UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

INDUKTIVNÍ A DEDUKTIVNÍ PŘÍSTUPY PŘI VÝUCE MATEMATIKY

Disertační práce

Jiří Břehovský

Obor: Didaktika matematiky

Školitel: Doc. RNDr. Petr Emanovský Ph.D.

Olomouc 2011

Čestné prohlášeni

Prohlašuji, že předložená disertační práce je mým původním autorským dílem, které jsem vypracoval samostatně. Literaturu a další zdroje, z nichž jsem při zpracováni čerpal, v práci řádně cituji.

V Dubí 4. 5. 2011

Jiří Břehovský

Poděkování

Rád bych poděkoval panu Doc. RNDr. Petru Emanovskému, Ph.D. za podnětné rady k disertační práci, čas a odbornou pomoc věnovanou v průběhu celého studia. Děkuji také paní Gabriele Šteflové za jazykovou korekturu textu. V neposlední řadě děkuji Mgr. Libuši Helclové, Mgr. Jitce Horáčkové, Mgr. Ivetě Šmirklové a Mgr. Janu Šimkovi za ochotu a pomoc při organizování experimentální výuky na jednotlivých středních školách.

INDUKTIVNÍ A DEDUKTIVNÍ PŘÍSTUPY PŘI VÝUCE MATEMATIKY

Anotace disertační práce

Text disertační práce je tématicky zaměřen na využívání induktivních a deduktivních přístupů, které lze využívat při vyučování matematiky na střední škole. Vlastní text je rozdělen na dvě hlavní části: *Induktivní a deduktivní přístupy při výuce matematiky na střední škole* a *Induktivní a deduktivní metody v učebnicích matematiky pro střední školy*.

V první části textu se soustřeďujeme na možnost využití induktivních a deduktivních přístupů přímo při výuce matematiky na středních školách. Uvádíme několik klasifikací těchto metod a prostřednictvím výzkumu porovnáváme efektivitu těchto vyučovacích metod s častěji používanými metodami výuky. Cílem výzkumu bylo prověřit, zda vhodné zařazování a využívání induktivních a deduktivních přístupů ve výuce matematiky vede k efektivnějšímu a trvalejšímu získávání poznatků. Jako výzkumný prostředek pro verifikaci zvolených hypotéz byl vybrán pedagogický experiment. Pomocí něho jsme porovnávali účinnost induktivních a deduktivních přístupů a metod ve výuce matematiky oproti tradičním metodám výuky. Měřítkem, které sloužilo k porovnání této účinnosti, byly dosažené vědomosti studentů na konci experimentu.

Ve druhé části textu se zabýváme rozborem učebnic matematiky pro střední školy. Vlastní výzkum učebnic je zaměřen na jejich obsahovou stránku. Zejména na výkladovou a procvičovací textovou složku. Hlavním cílem je zmapovat zastoupení induktivních a deduktivních způsobů výkladu v učebnicích matematiky a zjištění míry obsahu jednotlivých cvičení, která při řešení vyžadují od studenta využití heuristických přístupů. Předmětem výzkumu byly dvě řady učebnic, které střední školy využívají nejvíce. Byly to Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť 1. – 6. část nakladatelství SPN a Matematika pro gymnázia (ucelená řada) nakladatelství Prométheus. Vlastní výzkum byl zaměřen na výkladovou a procvičovací část všech zmíněných učebnic matematiky.

THE INDUCTIVE AND DEDUCTIVE METHODS OF TEACHING MATHEMATICS IN SECONDARY SCHOOLS

PhD thesis annotation

The content of this PhD thesis is focused on the application of the inductive and deductive methods of teaching, which can be used in the course of mathematics in secondary schools. The thesis is divided into two main parts: *"The Inductive and Deductive Methods of Teaching in Secondary Schools"* and *"The Inductive and Deductive Methods of Teaching in Mathematics Textbooks for Secondary Schools"*.

The first part presents the possibilities of inductive and deductive methods application in the course of mathematics in secondary schools. Some classifications of such methods are given, by the means of effectiveness comparison the advantages of these methods and traditionally used teaching methods are described. Research purpose was to check whether an appropriate application of inductive and deductive methods in the course of mathematics would effect more efficient and lasting knowledge and skills. Pedagogical experiment is chosen as a research method to verify offered hypothesis. By the means of such an experiment we could compare the effectiveness of inductive and deductive methods and traditional methods of teaching used in the course of mathematics in secondary schools. We measured the results of effectiveness comparison on the basis of knowledge and skills gained by schoolchildren in the end of the experiment.

The second part introduces the analysis of mathematics textbooks for secondary schools. The content of these textbooks was analyzed, especially, explanations and exercises. The main purpose is to describe inductive and deductive methods used in explanations, to analyze the content of exercises in order to show whether they stimulate schoolchildren's heuristic thinking or not. Two textbooks, which are widely used in secondary schools, were analyzed: "Mathematics for secondary and vocational schools", chapters – 1-6, publishing house "SPN", and "Mathematics for high schools", the whole set of books, publishing house "Prometheus". The research was focused on the explanations and exercises presented in all the mentioned textbooks.

ИНДУКТИВНЫЕ И ДЕДУКТИВНЫЕ МЕТОДЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Резюме диссертации

Содержание диссертации тематически направлено на исследование использования индуктивных и дедуктивных методов обучения, которые могут быть применены при обучении математике в средней школе. Текст диссертации представлен в двух главных частях: *«Индуктивные и дедуктивные методы обучения математике в средней школе»* и *«Индуктивные и дедуктивные методы обучения математике, представленные в учебниках по математике для средних школ»*.

В первой части описываются возможности применения индуктивных и дедуктивных методов обучения непосредственно при обучении математике в средних школах. Предлагается классификация указанных методов и сравнительное исследование эффективности этих методов и наиболее используемых методов. Цель исследования – выяснить, насколько использование индуктивных и дедуктивных методов обучения математике способствует приобретению эффективных и устойчивых знаний. В качестве исследовательского инструмента апробирования предложенных гипотез был выбран педагогический эксперимент, при помощи которого мы сравнивали эффективность индуктивных и дедуктивных методов обучения математике и традиционных методов обучения. Уровень знаний учеников, полученный в конце эксперимента, определял эффективность методов преподавания.

Во второй части диссертации представлен анализ учебных пособий по математике для средних школ. Исследовалась содержательная сторона учебных материалов, в частности, объяснительные тексты и тексты упражнений. Цель исследования – описать индуктивные и дедуктивные способы объяснения материала в учебных пособиях по математике, установить степень разработанности упражнений, которые требуют от учеников применения поисковых методов. Две категории учебных пособий, которые наиболее используются в средних школах, были проанализированы: «Учебник математики для средних школ и средних профессиональных училищ», главы – 1-6 , издательство SPN и «Учебник математики для гимназий», полный комплект учебников, издательство Prometheus. Исследование было направлено на объяснительную сторону содержания и собственно упражнения во всех упомянутых учебных пособиях.

OBSAH

1 ÚVOD

V současné době probíhá na středních školách změna systému vzdělávání. Základem nové koncepce je systém Rámcových vzdělávacích programů oborů středního vzdělání. Cílem tohoto systému vzdělávání je vybavit žáky klíčovými kompetencemi a všeobecným rozhledem na úrovni středoškolsky vzdělaného člověka, a tím je připravit především pro vysokoškolské vzdělávání a další typy terciárního vzdělávání, profesní specializaci i pro občanský život (RVPG 2007). Jednou z priorit této změny je zařazovat do vzdělávání postupy a metody podporující tvořivé myšlení, pohotovost a samostatnost studentů. To je jeden z důvodů, proč je text tématicky zaměřen právě na využívání induktivních a deduktivních přístupů, které lze využívat při vyučování matematice na střední škole. Vlastní text je rozdělen na dvě hlavní části: *Induktivní a deduktivní přístupy při výuce matematiky na střední škole* a *Induktivní a deduktivní přístupy v učebnicích matematiky pro střední školy*.

V první části textu se soustřeďujeme na možnost využití induktivních a deduktivních přístupů přímo při výuce matematiky na středních školách. Uvádíme několik klasifikací výukových metod a prostřednictvím výzkumu porovnáváme efektivitu těchto vyučovacích metod s častěji používanými vyučovacími metodami.

Ve druhé části textu se zabýváme rozborem učebnic matematiky pro střední školy. Vlastní výzkum učebnic je zaměřen na jejich obsahovou stránku, zejména na výkladovou a procvičovací textovou složku. Hlavním cílem je zmapovat zastoupení induktivních a deduktivních způsobů výkladu v učebnicích matematiky a zjištění míry obsahu jednotlivých cvičení, která při řešení vyžadují od studenta využití heuristických přístupů.

Autor

2 INDUKTIVNÍ A DEDUKTIVNÍ PŘÍSTUPY PŘI VÝUCE MATEMATIKY (TEORETICKÁ ČÁST)

Rámcový vzdělávací program (RVPG 2007) mimo jiné uvádí, že smyslem vzdělávání na gymnáziu není předat žákům co největší objem dílčích poznatků, fakt a dat, ale vybavit je systematickou a vyváženou strukturou vědění, naučit je zařazovat informace do smysluplného kontextu životní praxe a motivovat je k tomu, aby chtěli své vědomosti a dovednosti po celý život dále rozvíjet. To předpokládá uplatňovat ve vzdělávání postupy a metody podporující tvořivé myšlení, pohotovost a samostatnost žáků, využívat způsoby diferencované výuky, nové organizační formy, zařazovat integrované předměty apod. Dále jsou v něm stanoveny cíle vzdělávání.

Cíle vzdělávání (RVPG 2007)
Vzděláváním ve čtyřletých gymnáziích a na vyšším stupni víceletých gymnázií se usiluje o naplnění těchto cílů:

- Vybavit žáky klíčovými kompetencemi na úrovni, kterou předpokládá RVP G,
- vybavit žáky širokým vzdělanostním základem na úrovni, kterou popisuje RVP G,
- připravit žáky k celoživotnímu učení, profesnímu, občanskému i osobnímu uplatnění.

Klíčové kompetence představují soubor vědomostí, dovedností, schopností, postojů a hodnot, které jsou důležité pro osobní rozvoj jedince, jeho aktivní zapojení do společnosti a budoucí uplatnění v životě. (RVPG 2007)

Klíčové kompetence jsou rozděleny do šesti hlavních kategorií: kompetenci k učení, kompetenci k řešení problémů, kompetenci komunikativní, kompetenci sociální a personální, kompetenci občanskou, kompetenci k podnikavosti. V každé z těchto kategorií jsou podrobně stanoveny úrovně, které by měl žák po absolvování dané střední školy dosáhnout. Dále popisovaný výzkum je tématicky zařazen do vzdělávací oblasti *matematika a její aplikace*. Prostřednictvím induktivních a deduktivních přístupů využívaných při výuce matematiky se ve výzkumu zaměřujeme na rozvíjení následujících klíčových kompetencí.

Kompetence k učení

Žák:

- své učení a pracovní činnost si sám plánuje a organizuje, využívá je jako prostředku pro seberealizaci a osobní rozvoj,
- efektivně využívá různé strategie učení k získání a zpracování poznatků a informací, hledá a rozvíjí účinné postupy ve svém učení, reflektuje proces vlastního učení a myšlení,
- kriticky přistupuje ke zdrojům informací, informace tvořivě zpracovává a využívá při svém studiu a praxi,
- kriticky hodnotí pokrok při dosahování cílů svého učení
  a práce, přijímá ocenění, radu i kritiku ze strany druhých,
  z vlastních úspěchů i chyb čerpá poučení pro další práci.

Kompetence k řešení problémů

Žák:

- rozpozná problém, objasní jeho podstatu, rozčlení ho na části,
- vytváří hypotézy, navrhuje postupné kroky, zvažuje využití různých postupů při řešení problému nebo ověřování hypotézy,
- uplatňuje při řešení problémů vhodné metody a dříve získané vědomosti a dovednosti, kromě analytického
  a kritického myšlení využívá i myšlení tvořivé s použitím představivosti a intuice,
- kriticky interpretuje získané poznatky a zjištění a ověřuje je, pro své tvrzení nachází argumenty

a důkazy, formuluje a obhajuje podložené závěry,

- je otevřený k využití různých postupů při řešení problémů, nahlíží problém z různých stran,
- zvažuje možné klady a zápory jednotlivých variant řešení, včetně posouzení jejich rizik a důsledků.

Kompetence komunikativní	Žák: • s ohledem na situaci a účastníky komunikace efektivně využívá dostupné prostředky komunikace, verbální i neverbální, včetně symbolických a grafických vyjádření informací různého typu, • používá s porozuměním odborný jazyk a symbolická a grafická vyjádření informací různého typu, • prezentuje vhodným způsobem svou práci i sám sebe před známým i neznámým publikem.

V následujícím výzkumu se pokoušíme zodpovědět otázku, zdali je při rozvíjení výše zmíněných klíčových kompetencí vhodnější používat induktivní a deduktivní přístupy, nebo využít tradičnějších metod výuky. Dále také nabízíme nástroj, který by vyučujícím napomohl při přirozeném rozvoji výše zmíněných klíčových kompetencí u svých studentů.

2.1 METODY VYUČOVÁNÍ MATEMATICE

V této kapitole jsou stručně popsány a rozděleny základní vyučovací metody, které můžeme využívat při výuce matematiky. Výčet těchto metod není úplný, ale je koncipován tak, abychom v jeho souvislostech mohli lépe popsat a pochopit induktivní a deduktivní přístupy, které můžeme při výuce matematiky použít. Vyučovací metoda je v publikaci (Gábor 1989) charakterizována následujícím způsobem.

Vyučovací metoda: způsob dosažení cíle vyučování. Jde o aktivní speciální druh a způsob činností učitele a žáka, které usilují buď o utvoření, nebo úpravu zdroje poznání nebo o fixaci poznání. (Križalkovič 1989)

Vyučovací metody jsou součástí celého metodického systému vzdělávání, který zajišťuje úplné poznání. To znamená, že umožňuje vytváření požadovaných vědomostí, dovedností a návyků. Metodický systém chápeme jako komplex vyučovacích metod s úlohou naučit a zvládnout učivo. (Križalkovič 1989)

Vyučovací metody lze rozdělit podle několika aspektů nazírání. Pro nás jsou nejzajímavější tato hlediska (Križalkovič 1989):

Podle počtu žáků:

- *metody kolektivního, hromadného vyučování*,
- *metody skupinového vyučování* - práci ve skupinách, které jsou menší než třída,
- *metody individuálního vyučování* - jeden žák má jednoho učitele, nebo žák postupuje podle individuálního plánu nezávisle na ostatních.

Podle logického postupu:

- *analytická metoda* – postupuje od celku k částem,
- *syntetická metoda* – postupuje od části k celku, používá se v geometrii, v přírodních vědách,
- *analogicko-syntetická metoda* – využívá oba dva logické postupy, a proto je velmi přirozená,
- *induktivní metoda* – postupuje od jednotlivých faktů ke všeobecnějším závěrům,
- *deduktivní metoda* – postupuje od všeobecných zákonů směrem k individuálním jevům a vztahům, od všeobecných principů ke konkrétním,
- *genetická metoda* – usiluje o rozvíjení vědomostí přímo před žákem, myšlenky, důkazy tvrzení se vyvíjejí jeden po druhém tak, že závěr je žákům pochopitelný, je přímo výsledkem geneze poznání,
- *dogmatická metoda* – usiluje o vycházení z teze, která je pravdivá a neměnná, tato metoda žádá jen odvozování částečných poznatků a vztahů ze všeobecně uznávané teze.

Podle zdroje informací:

- *metody slovního vyjádření* – monologické, dialogické metody,
- *metody knižního poučení* – samostatné studium literatury,
- *pracovní metody* – praktické práce, laboratorní práce, myšlenkové pochody objevného charakteru,
- *metody pozorování* – demonstrace, pozorování ilustrace.

Podle aktivity studentů

- *metody podávání hotových faktů* – studenti jsou pasivními posluchači: přednáška, čtení literatury.
- *metody hledání faktů* – studenti se aktivně podílejí na hledání nových poznatků a vědomostí. Heuristické strategie, projektové metody.

Z psychologického hlediska:

- *metody vnímání jevů*

  metody myšlení – objevování nových vztahů,

  metody činnosti – hra, práce,

  metody memorování – učení se nazpaměť,

  metody tvořivé aktivity – využívání fantazie.

Toto hledisko přímo vychází z rozboru osobnosti konkrétního žáka, z procesů, které charakterizují danou činnost. Hovoříme zde tedy o metodách podle procesu, který převládá při předávání nebo objevování učiva.

Podle míry vědomostí a dovedností:

- *Heterodidaktické metody* – učitel vede, řídí a organizuje učební činnost žáka tak, aby žák získal informace od něj.
- *Autodidaktická metoda* – metoda samoučení. Jde o metody samostatné, studijní, objevné, výzkumné, kde se žák vzdělává bez toho, aby potřeboval druhou osobu. Žák musí být autodidakcie schopen. Mezi oběma skupinami existuje úzký vztah. Heterodidaktické metody se postupně tak, jak je žák začíná ovládat, mění na metody autodidaktické. Tento vývoj podmiňuje postupné získávání autodidaktických zkušeností. Vývoj probíhá ve třech základních úrovních:

  a) žák je veden učitelem,

  b) postupné uvolňování,

c) plná autodidakcie, která následuje po úplném zvládnutí metod sebeučení.

Podle obsahového hlediska:

- *Heuristická metoda (beseda)* – učitel nepodává žákům hotové vědomosti, ale uměle formulovanými úkoly (otázkami) nabádá žáky, aby na základě svých vědomostí a zkušeností sami přicházeli postupně k novým pojmům, pravidlům a způsobu řešení. Problémové otázky využívané při heuristické metodě by měly usměrňovat myšlení žáka tak, aby překonal nesoulad mezi svými vědomostmi a novými fakty objevujícími se v průběhu výuky. Pokud je odpověď žáka chybná, učitel ji ihned sám neopravuje, ale nabádá celou třídu k pomoci s objasněním rozdílu mezi nesprávnými úvahami žáka a pravdivými fakty.
- *Samostatná práce* – jako základní metoda práce žáka s učebním materiálem. Na úspěchu samostatné práce závisí do jisté míry úspěch celého učení se. Pro jednotlivce je nezbytné naučit se pracovat s učebnicí a tím se naučit samostatně se učit.
- *Přednáška* – jedná se o slovní výklad a objasnění hotových vědomostí. Žák se do výuky výrazně nezapojuje, je pouze pasivním příjemcem informací.
- *Rozhovor* – v matematice se většinou používá k motivaci žáků, obeznamujeme žáky s významem zkoumané otázky apod.
- *Laboratorní a praktické cvičení* – laboratorní práce vykonávají žáci ve třídě na modelech, mapách, plánech atp. Rozeznáváme dva druhy těchto prací:
  a) **poznávací**, které mají za cíl obeznámit žáky s novými matematickými pojmy,
  b) **praktické**, při kterých se žáci učí využívat teoretické poznatky z matematiky při řešení konkrétních úloh.
- *Experiment* – umožňuje psychologický přístup

> k matematickému problému, otvírá pohled do duševní dílny matematika, a tím učí žáky tvořivě pracovat, vzbuzuje zájem o matematický problém a tvoří ho konkrétnějším. Z těchto důvodů by se mělo experimentování využívat v matematice základních a středních škol co možná nejvíc. Bez pokusů je vyučování matematiky buď verbální, nebo ryze abstraktní, žákům těžko přístupné, odtržené od skutečnosti, a proto nezajímavé.

Při výběru vhodné vyučovací metody je třeba respektovat fakt, že žádná z vyučovacích metod, i s přihlédnutím na jejich klady, není univerzální. Pedagogický vyučovací proces si už ve své podstatě vynucuje variabilitu využívání jednotlivých vyučovacích metod. Každá z metod má svá pozitiva i negativa, což je nutné zohlednit při jejím vhodném zařazení do vyučovacího procesu. Pro učitele by mělo být samozřejmostí kombinovat jednotlivé vyučovací metody nejen v různých hodinách, ale i při jedné vyučovací hodině. V takovém případě je vždy nutné určit primární vyučovací metodu. Abychom správně zvolily vhodnou vyučovací metodu pro danou vyučovací jednotku, měli bychom vždy zohlednit tyto skutečnosti:

- obsah a objem učebního materiálu naplánovaného na vyučovací jednotku,
- věkový průměr žáků, úroveň jejich vědomostí z matematiky a samostatnosti myšlení,
- vztah k učení,
- pracovitost a aktivitu v hodině.

2.2 OSVOJOVÁNÍ ZÁKLADNÍCH MATEMATICKÝCH POZNATKŮ

Aby žáci úspěšně zvládli celé učivo matematiky, je pro ně nezbytné osvojit si základní matematické poznatky. Tedy zvládnout jazyk matematiky, porozumět matematickým pojmům a pochopit vztahy mezi nimi. Dosažení tohoto cíle přímo ovlivňuje vyučující volbou vyučovacích metod.

2.2.1 Aktivní vyučovaní matematice

Pro žáka je mnohem užitečnější, jestliže sám objeví nový poznatek, než když se má naučit hotový systém pojmů, vztahů, vět a důkazů bez pochopení jejich podstaty, významu a vzájemných vztahů. Je nutné úvahy žáků ve vyučování usměrňovat tak, aby byli nuceni

znovu sami objevovat poznatky, které tvoří obsah probraného učiva. Vést žáky k tomu, aby tyto poznatky logicky uspořádali do soustavy a utvořili si tak ucelenou a správnou představu
o učivu. Tímto způsobem učí žáky vyučování matematice správně myslet, přispívá k rychlejšímu rozvoji a také k dokonalejšímu pochopení učební látky.

Matematická činnost: tímto pojmem rozumíme aktivní vyučování, které formuje a rozvíjí myšlenkovou činnost určité struktury. (Gábor 1989)

Aktivní vyučování: při tomto typu organizujeme vyučování matematiky tak, aby žák postupoval z jedné úrovně matematické činnosti do následující úrovně tak, že každá další úroveň je vyšší. Aktivní vyučování tedy chápeme jako vyučování matematických činností a předpokládá se časté využívání
tzv. heuristické metody. (Gábor 1989)

Typy problémových situací vhodných pro získávání a osvojování základních matematických poznatků: (Gábor 1989)

1) Matematizace	známe:	empirický materiál, tedy zkušenostmi získané poznatky
	neznáme:	matematický aparát, tedy potřebné matematické pojmy
	cíl:	zavedení nových matematických pojmů
	výsledek:	nové matematické pojmy
2) Logická organizace	známe:	matematický materiál, tedy soubor pojmů, vět, které neumíme logicky uspořádat
	neznáme:	logickou organizaci uspořádání matematického materiálu
	cíl:	výstavba matematické teorie
	výsledek:	systematizace matematických poznatků
3) Aplikace	známe:	konkrétní situaci a máme postačující matematické poznatky
	neznáme:	způsob uplatnění matematických poznatků v konkrétní situaci

cíl: objevit možnost aplikovat některé matematické poznatky v dané situaci

výsledek: zručnost aplikování matematických poznatků v dané situaci

Všechny tyto typy problémových situací lze využít při zavádění induktivních a deduktivních přístupů k výuce matematiky. Můžeme jejich dělení plně respektovat nebo využívat komplexnější úlohy a typy problémových situací kombinovat.

2.2.2 Osvojování matematického jazyka

Jednou ze základních podmínek přesného myšlení, správného vyjadřování a porozumění ve vyučování matematiky je používání vyjadřovacích prostředků jako jsou symboly, termíny atp. Dále je nezbytné, aby studenti a učitel vždy používali stejné vyjadřovací prostředky. Obecněji můžeme specifikovat jazyk matematiky jako soubor dvou základních prvků:

- **termy –** názvy, konstanty i proměnné, funktory, predikáty, logické symboly a pomocné symboly, (např. π, $<$, $=$, $>$),
- **formule –** výroky a výrokové formy tvořené abecedou jazyka, které můžeme označit jako určité tvrzení.

Každá oblast matematiky se vyznačuje určitým slovníkem, který obsahuje konečnou množinu příslušných termů a formulí. Množinu všech formulí ve slovníku nazýváme jazykovým slovníkem. Bezchybné zvládnutí tohoto jazyka je nutnou podmínkou ke správnému zvládnutí učiva matematiky.

2.2.3 Rozvoj myšlení

Jednou z úloh matematiky je rozvíjet myšlení žáků. Definovat pojem *úroveň myšlení* není jednoduché. Můžeme říci, že tento pojem v sobě zahrnuje určitou úroveň všeobecnosti, abstrakce a přesnosti osvojování si vyučované látky určité logické struktury. (Gábor 1989) Každé úrovni myšlení v dané oblasti odpovídá určitý jazyk, který jí přísluší. Rozvoj myšlení úzce souvisí s rozvojem jazyka v jednotlivých oblastech matematiky. Při rozvoji myšlení dochází k přechodům z jedné úrovně myšlení na další, vyšší úroveň. Tyto změny jsou přímo ovlivňovány procesem učení. Vyučovací metoda může tyto přechody urychlit, ale nesmíme při tomto procesu jednotlivé úrovně myšlení přeskakovat.

A. A. Stol'ar popisuje pět různých úrovní myšlení v oblasti algebry a aritmetiky:

První úroveň: jedná se o nejnižší úroveň, na které je číslo neoddělitelné od množiny konkrétních předmětů, které charakterizuje, operace se vykonávají bezprostředně s množinami předmětů.

Druhá úroveň: na této úrovni jsou čísla již oddělená od konkrétních objektů, které charakterizují, operuje se s čísly zapsanými v určité (desítkové) soustavě

a vlastnosti operací se určují induktivně.

Třetí úroveň: na této úrovni se uskutečňuje přechod od konkrétních čísel zapsaných čísly na abstraktní vyjádření pomocí písmen, na této úrovni se již uskutečňuje lokální logické uspořádání vlastností operací.

Čtvrtá úroveň: na této úrovni se objevuje možnost deduktivního vybudování celé algebry v dané konkrétní interpretaci, tedy když písmena chápeme jako označení čísel z některé číselné množiny (**N**, **Z**, **Q**, **R**) a operace mají obvyklý smysl.

Pátá úroveň: na této úrovni se abstrahuje od konkrétní podstaty objektů počítání, od konkrétního významu operací a algebru budujeme jako abstraktní deduktivní soustavu mimo jakékoliv interpretace, uskutečňuje se přechod od známých konkrétních modelů k abstraktní teorii a od ní k jejím jiným modelům.

(Gábor 1989)

Jiný model úrovní myšlení zavádí Van Hiele v geometrii. Popisuje v něm proces vytváření nového pojmu tak, jak si ho utvářejí žáci. Tato cesta celkového pochopení nové teorie probíhá podle Van Hiele v pěti stupních, které charakterizují úroveň osvojení si pojmů žákem. Jednotlivé úrovně jsou spíše produktem žákových zkušeností a poučení, než jeho věku. Každý jedinec musí získat dostatek zkušeností, vědomostí a poučení, aby mohl přejít z jedné nižší úrovně do další vyšší.

L 0: vizualizace na této úrovni figurují pojmy jednotlivě a izolovaně, žáci rozpoznávají základní tvary (čtverec, kruh, trojúhelník), přičemž tyto tvary mají spjaté s nějakou reprezentací z reálného světa (kruh vypadá jako slunce). Pokud se obrazec nepodobá přesně tvaru předlohy, může žák špatně objekt klasifikovat (pootočení obrazců činí problémy při rozpoznávání).

L 1: analýza žáci rozpoznávají tvary na principu jejich základních vlastností, ale neumějí jednotlivé skupiny objektů „překrývat" (čtverec není čtyřúhelník), objekty chápou izolovaně, nejsou schopni rozpoznat společné znaky vlastností jednotlivých objektů.

L2: abstrakce v myšlení žáků jsou objekty reprezentovány jejich vlastnostmi, které jsou již deduktivně spojeny, žák chápe souvislosti mezi jednotlivými vlastnostmi, umí používat základní argumenty o geometrických tvarech, učí se rozeznat vztahy mezi jednotlivými typy tvarů, rozpozná rozdíly mezi pojmy čtverec a čtyřúhelník, rozumí nutným a postačujícím podmínkám a je schopen psát stručné definice. Na této úrovni nelze provádět geometrické důkazy, žák nechápe komplexní argumenty.

L3: dedukce žák chápe objekty pomocí deduktivních odůvodnění, kombinuje formu a systém formálních důkazů (Euklidovská geometrie), může konstruovat geometrické důkazy na středoškolské úrovni, chápe termy, axiomy, poučky a věty v euklidovské geometrii, nemůže pojmout neeuklidovskou geometrii.

L4: rigor (přesnost) na této úrovní žák získal deduktivní geometrický systém, axiomatickou výstavbu geometrie, může studovat neeuklidovskou geometrii.

Všechny stupně jsou uspořádány hierarchicky od základní po nejvyšší úroveň. Žáci nemohou při studiu jednotlivé úrovně přeskakovat. Každá z úrovní má svůj jazyk a vlastní síť vzájemných vztahů, které si musí žák vždy důkladně a správně osvojit. Van Hiele zdůrazňuje také to, že učitel mluví jinou, zpravidla vyšší úrovní jazyka, než na které se nacházejí žáci. Tento fakt je podle autora tohoto modelu častou příčinou vzniku chyb žáků. Van Hiele doporučuje při výuce využívání pěti fází, jak vést žáky při přechodu na vyšší úroveň:

- *Informace*: poskytovat žákům informace a naučit je orientovat se v možných zdrojích informací potřebných pro danou teorii.
- *Vést žáky k orientaci*: jedná se o cílenou práci s geometrickými objekty tak, aby žáci byli schopni jednotlivé objekty rozpoznávat i v případě změny jejich polohy, otočení, překlopení atp.

- *Jednoznačnost*: jde o postup zavádění nových pojmů, žáci by měli nejprve nové pojmy objevit a až posléze je s pomocí učitele pojmenovat (zavést).
- *Volná orientace*: podle Van Hiele je pro žáky mnohem lepší nové informace objevovat, než aby hotové informace předával vyučující.
- *Integrace*: je nezbytné, aby žáci všechny nové informace shrnuli a správně zařadili do systému již známých informací.

