVĚREČNÁ PRÁCE

Andrea Čížků

Analýza schopnosti studentů na různých úrovních vzdělání řešit netypické logické a matematické úlohy

Praha 2021

Prohlášení

Prohlašuji, že předložená závěrečná práce je mým původním autorským dílem, které jsem vypracovala samostatně. Veškerou literaturu a další zdroje, z nichž jsem při zpracování čerpala, v práci řádně cituji a jsou uvedeny v seznamu použitých zdrojů.

Souhlasím s prezenčním zpřístupněním své práce v univerzitní knihovně.

V Praze dne 24.11.2021 Ing. Andrea Čížků, Ph.D.

Anotace

Práce se zabývá schopností řešit nestandardní matematické a logické úlohy a problémy. Teoretická část práce diskutuje úzce související koncept matematické gramotnosti, vymezuje pojmy cvičení, úloha a problém a popisuje heuristické strategie řešení problémových úloh. V neposlední řadě se teoretická část práce zabývá řešením problémů jakožto výukové metody. Cílem praktické části práce je empirická analýza schopnosti studentů řešit netradiční matematicky zaměřené problémy. Pozornost je zaměřena na hypotézu, dle které se zmíněná schopnost studentů postupem času paradoxně vytrácí, a to i přes skutečnost, že studenti na vyšším stupni vzdělání již prošli delším edukačním procesem, v rámci kterého měli možnost si osvojit znalost způsobu řešení celé řady různých typových úloh. Dále jsou statisticky testovány hypotézy, zda kompetence řešit kreativním způsobem logické a matematické problémy závisí na pohlaví, zájmu studenta o matematiku, či na postoji studenta na aplikovatelnost matematiky a zda existují statisticky významné odlišnosti mezi vybranou soukromou a veřejnou vysokou školou.

Klíčová slova

heuristická výuková metoda, kompetence k řešení problémů, kvantitativní výzkum, matematická gramotnost, nestandardizovaný dotazník, nestandardní matematické problémy, problémové vyučování, průzkumné šetření, tvořivost

ÚVOD

Národní ústav pro vzdělávání klade v rámcových vzdělávacích programech platných v roce 2021 v rámci vzdělávací oblasti matematiky důraz na nestandardní matematické úlohy a problémy, jejichž řešení vyžaduje především schopnost logického myšlení, a nikoli znalosti a dovednosti školské matematiky. Nestandardní aplikační úlohy a problémy tvoří dokonce jeden ze čtyř tematických okruhů vzdělávací oblasti matematika (RVP ZV, 2021, s. 30, online, cit. 2021-07-25). Rámcové vzdělávací programy dále uvádí kompetence k řešení problémů jako jednu ze základních klíčových kompetencí[1], které by naše školství mělo rozvíjet (RVP ZV, 2021, s. 10, online, cit. 2021-07-25), (RVP G, 2021, s. 9, online, cit. 2021-07-25). Tuto klíčovou kompetenci lze mimo jiné rozvíjet právě řešením matematických problémových úloh.

Měřením a srovnáváním kompetence k řešení matematicky orientovaných problémů (matematické gramotnosti) se zabývají výzkumné projekty PISA (Programme for International Student Assessment) a TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study). Hodnocení matematické gramotnosti v těchto projektech nevychází z učebních osnov, ale z rámcových koncepcí nezbytných pro budoucí uplatnění žáků. Frýzková a kol. (2011) popisují metodiku projektu PISA podrobně. Kvalifikovaný rozbor žákovských prací z těchto projektů mezinárodního srovnávání popisuje Němčíková a kol. (2011).

Metoda zjišťování kompetence k řešení matematicky orientovaných problémů bude v této práci založena na metodologii projektů PISA a TIMSS. Na rozdíl od těchto projektů nebude ale zkoumání zaměřeno na mezinárodní srovnání úrovně matematické gramotnosti 15-letých žáků, nýbrž na porovnání matematické gramotnosti žáků na střední a vysoké škole.

Statisticky testovány budou následující hypotézy:

---

[1] *Klíčovými kompetencemi se zde rozumí souhrn vědomostí, dovedností, schopností, postojů a hodnot mající zásadní význam pro osobní rozvoj jedince a jeho uplatnění ve společnosti (RVP ZV, 2021, s. 10, online, cit. 2021-07-25).*

1) Schopnost řešit nestandardní matematicky zaměřené problémy se u studentů vybraných dvou vysokých škol v porovnání se studenty vybrané střední školy neliší.
2) Kompetence řešit kreativním způsobem logické a matematické problémy nezávisí na pohlaví.
3) Neexistuje závislost mezi úspěšností řešení problémů a názorem studenta na důležitost matematiky pro úspěch v profesi, či jeho oblibou matematiky.
4) Neexistují statisticky významné odlišnosti v úrovni těchto kompetencí u studentů vybrané soukromé vysoké školy a veřejné vysoké školy.

Kvantitativní metody použité v práci jsou založeny na postupech, které popisuje Chráska (2006). Datový vzorek byl získán na základě vlastního dotazníkového šetření. Dotazník byl vytvořen vlastní konstrukcí a obsahoval zadání šesti matematicky a logicky zaměřených problémů, které měli respondenti za úkol podrobně popsat a vyřešit. Dotazník obsahoval také několik jednoduchých doplňujících otázek za účelem identifikace základních charakteristik respondentů (např. pohlaví) a získání informace o názorech a postojích respondentů ohledně aplikovatelnosti matematiky v reálném životě a potřebě matematické gramotnosti v úspěšném profesním životě.

Teoretická část práce se v kapitole 1 zabývá vymezením základních pojmů. V této části jsou definovány pojmy cvičení, úloha a problém a je zde také podrobněji popsán související koncept matematické gramotnosti. Kapitola 2 se zabývá řešením problémů jakožto výukovou metodou. Empirická část práce začíná kapitolou 3, ve které jsou popsána východiska vlastního výzkumného šetření schopnosti studentů kreativním způsobem řešit netypické matematické a logické úlohy. Přehled a shrnutí použitých statistických metod zpracování získaných dat je obsažen v kapitole 4. V poslední 5. kapitole je provedena analýza výsledků respondentů a statistické testování hypotéz o odlišné úrovni daného typu matematické gramotnosti u vybraných skupin studentů.

TEOREТICKÁ ČÁST

1 VYMEZENÍ ZÁKLADNÍCH POJMŮ

1.1 Cvičení, úloha a problém

Teorii úloh rozvinul Fridman. Při definování pojmu ***úloha*** vychází Fridman z problémové situace, která vzniká v případě, kdy se jedinec setká s určitou překážkou, obtíží, kterou se snaží odstranit. Takto vznikají úlohy, jejichž vyřešením se daná problémová situace zjednoduší (Fridman In: Mareš, 1980, s. 596).

Kromě pojmu úloha budeme používat pojem ***problém***, jehož řešení předpokládá větší míru řešitelovy tvořivosti. V případě úlohy jsou zadány všechny potřebné informace k jejímu řešení a výsledek je předem znám, zatímco u problému nemusíme přesně vědět odkud vycházet a k čemu máme dojít (Šíma, 2013, s. 9). V této práci bude pojem problém označovat náročnější nestandardní úlohu, k jejímuž vyřešení bude zapotřebí tvořivé logické myšlení, a nikoli znalost standardních metod školské matematiky. Právě zavedená odlišnost úlohy a problém je konzistentní s následujícím členěním, které zmiňuje Kuřina (2011, s. 187):

1) **Cvičení:**
   K vyřešení stačí rutinní aplikaci známých postupů.
2) **Úlohy:**
   V úlohách již studenti používají různé metody. Jde nicméně stále pořád ještě pouze o aplikaci standardních metod, které často ihned vyplývají ze zadání úlohy.
3) **Problémy:**
   V případě problémů již není ze zadání úlohy zřejmý postup řešení a řešitel musí tvořivým způsobem nalézat své vlastní způsoby, jak problém řešit, na což je zapotřebí dostatek času a schopnost soustředit se.

Pojmy cvičení, úloha a problém by bylo možné chápat v obecném smyslu. Kuřina ovšem pracuje s těmito pojmy v matematickém smyslu, což znamená, že pro jejich vyřešení se mohou aplikovat matematické koncepty a metody. Zadání ovšem nemusí být nutně formulováno s využitím matematických pojmů. Chybí-li matematická symbolika v zadání úlohy, hovoří se o slovních úlohách.

K řešení problémů je zapotřebí tvořivost. Experimentováním se žáci sami snaží nalézt vlastní metodu řešení, neboť známé postupy řešení nelze použít. Problém vyvstává v situaci, která je nová, nejasná, či obtížná. V odborné literatuře se v této souvislosti místo pojmu problém často hovoří také o ***nestandardních úlohách***, ***nestandardních problémech***, či ***problémových úlohách***. V rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání jsou nestandardní úlohy a problémy vymezeny jako úlohy, u kterých je správné řešení do značné míry nezávislé na znalostech školské matematiky a při kterých je zapotřebí uplatnit tvořivé logické myšlení (RVP ZV, 2021, s. 30, online, cit. 2021-07-27).

Kopka (1999, s. 16) poukazuje nicméně na skutečnost, že postupným procvičováním nestandardního problému se z něj stává rutinní cvičení. Navíc obvykle existuje nemalé rozdíly mezi studenty a pro některé žáky může zadaný úkol být rutinním cvičením, zatímco pro jiné obtížným nestandardním problémem.

Jak již bylo řečeno, definice pojmů cvičení, úloha a problém není v odborné literatuře zcela jednoznačná. Tyto pojmy budou dále chápány ve výše uvedeném pojetí dle Kuřiny. Z důvodu porovnání se ale podívejme, na vymezení těchto pojmů dle Kopky (1999, s. 15):

1) **Cvičení:**

   V tomto případě je známa výchozí situaci, cíl i cestu k cíli. Např. je-li cílem výpočet obsahu kruhu a student zná postup výpočtu obsahu kruhu a dostane zadán jeho poloměr.

2) **Úloha:**

   Odlišnost úlohy oproti cvičení spočívá v tomto pojetí v tom, že je známa výchozí situace a cíl, ale není známa cesta, jak se dostat k cíli. Ukázkou takto vymezeného pojmu úloha je např. bude-li učitel po žácích chtít, aby dokázali matematickou větu, jejíž důkaz žáci nikdy předtím neviděli.

3) **Problém:**

   O problému hovoří Kopka v případě, že je známa jenom výchozí situace. Příkladem problému může být „zkoumejte Fibonacciho posloupnost“.

Nestandardní problémy by měly studentům ilustrovat zajímavost a využitelnost matematiky. Předností nestandardních problémů je, že poskytují možnost úspěchu i prospěchově slabším studentům, neboť jejich řešení je do značné míry nezávislé na školských znalostech matematiky. Nespornou předností nestandardních problémů je, že aktivizuje logické uvažování žáků a poskytuje žákům možnost zažít radost z objevování.

