UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PEDAGOGICKÁ FAKULTA

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Funkce sinus a cosinus

Katedra matematiky
Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.
Vypracoval(a): **Sonja Truhlářová**
Studijní program: Učitelství matematiky pro 2.stupeň ZŠ
Studijní obor UMma-UITmi
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2022

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Sonja Truhlářová

Název práce: Funkce sinus a cosinus

Typ práce: Diplomová práce

Pracoviště: Katedra matematiky

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.

Rok obhajoby práce: 2022

Abstrakt: Tato diplomová práce se zabývá teorií goniometrických funkcí sinus a cosinus v komplexním oboru a jejich základními vlastnostmi. Důležité vlastnosti jsou představeny na konkrétních příkladech. Práce obsahuje sbírku úloh i s jejich řešením zaměřených na goniometrické funkce pro žáky základních a středních škol. Práce se také zaměřuje na vyhodnocení znalostí žáků v oblasti učiva goniometrické funkce.

Klíčová slova: komplexní čísla, komplexní funkce, mocninné řady, exponenciální funkce, sinus, cosinus, goniometrické funkce, tangens, cotangens, úhel

Počet stran: 68

Počet příloh: 1

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Sonja Truhlářová

Title: The sine and cosine functions

Type of thesis: Master's thesis

Department: Department of Mathematics

Supervisor: doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.

The year of presentation: 2022

Abstract: This master's thesis is focused on theory of trigonometric functions sine and cosine in complex numbers and their basic properties. Some of the important properties are demonstrated by concrete examples. The thesis contains collection of examples with possible solutions which are aimed at primary and secondary school students. The master's thesis is also focused on the evaluation of students' knowledge in the field of trigonometric functions.

Key words: complex numbers, complex function, power series, exponential function, sine, cosine, trigonometric function, tangent, cotangent, angle

Number of pages: 68

Number of appendices: 1

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a uvedla jsem v ní veškerou literaturu a ostatní informační zdroje, které jsem použila

V Olomouci dne ....

podpis

Obsah

Poděkování

Ráda bych poděkovala vedoucí diplomové práce paní doc. RNDr. Jitce Laitochové, CSc. za metodické vedení a cenné rady při jejím vypracování.

Úvod

Pro mou diplomovou práci jsem si zvolila téma Funkce sinus a cosinus, protože jsem chtěla ukázat, jak jsou tyto funkce využitelné i v běžném životě, a také jsem si chtěla rozšířit znalosti v této problematice. Proto bych se chtěla zaměřit na tyto funkce i v komplexním oboru.

Cílem diplomové práce je seznámit se s goniometrickými funkcemi sinus a cosinus v komplexním oboru. Dalším cílem je vytvořit sborník úloh zaměřených na goniometrické funkce v reálném oboru, který by se skládal z velké části z příkladů využitelných v praxi. Také bych chtěla zjistit, jakých znalostí dosahují žáci 9. ročníků v oblasti goniometrických funkcí. Ke zjištění těchto znalostí použiji určité příklady ze sborníku, které bych dala žákům vybrané škole k řešení.

Diplomová práce bude rozdělena do čtyř částí. První dvě části budou zaměřeny na popis a vysvětlení teoretických pojmů a zbylé části budou věnovány tvorbě sborníku příkladů a statistickémů vyhodnocování testu obsahující příklady s goniometrickými funkcemi, které budou řešit žáci 9. ročníků.

První kapitola se bude zabývat základními pojmy z oblasti komplexního oboru. Budou zde připomenuty komplexní čísla a komplexní funkce a jejich vlastnosti, jejichž znalost bude potřebná v další části práce. Mezi tyto potřebné znalosti budou patřit pojmy týkající se mocninných řad v komplexním oboru a také komplexní exponenciální funkce.

V druhé kapitole budou představeny funkce sinus a cosinus v komplexním oboru. Zde budou ukázány důležité definice a vysvětleny vlastnosti těchto funkcí. Některé vlastnosti budou doplněny o konkrétní příklady. Na konci této kapitoly budou zmíněny komplexní funkce tangens a cotangens a jejich vlastnosti.

Třetí kapitola bude zaměřena na tvorbu sborníků příkladů o třech kategoriích různé obtížnosti. Každá kategorie bude obsahovat 6 příkladů a součástí každého příkladu bude popsán postup jeho řešení. Tato kapitola bude také věnována vyhodnocení znalostí z oblasti goniometrických funkcí, které mají žáci 9. ročníků. Pro dané šetření budou vybrány příklady ze sborníku z kategorie A pro základní školu. Budu se zajímat o to, jaké typy příkladů žákům vyhovují více, a které budou žákům dělat potíže. Také se budu zajímat o to, zda se budou lišit znalosti u chlapců a u dívek. U jednotlivých příkladů v testu budou žákům poskytnuty možnosti odpovědí, což je inspirováno soutěží Matematický klokan.

Kapitola 1

Základní pojmy

Na začátku diplomové práce budou nejprve připomenuty základní pojmy týkající se komplexních čísel a komplexních funkcí. Znalost komplexních čísel není důležitá jen pro matematiky, významnou roli zaujímají také u fyziků (například v elektrotechnice, optice, ...) nebo u informatiků (například při práci s obrázky v grafických editorech). Také budou zmíněny některé vlastnosti exponenciálních funkcí v komplexním oboru, jejichž znalost bude potřebná v následujícím textu. Vychází se zde zejména z [1], [8], [12], [3], [6]. Protože tato část diplomové práce slouží zejména pro připomenutí důležitých pojmů, nebudu zde uvádět důkazy. Tyto důkazy můžeme najít v [2].

1.1. Komplexní čísla

Definice 1. *Uspořádaná dvojice (x,y) reálných čícel x a y se nazývá komplexní číslo z, které budeme značit $z = (x, y)$. První složka x komplexního čísla z se nazývá reálná část čísla a značí se $x = Re\, z$, druhá složka y komplexního čísla z se nazývá imaginární část čísla a značí se $y = Im\, z$. Množina $\mathbb{C}$ značí množinu všech komplexních čísel.*

Na množině kompleěních čísel definujeme pro dvojici čísel $z_1 = (x_1, y_1)$ a $z_2 = (x_2, y_2)$ operace sčítání a násobení následovně:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Dále pro tyto operace platí:

$$(x, y) + (0, 0) = (0, 0) + (x, y) = (x, y),$$

$$(x, y) \cdot (0, 0) = (0, 0) \cdot (x, y) = (0, 0),$$

$$(x, y) \cdot (1, 0) = (1, 0) \cdot (x, y) = (x, y).$$

Komplexní číslo $(0, 0)$ značíme jako 0 a nazýváme ho nulovým prvkem, komplexní číslo $(1, 0)$ značíme jako 1 a nazýváme ho jednotkovým prvkem, komplexní číslo $(-x, -y)$ nazýváme opačným prvkem k číslu (x, y).