2.2.4 Základní složky matematické činnosti

Základním cílem výuky matematických činností je naučit žáka objevovat matematické poznatky, logicky organizovat matematický materiál nalezený pokusnou cestou a aplikovat teorii v konkrétních situacích. K tomu, aby žáci ve svém učení úspěšně zvládli předchozí cíle, jim dopomáhají základní složky matematické činnosti. Jsou to pozorování, pokus, porovnávání, indukce, analogie, zevšeobecnění a abstrakce. Tyto složky jsou charakterizovány v publikaci (Gábor 1989) takto:

Pozorování — Jde o metodu zkoumání, při které vyčleňujeme a fixujeme vlastnosti a vztahy jednotlivých objektů a jevů, které obklopují náš svět.

Pokus — Jde o metodu zkoumání objektů a jevů, při které určitým způsobem zasahujeme do jejich přirozeného stavu a prozkoumáváme je v umělých podmínkách. Pozorování je nedílnou součástí pokusu. V matematice není pokusné ověřování postačující metodou k uznání pravdivosti tvrzení.

Porovnávání — Jde o myšlenkovou operaci založenou na určení shody nebo rozdílu mezi zkoumanými objekty. Porovnávání je důležitou metodou, kterou lze mimo jiné využít i při stanovování vlastností matematických objektů. Při jeho využívání musíme dodržovat následující pravidla:

1. porovnávat můžeme pouze objekty, které spolu určitým způsobem souvisí, to znamená, že porovnávání musí mít smysl,
2. porovnávání musí probíhat systematicky, to znamená podle zvolených a přesně vymezených vlastností,
3. porovnávání podle stejných vlastností musí být úplné.

Indukce — Tento pojem používáme ve dvou významech, jako typ úsudku a jako metodu zkoumání.

Ve smyslu úsudku chápeme indukci jako určitou formu úsudku. V tom případě při našem usuzování vycházíme od základních a jednotlivých faktů ke všeobecnějším tvrzením.

Ve smyslu metody zkoumání jde především a tzv. neúplnou indukci. Jedná se o důležitou heuristickou metodu zkoumání a objevování nových skutečností. Takto objevené skutečnosti jsou pouze hypotézami a je vždy nutné jejich pravdivost dokázat.

Analogie — Jde o metodu, při které využíváme určité podobnosti některých stránek, vlastností a vztahů mezi objekty, které nejsou totožné. Při analogické úvaze postupujeme podle schématu:

Objekt A má vlastnosti $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$, Y
Objekt B má vlastnosti $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$,
Je možné (pravděpodobné), že B má také vlastnost Y.

Pro všechny analogické úsudky je charakteristické, že zkoumání provádíme na jednom objektu a závěr vyslovujeme pro druhý objekt, který není pro zkoumání tak dobře přístupný. První objekt nazýváme model a druhý originál. Takto získané závěry je nutné dokázat.

Zevšeobecnění — Jde o logický proces přechodu od zvláštního ke všeobecnému, od méně všeobecného ke všeobecnějšímu poznatku. Základem zevšeobecnění je vyčlenění a fixování nějakých všeobecně důležitých vlastností, které patří jen jedné třídě objektů.

Abstrakce — Jedná se o myšlenkové odtržení všeobecně důležitých a podstatných vlastností, vyčleněných v průběhu zevšeobecňování, od dalších, pro naše zkoumání nepodstatných, vlastností zkoumaných objektů. Abstrakce se vyskytuje ve dvou formách. Smyslová, která je spjatá se smyslovým poznáním objektu. A myšlenková, která spočívá v utváření nového objektu pomocí slov.

(Gábor 1989)

2.2.5 Metody zavádění pojmů při výuce matematiky

Při výuce matematiky máme v podstatě dvě základní metody, které lze při zavádění nových pojmů využít. Vždy bychom měli usilovat o to, aby zavedení nového pojmu probíhalo vývojově, v závislosti na předchozím učivu a s ohledem na možnosti studentů ve třídě.

Zavedení pojmu konkrétně induktivní metodou

Při využívání této metody postupujeme od konkrétní reálné reprezentace pojmu k jeho obecným vlastnostem a jeho definici. Postupně využíváme následující etapy.

1. etapa Vyhledáme praktické příklady, které nejlépe reprezentují daný pojem. Výsledkem je *vjem* a *pocit*.

2. etapa Společně se studenty musíme rozkrýt a vyjasnit nejrůznější podstatné a nepodstatné znaky našeho pojmu a učitel zavede termín (název) pro daný pojem. Výsledkem je přechod od vjemu k *představě.*

3. etapa Studenti by dále měli vybrat všechny podstatné vlastnosti daného pojmu a pokusit se tento pojem definovat. Prvotní definici dále zpřesňujeme a opravujeme. V konečné fázi zavede učitel přesnou definici pojmu. Výsledkem je postupný přechod od představy k *pojmu*.

4. etapa Daný pojem ilustrujeme na konkrétních matematických příkladech jako jsou modely pojmu (statické, dynamické), protipříklady. Výsledkem je proces *vytváření pojmu*.

5. etapa Poukazujeme na jiných možnostech definování daného pojmu. Dbáme na korektnost v matematickém vyjadřování studentů. Výsledkem je *osvojení pojmu*.

(Gábor 1989)

Zavedení pojmu abstraktně deduktivní metodou

Tuto metodu využíváme při zavádění pojmů, které jsou určitým způsobem spjaty s termíny, které studenti již znají. Postupujeme ve čtyřech základních krocích:

1) vyslovíme definici nového pojmu,
2) přezkoumáme zvláštní případy námi definovaného pojmu a také můžeme ukázat některé protipříklady daného pojmu,
3) ilustrujeme zavedený pojem konkrétními příklady a u každého z nich ověřujeme, zda vyhovuje definici daného pojmu,
4) uvedeme konkrétní příklady použití a výskytu daného pojmu v praxi.

(Gábor 1989)

2.2.6 Induktivní a deduktivní přístupy při výuce matematiky

Matematika je ve svém konečném stádiu ryze deduktivní vědou, její teorie mají ovšem při svém vzniku charakter experimentálně induktivní. Tento fakt je většině žáků a studentů skryt. Mnoho z nich chápe matematiku jako „konečný“ soubor pojmů, pouček, vztahů a postupů. Vůbec ne jako vědu, která prochází neustálým vývojem. Studenti sice znají pojmy jako „Pythagorova věta“ nebo „Pascalův trojúhelník“ a jsou si vědomi toho, že tyto pojmy někdo objevil *(Řada žáků a studentů by spíše použila pojem „vymyslel“, a to v jeho plném významu. Plyne to z jejich neznalosti vztahů mezi jednotlivými pojmy matematiky.),* ale zůstává jim skryto proč. V povědomí mají fakt, že to bylo dávno a už vůbec si neuvědomují, že výzkum v různých oblastech matematiky stále probíhá. Přitom právě v objevování, byť jen „malých“ skutečností se ukrývá nemalá krása matematiky. I tyto důvody se podílejí na faktu, že žáci a studenti nevěří, že by byli schopni učinit v matematice jakýkoli objev a převládá názor, že matematika je příliš složitý a nezáživný předmět.

Cílem zařazení induktivních a deduktivních přístupů do výuky matematiky je představit studentům matematiku jako vědeckou disciplínu s ohledem na jejich schopnosti a dovednosti. Ukázat studentům, jak vznikaly a vznikají matematické teorie a poskytnout jim příležitost objevovat nové pojmy, vztahy mezi pojmy a nové skutečnosti a vytvářet tyto teorie vlastními silami. Tímto způsobem se u žáků přirozeně rozvíjí přehled o vztazích mezi jednotlivými pojmy a oblastmi matematiky. Žáci jsou vedeni k samostatnému hledání těchto vztahů, vyslovování hypotéz a pokud je to v jejich možnostech, k jejich následnému ověřování (dokazování). Učí se tak přistupovat k řešení problémů a matematizování reálných situací, kriticky ověřovat získané vědomosti a zobecňovat dílčí výsledky konkrétních situací. Velmi motivující je pro studenty fakt, že na spoustu postupů a vlastností jednotlivých objektů přicházejí sami, objevují nové dílčí poznatky a sami navrhují, jak je ověřit. To se týká i nejslabších žáků, kteří jsou tímto způsobem nuceni zapojit se aktivně do výuky. Jde samozřejmě o pojmy a vztahy mezi těmito pojmy, které už existují a teorie kolem nich je již vytvořená. To ovšem v žádném případě nesnižuje úspěchy studentů, kteří se s danou teorií teprve seznamují.

Induktivní metody: jsou to objevovací metody (procedury), pomocí kterých nalézáme nový pojem, novou vlastnost nebo vztah mezi objekty. (Kopka 1999)

Deduktivní metody: jde o metody dokazovací, pomocí kterých dokazujeme nově objevený poznatek. (Kopka 1999)

Existuje celá řada metod, které lze využít k objevování nových poznatků a mnoho metod, jak tyto poznatky dokázat. Obecněji lze induktivní a deduktivní metody souhrnně nazvat **heuristické strategie** (metody). V odborné literatuře se objevuje několik definic tohoto pojmu, uvedeme zde dvě:

Heuristická metoda je dialogická forma výuky, při které učitel vhodnými otázkami vede žáky, aby na základě svých vědomostí a zkušeností objevovali sami nejen nové pojmy, ale také vlastnosti zkoumaných objektů a vztahy mezi nimi. Pokud je nějaká odpověď žáka nesprávná, učitel ji sám hned neopraví, ale nabádá celou třídu k pomoci objasnit rozdíl mezi nesprávnými dohady žáka a skutečně pravdivými fakty. Žáci předkládají hypotézy a zároveň prověřují jejich pravdivost. (Križalkovič 1989)

Heuristická strategie je soubor všech postupů, kterými lze řešit problémy pomocí matematiky, ať už problémy čistě matematické, nebo problémy konkrétní, k jejichž řešení nám matematika pomůže. (Kopka 1999)

Zajímavá klasifikace jednotlivých heuristických strategií je uvedena v publikaci Výzkumný přístup při výuce matematiky (Kopka 2007). Autor popisuje jednotlivé strategie a možnosti jejich využití při zkoumání ve školské matematice. Dále nabízí mnoho konkrétních problémů vhodných ke zkoumání. My uvedeme pouze základní klasifikaci strategií tak, jak je uvedena v publikaci Výzkumný přístup při výuce matematiky Kopka 2007 a jejich stručnou charakteristiku.

Konkretizace	Máme-li obecný problém, který neumíme řešit, pak pomocí konkretizace (jedné, nebo více) můžeme získat konkrétnější příklad. Tento příklad popisuje speciální situaci, která je obsažena v obecnější situaci. Konkretizovaný problém pro nás začíná mít smysl. Studenty lze ke konkretizaci přivést například otázkou: Co se stane v této speciální situaci? Ideou konkretizace je interpretovat zadaný problém pomocí konkrétních příkladů, které navíc tento problém po obsahové stránce více osvětlí.
Zobecnění	Ve chvíli, kdy si při řešení problému začínáme uvědomovat určitou zákonitost, začínáme zobecňovat. Jde tedy o rozšíření řešení konkrétního příkladu na větší množinu objektů (např. nalezení vzorce). Samotné konkrétní výsledky mohou být zajímavé, ale pro matematické výsledky je charakteristická jejich obecnost.
Systematické experimentování a následné hledání vzorce	Při využívání této strategie často výsledky vkládáme do tabulky, která nám může pomoci při objevování zákonitosti. Experimentovat musíme vždy dostatečně dlouho, abychom byli schopni příslušnou zákonitost objevit. Objevenou zákonitost se poté snažíme vyjádřit vzorcem.
Pokus - omyl	V podstatě se jedná o nesystematické experimentování. Je to nejjednodušší možná metoda, ale nemusí vést k cíli, nebo vede k cíli až po mnoha experimentech. Ve škole se nevyužívá příliš často, ale v přírodních vědách je používána častěji.
Odhad, ověření a oprava	V určitém smyslu jde o zdokonalení předchozí

	strategie. V prvním kroku odhadneme řešení, které ověříme a nový odhad provedeme na základě toho, jak vyšel předchozí výsledek. Opět je vhodné vkládat výsledky do tabulky. Zákonitost, která vede rychleji k cíli, se může v tabulce snáze objevit.
Zkoumání jednodušších příkladů aneb vypouštění podmínek	Když problém neumíme řešit, tak postupným vypouštěním podmínek, které jsou v něm obsaženy, problém zjednodušíme, až nakonec můžeme získat problém, který vyřešit umíme. Po vyřešení opět podmínky přidáváme.
Určování bližších cílů	Bližší cíle nás mohou postupně dovést až k řešení původního problému.
Použití analogického problému	Analogický problém volíme tak , aby se jeho řešení zdálo „průhlednější“, než u předchozího problému. Tato strategie je velmi užitečná a poměrně úspěšná, ale také dosti riskantní.
Cesta zpět	Tato strategie je v matematice poměrně značně využívaná, například rozbor konstrukční úlohy v geometrii nebo rozbor při konstrukci důkazu věty, která má stavbu implikace. Nemusíme ovšem pomocí ní vždy nalézt celou cestu, jak daný problém vyřešit.
Grafické znázornění	Neboli geometrická cesta. Jde o velmi často používanou cestu, která umožňuje vytvořit si konkrétní a názornou geometrickou představu.
Sestavení rovnice nebo soustavy rovnic	Neboli algebraická cesta. Jde o mnohem abstraktnější metodu, než jsou ostatní.

Opakování určitého postupu	Abychom se dostali k danému cíli, musíme někdy určitý postup několikrát zopakovat.
Přeformulování problému	Při této strategii se snažíme přeformulovat daný problém na problém nový, jehož vyřešení nás podstatně přiblíží k řešení původního problému.
Pomocný prvek	Při řešení určitého problému je někdy vhodné využít nějaký nový prvek, který do tohoto řešení vložíme.

(Kopka 2007)

V praxi není žádná výuka pouze induktivní nebo deduktivní. Tak jako vědecké metody, i výuka trvale zahrnuje oba směry. Studenti používají pozorování k odvození pravidel a teorií (indukce) a poté při odvozování logických důsledků a jejich aplikací testují objevené teorie, které mohou ověřit experimentálně (dedukce). Dobrý vyučující pomáhá studentům naučit se obě techniky. Při využívání induktivních přístupů se nelze zcela vyvarovat přímému předávání informací od vyučujícího. Ten má stále velmi důležitou roli při směrování výuky, povzbuzování studentů, objasňování nesrovnalostí a tam, kde je třeba, zprostředkování faktů.

(Prince, Felder 2006)

Další zajímavá klasifikace induktivních metod je uvedena v článku Inductive teaching and learning methods: Definitions, comparisons, and research bases Prince, Felder 2006. Autoři popisují jednotlivé typy metod a uvádějí možnosti jejich využití při výuce na vyšších stupních škol a univerzit. Názvy jednotlivých metod uvádíme v angličtině, abychom při překladu nepoužili zavádějící název:

Problem-based learning	Studenti jsou konfrontováni s nestrukturovaným, autentickým (reálným) problémem, který není uzavřený. Problém umožňuje další rozšíření. Pracují ve skupinách, které hledají informace potřebné pro jeho vyřešení a vyvíjejí reálné řešení. Vyučující má roli facilitátora, který poskytuje základní informace. Po skončení práce seznamují jednotlivé skupiny se svými

výsledky ostatní studenty. S nimi diskutují o správnosti svých závěrů.

Project-based learning and hybrid approaches Tato metoda je založena na řešení, které vede k finálnímu produktu, designu, modelu nebo počítačové simulaci. Výsledkem projektu je shrnutí možností využití procedur, které vedou ke konečnému produktu, a jejich písemná nebo ústní prezentace. Vyučující zadává projekt, který zahrnuje hlavní témata dané vyučovací látky, a dovoluje studentům zvolit si vlastní téma projektu.

Case-based teaching Studenti analyzují případy z historie (historické problémy) nebo hypotetické situace, které zahrnují řešení problému. Studenti mohou vyslovovat závěry. Jde o komplexní historické problémy, které souvisí s aktuálními problémy současnosti.

Discovery learning Tato metoda výuky, jak napovídá název, je založena na „pátrání“, při kterém jsou studentům zadávány otázky k zodpovězení, problémy k vyřešení nebo pozorování, které musí vysvětlit. Studenti pracují ve značné míře sami a řeší zadané úlohy. Vypracovávají závěry, ve kterých uvádějí výsledky svého objevování.

Just-in-time teaching Tato metoda kombinuje technologie využívající internet s metodami aktivní výuky ve třídách. Studenti pracují individuálně, několik hodin před vlastní vyučovací hodinou využívají pouze internet, pomocí kterého odpovídají na otázky. Před vyučovací hodinou kontroluje vyučující odpovědi studentů. V souladu s výsledky studentů přizpůsobuje učitel práci v hodině.

(Prince, Felder 2006)

My chápeme využívání induktivních a deduktivních přístupů (heuristických metod) následujícím způsobem. Studenti v prvopočátku výuky řeší konkrétní problémovou situaci, při jejím řešení využívají induktivní metody (strategie) a formulují hypotézy, nebo další problémy. Postupným řešením stále obecnějších problémů mohou vytvářet matematickou teorii. Nezbytnou součástí tohoto procesu je využívání deduktivních metod, které jsou velmi důležité pro celý proces a slouží samozřejmě k ověření nebo dokázání vyslovených hypotéz. Je nutné podotknout, že při důkazu musíme volit přiměřený postup vzhledem ke schopnostem a možnostem žáků. Na základní škole nám určitě postačí ověřit např. nalezený vzorec na několika dalších případech, a to nám bude stačit jako dostatečné ověření. Na SŠ lze použít např. matematickou indukci, nebo jiný přiměřený důkaz. Využívání těchto přístupů při výuce matematiky by mělo mít následující fáze.

1. Zadáme **problém** (studenti se mohou na vytvoření problému podílet).
2. Studenti využívají induktivní metody při hledání jeho řešení, respektive experimentují, konkretizují a zobecňují, tedy používají heuristické strategie.
3. Vyslovíme otázku (pokud nalezneme další problém), nebo hypotézu (pokud jsme nalezli nějaká řešení.
4. Řešíme další problém, nebo dokazujeme či vyvracíme vyslovenou hypotézu.

S pohledu studenta jde vlastně o jistý druh zkoumání školské matematiky a jeho výsledkem je vytvoření teorie potřebné k řešení problému. Všechny zobecněné a ověřené (dokázané) hypotézy mohou vést k zavedení nové matematické teorie (nového učiva). Při využívání těchto metod výuky začínáme tím, že zadáme výchozí problém. Studenti s danou situací pracují, experimentují a pomocí indukce a heuristických strategií vyslovují hypotézy nebo otázky. Otázka představuje další problém, který můžeme později řešit. Každou hypotézu bychom měli vždy dokázat (ověřit), nebo vyvrátit.

Při vybírání vhodného výchozího problému musíme být velmi obezřetní, je třeba mít na mysli, že problém by měl splňovat jisté náležitosti. Výchozí problém by měl být:

- ***konkrétní***: vycházet z reálné, méně komplikované situace, která je studentům nějakým způsobem blízká,
- ***názorný***: jasně formulován a zadán tak, aby ho všichni žáci pochopili, měl by být „průhledný“,
- ***přiměřený***: schopnostem studentů, jejich věku a znalostem,
- ***motivující***: měl by žáky motivovat k vyřešení.

Vyučující při využívání induktivních a deduktivních přístupů ve výuce pracuje jako jakýsi korektor probíhajících činností. Zadává problémy, koriguje a učí žáky formulovat správně jejich hypotézy, kontroluje správnosti jejich závěrů a společně s žáky navrhuje možnosti ověření hypotéz. Tento přístup vyžaduje od učitele značnou míru zkušeností a citu pro danou situaci. Rozhodně se nesmí snažit žáky nutit do své představy o řešení daného problému. Naopak musí citlivě reagovat na jednotlivé nápady a dopomoci žákům s jejich ověřováním. Před výukou tématu pomocí induktivních a deduktivních přístupů by si měl vyučující stanovit vyučovací cíle, definovat, co by měli být studenti schopni vykonávat (vysvětlovat, vypočítat, odvozovat, navrhovat, modelovat, posuzovat…) po skončení výuky daného tématu. Cíle by měly být vodítkem pro volbu vhodného problému, výukových aktivit a stanovení způsobu práce.

Mezi jednu z největších výhod používání těchto přístupů patří bezesporu rozvíjení schopnosti studentů samostatně řešit problémy. Ať už problémy reálné, nebo čistě matematické. Dalším přínosem je to, že studenti sami objevují vztahy mezi objekty a aktivně se podílejí na výuce. Pro studenty má veliký význam i skutečnost, že nové objekty „nepadají z nebe“. Tedy, že studenti jsou přímo součástí geneze nových pojmů a vztahů mezi nimi. Často namítanou a nutno podotknout, že i objektivní nevýhodou používání induktivních a deduktivních přístupů při výuce zůstává časová náročnost. Je zřejmé, že výuka pomocí těchto přístupů zabere více času, než při použití frontálních metod a zavádění pojmů abstraktně deduktivní metodou. Jako další nevýhodu můžeme do jisté míry označit i nejasný výsledek. Nikdy si nemůžeme být zcela jisti, jak daleko se studenti při svém zkoumání dostanou. To ovšem může být i přínosem, neboť studenti mohou pokročit mnohem dál, než jsme předpokládali. Obě tyto nevýhody lze do značné míry eliminovat zkušeností učitele, který příhodně volí z celé škály výukových metod a umí odhadnout možnosti žáků. Čím více zkušeností s využíváním induktivních a deduktivních metod mají studenti a vyučující, tím více jsou tyto nevýhody eliminovány.

Vhodné zařazování těchto přístupů do výuky matematiky může značnou měrou přispět k rozvoji klíčových kompetencí. Zejména kompetencí k učení, kompetencí k řešení problémů a kompetencí komunikativních.

2.3 MOTIVACE

Správná motivace studentů je jedním z faktorů, které ovlivňují úspěšnost zvládnutí vyučované látky. Vhodně motivovaní studenti snáze dosahují výukových cílů což působí pozitivně na jejich další práci. **Motivaci** můžeme popsat jako určitou vnitřní příčinu chování jedince.

Pokud příčinou chování jedince jsou vnitřní impulzy, hovoříme o *primární motivaci* (Križalkovič 1989). Ta je velmi důležitá při učení. V takovém případě se totiž student učí pro samotnou činnost, kterou provádí. V matematice se může například jednat o radost z počítání nebo z rýsování. Primární motivace tedy „nutí" studenta k práci, která primárně vede k jeho vlastnímu uspokojení. Konáním si jedinec vytváří vlastní zážitek. Navodit situaci vedoucí k primární motivaci není snadné, ale velmi důležité a potřebné.

Pokud na jedince působí vnější podněty, jedná se o *sekundární motivaci* (Križalkovič 1989). Ta vhodným způsobem doplňuje primární motivaci. Ve výukovém procesu tuto motivaci reprezentují klasické motivační činitele, kterými jsou odměna, trest a klasifikace studentů. V ideálním případě nastává prolínání sekundární a primární motivace (student se nejprve učí kvůli dobré klasifikaci, později objeví radost z vlastního objevování a uspokojování vlastní zvědavosti). Hlavní podstatou je vytvoření situace, při které u jedince dochází ke zvnitřnění vnějších podnětů (změně sekundárních motivů na primární).

B. A. Rosenfeld shrnul několik oblastí motivů, které motivují starší žáky.

A) Oblast nezáměrných (primárních) motivů

1. Učení jako samoúčelná aktivita (radost z učení, zábava, napětí, překvapení a senzace, vzrušení z neznámého, radost z řešení problémů).

B) Oblast záměrných (sekundárních) motivů

1. Učení za účelem osobních výhod (úsilí pro materiální zisk, sociálním postavení).
2. Učení na základě sociální identifikace (pro radost blízkých osob, svých vzorů).
3. Učení jako očekávání úspěchu a vyhnutí se neúspěchu (stupňování sociálních náhledů, resp. vyhnutí se blamáži).
4. Učení jako důsledek tlaku a přinucení (autoritativní opatření, strach z trestu).
5. Učení kvůli výčitkám svědomí (uznání příkazových a zákazových norem, životní závazky, pocit zodpovědnosti).
6. Učení na základě vytyčení praktických životních cílů (povolání, životní postavení a jiné cíle).
7. Učení kvůli společenským požadavkům (ztotožnění se společenskými normami, světonázorovými principy).

(Križalkovič 1989)

Motivace jedince je ovlivňována mnoha složkami, jako jsou zájem jedince, jeho cíle a další. Zájem je sám o sobě motivem, ale také produktem poznávací činnosti.

2.3.1 Motivace ve vyučování matematice

Z psychologicko-pedagogických pozorování vyplývá, že nejlepším způsobem jak vyvolat zájem studentů o daný předmět, je poukazovat na jeho využití. To znamená, zdůrazňovat možnost využívání získaných poznatků v praxi (v jiných podmínkách, jiných předmětech atp.). (Križalkovič 1989)

Při studiu matematiky je od studentů vyžadována vysoká úroveň výkonů a jejich následné zkvalitňování. Vhodná motivace může správnou měrou podpořit schopnosti žáků a zlepšit tak jejich výkony. P. T. Young definuje motivaci následovně:

„Motivace je proces

a) aktivizace, tedy počátku jednání,
b) udržování aktivity v průběhu jednání,
c) zaměření této aktivity daným směrem.“

I při výuce matematiky musíme uvažovat vliv obou druhů motivace. Navodit primární motivaci je pro učitele nesmírně obtížné. Důležitou podmínkou motivace zůstává způsob práce vyučujícího. Kontakt mezi jeho a žákovou osobností. Učitel ovlivňuje vznik primární motivace jen zprostředkovaně, pomocí vhodných motivačních činitelů. Naproti tomu je sekundární motivace z velké míry v rukách vyučujícího. Ta se díky vhodným vlivům může postupně změnit na vnitřní motivaci. Učitel má několik možností jak ve vyučovacím procesu může u žáka ovlivňovat sekundární motivaci. (Križalkovič 1989)

A) Odměna a trest: jedná se o klasické motivační činitele, které zprostředkovávají vnější motivaci. Odměna je pozitivní a trest negativní ovlivnění jedince. Při nevhodném využívání těchto prostředků dochází k negativnímu ovlivňování žáka. Může docházet až ke stresovým situacím.

B) Ovlivňování postojů: postoj žáka k učení je výrazem jeho vlastní primární motivace, kterou může učitel ovlivnit svým vhodným přístupem jak k jedinci, tak k vyučovanému předmětu.

C) Formy sekundární motivace: existuje několik forem motivace, které může vyučující použít.

(Križalkovič 1989)

Motivační úlohy Hlavním cílem motivační úlohy je zaujmout, vyvolat pozornost a navodit pracovní iniciativu. Studenti takovou úlohu nutně nemusí sami vyřešit. Její podstatnou část může řešit vyučující. Úloha dokonce nemusí být dořešena ihned. Pokud při jejím řešení narazíme na potřebu nových znalostí, lze řešení úlohy ponechat otevřené. Studenti se k jejímu řešení mohou vrátit až po získání potřebných znalostí

a dovedností. Pokud chceme motivační úlohu propojit s probíraným učivem, měla by splňovat tyto podmínky:

a) musíme využívat toto učivo,
b) musí být srozumitelná a co možná nejjednodušší,
c) text slovní úlohy musí studenty zaujmout (např. atraktivitou, aktuálností),
d) řešení by nemělo být zdlouhavé,
e) je vhodné, aby úloha měla překvapující výsledek,
f) měla by poukázat na potřebu nového poznatku (stanovit problém).

Při zařazování motivačních úloh do výuky musíme ještě uplatňovat některé zásady:

- **Věk a vývojové schopnosti žáků**. Pokoušet se motivovat žáky abstraktními úlohami, které jsou nad jejich možnosti je neúčelné a naopak velmi to snižuje jejich vnější motivaci.
- **Minulá zkušenost.** Pro řešení určitých úloh musí mít student již určité vědomosti, bez kterých nemůže úlohu řešit.
- **Seberealizace.** Musíme respektovat osobnost studenta a způsob jeho řešení.
- **Zájmy žáků**.
- **Znalost výsledků učení** a dosažené úrovně v jednotlivých

etapách učení může být silným motivačním činitelem pro další vývoj.

- **Tendence dokončit úlohu**. Když začneme řešit úlohu, můžeme u žáka vytvořit určitý „systém napětí“, který vrcholí těsně před dokončením řešení, proto je vhodné základní úlohu rozšiřovat systémem podúloh, jejichž řešení začínáme ukončením předcházející úlohy.

Motivace pomocí rozhovoru

Jde o nejbezprostřednější formu motivace, která od učitele vyžaduje obrovskou schopnost pohotovosti, velkou zásobu argumentů a široký rozhled. Každá diskuze by měla vyplynout z probíraného učiva, ale její vlastní průběh se může v některých aspektech od učiva lišit. Podmínkou úspěšné motivace pomocí rozhovoru je navození jistého stupně důvěry mezi učitelem a studentem.

Motivace pomocí historických poznámek

Při výuce libovolného tématu lze jako vhodný motivační doplněk zařadit stručný historický přehled, který se týká probírané látky. Studenti většinou projevují zájem o krátká, poutavá a zajímavá fakta z historie. Tímto způsobem také seznamujeme žáky s tím, že i matematika procházela historickým vývojem a vznikala jako vědecká disciplína v průběhu dějin.

Motivace využívající mezipředmětové vztahy

Ve školské praxi je důležité poukazovat na možnost aplikovat matematiku v širokém spektru mnoha oborů. Vhodně zařazený příklad z jiného předmětu (oboru), který poukazuje na využití probíraných poznatků, může působit na jedince jako motivační činitel. Vyučující by při každé vhodné příležitosti měl poukazovat na možnost využití získaných vědomostí a dovedností v praktickém životě, tedy i jiných vědních oborech.

(Križalkovič 1989)

2.3.2 Vliv induktivních a deduktivních přístupů ve vyučování matematice na motivaci studentů

Induktivní a deduktivní přístupy využívané při výuce mají veliký motivační potenciál. Při jejich vhodném zařazování do výuky matematiky působí jako významný motivační činitel. Jeho základem je využívání motivačních úloh, které zadáváme studentům k vyřešení.

Při výuce vycházíme z konkrétního problému. Po jeho vyřešení následují navazující úlohy a výsledkem společného bádání je vznik určité teorie. Na počátku výuky a v jejím průběhu dochází k *sekundární motivaci* studentů. Jako motivační činitele využíváme zejména motivační úlohy, motivaci zdůrazňující mezipředmětové vztahy a využívající historii matematických objevů a bádání. Všechny tyto formy motivace vstupují do výukového procesu zcela přirozeně. Při tvorbě úloh je nutné, aby vytvořená úloha splňovala základní podmínky na ní kladené (viz. kapitola 2.2.1).