Existuje poměrně široká nabídka sbírek nestandardních matematických úloh a problémů. Pro 1. stupeň základních škol vydala sbírku nestandardních úloh Lišková a kol. (2017), či Wagnerová (2010). Pro 2. stupeň základních škol a nižší gymnázia vypracoval sbírku nestandardních matematických problémů Výzkumný ústav pedagogický v Praze (Nestandardní aplikační úlohy a problémy pro 2. stupeň ZŠ a NG, 2008, online, cit. 2021-07-25). Sbírku netypických úloh na podporu matematické gramotnosti pro 2. stupeň základních škol a pro střední školy publikoval Fajkus a kol. (2020), či Melicharová (2017). Z anglické literatury zabývající se metodami a strategiemi řešení matematicky zaměřených nestandardních úloh lze citovat publikace Polya (1957), či Cofman (1990).

1.2 Matematická gramotnost

Kuřina (2011, s. 187) chápe matematickou gramotnost studenta jako jeho schopnost řešit pomocí matematických metod a konceptů cvičení a úlohy.[2] Matematickou gramotnost bychom mohli chápat i v širším slova smyslu jako vyšší úroveň matematické gramotnosti, která se ukáže v situaci, kdy jsou matematické znalosti a dovednosti využity za účelem řešení problémů. Řešení matematických problémů rozvíjí logické myšlení, ovšem nesmí se jednat o rutinní matematiku, která rozvoj logického myšlení nepodporuje. Řešení nestandardních problémů kreativním způsobem již vyžaduje vyšší úroveň matematické gramotnosti, kterou ovšem dle Zelendové nelze požadovat od celé populace (Zelendová, online, cit. 2021-03-27). Nestandardní matematické úlohy mají nicméně dle Zelendové, Havlínové (2019, s. 8) obzvláště veliký význam při rozvíjení (vyšší úrovně) matematické gramotnosti, a měly by proto být ve větší míře zaváděny do pedagogické praxe.

[2] *Vymezení pojmů cvičení a úloha je obsaženo v subkapitole 1.1.*

V praktické části této práce bude proto věnována pozornost právě schopnosti studentů řešit nestandardní matematické úlohy.

V rámci mezinárodního projektu PISA (Programme for International Student Assessment) je matematická gramotnost definována jako schopnost člověka pochopit roli, kterou matematika hraje ve světě, činit správné úsudky a hlouběji proniknout do matematiky tak, aby dokázala naplňovat životní potřeby přemýšlivých a tvořivých jedinců (Koncepce matematické gramotnosti ve výzkumu PISA 2003, s. 5, online, cit. 2021-07-25).

Pojem matematické gramotnosti klade důraz na schopnost jedince používat matematiku v různých situacích a kontextech, což vyžaduje určitý vhled do problematiky. K získání matematické gramotnosti jsou tedy zapotřebí nejen nemalé matematické znalosti a dovednosti, ale taktéž schopnost tvořivě tyto dovednosti kombinovat v závislosti na konkrétní situaci. V metodice PISA se rozlišují tři složky matematické gramotnosti:

1) **SITUACE A KONTEXTY**: jedná se o schopnost používání matematiky v rozmanitých osobních, pracovních a veřejných situacích a kontextech.
2) **KOMPETENCE** uplatňované při řešení problémů:[3]
    a. **Matematické uvažování:**
    Jedná se o schopnost pokládat si otázky typické pro matematiku („Existuje…?“, „Jak najdeme…?“) a mít přehled o možných odpovědí, které matematika na tyto otázky nabízí.
    b. **Matematická argumentace:**
    Zahrnuje schopnost rozlišovat předpoklady a závěry, vytvářet a hodnotit sled po sobě jdoucích matematických argumentů.
    c. **Matematická komunikace:**
    Je schopnost chápat matematická sdělení a dokázat se srozumitelně a jednoznačně vyjadřovat k matematickým problémům.
    d. **Modelování:**

[3] *Matematické kompetence se vzájemně překrývají a k matematické činnosti je v typickém případě zapotřebí využívat více kompetencí současně. Z tohoto důvodu neexistují v rámci PISA projektů testové úlohy hodnotící uvedené kompetence samostatně.*

Tato kompetence představuje schopnost vytvářet, rozumět a hodnotit matematické modely reálných situací a získané výsledky interpretovat.

e. **Vymezování problémů a jejich řešení:**

   Matematicky gramotný člověk dokáže matematické problémy vnímat a nalézat řešení rozličnými metodami.

f. **Užívání matematického jazyka:**

   Jedná se o porozumění symbolickému a formálnímu jazyku matematiky.

g. **Užívání pomůcek a nástrojů:**

   Zahrnuje znalost pomůcek a nástrojů (např. výpočetní technika), které lze v matematice využít.

3) **MATEMATICKÝ OBSAH** je ve výzkumu PISA členěn na následující tematické okruhy:

   a. Kvantita:

   V rámci tematického okruhu kvantita by studenti měli mít schopnost provádět kvantitativní výpočty a pracovat s číselnými strukturami.

   b. Prostor a tvar:

   Jde o znalost vlastností geometrických útvarů a schopnost jejich konstrukce. V praxi jsou geometrické struktury používány např. jako jednoduché modely různých objektů a jevů (domy, mosty, sněhové vložky, krystaly, plány měst, atd.).

   c. Změna a vztahy:

   Tematický okruh změna a vztahy zahrnuje schopnost vyjadřovat vztahy a závislosti pomocí matematických konceptů - proměnné, funkce, rovnice, nerovnice, grafy, tabulky. Mnoho přírodních i společenských jevů je projevem změny a ve světě existuje mnoho vztahů mezi jevy – cykly ročních období, cykly nezaměstnanosti, změny počasí či akciových indexů na burze lze modelovat matematickými funkcemi, či je popisovat pomocí rovnic a nerovnic.

   d. Neurčitost:

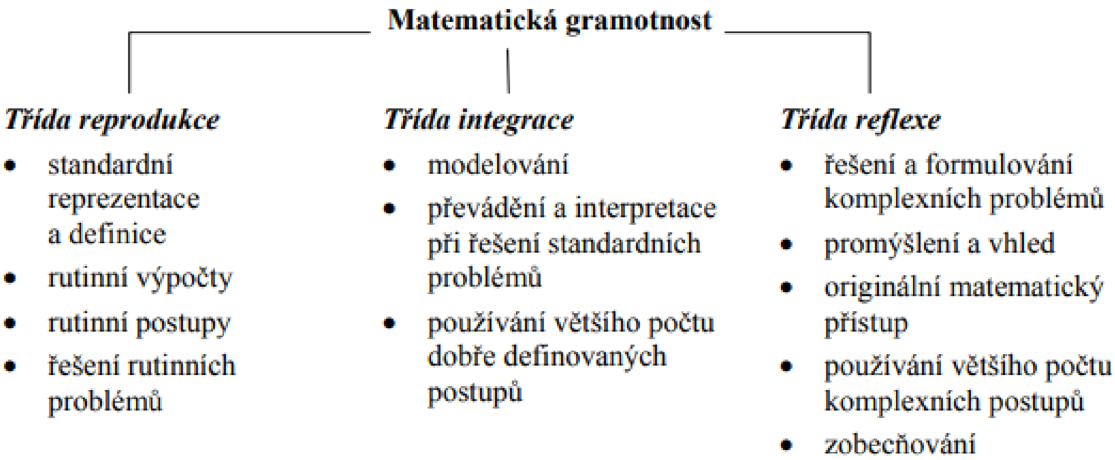
   Tematický okruh neurčitost zahrnuje schopnost pravděpodobnostního a statistického uvažování. V běžném životě jsme často svědky nespolehlivých předpovědí počasí, špatně fungujících ekonomických modelů, chybných predikcí růstu populace a mnoha dalšími projevy neurčitosti. Neurčitost je předmětem statistiky a pravděpodobnosti, kde důležitou roli hrají data a náhoda. Mezi důležité činnosti v tomto tematickém okruhu proto patří sběr a analýza dat, různé formy reprezentace dat, pravděpodobnost a vyvozování závěrů.

Výzkum PISA rozlišuje tři úrovně kognitivních činností:

- reprodukce,
- integrace,
- reflexe.

Úroveň reprodukce zahrnuje reprodukci probraných a procvičených znalostí. Jedná se o kompetence nejčastěji sledované ve standardizovaných zkouškách a školních testech. Úroveň integrace již zahrnuje řešení úloh, které již nejsou jednoduchou rutinou, nicméně jsou známé. Na úrovni reflexe se již vyžaduje schopnost plánovat strategie řešení a aplikovat je na konkrétní situaci kreativním a originálním způsobem. Následující obrázek 1 zobrazuje jednotlivé úrovně kompetencí s popisem hlavních odlišností:

Obrázek 1: Schématické znázornění úrovní matematické gramotnosti



Zdroj: Koncepce matematické gramotnosti ve výzkumu PISA 2003, s. 28, online, cit. 2021-07-25.

2 ŘEŠENÍ PROBLÉMŮ JAKO VÝUKOVÁ METODA

Tématem celé práce je schopnost studentů řešit tvořivým způsobem nestandardní matematické problémy. Zvolené téma tedy přirozeně souvisí s aktivizačními výukovými metodami, ve kterých je kladen důraz na řešení problémů a které si kladou za cíl žáky stimulovat a podporovat rozvoj jejich kreativního myšlení. Dle Jankovcové a kol. (1989, s. 27) se myšlení a tvůrčí aktivita rozvíjí nejvíce právě při řešení problémů. Aktivizační metody jsou založeny na prokázaném faktu, že si studenti nejvíce zapamatují to, nad čím sami přemýšlí, odvozují, co si sami mohou vyzkoušet, popř. nad čím mohou diskutovat. Hejný a Kuřina (2009, s. 94) uvádějí, že vysvětlování a výklad učitele, který neprobudí aktivitu žáka, vychází naprázdno, neboť si žák v takovém případě nevytváří ve svém vnitřním myšlenkovém světě žádný typ reprezentace problému.

Řešení problémů však nelze chápat pouze jako prostředek k získávání nových znalostí, neboť schopnost řešit problémy představuje samo o sobě jednu z klíčových kompetencí, které by dle rámcového vzdělávacího programu mělo české školství rozvíjet (RVP ZV, 2021, s. 10, online, cit. 2021-07-25).

Vlastní aktivita žáků rovněž podněcuje pro matematiku velmi důležitou zvídavost, touhu po poznávání a objevování a je zde tedy také souvislost s další klíčovou kompetencí ve vzdělávání, kterou je kompetence k učení. Standardní frontálně zaměřené výukové metody orientují žáky na přebírání hotových poznatků, a nikoli na vytváření poznatků vlastních, čímž se negativně ovlivňuje strategie učení žáků. Maňák a Švec (2003, s. 106) dále uvádějí, že aktivizační metody výuky přispívají více k vytváření příznivého školního klimatu, umožňují větší individualizaci výuky a přináší větší propojenost s reálným životem.