Definice 2. *Komplexní číslo $i = (0, 1)$ se nazývá imaginární jednotka. Platí vztah $i^2 = (-1, 0)$.*

Poznámka 1. *Komplexní číslo $z = (x, y)$ budeme pomocí imaginární jednotky i zapisovat $z = x + iy$.*

Definice 3. *Ke komplexnímu číslu $z = x+iy$ definujeme číslo komplexně sdružené jako $\overline{z} = x - iy$.*

Poznámka 2. *Pro komplexní čísla z, z_1, z_2 platí následující vztahy:*

$$\overline{\overline{z}} = z, \quad \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \textit{ kde } z_2 \neq 0.$$

Definice 4. *Absolutní hodnotou komplexního čísla $z = (x, y)$ rozumíme číslo:*

$$|z| = \sqrt{(x^2 + y^2)} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}.$$

Poznámka 3. *Pro čísla $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí následující vlastnosti:*

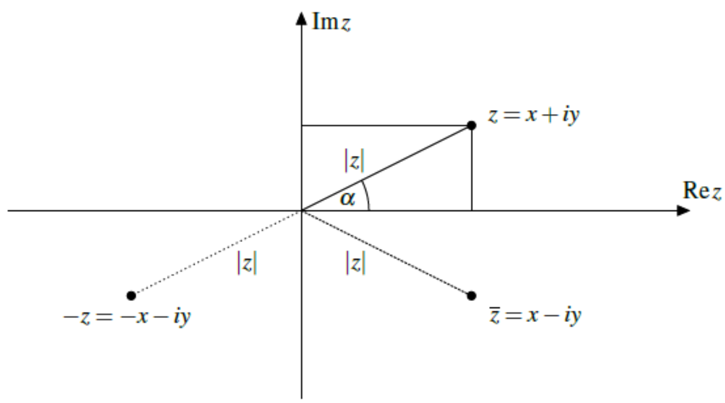
$$|z| \geq 0, \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0,$$

$$z\overline{z} = |z|^2, \quad |z| = |\overline{z}|, \quad |z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \textit{ kde } z_2 \neq 0.$$

1.2. Geometrický tvar komplexního čísla

Komplexní číslo z můžeme vyjádřit také geometricky. Tímto znázorněním bychom komplexnímu číslu přiřadili bod v komplexní rovině se souřadnicemi x, y. Tato rovina se nazývá Gaussova rovina. Na obrázku 1.1 je zobrazeno komplexní číslo z, opačný prvek k číslu z a číslo komplexně sdružené k číslu z. Číslo $|z|$ značí eukleidovskou vzdálenost komplexního čísla z od počátku.

Poznámka 4. *Množinu $\mathbb{C}$ doplněnou o nevlastní prvek ∞, (tj. $\mathbb{C} \cup \infty$) nazýváme rozšířená Gaussova rovina a značíme $\mathbb{S}$.*



Obrázek 1.1: Geometrická interpretace komplexního čísla z

1.3. Goniometrický tvar komplexního čísla

Pro vyjádření komplexního čísla $z \neq 0$ můžeme také využít zápis v goniometrickém tvaru, který vypadá následovně:

$$z = |z| (\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

Definice 5. *Nechť $z \neq 0$ je komplexní číslo. Pak každé $\alpha \in \mathbb{R}$ vyhovující vztahům*

$$\cos \alpha = \frac{Re\, z}{|z|}, \quad \sin \alpha = \frac{Im\, z}{|z|}$$

nazveme hodnotou argumentu komplexního čísla z. Množinu všech argumentů komplexního čísla z budeme značit symbolem $Arg\, z$.

Poznámka 5. *Dále platí:*

- *Argument* α *komplexního čísla* z *není jednoznačně určen, neboť* $\alpha+2k\pi$, *kde* $k \in \mathbb{Z}$, *je také argument stejného komplexního čísla* z. *Pokud* $\alpha \in \langle -\pi; \pi)$, *nazýváme tento argument hlavní (základní) argument čísla* z *a značíme jej* $arg\, z$.

- *Pro komplexní číslo* $z = 0$ *není hodnota* $Arg\, z$ *definována, protože platí* $|z| = 0$.

1.4. Komplexní funkce

Definice 6. *Nechť* $M \subset \mathbb{S}$ *je neprázdná množina. Pak zobrazení* $f : M \to \mathbb{S}$ *nazýváme komplexní funkcí komplexní proměnné. Přitom množinu* M *nazýváme definičním oborem funkce* f *a značíme* D_f, *množinu* $f(M)$ *nazýváme oborem hodnot této funkce a značíme* $H(f)$.

Poznámka 6. *Zobrazení* $f : M \to N$, *kde:*

- $M \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{N} = \mathbb{C}$ *nazýváme komplexní funkcí reálné proměnné,*

- $M \subseteq \mathbb{C}, \mathbb{N} = \mathbb{R}$ *nazýváme reálnou funkcí komplexní proměnné.*

Definice 7. *Nechť* f *je funkce komplexní proměnné. Řekneme, že funkce* f *je konečná funkce, právě když* $H_f \in \mathbb{C}$.

Poznámka 7. *Nechť* f *je konečná funkce komplexní proměnné. Pro každé* $z \in D_f$ *označme* $Re\, f(z) = u(z)$, $Im\, f(z) = v(z)$. *Potom* u, v *jsou reálné funkce komplexní proměnné a platí* $f(z) = u(z) + iv(z)$ *pro každé* $z \in D_f$. *Jestliže je navíc* $D_f \in \mathbb{C}$, *pak pro každé* $z \in D_f$, *kde* $z = x + iy$, *bude pro funkce* $u(z), v(z)$ *platit* $u(z) = u(x, y)$ *a* $v(z) = v(x, y)$. *Funkce* $f(z)$ *můžeme přepsat následovně:*

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Funkci u *nazýváme reálnou složkou funkce* f *a funkci* v *nazýváme imaginární složkou funkce* f. *Jedná se tedy o reálné funkce dvou reálných proměnných.*

1.4.1. Holomorní funkce

Nyní se budeme věnovat komplexním funkcím a jejich komplexní diferencovatelností. Budeme se tedy zabývat tzv. holomorfními funkcemi.

Definice 8. *Nechť f je komplexní funkce komplexní proměnné, která je definovaná na nějakém okolí $U(z_0)$ bodu $z_0 \in \mathbb{C}$. Funkce má derivaci v bodě z_0 právě tehdy, když existuje konečná limita*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Ekvivalentně lze psát

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Funkce $f'(z_0)$ se nazývá derivace funkce f v bodě z_0.

Poznámka 8. *V komplexním oboru nedefinujeme derivaci funkce v bodě ∞. Nezavádí se tedy pojem nevlastnní derivace.*

V následující větě jsou ukázána pravidla pro derivování funkcí v komplexním oboru, která jsou shodná s pravidly pro derivování funkcí v reálném oboru.

Věta 1. *Nechť funkce f, g mají v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ derivaci, pak v tomto bodě mají derivaci také funkce $c \cdot f$, kde $c \in \mathbb{C}$, $f \pm g, f \cdot g, \frac{f}{g}$ pro $g(z_0) \neq 0$ a platí:*

$$[c \cdot f(z_0)]' = c \cdot f'(z_0),$$

$$[f(z_0) \pm g(z_0)]' = f'(z_0) \pm g'(z_0),$$

$$[f(z_0) \cdot g(z_0)]' = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0),$$

$$\left[\frac{f(z_0)}{g(z_0)}\right]' = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}.$$

Věta 2. *Má-li funkce f derivaci v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ a funkce g derivaci v bodě $f(z_0) \in \mathbb{C}$, pak složená funkce $g \circ f = g(f)$ má v bodě z_0 derivaci a platí:*

$$(g \circ f)'(z_0) = [g(f(z_0))]' = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$$

.

Definice 9. *Nechť f je komplexní funkce a bod $z_0 \in \mathbb{H}$, Předpokládejme, že existuje okolí bodu z_0, v jehož každém bodě má funkce f derivaci. Potom řekneme, že funkce f je holomorfní v bodě z_0.*

Definice 10. *Funkce f je holomorfní na otevřené množině $M \subset \mathbb{C}$, jestliže je holomorfní v každém bodě množiny M, tedy v každém bodě z množiny M.*

Definice 11. *Funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se nazývá celá, jestliže je holomorfní na celém $\mathbb{C}$. Celé funkce, které nejsou polynomy, se nazývají transcendentní.*

1.4.2. Mocninné řady a exponenciální funkce

V této části diplomové práce budou připomenuty pojmy týkající se mocninných řad a exponenciálních funkcí v komplexním oboru, které budou zaujímat důležitou roli při definování komplexních goniometrických funkcí sinus a cosinus.

Definice 12. *Nechť z_n je posloupnost bodů z $\mathbb{C}$. Potom výraz*

$$z_0 + z_1 + z_2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} z_n$$

nazýváme (nekonečnou) řadou komplexních čísel. Číslo $s_k = z_0 + z_1 + ... + z_k$ nazýváme k-tý částečný součet řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ a číslo z_n nazýváme člen nekonečné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$.