Důležitým přínosem využívání induktivních a deduktivních přístupů v oblasti motivace je radost z objevování. Ve chvíli, kdy student na základě svých dílčích úspěchů pocítí radost z objevení (faktu, vyřešení problému), začne docházet k *primární motivaci* jedince. Při správném využívání těchto přístupů dosahují dílčích úspěchů všichni studenti (i prospěchově nejslabší). A potenciál vzniku primární motivace roste. Protože převládá názor, že matematika je velmi složitá a těžká disciplína, je většina studentů velmi překvapena, že v matematice dokáží sami objevovat nové poznatky a vztahy. Jejich vlastní uspokojení z takového úspěchu je mnohdy značné a motivuje je k dalšímu snažení.

Dobře připravená vyučovací hodina, při jejíž výuce využijeme vhodným způsobem induktivní a deduktivní přístupy, vždy motivuje nemalou část studentů k práci. Při využívání těchto přístupů se většině studentů zvyšuje sebevědomí v matematice a díky tomu roste podíl zastoupení primární motivace.

2.4 PEDAGOGICKÝ EXPERIMENT

Experiment je typ vědeckého výzkumu, při kterém ověřujeme hypotézu tím, že nějakým způsobem ovlivňujeme působení nezávisle proměnné. U experimentu tedy záměrně manipulujeme s alespoň jednou nezávisle proměnnou, která je tak pod kontrolou výzkumníka. Na základě změn nezávisle proměnné poté vyhodnocujeme závisle proměnnou. Nevýhodou experimentu je nemožnost jeho použití ve všech situacích. Experiment totiž nesmí žádným způsobem poškozovat zkoumané jedince ani objektivně, ani subjektivně. Další omezení experimentální práce je založeno na faktu, že subjekty, které se experimentu účastní, se nechovají zcela přirozeně (Chráska 2007).

Pedagogická realita je ve srovnání s přírodními vědami nepoměrně komplikovanější, a proto je experimentování v pedagogice podstatně složitější než experimentování v technických nebo přírodních vědách. Přírodní vědy skýtají více možností přesněji manipulovat s nezávisle proměnou. V těchto vědách můžeme přidat nebo vyloučit jednu z podmínek, a tak jednoznačně určit, jaká změna vyvolala daný výsledek. Naproti tomu v pedagogice pracujeme s lidmi, a tudíž nezávisle proměnné nepůsobí izolovaně, ale ve vzájemně se ovlivňujících celcích. Díky těmto skutečnostem získáváme při pedagogickém experimentu „méně čisté“ výsledky, než pří experimentování v přírodních vědách.

Podle toho, jakým způsobem je zabezpečována kontrola nad působením nezávisle proměnných, lze rozlišit tři základní techniky experimentu (Chráska 2007):

- technika jedné skupiny,
- technika paralelních skupin,
- technika rotace faktorů.

Technika jedné skupiny spočívá v tom, že experiment provádíme pouze v rámci jedné skupiny. V této skupině manipulujeme s nezávisle proměnnou a zároveň měříme závisle proměnnou. Při této technice jsou výsledky jen málo věrohodné a mohou být dokonce zavádějící. A to z toho důvodu, že výzkumník nemá možnost žádného srovnání a je velmi obtížné tvrdit, že změna závisle proměnné je způsobena ovlivněním nezávisle proměnné.

Technika paralelních skupin spočívá v práci současně dvou a více na sobě nezávislých skupin. V jedné skupině manipulujeme s nezávisle proměnou a nazýváme ji experimentální a ve druhé skupině nemanipulujeme s nezávisle proměnou a nazýváme ji kontrolní. Díky tomu, že můžeme výsledky v obou skupinách porovnávat, dosahujeme ve srovnání s předchozí metodou mnohem věrohodnějších výsledků. Spolehlivost výsledků takto vedeného experimentu závisí do značné míry na uspořádání celého výzkumu. E. F. Lindquist uvádí (Lindquist 1967) šest základních tzv. experimentálních plánů a řadí je od nejméně dokonalého k nejdokonalejšímu. Předpokládejme, že pomocí experimentu budeme porovnávat účinnost dvou vyučovacích metod A a B a měřítkem této účinnosti budou dosažené vědomosti žáků na konci experimentu. Tyto vědomosti budeme měřit didaktickým testem.

Plán 1

Experiment probíhá na jedné škole. Žáci zkoumaného ročníku jsou náhodně rozděleni do dvou stejně početných tříd. Jedna skupina je vyučována metodou A a druhá metodou B. Ve třídách vyučují různí učitelé.

Tento experiment má jen velmi malou spolehlivost a je zatížen dvěma potencionálními zdroji chyb. V první řadě jde o náhodně vytvořené skupiny tímto způsobem, které budou jen stěží navzájem vyrovnané (už vzhledem k malému počtu žáků, ze kterých vybíráme). Je pravděpodobné, že se žáci obou skupin budou lišit schopností učit se. Druhým zdrojem chyb může být i rozdílná úroveň práce vyučujících. Zjištěné výsledky proto mohou být způsobeny jinými skutečnostmi, než jsou rozdílné metody výuky.

Plán 2

U tohoto experimentu jde o nepatrné zdokonalení předchozího plánu. To spočívá v tom, že obě zkoumané třídy vyučuje stejný učitel.

Spolehlivost tohoto experimentu je také malá, i když částečně eliminuje chybu způsobenou rozdílnou prací vyučujících.

Plán 3

Experiment probíhá na více školách. Na náhodně vybrané polovině škol se vyučuje metodou A a na druhé polovině škol metodou B. Výsledky všech žáků, kteří jsou vyučováni jednou metodou jsou porovnávány s výsledky všech žáků vyučovaných druhou metodou.

Spolehlivost není příliš vysoká, neboť nejde o náhodný výběr žáků. Jedná se o skupinový výběr a počet skupin je v tomto případě malý. Možné chyby mohou plynout z rozdílné úrovně škol.

Plán 4

Experiment provádíme opět na deseti školách. Na každé z nich probíhá vyučování oběma metodami A i B a obě třídy různými metodami vyučuje stejný učitel. Experiment vyhodnocujeme srovnáním výsledků, kterých dosáhli všichni žáci vyučovaní jednou metodou se všemi žáky vyučovanými druhou metodou.

Tento experimentální plán je mnohem spolehlivější než předchozí plán, protože na každé škole vyučujeme oběma metodami. Tím eliminujeme možné rozdíly mezi školami.

Problémem zůstává, že pracujeme se dvěma výběry, které jsou si mnohem více podobny, než náhodný výběr.

Plán 5 (experiment spárovaných skupin)

Tento experimentální plán probíhá ne jedné škole, na které máme k dispozici dvě třídy žáků. Před zahájením experimentu zjišťujeme u všech žáků z obou tříd úroveň jejich vědomostí pomocí didaktického testu. Na základě výsledků tohoto testu vytvoříme dvě třídy (spárované výběry), u kterých zajistíme stejné rozdělení počtu bodů získaných z didaktického testu. Poté v jedné třídě vyučujeme metodou A a v druhé metodou B. Experiment vyhodnocujeme srovnáním výsledků obou tříd na konci experimentu.

Tento experimentální plán poskytuje mnohem přesnější výsledky, jeho hlavní nevýhodou je nutnost rozdělení tříd do nových skupin. To může v praxi činit nemalé potíže.

Plán 6

Při tomto experimentu opakujeme plán 5 např. na deseti školách. Výsledky všech žáků vyučovaných metodou A porovnáváme se všemi žáky vyučovanými metodou B.

Tento plán je nejspolehlivější ze vše jmenovaných. Velikou nevýhodou je, že je v praxi velmi obtížně realizovatelný.

U **techniky rotace faktorů** jde do jisté míry o kombinaci techniky jedné skupiny a techniky paralelních skupin tak, abychom co možná nejvíce zachovali výhody obou postupů. Principem je práce se dvěma nevyrovnanými skupinami subjektů, kdy experiment probíhá ve dvou fázích. V první fázi provádíme experiment v jedné skupině a druhá nám slouží jako kontrolní, ve druhé fázi role obou skupin proměníme. Tedy skupina, která byla v první fázi experimentální, se stává skupinou kontrolní a skupina, která byla v první fázi kontrolní, se stává skupinou experimentální.

Výhody této techniky spočívají v tom, že nemusíme pracovat s vyrovnanými skupinami a také to, že nemusíme kontrolovat neexperimentální faktory. Nevýhodou je, že zpravidla záleží na pořadí, ve kterém je ve skupinách proveden experimentální zásah, a také to, že oba experimentální zásahy musí probíhat za srovnatelných situací (tato podmínka se v reálné praxi velmi obtížně splňuje).

2.5 DIDAKTICKÉ TESTY

Jednou z mnoha možností sběru dat v pedagogických výzkumech je didaktický test. Pojem **test** lze definovat jako „zkoušku, úkol, identický pro všechny zkoumané osoby s přesně vymezenými způsoby hodnocení výsledků a jejich číselné vyjadřování“ (Michalička, 1969). Testem tedy rozumíme zkoušku, na kterou jsou kladeny určité nároky. Obecně lze testy rozdělit do tří kategorií (Chráska 2007):

Testy schopností: jsou to testy, které zjišťují jaké schopnosti, předpoklady, dispozice zkoumaný subjekt má pro řešení určitého typu úloh. Nebo situací určitého typu. Nejznámější testy schopností jsou tzv. testy inteligence, které zjišťují obecné předpoklady subjektu orientovat se v problémových situacích.

Testy osobnosti: měří stránky osobnosti, tedy vlastnosti temperamentu, zaměření motivace, charakterové vlastnosti, úzkost apod.

Testy výkonu: tyto používáme v pedagogickém výzkumu při měření výkonnosti jedince v určitých oblastech. Nejdůležitější z těchto testů jsou **didaktické testy**.

Obecně lze vymezit pojem didaktický test jako zkoušku, která se zaměřuje na objektivní zjišťování úrovně zvládnutí učiva u určité skupiny osob. Didaktický test se liší od běžné zkoušky tím, že je navrhován, ověřován a hodnocen podle předem stanovených pravidel. Velice výstižně definuje didaktický test P. Byčkovský (1982): *„Didaktický test je nástroj systematického zjišťování (měření) výsledků výuky.“*. V pedagogických výzkumech využíváme mnoho druhů didaktických testů, které se liší podle toho, jaké informace pomocí nich získáme. Klasifikaci základních typů didaktických testů navrhl P. Byčkovský (1982). Dále uvedeme jen výčet typů těchto testů a jejich velmi stručnou charakteristiku.

testy rychlosti	Zjišťují, jakou rychlostí je subjekt schopen řešit určitý typ testových úloh.
testy úrovně	Nepoužívají žádný časový limit a výsledek je dán pouze úrovní vědomostí nebo dovedností.
testy standardizované	Jde o profesionálně připravený test, u kterého jsou

	známy jeho základní vlastnosti.
testy nestandardizované	Jde o tzv. učitelské neboli neformální testy, u kterých nejsou známy všechny jejich vlastnosti.
testy kognitivní a psychomotorické	Toto dělení vychází z Bloomovy taxonomie lidského učení.
testy výsledků výuky a studijních předpokladů	Testy výsledků výuky měří to, co se žáci naučili v dané oblasti.
testy rozlišující	Výkon subjektu určujeme vzhledem k populaci testovaných.
testy ověřující	Výkon subjektu určujeme vzhledem ke všem možným úlohám, které určité učivo reprezentují.
testy vstupní, průběžné a výstupní	Vstupní testy popisují úroveň vědomostí a dovedností, se kterou žáci vstupují do začátku výuky, průběžné testy slouží učiteli jako zpětnovazební kontrola průběhu výuky a výstupní testy zadáváme na konci výukového období a slouží k získání informací potřebných k hodnocení žáků.
testy monotematické resp. polytematické	Zkoušíme jedno téma učební látky resp. několik tématických celků.
testy objektivně skórovatelné	Obsahují úlohy, u kterých můžeme objektivně rozhodnout, zda byly řešeny správně, nebo nesprávně.
testy subjektivně skórovatelné	Označované také jako esej testy obsahují úlohy, u kterých nemůžeme stanovit jednoznačná pravidla pro skórování.

2.5.1 Testové úlohy

Nedílnou součástí didaktického testu jsou jednotlivé úlohy, ze kterých je daný test sestaven. Testovou úlohou rozumíme úkol, otázku nebo problém, který je obsažen v testu, přičemž kvalita testových úloh přímo ovlivňuje kvalitu celého testování. Tvorba a návrh testových úloh je poměrně náročný problém, který vyžaduje od autora odbornost v dané problematice, pedagogické zkušenosti a alespoň základní znalosti statistiky. Podle způsobu, kterým subjekt testovou úlohu řeší, můžeme rozdělit jednotlivé typy testových úloh (Chráska 2007).

otevřené široké úlohy	V těchto otázkách se od studenta požaduje rozsáhlejší odpověď, může se požadovat pojednání na určité téma, vyřešení určitého problému nebo popis určitého procesu. Jejich hlavní nevýhodou je nemožnost objektivního skórování (testy vytvořené z těchto otázek jsou označovány jako eseje).
otevřené úlohy se stručnou odpovědí	Od studenta se požaduje vytvoření vlastní krátké odpovědi, uvedení číselného údaje, značky, symbolu, jednoduchého grafu, několika slov nebo krátké věty. Velkou výhodou je, že neumožňují studentům snadno uhodnout správnou odpověď.
dichotomické úlohy	U těchto otázek je studentovi nabídnuta otázka s dvěma možnými odpověďmi, ze kterých má student vybrat tu správnou. Velkou nevýhodou je vysoká pravděpodobnost uhodnutí správné odpovědi.
úlohy s výběrem odpovědí	Tyto otázky se skládají ze dvou částí - problému nebo otázky a nabídnutých odpovědí. V didaktických testech se objevuje několik typů těchto úloh, jsou to úlohy typu: • jedna správná odpověď (z několika alternativ vybírá student jednu správnou odpověď), • jedna nejpřesnější odpověď (po studentech požadujeme vybrání jedné nejpřesnější odpovědi), • jedna nesprávná odpověď (student vybírá s nabídnutých alternativ jednu nesprávnou odpověď, zde je ovšem nutné zápor dobře zdůraznit), • vícenásobná odpověď (studen musí v úloze vybrat

hned několik správných odpovědí, na tuto skutečnost je nutné testované osoby předem upozornit),

- situační úlohy (jde o úlohy, kdy student vybírá z mnohem většího počtu nabídnutých odpovědí, než je obvyklé, a nabízené odpovědi vyplývají přímo ze situace předkládané v úloze).

Při používání úloh s výběrem odpovědi vždy existuje určitá pravděpodobnost, že testovaná osoba uhodne (náhodně zvolí) správnou odpověď. Tato pravděpodobnost klesá se zvyšujícím se počtem nabízených odpovědí. Tento počet samozřejmě nelze zvyšovat libovolně, jako optimální počet předkládaných odpovědí se uvádí 4-5. Více než pět nabízených odpovědí se nedoporučuje, protože se daná úloha stává nepřehlednou a sestavení většího počtu smysluplných odpovědí je obtížné. Na druhou stranu se nedoporučuje menší počet odpovědí než 4, kvůli vzrůstající pravděpodobnosti uhodnutí správné odpovědi.

přiřazovací úlohy	Studentovi jsou předkládány dvě skupiny pojmů a instrukce, jeho úkolem je správně přiřadit pojmy jedné skupiny k pojmům druhé skupiny.
uspořádací úlohy	Tyto úlohy požadují od studenta, aby uspořádal prvky jedné množiny daných pojmů do řady, přičemž prvky musí seřadit dle určitého hlediska (chronologicky, dle velikosti apod.).

2.5.2 Konstrukce didaktického testu

Vlastní konstrukci didaktického testu musí předcházet rozhodnutí, k jakému účelu má test sloužit. Další fází je stanovení obsahu, který má test zkoušet. Zpravidla postupujeme tak, že dané učivo, které je předmětem testování, nejprve rozdělíme na určité prvky, jako jsou např. pojmy, vztahy, fakta a definice. Každému z těchto prvků poté přidělíme určitý počet testových úloh. U těchto úloh musíme také určit, jakou úroveň osvojení poznatků mají zkoušet. Tedy jestli mají postihovat zapamatování poznatků, porozumění těmto poznatkům, nebo používání vědomostí při řešení problémů. K tomuto rozčlenění je dobré použít některou z ověřených taxonomií výukových cílů (Bloomovu, Niemierkovu). V tabulce číslo 1 je uvedena Niemerkova taxonomie, která může sloužit k vytvoření specifikační tabulky při tvorbě testových úloh. Specifikační tabulka upřesňuje, které úrovně osvojení (podle Niemerkovy taxonomie) mají jednotlivé testové úlohy ověřovat.

(Chráska 2007)

Výukový cíl	**Popis**	**Aktivní slovesa**
A. Zapamatování poznatků	Této kategorie je dosaženo, jestliže je žák schopen vybavit si určitá fakta (např. termíny, zákony), přičemž je nesmí mezi sebou zaměňovat.	definovat, napsat, opakovat, pojmenovat, reprodukovat, vysvětlit, doplnit, popsat, přiřadit, seřadit, vybrat
B. Porozumění poznatkům	V tomto případě je již žák schopen zapamatované poznatky předložit v jiné formě než v té, ve které si je zapamatoval, dovede poznatky uspořádat nebo zestručnit.	jinak formulovat, ilustrovat, objasnit, odhadnout, přeložit, převést, vyjádřit vlastními slovy nebo jinou formou, interpretovat, opravit, vypočítat, zkontrolovat, změřit
C. Používání vědomostí v typových situacích	U této kategorie dovede žák použít vědomostí k řešení situací, které ve výuce již byly řešeny.	aplikovat, demonstrovat, diskutovat, načrtnout, použít, prokázat, registrovat, řešit, uvést vztah mezi, vyčíslit, vyzkoušet, interpretovat údaje, navrhnout, plánovat, uspořádat
D. Používání vědomostí v problémových situacích	Žák dovede použít vědomostí k řešení problémových situací, které nebyly ve výuce doposud řešeny.	analyzovat, provést rozbor, rozhodnout, rozlišit, rozčlenit, klasifikovat, navrhnout, shrnout, vyvodit závěry, zdůvodnit, posoudit

Tab. 1 Niemerkova taxonomie výukových cílů v kognitivní oblasti včetně aktivních sloves. (Švec 1996)

Poté můžeme přistoupit k vlastní tvorbě jednotlivých otázek. Podle toho, k jakému cíli je didaktický test určen, volíme jednotlivé typy testových úloh z výše uvedeného seznamu.

Pro získání vyšší kvality didaktického testu se doporučuje posouzení navržených úloh dalšími odborníky, jako jsou například učitelé, kteří vyučují předmět, ve kterém testujeme. Na základě vlastního posouzení a na základě doporučení odborníků provádíme závěrečnou korekci celého testu. Jednotlivé úlohy zpravidla řadíme od nejjednodušší po nejobtížnější. Součástí konstrukce didaktického testu je také předběžné určení času potřebného pro jeho vypracování. (Chráska 2007)

2.5.3 Analýza vlastností didaktického testu

Pokud chceme ověřit vlastnosti libovolného didaktického testu jako celku, zaměřujeme se na jeho základní vlastnosti: validitu, reliabilitu.

Validita

Validita didaktického testu je jeho základní a nejdůležitější vlastností. Test je validní tehdy, jestliže jím zkoušíme skutečně to, co jím máme zkoušet. Při posuzování testů studijních výsledků porovnáváme, do jaké míry se obsah testu shoduje s cíli a obsahem vyučování. V takovém případě hovoříme o tzv. *obsahové validitě*. Při posuzování obsahové validity se v praxi nepoužívají žádné kvantitativní metody, musíme se spolehnout jen na posudek odborníků.

Při posuzování testů studijních předpokladů hovoříme o tzv. *predikční validitě*, tedy schopnosti předpovídat budoucí úspěšnost v učení. (Chráska 2007)

Reliabilita

Didaktický test má dobrou reliabilitu, jestliže poskytuje spolehlivé a přesné výsledky. Test označujeme za spolehlivý, pokud při opakovaném testování za stejných podmínek získáváme stejné nebo velmi podobné výsledky. Přesnost testu přímo souvisí s velikosí a četností chyb při testování. Pro exaktní posouzení stupně reliability didaktického testu používáme tzv. koeficient reliability. Koeficient reliability nabývá hodnot od 0 do 1. Koeficient hodnoty nula znamená naprosto nespolehlivý a nepřesný test, pro hodnotu 1 má test maximální spolehlivost. Při individuálním testování vědomostí obvykle požadujeme koeficient reliability minimálně 0,8. Obecně platí, že čím více úloh didaktický test obsahuje, tím vyšší má reliabilitu. Aby byl didaktický test dostatečně validní, musí mít dobrou reliabilitu, vysoká reliabilita ovšem není zárukou dostatečné validity.

Koeficient reliability lze vypočítat např. pomocí Kuderova-Richardsonova vzorce nebo metodou půlení. (Chráska 2007)

Kuderův-Rychardsonův vzorec je vhodný pro výpočet koeficientu reliability u didaktických testů, které jsou složeny z obsahově homogenních úloh (u obsahově nehomogenních úloh vychází reliabilita touto metodou příliš nízká). Výpočet provádíme pomocí následujícího vzorce:

$$r_{kr} = \frac{k}{k-1}\left(1 - \frac{\sum pq}{s^2}\right)$$

$$p = \frac{n_s}{n}$$

k je počet úloh v testu, *p* je podíl žáků ve vzorku, kteří řešili určitou úlohu v testu správně (n_s je počet žáků, kteří řešili danou úlohu správně, n celkový počet žáků), *q = 1 – p* a *s* je směrodatná odchylka pro celkové výsledky žáků v testu. (Chráska 2007)

Reliabilita metodou půlení je vhodná jak pro testy úrovně, tak pro testy rychlosti. Podstatnou podmínkou pro použití tohoto výpočtu je, že didaktický test je složen ze sudého počtu úloh, které jsou řazeny podle vzrůstající obtížnosti. Vlastní výpočet provádíme tak, že test rozdělíme na dvě poloviny (obvykle na sudá a lichá pořadová čísla úloh) a výsledky dosažené žáky v jednotlivých skupinách navzájem korelujeme. Hodnota vypočítaného korelačního koeficientu poté slouží ke stanovení koeficientu reliability. Vlastní koeficient vypočítáme pomocí následujícího vzorce:

$$r_{sb} = \frac{2.r_p}{1 + r_p}$$

r_{sb} je koeficient reliability a r_p je koeficient korelace mezi výsledky žáků v obou polovinách testu.

$$r_p = \frac{n\sum x_L x_S - \sum x_L \sum x_S}{\sqrt{\left[n\sum x_L^2 - \left(\sum x_L\right)^2\right]\cdot\left[n\sum x_S^2 - \left(\sum x_S\right)^2\right]}}$$

kde n je celkový počet žáků, x_L a x_S je počet bodů jednotlivých žáků, které získali v liché resp. sudé skupině. (Chráska 2007)

2.5.4 Standardizace didaktického testu

Při vyhodnocování výsledků didaktického testu nám dosažené počty bodů jednotlivých žáků neposkytují informaci o tom, zda je výsledek žáka výborný, průměrný nebo podprůměrný. Jde o to, že stejný bodový výsledek jednoho žáka z různých didaktických testů může v prvním případě vypovídat o výborném výsledku, zatímco v druhém případě znamenat podprůměrný výsledek. Této skutečnosti se lze vyvarovat jedině tak, že výkon žáka porovnáme s výkony ostatních žáků.

Smyslem standardizace je vytvoření testového standardu (testové normy), který umožní zařadit žáka podle dosaženého počtu bodů do určitého žebříčku (stupnice, škály). (Chráska 2007).

To znamená, že pokud používáme standardizovaný didaktický test, tak výsledek jednotlivce porovnáváme s reprezentativním vzorkem žáků (zpravidla jde o stovky). Tento postup, kterým porovnávání provádíme, se nazývá standardizace testu. Pokud standardizujeme výsledky daného didaktického testu, pak je vyjadřujeme vzhledem k výsledkům standardizačního vzorku studentů.

Základní metody standardizace jsou založeny na vyjádření procent studentů, kteří v reprezentativním vzorku získali určitý počet bodů. Jednou z těchto metod je percentilová škála.

Percentilová škála je metoda standardizace didaktického testu založená na principu, že ke každému dosaženému počtu bodů přiřadíme tzv. percentilové pořadí. Percentilové pořadí udává, kolik procent testovaných osob ve vzorku dosáhlo horšího výsledku. Díky tomu můžeme posoudit, jaké je relativní pořadí daného studenta ve skupině standardizačního vzorku studentů. Percentilové pořadí pro daný výsledek v testu vypočítáme pomocí vzorce:

$$PR = 100 \cdot \frac{n_k - \frac{n_i}{2}}{n}$$

kde PR je percentilové pořadí testovaného studenta pro určitý výsledek v testu, n_k je kumulativní četnost daného výsledku, n_i je četnost daného výsledku a n je celková četnost testovaných osob.

Existují další metody standardizace didaktického testu jako např. C-škála, Škála STANIN, Z-škála a T-škála. Bližší informace k těmto metodám lze nalézt např. v publikaci Metody pedagogického výzkumu Chráska 2007.

2.6 DRUHY VÝBĚRŮ PRVKŮ DO VÝZKUMNÝCH VZORKŮ

Hypotézy v pedagogických výzkumech nelze v praxi ověřovat na celé populaci všech studentů. Proto musíme vybrat určitou skupinu, která musí splňovat jisté náležitosti. Vybraný vzorek by měl mít pokud možno stejné vlastnosti jako celá skupina, kterou zkoumáme. Pro správné výsledky našeho výzkumu požadujeme, aby vybraný vzorek studentů byl co nejvíce reprezentativní.

Základní soubor: tento pojem označuje všechny prvky (studenty), kteří patří do zkoumané skupiny. (Chráska 2007)

Výběrový soubor: tento pojem označuje část prvků (studentů), které jsme vybrali ze základního souboru, tato část prvků reprezentuje základní soubor. (Chráska 2007)

V praxi existuje celá řada metod, kterými můžeme vybrat prvky do výběrového souboru tak, aby základní soubor dostatečně reprezentovaly. Vždy musíme zajistit, že při výběru prvků nebude uplatněna žádná subjektivní okolnost. Výběry musí být vždy objektivní, tuto skutečnost zajišťujeme nejčastěji využitím náhody.

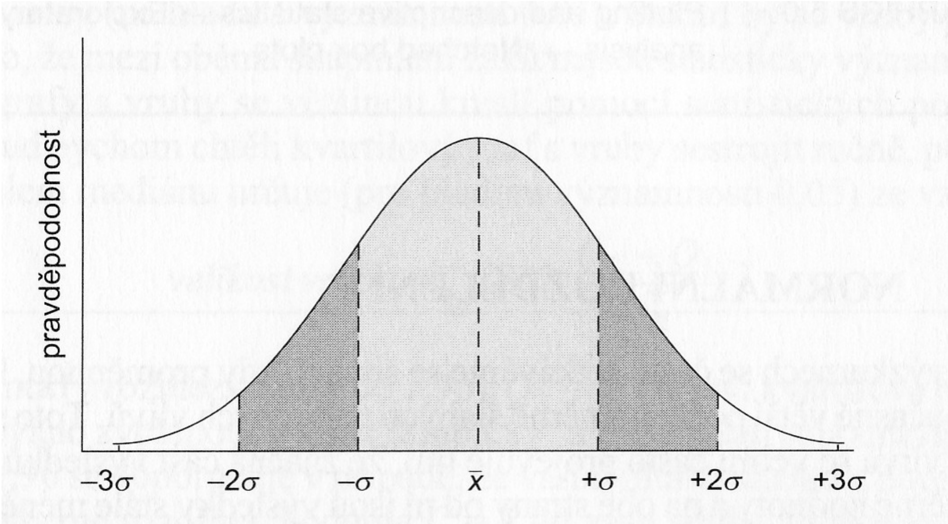
Prostý náhodný výběr	U tohoto druhu výběru mají všechny prvky souboru stejnou pravděpodobnost, že budou vybrány. Každý prvek musíme vybírat nezávisle na ostatních. V praxi je velmi problematické tento typ výběru používat.
Skupinový výběr	Tento typ výběru používáme, jestliže je základní soubor uspořádán do určitých skupin (např. třídy jednoho ročníku apod.).
Stratifikovaný výběr	Tento typ výběru používáme, jestliže je základní soubor složen z několika charakteristických podskupin. Z každé podskupiny

	poté náhodně vybíráme určitý počet prvků.
Kontrolovaný výběr	Je typ stratifikovaného výběru, u kterého počet prvků vybíraných z podskupin je proporcionální počtu těchto prvků v základním souboru.
Vícenásobný výběr	Tento typ výběru začínáme výběrem skupin vyššího řádu. Tedy nejprve vybereme skupiny vyššího řádu a poté v několika krocích dospějeme dalšími výběry k základním jednotkám souboru.
Záměrný výběr	U tohoto typu výběru nerozhoduje o výběru jistého prvku náhoda, ale rozhodnutí výzkumníka nebo zkoumané osoby.
Mechanický (systémový) výběr	Použití tohoto výběru je vhodné, pokud zkoumáme určité procento populace. V tomto případě postupujeme tak, že všem prvkům základního souboru přiřadíme pořadová čísla. Poté náhodným výběrem určíme počáteční prvek základního souboru a k jeho pořadovému číslu postupně přičítáme konstantu, která odpovídá zvolenému procentu vybíraných prvků.
Spárované (vyrovnané) výběry	Jde o druh kontrolovaného výběru, kdy ze základního souboru získáváme dva nebo více podobně kontrolovaných výběrů.

(Chráska 2007)

2.7 NORMÁLNÍ ROZDĚLENÍ

Jedná se o empirickou zákonitost, kdy se současné působení mnoha vlivů projevuje tím, že velká část výsledků je soustředěna kolem průměrné hodnoty a na obě strany od ní jsou výsledky stále méně časté. Extrémní hodnoty se v tomto případě vyskytují jen ojediněle. Tuto zákonitost můžeme vyjádřit graficky pomocí tzv. Gaussovy křivky.