Proti využití aktivizačních metod v matematice lze samozřejmě namítnout, že v matematice je zapotřebí systematický a ucelený výklad, neboť jednotlivé oblasti matematiky na sebe navazují. Systematický výklad samozřejmě nemohou aktivizační metody poskytnout na rozdíl od tradičních výukových metod. Aktivizační výukové metody nejsou také příliš vhodné k hodnocení studentů. Začalová (2017, s. 59) na základě vlastního výzkumného šetření shrnuje nejčastěji uváděné nevýhody pro použití aktivizačních metod ve výuce matematiky:

1) Náročné na udržení kázně a zapojení většiny studentů při velikém počtu žáků ve třídě.
2) Veliká časová náročnost na přípravu i realizaci, takže na to není čas, neboť hodinové dotace matematiky jsou malé.

2.1 Postavení metody řešení problémů v klasifikaci výukových metod

Lerner (In: Kalhous, 2002, s. 309-311) při klasifikaci výukových metod vychází z charakteru poznávacích činností při osvojování obsahu vzdělávání a uvádí celkem pět výukových metod:

1) informačně-receptivní metoda,
2) reproduktivní metoda,
3) metoda problémového výkladu,
4) heuristická metoda,
5) výzkumná metoda,

přičemž metody č. 1 a 2 označuje za reproduktivní (žák si při nich osvojuje hotové vědomosti a jeho úkolem je pouze umět je reprodukovat), metodu č. 3 označuje přechodnou metodu a metody č. 4 a 5 označuje za produktivní, které jsou charakteristické tím, že žák při nich nové poznatky získává vlastní tvořivou činností.

Povšimněme si, že Lerner nepokládá metodu problémového výkladu za produktivní metodu, ale za metodu přechodnou s tím, že tato metoda předpokládá jak osvojování hotových informací, tak i tvůrčí činnost žáků, což je projev určité terminologické nejednotnosti v odborné literatuře, neboť problémové metody jsou zpravidla chápány jako aktivizační výukové metody, a nikoli jako metody přechodné. Lerner řadí metodu problémového výkladu mezi metody přechodné, neboť Lerner při této výukové metodě předpokládá aktivní roli učitele, který studenty vede a provází jednotlivými fázemi řešení problému. Heuristickou metodu chápe Lerner jako nacvičování jednotlivých dílčích etap řešení komplexních problémů. Výzkumná metoda v Lernerově pojetí již od žáků vyžaduje samostatnost v řešení komplexních problémových úkolů.

Maňák a Švec (2003, s. 105-130) člení aktivizační metody následujícím způsobem:

1) diskusní metody,
2) metody heuristické, řešení problémů,
3) metody situační,
4) metody inscenační,
5) didaktické hry.

Podrobný popis těchto metod zde uváděn nebude, neboť by to již překročilo rámec této závěrečné práce a jedná se o všeobecně známé metody, jejichž podrobný popis lze nalézt např. ve zmíněné učebnici Maňák a Švec (2003). Za povšimnutí nicméně stojí dvě skutečnosti: (1) metoda řešení problémů zde není pokládána za přechodnou metodu, ale za metodu aktivizační, (2) metoda řešení problémů a heuristická metoda jsou zde zařazeny do jedné kategorie a nejsou od sebe odděleny.

Heuristika (řec. heuréka = objevil jsem, nalezl jsem) je oborem výzkumu zabývající se zásadami objevování a vynalézání (Pólya, 2016, s. 114). Kopka (2004, s. 25) uvádí, že heuristika je strategií a taktikou při řešení problémů. Heuristika je tedy z podstaty věci velmi úzce a neodmyslitelně spjata s metodou řešení problémů, která si klade za cíl aktivizovat schopnost studentů tvořivě objevovat a nalézat vlastní řešení nestandardních problémů. V dalším textu této závěrečné práce bude proto použito uvedené pojetí dle Maňáka a Švece, neboť heuristika a řešení problémů spolu velmi úzce souvisí.

Využitelnost uvedených aktivizačních metod dle Maňáka a Švece (2003) je v matematice bezpochyby různá. Nejméně využitelná ve výuce matematiky bude zřejmě inscenační metoda, neboť hraní rolí se pro výuku matematiky příliš nehodí. Zdroj inspirace pro využití aktivizačních metod konkrétně ve výuce matematiky lze nalézt v online dostupné příručce, která slouží jako podpora učitelům při zavádění aktivizačních metod do výuky matematiky (Chytrý, online, cit. 2021-07-25). Inscenačním a situačním metodám v této příručce není věnována vůbec žádná pozornost. Z výše uvedených aktivizačních metod jsou zde konkrétně v souvislosti s výukou matematiky popisovány diskuzní metody (brainstorming a brainwriting), problémové metody a didaktické hry. Navíc je v této online příručce popisováno také využití projektové metody ve výuce matematiky. Projektovým vyučováním v matematice se podrobně zabývá také např. Coufalová (2006), Čechová (2011), či Kubínová (2002).

Zásadní význam ve výuce matematiky budou mít heuristické metody a metody řešení problémů, které taktéž mají nejužší souvislost s tematickým zaměřením této závěrečné práce, a proto bude heuristická a problémová metoda popsána v následujícím oddílu podrobněji.

2.2 Výukové metody řešení problémů a heuristické metody

Nalézat a objevovat v okolním prostředí vše, co je důležité pro život, je důležitou charakteristickou lidských bytostí (je zde návaznost na pátrací reflex). Pátrání a objevování žáků představuje jejich samostatnou učební činnost, kterou se učitel snaží navodit vhodnými heuristickými metodami:

- kladením problémových otázek,
- ukázkou různých rozporů či paradoxů,
- ilustrací zajímavých případů a situací,
- zadáním nestandardních problémů.

Role učitele se při této výukové metodě redukuje na zadavatele problémů a koordinátora, který objevování žáků usměrňuje, a především na počátku jim také dle potřeby pomáhá a radí. V počátečních fázích zavádění této výukové metody se v případě obtíží doporučuje nahradit heuristickou metodu s minimální nezbytnou pomocí učitele ***metodou řízeného objevování***, při které jsou intervence učitele častější a hlubší.

Při heuristické výukové metody je zapotřebí dodržovat dvě důležité zásady:

- Učitel žákům nesděluje poznatky, na které žáci mohou přijít sami.
- Prostor pro samostatné zkoumání a objevování se žákům postupně rozšiřuje.

Heuristická výuková metoda samozřejmě může využívat i další aktivizační výukové metody, především pak ***metodu řízené diskuze***, při které učitel pokládá žákům vhodně zvolené otázky a tím studenty směřuje k nalézání potřebných poznatků.

Učení cestou samostatného zkoumání a objevování při výuce matematiky popisuje ve svém výukovém videu profesor Kopka následujícím schématem (Metody řešení matematických úloh, online, cit. 2021-07-28):

mat. situace (problém)	→ experimentování	→ hypotéza	→ testování	→ důkaz	→ mat. věta (odpověď)

Na počátku je žákům popsána určitá matematická situace nebo problém. Studenti poté provádějí experimenty a na základě těchto experimentů získají dílcí výsledky, které se snaží (pomocí indukce) zobecnit a formulují hypotézu. Profesor Kopka pokládá tuto první část uvedeného schématu od výchozí matematické situace po hypotézu za nejdůležitější. Tato první část zkoumání v matematice je založena na induktivním způsobu uvažování, a to i přesto, že je matematika převážně deduktivní vědou. Dalším krokem po vyslovení hypotézy je její testování – ověřování její platností na dalších konkrétních případech. Pokud se nepodaří hypotézu vyvrátit, tak poté bude následovat pokus o provedení důkazu (v tomto kroku se postupuje již striktně deduktivním způsobem). Výsledkem úspěšně provedeného důkazu bude buď matematická věta či správná odpověď na výchozí problém.

Mnoho konkrétních ukázek matematického zkoumání dle právě uvedeného obecného schématu lze nalezt v literatuře Kopka (1999, 2004). Kopka (1999, s. 18-46) a Kopka (2004, s. 25-38) popisuje různé heuristické strategie řešení problémů a použití těchto strategií ilustruje na mnoha problémových úlohách z oblasti matematiky

1) pokus-omyl
2) pokus-ověření-korekce
3) systematické experimentování (konkretizace) – hodí se k objevování zákonitostí
4) rafinované experimentování (konkretizace) – vhodná k ověřování hypotéz
5) grafické znázornění problému
6) algebraický způsob řešení
7) využití analogie
8) strategie zkoumání jednodušších případů
9) strategie určování bližších cílů
10) zavedení pomocného prvku

11) získání řešení odzadu, cestou nazpět

12) strategie opakování určitého postupu

Za základní heuristické strategie tvořící základ matematického myšlení pokládá profesor Kopka konkretizaci (přechod k zvláštínm případůmů; experimentování) a zobecnění (Kopka, 2004, s. 25). Konkretizace nám obvykle pomáhá na začátku, abychom problém lépe pochopili a povšimli si určitých zákonitostí a vztahů, na základě kterých formulujeme hypotézy, čímž dojde k zobecnění konkrétních případů, přičemž formulovanou hypotézu následně ověřujeme, či dokazujeme. Zobecňování hraje v matematice veliký význam, neboť matematika je charakteristická svou obecností.

Za nejvíce propracovanou a nejefektivnější heuristickou výukovou metodu je dle Maňáka a Švece (2003, s. 114) považována ***metoda řešení problémů, problémová výuka***. Problémy člověk řeší neustále v průběhu celého svého života. K rozpracování této výukové metody do školních podmínek v oblasti výuky matematiky přispěl významnou měrou Polya (1957). Problém představuje teoretickou či praktickou obtíž (konflikt, neshoda), která vybočuje z běžného rámce, porušuje stereotyp vnímání, podněcuje myšlenkovou aktivitu a probouzí zájem o řešení.

Pro účely správného navození problémové situace je zapotřebí volit problémy vhodným způsobem. Pecina a Zormanová (2009, s. 64) v této souvislosti formulují následující kritéria:

- Obtížnost problému musí být přiměřená možnostem žáků.
- Zadání musí obsahovat obtíž (konflikt, neshodu, paradox, rozpor).
- Zadaný problém musí u žáků vyvolat touhu objevovat a problém řešit.
- Řešení problému by mělo přinést nové poznatky.
- Problém by měl logicky navazovat na předešlé poznatky žáků.

Vidíme, že poslední z uvedených bodů je v určitém protikladu k vymezení nestandardních problémů a úloh, které je použito v rámcovém vzdělávacím programu základního vzdělávání. V tomto kurikulárním dokumentu jsou totiž nestandardní úlohy a problémy vymezeny tak, že jsou do značné míry nezávislé na znalostecha dovednostech školské matematiky (RVP ZV, 2021, s. 30, online, cit. 2021-07-28). Rámcové vzdělávací programy rovněž zdůrazňují, že zmiňované nestandardní problémy by měly vycházet z běžného života a reálných situací, což Pecina a Zormanová (2009, s. 64) explicitně nezmiňují. Důležitost praktické orientace problémů zdůrazňuje také Kličková (1989, s. 10), dle které může výuka probíhat efektivně pouze v situaci, kdy se výukové metody ve škole co nejvíce přiblíží reálným situacím z běžného života.