Definice 13. *Řekneme, že řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ konverguje k číslu $z \in \mathbb{C}$, jestliže posloupnost jejich částečných součtů $\sum\limits_{n=0}^{\infty} s_n$ má limitu rovnu číslu z (tj. $\lim_{n\to\infty} s_n = z$). Číslo z nazýváme součtem řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$, píšeme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n = z$. V opačném případě řekneme, že řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ diverguje.*

Věta 3. *Nechť* $\sum z_n$ *je řada komplexních čísel a nechť* $z_n = x_n + iy_n$ *pro* $n \in \mathbb{C}$. *Pak řada* $\sum z_n$ *konverguje právě tehdy, když konvergují obě řady reálných čísel* $\sum x_n$ *a* $\sum y_n$ *a platí:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + i \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

Definice 14. *Nechť* a_n *je posloupnost bodů z* $\mathbb{C}$ *a* $z_0 \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N} \cup 0$. *Řadu funkcí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{1.1}$$

nazývame mocninnou řadou o středu z_0 *a s koeficienty* a_n. *Číslo* a_0 *nazýváme absolutní člen řady* (1.1).

Pokud bychom zavedli v mocninné řadě (1.1) substituci $v = z - z_0$ (tj. posunutí v komplexní rovině), získali bychom mocninnou řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n v^n$ se středem v počátku. Pro mocninnou řadu se zavedenou substitucí se až na posun vlastnosti nemění. Dále tedy budeme používat mocninnou řadu ve tvaru $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, pro kterou bude platit, že $z_0 = 0$.

Nyní přejdeme k exponenciálním funkcím v komplexním oboru, které definujeme pomocí mocninné řady. Tyto funkce jsou velmi důležité v následujícím textu, proto zde uvedu jednotlivé věci i s důkazy.

Definice 15. *Exponenciální funkce je definována vztahem*

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

pro každé $z \in \mathbb{C}$

Poznámka 9. *Komplexní funkce* z^n *je holomorfním rozšířením reálné funkce* e^x. *Z definice exponenciální funkce vidíme, že platí* $e^0 = 1$ *a* $(e^z)' = e^z$. *Tedy*

$$(e^z)' = (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!})' = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{z^n}{n!})' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

Věta 4. *Pro každé* $s, t \in \mathbb{C}$ *platí*

$$e^{s+t} = e^s e^t.$$

Důkaz. K důkazu tvrzení využijeme binomickou větu a vlastnosti pro součet mocninných řad, které můžeme malézt v [2].

$$e^s e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{s^k}{k!} \frac{t^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} \frac{s^k t^{n-k}}{(n-k)!}) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s^k t^{n-k}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (s+t)^n = e^{s+t}.$$

□

Poznámka 10. *Pro komplexní exponenciální funkce, kde* z, z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$, *platí následující vlastnosti:*

- $e^z \neq 0$ *pro každé* $z \in \mathbb{C}$ *a pro převrácenou hodnotu* $(e^z)^{-1} = e^{-z}$,
- $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2k\pi i$, *kde* $k \in \mathbb{C}$,
- $e^z = -1 \Leftrightarrow z = (2k+1)\pi i$, *kde* $k \in \mathbb{C}$,
- $e^z_1 = e^z_2 = \Leftrightarrow z_1 = z_2 + 2k\pi i$, *kde* $k \in \mathbb{C}$.

Věta 5. *Funkce* e^z *je periodická s periodou* $2\pi i$, *tj. pro každé* $z \in \mathbb{C}$ *platí*

$$e^z = e^{z+2\pi}.$$

Důkaz plyne z poslední vlastnosti exponenciální funkce v Poznámce 10.

Kapitola 2

Goniometrické funkce v komplexním oboru

2.1. Funkce sinus a cosinus

Tato část bude zaměřena na představení goniometrických funkcí sinus a cosinus v komplexním oboru. Budou zde také popsány a vysvětleny důležité vlastnosti těchto funkcí. Tyto vlastnosti budou uvedeny i s důkazy. Některé vlastnosti budou také doplněny o konkrétní příklady. Na konci této kapitoly budou zmíněny komplexní goniometrické funkce tangens a cotangens spolu s jejich vlastnostmi. Budeme vycházet z [1], [2], [10] , [11].

Definice 16. *Funkci sinus (resp. cosinus) definujeme pomocí mocninných řad pro každé $z \in \mathbb{C}$ vzorci:*

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!}.$$

Věta 6. *Pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí tzv. Eulerův vzorec:*

$$e^{\pm iz} = \cos z \pm i \sin z.$$

Důkaz. U tohoto důkazu využijeme definici exponenciální funkce. Důkaz provedeme pro kladné znaménko ve vzorci. Pro záporné znaménko by se důkaz prováděl analogicky.

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k} z^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1} z^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos z + i \sin z.$$

□

Poznámka 11. *Pomocí předchozího vztahu můžeme ekvivalentně vyjádřit definici 16 následovně:*

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \tag{2.1}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \tag{2.2}$$

U funkcí sinus a cosinus můžeme také nalézt reálnou a imaginární složku. Využijeme k tomu následující větu.

Věta 7. *Nechť $z \in \mathbb{C}$, kde z=x+iy pro $x, y \in \mathbb{R}$, platí:*

$$Re(\sin z) = \frac{\sin x(e^{y} + e^{-y})}{2}, Im(\sin z) = \frac{\cos x(e^{y} - e^{-y})}{2},$$

$$Re(\cos z) = \frac{\cos x(e^{-y} + e^{y})}{2}, Im(\cos z) = \frac{\sin x(e^{-y} - e^{y})}{2}.$$

Důkaz. Pro dokazování využijeme Eulerův vztah a rovnosti (2.1), (2.2).

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2i}(e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}) =$$

$$= \frac{1}{2i}\left[e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^{y}(\cos x - i \sin x)\right] =$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\cos x(e^{-y} - e^{y}) + i \sin x(e^{-y} + e^{y})\right] =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2i} \cos x(e^{-y} - e^{y})}_{Im(\cos z)} + \underbrace{\frac{1}{2} \sin x(e^{-y} + e^{y})}_{Re(\cos z)}.$$

$$
\begin{aligned}
\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} &= \frac{1}{2}(e^{i(x+iy)}+e^{-i(x+iy)}) = \\
&= \frac{1}{2}\left[e^{-y}(\cos x + i\sin x) + (e^{y}\cos x - i\sin x\right] = \\
&= \frac{1}{2}\left[\cos x(e^{-y}+e^{y}) + i\sin x(e^{-y}-e^{y})\right] = \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\cos x(e^{-y}+e^{y})}_{Re(\cos z)} + \underbrace{i\frac{1}{2}\sin x(e^{-y}-e^{y})}_{Im(\cos z)}.
\end{aligned}
$$

□

2.1.1. Vlastnosti funkcí sinus a cosinus

Nyní se budeme věnovat vlastnostem komplexních funkcí sinus a cosinus. Mezi tyto vlastnosti bude patřit například parita, periodicita, diferencovatelnost. Také zde budou představeny důležité goniometrické vzorce pro funkce sinus a cosinus v komplexním oboru.

Věta 8. *Nechť* $z \in \mathbb{C}$.

1. *Řekneme, že funkce sinus je lichá, platí tedy:* $\sin(-z) = -\sin z$,
2. *Řekneme, že funkce cosinus je sudá, platí tedy:* $\cos(-z) = \cos z$.