Gaussova křivka (Chráska 2007)

Jak je patrno z obrázku, je tato křivka souměrná podle osy, která prochází jejím vrcholem. Maximální hodnota Gaussovy křivky odpovídá aritmetickému průměru všech naměřených hodnot. Tvar křivky je závislý na velikosti směrodatné odchylky. Pokud zvětšujeme směrodatnou odchylku, stává se křivka stále plošší. V normálním rozdělení platí několik zákonitostí:

- V intervalu od –σ do σ (σ je směrodatná odchylka) okolo hodnoty aritmetického průměru se nacházejí přibližně dvě třetiny všech hodnot,
- v intervalu od –2σ do 2σ leží přibližně devatenáct dvacetin všech hodnot,
- v intervalu od–3σ do 3σ leží prakticky všechny hodnoty.

Pro výpočet pravděpodobnosti výskytu určité hodnoty byl odvozen vzorec, který umožňuje vypočítat tzv. hustotu pravděpodobnosti *f(x)* normálního rozdělení. Je to pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude právě hodnoty x.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

kde σ je směrodatná odchylka základního souboru, $\bar{x}$ je aritmetický průměr základního souboru a x je hodnota, jejíž pravděpodobnost výskytu vypočítáváme. Ze vztahu je zřejmé, že pravděpodobnost výskytu určité hodnoty x závisí pouze na parametrech σ a $\bar{x}$. Vzhledem k tomu, že výpočty pravděpodobnosti jsou poměrně pracné, častěji využíváme namísto výpočtů statistické tabulky. Abychom nemuseli pro každou hodnotu aritmetického

průměru
a pro každou hodnotu směrodatné odchylky sestavovat tabulky normálního rozdělení, zavádíme tzv. normovanou normální veličinu *u*. Hodnoty normované normální veličiny vypočítáváme pomocí vzorce:

$$u = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

kde x je určitá hodnota normální veličiny, $\bar{x}$ je aritmetický průměr a s je směrodatná odchylka. Normovaná normální veličina má tedy průměr 0 a směrodatnou odchylku 1. Tato veličina tedy vypovídá o tom, jak daleko od aritmetického průměru daná hodnota x je, přičemž tuto vzdálenost udáváme ve směrodatných odchylkách. (Chráska 2007)

2.8 CHARAKTERISTIKY POLOHY

Při zpracovávání dat získaných z empirických výzkumů (pedagogické výzkumy nevyjímaje), potřebujeme naměřená data nějakým způsobem přehledně a stručně charakterizovat. Tedy určit hodnotu, která bude všechna naměřená data dobře reprezentovat. V pedagogických výzkumech k tomuto účelu nejčastěji využíváme aritmetický průměr (pro metrická data), medián (pro ordinální data) nebo modus (pro nominální data).

Aritmetický průměr označujeme $\bar{x}$ a z hodnot x_1, x_2, x_3, ... x_n jej vypočítáme pomocí vzorce:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

kde n je celková četnost všech hodnot. Výhodou aritmetického průměru je to, že jeho výpočet (matematické vyjádření) je jednoduchý a i to, že jeho hodnota závisí na všech prvcích souboru dat. Nevýhodou aritmetického průměru je ovšem veliká citlivost na tzv. extrémní hodnoty, které se vyskytují v souboru dat. Jde o ty hodnoty, které se značně odlišují od ostatních dat souboru. (Chráska 2007)

Medián označujeme $\tilde{x}$ a jde o prostřední hodnotu ze seřazené řady dat podle velikosti. Je to ta hodnota, která rozděluje soubor dat na dvě stejné části. Pokud určujeme medián ze souboru dat, který má sudý počet, pak medián určíme jako aritmetický průměr ze dvou prostředních hodnot. (Chráska 2007)

Modus označujeme $\hat{x}$ a slouží k přibližnému stanovení charakteristiky polohy a je to ta hodnota, která se v souboru dat vyskytuje nejčastěji (tedy má největší četnost). (Chráska 2007)

Pomocí předchozích charakteristik polohy si můžeme vytvořit základní představu o datech, která zpracováváme. Ovšem tato představa není zcela úplná. Charakteristika polohy neposkytuje informace o tom, jak jsou ostatní hodnoty kolem střední hodnoty rozmístěny. Tyto informace vyjadřují tzv. míry variability (také se používá název charakteristiky rozptýlení), jde např. o variační šíři, směrodatnou odchylku, variační koeficient nebo kvartilovou odchylku.

Variační šíře slouží pro přibližné posouzení rozptýlení hodnot a jde o rozdíl mezi největší a nejmenší naměřenou hodnotou: (Chráska 2007)

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

Směrodatná odchylka (resp. rozptyl) je nejčastěji používanou mírou variability pro intervalová nebo metrická data. Rozptyl je aritmetický průměr čtverců odchylek od aritmetického průměru. Rozptyl označujeme s^2 a vypočítáme ho pomocí vzorce:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot \left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

kde s^2 je rozptyl, n celková četnost všech hodnot, x_i je určitá naměřená hodnota, n_i četnost hodnoty x_i, $\bar{x}$ aritmetický průměr všech hodnot a k je počet řádků v tabulce četností. Směrodatnou odchylku s poté vypočítáme jako druhou odmocninu z rozptylu, tedy pomocí vzorce:

$$s = \sqrt{s^2}$$

Rozptyl a směrodatná odchylka charakterizují, jak jednotlivé hodnoty kolísají kolem aritmetického průměru. Čím více se jednotlivé hodnoty odchylují od aritmetického průměru, tím je rozptyl i směrodatná odchylka větší. (Chráska 2007)

Variační koeficient slouží ke srovnání variability dvou nebo více souborů dat s rozdílnými průměry. Tento koeficient vyjadřuje, jaké procento z průměrné hodnoty činí směrodatná odchylka. Variační koeficient vypočítáme pomocí vzorce:

$$V = \frac{s}{\bar{x}}$$

kde s je směrodatná odchylka a $\bar{x}$ je aritmetický průměr. (Chráska 2007)

Kvartilovou odchylku můžeme jako míru použít, jestliže jsme střední hodnotu souboru dat charakterizovali pomocí mediánu. Když určujeme kvartilovou odchylku, musíme nejprve jednotlivé hodnoty souboru dat seřadit podle velikosti. V takto vytvořené řadě poté určíme tzv. dolní kvartil Q1 a horní kvartil Q3. Dolní kvartil Q1 odděluje dolní čtvrtinu naměřených hodnot, zatímco horní kvartil Q3 odděluje horní čtvrtinu naměřených hodnot. Z těchto kvartilů poté vypočítáme kvartilovou odchylku pomocí vzorce: (Chráska 2007)

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

2.9 STATISTICKÉ METODY VYUŽÍVANÉ PŘI TESTOVÁNÍ HYPOTÉZ

Pokud provádíme kvantitativně orientovaný výzkum, vždy potřebujeme ověřit hypotézy, které vypovídají o vztazích mezi nějakými jevy. Abychom mohli platnost jednotlivých hypotéz testovat pomocí statistických metod, je nutné je formulovat ve tvaru tzv. statistických hypotéz. To znamená, že vyjádříme hypotetická tvrzení o vztazích mezi jevy ve statistických termínech. Např. hypotézu: *„Dívky dosahují lepších výsledků v českém jazyce než chlapci“* přeformulujeme na: *„Průměrný počet bodů v didaktickém testu z českého jazyka je u dívek větší než průměrný počet bodů u chlapců“.*

Statistickou hypotézu poté ověřujeme tak, že vytvoříme nějaké jiné tvrzení a proti němu zjišťujeme platnost původní hypotézy. Toto tvrzení nazýváme *nulová hypotéza*. Jedná se o tvrzení, které pomocí statistických termínů tvrdí, že mezi zkoumanými proměnnými není vztah. Pokud budeme uvažovat předchozí příklad, že průměrný počet bodů v didaktickém testu dívek je větší než u chlapců, pak nulová hypotéza bude tvrdit, že průměrný počet bodů v obou skupinách je stejný. Dalším krokem je statistická analýza dané situace. Jestliže tato analýza prokáže, že můžeme nulovou hypotézu odmítnout, pak přijímáme původní, tedy alternativní hypotézu. (Chráska 2007)

Statistické testy významnosti chápeme jako postupy, kterými ověřujeme skutečnost, zda mezi proměnnými existuje nějaký vztah. Pomocí testů významnosti můžeme rozhodnout, jestli mezi zkoumanými jevy je *statisticky významný vztah*. Pokud prokážeme, že výsledek našeho šetření je statisticky významný, pak je velice nepravděpodobné, že byl způsoben pouze náhodou. Při používání statistických testů významnosti má naše rozhodování jen pravděpodobnostní charakter. Nikdy si nemůžeme být našimi závěry naprosto jisti. Pravděpodobnost, že neoprávněně odmítneme nulovou hypotézu, nazýváme *hladina významnosti*. (Chráska 2007)

Statistických testů významnosti existuje mnoho. Volba jejich použití záleží na určitých faktorech např. na druhu naměřených dat (nominální, ordinální metrické). Není cílem tohoto textu popisovat všechny tyto testy, proto popíšeme pouze Studentův t-Test a Fischerův-Snedecorův F-Test, které budeme ještě dále využívat.

Studentův t-test je statistický test významnosti určený pro metrická data. Pomocí tohoto testu lze rozhodnout, zda dva soubory dat, které získáme měřením ve dvou různých skupinách objektů, mají stejný aritmetický průměr. Jeho využití pro pedagogický experiment a data získaná pomocí didaktického testu je zřejmé.

Pokud chceme testovat alternativní hypotézu $H_{A,}$ je nutné sestavit nulovou hypotézu H_0. Dále si musíme zvolit hladinu významnosti α. Nulovou hypotézu při použití Studentova t-testu testujeme pomocí kritéria, které označujeme *t* a vypočítáme ho pomocí vzorce:

$$t = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{s} \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}}$$

kde $\overline{x}_1$ je průměr jedné skupiny (např. dívky), $\overline{x}_2$ je průměr druhé skupiny (např. chlapci), n_1, n_2 jsou četnosti obou skupin a s je směrodatná odchylka. Tu vypočítáme ze vzorce:

$$s^2 = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \left[\sum \left(x_{1i} - \overline{x_1} \right)^2 + \sum \left(x_{2j} - \overline{x_2} \right)^2 \right]$$

$$s = \sqrt{s^2}$$

kde x_{1i} a x_{2j} jsou jednotlivé naměřené hodnoty v obou skupinách.

Vypočítanou hodnotu parametru t musíme porovnat s tzv. kritickou hodnotou testového kritéria pro zvolenou hladinu významnosti a příslušný počet stupňů volnosti f. Tento počet stupňů volnosti vypočítáme pomocí vzorce:

$$f = n_1 + n_2 - 2$$

kde f je počet stupňů volnosti, n_1 a n_2 četnosti jednotlivých skupin.
Kritickou hodnotu testového kritéria nalezneme v tabulkách. Pokud je námi vypočtená hodnota testového kritéria větší než hodnota kritická, odmítáme nulovou hypotézu a přijímáme hypotézu alternativní. Pokud je námi vypočtená hodnota testového kritéria menší než hodnota kritická, musíme přijmout nulovou hypotézu a odmítnout hypotézu alternativní.
Jestliže chceme použít Studentův t-test, musíme splnit tyto podmínky:

- základní soubor splňuje požadavky normálního rozdělení
- je třeba dodržet homogenitu rozptylu v obou srovnávaných skupinách (požaduje se, aby rozptyl v obou skupinách byl přibližně stejný)
- měření musí být navzájem nezávislá
- data musí být metrická (tedy intervalová nebo poměrová).

(Chráska 2007)

Fischerův- Snedecorův F-test je statistický test významnosti, kterým lze určit, zda dva soubory dat mají přibližně stejný rozptyl. Rozptyly v tomto případě posuzujeme pomocí testového kritéria, které označujeme F a vypočítáme ho pomocí vzorce:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{\sum \left(x_{1i} - \overline{x_1} \right)^2}{\sum \left(x_{2j} - \overline{x_2} \right)^2} \cdot \frac{n_2 - 1}{n_1 - 1}$$

kde s_1^2 je rozptyl v první skupině, s_2^2 je rozptyl v druhé skupině (přičemž do čitatele zlomku vždy dosazujeme větší rozptyl), x_{1i} jsou jednotlivé hodnoty v první skupině, x_{2j} jsou jednotlivé hodnoty v druhé skupině, $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ jsou aritmetické průměry hodnot v obou skupinách a n_1 a n_2 jsou četnosti v obou skupinách. Při počítání testového kritéria F testujeme nulovou hypotézu H_0, která tvrdí, že rozptyly výsledků v obou skupinách se rovnají. Vypočítanou hodnotu testového kritéria F porovnáváme s kritickou hodnotou testového kritéria, kterou nalezneme v tabulkách. Kritickou hodnotu vyhledáváme pro zvolenou hladinu významnosti α a příslušný počet stupňů volnosti t. Tuto hodnotu vypočítáme pro každou skupinu pomocí vzorců:

$$f_1 = n_1 - 1$$
$$f_2 = n_2 - 1$$

kde f_1 a f_2 jsou počty stupňů volnosti v jednotlivých skupinách a n_1 a n_2 jsou četnosti v jednotlivých skupinách.

Pokud je námi vypočítaná hodnota testového kritéria menší než hodnota kritická, pak přijímáme nulovou hypotézu. Tedy mezi rozptyly v obou skupinách nejsou statisticky významné rozdíly. (Chráska 2007)

3 INDUKTIVNÍ A DEDUKTIVNÍ PŘÍSTUPY PŘI VÝUCE MATEMATIKY (PRAKTICKÁ ČÁST)

3.1 STANOVENÍ VÝZKUMNÉHO PROBLÉMU

Vzhledem k tomu, že matematika představuje značně abstraktní disciplínu, hrozí všeobecně při předávání matematických poznatků v rámci školské matematiky nebezpečí formalismu. Je zřejmé, že při výuce tak komplexní vědy, jakou matematika bezesporu je, není vhodné držet se stále metody prezentování „hotových“ poznatků, jak často pozorujeme na středních školách. Autoři článků (Emanovský 2001, Kopka 1999 a Kopka 2000) upozorňují na některá specifika vysokoškolského studia matematiky a doporučují alespoň občas uplatnit i některé méně používané metody výuky. Jednou z alternativ je experimentálně induktivní metoda výuky popsaná v publikaci Hrozny problémů ve školské matematice Kopka 1999. Induktivní cesta je sice časově náročnější, ale na druhé straně obsahuje ničím nenahraditelné činnosti zkoumání, vyslovení hypotézy a její ověřování. Vyučující by se měl přitom snažit maximálně aktivizovat studenty a jeho pomoc by se měla omezit pouze na nezbytně nutnou míru.

Ve výuce matematiky na střední škole má samozřejmě uplatnění experimentálně induktivního přístupu ještě mnohem větší význam vzhledem k nižšímu věku studentů. V následujícím textu je popsán průběh a výsledky výzkumu, jehož cílem bylo zjistit možnosti využití experimentálně induktivních a deduktivních přístupů jako prostředku pro efektivnější matematické vzdělávání na střední škole. V rámci výzkumu bylo provedeno porovnání efektivity těchto méně používaných přístupů s metodami obvyklejšími, kdy jsou žáci pouze seznamováni s matematickými poučkami a vzorci, aniž by poznali radost z jejich objevování.

Při předběžné teoretické analýze induktivních a deduktivních přístupů vyučování a možnosti jejich zařazení do běžné výuky bylo formulováno několik problémů. Tyto problémy se přímo týkají námi popisovaného výzkumu, který porovnává efektivitu těchto vyučovacích metod s častěji používanými vyučovacími metodami.

- Zajišťuje zařazení induktivních a deduktivních přístupů do výuky matematiky efektivnější a trvalejší získávání poznatků?
- Přispívá použití induktivních a deduktivních přístupů ve výuce matematiky k lepšímu pochopení látky?

- Přispívá použití induktivních a deduktivních přístupů ve výuce matematiky k lepší schopnosti aplikovat získané vědomosti a dovednosti?

Cílem výzkumu bylo prověřit, zda vhodné zařazování a využívání induktivních a deduktivních přístupů ve výuce matematiky vede k efektivnějšímu a trvalejšímu získávání poznatků. Pro vlastní výzkum byly stanoveny následující hypotézy:

H1: Použití induktivních a deduktivních přístupů ve výuce matematiky zvyšuje úroveň vědomostí žáků v dané problematice oproti tradičním metodám výkladu.

H2: Použití induktivních a deduktivních přístupů ve výuce matematiky vede k trvalejšímu získávání vědomostí a dovedností než při uplatnění tradičních přístupů.

3.2 TECHNIKA PARALELNÍCH SKUPIN

Jako výzkumný prostředek pro verifikaci obou hypotéz H1 a H2 byl vybrán ***pedagogický experiment***. Ke kontrole nad působením nezávisle proměnné (experimentální vyučovací metody) byla využita ***technika paralelních skupin***. Tedy vybraný vzorek studentů byl rozdělen na dvě skupiny. V jedné skupině byly k výuce použity experimentálně induktivní a deduktivní přístupy výuky. Tato skupina byla označena jako experimentální. Ve druhé skupině byly ve výuce používány tradiční metody výuky. Tato skupina byla označena jako kontrolní.

Pomocí pedagogického experimentu jsme porovnávali účinnost induktivních a deduktivních přístupů ve výuce matematiky oproti tradičním metodám výuky. Měřítkem, které sloužilo k porovnání této účinnosti, byly dosažené vědomosti studentů na konci experimentu. Tyto vědomosti byly měřeny pomocí ***didaktického testu***.

K verifikaci obou hypotéz byl při pedagogickém experimentu použit upravený plán číslo 6. Úprava tohoto plánu spočívala v tom, že namísto dvou tříd byla na každé škole rozdělena na experimentální a kontrolní skupinu vždy jedna třída. Průběh experimentu byl následující.

1. V každé z vybraných škol byla náhodně (losováním) vybrána třída, kterou bylo nutné rozdělit na dvě skupiny: experimentální a kontrolní, přičemž bylo nutné zajistit, aby obě skupiny studentů byly srovnatelné. *(Při náhodném výběru studentů hrozí možnost, že v jedné skupině budou vynikající studenti a ve druhé pouze*

podprůměrní studenti. To by mohlo negativně ovlivnit výsledky výzkumu.) Rozdělení studentů probíhalo na základě dosaženého počtu bodů, které každý student získal ze vstupního didaktického testu (pretestu), jenž byl vždy zadán všem studentům. Tento test zjišťoval vstupní úroveň vědomostí a dovedností studentů. Vlastní dělení probíhalo tak, že byly vytvořeny skupiny studentů, kteří dosáhli stejného počtu bodů (např. jednu z těchto skupin tvořili všichni žáci, kteří získali 7 bodů z testu, další skupinu představovali studenti se 2 body atd.). Z těchto skupin se stejným počtem bodů byl metodou náhodného výběru (losováním) každý žák zařazen do kontrolní nebo experimentální skupiny. Díky tomuto postupu jsme získali dvě skupiny, ve kterých byla četnost získaného počtu bodů ze vstupního testu stejná.

2. Dalším krokem byl vlastní experimentální zásah, tedy výuka pomocí induktivních a deduktivních přístupů, která probíhala v experimentální skupině. V kontrolní skupině byla výuka prezentována tradičním způsobem. Před zahájením výuky byli všichni vyučující seznámeni s obsahem posttesu.
3. Bezprostředně po skončení experimentální výuky proběhlo testování výstupní úrovně poznatků (posttest), které studenti získali během výuky. Výstupní úroveň vědomostí

   a dovedností studentů byla opět měřena pomocí didaktického testu. Takto získaná data sloužila k verifikaci první hypotézy H1. Tedy přímo pro srovnání účinnosti výuky pomocí induktivních a deduktivních přístupů oproti účinnosti ostatních metod.
4. Pro zjištění trvalosti poznatků byl s odstupem jednoho měsíce studentům předložen třetí didaktický test, který opět zjišťoval úroveň vědomostí z tématu, které bylo vyučováno při experimentu (retest). Takto získaná data sloužila k verifikaci druhé hypotézy H2. K ověření faktu, zda výuka při použití induktivních a deduktivních přístupů přispívá k trvalejšímu získávání vědomostí a dovedností než při uplatnění tradičních přístupů.

Platnost obou hypotéz H1 a H2 byla ověřována napříč všemi školami, které se experimentu zúčastnily.

Pomocí didaktického testu jsme získali metrická data. Z nich jsme získali aritmetický průměr a směrodatnou odchylku obou skupin. S ohledem na skutečnost, že data získaná pomocí didaktického testu jsou metrická, provedená měření byla nezávislá a o základním souboru lze předpokládat, že splňuje požadavky normálního rozdělení. Pro verifikaci obou hypotéz H1 a H2 byl použit ***Studentův t-test***. Další podmínkou pro použití tohoto statistického testu významnosti je dodržení homogenity rozptylu v obou srovnávaných skupinách. Ke zjištění této skutečnosti byl použit ***Fischerův- Snedecorův F-test***.

3.3 VÝZKUMNÝ SOUBOR

S ohledem ke zvoleným hypotézám a celkovému zaměření výzkumu byl experiment realizován se studenty 1., resp. 2. ročníku středních škol a víceletých gymnázií. Na každé škole byla náhodně vybrána třída, která se experimentu zúčastnila. Tato třída byla podle výše zmíněného postupu rozdělena na experimentální a kontrolní skupinu.

Název a adresa školy	**Počet studentů experimentální skupiny**	**Počet studentů kontrolní skupiny**
SPŠ Teplice Benešovo náměstí 604/1, 415 01 Teplice, www.spsteplice.cz	**15**	**13**
Střední škola technická AGC a.s. Rooseveltovo náměstí 5, 415 03 Teplice-Řetenice, www.skola-agc.cz	**10**	**15**
Gymnázium Ústí nad Labem Jateční Jateční 243/22, 400 01 Ústí nad Labem-Klíše, www.gymjat.cz	**13**	**12**
Biskupské gymnázium Bohosudov Koněvova 100, 417 42 Krupka-Bohosudov, www.biskupske-gymnazium.cz	**12**	**11**
Celkem	**50**	**51**

Tab. 2 Školy, na kterých byl proveden experiment s počty studentů v jednotlivých skupinách na začátku experimentu.

Školy byly vybírány tak, aby v experimentu byly zastoupeny všechny typy středních škol. Tedy gymnázia, střední průmyslové školy a školy zajišťující výuku učebních oborů s maturitou. Z těchto tří kategorií byly výběrem, který byl ovlivněn ochotou vedení škol experiment provést, vybrány zmíněné školy. Kvůli zajištění co možná největší reprezentativnosti vzorku studentů, byly školy vybrány ve třech různých městech. Následující tabulka udává stručnou charakteristiku zmíněných středních škol.

Název školy	Zaměření	Počet studentů v roce 2009	Časová dotace hodin matematiky týdně
SPŠ Teplice	Střední průmyslová škola se strojírenskými, dopravními a administrativně technickými obory.	338	5 hodin/1. ročník
Střední škola technická AGC a.s.	Zajišťuje výuku informatiky, elektrotechniky a elektroniky, sklářských a ekonomických oborů.	430	5 hodin/1. ročník
Gymnázium Ústí nad Labem Jateční	Státní všeobecné čtyřleté a osmileté gymnázium.	665	4 hodiny/2ročník
Biskupské gymnázium Bohosudov	Církevní všeobecné čtyřleté a osmileté gymnázium.	267	3 hodiny/2. ročník

Tab. 3 Stručná charakteristika jednotlivých škol.

3.4 UČIVO VYBRANÉ PRO PEDAGOGICKÝ EXPERIMENT

Při výběru učiva vhodného pro experiment bylo zohledněno několik důležitých podmínek:

- Možnost využití induktivních a deduktivních přístupů při výuce daného tématu,
- studenti, kteří se zúčastní experimentu, by neměli mít zkušenosti s využíváním induktivních a deduktivních přístupů při výuce matematiky (tato podmínka ovlivňovala čas, kdy k experimentu došlo a tím také zvolené téma),
- tématické plány jednotlivých škol (bylo nutné vybrat téma tak, aby k jeho výuce na jednotlivých školách docházelo v přibližně stejných termínech).

Na základě těchto skutečností bylo, jako nejvhodnější, zvoleno téma **Lineární funkce**. Toto téma splňuje i fakt, že studenti, kteří nemají zkušenosti s výukou, při které jsou využívány induktivní a deduktivní přístupy (tedy s vlastním objevováním v matematice), mají alespoň malou zkušenost s pojmem lineární funkce ze základní školy.

Vlastní experimentální výuka, a tedy i rozdělení jednotlivých tříd do skupin, začínala v okamžiku, kdy studentům byly vysvětleny a následně procvičeny tyto pojmy: pojem funkce, znázornění grafu funkce pomocí tabulky, definiční obor funkce, obor hodnot funkce.

Po absolvování experimentální výuky si studenti měli osvojit následující pojmy a znalosti: lineární funkce, body grafu funkce (rozhodnutí, zda bod náleží či nenáleží grafu), obecný předpis lineární funkce, vlastnosti grafu funkce, schopnost nalézt průsečíky grafu funkce s osami, použití lineárních funkcí v praxi.

3.5 DIDAKTICKÉ TESTY

V průběhu celého výzkumu byly použity tři didaktické testy. První test (pretest) sloužil k rozdělení výzkumného vzorku na experimentální a kontrolní skupinu tak, aby obě skupiny byly srovnatelné z pohledu vědomostí a dovedností jednotlivých studentů. Tématicky byl zaměřen na učivo, které studenti probírali před započetím experimentu (výrazy, mocniny). Druhý test (posttest) studenti absolvovali bezprostředně po ukončení experimentu a sloužil k verifikaci hypotézy H1. Třetí test (retest) byl studentům předložen po uplynutí jednoho měsíce od ukončení experimentu a sloužil k verifikaci hypotézy H2. Posttest a retest byly tematicky zaměřeny na učivo probírané při pedagogickém experimentu (lineární funkce).

3.5.1 Tvorba didaktických testů

Úlohy pro všechny didaktické testy byly sestaveny s ohledem na to, jaké vědomosti, dovednosti a postupy musí žáci po výkladu daných témat ovládat. Při vytváření jednotlivých testových úloh byla využita Niemerkova taxonomie a specifikační tabulka. Pomocí této tabulky bylo zajištěno, aby všechny tři testy obsahovaly úlohy zaměřené na zapamatování poznatků, porozumění těmto poznatkům a použití vědomostí v typových i problémových situacích.

Vzhledem ke konstrukci posttestu a retestu byla pro jejich tvorbu použita jedna specifikační tabulka, kterou uvádí tabulka číslo 4. Protože pretest sloužil pouze k rozdělení studentů do jednotlivých skupin a nikterak nezasahoval do vlastního výzkumu, jeho specifikační tabulku uvádět nebudeme. Při sestavování specifikační tabulky pro posttest
a retest bylo rozhodnuto, že test bude obsahovat 12 testových úloh s výběrem odpovědi a 3 otevřené úlohy. Čas na vypracování byl stanoven na 40 minut. Stanovených 15 testových úloh bylo rozděleno na jednotlivé části učiva tak, aby to přibližně odpovídalo procentovým podílům časové dotace, která byla dané části věnována.

Obsah	**Počet úloh**		**Úroveň osvojení** (podle Niemerkovi taxonomie)			
			A	**B**	**C**	**D**
Vlastnosti lineární funkce (předpis lineární funkce, speciální typy lineárních funkcí)	5	33%	1	1	2	1
Graf lineární funkce (konstrukce, vzájemná poloha přímek, vlastnosti grafu lineární funkce)	6	40%	-	1	5	-
Body grafu lineární funkce (funkční hodnota, body grafu funkce, průsečíky)	4	27%	-	1	3	-
celkem	15	100%	1	3	10	1

Tab. 4. Specifikační tabulka pro posttest a retest.

Při konkrétní tvorbě testových úloh byly zohledněny příklady, které jsou používány v učebnicích a sbírkách úloh využívaných studenty při výuce. Každý test obsahoval 15 úloh a čas vymezený na jeho vypracování byl 40 minut. První prototypy všech testů byly vyzkoušeny v praxi, vzhledem ke korekci jednotlivých úloh a času potřebného pro vypracování.

Každá správná odpověď v testu byla ohodnocena jedním bodem. Záporné body se za špatné odpovědi neudělovaly. To znamená, že z každého testu mohli jednotliví studenti vždy získat maximálně 15 bodů.

Abychom eliminovali možnost opisování při vypracovávání testu, byl každý test vypracován ve dvou variantách A a B. Tyto varianty se od sebe lišily pořadím zadávaných úloh. U úloh s nabízenou odpovědí byly odpovědi v odlišném pořadí, v neposlední řadě se lišily i číselné hodnoty jednotlivých úloh. Typy a náročnost úloh v obou variantách byly vždy srovnatelné.

Každý test obsahoval 15 úloh, z toho byly vždy 3 otevřené úlohy a 12 úloh s výběrem odpovědi tak, že vždy byla jen jedna správná odpověď. Z důvodu snížení pravděpodobnosti hádání správné odpovědi bylo vždy možné vybírat z pěti nabízených odpovědí. Přičemž jedna z nabízených odpovědí byla vždy možnost „žádná z uvedených“.

3.5.2 Standardizace didaktických testů

Všechny tři testy (pretest, posttest a retest) byly před započetím vlastního výzkumu standardizovány pomocí percentilové škály. Abychom získali data potřebná ke standardizaci, byly testy před započetím výzkumu zadány studentům středních škol. Standardizace probíhala na pěti středních školách a průměrně se jí zúčastnilo 323 studentů. Střední školy, které se zúčastnily standardizace, jsou uvedeny v tabulce číslo 5.

Název a adresa školy	Data jednotlivých standardizací		
	pretest	posttest	retest
Gymnázium dr. Václava Šmejkala Ústí nad Labem Stavbařů 2857/5, 400 11 Ústí nad Labem-Severní Terasa	1. 4. 2008	6. 5. 2008	9. 6. 2008
Střední průmyslová škola strojní a elektrotechnická Ústí nad Labem Resslova 210/5, 400 01 Ústí nad Labem-Klíše	25. 4. 2008	14. 5. 2008	19. 6. 2008
Střední škola technická AGC a.s. Rooseveltovo náměstí 5, 415 03 Teplice-Řetenice	15. 4. 2008	30. 5. 2008	19. 6. 2008
Gymnázium Ústí nad Labem Jateční Jateční 243/22, 400 01 Ústí nad Labem-Klíše	17. 4. 2008	28. 4. 2008	6. 6. 2008
Biskupské gymnázium Bohosudov Koněvova 100, 417 42 Krupka-Bohosudov	12. 5. 2008	30. 5. 2008	20. 6. 2008

Tab. 5 Seznam škol, na kterých probíhala standardizace.