Maňák a Švec (2003, s. 116) popisují následující fáze řešení problému:

1) **Identifikace problému:**
   Výchozí fáze řešení, která v případě složitých komplexních problémů může být pro žáky obtížná. Může se stát, že studenti jevy sice vnímají, ale nevidí je v celistvosti, či nedokáží uchopit podstatu problému a odlišit zásadní informace od těch nepodstatných.
2) **Analýza struktury problému:**
   Jedná se o hlubší proniknutí do problému. Provádí se rozbor jak cílů, tak výchozích faktů (dostupných i chybějících). Formulují se první návrhy řešení problému.
3) **Vytváření hypotéz:**
   Fáze vytváření hypotéz je typická pro heuristické postupy. Významnou roli zde hraje experimentování, intuice a vhled.
4) **Verifikace hypotéz:**
   Výsledkem ověřování hypotéz je jejich přijetí, či odmítnutí. Tato fáze poskytuje prostor pro trénink kritického a logicky správného uvažování.
5) **Návrat k dřívějším fázím při neúspěšném řešení:**
   Jedná se o často nezbytný krok v případě nepotvrzení domnělé hypotézy. Návratem k dřívějším fázím vzniká cyklický proces sloužící jako zpětná vazba.

PRAKTICKÁ ČÁST

3 VÝCHODISKA VÝZKUMNÉHO ŠETŘENÍ

Cílem provedeného výzkumného šetření bylo zjišťování schopnosti studentů řešit nestandardní matematické problémy. V této kapitole budou popsána východiska tohoto výzkumného šetření – formulace výzkumných otázek a bude taktéž popsán použitý nestandardizovaný didaktický test, který byl sestaven vlastní konstrukcí.

V rámci výzkumného šetření byl zmíněný didaktický test vyplněn celkem 294 studenty. Výzkumné šetření bylo provedeno na jedné soukromé vysoké škole, dále na Vysoké škole ekonomické v Praze (VŠE), která je veřejnou institucí a též na Střední a vyšší odborné škole obalové techniky ve Štětí, což je taktéž veřejná instituce. Název soukromé vysoké školy nebylo možné v této práci zveřejnit z důvodu ochrany před možným zneužitím zde publikovaných výsledků. Pracovně bude tato soukromá vysoká škola označována XYZ. Na vysoké VŠE vyplnilo didaktický test 90 studentů, na střední škole ve Štětí se jednalo o 102 studentů a na škole XYZ psalo didaktický test taktéž 102 studentů.

3.1 Formulace výzkumných otázek

Výchozím bodem při koncipování šetření byla výzkumná otázka, zda se schopnost studentů řešit nestandardní matematické úlohy paradoxně v průběhu času vytrácí, a to i přesto, že studenti na vyšším stupni vzdělání již prošly delším edukačním procesem, v rámci kterého měli příležitost seznámit se s celou řadou postupů řešení rozličných matematických úloh a v jejich řešení se vytrénovat a zdokonalit.

Právě uvedená výzkumná otázka navazuje na výzkum od Zelendové, Havlínové (2019), který se zaměřoval na schopnost žáků řešit nestandardní matematické úlohy rozvíjející matematickou gramotnost. Zelendová, Havlínová (2019, s. 1) si ve svém výzkumu kladou otázku, proč se v průběhu vzdělávacího procesu u studentů vytrácí zájem o řešení nestandardních úloh, když právě schopnost řešit nestandardní problémy je jednou z klíčových kompetencích ve vzdělávání a tyto kompetence jsou velmi potřebné pro uplatnění v budoucím profesním životě. Zmíněné autorky se ve svém výzkumu zaměřovaly především na rozdíly mezi žáky základních a středních škol. Výzkum provedený v této práci oproti tomu mapuje situaci na středních a vysokých školách.

Dále byly zkoumány otázky, zda schopnost studentů řešit nestandardní matematické úlohy závisí na pohlaví, jejich zájmu o matematiku, či jejich názorech na důležitost matematiky pro úspěch v profesi. Schopnost studentů řešit nestandardní úlohy byla také porovnána na dvou vybraných vysokých školách – jednak na soukromé vysoké škole a jednak na veřejné vysoké škole VŠE.

Kromě zadání samotných problémů byly zároveň studentům v dotazníku předloženy otázky, které měly za úkol zjistit postoje studentů k matematice a jejímu využití v jejich profesním životě, přičemž při vyhodnocení odpovědí na tyto dodatečné otázky byla taktéž sledována jejich provázanost s řešením zadaných problémů. Lze tedy shrnout, že konkrétně byla pozornost zaměřena na následující výzkumné otázky:

1) Závisí úspěšnost řešení problémů na tom, zda se jedná o středoškolského či vysokoškolského studenta?
2) Závisí úspěšnost řešení problémů na pohlaví?
3) Existuje závislost mezi úspěšností řešení problémů a postojem studenta na důležitost matematiky pro úspěch v profesi, či jeho zájmem o matematiku?
4) Existují rozdíly v úspěšnosti řešení problémů mezi studenty vybrané soukromé vysoké školy a veřejné vysoké školy VŠE? Pokud ano, čím jsou způsobeny?

Právě zmíněné výzkumné otázky budou v 5. kapitole formulovány exaktně jakožto statistické hypotézy, které budou statisticky testovány pomocí chí-kvadrát testu nezávislosti v kontingenční tabulce, o kterém je podrobněji pojednáno v kapitole 4.2.

3.2 Východiska konstrukce vlastního didaktického testu

Pro účely testování schopnosti studentů řešit nestandardní matematické problémy byl sestaven nestandardizovaný didaktický test vlastní konstrukce. První otázkou byla volba počtu problémů v didaktickém testu. Obecně se pro didaktické testy doporučuje alespoň 10 úloh k zajištění dostatečné reliability testu. U didaktických testů ověřujících pouze rutinní dovednosti či reprodukci získaných znalostí nebývá toto doporučení nijak svazující. V případě didaktického testu zjišťujícího tvořivost a logické uvažování s využitím nestandardním matematických problémů bylo ovšem zapotřebí počet problémů v testu snížit, neboť tvořivost a logické uvažování vyžaduje soustředěnost a dostatek času.

Při volbě počtu problémů v didaktickém testu byl tedy vyvažován požadavek dostatečného počtu problémů pro zajištění reliability testu s nutností poskytnout studentům dostatečný čas na řešení každého problému, aniž by celková doba trvání testu nepřesáhla neúměrně dlouhou dobu. Výsledkem těchto úvah bylo rozhodnutí zahrnout do didaktického testu 6 problémů, přičemž na vypracování testu měli studenti celkem 60 minut. Protože na vypracování každého problému bylo v průměru 10 minut, byly problémy voleny tak, aby řešení bylo co nejméně pracné. Nestandardní charakter zadaných problémů byl však zachován, což znamená, že řešení uvedených úloh je do značné míry nezávislé na běžných metodách školské matematiky.

Problémy byly do didaktického testu voleny taktéž s ohledem na to, aby byly pokryty všechny čtyři obsahové oblasti matematiky (kvantita, prostor a tvar, změna a vztahy, neurčitost) popsané výše v kapitole 1.2. Náročnost řešení všech problémů v didaktickém testu je srovnatelná. Poslední dva problémy (problém 5 a problém 6) byly převzaty ze sbírky netradičních úloh od Frýzkové a kol. (2006, s. 42-43, s. 53) použitých v mezinárodním projektu PISA, kde úroveň kompetencí nutných k vyřešení těchto dvou problémů spadala do třídy reflexe. Kompletní přehled o zdrojích literatury a tematických okruzích jednotlivých problémů v použitém didaktickém testu je uveden v následující tabulce:

Tabulka 1: Zdroj literatury a tematické okruhy jednotlivých úloh v zadaném nestandardizovaném didaktickém testu.

Pořadové číslo	**Zdroj literatury**	**Tematický okruh**
Problém 1	Nestandardní aplikační úlohy a problémy pro 2. stupeň ZŠ a NG, 2008, s. 28, online, cit. 2021-07-25	Kvantita
Problém 2	Nestandardní aplikační úlohy a problémy pro 2. stupeň ZŠ a NG, 2008, s. 8, online, cit. 2021-07-25	Prostor a tvar

Problém 3	Kopka, 2016, s. 14, online, cit. 2021-09-02	Prostor a tvar
Problém 4	Nestandardní aplikační úlohy a problémy pro 2. stupeň ZŠ a NG, 2008, s. 23, online, cit. 2021-07-25	Změna a vztahy
Problém 5	Frýzková a kol. (2006, s. 42-43)	Změna a vztahy
Problém 6	Frýzková a kol. (2006, s. 53)	Neurčitost

Zdroj: autorka práce

Konkrétní podoba použitého didaktického testu je uvedena v příloze A této práce, kde je kromě formulace úloh uveden také jeden možný způsob řešení daných problémů, a to především proto, aby bylo názorně vidět, že k řešení použitých problémů nejsou zapotřebí prakticky žádné znalosti školské matematiky, ale naopak tvořivost a schopnost vlastního logického úsudku. V příloze B lze pak nalézt doprovodný dotazník, který byl studentům předložen společně s didaktickým testem za účelem identifikování základních charakteristik respondentů (např. pohlaví) a jejich postojů k matematice.

4 POUŽITÉ STATISTICKÉ METODY

4.1 Validita a reliabilita didaktického testu

U didaktických testů by měla být sledována validita a reliabilita. **Validita** znamená, že didaktický test zjišťuje to, co zjišťovat má. Použitý didaktický test má zjišťovat tvořivou schopnost logickým úsudkem řešit nestandardní problémy. Použitý didaktický test byl proto sestaven z nestandardních problémů, které byly vybrány z odborné literatury zaměřené na nestandardní matematické úlohy a problémy (viz tabulka 1) usilující o rozvoj tvořivosti, logického uvažování a schopností řešit nestandardní problémy.

Řešení problémů zahrnutých do didaktického testu nevyžaduje znalost konkrétních metod řešení. Nejedná se ani o typové úlohy, jejichž schopnost řešení by bylo testována. Řešení nestandardních problémů v použitém didaktickém testu vyžaduje tvořivou schopnost vlastního logického úsudku. Sestavený didaktický test proto zjišťuje kreativitu a schopnost logického uvažování, a nikoli znalost konkrétních matematických metod či určitých typových úloh, což zabezpečuje jeho validitu.

Reliabilita použitého didaktického testu je posuzována pomocí Kuderova-Richardsonova koeficientu, který popisuje např. Chráska (1999, s. 59-60):

$$r_{kr} = \frac{k}{k-1} \cdot \left(1 - \frac{\sum p \cdot q}{s^2} \right), \tag{1}$$

kde k značí počet úloh v didaktickém testu,

$p = \frac{n_s}{n}$ představuje podíl žáků, kteří vyřešili danou úlohu správně, přičemž n_s značí počet žáků, kteří danou úlohu vyřešili a n je celkový počet žáků,

$q = 1 - p$ je podíl studentů, kteří danou úlohu nevyřešili,

s je výběrová směrodatná odchylka pro celkové výsledky studentů v didaktickém testu.