Důkaz. Důkaz provedeme pomocí Eulerovy věty a vlastnosti exponencionální funkce, která nám říká, že tato funkce je periodická s periodou $2\pi i$(Viz Věta 16). Platí tedy rovnice

$$\cos z + i\sin z = e^{iz} = e^{iz+2\pi i} = e^{i(z+2\pi)} = \cos(z+2\pi) + i\sin(z+2\pi),$$

$$\cos z - i\sin z = e^{-iz} = e^{-iz-2\pi i} = e^{-i(z+2\pi)} = \cos(z+2\pi) - i\sin(z+2\pi).$$

Nejprve tyto rovnice sečteme a poté vydělíme číslem 2. Dostaneme tedy

$$2\cos z = 2\cos(z+2\pi),$$

$$\cos z = \cos(z + 2\pi).$$

Dále odečteme druhou rovnici od první a výslednou rovnici vydělíme číslem 2i. Získáme

$$2i \sin z = 2i \sin(z + 2\pi),$$

$$\sin z = \sin(z + 2\pi).$$

Tímto jsme získali požadované vztahy. $\square$

Příklad I. *Vypočítejte* $\sin(-5i) + \cos(-2i)$*.*

Řešení. *Při řešení využijeme informace, že funkce sinus je lichá a funkce cosinus sudá, dále využijeme vztahy* (2.1), (2.2)*.*

$$\begin{aligned}
&\sin(-5i) + \cos(-2i) = -\sin(5i) + \cos(2i) = \\
&= -\frac{e^{i\cdot 5i} - e^{-i\cdot 5i}}{2i} + \frac{e^{i\cdot 2i} + e^{-i\cdot 2i}}{2} = \\
&= -\frac{e^{-5} - e^{5}}{2i} + \frac{e^{-2} + e^{2}}{2} = -\frac{1 - e^{1}0}{2ie^{5}} + \frac{1 + e^{4}}{2e^{2}} = \\
&= i\frac{1 - e^{10}}{2e^{5}} + \frac{1 + e^{4}}{2e^{2}} \doteq -74,203i + 3,762.
\end{aligned}$$

Věta 9. *Komplexní funkce sinus a cosinus jsou periodické s periodou* 2π*.*

Důkaz. Důkaz plyne z Eulerova vzorce a ze skutečnosti, že exponenciální funkce je v $\mathbb{C}$ periodická s periodou $2\pi i$ (viz Věta 5). Bude tedy pro každé $z \in \mathbb{C}$ platit:

$$\cos z + i \sin z = e^{iz} = e^{iz+2\pi i} = \cos(z + 2\pi) + i \sin(z + 2\pi),$$

$$\cos z - i \sin z = e^{-iz} = e^{-iz-2\pi i} = \cos(z + 2\pi) - i \sin(z + 2\pi).$$

Po sečtení těchto rovností a jejich následným vydělením číslem 2 získáme požadovaný vztah pro funkci cosinus:

$$2 \cos z = 2 \cos(z + 2\pi),$$

$$\cos z = \cos(z + 2\pi).$$

Po odečtení těchto rovností a jejich následným vydělením číslem 2i získáme požadovaný vztah pro funkci sinus:

$$2i\sin z = 2i\sin(z+2\pi),$$

$$2\sin z = 2\sin(z+2\pi).$$

□

Příklad II. *Vypočítejte* $\cos(1+2i)$.

Řešení.

$$\begin{aligned}\cos(1+2i) &= \frac{e^{i(1+2i)}+e^{-i(1+2i)}}{2} = \frac{e^{i}e^{-2}+e^{-i}e^{2}}{2} = \frac{e^{i}+e^{-i}e^{4}}{2e^{2}} = \\ &= \frac{2e^{i}+2e^{-i}e^{4}}{4e^{2}} = \frac{2e^{i}+2e^{-i}e^{4}+e^{-i}-e^{-i}+e^{i}e^{4}-e^{i}e^{4}}{4e^{2}} = \\ &= \frac{e^{i}+e^{-i}e^{4}+e^{-i}+e^{i}e^{4}}{4e^{2}} + \frac{e^{i}+e^{-i}e^{4}-e^{-i}-e^{i}e^{4}}{4e^{2}} = \\ &= \frac{e^{i}(1+e^{4})+e^{-i}(e^{4}+1)}{4e^{2}} + \frac{e^{i}(1-e^{4})-e^{-i}(-e^{4}+1)}{4e^{2}} = \\ &= \frac{(e^{i}+e^{-i})(1+e^{4})}{4e^{2}} + \frac{(e^{i}-e^{-i})(1-e^{4})}{4e^{2}} = \cos 1\frac{1+e^{4}}{2e^{2}} + i\sin 1\frac{1-e^{4}}{2e^{2}} \doteq \\ &\doteq 2,033-3,052i.\end{aligned}$$

Věta 10. *Funkce sinus a cosinus mají v* $\mathbb{C}$ *následující vlastnosti:*

1. $\sin z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi,$ *kde* $k\in\mathbb{Z},\ z\in\mathbb{C}$,
2. $\cos z = 0 \Leftrightarrow z = (k+\frac{1}{2})\pi,$ *kde* $k\in\mathbb{Z},\ z\in\mathbb{C}$,
3. $\cos z = \sin(\frac{\pi}{2}-z),$ *kde* $z\in\mathbb{C}$.

Důkaz. K důkazu využijeme Větu 5.

1. Nejprve dokážeme $\sin z = 0$. Využijeme vztahu $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$.

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = 0 \Leftrightarrow e^{iz}-e^{-iz} = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = e^{-iz} \Leftrightarrow e^{2iz} = 1.$$

Podle Věty 5 platí, že $2iz = 2k\pi i$. Po vydělení této rovnice číslem 2i získáme rovnost $z = k\pi, kde\, k\in\mathbb{Z}$.

2. Nyní dokážeme rovnost $\cos z = 0$. Využijeme vztahu $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$.

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 0 \Leftrightarrow e^{iz}+e^{-iz} = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = -e^{-iz} \Leftrightarrow e^{2iz} = -1.$$

   Podle Věty 5 platí, že $2iz = (2k+1)\pi i$. Po vydělení této rovnice číslem 2i získáme rovnost $z = (k+\frac{1}{2})\pi, kde\, k \in \mathbb{Z}$.

3. K důkazu $\cos z = \sin(\frac{\pi}{2} - z)$ využijeme předchozí vztahy a poté za z dosadíme $z = x + iy$ pro $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\cos z &= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \frac{e^{ix-y}+e^{-ix+y}}{2} = \\
&= \frac{1}{2}\left[e^{-y}(\cos x + i\sin x) + e^{y}(\cos x - i\sin x)\right] = \\
&= \frac{1}{2}\left[e^{-y}(\cos(\frac{\pi}{2}-x) + i\sin(\frac{\pi}{2}-x)) + e^{y}(\cos(\frac{\pi}{2}-x) - i\sin(\frac{\pi}{2}-x))\right] = \\
&= \frac{1}{2i}\left[e^{y}(\sin(\frac{\pi}{2}-x) + i\cos(\frac{\pi}{2}-x)) - e^{-y}(\sin(\frac{\pi}{2}-x) - i\cos(\frac{\pi}{2}-x))\right] = \\
&= \frac{1}{2i}\left[e^{y+i(\frac{\pi}{2}-x)} - e^{-y-i(\frac{\pi}{2}-x)}\right] \equiv \frac{e^{i(\frac{\pi}{2}-x)} - e^{-i(\frac{\pi}{2}-x)}}{2i} = \sin(\frac{\pi}{2} - z)
\end{aligned}$$

□

Věta 11. *Komplexní funkce* $\sin z$ *a* $\cos z$ *jsou holomorfním rozšířením reálných funkcí* $\sin x$ *a* $\cos x$ *na* $\mathbb{C}$. *Platí:*

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

Důkaz. Důkaz provedeme pro derivaci funkce $\sin z$. Pomocí definice 16 zjistíme, že platí:

$$(\sin z)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} = \cos z.$$

Analogicky bychom postupovali pro důkaz derivace funkce $\cos z$. □

Poznámka 12. *Připomeňme, že funkce* f *je holomorfní na otevřené množině* $H \subset \mathbb{C}$, *jestliže pro všechna* $z \in \mathbb{H}$ *existuje derivace* $f'(z)$. *Vyšší derivace* f'' *(resp.* $f^(3)$, $f^(4)$, ...*) definujeme pomocí vztahu* $f^{(n+1)} := (f^{(n)})', n \in \mathbb{N}$.