Při vlastní standardizaci psali studenti jednotlivé testy v termínech, které korespondovali s pozdějšími termíny při pedagogickém experimentu: pretest před započetím výuky tématického celku „Lineární funkce“, posttest po ukončení výuky tohoto tématického celku

a retest po uběhnutí jednoho měsíce od psaní posttestu. Výsledky standardizace pro jednotlivé didaktické testy uvádějí tabulky číslo 6, 7 a 8.

Počet bodů	Četnost	Kumulativní četnost	Percentilové pořadí
0	0	0	0,0
1	0	0	0,0
2	2	2	0,3
3	1	3	0,7
4	4	7	1,4
5	13	20	3,8
6	13	33	7,5
7	18	51	11,8
8	34	85	19,2
9	43	128	30,0
10	54	182	43,7
11	52	234	58,6
12	56	290	73,8
13	38	328	87,0
14	23	351	95,6
15	4	355	99,4

Tab. 6 Percentilová norma pro pretest, celková četnost n = 355 studentů.

Počet bodů	Četnost	Kumulativní četnost	Percentilové pořadí
0	0	0	0,0
1	3	3	0,4
2	6	9	1,8
3	10	19	4,1
4	11	30	7,2
5	26	56	12,7
6	19	75	19,3
7	36	111	27,4
8	12	123	34,5
9	35	158	41,4
10	40	198	52,5
11	26	224	62,2
12	31	255	70,6
13	27	282	79,2
14	33	315	88,1
15	24	339	96,5

Tab. 7 Percentilová norma pro posttest, celková četnost n = 339 studentů.

Počet bodů	Četnost	Kumulativní četnost	Percentilové pořadí
0	0	0	0,0
1	4	4	0,7
2	7	11	2,7
3	12	23	6,2
4	14	37	10,9
5	17	54	16,5
6	12	66	21,8
7	16	82	26,9
8	13	95	32,2
9	23	118	38,7
10	30	148	48,4
11	28	176	58,9
12	23	199	68,2
13	35	234	78,7
14	20	254	88,7
15	21	275	96,2

Tab. 8 Percentilová norma pro retest, celková četnost n = 275 studentů.

Pro výpočty jednotlivých hodnot percentilové škály byl použit vzorec:

$$PR = 100 \cdot \frac{n_k - \frac{n_i}{2}}{n}$$

kde PR je percentilové pořadí testovaného studenta pro určitý výsledek v testu, n_k je kumulativní četnost daného výsledku, n_i je četnost daného výsledku a n je celková četnost testovaných osob. Například pro 7 bodů v tabulce č. 7 po dosazení dostáváme:

$$PR = 100 \cdot \frac{n_k - \frac{n_i}{2}}{n} = 100 \cdot \frac{111 - \frac{36}{2}}{339}$$

$$PR = 27,4$$

Toto číslo značí, že 27,4 procent všech studentů dosahuje horšího výsledku.

3.5.3 Reliabilita didaktických testů

K výpočtu reliability didaktických testů byl použit Kuder-Rychardsonův vzorec.

$$r_{kr} = \frac{k}{k-1}\left(1-\frac{\sum pq}{s^2}\right) \quad p = \frac{n_s}{n}$$

kde *k* je počet úloh v testu, *p* je podíl žáků ve vzorku, kteří řešili určitou úlohu v testu správně (n_s je počet žáků, kteří řešili danou úlohu správně, n celkový počet žáků), *q = 1 – p* a *s* je směrodatná odchylka pro celkové výsledky žáků v testu. Tabulka číslo 9 uvádí výsledky reliability jednotlivých didaktických testů a průměrné počty bodů jednotlivých testů.

test	**reliabilita r_{kr}**	**průměrný počet bodů**	**směrodatná odchylka**
pretest	0,75	10,2	2,99
posttest	0,80	9,5	3,57
retest	0,82	9,5	3,87

Tab. 9 Reliabilita jednotlivých didaktických testů.

Vzhledem k tomu, že při individuálním testování vědomostí obvykle požadujeme koeficient reliability minimálně 0,8, vykazují posttes a retest dostatečně vysokou reliabilitu. Nižší reliabilita o u pretestu je způsobena pravděpodobně tím, že úlohy tohoto didaktického testu nejsou z obsahového hlediska zcela homogenní. Pro účely, ke kterým je pretest určen, reliabilita 0,75 zcela postačuje.

3.6 EXPERIMENTÁLNÍ VYUČOVACÍ HODINY

Cílem výzkumu bylo ověření účinnosti využití induktivních a deduktivních přístupů přímo při výuce tak, aby bylo možné tyto startegie zařadit do běžného vyučovacího procesu. Pro popisovaný pedagogický experiment bylo zvoleno téma Lineární funkce. Na školách, na kterých experiment proběhl, věnují tomuto tématu tři vyučovací hodiny. Bylo tedy nutné dané téma zpracovat tak, aby bylo možné pro jeho výuku využít induktivní a deduktivní přístupy

a nepřesáhnout časovou dotaci tří vyučovacích hodin. Je samozřejmé, že by se dané téma dalo pomocí induktivních a deduktivních přístupů rozpracovat na delší časový úsek. Vzhledem k běžné týdenní časové dotaci, určené výuce matematiky, by nebylo možné zařadit takto prodloužený celek do běžné výuky.

Výuka v jednotlivých hodinách probíhala následujícím způsobem. Každé ze zmíněných tří vyučovacích hodin je věnována jedna část následujícího textu. V něm jsou popsány základní problémy zadávané žákům (Úloha 1, 2, ...), od kterých se odvíjí další zkoumání. Poté jsou zaznamenány doplňující a návodné otázky, které vytvářeli studenti nebo je zadával vyučující, a ty vedou k dalšímu vývoji zadané úlohy (v textu jsou odděleny pomlčkou). Kurzívou jsou popsány dílčí činnosti studentů, které slouží k dotvoření ucelenější představy o průběhu jednotlivých vyučovacích hodin.

Jednotlivé vyučovací hodiny mají následující strukturu:

1) Zadáme problém (žáci se mohou na vytvoření problému podílet).
2) Žáci využívají heuristické strategie při jeho řešení.
3) Žáci vysloví otázku, nebo hypotézu.
4) Řešíme další problém, nebo dokazujeme či vyvracíme vyslovenou hypotézu.
5) Na závěr hodiny provedou žáci shrnutí všech objevených poznatků.

Na zmíněných vyučovacích hodinách studenti řešili dané úlohy samostatně, každý postupoval vlastními metodami a tempem. Při vyslovení hypotézy se ostatní studenti zapojovali vhodnými argumenty nebo příklady do ověřování, resp. vyvracení dané hypotézy. Tímto způsobem každý student seznamoval se svými výsledky ostatní studenty. V závěru každé vyučovací hodiny provedli studenti s učitelem celkové shrnutí všech zjištěných a objevených skutečností.

Před započetím vlastní výuky je nutné, aby žáci znali pojem funkce a uměli sestrojit graf funkce pomocí tabulky.
Po absolvování tříhodinového bloku si žáci mají osvojit následující pojmy a znalosti: *lineární funkce*, *body grafu funkce* (rozhodnutí, zda bod náleží či nenáleží grafu), *obecný předpis lineární funkce*, *vlastnosti grafu funkce*, *nalézt průsečíky grafu funkce s osami*, *použití lineárních funkcí v praxi*, *pojem konstantní funkce*.

1. hodina Úloha 1

Představte si, že jste na brigádě. Výdělek, který obdržíte, závisí na mzdě 60 Kč za hodinu. Vytvořte tabulku, která popisuje tuto situaci.

Studenti se mohou na tvorbě problému podílet např. volbou velikosti mzdy.

Studenti si vytvořili tabulku sami, přičemž jeden student vytvořil tabulku na tabuli.

počet hodin	1	2	3	4	5	6	7
výdělek	60	120	180	240	300	360	420

- Popište slovy, jak jste spočítali částky v druhém řádku.

Studenti odpovídají a vzájemně korigují své odpovědi, výslednou odpověď zapracují do tabulky a také položí do rovnosti.

počet hodin	1	2	3	4	5	6	7
výdělek	$1 \cdot 60$	$2 \cdot 60$	$3 \cdot 60$	$4 \cdot 60$	$5 \cdot 60$	$6 \cdot 60$	$7 \cdot 60$

peníze = 60·počet hodin

- Kolik korun si vyděláte za 2 hodiny, 8hodin, 12 hodin....

- Zapište výpočty pomocí vzorce (možná odpověď)

$$p = 60 \cdot h$$

Studenti pracují samostatně a výsledky jednotlivců kontroluje vyučující. Správná odpověď je napsána na tabuli.

- Jak by vypadala tato rovnice v obecném případě, neboli vytvořte vzorec pro výpočet mzdy, který nemá konkrétně specifikovanou hodinovou mzdu (možná odpověď):

$$\boldsymbol{p = z \cdot h}$$

Studenti pracují samostatně a výsledky jednotlivců kontroluje vyučující, správná odpověď je napsána na tabuli.

Vyučující na základě těchto řešení formálně zavede rovnici přímé úměrnosti jakožto speciální případ lineární funkce.

Úloha 2

Na milimetrový papír narýsujte graf přímé úměrnosti našeho konkrétního příkladu; $y = 60 \cdot x$. Jak budete postupovat? Můžeme body grafu získané z tabulky spojit? Jak je máme spojit? Proč?

Je nezbytné, aby studenti své odpovědi co možná nejpřesněji zdůvodňovali *a obhajovali svá tvrzení.*

- Zjistěte pomoci grafu, kolik peněz vyděláme za 1,5 h; 3,5 h; 0 h; atp.

Studenti rýsují graf na milimetrový papír, přičemž jeden student kreslí graf na tabuli.

Vyučující na základě řešení formálně zavede pojmy: bod grafu funkce, funkční hodnota. Na konci hodiny by měli studenti s vyučujícím provést krátké shrnutí nově získaných poznatků. Studentům bylo zadáno domácí cvičení:

Nalezněte, nebo vymyslete další využití přímé úměrnosti v reálném životě, narýsujte graf a proveďte obdobné úvahy.

2. hodina Úloha 1

Do jednoho souřadnicového systému na milimetrový papír narýsujte grafy těchto lineárních funkcí:

a) $y = x$, b) $y = 2x$, c) $y = 3x$

- Zkoumejte, jak se mění graf funkce $y = ax$ při změně čísla a. *(nejčastější odpovědi studentů: „přímka rychleji roste“; „přímka se otáčí k ose y“; „přímka mění úhel s osou x nebo y“ „přímka je strmější“).*

- Jak se mění graf funkce, zvětšujeme-li číslo a od 1 výš?

- Jak vypadá graf funkce, když $a = 1$?

Úloha 2

Do stejného souřadnicového systému narýsujte grafy těchto lineárních funkcí:

a) $y = 0{,}5x$, b) $y = 0{,}25x$, c) $y = -2x$

- Zkoumejte, jak se nyní mění graf funkce $y = ax$ při změně čísla a.

- Jak se mění graf funkce, zmenšujeme-li číslo a od 1 do 0?

- Jak se mění graf funkce, zmenšujeme-li číslo a od 0?

- Jak vypadá graf funkce, když $a = 0$?

- Jaké mají grafy společné vlastnosti?

(Konečným výsledkem je pojem směrnice a její vlastnosti.)

Studenti rýsují grafy na milimetrový papír a vždy jeden nakreslí příslušný graf na tabuli. Studenti mají vždy určitý čas na samostatné vyřešení problému a poté sdělují svá řešení a obhajují nebo vyvracejí řešení ostatních.

Vyučující na základě všech řešení formálně zavede pojem směrnice a se studenty shrne její vlastnosti.

3. hodina Úloha 1

Zaměstnavatel nabízí jednodenní brigádu s výdělkem 160 Kč za hodinu a ještě zaplatí náhradu za dopravu 50 Kč.

- Vytvořte rovnici, která popisuje tuto reálnou situaci.

$$y = 60x + 50$$

- Napište rovnici, která popisuje obecnou situaci.

$$y = ax + b$$

Díky předchozím zkušenostem jsou při vytváření rovnice zpravidla všichni studenti úspěšní. Při obecném řešení studenti používají mnoho různých písmen, to nám ovšem nebrání ihned po vyřešení zavést ustálené značení.

Vyučující na základě těchto řešení formálně zavede rovnici lineární funkce.

Úloha 2

Do jednoho souřadnicového systému narýsujte na milimetrový papír grafy těchto lineárních funkcí: a) $y = x$ b) $y = x + 1$, c) $y = x + 4$

- zkoumejte, jak se nyní mění graf funkce $y = ax + b$ při změně čísla b

Úloha 3

Do stejného souřadnicového systému narýsujte grafy těchto lineárních funkcí:

a) $y = x -1$, b) $y = x -3$, c) $y = x +1$

- Jak se mění graf funkce při změně čísla b?
- Jak se mění graf funkce, když číslo b zvětšujeme?
- Jak se mění graf funkce, když číslo b zmenšujeme?
- Jaké společné vlastnosti mají grafy těchto funkcí?

Úloha 4

Do stejného souřadnicového systému narýsujte graf lineární funkce $y = 2x + 1$.

- Jak určíme průsečíky přímky s osami x a y z grafu?
- Jak určíme průsečíky přímky s osami x a y pomocí výpočtu?
- Jak bude vypadat graf funkce, když a = 0? (výsledkem je pojem konstantní funkce)
- Jak určíme vzájemnou polohu přímek pomocí grafu?
- Jak určíme vzájemnou polohu přímek pomocí jejich rovnic?

Studenti mají vždy určitý čas na samostatné vyřešení problému a poté sdělují svá řešení a obhajují, nebo vyvracejí řešení své nebo ostatních. Studenti vytvářejí vzorce pro výpočet druhé souřadnice a poté je ověřují v praxi.

Vyučující na základě všech řešení formálně zavede pojmy absolutní člen a lineární funkce a se studenty shrne jejich vlastnosti. Další pojem, který studenti objeví a je třeba ho formálně zavést, je konstantní funkce. Studentům bylo znovu zadáno domácí cvičení:

Nalezněte, nebo vymyslete další využití lineární funkce v reálném životě. Do stejného souřadnicového systému nakreslete grafy funkcí: $y = 3x + 1$, $y = 4x + 1$ a proveďte obdobné úvahy. Aplikujte lineární funkce na řešení konkrétních problémů z praxe.

3.7 STATISTICKÉ OVĚŘENÍ HYPOTÉZ

Hlavním cílem pedagogického experimentu bylo ověření platnosti dvou stanovených věcných hypotéz:

H1: Použití induktivních a deduktivních přístupů ve výuce matematiky zvyšuje úroveň vědomostí žáků v dané problematice oproti tradičním metodám výkladu.
H2: Použití induktivních a deduktivních přístupů ve výuce matematiky vede k trvalejšímu získávání vědomostí a dovedností než při uplatnění tradičních přístupů.

Pomocí didaktických testů (posttestu a retestu) byla získána data, která poté sloužila ke statistickému ověření obou hypotéz H1 a H2. Data získaná pomocí posttestu, který následoval bezprostředně po skončení experimentální výuky, sloužila k verifikaci hypotézy H1. Data získaná pomocí retestu, který byl studentům zadán přibližně jeden měsíc po posttestu, byla použita k verifikaci hypotézy H2. Jako verifikační prostředek byl využit statistický test významnosti **Studentův t-test**. Ke zjištění míry shodnosti rozptylů obou vzorků byl použit **Fischerův - Snedecorův F-test.** V tabulce číslo 10 je uvedeno, kdy docházelo k testování studentů, kteří se na jednotlivých školách účastnili experimentu.

Název a adresa školy	**Data**		
	pretest	**posttest**	**retest**
SPŠ Teplice	12. 12. 2008	19. 12. 2008	19. 1. 2009
Střední škola technická AGC a.s.	1. 4. 2009	8. 4. 2009	19. 5. 2009
Gymnázium Ústí nad Labem Jateční	10. 9. 2009	17. 9. 2009	20. 10. 2009
Biskupské gymnázium Bohosudov	9. 9. 2009	21. 9. 2009	6. 11. 2009

Tab. 10 Data, kdy probíhalo testování při experimentu na jednotlivých školách.

3.7.1 Ověření platnosti hypotézy H1

K verifikaci H1 byla použita data získaná pomocí posttestu. Následující tabulka číslo 11 udává výsledky studentů experimentální a kontrolní skupiny z posttestu.

Počet bodů x_i	**Experimentální skupina E**			**Kontrolní skupina K**		
	Četnost n_i	**Kumulativní četnost**	**Percentilové pořadí**	**Četnost n_i**	**Kumulativní četnost**	**Percentilové pořadí**
0	0	0	0,0	0	0	0,0
1	0	0	0,0	2	2	2,0
2	0	0	0,0	1	3	4,9
3	0	0	0,0	0	3	5,9
4	4	4	4,0	7	10	12,7
5	0	4	8,0	5	15	24,5
6	8	12	16,0	8	23	37,3
7	3	15	27,0	3	26	48,0
8	2	17	32,0	4	30	54,9
9	4	21	38,0	4	34	62,7
10	7	28	49,0	2	36	68,6
11	5	33	61,0	5	41	75,5
12	3	36	69,0	3	44	83,3
13	5	41	77,0	1	45	87,3
14	4	45	86,0	5	50	93,1
15	5	50	95,0	1	51	99,0

Tab. 11 Výsledky posttestu experimentální a kontrolní skupiny.

K ověření platnosti věcné hypotézy H1 jsme formulovali **nulovou a alternativní hypotézu** ($H_{0,} H_A$):

H_{01}: Mezi průměrným počtem bodů získaných z posttestu dosaženým ve skupině E a průměrným počtem bodů dosaženým ve skupině K není statisticky významný rozdíl.

H_{A1}: Mezi dosaženými průměry v obou skupinách je statisticky významný rozdíl.

K ověření platnosti statistických hypotéz H_{01} a H_{A1} jsme použili **Studentův t-test**.
Zvolená hladina významnosti: $\boldsymbol{\alpha}$ **= 0,05**

V tabulkách číslo 12 a 13 jsou uvedeny informace, které sloužily pro výpočet testového kritéria $\boldsymbol{t_1}$.

Experimentální skupina

Žák číslo	Počet bodů x_i	x_i^2	$(xi-\Phi_E)^2$	Žák číslo	Počet bodů x_i	x_i^2	$(xi-\Phi_E)^2$
1	7	49	49,00	26	15	225	225,00
2	4	16	16,00	27	15	225	225,00
3	4	16	16,00	28	14	196	196,00
4	6	36	36,00	29	14	196	196,00
5	7	49	49,00	30	14	196	196,00
6	6	36	36,00	31	14	196	196,00
7	10	100	100,00	32	13	169	169,00
8	13	169	169,00	33	13	169	169,00
9	9	81	81,00	34	12	144	144,00
10	10	100	100,00	35	12	144	144,00
11	15	225	225,00	36	11	121	121,00
12	12	144	144,00	37	10	100	100,00
13	11	121	121,00	38	10	100	100,00
14	11	121	121,00	39	4	16	16,00
15	8	64	64,00	40	4	16	16,00
16	13	169	169,00	41	6	36	36,00
17	11	121	121,00	42	6	36	36,00
18	10	100	100,00	43	6	36	36,00
19	10	100	100,00	44	6	36	36,00
20	9	81	81,00	45	9	81	81,00
21	9	81	81,00	46	10	100	100,00
22	8	64	64,00	47	11	121	121,00
23	7	49	49,00	48	13	169	169,00
24	6	36	36,00	49	15	225	225,00
25	6	36	36,00	50	15	225	225,00

Tab. 12 Výsledky posttestu experimentální skupiny, **průměrný počet bodů** v experimentální skupině je $\boldsymbol{\Phi_E}$ **= 9,88** bodu.

Kontrolní skupina

Žák číslo	Počet bodů x_i	xi^2	$(xi-\Phi_E)^2$	Žák číslo	Počet bodů x_i	xi^2	$(xi-\Phi_E)^2$
1	9	81	1,21	27	4	16	15,23
2	9	81	1,21	28	4	16	15,23
3	8	64	0,01	29	4	16	15,23
4	6	36	3,62	30	4	16	15,23
5	6	36	3,62	31	6	36	3,62
6	6	36	3,62	32	6	36	3,62
7	5	25	8,42	33	6	36	3,62
8	5	25	8,42	34	8	64	0,01
9	4	16	15,23	35	9	81	1,21
10	4	16	15,23	36	9	81	1,21
11	2	4	34,83	37	11	121	9,6
12	1	1	47,64	38	12	144	16,79
13	1	1	47,64	39	14	196	37,19
14	13	169	25,99	40	15	225	50,38
15	11	121	9,6	41	14	196	37,19
16	10	100	4,4	42	14	196	37,19
17	8	64	0,01	43	14	196	37,19
18	8	64	0,01	44	14	196	37,19
19	7	49	0,81	45	12	144	16,79
20	7	49	0,81	46	12	144	16,79
21	6	36	3,62	47	11	121	9,6
22	6	36	3,62	48	11	121	9,6
23	5	25	8,42	49	11	121	9,6
24	5	25	8,42	50	10	100	4,4
25	5	25	8,42	51	7	49	0,81
26	4	16	15,23				

Tab. 13 Výsledky posttestu kontrolní skupiny, **průměrný počet bodů** v kontrolní skupině je $\boldsymbol{\Phi_K} = \mathbf{7{,}9}$ bodu.

Z dat uvedených v tabulkách číslo 12 a 13 byly vypočítány údaje potřebné k výpočtu testového kritéria.

Experimentální skupina	**Kontrolní skupina**
$n_E = 50$	$n_K = 51$
$\Sigma\, x_i = 494$	$\Sigma\, x_i = 403$
$\Sigma x_i^2 = 5442$	$\Sigma x_i^2 = 3869$
$\Sigma(xi\text{-}\Phi_E)^2 = 561{,}28$	$\Sigma(xi\text{-}\Phi_E)^2 = 684{,}51$
průměr $\Phi_E = 9{,}88$	průměr $\Phi_K = 7{,}9$
rozptyl $s_E = 3{,}38$	rozptyl $s_K = 3{,}7$

Tab. 14 Výsledky obou skupin z posttestu pro výpočet testového kritéria.

Odpověď na otázku, kterou z vyslovených hypotéz (H_0, H_A) můžeme na zvolené hladině významnosti přijmout, nám poskytne následující výpočet parametru $\boldsymbol{t_1}$.

$$s_1^2 = \frac{1}{n_E + n_K - 2}\left[\Sigma\left(x_{Ei} - \Phi_E\right)^2 + \Sigma\left(x_{Kj} - \Phi_K\right)^2\right] = \frac{1}{50+51-2}\cdot[561{,}28 + 684{,}51]$$

$$s_1^2 = 12{,}58$$

$$s_1 = \sqrt{s_1^2} = \sqrt{12{,}58}$$

$$s_1 = 3{,}55$$

$$t_1 = \frac{\Phi_E - \Phi_K}{s_1}\sqrt{\frac{n_E \cdot n_K}{n_E + n_K}} = \frac{9{,}88 - 7{,}9}{3{,}55}\cdot\sqrt{\frac{50\cdot 51}{50+51}}$$

$$t_1 = 2{,}8018$$

Po výpočtu parametru $\boldsymbol{t_1}$ jsme tento parametr porovnali s kritickou hodnotou Studentova t-testu pro zvolenou hladinu významnosti a počet stupňů volnosti *f*. Tuto hodnotu nalezneme v tabulkách (viz. Chráska 2007),:

$$f = n_E + n_K - 2 = 50 + 51 - 2$$

$$f = 99$$

vypočtené testové kritérium	$\boldsymbol{t_1}$ **= 2,8018**
počet stupňů volnosti	$\boldsymbol{f}$ **= 99**
tabulková (kritická) hodnota na hladině významnosti α = 0,05 pro 100 stupňů volnosti	$\boldsymbol{t_{0,05}}$**(100) = 1,984**
tabulková (kritická) hodnota na hladině významnosti α = 0,01 pro 100 stupňů volnosti	$\boldsymbol{t_{0,01}}$**(100) = 2,626**

Tab. 15 Vypočtené testové kritérium $\boldsymbol{t_1}$ pro posttest, jeho tabulkové hodnoty pro daný počet stupňů volnosti.

Protože vypočtená hodnota parametru $\boldsymbol{t_1}$ pro posttest **je větší než hodnota kritická** (t_1 = 2,8018 > $t_{0,05}$(100) = 1,984), **odmítáme nulovou hypotézu** H_0. Zjistili jsme tedy, že na hladině významnosti α = 0,05 je mezi průměrným počtem bodů v experimentální skupině a průměrným počtem bodů v kontrolní skupině statisticky významný rozdíl.

Abychom mohli s jistotou přijmout závěry získané pomocí Studentova t-testu, bylo ještě nutné ověřit požadavek na homogenitu rozptylu v obou srovnávaných skupinách. K tomuto účelu byl využit Fisherův-Snedecorův F-test. Jde o statistický test významnosti, pomocí kterého testujeme nulovou hypotézu o rovnosti rozptylů v obou skupinách oproti alternativní hypotéze.

H_0: Rozptyl výsledků v experimentální skupině E a rozptyl výsledků v kontrolní skupině K je stejně velký.

H_A: Rozptyly výsledků v obou skupinách jsou rozdílné.

Zvolená hladina významnosti: $\boldsymbol{\alpha}$ **= 0,05**

Při výpočtu testového kritéria $\boldsymbol{F_1}$ dosazujeme do čitatele zlomku vždy větší rozptyl, hodnota testového kritéria tedy vychází vždy větší než jedna.

Rozptyl výsledků v experimentální skupině:

$$s_E^2 = \frac{\sum (x_{Ei} - \phi_E)^2}{n_E - 1} = \frac{561{,}28}{49}$$

$$s_E^2 = 11{,}45$$

Rozptyl v kontrolní skupině:

$$s_K^2 = \frac{\sum (x_{Ki} - \phi_K)}{n_K - 1} = \frac{684{,}51}{50}$$

$$s_K^2 = 13{,}69$$

Větší rozptyl výsledků je v kontrolní skupině, testové kritérium tedy vypočítáme pomocí vzorce:

$$F_1 = \frac{s_K^2}{s_E^2} = \frac{13{,}69}{11{,}45}$$
$$F_1 = 1{,}195$$

Takto vypočítanou hodnotu $\boldsymbol{F_1}$ jsme porovnali s kritickou (tabulkovou) hodnotou tohoto kritéria pro zvolenou hladinu významnosti $\alpha = 0{,}05$ a počet stupňů volnosti, který určujeme zvlášť pro každou skupinu. Tuto hodnotu poté nalezneme v tabulkách (viz. Chráska 2007):

Počet stupňů volnosti v experimentální skupině:

$$f_E = n_E - 1 = 50 - 1$$
$$f_E = 49$$

Počet stupňů volnosti v kontrolní skupině:

$$f_K = n_K - 1 = 51 - 1$$
$$f_K = 50$$

vypočtené testové kritérium	$\boldsymbol{F_1 = 1{,}195}$
počet stupňů volnosti	$\boldsymbol{f_E = 49}$ **a** $\boldsymbol{f_K = 50}$
tabulková (kritická) hodnota na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$ pro 40 a 40 stupňů volnosti	$\boldsymbol{F_{0,05}(40,40) = 1{,}69}$
tabulková (kritická) hodnota na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$ pro 60 a 60 stupňů volnosti	$\boldsymbol{F_{0,05}(60,60) = 1{,}53}$

Tab. 16 Vypočítané testové kritérium $\boldsymbol{F_1}$ pro posttest, jeho tabulkové hodnoty pro daný počet stupňů volnosti.

Protože vypočítaná hodnota parametru $\boldsymbol{F_1}$ pro posttest **je menší než hodnota kritická** ($F_1 = 1{,}195 < F_{0,05}(60,60) = 1{,}53$), **přijímáme nulovou hypotézu** H_0. Zjistili jsme tedy, že na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$ nejsou mezi rozptyly v obou skupinách statisticky významné rozdíly. Z tohoto hlediska bylo použití Studentova t-testu oprávněné.

Z výše provedených úvah a výsledků výzkumu vyplývá, že na zvolené hladině významnosti můžeme **přijmout hypotézu H1**.

3.7.2 Ověření platnosti hypotézy H2

K verifikaci H2 byla použita data získaná pomocí retestu. Následující tabulka číslo 17 udává výsledky studentů experimentální a kontrolní skupiny z retestu.

Počet bodů x_i	**Experimentální skupina E**			**Kontrolní skupina K**		
	Četnost n_i	**Kumulativní četnost**	**Percentilové pořadí**	**Četnost n_i**	**Kumulativní četnost**	**Percentilové pořadí**
0	0	0	0,0	0	0	0,0
1	1	1	1,0	1	1	1,0
2	2	3	4,2	3	4	4,8
3	1	4	7,3	1	5	8,7
4	2	6	10,4	4	9	13,5
5	4	10	16,7	3	12	20,2
6	2	12	22,9	6	18	28,8
7	7	19	32,3	6	24	40,4
8	6	25	45,8	3	27	49,0
9	0	25	52,1	3	30	54,8
10	1	26	53,1	4	34	61,5
11	5	31	59,4	3	37	68,3
12	3	34	67,7	5	42	76,0
13	2	36	72,9	2	44	82,7
14	3	39	78,1	4	48	88,5
15	9	48	90,6	4	52	96,2

Tab. 17 Výsledky retestu experimentální a kontrolní skupiny.

K ověření platnosti věcné hypotézy H2 musíme formulovat **nulovou a alternativní hypotézu** (H_0, H_A):

H_{02}: *Mezi průměrným počtem bodů získaných z retestu dosaženým v experimentální skupině E a průměrným počtem bodů dosaženým v kontrolní skupině K není statisticky významný rozdíl.*

H_{A2}: *Mezi dosaženými průměry v obou skupinách je statisticky významný rozdíl.*

K ověření platnosti statistických hypotéz H_{02} a H_{A2} jsme použili **Studentův t-test**.
Zvolená hladina významnosti: $\boldsymbol{\alpha}$ **= 0,05**

V tabulkách číslo 18 a 19 jsou uvedeny informace, které sloužily pro výpočet testového kritéria $\boldsymbol{t_2}$.