Pro úplnost uveďme, že výběrová směrodatná odchylka s je definována jako odmocnina z výběrového rozptylu s^2, který počítán dle vztahu:

$$s^2 = \frac{\sum n_i \cdot \left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n-1}, \tag{2}$$

kde x_i reprezentují jednotlivé počty bodů, kterých mohlo být v testu dosaženo,

n_i je počet žáků, kteří dosáhli výsledku x_i,

$\overline{x} = \frac{\sum n_i \cdot x_i}{n}$ je vážený aritmetický průměr výsledků žáků v testu.

Koeficient r_{kr} nabývá hodnot od 0 do 1. Standardně se doporučuje, aby hodnota tohoto koeficientu byla alespoň 0,8. U didaktických testů s menším počtem úloh než 10 ovšem nelze toto kritérium uplatnit, neboť v takovýchto případech obvykle tento koeficient nepřevyšuje hodnotu 0,6. Koeficient r_{kr} spočtený na základě dat získaných z popsaného didaktického testu obsahujícího 6 úloh vyšel roven $r_{kr} = 0,47$, což lze pokládat za rozumnou hodnotu vzhledem k nižšímu počtu úloh v použitém didaktickém testu. Do tohoto didaktického testu rozhodně nebylo možné zahrnout více než 10 nestandardních matematicky orientovaných problémových úloh, neboť by doba psaní testu musela být v takovém případě neúměrně dlouhá. Zahrnutí 6 problémových úloh do didaktického testu představovalo rozumný kompromis mezi požadavkem na reliabilitu testu a časovým limitem pro psaní didaktického testu.

4.2 Chí-kvadrát test nezávislosti v kontingenční tabulce

V odstavci 3.1 byly formulovány výzkumné otázky, které budou formulovány exaktně jako statistické hypotézy a testovány rigorózními statistickými testy. Konkrétně bude použit chí-kvadrát test nezávislosti v kontingenční tabulce, který popisuje např. Chráska (2006, s. 91-94). Pro názornost zde ilustrujme základní myšlenku na naší první výzkumné otázce, která zní:

1) Závisí úspěšnost řešení problémů na tom, zda se jedná o středoškolského či vysokoškolského studenta?

V matematické statistice je vždy formulována nulová a alternativní hypotéza. Statistická hypotéza odpovídající uvedené výzkumné otázce může být formulována následovně:

H_0 : Úspěšnost řešení problémů nezávisí na tom, zda se jedná o středoškoláka či vysokoškoláka.

H_A : Mezi uvedenými dvěma kategoriálními proměnnými závislost existuje.

Statistické hypotézy jsou testovány pomocí testových statistik. V tomto případě je použita testová statistika chí-kvadrát, která je počítána na základě následující kontingenční tabulky:

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Pozorované četnosti</td><td colspan="2">Stupeň vzdělávání</td><td rowspan="2">Celkem</td></tr>
<tr><td>Vysokoškoláci</td><td>Středoškoláci</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Úspěšnost řešení problémů (známka z testu)</td><td>1</td><td>P_{11}</td><td>P_{12}</td><td>$P_{1\bullet} = P_{11} + P_{12}$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>P_{21}</td><td>P_{22}</td><td>$P_{2\bullet} = P_{21} + P_{22}$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>P_{31}</td><td>P_{32}</td><td>$P_{3\bullet} = P_{31} + P_{32}$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>P_{41}</td><td>P_{42}</td><td>$P_{4\bullet} = P_{41} + P_{42}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Celkem</td><td>$P_{\bullet 1} = \sum_{i=1}^{4} P_{i1}$</td><td>$P_{\bullet 2} = \sum_{i=1}^{4} P_{i2}$</td><td>$n = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{2} P_{ij}$</td></tr>
</table>

Úspěšnost řešení problémů je v práci měřeno pomocí známky z didaktického testu, přičemž známka byla udělena podle následujícího klíče:[4]

$\langle 5; 6 \rangle$ bodů: známka 1

[4] *Transformací počtu bodů na známky bylo docíleno redukce počtu kategorií, která musela být provedena z důvodu zajištění podmínky, dle které nesmí kontingenční tabulka obsahovat pole s očekávanou četností menší než 1 a nesmí existovat více než 20 % polí kontingenční tabulky s očekávanou četnost menší než 5 (Chráska, 2006, s. 95).*

$\langle 3{,}5; 4{,}5 \rangle$ bodů: známka 2

$\langle 2; 3 \rangle$ body: známka 3

$\langle 0; 1{,}5 \rangle$ bodů: známka 4

V použitém didaktickém testu bylo celkem 6 problémů. Za úspěšné vyřešení každého z nich získal student 1 bod, za částečné řešení 0,5 bodu a za neúspěšně řešený problém bylo 0 bodů. Minimální počet bodů je tedy 0 a maximální počet bodů v použitém didaktickém testu je 6. Proměnná P_{11} vyjadřuje počet vysokoškoláků, kteří v testu získali známku 1. Podobně proměnná P_{12} značí počet středoškoláků, kteří v testu získali známku 1. Ostatní proměnné v tabulce mají obdobnou interpretaci.

Testová statistika chí-kvadrát je obecně počítána následovně:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{\left(P_{ij} - O_{ij}\right)^2}{O_{ij}} \right], \tag{3}$$

kde r je počet řádků a s reprezentuje počet sloupců kontingenční tabulky,

P_{ij} značí pozorované četnosti v *i*-tém řádku a *j*-tém sloupci kontingenční tabulky,

O_{ij} jsou očekávané četnosti v *i*-tém řádku a *j*-tém sloupci kontingenční tabulky, které jsou určeny na základě následujícího vztahu:

$$O_{ij} = \frac{P_{i\bullet} \cdot P_{\bullet j}}{n}, \tag{4}$$

přičemž $P_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{s} P_{ij}$ je suma pozorovaných četností v *i*-tém řádku,

$P_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{r} P_{ij}$ je suma pozorovaných četností v *j*-tém sloupci,

$n = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} P_{ij}$ značí celkový počet pozorování.

Za předpokladu platnosti nulové hypotézy H_0 má statistika χ^2 chí-kvadrát pravděpodobnostní rozdělení s $k = (r-1)\cdot(s-1)$ stupni volnosti, tj. $\chi^2 \sim \chi^2(k)$. Bude-li spočtená hodnota testové statistiky ležet v tzv. kritickém oboru, tak potom je nulová hypotéza H_0 zamítnuta ve prospěch alternativní hypotézy H_A. V opačném případě nulová hypotéza zamítnuta není. Kritický obor chí-kvadrát testu je obecně vymezen následujícím intervalem:

$$\left\langle \chi^2_{1-\alpha}(k);\infty\right), \tag{5}$$

kde $\chi^2_{1-\alpha}(k)$ je $(1-\alpha)\cdot 100\%$ kvantil chí-kvadrát rozdělení s k stupni volnosti,

α je zvolená hladina statistické významnosti.

Hladina statistické významnosti se obvykle volí 5% nebo 1%, tj. $\alpha = 0,05$, či $\alpha = 0,01$. V případě 5% hladiny významnosti je dolní mez kritického oboru určena 95% kvantilem $\chi^2_{0,95}(k)$. Při volbě 1% hladiny statistické významnosti by dolní mez kritického oboru byla dána 99% kvantilem $\chi^2_{0,99}(k)$. Tyto kvantily chí-kvadrát rozdělení lze pro různé počty stupňů volnosti nalézt ve statistických tabulkách. Alternativně je možné tyto kvantily spočítat v MS Excel pomocí funkce CHISQ.INV. Například 95% kvantil chí-kvadrát rozdělení pro 6 stupňů volnosti bychom spočetli takto: =CHISQ.INV(0,95;6).

Alternativně je možné testování založit na tzv. P-hodnotě, která je počítána statistickým softwarem na základě spočtené chí-kvadrát testové statistiky. V takovémto případě se test statistické hypotézy uskutečňuje následovně. Pokud spočtená P-hodnota nabude hodnoty menší než zvolená hladina významnosti (obvykle 0,05 či 0,01), tak potom je nulová hypotéza H_0 zamítnuta. V opačném případě zamítnuta není.

5 STATISTICKÁ ANALÝZA ZÍSKANÝCH DAT

Všechny statistické testy uvedené v této kapitole jsou založeny na testové statistice (3) a provedeny na 5% hladině významnosti, což je standardní předpoklad.

5.1 Hypotéza 1 - rozdíly mezi středoškoláky a vysokoškoláky

Nulová a alternativní hypotéza chí-kvadrát testu je v tomto případě formulována následovně:

H_0 : Známka z didaktického testu nezávisí na tom, zda se jedná o studenta střední školy ve Štětí či o studenta některé z vybraných dvou vysokých škol XYZ a VŠE.
H_A : Mezi uvedenými dvěma kategoriálními proměnnými závislost existuje.

Uvedená nulová hypotéza je testována pomocí testové statistiky (3) spočtené na základě následující kontingenční tabulky.

Tabulka 2: Kontingenční tabulka pozorovaných četností kategoriálních proměnných *známka* a *škola*.

Pozorované četnosti (P)	**Škola**		**Celkový součet**
Známka	**XYZ a VŠE**	**Štětí**	
1	42	5	47
2	55	34	89
3	60	46	106
4	35	17	52
Celkový součet	192	102	294

Zdroj: vlastní výpočty

Spočtená hodnota testové statistiky je $\chi^2 = 16{,}1$, kritickým oborem je $\left\langle \chi^2_{0,95}(3); \infty \right) = \left\langle 7{,}8; \infty \right)$. Protože hodnota testové statistiky leží v uvedeném kritickém oboru, tak je nulová hypotéza H_0 zamítnuta. Známka z didaktického testu tedy závisí na tom, zda se jedná o studenta dané střední školy, či jedné z uvedených vysokých škol.

Podíváme-li se na data v tabulce 2 podrobněji, tak vidíme, že jedničku získalo 22 % vysokoškoláků[5], ale pouze 5 % středoškoláků. Podobně známku 3 získalo pouze 31 % vysokoškoláků oproti 45 % středoškoláků. Hypotéza, že známky z didaktického testu jsou na střední škole ve Štětí stejné jako na vysokých školách XYZ a VŠE byla vyvrácena, ovšem předpokládaný směr závislosti se ukázal být takový, že schopnost vysokoškoláků řešit netradiční matematické a logické úlohy je na vyšší úrovni než u středoškoláků. Podezření na to, že by se tato schopnost postupem času u studentů na vyšším stupni vzdělání paradoxně vytrácela se tedy nepotvrdilo.

5.2 Hypotéza 2 – rozdíly mezi muži a ženami

Konkrétní formulace statistické hypotézy zní v tomto případě následovně:

H_0 : Známka z didaktického testu nezávisí na pohlaví.

H_A : Mezi uvedenými dvěma kategoriálními proměnnými závislost existuje.