Věta 12. *Funkce* $\sin z$ *a* $\cos z$ *nejsou na* $\mathbb{C}$ *ohraničené.*

Důkaz. K důkazu pro funkci $\sin z$ využijeme vzorec 2.1, tedy $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$. Za z dosadíme $z = ix$, kde $x \in \mathbb{R}$. Pro $x \to \infty$ bude platit:

$$\sin(ix) = \frac{1}{2i}(e^{-x} - e^{x}) \to -\infty$$

Podobně bychom dokázali tuto vlastnost pro funkci $\cos z$. $\square$

Věta 13. *Pro každé* $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *platí vzorce:*

1. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$
2. $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1$
3. $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$
4. $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$
5. $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$

Důkaz. K důkazům využijeme Eulerův vzorec a vztahy 2.1, 2.2.

1. Nejprve dokážeme rovnost $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

$$\sin^2 z + \cos^2 z = \left[\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right]^2 + \left[\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right]^2 =$$

$$= -\frac{1}{4}(e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}) + \frac{1}{4}(e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}) = 1$$

2. Pro důkaz rovností $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1$ a $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$ nejprve využijeme Eulerovy vzorce:

$$e^{i(z_1+z_2)} = \cos(z_1 + z_2) + i \sin(z_1 + z_2),$$

$$e^{-i(z_1+z_2)} = \cos(z_1 + z_2) - i \sin(z_1 + z_2).$$

Dále víme, že pro exponenciální funkce platí následující:

$$e^{i(z_1+z_2)} = e^{iz_1} e^{iz_2} = (\cos z_1 + i \sin z_1)(\cos z_2 + i \sin z_2),$$

$$e^{-i(z_1+z_2)} = e^{-iz_1}e^{-iz_2} = (\cos z_1 - i\sin z_1)(\cos z_2 - i\sin z_2).$$

Získáme tedy:

$$\cos(z_1+z_2) + i\sin(z_1+z_2) = (\cos z_1 + i\sin z_1)(\cos z_2 + i\sin z_2) =$$
$$= (\cos z_1\cos z_2 - \sin z_1\sin z_2) + i(\cos z_1\sin z_2 + \sin z_1\cos z_2),$$

$$\cos(z_1+z_2) - i\sin(z_1+z_2) = (\cos z_1 - i\sin z_1)(\cos z_2 - i\sin z_2) =$$
$$= (\cos z_1\cos z_2 - \sin z_1\sin z_2) - i(\cos z_1\sin z_2 + \sin z_1\cos z_2).$$

Sečtením (odečtením) těchto vztahů a následným vydělením těchto rovnic číslem 2 získáme požadované vztahy:

$$\cos(z_1+z_2) = \cos z_1\cos z_2 - \sin z_1\sin z_2,$$
$$\sin(z_1+z_2) = \cos z_1\sin z_2 + \sin z_1\cos z_2.$$

Podobně bychom dokázali zbylé vzorce. □

Poznámka 13. *Mezi další používané vzorce bychom mohli zařadit tyto:*

$$\sin(z_1-z_2) = \sin z_1\cos z_2 - \sin z_2\cos z_1,$$
$$\cos(z_1-z_2) = \cos z_1\cos z_2 + \sin z_1\sin z_2,$$
$$\sin z_1 + \sin z_2 = 2\sin\frac{z_1+z_2}{2}\cos\frac{z_1-z_2}{2},$$
$$\sin z_1 - \sin z_2 = 2\sin\frac{z_1-z_2}{2}\cos\frac{z_1+z_2}{2},$$
$$\cos z_1 + \cos z_2 = 2\cos\frac{z_1+z_2}{2}\cos\frac{z_1-z_2}{2},$$
$$\cos z_1 - \cos z_2 = -2\sin\frac{z_1+z_2}{2}\sin\frac{z_1-z_2}{2},\ \textit{kde}\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Příklad III. *Vypočítejte* $\sin(2-i)$.

Řešení. *Při řešení využijeme součtové vzorce a vztahy* (2.1), (2.2).

$$\sin(2-i) = \sin 2\cos(-i) - \sin i\cos 2 = \sin 2\cos i - \sin i\cos 2 =$$
$$= \sin 2\frac{e^{i\cdot i}+e^{-i\cdot i}}{2} - \frac{e^{i\cdot i}-e^{-i\cdot i}}{2i}\cos 2 = \sin 2\frac{e^{-1}+e^{1}}{2} - \frac{e^{-1}-e^{1}}{2i}\cos 2 =$$
$$= \sin 2\frac{1+e^2}{2e} - \frac{1-e^2}{2ie} = \sin 2\frac{1+e^2}{2e} + i\frac{1-e^2}{2e}\cos 2 \doteq 1{,}403 + 0{,}489i.$$

2.2. Funkce tangens a cotangens

Na konci této kapitoly ještě zkráceně popíšeme, jak jsou definovány funkce tangens a cotangens na $\mathbb{C}$ a jak vypadají některé vlastnosti těchto komplexních funkcí. Také zde budou ukázány důležité vzorce pro dané funkce.

Definice 17. *Funkce tangens a cotangens jsou pro $z \in \mathbb{C}$ definovány vztahy:*

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z},\ kde\ z \neq (k + \frac{1}{2})\pi,$$

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z},\ kde\ z \neq k\pi,$$

kde $k \in \mathbb{Z}$.

Poznámka 14. *Vztahy v definici 17 můžeme pomocí vztahů (2.1), (2.2) přepsat následovně:*

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i\frac{e^{iz} - 1}{e^{iz} + 1},\ kde\ z \in \mathbb{C},$$

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\frac{e^{iz} + 1}{e^{iz} - 1},\ kde\ z \in \mathbb{C}.$$

2.2.1. Vlastnosti funkcí tangens a cotangens

Pro komplexní goniometrické funkce tangens a cotangens platí následující vlastnosti:

Věta 14. *Pro $z \in \mathbb{C}$ platí vlastnosti:*

1. $\tan z = \frac{1}{\cot z}$, $\cot z = \frac{1}{\tan z}$.

2. *Funkce tangens a cotangens jsou liché na $\mathbb{C}$. Platí:*

$$\tan(-z) = -\tan z,\ \ \cot(-z) = -\cot z.$$

3. *Komplexní funkce $\tan z$ je holomorfním rozšířením reálné funkce $\tan x$ na $\mathbb{C} \setminus \left\{z \in \mathbb{C} \mid z = (k + \frac{1}{2})\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Na této oblasti bude platit:*

$$(\tan z)' = \frac{1}{\cos^2 z}.$$

Komplexní funkce $\cot z$ *je holomorfním rozšířením reálné funkce* $\cot x$ *na* $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid z = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$*. Na této oblasti bude platit:*

$$(\cot z)' = -\frac{1}{\sin^2 z}.$$

4. Funkce tangens a cotangens jsou periodické s periodou π *na* $\mathbb{C}$*. Platí:*

$$\tan(z + \pi) = \tan z, \ \ \cot(z + \pi) = \cot z.$$

Důkaz. Jednotlivá tvrzení dokážeme následovně:

1. Důkaz tohoto tvrzení plyne přímo z Definice 17.

2. Pro důkaz využijeme Definici 17 a Větu (8):

$$\tan(-z) = \frac{\sin(-z)}{\cos(-z)} = \frac{-\sin z}{\cos z} = -\tan z,$$

$$\cot(-z) = \frac{\cos(-z)}{\sin(-z)} = \frac{\cos z}{-\sin z} = -\cot z.$$

3. Tvrzení plyne z Věty 5.

4. Podle Definice 17 a Eulerova vzorce platí:

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = -i\frac{e^{iz} + \frac{1}{e^{iz}}}{e^{iz} - \frac{1}{e^{iz}}} = -i\frac{\frac{e^{2iz}+1}{e^{iz}}}{\frac{e^{2iz}-1}{e^{iz}}} = -i\frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1},$$

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = i\frac{e^{iz} - \frac{1}{e^{iz}}}{e^{iz} + \frac{1}{e^{iz}}} = i\frac{\frac{e^{2iz}-1}{e^{iz}}}{\frac{e^{2iz}+1}{e^{iz}}} = i\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}.$$