Experimentální skupina

Žák číslo	Počet bodů x_i	x_i^2	$(xi-\Phi_E)^2$	Žák číslo	Počet bodů x_i	x_i^2	$(xi-\Phi_E)^2$
1	2	4	54,08	25	11	121	2,71
2	4	16	28,67	26	12	144	7,00
3	4	16	28,67	27	13	169	13,29
4	5	25	18,96	28	13	169	13,29
5	5	25	18,96	29	14	196	21,58
6	7	49	5,54	30	14	196	21,58
7	7	49	5,54	31	14	196	21,58
8	7	49	5,54	32	15	225	31,88
9	7	49	5,54	33	15	225	31,88
10	10	100	0,42	34	15	225	31,88
11	11	121	2,71	35	15	225	31,88
12	12	144	7,00	36	15	225	31,88
13	1	1	69,79	37	15	225	31,88
14	2	4	54,08	38	15	225	31,88
15	3	9	40,38	39	8	64	1,83
16	5	25	18,96	40	7	49	5,54
17	5	25	18,96	41	15	225	31,88
18	6	36	11,25	42	8	64	1,83
19	6	36	11,25	43	12	144	7,00
20	7	49	5,54	44	8	64	1,83
21	8	64	1,83	45	11	121	2,71
22	8	64	1,83	46	7	49	5,54
23	11	121	2,71	47	15	225	31,88
24	11	121	2,71	48	8	64	1,83

Tab. 18 Výsledky retestu experimentální skupiny, **průměrný počet bodů** v experimentální skupině je $\boldsymbol{\Phi_E}$ **= 9,35** bodu.

Kontrolní skupina

Žák číslo	Počet bodů x_i	xi^2	$(xi-\Phi_E)^2$	Žák číslo	Počet bodů x_i	xi^2	$(xi-\Phi_E)^2$
1	2	4	42,75	27	8	64	0,29
2	3	9	30,67	28	11	121	6,06
3	4	16	20,60	29	9	81	0,21
4	4	16	20,60	30	14	196	29,83
5	5	25	12,52	31	12	144	11,98
6	6	36	6,44	32	12	144	11,98
7	6	36	6,44	33	15	225	41,75
8	7	49	2,37	34	12	144	11,98
9	7	49	2,37	35	13	169	19,91
10	7	49	2,37	36	12	144	11,98
11	8	64	0,29	37	15	225	41,75
12	10	100	2,14	38	14	196	29,83
13	11	121	6,06	39	14	196	29,83
14	12	144	11,98	40	14	196	29,83
15	13	169	19,91	41	15	225	41,75
16	1	1	56,83	42	9	81	0,21
17	2	4	42,75	43	10	100	2,14
18	2	4	42,75	44	11	121	6,06
19	4	16	20,60	45	10	100	2,14
20	4	16	20,60	46	4	16	20,60
21	5	25	12,52	47	7	49	2,37
22	6	36	6,44	48	15	225	41,75
23	6	36	6,44	49	9	81	0,21
24	6	36	6,44	50	10	100	2,14
25	6	36	6,44	51	8	64	0,29
26	7	49	2,37	52	7	49	2,37

Tab. 19 Výsledky retestu kontrolní skupiny, **průměrný počet bodů** v kontrolní skupině je $\boldsymbol{\Phi_K}$ **= 8,54** bodu.

Z dat uvedených v tabulkách číslo 18 a 19 byly vypočítány údaje potřebné k výpočtu testového kritéria.

Experimentální skupina	**Kontrolní skupina**
$n_E = 48$	$n_K = 52$
$\Sigma\, x_i = 449$	$\Sigma\, x_i = 444$
$\Sigma x_i^2 = 5037$	$\Sigma x_i^2 = 4602$
$\Sigma(\text{xi-}\Phi_\text{E})^2 = 836{,}98$	$\Sigma(\text{xi-}\Phi_\text{E})^2 = 810{,}92$
průměr $\Phi_E = 9{,}35$	průměr $\Phi_K = 8{,}54$
rozptyl $s_E = 4{,}22$	rozptyl $s_K = 3{,}99$

Tab. 20 Výsledky obou skupin z retestu pro výpočet testového kritéria.

Odpověď na otázku, kterou z vyslovených hypotéz (H_0, H_A) můžeme na zvolené hladině významnosti přijmout, nám poskytne následující výpočet parametru $\boldsymbol{t_2}$.

$$s_2^2 = \frac{1}{n_E + n_K - 2}\left[\Sigma\left(x_{Ei} - \Phi_E\right)^2 + \Sigma\left(x_{Kj} - \Phi_K\right)^2\right] = \frac{1}{48 + 52 - 2}\cdot[836{,}98 + 810{,}92]$$

$$s_2^2 = 16{,}82$$

$$s_2 = \sqrt{s_2^2} = \sqrt{16{,}82}$$

$$s_2 = 4{,}1$$

$$t_2 = \frac{\Phi_E - \Phi_K}{s_2}\sqrt{\frac{n_E \cdot n_K}{n_E + n_K}} = \frac{9{,}35 - 8{,}54}{4{,}1}\cdot\sqrt{\frac{48\cdot 50}{48 + 50}}$$

$$t_2 = 0{,}987$$

Po výpočtu parametru $\boldsymbol{t_2}$ jsme tento parametr porovnali s kritickou hodnotou Studentova t-testu pro zvolenou hladinu významnosti a počet stupňů volnosti *f*. Tuto hodnotu nalezneme v tabulkách (viz. Chráska 2007):

$$f = n_E + n_K - 2 = 48 + 50 - 2$$

$$f = 100$$

vypočtené testové kritérium	$\mathbf{t_2 = 0,987}$
počet stupňů volnosti	$\mathbf{f = 100}$
tabulková (kritická) hodnota na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ pro 100 stupňů volnosti	$\mathbf{t_{0,05}(100) = 1,984}$
tabulková (kritická) hodnota na hladině významnosti $\alpha = 0,01$ pro 100 stupňů volnosti	$\mathbf{t_{0,01}(100) = 2,626}$

Tab. 21 Vypočítané testové kritérium $\boldsymbol{t_2}$ pro retest, jeho tabulkové hodnoty pro daný počet stupňů volnosti.

Protože vypočítaná hodnota parametru $\boldsymbol{t_2}$ pro retest **je menší než hodnota kritická** ($t_2 = 0,987 < t_{0,05}(100) = 1,984$), **přijímáme nulovou hypotézu** H_0. Zjistili jsme tedy, že na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ **není** mezi průměrným počtem bodů v experimentální skupině

a průměrným počtem bodů v kontrolní skupině statisticky významný rozdíl.

Abychom mohli s jistotou přijmout závěry získané pomocí Studentova t-testu pro hypotézu H2, bylo ještě nutné ověřit požadavek na homogenitu rozptylu v obou srovnávaných skupinách. K tomuto účelu byl obdobně jako v předchozím případě využit Fisherův-Snedecorův F-test.

H_0: Rozptyl výsledků v experimentální skupině E a rozptyl výsledků v kontrolní skupině K je stejně velký.

H_A: Rozptyly výsledků v obou skupinách jsou rozdílné.

Zvolená hladina významnosti: $\boldsymbol{\alpha} \mathbf{= 0,05}$

Rozptyl výsledků v experimentální skupině:

$$s_E^2 = \frac{\sum (x_{Ei} - \phi_E)^2}{n_E - 1} = \frac{836,98}{47}$$

$$s_E^2 = 17,81$$

Rozptyl v kontrolní skupině:

$$s_K^2 = \frac{\sum (x_{Ki} - \phi_K)}{n_K - 1} = \frac{810,92}{51}$$

$$s_K^2 = 15,9$$

Větší rozptyl výsledků je v kontrolní skupině, testové kritérium tedy vypočítáme pomocí vzorce:

$$F_2 = \frac{s_K^2}{s_E^2} = \frac{17,81}{15,9}$$

$$F_2 = 1,12$$

Takto vypočítanou hodnotu F_2 jsme porovnali s kritickou (tabulkovou) hodnotou tohoto kritéria pro zvolenou hladinu významnosti $\alpha = 0,05$ a počet stupňů volnosti, který určujeme zvlášť pro každou skupinu. Tuto hodnotu poté nalezneme v tabulkách (viz. Chráska 2007):

Počet stupňů volnosti v experimentální skupině:

$$f_E = n_E - 1 = 48 - 1$$
$$f_E = 47$$

Počet stupňů volnosti v kontrolní skupině:

$$f_K = n_K - 1 = 50 - 1$$
$$f_K = 49$$

vypočtené testové kritérium	$\boldsymbol{F_2 = 1,12}$
počet stupňů volnosti	$\boldsymbol{f_E = 47}$ **a** $\boldsymbol{f_K = 49}$
tabulková (kritická) hodnota na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ pro 40 a 40 stupňů volnosti	$\boldsymbol{F_{0,05}(40,40) = 1,69}$
tabulková (kritická) hodnota na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ pro 60 a 60 stupňů volnosti	$\boldsymbol{F_{0,05}(60,60) = 1,53}$

Tab. 22 Vypočítané testové kritérium F_2 pro retest, jeho tabulkové hodnoty pro daný počet stupňů volnosti.

Protože vypočítaná hodnota parametru F_2 pro retest **je menší než hodnota kritická** ($F_2 = 1,12 < F_{0,05}(60,60) = 1,53$), **přijímáme nulovou hypotézu** H_0. Zjistili jsme tedy, že na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ nejsou mezi rozptyly v obou skupinách statisticky významné rozdíly. Z tohoto hlediska bylo použití Studentova t-testu oprávněné.

Z výše provedených úvah a výsledků výzkumu vyplývá, že na zvolené hladině významnosti musíme **odmítnout hypotézu H2**.

4 INDUKTIVNÍ A DEDUKTIVNÍ PŘÍSTUPY V UČEBNICÍCH MATEMATIKY PRO STŘEDNÍ ŠKOLY

4.1 UČEBNICE A JEJÍ FUNKCE

Na učebnici můžeme nahlížet hned z několika pohledů - jako na prvek *kurikulárního projektu*, součást *souboru didaktických prostředků* nebo jako součást *školních didaktických textů* (Průcha 1998). Jde o didakticky ztvárněný text, který svou formou umožňuje učení a svým obsahem a rozsahem pojímá určitou část učiva vymezenou daným kurikulem. Každý kurikulární dokument tedy určitým způsobem vymezuje konstruování učebnice a každá učebnice musí svým obsahem korespondovat s tímto dokumentem. Učebnice je nedílnou součástí edukačního procesu a má na tento proces přímý vliv jakožto aparát řídící nejen vlastní učení žáků, ale také do jisté míry vyučování učitelů. V tomto smyslu plní určité funkce, které využívají její uživatelé, ať už žáci, či učitelé. Při tomto pohledu můžeme rozlišit dvě základní funkce učebnice:

Funkce učebnice pro žáky: učebnice jsou pramenem, z něhož se žáci učí, tedy osvojují si poznatky, dovednosti, hodnoty atp. (Průcha 1998)

Funkce učebnice pro učitele: učebnice jsou pramenem, z jehož využitím učitelé plánují obsah učiva i přímou prezentaci tohoto obsahu při vlastní výuce. (Průcha 1998)

Obě tyto funkce poukazují na to, jak a proč jednotlivé subjekty učebnice využívají, a tedy v jaké roli vstupuje učebnice do vlastního edukačního procesu. Je zřejmé, že působení učebnice na výuku a její výsledky rozhodně nelze podceňovat už jen proto, že mnoho učitelů využívá jejího obsahu k vypracování tématických plánů, při přípravě hodiny si vybírá výukové metody popsané v učebnici a v neposlední řadě z ní vybírá cvičení a domácí práce pro žáky. Naproti tomu studenti by si při používání učebnic měli osvojit vědomosti, dovednosti a postoje předepsané kurikulárním dokumentem v podobě klíčových kompetencí. Z pohledu učebnice matematiky a ve spojitosti s induktivními a deduktivními přístupy jde zejména o rozvoj následujících dovedností, prostřednictvím kterých získávají žáci i předepsané vědomosti:

pracovat s matematickými pojmy, aplikovat matematické poznatky v praxi nebo jiných předmětech, objevovat a pracovat tvořivě, logicky uvažovat, dokazovat, řešit problémy.

Z těchto důvodů jsme výzkum zaměřili na učebnice matematiky používané na středních školách z hlediska zastoupení induktivních resp. deduktivních přístupů v těchto učebnicích a zjištění skutečného stavu zastoupení úloh uplatňující tyto přístupy. Než přejdeme k popisu vlastního výzkumu, uvedeme několik základních pojmů teorie hodnocení učebnic, ze kterých jsme při tomto výzkumu vycházeli a které se bezprostředně týkají analýzy učebnic.

4.1.1 Funkčně strukturální analýza učebnic

Obecný model struktury učebnice:

Učebnice - Textová složka (strukturovaná do specifických komponentů)
- Mimotextová složka (strukturovaná do specifických komponentů)

(Průcha 1998)

4.1.2 Strukturní komponenty učebnice

Každá učebnice je strukturována tak, aby v co možná největší míře plnila svůj primární úkol edukačního konstruktu, tedy prostředku sloužícímu k edukaci. Proto je učebnice záměrně členěný systém různých částí (komponent), které jsou navzájem provázány, a jako celek plní různé funkce učebnice.

Strukturním komponentem školní učebnice rozumíme určitý blok prvků, který je v těsném vzájemném vztahu s jinými komponenty učebnice (s nimiž v souhrnu vytváří celistvý systém, má přesně vymezenou formu a své funkce realizuje pomocí svých vlastních prostředků) (Průcha 1998). V obecném pojetí je učebnice modelována tak, že její obsah dělíme na dvě základní části, textovou a mimotextovou složku, tyto jsou dále rozděleny do specifických komponentů. Tento přístup k analýze učebnic nazýváme funkčně strukturální analýza učebnic. V 70. letech vypracovali J. Doleček, M. Řešátko a Z. Skoupil klasifikaci strukturních komponentů textové složky učebnice, které vymezili na základě jejich funkcí. Rozlišili sedm textových komponentů:

textový komponent	funkce komponentu
motivační text	v učebnici slouží k uvedení do učiva, k vysvětlení, proč se určité učivo probírá, k upoutání pozornosti žáka, k navázání na dříve probrané učivo apod.
výkladový text	je určen ke sdělování poznatků, faktů, teorií, norem, hodnot apod.
regulační text	slouží k aktivizaci žáka při čtení textu, uděluje pokyny k provádění učení apod.
ukázky a příklad	autor funkci nedefinuje
cvičení	vedou žáka k záměrnému opakování určité činnosti a tím k získávání určitých dovedností
otázky	mají aktivizující funkci obdobně jako v předchozím komponentu
prostředky zpětné vazby	zastávají funkci získávání informací o postupu učení, např. výsledky výpočtů, klíče ke cvičením apod.

Tab. 23 Klasifikace strukturních komponentů textové složky učebnice dle J. Doleček, M. Řešátko, Z. Skoupil (1975).

Existují dokonalejší modely struktury učebnic, které vytvořil např. M. Bednařík pro učebnice fyziky, A. Whala pro učebnice zeměpisu aj. Tyto modely využívají jemnější rozdělení a rozlišují u jednotlivých strukturních komponentů ještě strukturní prvky, které daný komponent tvoří. (Průcha 1998). Pro popsání a pochopení následujícího výzkumu ovšem nejsou podstatné a nebudeme je zde uvádět.

4.1.3 Didaktická vybavenost učebnic

Učebnice je útvar složený ze *strukturních komponentů* různé povahy. Tyto komponenty chápeme jako nositele dílčích funkcí, které zajišťují hlavní cíl učebnice, tedy být edukačním médiem. Na větší nebo menší didaktickou vybavenost učebnice poukazuje to, jak je daná učebnice pro svůj účel zkonstruována. Tedy, obsahuje-li určitá učebnice výklad učiva pouze pomocí textu, bez obrazových komponentů, můžeme usoudit, že žáka příliš nezaujme oproti učebnici s obrazovými komponenty.

Měření didaktické vybavenosti učebnice provádíme pomocí analytického nástroje, kterým je míra didaktické vybavenosti učebnice. Tato míra je založena na vyhodnocení rozsahu využití komponentů v dané učebnici. Pro tento účel je rozlišených *36 komponentů*, které zachycují strukturu učebnice. Vyhodnocování didaktické vybavenosti vyjadřujeme pomocí kvantitativních koeficientů. Každou učebnici je možné popsat na základě toho, jaké komponenty obsahuje a jaké komponenty neobsahuje. Komponenty dělíme do 3 skupin (aparátů) podle příslušné didaktické funkce komponentů a do 2 podskupin (verbálních a obrazových komponentů) podle způsobu vyjádření daného komponentu v určité učebnici. Seznam strukturních komponentů učebnice uvádí tabulka číslo 24.

APARÁT PREZENTACE UČIVA	
verbální komponenty	1. výkladový text prostý 2. výkladový text zpřehleděný (schémata, tabulky) 3. shrnutí učiva k celému ročníku 4. shrnutí učiva k tématům (kapitolám, lekcím) 5. shrnutí učiva k předchozímu ročníku 6. doplňující texty (dokumentační materiál, citace z pramenů, statistické tabulky) 7. poznámky a vysvětlivky 8. podtexty k vyobrazením 9. slovníčky pojmů
obrazové komponenty	1. umělecká ilustrace 2. nauková ilustrace (schématické kresby, modely) 3. fotografie 4. mapy, kartogramy, plánky, grafy, diagramy 5. obrazová prezentace barevná (tzn. použití alespoň jedné barvy odlišné od barvy textu)
APARÁT ŘÍDÍCÍ UČENÍ	
verbální komponenty	1. předmluva (úvod do předmětu, nebo ročníku) 2. návod k práci s učebnicí (pro žáky nebo učitele) 3. stimulace celková (podněty k zamyšlení, otázky před celkovým učivem ročníku) 4. stimulace detailní (podněty k zamyšlení, otázky před nebo v průběhu lekcí, témat)

	5. odlišení úrovní učiva (základní – rozšiřující, povinné – nepovinné) 6. otázky a úkoly za tématy 7. otázky a úkoly k celému ročníku (opakování) 8. otázky a úkoly k předchozímu ročníku (opakování) 9. instrukce k úkolům komplexnější povahy (návody k pokusům, laboratorním pracím, pozorováním apod.) 10. náměty pro mimoškolní činnosti s využitím učiva (aplikace) 11. explicitní vyjádření cílů učení pro žáky 12. prostředky nebo instrukce k sebehodnocení pro žáky (testy a jiné způsoby hodnocení výsledků učení) 13. výsledky úkolů a cvičení (správná řešení, správné odpovědi) 14. odkazy na jiné zdroje informací (bibliografie, doporučená literatura)
obrazové komponenty	1. grafické symboly vyznačující určité části textu (poučky, pravidla, úkoly, cvičení) 2. užití zvláštní barvy pro určité části verbálního textu 3. užití zvláštního písma (tučné písmo, kurzíva) pro určité části verbálního textu 4. využití přední nebo zadní obálky pro schémata, tabulky apod.
APARÁT ORIENTAČNÍ	
verbální komponenty	1. obsah učebnice 2. členění učebnice na tematické bloky, kapitoly, lekce 3. marginálie, výhmaty, živá záhlaví apod. 4. rejstřík (věcný, jmenný, smíšený)

Tab. 24 Seznam strukturních komponentů učebnice. (Průcha 1998)

Tyto strukturní komponenty slouží k výpočtu didaktické vybavenosti učebnic. Výpočet vybavenosti konkrétní učebnice provádíme následujícím způsobem:

A) V dané učebnici zjišťujeme výskyt jednotlivých strukturních komponentů, ten zaznamenáváme do archů, ve kterých uvádíme i základní údaje o učebnici. Přitom pouze zaznamenáváme, jestli je nebo není určitý komponent v učebnici zastoupen a nejde nám o četnost jeho využití.

B) Na základě zjištěných hodnot vypočítáme následující koeficienty:
dílčí koeficienty:
E I - koeficient využití aparátu prezentace učiva,
E II - koeficient využití aparátu řídící učení,
E III - koeficient využití aparátu orientačního,
Ev - koeficient využití verbálních komponentů,
Eo - koeficient využití obrazových komponentů,

E – celkový koeficient didaktické vybavenosti.

Uvedené koeficienty vypočítáme jako procentuální podíl počtu použitých komponentů v učebnici a počtu možných komponentů. Například pokud daná učebnice využívá pro aparát řídící učení 12 komponentů z 18 možných, je koeficient využití aparátu řízení učení E II:

$$EII = \frac{12}{18} \cdot 100$$
$$EII = 66{,}67\%$$

Koeficient *celkové didaktické vybavenosti* učebnice E vypočítáme obdobně, jako procentuální podíl využitých komponentů a počet všech možných komponentů (tedy 36).
Všechny uvedené komponenty mohou teoreticky nabývat hodnot v intervalu od 0 do 100 % včetně. Pro vyhodnocování zřejmě platí, že čím větší hodnoty určitý komponent v dané učebnici dosáhne, tím větší je její didaktická vybavenost.

C) Závěrečným krokem analýzy je vhodná interpretace výsledků výpočtů, pomocí kterých snadno určíme, kterých komponentů, ze všech možných, námi vybraná učebnice využívá respektive nevyužívá. Díky těmto výsledkům je možné s učebnicí dále pracovat (korigovat její obsah apod.).

Tento výčet popisující základní rysy evaluace učebnic rozhodně není myšlen jako návod na jejich komplexní evaluaci, slouží pouze k základnímu zorientování v problematice, a to v těch jejích částech, ze kterých vychází následný rozbor učebnic. Pro komplexnější pochopení metod evaluace učebnic odkazuji na seznam použité literatury.

4.2 KLASIFIKACE (PŘEDMĚT) VÝZKUMU

Při vlastním výzkumu jsme se zaměřili na ***obsahovou stránku*** učebnic matematiky pro střední školy, respektive na jejich ***výkladovou*** a ***procvičovací*** textovou složku. Hlavní oblastí našeho zájmu bylo zmapovat zastoupení induktivních a deduktivních způsobů výkladu v učebnicích matematiky a zjištění míry obsahu jednotlivých cvičení, která při řešení vyžadují od studenta využití heuristických přístupů. Vzhledem k roli učebnic matematiky při rozvoji klíčových kompetencí resp. námi z nich vybraných dovedností, které si má žák při edukačním procesu také rozvíjet, je třeba vědět, mohou-li učebnice tento úkol plnit.

V současné době je při výuce matematiky na středních školách nejvíce používána ucelená řada učebnic *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť 1. – 6. část* nakladatelství SPN a na gymnáziích je to *Matematika pro gymnázia* (ucelená řada) nakladatelství Prometheus. Z tohoto důvodu byly tyto dvě řady učebnic matematiky předmětem našeho výzkumu. Ten měl objektivně odpovědět na následující otázky:

- Používají autoři námi vybraných učebnic matematiky při výkladu induktivní a deduktivní přístupy? Pokud ano, tak v jaké míře?
- Zařazují autoři námi vybraných učebnic matematiky úlohy, při jejichž řešení musí student využívat induktivní a deduktivní přístupy? Pokud ano, tak v jaké míře?
- Pokud jsou využívány induktivní a deduktivní přístupy ve výkladu a při procvičování, tak jaké tématické celky jsou takto využívány?

4.2.1 Výzkum učebnic

Cílem výzkumu bylo ***zmapování četnosti výskytu*** induktivních a deduktivních přístupů použitých při výkladu a zjištění ***zastoupení úloh*** uplatňujících induktivní resp. deduktivní přístupy ve výše zmíněných učebnicích matematiky. Výzkum si nekladl za cíl kompletní evaluaci těchto učebnic, ale pouze rozpoznání použitých výkladových a procvičovacích prostředků co do četnosti a druhu metod. Vlastní rozbor učebnic byl zaměřen na dvě části učebnic: výkladovou část a procvičovací část. Výzkum obou těchto částí provedeme odděleně z důvodu přehlednosti výsledků.

4.2.2 Výkladová část učebnic

U této části učebnic byl zkoumán výkladový text včetně toho, byla-li při výkladu použita motivace, či nikoli. Při počátečních analýzách výkladového textu všech zkoumaných učebnic byla vytvořena klasifikace používaných výkladových prostředků, která poté sloužila k zmapování jejich výskytu v jednotlivých učebnicích (*přímý výklad, nepřímý výklad, výklad pomocí úkolů a heuristické strategie*). Každá ze skupin byla dále rozdělena do dvou podskupin (*s motivací a bez motivace*). Charakteristiky jednotlivých skupin uvádí tabulka číslo 25.

Výkladový prostředek	Charakteristika
přímý výklad	Autor vykládá pojmy přímo, zavádí nové pojmy, vyslovuje definice, následuje procvičování.
nepřímý výklad	Autor k výkladu používá řešení příkladu, při jehož řešení narazí na nový problém, který dále definuje (např. $x^2 = -1$ apod.), autor řeší příklady sám, nedává prostor čtenáři, odvozuje vzorce apod.
výklad pomocí úkolů	Autor čtenáři zadává úkol (problém: vyslovte definici funkce, nakreslete graf dané funkce apod.), předpokládá přitom aktivní spolupráci čtenáře, který má dané úkoly splnit a až poté pokračovat ve čtení textu. V dalším textu může být uvedeno správné řešení, soubor všech úkolů poté vede k novému poznání, autor sám vše shrne.
heuristická strategie	Autor zadá čtenáři určitý problém a předpokládá aktivní spolupráci se čtenářem, který je nucen hledat řešení, je veden k vyslovení hypotéz a jejich následném ověření, autor může čtenáře vést ke správnému řešení.

Tab. 25 Seznam strukturních komponentů učebnice.

Z charakteristik výkladových prostředků vyplývá, že první dva výkladové prostředky (přímý a nepřímý výklad) nelze pokládat za induktivní nebo deduktivní přístupy. Autor čtenáři neposkytuje cíleně žádný prostor pro vlastní úvahy nebo vlastní způsob řešení, pouze sděluje určité informace. Autorovým cílem je předložit čtenáři ucelený zdroj vědomostí, které čtenář více či méně pasivně přijímá. Následující dva výkladové prostředky (výklad pomocí úkolů, heuristická strategie) rozkryjme podrobněji.

Při metodě ***„Výklad pomocí úkolů“*** autor přímo předpokládá čtenářovu účast. Nutí čtenáře aktivně se podílet na řešení problémů, a tím si osvojit potřebné vědomosti a dovednosti. Čtenář musí nacházet řešení na základě svých předešlých zkušeností a přímo se podílet na objevování dílčích řešení zadaných problémů. Konečné shrnutí, popřípadě ověření všech nově získaných poznatků je opět v rukou autora. Tento výkladový prostředek lze označit jako *induktivní přístup*.

Poslední metoda ***„Heuristická strategie“*** jde v konečném důsledku ještě dál. Čtenáři je předložen problém, který je nucen vyřešit. Čtenář sám musí vymyslet strategii řešení úlohy, je nucen vyslovit hypotézy a poté musí sám ověřit jejich platnost. Autor v tomto případě poskytuje čtenáři jakési vedení, které mu pomáhá vyřešit daný úkol. Tato metoda výkladu je pro čtenáře velmi náročná, ale poskytuje mu obrovský prostor pro vlastní sebezdokonalování a rozvíjí komplexní pochopení dané problematiky. Navíc všechna správná řešení, která student vymyslí sám, mají obrovský motivační účinek. Heuristická strategie se zpravidla používá pro úlohy, které mají za úkol propojit dílčí části učiva a pomoci čtenáři, aby si sám vytvořil ucelenou představu o probíraných tématech (např. ODVÁRKO, O., CALDA, E., KOLOUCHOVÁ, J., ŘEPOVÁ, J.: *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť 6. část.* SPN Praha 1987, kapitola: Hypotézy a jejich ověřování, str. 254). Tento výkladový prostředek lze označit jako *induktivní a deduktivní přístup*.

Dále bylo u každého výkladového prostředku zaznamenáváno, je-li čtenář autorem učebnice nějak motivován. Ve všech uvedených učebnicích autoři používali nejrůznější formy motivování, od zmínění praktického využití získaných poznatků v matematice či jiných předmětech a reálných situacích, po mapování historického vývoje daných pojmů. Mezi různými formami motivace nebyly činěny žádné rozdíly. Vždy bylo pouze zapsáno, zda autor libovolnou formu motivace u daného výkladového prostředku použil, či nikoli.

Vlastní výzkum spočíval ve zjištění procentuálního zastoupení jednotlivých metod v daných učebnicích. Jako základ byl použit počet kapitol knihy nebo jejích částí, a to z toho důvodu, že ne v každé kapitole byly používány stejné výkladové prostředky. V takovém případě se mohla kapitola rozdělit z pohledu použitých výkladových prostředků i na několik oddělených částí. Jako procentová část byl použit počet využití dílčích výkladových prostředků v celé učebnici. Pro ilustraci výpočtu uvádíme následující příklad:

Učebnice **Matematika 3** byla rozdělena na **33 výukových částí** (resp. kapitol), u kterých byly zjištěny tyto výukové prostředky:

- přímý výklad bez motivace: 22
- nepřímý výklad s motivací: 11

$$pv = \frac{22}{33} \cdot 100 = 67\%$$

$$nv = \frac{11}{33} \cdot 100 = 33\%$$

Tedy přímý výklad bez motivace (*pv*) byl použit v 67 % výkladových prostředků a nepřímý výklad s motivací (*nv*) byl použit ve 33 % výkladových prostředků.

Následující tabulky uvádějí konkrétní procentuelní zastoupení výkladových prostředků použitých v jednotlivých učebnicích.

Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť

Název učebnice:	Matematika 1
Autor:	E. Calda, O. Petránek, dr. J. Řepová
Nakladatelství - rok vydání:	SPN Praha - 1986

VÝKLADOVÉ PROSTŘEDKY			
Přímý výklad [%]		**Nepřímý výklad [%]**	
bez motivace	**s motivací**	**bez motivace**	**s motivací**
97,5	2,5	0	0
Výklad pomocí úkolů [%]		**Heuristická strategie [%]**	
bez motivace	**s motivací**	**bez motivace**	**s motivací**
0	0	0	0

Název učebnice:	Matematika 2
Autor:	O. Odvárko, J. Řepová, L. Skříček
Nakladatelství - rok vydání:	SPN Praha - 1988

VÝKLADOVÉ PROSTŘEDKY			
Přímý výklad [%]		**Nepřímý výklad [%]**	
bez motivace	**s motivací**	**bez motivace**	**s motivací**
20	0	0	80
Výklad pomocí úkolů [%]		**Heuristická strategie [%]**	
bez motivace	**s motivací**	**bez motivace**	**s motivací**
0	0	0	0

Název učebnice:	Matematika 3
Autor:	O. Odvárko, J. Řepová
Nakladatelství - rok vydání:	SPN Praha - 1985

VÝKLADOVÉ PROSTŘEDKY			
Přímý výklad [%]		**Nepřímý výklad [%]**	
bez motivace	**s motivací**	**bez motivace**	**s motivací**
67	0	0	33
Výklad pomocí úkolů [%]		**Heuristická strategie [%]**	
bez motivace	**s motivací**	**bez motivace**	**s motivací**
0	0	0	0

Název učebnice:	Matematika 4
Autor:	O. Petránek, E. Calda, P. Hebák
Nakladatelství - rok vydání:	SPN Praha - 1986

VÝKLADOVÉ PROSTŘEDKY			
Přímý výklad [%]		**Nepřímý výklad [%]**	
bez motivace	**s motivací**	**bez motivace**	**s motivací**
29	26	0	45
Výklad pomocí úkolů [%]		**Heuristická strategie [%]**	
bez motivace	**s motivací**	**bez motivace**	**s motivací**
0	0	0	0

Název učebnice: Matematika 5
Autor: J. Kolouchová, J. Řepová, V. Šobr
Nakladatelství - rok vydání: SPN Praha - 1987

VÝKLADOVÉ PROSTŘEDKY			
Přímý výklad [%]		**Nepřímý výklad [%]**	
bez motivace	**s motivací**	**bez motivace**	**s motivací**
32	49	0	19
Výklad pomocí úkolů [%]		**Heuristická strategie [%]**	
bez motivace	**s motivací**	**bez motivace**	**s motivací**
0	0	0	0

Název učebnice: Matematika 6
Autor: O. Odvárko, E. Calda, J. Kolouchová, J. Řepová
Nakladatelství - rok vydání: SPN Praha - 1987

VÝKLADOVÉ PROSTŘEDKY			
Přímý výklad [%]		**Nepřímý výklad [%]**	
bez motivace	**s motivací**	**bez motivace**	**s motivací**
53	21	0	21
Výklad pomocí úkolů [%]		**Heuristická strategie [%]**	
bez motivace	**s motivací**	**bez motivace**	**s motivací**
0	0	0	5

Matematika pro gymnázia

Název učebnice: Posloupnosti a řady
Autor: O. Odvárko
Nakladatelství - rok vydání: Prometheus - 1999

VÝKLADOVÉ PROSTŘEDKY			
Přímý výklad [%]		**Nepřímý výklad [%]**	
bez motivace	**s motivací**	**bez motivace**	**s motivací**
0	7	0	14
Výklad pomocí úkolů [%]		**Heuristická strategie [%]**	
bez motivace	**s motivací**	**bez motivace**	**s motivací**
29	50	0	0

Název učebnice: Funkce
Autor: O. Odvárko
Nakladatelství - rok vydání: Prometheus - 1996

VÝKLADOVÉ PROSTŘEDKY			
Přímý výklad [%]		**Nepřímý výklad [%]**	
bez motivace	**s motivací**	**bez motivace**	**s motivací**
0	25	0	30
Výklad pomocí úkolů [%]		**Heuristická strategie [%]**	
bez motivace	**s motivací**	**bez motivace**	**s motivací**
0	45	0	0

Název učebnice: Analytická geometrie
Autor: Milan Kočandrle, Leo Boček
Nakladatelství - rok vydání: Prometheus - 1996

VÝKLADOVÉ PROSTŘEDKY			
Přímý výklad [%]		**Nepřímý výklad [%]**	
bez motivace	**s motivací**	**bez motivace**	**s motivací**
63	37	0	0
Výklad pomocí úkolů [%]		**Heuristická strategie [%]**	
bez motivace	**s motivací**	**bez motivace**	**s motivací**
0	0	0	0

Název učebnice: Diferenciální a integrální počet
Autor: Dag Hrubý, Josef Kubát
Nakladatelství - rok vydání: Prometheus - 1997

VÝKLADOVÉ PROSTŘEDKY			
Přímý výklad [%]		**Nepřímý výklad [%]**	
bez motivace	**s motivací**	**bez motivace**	**s motivací**
0	90	0	10
Výklad pomocí úkolů [%]		**Heuristická strategie [%]**	
bez motivace	**s motivací**	**bez motivace**	**s motivací**
0	0	0	0

Název učebnice: Komplexní čísla
Autor: Emil Calda
Nakladatelství - rok vydání: Prometheus - 1996

VÝKLADOVÉ PROSTŘEDKY			
Přímý výklad [%]		**Nepřímý výklad [%]**	
bez motivace	**s motivací**	**bez motivace**	**s motivací**
0	85	0	15
Výklad pomocí úkolů [%]		**Heuristická strategie [%]**	
bez motivace	**s motivací**	**bez motivace**	**s motivací**
0	0	0	0

Název učebnice: Planimetrie
Autor: Eva Pomykalová
Nakladatelství - rok vydání: Prometheus - 1993

VÝKLADOVÉ PROSTŘEDKY			
Přímý výklad [%]		**Nepřímý výklad [%]**	
bez motivace	**s motivací**	**bez motivace**	**s motivací**
24	52	24	0
Výklad pomocí úkolů [%]		**Heuristická strategie [%]**	
bez motivace	**s motivací**	**bez motivace**	**s motivací**
0	0	0	0

Název učebnice: Rovnice a nerovnice
Autor: Jura Charvát, Jaroslav Zhouf, Leo Boček
Nakladatelství - rok vydání: Prometheus - 1994

VÝKLADOVÉ PROSTŘEDKY			
Přímý výklad [%]		**Nepřímý výklad [%]**	
bez motivace	**s motivací**	**bez motivace**	**s motivací**
10	17	0	73
Výklad pomocí úkolů [%]		**Heuristická strategie [%]**	
bez motivace	**s motivací**	**bez motivace**	**s motivací**
0	0	0	0

Název učebnice: Stereometrie
Autor: Eva Pomykalová
Nakladatelství - rok vydání: Prometheus - 1995

VÝKLADOVÉ PROSTŘEDKY			
Přímý výklad [%]		**Nepřímý výklad [%]**	
bez motivace	**s motivací**	**bez motivace**	**s motivací**
0	88	0	12
Výklad pomocí úkolů [%]		**Heuristická strategie [%]**	
bez motivace	**s motivací**	**bez motivace**	**s motivací**
0	0	0	0

Název učebnice: Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika
Autor: Emil Calda, Václav Dupač
Nakladatelství - rok vydání: Prometheus - 1993

VÝKLADOVÉ PROSTŘEDKY			
Přímý výklad [%]		**Nepřímý výklad [%]**	
bez motivace	**s motivací**	**bez motivace**	**s motivací**
0	82	0	18
Výklad pomocí úkolů [%]		**Heuristická strategie [%]**	
bez motivace	**s motivací**	**bez motivace**	**s motivací**
0	0	0	0

Název učebnice: Goniometrie
Autor: Oldřich Odvárko
Nakladatelství - rok vydání: Prometheus - 1996

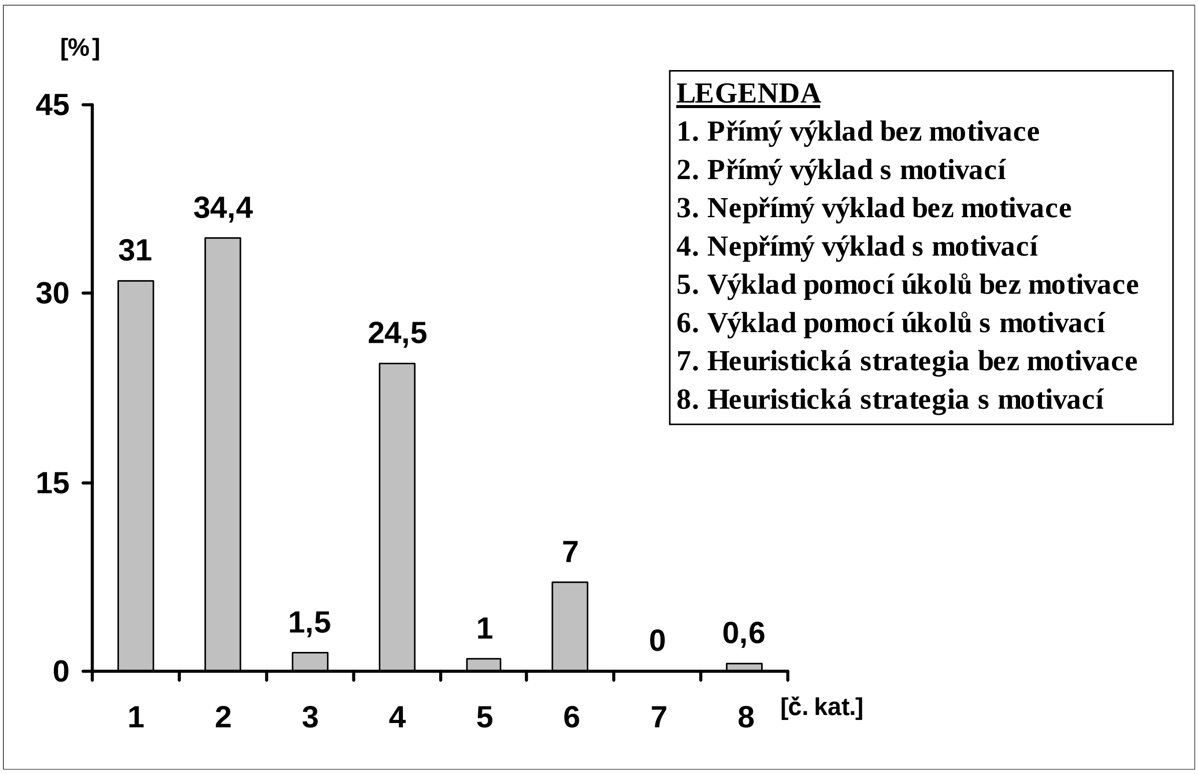
VÝKLADOVÉ PROSTŘEDKY			
Přímý výklad [%]		**Nepřímý výklad [%]**	
bez motivace	**s motivací**	**bez motivace**	**s motivací**
0	24	0	18
Výklad pomocí úkolů [%]		**Heuristická strategie [%]**	
bez motivace	**s motivací**	**bez motivace**	**s motivací**
0	53	0	5

Pro ucelenější přehled o používání výkladových prostředků *ve všech* uvedených učebnicích byla na základě rozboru učebnic vytvořena tabulka číslo 26 a graf číslo 1. Tabulka číslo 26 uvádí procentuální zastoupení námi definovaných výkladových prostředků v obou řadách učebnic matematiky pro střední školy. Postup výpočtu procentuálního zastoupení jednotlivých výkladových prostředků byl stejný jako výpočet pro jednotlivé učebnice. Jako základ byl použit počet všech kapitol ve všech knihách (nebo jejich částí) a jako procentová část byl použit počet využití dílčích výkladových prostředků ve všech učebnicích.

VÝKLADOVÉ PROSTŘEDKY			
Přímý výklad [%]		**Nepřímý výklad [%]**	
bez motivace	**s motivací**	**bez motivace**	**s motivací**
31	**34,4**	**1,5**	**24,5**
Výklad pomocí úkolů [%]		**Heuristická strategie [%]**	
bez motivace	**s motivací**	**bez motivace**	**s motivací**
1	**7**	**0**	**0,6**

Tab. 26 Procentuální zastoupení výkladových prostředků ve všech učebnicích.

Z této tabulky byl vygenerován graf č. 1, který procentuální zastoupení výkladových prostředků ve všech učebnicích převádí do přehledné grafické formy.



Graf 1 Procentuální zastoupení výkladových prostředků ve všech učebnicích.

4.2.3 Závěr části 4.2.2.

Z výsledků je patrné, že každý autor preferuje různé přístupy k výkladu, které používá při psaní učebnic. Nejvíce byly ve všech učebnicích zastoupeny tyto výkladové prostředky: *přímý výklad s motivací* (34,4 %), *přímý výklad bez motivace* (31 %) a *nepřímý výklad s motivací* (24,5 %). Induktivní a deduktivní výkladové prostředky jsou ve všech sledovaných učebnicích zastoupeny jen řídce. Nejvyšší četnost jsme zaznamenali u výkladového prostředku *výklad pomocí úkolů s motivací* (7 %). Učebnice, ve kterých jsou induktivní a deduktivní výkladové prostředky používány nejvíce, jsou: Matematika pro SOŠ a SOU 6. část a Goniometrie, Funkce a Posloupnosti a řady, vše učebnice pro gymnázia. Tyto dvě učebnice jako jediné používají při výkladu i heuristické strategie. Tam, kde byly induktivní a deduktivní výkladové prostředky v učebnicích použity, bylo jejich zařazení vhodné a mělo významný přínos pro čtenáře.

4.2.4 Procvičovací část učebnic

Vzhledem k velkému počtu příkladů ve všech učebnicích jsme nejprve vytvořili jejich jednotlivé kategorie. Množinu všech příkladů použitých v učebnicích jsme rozdělili na tři kategorie: otázka, výpočet, induktivní a deduktivní úlohy.

Název kategorie	**Charakteristika**	**Příklad úlohy**
otázka	Jedná se o úlohy, které vyžadují přímou odpověď. Není nutné nic počítat.	Vysvětli pojem Definiční obor funkce.
výpočet	Řešitel používá k řešení známý výpočet, pouze procvičuje známé postupy.	Vypočítejte prvních pět členů aritmetické posloupnosti, když víte: $a_1 = 2$ a $d = 3$.
induktivní a deduktivní úlohy	Čtenář musí hledat postup řešení, vyslovovat hypotézy, dokazovat je, ověřovat nebo dokazovat objevená nebo předložená tvrzení.	Dokažte větu. Zkoumejte dělitelnost čísel $n^2 + 5n + 6$, kde n je celé kladné číslo. Vyslovte hypotézu. (str. 258: Odvárko, Calda, Koloušková, Řepová,: Matematika 6, SPN 1987.)

Tab. 27 Charakteristika kategorií použitých příkladů.

Rozbor této části učebnic se zaměřil na druhy příkladů, které jsou ve cvičeních používány. Přímo se zaměřil na četnost těch úloh, které vyžadují od řešitele použití induktivních nebo deduktivních postupů řešení tak, jak je charakterizuje tabulka číslo 27. Abychom získali přehled o používání tohoto druhu příkladů v učebnicích, vypočítali jsme procentuální zastoupení induktivních a deduktivních úloh v jednotlivých učebnicích. Za *procentovou část* byl brán počet námi sledovaných úloh a jako *základ* posloužil počet všech úloh v učebnici.

U jednotlivých typů příkladů jsme nerozlišovali, šlo-li pouze o induktivní, nebo pouze o deduktivní charakter úlohy. Námi sledované příklady mohly mít jen induktivní charakter (např. odvození vzorce, vyslovení hypotézy), nebo pouze deduktivní charakter (např. dokažte, že platí vzorec) nebo kombinaci obou přístupů.

Pro ilustraci výpočtu uvedu následující příklad:

V učebnici **Posloupnosti a řady**:

počet všech úloh 136

počet induktivních a deduktivních úloh je 26:

$$pp = \frac{26}{136}$$
$$pp = 19{,}1\%$$

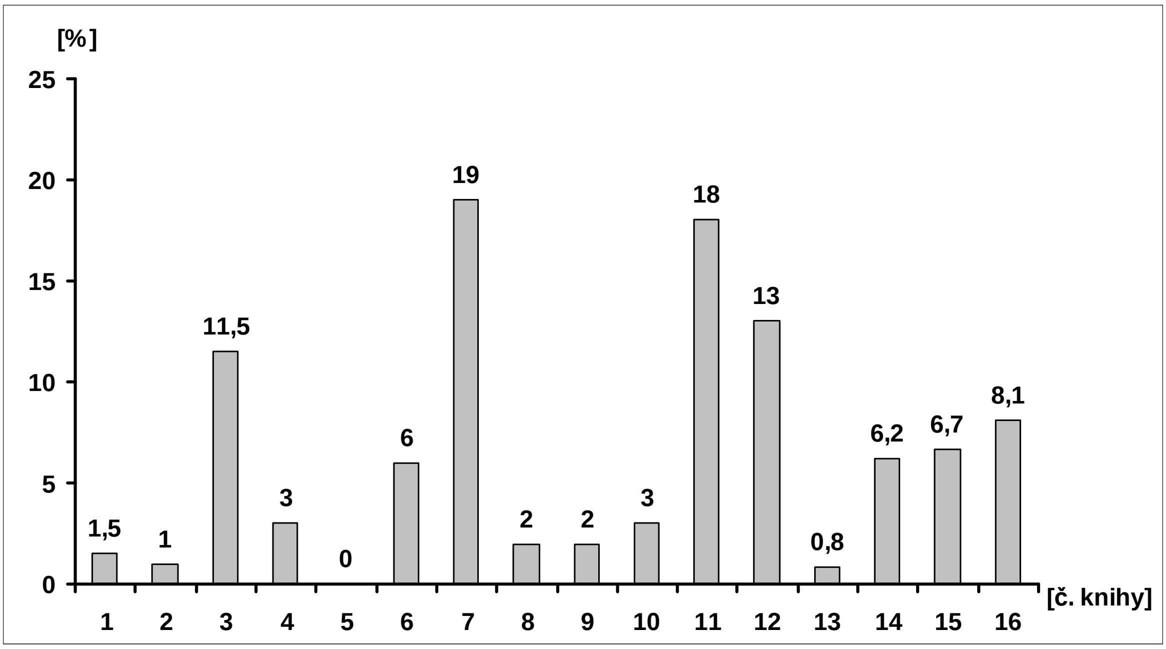
Tedy procentuální zastoupení induktivních a deduktivních úloh (*pp*) v učebnici Posloupnosti a řady je 19,1 procent.

V následující tabulce číslo 28 jsou uvedeny počty procent zastoupení induktivních a deduktivních úloh v jednotlivých učebnicích.

Číslo učebnice	**Název učebnice**	**Zastoupení induktivních a deduktivních úloh v %**
1	Matematika pro SOŠ a SOU 1. část	1,5
2	Matematika pro SOŠ a SOU 2. část	1
3	Matematika pro SOŠ a SOU 3. část	11,5
4	Matematika pro SOŠ a SOU 4. část	3
5	Matematika pro SOŠ a SOU 5. část	0
6	Matematika pro SOŠ a SOU 6. část	6
7	Posloupnosti a řady	19
8	Funkce	2
9	Analytická geometrie	2
10	Diferenciální a integrální počet	3
11	Komplexní čísla	18
12	Planimetrie	13
13	Rovnice a nerovnice	0,8
14	Stereometrie	6,2
15	Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika	6,7
16	Goniometrie	8,1

Tab. 28 Procentuální zastoupení induktivních a deduktivních úloh v jednotlivých učebnicích.

Z této tabulky byl opět vygenerován graf číslo 2, který procentuální zastoupení induktivních a deduktivních úloh ve všech učebnicích převádí do grafické formy. Z důvodu přehlednosti jsou v grafu číslo 2 uvedeny namísto názvů jednotlivých knih pouze jim přiřazená čísla, přičemž jednotlivá přiřazení čísel jsou uvedena v tabulce číslo 28.



Graf 2 Procentuální zastoupení induktivních a deduktivních úloh v učebnicích matematiky.

4.2.5 Závěr části 4.2.4.

Učebnice s nejvyšším zastoupením induktivních a deduktivních úloh jsou: Posloupnosti a řady (19 %), Komplexní čísla (18 %) a Planimetrie (13 %), vše učebnice pro gymnázia. U učebnic pro SOŠ a SOU má největší podíl zastoupení těchto úloh Matematika pro SOŠ a SOU 3. část (11,5 %), která tématicky zahrnuje následující kapitoly: Funkce, Goniometrie a trigonometrie a Stereometrie. Opět můžeme konstatovat, že použití těchto úloh v učebnicích bylo vhodné a mělo veliký přínos pro pochopení látky a celkové propojení získaných vědomostí.

5 ZÁVĚR

Hlavním cílem disertační práce bylo vhodnými výzkumnými prostředky ověřit možnost využití induktivních a deduktivních přístupů při výuce matematiky na středních školách. Práce je rozdělena na dvě hlavní části podle zvolených oblastí zájmu. První část je zaměřena na využívání induktivních a deduktivních přístupů při výuce matematiky.

Induktivní a deduktivní přístupy při výuce matematiky

Předmětem výzkumu bylo prověření možnosti využití induktivních a deduktivních přístupů při konkrétní výuce v praxi. Tedy, do jisté míry posoudit, je-li možné tyto přístupy úspěšně zařazovat do výuky matematiky a jsou-li tyto přístupy dostatečně efektivní. Cílem výzkumu bylo prověřit, zda vhodné zařazování a využívání induktivních a deduktivních přístupů ve výuce matematiky vede k efektivnějšímu a trvalejšímu získávání poznatků. Jako výzkumný prostředek vhodný pro verifikaci zvolených hypotéz byl vybrán pedagogický experiment. Pomocí něho jsme porovnávali účinnost induktivních a deduktivních přístupů ve výuce matematiky oproti tradičním metodám výuky. Měřítkem, které sloužilo k porovnání této účinnosti, byly dosažené vědomosti studentů na konci experimentu. Tyto vědomosti byly měřeny pomocí didaktického testu. Ke statistickému ověřování hypotéz jsme použili data získaná pomocí didaktických testů a Studentův t-test.

Studenti, kteří se účastnili pedagogického experimentu, neměli z předchozí doby žádné zkušenosti s využíváním induktivních a deduktivních přístupů při výuce matematiky. Výsledky popsaného výzkumu na zvolené hladině významnosti potvrzují předpoklad hypotézy H1. Ukázalo se, že vhodným využitím induktivních a deduktivních přístupů při výuce matematiky zvyšujeme, v porovnání s tradičními metodami výuky, efektivitu vzdělávání. Studenti získávají lepší vhled do problematiky a díky tomu dosahují lepších studijních výsledků. Statistické testy významnosti potvrdily, že rozdíly mezi experimentální

a kontrolní skupinou nevznikly pouhou náhodou a prokázaly tak nezanedbatelný vliv výuky, využívající induktivních a deduktivních přístupů, na studijní výsledky studentů. Pedagogický experiment také poukázal na to, že studenti jsou bez větších problémů schopni při výuce matematiky využívat induktivní a deduktivní přístupy. Pomocí využívání různých heuristických strategií řešili zadané i nalezené problémy. Většina studentů byla schopna své výsledky zobecnit a tyto zobecněné výsledky poté vedly k objevení základních teorií.

Dalším výsledkem výzkumu je skutečnost, že se na dané hladině významnosti nepotvrdily předpoklady hypotézy H2. Experiment nepotvrdil, že by využívání induktivních a deduktivních přístupů při výuce matematiky mělo vliv na trvalejší uchování poznatků. Průměrný počet bodů experimentální skupiny z retestu byl sice vyšší, ale rozdíl mezi skupinami nebyl statisticky významný. Tento fakt mohl být způsoben tím, že studenti využívali induktivní a deduktivní přístupy jen po krátkou dobu trvání experimentu. Předpoklady hypotézy H2 by se mohly prověřit dlouhodobějším výzkumem, při kterém by období využívání těchto přístupů bylo mnohem delší.

Cílem práce bylo také ověření platnosti vyslovených hypotéz v praxi. Pokoušeli jsme se potvrdit skutečnost, že tyto přístupy lze využívat při běžné výuce s obvyklou časovou dotací. Výsledky výzkumu jednoznačně potvrdily, že tyto přístupy lze bez větších komplikací využívat v praxi. A také skutečnost, že studenti jsou schopni si při tomto typu výuky osvojit potřebné vědomosti a dovednosti, což potvrzují výsledky, kterých studenti dosahovali v didaktických testech.

Další výzkum v této oblasti by se měl zaměřit především na konkrétní zavádění induktivních a deduktivních přístupů při výuce matematiky do výuky. Rovněž zjištění vlivu těchto přístupů na vědomosti studentů z dlouhodobého hlediska. I vlivu, který taková výuka má na celkový vhled studentů do matematiky jako vědecké disciplíny.

Druhá část disertační práce je věnována využívání induktivních a deduktivních přístupů v učebnicích matematiky pro střední školy. Cílem bylo vyhodnotit poměrné zastoupení těchto přístupů v učebnicích matematiky.

Induktivní a deduktivní přístupy v učebnicích matematiky pro střední školy

Při vlastním výzkumu jsme se zaměřili na obsahovou stránku učebnic matematiky pro střední školy, respektive na jejich výkladovou a procvičovací textovou složku. Hlavní oblastí našeho zájmu bylo zmapovat zastoupení induktivních a deduktivních způsobů výkladu v učebnicích matematiky a zjištění míry obsahu jednotlivých cvičení, která při řešení vyžadují od studenta využití heuristických přístupů. Předmětem výzkumu byly dvě řady učebnic, které střední školy využívají nejvíce. Byly to Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť 1. – 6. část nakladatelství SPN a Matematika pro gymnázia (ucelená řada) nakladatelství Prométheus. Cílem výzkumu bylo zmapování četnosti výskytu induktivních a deduktivních přístupů použitých při výkladu a zjištění zastoupení úloh uplatňujících induktivní resp. deduktivní přístupy ve zmíněných učebnicích matematiky. Vlastní výzkum byl zaměřen na výkladovou a procvičovací část.

Z průzkumu učebnic matematiky vyplývá skutečnost, že zastoupení induktivních a deduktivních výkladových prostředků a induktivních a deduktivních úloh v učebnicích je velmi malé. Důvodů pro to může být několik. Objektivně musíme uvést, že by neuvážené používání těchto přístupů v učebnicích mohlo značně komplikovat pochopení výkladu a podstatně zvýšit obtížnost porozumění textu. Dále je zřejmé, že ne každý čtenář je schopen tyto přístupy používat při autoedukaci. Z výsledků je patrné, že někteří autoři učebnic využívají při jejich tvorbě i induktivní a deduktivní přístupy. Jsme přesvědčeni o tom, že jejich zařazení je v takových případech vhodné a má významný přínos pro čtenáře. Z induktivních a deduktivních výkladových prostředků byla nejvyšší četnost zaznamenána

u výkladového prostředku „*výklad pomocí úkolů s motivací*“, a to 7 %. Učebnice, ve kterých jsou induktivní a deduktivní výkladové prostředky používány nejvíce, jsou: Matematika pro SOŠ a SOU 6. část a Goniometrie, Funkce a Posloupnosti a řady, vše učebnice pro gymnázia. Učebnice s nejvyšším zastoupením induktivních a deduktivních úloh jsou: Posloupnosti a řady (19 %), Komplexní čísla (18 %) a Planimetrie (13 %), vše učebnice pro gymnázia. U učebnic pro SOŠ a SOU má největší podíl zastoupení těchto úloh Matematika pro SOŠ a SOU 3. část (11,5 %), která tématicky zahrnuje následující kapitoly: Funkce, Goniometrie a trigonometrie a Stereometrie.

Zjištěná fakta by mohla při dalším výzkumu vést k celkové revizi učebnic s ohledem na širší (nikoliv přemrštěné) zařazování induktivních a deduktivních přístupů do učebnic matematiky, a to jak mezi výkladové prostředky, tak i mezi úlohy sloužící k procvičení látky. Dále by bylo možné zaměřit se na to, jaký vliv na čtenáře má zařazování těchto přístupů do učebnic. Podrobnější výzkum by mohl zodpovědět otázku, zda by učebnice s větším počtem induktivních a deduktivních přístupů byly atraktivnější a srozumitelnější pro čtenáře a plnily tak lépe svojí funkci edukačního média.

Z výsledku výzkumu i našich dosavadních zkušeností plyne, že vyučování, při kterém využíváme induktivní a deduktivní přístupy, lze zařadit i při běžné výuce s obvyklou časovou dotací. Pokud chceme u studentů přirozenou cestou rozvíjet schopnost samostatně řešit problémy (ať už matematické, nebo jiné), využívání těchto přístupů se ukazuje jako jedna z nejvhodnějších alternativ. Jednoznačně se přikláníme k většímu využívání induktivních a deduktivních přístupů ať už při výuce matematiky, tak při tvorbě učebnic. Jejich vliv na myšlení studentů je obrovský a nelze zanedbávat ani jejich značný motivační potenciál.

ŽIVOTOPIS

Jméno: Jiří Břehovský
Datum narození: 19. 6. 1981
Adresa: Tichá 171, Dubí 3, psč.: 41703, tel: 607 140 093
e-mail: jiri.breh@seznam.cz

Vzdělání

1995 – 1999 SOŠT a SOU Glaverbel Czach, obor Mechanik elektronik pro automatizační techniku - maturita
1999 – 2001 FEL ČVUT Praha.
2001 – 2005 UJEP, PF Ústí nad Labem, obor Matematika – Základy techniky pro 2. stupeň ZŠ – Mgr.

Praxe

2007 – současnost **Odborný asistent**, Katedra aplikovaných disciplín **FVTM UJEP** Ústí nad Labem.
2004 – 2006 **učitel** Matematiky, Fyziky a Praktické výchovy, **ZŠ Bílá cesta**, Verdunská 2958, psč.: 41501

Publikace

Odborné časopisy recenzované

- EMANOVSKÝ, P., BŘEHOVSKÝ, J.: On effectivity of inductive methods in mathematical education at secondary school. In *Problems of Education in the 21st Century.* Volume 22, Lithuania 2010, ISSN 1822-786.
- BŘEHOVSKÝ, J.: Analýza využívání induktivních a deduktivních přístupů v učebnicích matematiky pro střední školy. In *e-Pedagogium.* Volume 1, Olomouc 2011
- BŘEHOVSKÝ, J., EMANOVSKÝ, P.: On using of inductive approach in mathematical textbooks at secondary schoul. In *Problems of Education in the 21st Century.* Lithuania 2011. V tisku.
- BŘEHOVSKÝ, J., PILZOVÁ, Š.: Napierovi kosti. In příloha časopisu *JITE* jako výstup z konference STVRD (Strategie technického vzdělávání v reflexi doby). Olomouc 2011. V tisku.