Odpovídající kontingenční tabulka má následující podobu.

Tabulka 3: Kontingenční tabulka pozorovaných četností kategoriálních proměnných *známka* a *pohlaví*.

Pozorované četnosti (P)	**Pohlaví**		**Celkový součet**
Známka	**Muž**	**Žena**	
1	39	8	47
2	74	15	89
3	75	31	106
4	39	13	52
Celkový součet	227	67	294

Zdroj: vlastní výpočty

[5] *Spočteno na základě dat v tabulce takto:* $42 / 192 \cdot 100 = 22~\%$. *Dále v textu již obdobné jednoduché výpočty uváděny nebudou.*

Spočtená hodnota testové statistiky je $\chi^2 = 5,3$, kritickým oborem je $\left\langle \chi^2_{0,95}(3);\infty \right) = \left\langle 7,8;\infty \right)$. Protože hodnota testové statistiky neleží v uvedeném kritickém oboru, tak nulová hypotéza H_0 zamítnuta není. Známka z didaktického testu tedy nezávisí na pohlaví.

5.3 Hypotéza 3 – souvislost záliby v matematice a známky v testu

Statistická hypotéza je nyní formulována takto:

H_0 : Známka z didaktického testu nezávisí na tom, zda studenta matematika baví.

H_A : Mezi uvedenými dvěma kategoriálními proměnnými závislost existuje.

Pro účely výpočtu testové statistiky byla použita následující kontingenční tabulka.

Tabulka 4: Kontingenční tabulka pozorovaných četností kategoriálních proměnných *známka* a *záliba v matematice*.

Pozorované četnosti (P)	**Matematika mě baví**					**Celkový součet**
Známka	**určitě ne**	**spíše ne**	**nevím**	**spíše ano**	**určitě ano**	
1	1	13	4	20	9	47
2	6	29	15	30	9	89
3	24	31	27	21	3	106
4	13	22	7	8	2	52
Celkový součet	44	95	53	79	23	294

Zdroj: vlastní výpočty

Spočtená hodnota testové statistiky je $\chi^2 = 48,5$, kritickým oborem je $\left\langle \chi^2_{0,95}(12);\infty \right) = \left\langle 21;\infty \right)$. Testové kritérium leží v kritickém oboru, a proto je nulová hypotéza H_0 zamítnuta. Známka z didaktického testu tedy závisí na tom, zda studenta matematika baví. Směr této závislosti je z tabulky 4 patrný na první pohled především při porovnání prvního a posledního sloupce této tabulky. Směr závislosti je v souladu s očekáváním, že žáci, které matematika baví, obstojí v didaktickém testu lépe. Pouze jeden žák ze 44 studentů, které matematika určitě nebaví, získal známku 1. Oproti tomu známku 1 získalo 9 žáků z 23 studentů, které matematika určitě baví.

5.4 Hypotéza 4 – rozdíly u studentů s jiným názorem na matematiku

Nulová a alternativní hypotéza zní v tomto případě takto:

H_0 : Známka z didaktického testu nezávisí na názoru studenta na důležitost matematiky pro úspěch v profesi.

H_A : Mezi uvedenými dvěma kategoriálními proměnnými závislost existuje.

Pro názornost je opět uvedena výchozí kontingenční tabulka.

Tabulka 5: Kontingenční tabulka pozorovaných četností kategoriálních proměnných *známka* a *názor na důležitost matematiky v profesi*.

Pozorované četnosti (P)	**Matematika je důležitá pro úspěch v profesi**					**Celkový součet**
Známka	**určitě ne**	**spíše ne**	**nevím**	**spíše ano**	**určitě ano**	
1	1	14	6	19	7	47
2	2	20	12	48	7	89
3	4	25	23	50	4	106
4	4	17	6	20	5	52
Celkový součet	11	76	47	137	23	294

Zdroj: vlastní výpočty

Porovnání sloupců *určitě ne*, *určitě ano* naznačuje očekávaný směr závislosti – studenti domnívající se, že matematika je důležitá pro úspěch v profesi, byli v didaktickém testu úspěšnější. Tato závislost se ovšem na 5% hladině významnosti nepotvrdila, neboť testové kritérium (3) nabylo hodnoty $\chi^2 = 15{,}9$ a leží tedy mimo kritický obor $\left\langle \chi^2_{0,95}(12); \infty \right) = \left\langle 21; \infty \right)$, díky čemuž nulová hypotéza H_0 není zamítnuta.

5.5 Hypotéza 5 – rozdíly u studentů soukromé a veřejné vysoké školy

Formulace této poslední statistické hypotézy je následující:

H_0 : Známky z didaktického testu jsou u studentů soukromé vysoké školy XYZ stejné jako u studentů veřejné vysoké školy VŠE.

H_A : Mezi uvedenými dvěma kategoriálními proměnnými závislost existuje.

Výchozí kontingenční tabulka pozorovaných četností má následující podobu.

Tabulka 6: Kontingenční tabulka pozorovaných četností kategoriálních proměnných *známka* a *typ vysoké školy*.

Pozorované četnosti (P)	**Typ vysoké školy**		**Celkový součet**
Známka	**Soukromá VŠ (XYZ)**	**Veřejná VŠ (VŠE)**	
1	4	38	42
2	22	33	55
3	48	12	60
4	28	7	35
Celkový součet	102	90	192

Zdroj: vlastní výpočty

Z tabulky je ihned patrné, že studenti veřejné Vysoké školy ekonomické v Praze (VŠE) byli v didaktickém testu úspěšnější než studenti vybrané soukromé vysoké školy, což je potvrzeno také statistickým chí-kvadrát testem. Testová statistika (3) nabyla hodnoty $\chi^2 = 63,4$ a leží v kritickém oboru $\left\langle \chi^2_{0,95}(3);\infty \right) = \left\langle 7,8;\infty \right)$, díky čemuž je nulová hypotéza H_0 zamítnuta.

Uvedený výsledek byl zkoumán podrobněji a bylo zjištěno, že na soukromé vysoké škole XYZ je oproti VŠE významně menší podíl studentů, které matematika baví, a větší podíl studentů, které matematika nebaví, což ilustruje následující kontingenční tabulka.

Tabulka 7: Kontingenční tabulka pozorovaných četností kategoriálních proměnných *známka* a *typ vysoké školy*.

Pozorované četnosti (P)	Typ vysoké školy		Celkový součet
Matematika mě baví	**Soukromá VŠ (XYZ)**	**Soukromá VŠ (XYZ)**	
určitě ne	23	5	28
spíše ne	40	24	64
nevím	14	7	21
spíše ano	24	34	58
určitě ano	1	20	21
Celkový součet	102	90	192

Zdroj: vlastní výpočty

Chí-kvadrát testová statistika nabylo v tomto případě hodnoty $\chi^2 = 36,2$ a leží tedy v kritickém oboru $\left\langle \chi^2_{0,95}(4);\infty \right) = \left\langle 9,5;\infty \right)$, díky čemuž nulová hypotéza pravící, že H_0 : 'záliba v matematice nezávisí na typu vysoké školy' je zamítnuta.

Současně bylo výše v subkapitole 5.3 ukázáno, že záliba v matematice zvyšuje úspěšnost v použitém didaktickém testu. Otázkou nyní tedy je, zda lze horší výsledky u studentů školy XYZ přičíst pouze zmíněné nepříznivé relativní převaze studentů, které matematika nebaví. Za tímto účelem byly sestaveny následující kontingenční tabulky, ve kterých jsou pozorované počty studentů pro kategoriální proměnné *známka* a *typ vysoké školy* spočteny zvlášť pro žáky, které matematika nebaví a zvlášť pro studenty, které matematika baví.[6]

[6] *Kategorie určitě nebaví a spíše nebaví byly sloučeny do jedné kategorie nebaví z důvodu zajištění potřebného počtu v jednotlivých buňkách kontingenční tabulky. Ze stejného důvodu byly do jedné kategorie sloučeny také možnosti spíše baví a určitě baví.*

Tabulka 8: Kontingenční tabulka pozorovaných četností kategoriálních proměnných *známka* a *typ vysoké školy* pro studenty, které matematika nebaví.

Pozorované četnosti (P)	Typ vysoké školy		Celkový součet
Známka	**Soukromá VŠ (XYZ)**	**Veřejná VŠ (VŠE)**	
1	3	9	12
2	12	11	23
3	29	5	34
4	19	4	23
Celkový součet	63	29	92

Zdroj: vlastní výpočty

Tabulka 9: Kontingenční tabulka pozorovaných četností kategoriálních proměnných *známka* a *typ vysoké školy* pro studenty, které matematika baví.

Pozorované četnosti (P)	Typ vysoké školy		Celkový součet
Známka	**Soukromá VŠ (XYZ)**	**Veřejná VŠ (VŠE)**	
1	1	26	27
2	8	18	26
3	10	7	17
4	6	3	9
Celkový součet	25	54	79

Zdroj: vlastní výpočty

Z uvedených tabulek 8 a 9 je na první pohled patrná stále větší úspěšnost studentů VŠE oproti studentům školy XYZ, a to i přes to, že byl v těchto tabulkách již eliminován vliv relativní převahy studentů s nezájmem o matematiku na vysoké škole XYZ oproti VŠE. Uvedené pozorování je statisticky podepřeno chí-kvadrát testem nezávislosti. Testové kritérium (3) spočtené na základě kontingenční tabulky 8 nabývá hodnoty $\chi^2 = 19,9$, která leží v kritickém oboru $\left\langle \chi^2_{0,95}(3);\infty \right) = \left\langle 7,8;\infty \right)$, a proto je nulová hypotéza o nezávislosti zamítnuta. Podobně je tomu u statistiky spočtené na základě tabulky 9, neboť testové kritérium v tomto případě nabývá hodnoty $\chi^2 = 20,7$, která opět leží v kritickém oboru $\left\langle \chi^2_{0,95}(3);\infty \right) = \left\langle 7,8;\infty \right)$. Větší úspěšnost studentů VŠE oproti studentům školy XYZ nelze tedy vysvětlit pouze relativně větším počtem studentů na VŠE s vyšším zájmem o matematiku, neboť studenti VŠE byli úspěšnější i v případě, kdy byly výsledky na VŠE a na XYZ porovnány pouze pro studenty mající stejný zájem o matematiku.

ZÁVĚR

Cílem práce byla analýza schopnosti studentů řešit nestandardní matematické problémy. Za tímto účelem bylo v teoretické části nejprve podrobněji vymezeno, co to vlastně je problém a jak schopnost matematické problémy řešit souvisí s konceptem matematické gramotnosti. Teoretická část práce se taktéž zabývala řešením problémů jakožto výukové metody, která v českém školství není bohužel příliš rozšířena. Studenti v českých školách jsou vedeni spíše k tomu, aby se naučili určité znalosti a procvičili si rutinní postupy, než aby samostatně kreativním způsobem rozvíjeli logické uvažování a hledali vlastní způsoby řešení matematických úloh a problémů. Z tohoto faktu vyvstalo podezření, že se v českém školství schopnost tvůrčím způsobem samostatně řešit nestandardní matematické a logické problémy v průběhu času na vyšším stupni vzdělání paradoxně snižuje, což se stalo hlavní výzkumnou otázkou této závěrečné práce.