Dále víme, že exponenciální funkce je periodická a podle Věty refepe vidíme, že platí:

$$2iz = 2iz + 2ki\pi \ \Leftrightarrow \ z = z + k\pi.$$

□

Poznámka 15. *U komplexních funkcí tangens a cotangens využíváme také vzorce. Mezi nejdůležitější vzorce můžeme zařadit následující:*

$$\tan(z_1 + z_2) = \frac{\tan z_1 + \tan z_2}{1 - \tan z_1 \tan z_2},$$

$$\tan(z_1 - z_2) = \frac{\tan z_1 - \tan z_2}{1 + \tan z_1 \tan z_2},$$

$$\tan^2 z = \frac{1}{\cos^2 z} - 1,$$

$$\cot(z_1 + z_2) = \frac{\cot z_1 \cot z_2 - 1}{\cot z_1 + \cot z_2},$$

$$\cot(z_1 - z_2) = \frac{\cot z_1 \cot z_2 + 1}{\cot z_2 - \cot z_1},$$

$$\cot^2 z = \frac{1}{\sin^2 z} - 1.$$

Dále můžeme zmínit i tyto známé vzorce:

$$\tan z_1 + \tan z_2 = \frac{\sin(z_1 + z_2)}{\cos z_1 \cos z_2},$$

$$\tan z_1 - \tan z_2 = \frac{\sin(z_1 - z_2)}{\cos z_1 \cos z_2},$$

$$\cot z_1 + \cot z_2 = \frac{\sin(z_1 + z_2)}{\sin z_1 \sin z_2},$$

$$\cot z_1 - \cot z_2 = \frac{\sin(z_1 - z_2)}{\sin z_1 \sin z_2}.$$

Příklad IV. *Vypočítejte* $\tan(3 - i)$.

Řešení. *Při řešení využijeme součtové vzorce pro komplexní goniometrické funkce* *a vztahy* (2.1), (2.2).

$$\tan(3-i) = \frac{\sin(3-i)}{\cos(3-i)} = \frac{\sin 3\cos i - \sin i \cos 3}{\cos 3 \cos i + \sin 3 \sin i} = \frac{\sin 3\frac{e+e^{-1}}{2} - \frac{e^{-1}-e}{2i}}{\frac{e+e^{-1}}{2}\cos 3 + \sin 3\frac{e^{-1}-e}{2i}} =$$

$$= \frac{\left(e+e^{-1}\right)^2 \sin 3\cos 3 - \left(e-e^{-1}\right)^2 \sin 3 \cos 3}{\left(e+e^{-1}\right)^2\cos^2 3 + i^2\left(e-e^{-1}\right)^2 \sin^2 3} -$$

$$- i\frac{\left(e+e^{-1}\right)\left(e-e^{-1}\right)\cos^2 3 + \left(e+e^{-1}\right)\left(e-e^{-1}\right)\sin^2 3}{\left(e+e^{-1}\right)^2\cos^2 3 + i^2\left(e-e^{-1}\right)^2\sin^2 3} =$$

$$= \frac{\left(e^2+2ee^{-1}+e^{-2}\right)\sin 3\cos 3 - \left(e^2-2ee^{-1}+e^{-2}\right)\sin 3\cos 3}{\left(e^2+2ee^{-1}+e^{-2}\right)\cos^2 3 + i^2\left(e^2-2ee^{-1}+e^{-2}\right)\sin^2 3} -$$

$$- i\frac{\left(e^2+e^{-2}\right)\cos^2 3 + \left(e^2-e^{-2}\right)\sin^2 3}{\left(e^2+2ee^{-1}+e^{-2}\right)\cos^2 3 + i^2\left(e^2-2ee^{-1}+e^{-2}\right)\sin^2 3} =$$

$$= \frac{4\sin 3\cos 3}{e^2+e^{-2}+2\left(\cos^2 3+\sin^2 3\right)} - i\frac{e^2-e^{-2}}{e^2+e^{-2}+2\left(\cos^2 3+\sin^2 3\right)} =$$

$$= \frac{4\sin 6}{e^2+e^{-2}+2} - i\frac{e^2-e^{-2}}{e^2+e^{-2}+2}$$

$$\doteq -0,0567 - 0,7616i$$

Kapitola 3

Goniometrické funkce na základní škole

Na základních a středních školách se goniometrické funkce probírají v reálném oboru, proto v této kapitole budeme pracovat s goniometrickými funkcemi reálné proměnné, a také ukážeme požadavky Rámcového vzdělávacího programu. Dále bude sestavena sbírka příkladů pro žáky základních a středních škol, ve které budou představeny příklady, jejichž řešení je získáno využitím goniometrických funkcí. Velké množství příkladů je tvořeno tak, aby si žáci dokázali představit, kde všude se v běžném životě s goniometrickými funkcemi můžeme setkat. Ve sborníku se objeví ale také příklady, které slouží k procvičení goniometrických vzorců na teoretických příkladech.

Goniometrické funkce jsou vyučovány na základních a středních školách. Žáci základní školy se s goniometrickými funkcemi v pravoúhlém trojúhelníku většinou setkávají na konci devátého ročníku. V Rámcovém vzdělávacím programu pro Základní školy je goniometrie součástí nadstavbového obsahu tématického celku Geometrie v rovině a prostoru ve vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace. Mezi očekávané výstupy v RVP ZV daného učiva patří:

- žák určuje velikost úhlu měřením a výpočtem,
- žák zdůvodňuje a využívá polohové a metrické vlastnosti základních rovinných útvarů při řešení úloh a jednoduchých praktických problémů; využívá potřebnou matematickou symboliku,

- žák analyzuje a řeší aplikační geometrické úlohy s využitím osvojeného matematického aparátu (viz [16]).

Pro zařazení goniometrických funkcí do školního vzdělávacího programu jsem využila ŠVP Základní školy Křižná ve Valašském Meziříčí, na které jsem absolvovala Souvislou pedagogickou praxi. Zde jsou goniometrické funkce zařazeny v devátém ročníku v učivu Podobnost, goniometrické funkce.
Očekávanými výstupy v daném učivu jsou:

- žák rozliší shodné a podobné útvary,
- žák užívá věty o podobnosti trojúhelníků v početních a konstrukčních úlohách,
- žák zná a využívá funkce sinus, kosinus, tangens jako podíl stran v pravoúhlém trojúhelníku.

Do mezipředmětových vztahů je zařazena tvorba plánů, která se prolíná s předmětem Osobnost a sociální výchova.

Pro zástupce středních škol jsem si vybrala RVP pro gymnázia. Podle Rámcového vzdělávacího programu pro gymnázia se žáci s goniometrickými funkcemi setkávají ve více tematických celcích. Zaprvé jsou tyto funkce součástí tematického celku Čísla a proměnná, do něhož patří učivo rovnice a nerovnice. Žáci se zde setkávají nejen s lineárními a kvadratickými rovnicemi a nerovnicemi, ale také s logaritmickými, exponenciálními a v našem případě zejména s goniometrickými rovnicemi. Mezi očekávané výstupy odpovídající danému učivu patří:

- žák odhaduje výsledky numerických výpočtů a efektivně je provádí, účelně využívá kalkulátor,
- žák upravuje efektivně výrazy s proměnnými, určuje definiční obor výrazu,
- žák řeší soustavy rovnic, v jednodušších případech diskutuje řešitelnost nebo počet řešení,
- žák rozlišuje ekvivalentní a neekvivalentní úpravy,

- žák geometricky interpretuje číselné, algebraické a funkční vztahy, graficky znázorňuje řešení rovnic, nerovnic a jejich soustav.