Sborníky recenzované

- BŘEHOVSKÝ, J., EMANOVSKÝ, P.: Induktivní a deduktivní přístupy ve výuce matematiky na SŠ. In *Sborník z XXVII. mezinárodního kolokvia o řízení vzdělávacího procesu,* Brno, 2009, 31. ISBN 978-80-7231-650-2.
- BŘEHOVSKÝ, J., EMANOVSKÝ, P.: Induktivní a deduktivní způsob výkladu v učebnicích matematiky na SŠ. *In Sborník Acta mathematica 12,* Nitra, 2009, ISBN 978-80-8094-614-2.

6 LITERATURA

6.1 POUŽITÁ A DOPORUČENÁ LITERATURA

[1] BREW, A.: Teaching and Research: New relationships and their implications for inquiry-based teaching and learning in higher education. In *Higher Education Research & Development, Vol. 22. No. 1*. Routledge 2003. ISSN 0729-4360.

[2] BŘEHOVSKÝ, J., EMANOVSKÝ, P.: Induktivní a deduktivní přístupy ve výuce matematiky na SŠ. In *Sborník z XXVII. mezinárodního kolokvia o řízení vzdělávacího procesu*, Brno: 2009. ISBN 978-80-7231-650-2.

[3] BYČKOVSKÝ, P.: *Základy měření výsledků výuky*. Praha: Výzkumný ústav inženýrského studia, 1982.

[4] BŘEHOVSKÝ, J., EMANOVSKÝ, P.: On Efectivity of Inductive Methods in Mathematical Education at Secodary School. *In Problems of Education in the 21st Century*. Lithuiana: 2010. ISSN 1822-7864.

[5] EMANOVSKÝ, P. Možnosti experimentálně induktivního přístupu ve vysokoškolské výuce matematiky. In *Sborník z XIX. Mezinárodního kolokvia o řízení osvojovacího procesu*, Vyškov: 2001, s. 87-89. ISBN 80-7231-071-2.

[6] GÁBOR, O., KOPANEC, O., KRIŽALKOVIČ, K.: *Teória vyučovania matematiky*. Bratislava: SPN, 1989, ISBN 80-08-00285-9.

[7] GAVORA, P.: *Úvod do pedagogického výzkumu*. Brno: Paido, 2000. ISBN 80-85931-79-6.

[8] CHRÁSKA, M.: *Metody pedagogického výzkumu*. Praha: Grada, 2007. ISBN 978-80-247-1369-4

[9] CHRÁSKA, M.: *Didaktické testy*. Brno: Paido, 1999. ISBN 80-85931-87-7

[10] KOPKA, J. Jak přednášet budoucím učitelům matematiky? In *Sborník příspěvků z Mezinárodní konference kateder matematiky fakult připravujících učitele matematiky*. Liberec: 2000, s. 21 – 32.

[11] KOPKA, J. Jak s žáky opravdu tvořit matematiku? In *Zborník príspevkov z 2. Konferencie učiteľov matematiky na tému „Autentické vyučovanie a využitie medzipredmetových vzťahov vo vyučovaní matematiky“*. Banská Bystrica. 2000, s. 7 - 14.

[12] KOPKA, J. *Hrozny problémů ve školské matematice*. Acta Universitatis Purkynianae 40, Matematica I, Ústí nad Labem. 1999.

[13] KOPKA, J. *Výzkumný přístup při výuce matematiky*. Acta Universitatis Purkynianae 133, Matematica, Ústí nad Labem. 2007.

[14] LLEWELLYN, D., JOHNSON, S.: Science through a Systems Approach. In *Science Scope Vo. 31 No. 9.* National Science Teachers Association 2008. ISSN 0887-2376.

[15] LLEWELLYN, D.: *Inquire Within: Implementing Inquiry-Based Science Standards*. Corwin Press 2001. ISBN 0-7619-7745-7.

[16] LINDQUIST, E. F.: *Statistická analýza v pedagogickém výzkumu*. SPN Praha, 1967.

[17] MARY L. CROWLEY.: The Van Hiele Model of the Development of Geometric Thought, in *Learning and Teaching Geometry*, K-12, ed. Mary M. Lindquist (Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 1987), pp. 1-16.

[18] MOLNÁR, J.: *Učebnice matematiky a klíčové kompetence*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci: 2007, ISBN 978-80-244-1722-6

[19] MICHALIČKA, M.: *Pedagogické testy a problémy jejich použití v pedagogické praxi*. Praha: Pedagogika, 1961, č. 1.

[20] PRINCE, J., FELDER, R., M.: Iductive Teaching and Learning Methods: Definition, Comparisons and Research Bases. *Journal of Engineering Education*, 95(2), pp 123-138. 1996.
[21] PRŮCHA, J.: *Učebnice: Teorie a analýzy edukačního média*. Brno: Paido, 1998. ISBN 80-85931-49-4.
[22] ŠVEC, V., FILOVÁ, H., ŠIMONÍK, O.: *Praktikum didaktických dovedností*. Brno: PdF MU, 1996. ISBN 80-210-1365-6.
[23] AUTORSKÝ KOLEKTIV.: *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia.* Praha: VÚP, 2007.

6.2 UČEBNICE MATEMATIKY PRO STŘEDNÍ ŠKOLY

[24] CALDA, E., PETRÁNEK, O., ŘEPOVÁ J.: *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť 1. část.* Praha: SPN, 1986.
[25] CALDA, E.: *Komplexní čísla.* Praha: Prométheus, 1996. ISBN80-85849-85-2
[26] CALDA, E., DUPAČ, V.: *Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika.* Praha: Prométheus, 1993. ISBN978-80-7196-365-3
[27] HRUBÝ, D., KUBÁT, J.: *Diferenciální a integrální počet.* Praha: Prométheus, 1997. ISBN80-7196-063-2
[28] CHARVÁT, J., ZHOUF, J., BOČEK, L.: *Rovnice a nerovnice.* Praha: Prométheus, 1994. ISBN978-80-7196-154-3
[29] KOČANDRLE, M., BOČEK, L.: *Analytická geometrie.* Praha: Prométheus, 1996. ISBN 80-7196-120-5
[30] KOLOUCHOVÁ, J., ŘEPOVÁ, J., ŠOBR, V.: *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť 5. část.* Praha: SPN, 1987.
[31] ODVÁRKO, O., ŘEPOVÁ, J., SKŘÍČEK, L.: *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť 2. část.* Praha: SPN, 1988.
[32] ODVÁRKO, O., ŘEPOVÁ, J.: *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť 3. část.* Praha: SPN, 1985.
[33] ODVÁRKO, O., CALDA, E., KOLOUCHOVÁ, J., ŘEPOVÁ, J.: *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť 6. část.* Praha, SPN 1987.
[34] ODVÁRKO, O.: *Posloupnosti a řady.* Praha: Prométheus, 1999. ISBN 80-85849-91-7
[35] ODVÁRKO, O.: *Funkce.* Praha: Prométheus, 1996. ISBN 80-85849-09-7
[36] ODVÁRKO, O.: *Goniometrie*. Praha: Prométheus, 1996. ISBN80-7196-203-1
[37] PETRÁNEK, O., CALDA, E., HEBÁK, P.: *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť 4. část*. Praha: SPN, 1986.
[38] POMYKALOVÁ, E.: *Planimetrie.* Praha: Prométheus, 1993. ISBN978-80-7196-174-1
[39] POMYKALOVÁ, P.: *Stereometrie.* Praha: Prométheus, 1995.ISBN978-80-7196-178-9

7 PŘÍLOHY

7.1 PRETEST

TEST – I. A

1. Vyberte, který z výčtů prvků **splňuje podmínku:** M = { $x \in N; x^2 \leq 25$ }

a) M = {0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, ...}
b) M = {3, 4, 5}
c) M = {0, 1, 2, 3, 4, 5}
d) M = {0, 1, 3, 4, 5}
e) žádná z uvedených

2. Vypočítej a vyber správný výsledek: (1 + 2)*(3 + 4) + 5 + 2*7 =

a) 91
b) 40
c) 30
d) 140
e) žádná z uvedených

3. Urči hodnotu lomeného výrazu $\frac{t^3+3}{2t^2-1}$ pro **t = -2**:

a) $-\frac{5}{9}$
b) $\frac{11}{7}$
c) -2
d) $-\frac{5}{7}$
e) žádná z uvedených

4. Je-li **x**$\in$ **(0;** ∞ **)**, vypočtěte výraz $2x + |-2x| =$

a) 4x
b) 2x
c) -4x
d) -2x
e) žádná z uvedených

5. Vypočítejte: $\left(5-4^2\right)+\left(5+(-4)^2\right)=$

a) -11
b) 21
c) 11
d) -21
e) žádná z uvedených

6. Pro která **reálná čísla c** má daný výraz $\sqrt{c}$ **smysl**:

a) pro všechna c
b) pro c < 0
c) pro c > 0
d) pro c ≥ 0
e) žádná z uvedených

7. Jakému výrazu se bude rovnat výraz $5a^4b^3 - 15a^3b^2 + 25a^2b^5$ když z něj **vytkneme $5a^2b^2$**

a) $5a^2b^2 (a^2b - 3a + 5b^3)$
b) $(a^2b - 3a + 5b^3)$
c) $5a^2b^2 (ab - 3a + 5b^3)$
d) $5a^2b^2 (a^2b - 3a^6 + 5 b^3)$
e) žádná z uvedených

8. Vyber, co **platí** pro absolutní hodnotu libovolného **reálného čísla a**:

a) $|a| = |-a|$
b) $a = |-a|$
c) $|a| \neq |-a|$
d) $-a = |-a|$
e) žádná z uvedených

9. Urči **společného jmenovatele** těchto zlomků: $\frac{1}{6}; \frac{a^5}{ab^2}; \frac{a^2+b^2}{18a^2b^3}; \frac{3b}{3a^3}$

a) $3a^2b^2$
b) $18a^2b^3$
c) $6ab^2$
d) $18a^3b^3$
e) žádná z uvedených

10. Umocni zlomek: $\left[\frac{2a-b}{3a^2+b^3}\right]^2 =$

a) $\frac{2a^2 - 2ab + b^2}{3a^4 + 2a^2b^3 + b^6}$
b) $\frac{4a^4 - 4ab + b^2}{9a^4 + 6a^2b^3 + b^6}$
c) $\frac{4a^4 - b^2}{9a^4 + b^6}$
d) $\frac{a^2 - 2ab + b^2}{3a^2 + 2a^2b^2 + b^2}$
e) žádná z uvedených

11. Vyber, který z uvedených zápisů **platí pro součin** dvou libovolných **reálných čísel a,b**:

a) je-li a > 0 a b > 0, pak je ab < 0
b) je-li a < 0 a b > 0, pak je ab > 0
c) je-li a > 0 a b > 0, pak je ab > 0
d) je-li a < 0 a b < 0, pak je ab < 0
e) žádná z uvedených

12. Urči, za jakých podmínek **má** daný **výraz smysl**: $\frac{2}{m} + \frac{m+n}{m-2} - \frac{2-n}{n^2-4} + \frac{m^2+16}{5}$

a) $m \neq 2$, $m \neq 0$, $n \neq 2$, $m \neq 4$
b) $m \neq 0$, $n \neq 0$
c) $m \neq 4$, $m \neq 0$, $n \neq 0$
d) $m \neq 2$, $m \neq 0$, $n \neq \pm 2$
e) žádná z uvedených

13. Vypočítej **obvod o** a **obsah S** obdélníku, který má **velikosti** stran **m, n**.

14. Umocněte daný výraz: $(4c - 2a)^3 =$

15. V kočičím útulku je 132 koček. Během jednoho krmení se spotřebuje 24 konzerv krmiva. Kolik konzerv spotřebují v útulku za dva dny, když víte, že se kočky krmí dvakrát denně?

TEST – I. B

1. Vyber, co **platí** pro absolutní hodnotu libovolného **reálného čísla a**:

f) $|a| = |-a|$

g) $a = |-a|$

h) $|a| \neq |-a|$

i) $-a = |-a|$

j) žádná z uvedených

2. Urči, za jakých podmínek **má** daný **výraz smysl**: $\frac{2}{m} + \frac{m+n}{m-2} - \frac{2-n}{n^2-4} + \frac{m^2+16}{5}$

f) $m \neq 2$, $m \neq 0$, $n \neq 2$, $m \neq 4$
g) $m \neq 2$, $m \neq 0$, $n \neq \pm 2$
h) $m \neq 0$, $n \neq 0$
i) $m \neq 4$, $m \neq 0$, $n \neq 0$
j) žádná z uvedených

3. Urči **společného jmenovatele** těchto zlomků: $\frac{1}{6}; \frac{a^5}{ab^2}; \frac{a^2+b^2}{18a^2b^3}; \frac{3b}{3a^3}$

f) $3a^2b^2$
g) $18a^2b^3$
h) $6ab^2$
i) $18a^3b^3$
j) žádná z uvedených

4. Pro která **reálná čísla c** má daný výraz $\sqrt{c}$ **smysl**:

f) pro všechna c
g) pro $c \leq 0$
h) pro $c \geq 0$
i) pro $c > 0$
j) žádná z uvedených

5. Umocni zlomek: $\left[\frac{2a-b}{3a^2+b^3}\right]^2 =$

f) $\frac{2a^2-2ab+b^2}{3a^4+2a^2b^3+b^6}$

g) $\frac{4a^4-4ab+b^2}{9a^4+6a^2b^3+b^6}$

h) $\frac{4a^4-b^2}{9a^4+b^6}$

i) $\frac{a^2-2ab+b^2}{3a^2+2a^2b^2+b^2}$

j) žádná z uvedených

6. Vyber, který z uvedených zápisů **platí pro součin** dvou libovolných **reálných čísel a,b**:

f) je-li $a > 0$ a $b > 0$, pak je $ab < 0$
g) je-li $a < 0$ a $b > 0$, pak je $ab > 0$
h) je-li $a > 0$ a $b > 0$, pak je $ab > 0$
i) je-li $a < 0$ a $b < 0$, pak je $ab < 0$
j) žádná z uvedených

7. Vyberte, který z výčtů prvků **splňuje podmínku:** M = { $x \in N; x^2 \leq 25$ }

f) M = {0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, ...}
g) M = {0, 1, 2, 3, 4, 5}
h) M = {3, 4, 5}
i) M = {0, 1, 3, 4, 5}
j) žádná z uvedených

8. Vypočítejte: $\left(5-4^2\right)+\left(5+\left(-4\right)^2\right)=$

f) -11
g) 21
h) 11
i) -21
j) žádná z uvedených

9. Urči hodnotu lomeného výrazu $\frac{t^3+3}{2t^2-1}$ pro **t = -2**:

f) $-\frac{5}{9}$
g) $\frac{11}{7}$
h) -2
i) $-\frac{5}{7}$
j) žádná z uvedených

10. Vypočítej a vyber správný výsledek: (1 + 2)*(3 + 4) + 5 + 2*7 =

f) 91
g) 40
h) 30
i) 140
j) žádná z uvedených

11. Jakému výrazu se bude rovnat výraz $5a^4b^3 - 15a^3b^2 + 25a^2b^5$, když z něj **vytkneme $5a^2b^2$**

f) $5a^2b^2 (a^2b - 3a + 5b^3)$
g) $(a^2b - 3a + 5b^3)$
h) $5a^2b^2 (ab - 3a + 5b^3)$
i) $5a^2b^2 (a^2b - 3a^6 + 5 b^3)$
j) žádná z uvedených

12. Je-li **x** $\in$ **(0;** ∞ **)**, vypočtěte výraz $2x+\left|-2x\right|=$

f) -4x
g) 2x
h) 4x
i) -2x
j) žádná z uvedených

13. Vypočítej **obvod o** a **obsah S** čtverce, který má **velikost** strany **u**.

14. Umocněte daný výraz: $\left(c-3a\right)^3 =$

15. Ve sportovní hale svítí 875 žárovek 2 hodiny. Za jak dlouho spotřebuje stejné množství energie 1000 takových žárovek?

7.2 POSTTEST

TEST – II. A

1. Urči **funkční hodnotu** lineární funkce **y = -3x + 4**; pro **x = -4**

a) 0
b) 4
c) 8
d) 16
e) žádná z uvedených

2. Vyber množinu bodů, jejíž **všechny** prvky jsou **body grafu** funkce: **y = x - 3**

a) {[3;0]; [1;1]; [0;0]}
b) {[0;-3]; [4;1]; [5;2]}
c) {[4;1]; [-4;5]}
d) {[0;-3]; [0;3]; [5;2]}
e) žádná z uvedených

3. Kdy přímka ***p*** **není** grafem funkce?

a) přímka ***p*** je rovnoběžná s osou x
b) přímka ***p*** je různoběžná s osou y
c) přímka ***p*** je rovnoběžná s osou y
d) přímka ***p*** svírá s osou x úhel 45°
e) žádná z uvedených

4. Který z následujících předpisů funkcí **je předpisem lineární funkce**?

a) $y = \frac{1}{x}$
b) $y = 2x + 5$
c) $y = x^2$
d) $y = \frac{x^2 + 1}{x - 2}$
e) žádná z uvedených

5. Sestrojte **graf** lineární funkce **y = -x + 1**

(Na zadní stranu tabulky.)

6. Který z grafů následujících funkcí **prochází počátkem** soustavy souřadnic:

a) y = 2x
b) y = 1
c) y = 2x + 1
d) y = -2x - 1
e) žádná z uvedených

7. Vyber předpis funkce, jejímž grafem je přímka **rovnoběžná** s osou **x**?

a) y = 0,5x + 1,5
b) y = -0,5x – 1,5
c) y = - 0,5x
d) y = - 1,5
e) žádná z uvedených

8. Urči **vzájemnou polohu tří přímek** zadaných následujícími předpisy:

y = 7x; y = 7x + 2; y = 7x – 1.2

9. Který z grafů následujících funkcí **prochází počátkem** soustavy souřadnic [0;0]. Parametry *a, b* se **nerovnají** nule a jsou to reálná čísla.

a) y = ax + b
b) y = -ax
c) y = -ax - b
d) y = -ax + b
e) žádná z uvedených

10. Jak se **změní graf** lineární funkce **y = 8x**, jestliže předpis funkce **změníme** na **y = 8x + 3**?

a) posune se ve směru osy x o 3 doleva
b) posune se ve směru osy x o 3 doprava
c) posune se ve směru osy y o 3 dolů
d) posune se ve směru osy y o 3 vzhůru
e) žádná z uvedených

11. Jaké jsou souřadnice **průsečíku** přímky **y = -3x -2** s osou **x**?

a) $\left[-\frac{2}{3};0\right]$
b) $\left[0;\frac{2}{3}\right]$
c) $\left[\frac{2}{3};0\right]$
d) $\left[0;-\frac{2}{3}\right]$
e) žádná z uvedených

12. Urči, která z daných funkcí je **konstantní**?

a) y = -1,2x + 0,5
b) y = x -10
c) y = -0,1x
d) y = 1,89x – 3,69
e) žádná z uvedených

13. Chlapec získal nabídku jednodenní brigády se mzdou **120 Kč za hodinu** a navíc mu bude zaplaceno 75 Kč na svačinu. Napište **rovnici, která udává výši výdělku y** Kč za odpracovanou brigádu (**x** hodin).

14. Jak se **změní graf** lineární funkce **y = 2x**, jestliže předpis funkce změníme na **y = 8x**?

a) přímka bude strměji klesat
b) poloha přímky se nezmění
c) přímka bude strměji růst
d) přímka se posune ve směru osy x
e) žádná z uvedených

15. Vypočti souřadnice **průsečíku** přímky **y = -2x + 4** s osou **y**.

TEST – II. B

1. Který z grafů následujících funkcí **prochází počátkem** soustavy souřadnic [0;0]. Parametry *a, b* se **nerovnají** nule a jsou to reálná čísla.

f) y = ax + b
g) y = -ax
h) y = -ax - b
i) y = -ax + b
j) žádná z uvedených

2. Urči, která z daných funkcí je **konstantní**?

f) y = -1,2x + 0,5
g) y = x -10
h) y = -0,1x
i) y = 1,89x – 3,69
j) žádná z uvedených

3. Jak se **změní graf** lineární funkce **y = 2x**, jestliže předpis funkce změníme na **y = 8x**?

f) přímka bude strměji klesat
g) poloha přímky se nezmění
h) přímka bude strměji růst
i) přímka se posune ve směru osy x
j) žádná z uvedených

4. Jaké jsou souřadnice **průsečíku** přímky **y = -3x -2** s osou **x**?

f) $\left[-\frac{2}{3};0\right]$
g) $\left[0;\frac{2}{3}\right]$
h) $\left[\frac{2}{3};0\right]$
i) $\left[0;-\frac{2}{3}\right]$
j) žádná z uvedených

5. Sestrojte **graf** lineární funkce **y = 2x - 1**

(Na zadní stranu tabulky.)

6. Jak se **změní graf** lineární funkce **y = 8x**, jestliže předpis funkce **změníme** na **y = 8x + 3**?

f) posune se ve směru osy x o 3 doleva
g) posune se ve směru osy x o 3 doprava
h) posune se ve směru osy y o 3 dolů
i) posune se ve směru osy y o 3 vzhůru
j) žádná z uvedených

7. Kdy přímka ***p*** **není** grafem funkce?

f) přímka ***p*** je rovnoběžná s osou x
g) přímka ***p*** je různoběžná s osou y
h) přímka ***p*** je rovnoběžná s osou y
i) přímka ***p*** svírá s osou x úhel 45°
j) žádná z uvedených

8. Urči **vzájemnou polohu přímek**, zadaných následujícími předpisy:

y = 2x; y = 3x + 1

9. Urči **funkční hodnotu** lineární funkce **y = -3x + 4**; pro **x = -4**

f) 0
g) 4
h) 8
i) 16
j) žádná z uvedených

10. Vyber předpis funkce, jejímž grafem je přímka **rovnoběžná** s osou **x**?

f) y = - 1,5
g) y = -0,5x – 1,5
h) y = - 0,5x
i) y = 0,5x + 1,5
j) žádná z uvedených

11. Který z následujících předpisů funkcí **je předpisem lineární funkce**?

f) $y = \frac{1}{x}$
g) $y = x^2$
h) $y = 4x + 7$
i) $y = \frac{x^2 + 1}{x - 2}$
j) žádná z uvedených

12. Vyber množinu bodů, jejíž **všechny** prvky jsou **body grafu** funkce: **y = x - 3**

f) {[3;0]; [1;1]; [0;0]}
g) {[0;-3]; [4;1]; [5;2]}
h) {[4;1]; [-4;5]}
i) {[0;-3]; [0;3]; [5;2]}
j) žádná z uvedených

13. V obchodě zaplatíte za **jednu růži 55 Kč** a dále za **svázání růží** do kytice **35 Kč** (svázání se platí, i když zakoupíte jen jednu růži). Napište **rovnici, která udává cenu kytice y** Kč za libovolný počet růží (x kusů).

14. Který z grafů následujících funkcí **prochází počátkem** soustavy souřadnic.

f) y = 2x
g) y = 1
h) y = 2x + 1
i) y = -2x - 1
j) žádná z uvedených

15. Vypočti souřadnice **průsečíku** přímky **y = 3x - 4** s osou **y**.

7.3 RETEST

TEST – III. A

1. Sestrojte **graf** lineární funkce **y = -2x + 1**

(Na zadní stranu tabulky.)

2. Který z následujících předpisů funkcí **není** předpisem **lineární funkce**?

k) $y = -15x$

l) $y = 2x + 5$

m) $y = \dfrac{3x+1}{x-1}$

n) $y = 0{,}5x + 14$

o) žádná z uvedených

3. Urči **funkční hodnotu** lineární funkce **y = -x - 9**; pro **x = -2**

k) 7
l) -7
m) 11
n) -11
o) žádná z uvedených

4. Jak se **změní graf** lineární funkce **y = -2x**, jestliže předpis funkce **změníme** na **y = -2x - 2**?

k) posune se ve směru osy x o 2 doleva
l) posune se ve směru osy x o 2 doprava
m) posune se ve směru osy y o 2 vzhůru
n) posune se ve směru osy y o 2 dolů
o) žádná z uvedených

5. Jaké jsou souřadnice **průsečíku** přímky **y = -5x + 4** s osou **x**?

k) $\left[\dfrac{4}{5};0\right]$

l) $\left[-\dfrac{4}{5};0\right]$

m) $\left[0;\dfrac{4}{5}\right]$

n) $\left[0;-\dfrac{4}{5}\right]$

o) žádná z uvedených

6. Který z grafů následujících funkcí **prochází počátkem** soustavy souřadnic?

k) y = 1
l) y = -3x
m) y = 3x + 1
n) y = -3x - 1
o) žádná z uvedených

7. Urči **vzájemnou polohu tří přímek**, zadaných následujícími předpisy:

y = 2x; y = 3x + 2; y = 12x

8. Vyber předpis funkce, jejímž grafem je přímka **rovnoběžná** s osou **x**?

k) y = 8x + 1,5
l) y = -8x – 1,5
m) y = - 8x
n) y = - 8
o) žádná z uvedených

9. Jak se **změní graf** lineární funkce **y = 3x**, jestliže předpis funkce změníme na **y = 9x**?

k) přímka bude strměji klesat
l) poloha přímky se nezmění
m) přímka bude strměji růst
n) přímka se posune ve směru osy x
o) žádná z uvedených

10. Vypočti souřadnice **průsečíku** přímky **y = -3x - 1** s osou **y**?

11. Urči, která z daných funkcí je **konstantní**?

k) y = -9,2x + 23
l) y = -x +14,5
m) y = -63x
n) y = 159x + 9,36
o) žádná z uvedených

12. Mzda zaměstnance je 150 Kč za hodinu a pokud nebude nemocen celý měsíc, dostane navíc od zaměstnavatele příplatek k výplatě ve výši 1000 Kč. Napište **rovnici, která udává výši výdělku y** Kč za odpracované hodiny v jednom měsíci (**x** hodin), jestliže víte, že zaměstnanec nebyl nemocný.

13. Který z grafů následujících funkcí **prochází počátkem** soustavy souřadnic [0;0]. Parametry *a*, *b* se **nerovnají** nule a jsou to reálná čísla.

k) y = -ax
l) y = ax + b
m) y = -ax - b
n) y = -ax + b
o) žádná z uvedených

14. Vyber množinu bodů, jejíž **všechny** prvky jsou **body grafu** funkce: **y = 2x - 2**

k) {[4;0]; [1;1]; [0;4]}
l) {[0;-3]; [-3;0]; [5;2]}
m) {[1;-2]; [3;4]}
n) {[3;4]; [4;3]; [-2;1]}
o) žádná z uvedených

15. Kdy přímka ***p*** **není** grafem funkce?

k) přímka ***p*** je rovnoběžná s osou x
l) přímka ***p*** je rovnoběžná s osou y
m) přímka ***p*** je různoběžná s osou y
n) přímka ***p*** svírá s osou x úhel 45°
o) žádná z uvedených

TEST – III. B

1. Sestrojte **graf** lineární funkce **y = -2x + 1**

(Na zadní stranu tabulky.)

2. Který z grafů následujících funkcí **prochází počátkem** soustavy souřadnic [0;0]. Parametry *a*, *b* se **nerovnají** nule a jsou to reálná čísla.

p) y = ax + b
q) y = -ax
r) y = -ax - b
s) y = -ax + b
t) žádná z uvedených

3. Urči, která z daných funkcí je **konstantní**?

p) y = -9,2x + 23
q) y = -x +14,5
r) y = -63x
s) y = 159x + 9,36
t) žádná z uvedených

4. Kdy přímka ***p*** **není** grafem funkce?

p) přímka ***p*** je rovnoběžná s osou x
q) přímka ***p*** je různoběžná s osou y
r) přímka ***p*** je rovnoběžná s osou y
s) přímka ***p*** svírá s osou x úhel 45°
t) žádná z uvedených

5. Urči **funkční hodnotu** lineární funkce **y = -x - 12**; pro **x = -3**

p) 15
q) -15
r) 9
s) -9
t) žádná z uvedených

6. Jak se **změní graf** lineární funkce **y = 5x**, jestliže předpis funkce změníme na **y = 15x**?

p) přímka bude strměji klesat
q) poloha přímky se nezmění
r) přímka bude strměji růst
s) přímka se posune ve směru osy x
t) žádná z uvedených

7. Urči **vzájemnou polohu tří přímek**, zadaných následujícími předpisy:

y = 7x; y = 7x + 2; y = 7x - 4

8. Vyber množinu bodů, jejíž **všechny** prvky jsou **body grafu** funkce: **y = -2x + 2**

p) {[4;-6]; [1;0]; [0;2]}
q) {[0;-3]; [-3;0]; [5;2]}
r) {[1;-2]; [3;4]}
s) {[3;4]; [4;3]; [-2;1]}
t) žádná z uvedených

9. Jak se **změní graf** lineární funkce **y = -18x**, jestliže předpis funkce **změníme** na **y = -18x + 4**?

p) posune se ve směru osy x o 4 doleva
q) posune se ve směru osy x o 4 doprava
r) posune se ve směru osy y o 4 dolů
s) posune se ve směru osy y o 4 vzhůru
t) žádná z uvedených

10. Vypočti souřadnice **průsečíku** přímky **y = -5x - 9** s osou **y**.

11. Který z následujících předpisů funkcí **není** předpisem **lineární funkce**?

p) $y = -15x$
q) $y = 2x + 5$
r) $y = \dfrac{3x+1}{x-1}$
s) $y = 0{,}5x + 14$
t) žádná z uvedených

12. Mzda zaměstnance je 150 Kč za hodinu a pokud nebude nemocen celý měsíc, dostane navíc od zaměstnavatele příplatek k výplatě ve výši 1000 Kč. Napište **rovnici, která udává výši výdělku y** Kč za odpracované hodiny v jednom měsíci (**x** hodin), jestliže víte, že zaměstnanec byl nemocný.

13. Který z grafů následujících funkcí **prochází počátkem** soustavy souřadnic?

p) y = -3x + 1
q) y = 1
r) y = 3x + 1
s) y = -3x - 1
t) žádná z uvedených

14. Jaké jsou souřadnice **průsečíku** přímky **y = 5x - 4** s osou **x**?

p) $\left[-\dfrac{4}{5};0\right]$
q) $\left[\dfrac{4}{5};0\right]$
r) $\left[0;\dfrac{4}{5}\right]$
s) $\left[0;-\dfrac{4}{5}\right]$
t) žádná z uvedených

15. Vyber předpis funkce, jejíž grafem je přímka **rovnoběžná** s osou **x**.

p) y = 8x + 1,5
q) y = -8x – 1,5
r) y = - 8x
s) y = - 8
t) žádná z uvedených