V empirické části práce byla právě zmíněná výzkumná otázka formulována exaktně v podobě statistické hypotézy a testována pomocí chí-kvadrát testu nezávislosti v kontingenční tabulce. Výzkumné šetření provedené na dvou vybraných vysokých školách a jedné střední škole nicméně prokázalo, že k poklesu schopnosti řešit nestandardní matematické problémy u vysokoškoláků daných dvou vysokých škol oproti středoškolákům vybrané střední školy nedochází. Dále byla testována hypotéza, zda schopnost tvůrčího řešení problémů závisí na pohlaví, zálibě v matematice, názoru na důležitost matematiky v profesním životě a také na tom, zda se jedná o studenta vybrané veřejné či soukromé vysoké školy. Závislost na pohlaví ani na názoru na důležitost matematiky pro úspěch v profesi se statisticky neprokázala. Ovšem studenti, které matematika baví, dosahovali statisticky prokazatelně lepších výsledků oproti ostatním žákům. Rovněž tak bylo statisticky prokázáno, že studenti na vybrané veřejné vysoké škole dosahují lepších výsledků než studenti vybrané soukromé vysoké školy. Podrobnější analýza tohoto zjištění ukázala, že na vybrané soukromé vysoké škole je výrazně větší podíl studentů, které matematika nebaví. Provedené statistické testy nicméně vyvrátili hypotézu, že by horších výsledků na vybrané soukromé škole bylo dosaženo jen díky tomuto nepříznivému poměru studentů s nezájmem o matematiku.

SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

Seznam použitých českých zdrojů

CALDA, E., O. ODVÁRKO, J. ŠEDIVÝ a S. ŽIDEK, 1990. *Metody řešení matematických úloh*. Praha: SPN. ISBN 80-04-20434-1.

COUFALOVÁ, J., 2006. *Projektové vyučování pro první stupeň základní školy*. Náměty pro učitele. Praha: Fortuna. ISBN 80-7168-958-0.

ČECHOVÁ, P., 2011. *Projektové vyučování v matematice*. Bakalářská práce. Brno: Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta. Vedoucí práce: Eduard Fuchs.

FAJKUS, M., L. KOZÁKOVÁ, J. KRŇÁVEK, Z. PÁTÍKOVÁ, V. POLÁŠEK, L. SEDLÁČEK a J. ŘEZNÍČKOVÁ, 2020. *Sborník řešených témat pro podporu matematické gramotnosti v rámci projektu IKAP*. Zlín: Univerzita Tomáše Bati. ISBN 978-80-7454-913-7.

FRÝZKOVÁ, M., E. POTUŽNÍKOVÁ a V. TOMÁŠEK, 2006. *Netradiční úlohy.* Matematická gramotnost v mezinárodním výzkumu PISA. Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání – Divize nakladatelství Tauris. ISBN 80-211-0522-4.

HEJNÝ, M. a F. KUŘINA, 2009. Dítě, škola a matematika. Kostruktivistické přístupy k vyučování. Praha: Portál. ISBN 978-80-7367-397-0.

CHRÁSKA, M, 1999. *Didaktické testy*. Brno: Paido. ISBN 80-859-3168-0.

CHRÁSKA, M., 2006. *Úvod do výzkumu v pedagogice*. Základy kvantitativně orientovaného výzkumu. Olomouc: Univerzita Palackého. ISBN 80-244-1367-1.

JANKOVCOVÁ, M., J. KOUDELA a J. PRŮCHA, 1989. *Aktivizující metody v pedagogické praxi středních škol*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství. ISBN 80-04-23209-4.

KALHOUS, Z., 2002. *Školní didaktika*. Praha: Portál. ISBN 80-7178-253-X.

KLIČKOVÁ, M., 1989. *Problémové vyučování ve školní praxi*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství. ISBN 80-042-3522-0.

KOPKA, J., 1999. *Hrozny problémů ve školské matematice*. Ústí nad Labem: Univerzita J. E. Purkyně. Acta Universitatis Purkynianae. ISBN 80-7044-247-6.

KOPKA, .J, 2004. *Výzkumný přístup při výuce matematiky*. Ústí nad Labem: Univerzita J. E. Purkyně. Acta Universitatis Purkynianae. ISBN 80-7044-604-8.

KUBÍNOVÁ, M., 2002. *Projekty ve vyučování v matematice*. Cesta k tvořivosti a samostatnosti. Praha: Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta. ISBN 80-7290-088-9.

KUŘINA, F., 2011. *Matematika a řešení úloh*. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta. ISBN 978-80-7394-307-3.

LIŠKOVÁ, H., E. NOVÁKOVÁ a E. ZELENDOVÁ, 2017. *Rozvíjíme matematické nadání žáků*. Náměty pro 1. stupeň základní školy. Praha: Národní ústav pro vzdělávání. ISBN 978-80-7481-190-6.

MAŇÁK, J. a V. ŠVEC, 2003. *Výukové metody*. Brno: Paido. ISBN 80-7315-039-5.

MAREŠ, J., 1980. Fridmanova teorie učebních úloh. *Pedagogika*, roč. 30, č. 5. s. 595 – 610.

MELICHAROVÁ, D., 2017. Metody řešení problémů ve výuce matematiky. Diplomová práce. České Budějovice: Pedagogická fakulta Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích. Vedoucí diplomové práce: Roman Hašek.

NĚMČÍKOVÁ, K., V. OLŠÁKOVÁ, F. ROUBÍČEK, V. TOMÁŠEK, J. VAŇKOVÁ a E. ZELENDOVÁ, 2011. *Matematická gramotnost ve výuce*. Metodická příručka. Praha: Národní ústav pro vzdělávání – Divize VÚP. ISBN 978-80-87000-97-7.

PECINA, P. a L. ZORMANOVÁ, 2009. *Metody a formy aktivní práce žáků v teorii a praxi*. Brno: Masarykova univerzita. ISBN 978-80-210-4834-8.

ŠÍMA, F., 2013. *Matematizace reálných situací a slovní úlohy*. Disertační práce. Olomouc: Přírodovědecká fakulta Univerzity Palackého v Olomouci. Vedoucí disertační práce: Stanislav Trávníček.

VYŠÍN, J., 1962. *Metodiky řešení matematických úloh*. 2. doplněné vydání. Praha: Matematická knižnice.

WAGNEROVÁ, D., 2010. *Nestandardní aplikační úlohy a problémy*. Diplomová práce. Olomouc: Pedagogická fakulta Univerzity Palackého v Olomoucí. Vedoucí diplomové práce: Jitka Hodaňová.

ZAČALOVÁ, R., 2017. *Aktivizační metody ve výuce matematiky*. Diplomová práce. Olomouc: Přírodovědecká fakulta Univerzity Palackého v Olomouci. Vedoucí diplomové práce: Petr Emanovský.

ZELENDOVÁ, E. a H. HAVLÍNOVÁ, 2019. Zvýšení zájmu žáků o matematiku pomocí řešení nestandardních úloh rozvíjejících matematickou gramotnost. *Elementary Mathematics Education Journal*, roč. 1, č. 1, s. 54-61. ISSN 2694-8133.

Seznam použitých zahraničních zdrojů

COFMAN, J., 1990. *What to Solve? Problems and Suggestions for Young Mathematicians*. Oxford: Clarendon Press. ISBN 0-190853294-6.

POLYA, G., 1957. *How to Solve It*. New York: Princeton University Press. ISBN 978-0-691-11966-3.

Seznam použitých internetových zdrojů

CHYTRÝ, V., *Netradiční přístupy k vyučování matematice*. Podpora profesního rozvoje učitelů v počátečním vzdělávání. [online], © [cit. 2021-07-27]. Dostupné z:

http://old.projekty.ujep.cz/podpuc/wp-content/uploads/2014/06/Netradicni_pristupy_k_vyucovani_matematice.pdf

KONCEPCE MATEMATICKÉ GRAMOTNOSTI VE VÝZKUMU PISA 2003. Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání, 2004. [online], © [cit. 2021-07-21]. Dostupné z: <https://www.csicr.cz/getattachment/cz/O-nas/Mezinarodni-setreni-archiv/PISA/PISA-2003/Koncepce-matem-gramotnosti-publikace.pdf>

KOPKA, J., 2016. *Jak řešit matematické problémy*. [online], © [cit. 2021-09-02]. Dostupné z: <https://kma.ujep.cz/administrace/uploads/883ee20.pdf>

METODY ŘEŠENÍ MATEMATICKÝCH ÚLOH. [online], © [cit. 2021-07-21]. Dostupné z:

<https://drive.google.com/drive/folders/19OJtKvWDssZ9wjegvWce0fZy3VYAlo1Q>

NESTANDARDNÍ APLIKAČNÍ ÚLOHY A PROBLÉMY PRO 2. STUPEŇ ZŠ A NG, 2008. Praha: Výzkumný ústav pedagogický. [online], © [cit. 2021-07-21]. Dostupné z: <http://www.ceskaskola.cz/2010/12/e-kniha-pro-vas-nestandardni-aplikacni.html>

RÁMCOVÝ VZDĚLÁVACÍ PROGRAM GYMNÁZIÍ 2021 (RVP G 2021). [online], © [cit. 2021-07-25]. Dostupné z: <http://www.nuv.cz/t/rvp-pro-gymnazia>

RÁMCOVÝ VZDĚLÁVACÍ PROGRAM ZÁKLADNÍHO VZDĚLÁVÁNÍ 2021 (RVP ZV 2021). [online], © [cit. 2021-07-25]. Dostupné z: <http://www.nuv.cz/t/rvp-pro-zakladni-vzdelavani>

ZELENDOVÁ, E., *Matematická gramotnost žáků a mezinárodní pedagogické výzkumy*. Metodický portál: Články [online], © [cit. 2021-03-27]. 30. 6. 2009. Dostupné z: <http://clanky.rvp.cz/clanek/c/ZVB/3183/MATEMATICKA-GRAMOTNOST-ZAKU-A-MEZINARODNI-PEDAGOGICKE-VYZKUMY.html>

SEZNAM ZKRATEK

PISA - Programme for International Student Assessment

RVP - Rámcový vzdělávací program

TIMSS - Trends in International Mathematics and Science Study

VŠE - Vysoká škola ekonomická v Praze

SEZNAM OBRÁZKŮ, TABULEK A GRAFŮ

Seznam obrázků

Seznam tabulek

SEZNAM PŘÍLOH

Příloha A – Nestandardizovaný didaktický test s ukázkou řešení

Problém 1: Máme vyplatit 37 Kč ve dvoukorunových a pětikorunových mincích. Kolika způsoby to lze provést?