Další tematický celek, jehož součástí jsou goniometrické funkce, je Závislosti a funkční vztahy. V učivu funkce se žáci seznamují jak s lineárními a kvadratickými funkcemi, tak i s logaritmickými, exponenciálními a goniometrickými funkcemi. Součástí je i učivo zabývající se vztahy mezi goniometrickými funkcemi. Mezi očekávané výstupy patří:

- žák načrtne grafy požadovaných funkcí (zadaných jednoduchým funkčním předpisem) a určí jejich vlastnosti,
- žák formuluje a zdůvodňuje vlastnosti studovaných funkcí a posloupností,
- žák využívá poznatky o funkcích při řešení rovnic a nerovnic, při určování kvantitativních vztahů,
- žák aplikuje vztahy mezi hodnotami exponenciálních, logaritmických a goniometrických funkcí a vztahy mezi těmito funkcemi,
- žák modeluje závislosti reálných dějů pomocí známých funkcí,
- žák řeší aplikační úlohy s využitím poznatků o funkcích a posloupnostech,
- žák interpretuje z funkčního hlediska složené úrokování, aplikuje exponenciální funkci a geometrickou posloupnost ve finanční matematice.

Dále se učivo trigonometrie objevuje v tematickém celku Geometrie. Žáci se zde setkávají se sinovou a cosinovou větou a trigonometrií pravoúhlého a obecného trojúhelníku. Očekávanými výstupy daného učiva jsou:

- žák úlohách početní geometrie aplikuje funkční vztahy, trigonometrii a úpravy výrazů, pracuje s proměnnými a iracionálními čísly,
- žák využívá náčrt při řešení rovinného nebo prostorového problému,

- žák používá geometrické pojmy, zdůvodňuje a využívá vlastnosti geometrických útvarů v rovině a v prostoru(viz [17]).

Pro zařazení goniometrických funkcí do školního vzdělávacího programu jsem využila ŠVP Gymnázia Františka Palackého ve Valašském Meziříčí. S těmito funkcemi se setkávají žáci v druhém ročníku čtyřletého studia (ve čtvrtém ročníku šestiletého studia) v učivu Funkce, rovnice a nerovnice. Žáci se seznámí s goniometrickými funkcemi, vztahy mezi nimi, jejich vlastnostmi a s grafy těchto funkcí. Také se zde objevují výrazy s goniometrickými funkcemi, jednoduché goniometrické rovnice.
Očekávanými výstupy v daném učivu jsou:

- žák zná běžné druhy elementárních funkcí a jejich vlastnosti a zvláštnosti včetně grafů a vztahů spojených s danými funkcemi,

- žák řeší běžné, typické rovnice i nerovnice vztahující se k jednotlivým druhům funkcí.

Do mezipředmětových vztahů jsou zařazeny příklady s kmitavým pohybem a s vlněním, které se prolínají s předmětem Fyzika.

Dále se goniometrické funkce objevují ve třetím ročníku čtyřletého studia (v pátém ročníku šestiletého studia) v učivu Trigonometrie, ve kterém se zabývají žáci goniometrickými funkcemi v pravoúhlém trojúhelníku a sinovou a cosinovou větou v obecném trojúhelníku.
Očekávanými výstupy v daném učivu jsou:

- žák uplatní rozšířené znalosti o pravoúhlém trojúhelníku,

- žák aplikuje sinovou i kosinovou větu v obecném trojúhelníku,

- žák využije získané znalosti k řešení běžných, typických úloh zejména z terénu.

Do mezipředmětových vztahů je zařazeno skládání sil v předmětu Fyzika, dále se dané učivo prolíná do předmětu Zeměpis, ve kterém se žáci zabývají tématem měřické práce a také do předmětu Základy společenských věd, ve kterém se žáci učí o antických filozofech.

Také zde uvedu RVP SOV pro obor Stavitelství a Technické vybavení budov. RVP pro tyto obory zde uvádím z důvodu výzkumného šetření, které jsem prováděla na Střední průmyslové škole stavební.

Ve vzdělávací oblasti Matematické vzdělávání se žáci v učivu Goniometrie a trigonometrie zabývají orientovaným úhlem, goniometrickou funkcí ostrého a obecného úhlu, řešením pravoúhlého trojúhelníku, větou sinovou a kosinovou, goniometrickou funkcí, řešením obecného trojúhelníku a také goniometrickými rovnicemi.
Mezi očekávané výstupy zde patří:

- žák užívá pojmy: orientovaný úhel, velikost úhlu,
- žák určí velikost úhlu ve stupních a v obloukové míře a jejich převody, graficky znázorní goniometrické funkce v oboru reálných čísel,
- žák určí definiční obor a obor hodnot goniometrických funkcí, určí jejich vlastnosti včetně monotonie a extrémů,
- žák s použitím goniometrických funkcí určí ze zadaných údajů velikost stran a úhlů v pravoúhlém a obecném trojúhelníku,
- žák používá vlastností a vztahů goniometrických funkcí při řešení goniometrických rovnic,
- žák používá vlastností a vztahů goniometrických funkcí k řešení vztahů v rovinných i prostorových útvarech,
- žák při řešení úloh účelně využívá digitální technologie a zdroje informací(viz [18], [19]).

Pro ukázku školního vzdělávacího programu jsem si vybrala ŠVP Střední průmyslové školy stavební ve Valašském Meziříčí. Goniometrické funkce jsou zařazeny do

druhého ročníku v učivu Goniometrie a trigonometrie. Žáci se seznámí s orientovaným úhlem a jeho velikostí v míře obloukové a stupňové, dále s goniometrickými funkcemi v oboru reálných čísel, jejich základními vlastnostmi a grafy, s goniometrickými vzorci, úpravou výrazů s goniometrickými funkcem, jednoduchými goniometrickými rovnicemi, větou sinovou a cosinovou a také s řešením obecného trojúhelníku.
K očekávaným výstupům se řadí:

- žák užívá pojmy orientovaný úhel, velikost úhlu,
- žák určí velikost úhlu ve stupních a v obloukové míře a jejich převody, graficky znázorní goniometrické funkce v oboru reálných čísel,
- žák určí definuje goniometrické funkce v oboru reálných čísel,
- žák sestrojí grafy goniometrických funkcí v $\mathbb{R}$,
- žák určí definiční obor a obor hodnot goniometrických funkcí, popíše jejich vlastnosti včetně monotonie a extrémů,
- žák užívá základní goniometrické vzorce při úpravách výrazů s goniometrickými funkcemi,
- žák řeší základní goniometrické rovnice, používá vlastnosti a vztahy mezi goniometrickými funkcemi při řešení jednodušších goniometrických rovnic,
- žák používá sinovou a kosinovou větu k řešení obecného trojúhelníku,
- žák používá sinovou a kosinovou větu k řešení úloh z praxe.

Obsah tohoto učiva se prolíná do předmětu Fyzika, kde se žáci setkávají s kmitavým pohybem a s vlněním.

3.1. Sbírka úloh

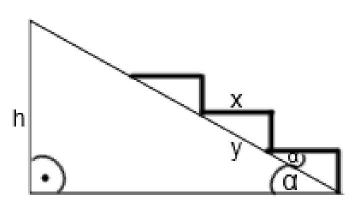
Nyní přejdeme ke sbírce úloh zaměřených na goniometrické funkce. Všechny příklady jsou zaměřeny na goniometrické funkce v reálném oboru, protože komplexní čísla v dnešní době nejsou součástí Rámcového vzdělávacího programu pro základní ani pro střední školy. Úlohy jsou rozděleny podle obtížnosti do tří kategorií, které odpovídají obsahu tohoto učiva od 9. ročníku základní školy po 4. ročník střední školy, a každá z těchto kategorií obsahuje 6 příkladů. Výběr příkladů do jednotlivých kategorií podle obtížnosti byl sestaven zejména podle učebnic [13], [14] a [15]. Dále jsem se inspirovala v [5], [9] a [4]. Také jsem obtížnost úloh konzultovala s učiteli matematiky na Základní škole Křižná ve Valašském Meziříčí a na Střední průmyslové škole stavební ve Valašském Meziříčí. Příklady nejsou plně převzaty z dříve zmíněných učebnic, ale jejich sestavení bylo příklady z uvedené literatury inspirováno.

3.1.1. Kategorie A

Nejméně obtížná kategorie je zde označena písmenem A a je určena pro žáky 9. ročníku základní školy.