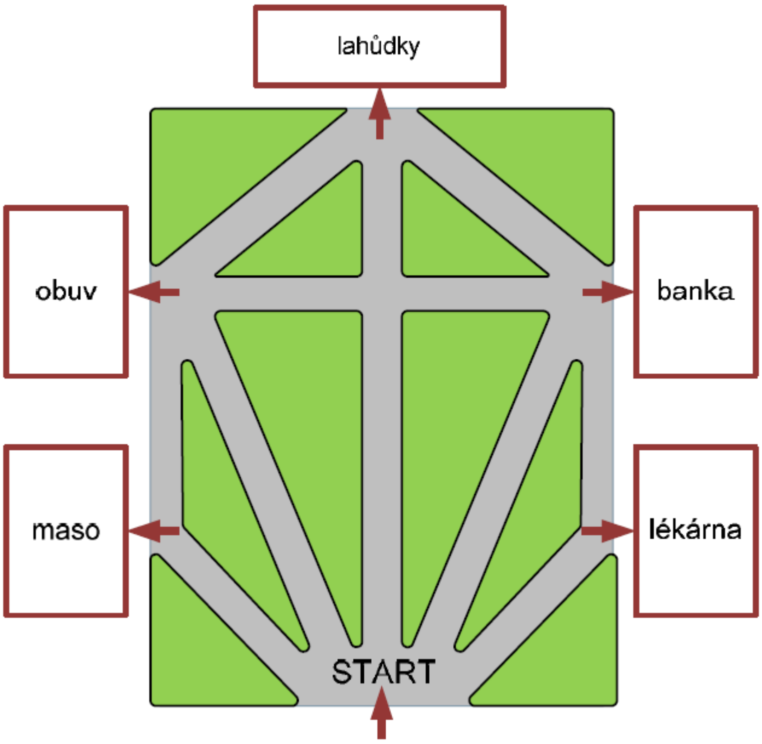
Řešení: Protože 37 je liché číslo, tak počet pětikorunovou mincí musí být také liché číslo. Maximálně je možné použít 7 pětikorunových mincí, což dá hodnotu 35 Kč a po přidání jedné dvoukorunové mince dostaneme výsledek 37 Kč, čímž jsme získali první způsob. Abychom na žádný způsob nezapomněli, budeme dále postupovat systematicky tak, že počet pětikorunových mincí snížíme vždy o dvě (aby zůstala zachována jejich lichost). Všechny možnosti jsou shrnuty v následující tabulce:

	Počet pětikorunových mincí	**Počet dvoukorunových mincí**
1. způsob	7	1
2. způsob	5	6
3. způsob	3	11
4. způsob	1	16

Počet všech možných způsobů je tedy 4.

Problém 2: Na plánku jsou zobrazeny cesty k nákupním střediskům a k bance. Zákazník vyjde z místa START, musí projít všechny cesty přesně jednou, přičemž křižovatky je možné procházet vícekrát.

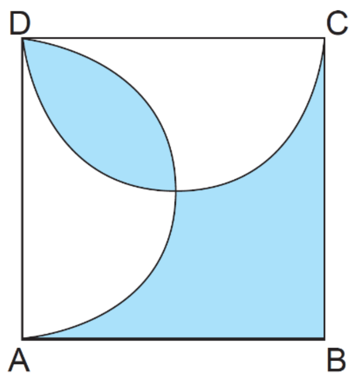
a) Je možné skončit v lahůdkách?
b) Je možné skončit v obuvi?
c) Je možné skončit v lékárně?



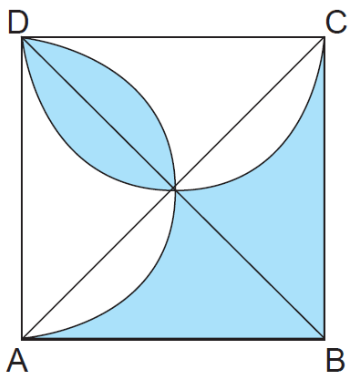
Řešení:

a) Ano, v lahůdkách skončit může, neboť do lahůdek vedou 3 chodby, což je liché číslo – dvě z těchto tří chodeb použije na to, aby, k lahůdkám přišel a hned opět odešel, třetí z těchto chodeb bude konečnou chodbou končící v lahůdkách.
b) Ne, v obuvi skončit nemůže, neboť do obuvi vedou 4 chodby, což je sudé číslo, z čehož plyne, že pokud dojde neprojitou chodbou k obuvi, tak mu ještě minimálně jedna neprojitá chodba od obuvi bude zbývat a nemůže tam tedy skončit.
c) Ne, v lékárně skončit nemůže z důvodu již uvedeného v předešlém bodě b) – do lékárny vedou dvě chodby, což je sudé číslo.

Problém 3: Na obrázku je narýsován čtverec s délkou strany 2 cm a dvě půlkružnice s průměrem taktéž 2 cm. Určete obsah modře vyšrafovaného útvaru ohraničeného těmito křivkami.



Řešení: Přidáme-li do čtverce jeho dvě úhlopříčky



tak vidíme, že vybarvená plocha tvoří polovinu obsahu čtverce. Čtverec má obsah 4 cm^2, takže obsah barevně zvýrazněné plochy je 2 cm^2.

Problém 4: Na stole leží 8 sirek. Můžete odebrat 1, 2 nebo 3 sirky. Poté je na řadě Váš protihráč, který taktéž může odebrat 1, 2 nebo 3 sirky. Následně jste na řadě opět Vy a uvedený postup se stále opakuje. Prohraje ten, kdo odebere poslední sirku. Popište, jakým způsobem by začínající hráč měl postupovat, aby měl vždy zajištěno vítězství.

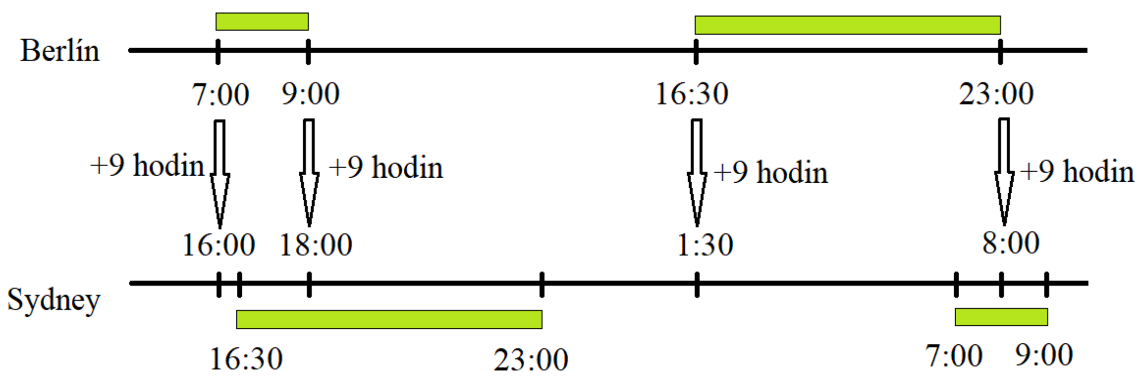
Řešení: Řešit úlohu budeme odzadu, tj. začneme v situaci, kdy na stole bude po mém tahu jen 1 sirka. V takovémto případě mám již zajištěno vítězství, neboť můj protihráč bude muset tuto poslední sirku odebrat, díky čemuž prohraje. Vítěznou situaci (1 sirka na stole po mém tahu) si mohu zajistit tak, že na stole po mém tahu zůstane 5 sirek, neboť protihráč ve své tahu sníží počet sirek na 4, 3 nebo 2 a ve všech těchto případech to pak mohu v mém tahu převést na vítěznou strategii, kdy na stole zůstane 1 sirka. Vidíme tedy, že „5 sirek na stole po mém tahu" také představuje vítěznou situaci. Nyní již lze zformulovat vítěznou strategii - začínající hráč vezme ze stolu na začátku hry 3 sirky, přičemž ve svém následném druhém tahu jich odebere tolik, aby na stole zůstala pouze jedna sirka.

Problém 5: Mark žije v Sydney a Hans v Berlína. Tito dva kamarádi spolu rádi chatují po internetu, což vyžaduje, aby byli připojeni k internetu ve stejnou dobu. Z časových pásem plyne následující:

Není možné chatovat od 9:00 do 16:30 jejich místního času, protože jsou ve škole. Taktéž Mark a Hans nemohou chatovat od 23:00 do 7:00 svého místního času, neboť v tuto dobu spí. Určete, jaká doba je vhodná pro Marka a Hanse k chatování a zapište místní časy do následující tabulky:

Místo	**Čas**
Berlín	
Sydney	

<u>Řešení</u>: Porovnáním časových pásem vidíme, že v Sydney je o 9 hodin více než v Berlíně. Na následujícím obrázku je proto k časům v Berlíně přičítáno 9 hodin, abychom získali čas v Sydney. Časy vhodné pro chatování jsou zvýrazněny zeleně:



Z uvedeného obrázku je již vidět řešení:

Místo	**Čas**
Berlín	7:30-9:00 a 22:00-23:00
Sydney	16:30-18:00 a 7:00-8:00

Problém 6: Následující tabulka shrnuje informace o době rozkladu některých druhů odpadků:

Druh odpadků	**Doba rozkladu**
slupky od banánů	1-3 roky
slupky od pomerančů	1-3 roky
papírové krabičky	0,5 roku
žvýkačky	20-25 roků
noviny	několik dní
umělohmotné kelímky	přes 100 let

Uveďte **jeden** důvod, proč není sloupkový diagram vhodný pro účely grafického vyjádření uvedených dat.

Řešení: Rozdíly ve výšce sloupců by byly příliš veliké, pokud bychom nechtěli měřítko na vertikální ose deformovat. Jiný důvod je ten, že výšky sloupců nelze určit pro neurčitá data zadaná v podobě intervalů.

Příloha B – Dotazník pro žáky

1) Jaké je Vaše pohlaví:
   - ☐ žena
   - ☐ muž
2) Jakou školu studujete:
   - ☐ Střední odborná škola ve Štětí
   - ☐ XYZ
   - ☐ Vysoká škola ekonomická v Praze
3) Baví Vás matematika?
   - ☐ určitě ano
   - ☐ spíše ano
   - ☐ nevím
   - ☐ spíše ne
   - ☐ určitě ne
4) Pokládáte matematické kompetence za důležité pro úspěšný profesní život?
   - ☐ určitě ano
   - ☐ spíše ano
   - ☐ nevím
   - ☐ spíše ne
   - ☐ určitě ne

BIBLIOGRAFICKÉ ÚDAJE

Jméno autora: Ing. Andrea Čížků, Ph.D.

Název kurzu: Studium v oblasti pedagogických věd pro učitele odborných předmětů, praktického vyučování a odborného výcviku

Název práce: Analýza schopnosti studentů na různých úrovních vzdělání řešit netypické logické a matematické úlohy

Rok: 2021

Počet stran textu bez příloh: 33

Celkový počet stran příloh: 6

Počet titulů českých použitých zdrojů: 26

Počet titulů zahraničních použitých zdrojů: 2

Počet internetových zdrojů: 8

Počet ostatních zdrojů: 0