Příklad 1. *Určete výšku mezi dvěma patry, pokud víte, že počet schodů mezi dvěma patry je* 24*, sklon stoupání je* 30° *a délka schodu je* $31,5\,cm$*.*

Řešení. *Nejprve si vypočítáme úhlopříčnou délku y jednoho schodu.*



Obrázek 3.1: Náčrtek k příkladu 1

K tomu použijeme funkci cosinus.

$$\cos\alpha = \frac{x}{y} \Rightarrow y = \frac{x}{\cos\alpha} = \frac{31,5}{\cos 30} = 36,4\,cm.$$

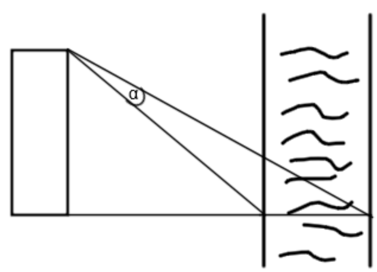
Tuto délku vynásobíme číslem 24 a získáme tak úhlopříčnou délku d celého schodiště.

$$d = 24 \cdot y = 24 \cdot 36,4 = 873\,cm.$$

Výšku mezi dvěma patry vypočítáme pomocí funkce sinus.

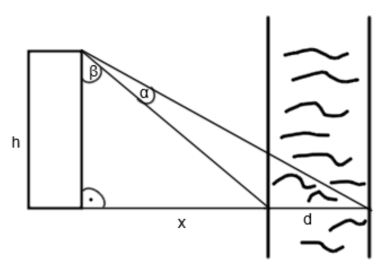
$$\sin\alpha = \frac{h}{d} \Rightarrow h = d\sin\alpha = 873 \cdot \sin 30 \doteq 436,5\,cm.$$

Příklad 2. *Z věže vysoké $21\,m$ a vzdálené $27,5\,m$ od potoka vidíme šířku potoka v zorném úhlu $4°$. Jak je tento potok široký?*



Obrázek 3.2: Příklad 2

Řešení. *Nejprve si vypočítáme úhel β.*



Obrázek 3.3: Náčrtek k příkladu 2

Ten vypočítáme pomocí funkce tangens a využijeme k tomu výšku věže h a vzdálenost od potoka x.

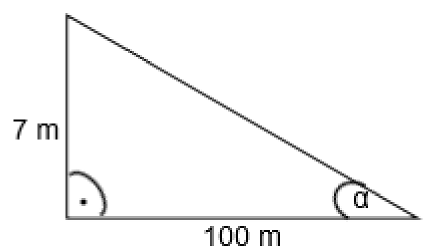
$$\tan\beta = \frac{x}{h} = \frac{27,5}{21} \Rightarrow \beta = 52°37'.$$

Abychom zjistili délku potoka, musíme sečíst úhel alfa a úhel beta, dostaneme tedy $\gamma = \alpha + \beta = 52°37' + 4° = 56°37'$. *Nyní využijeme funkci tangens a vypočítáme délku potoka.*

$$\tan\gamma = \frac{x+d}{h} \Rightarrow d = h\tan\gamma - x = 21 \cdot \tan 56°37' - 27,5 \doteq 4,4\,m.$$

Příklad 3. *Na začátku kopce cyklista uviděl značku, která cyklistu informovala, že ho čeká stoupání* $7\,\%$. *Tento kopec měří* $4,5\,km$. *Jaký výškový rozdíl cyklistu čeká?*

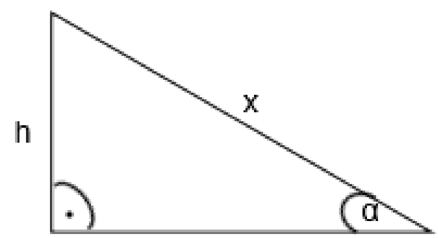
Řešení. *Nejprve si vypočítáme úhel, pod kterým bude cyklista do kopce stoupat. K tomu využijeme značku se* 7% *stoupáním. To nám říká, že za* $100\,m$ *překonáme výškový rozdíl* $7\,m$. *Pro výpočet úhlu* α *využijeme funkci tangens.*



Obrázek 3.4: Náčrtek k příkladu 3

$$\tan\alpha = \frac{7}{100} \Rightarrow \alpha = 4°.$$

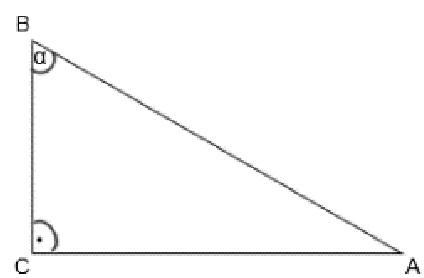
Známe-li úhel alfa, můžeme nyní vypočítat převýšení h, *které čeká cyklistu při délce kopce* $x = 4,5\,km$. *Můžeme využít funkci sinus.*



Obrázek 3.5: Náčrtek 2 k příkladu 3

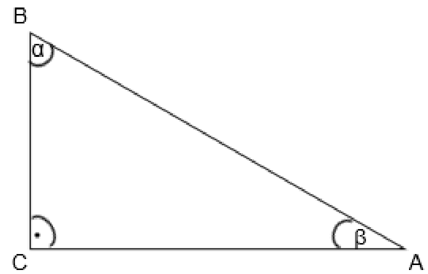
$$\sin\alpha = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x\sin\alpha = 4,5 \cdot 1000 \cdot \sin 4 \doteq 314\,m.$$

Příklad 4. *Jaký bude obvod pravoúhlého trojúhelníku ABC s délkou přepony $8,5\,cm$, když navíc víme, že úhel α má velikost $40°$.*



Obrázek 3.6: Příklad 4

Řešení. *Pro výpočet obvodu trojúhelníku musíme znát velikosti všech jeho stran. Protože ze zadání známe délku přepony a velikost úhlu alfa, můžeme zbylé strany dopočítat pomocí funkcí sinus a cosinus.*



Obrázek 3.7: Náčrtek k příkladu 4

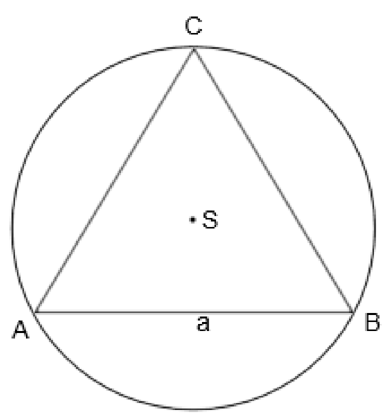
$$\sin\alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \cdot \cos\alpha = 8,5 \cdot \sin 40 = 5,5\,cm,$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c \cdot \cos\alpha = 8,5 \cdot \cos 40 = 6,5\,cm.$$

Nyní stačí tyto strany sečíst a získáme obvod trojúhelníku ABC.

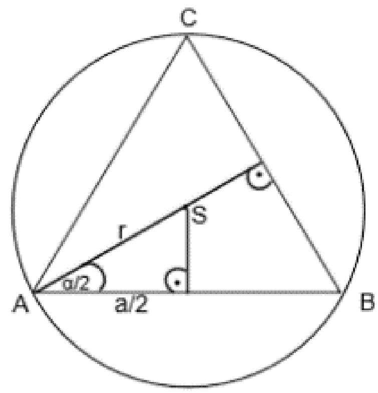
$$o = a + b + c = 6,5 + 5,5 + 8,5 = 20,5\,cm.$$

Příklad 5. *Jaký musí být nejmenší poloměr kruhové desky, aby se z něho dal vyříznout rovnostranný trojúhelník ABC o straně* $a = 10,6\,cm$*?*



Obrázek 3.8: Příklad 5

Řešení. *Při výpočtu budeme vycházet ze skutečnosti, že v rovnostranám trojúhelníku jsou všechny výšky a těžnice rovny a jejich průsečíkem je střed kružnice opsané. Dále víme, že výška je úsečka spojující vrchol s protější stranou a také víme, že s touto stranou svírá pravý úhel.*



Obrázek 3.9: Náčrtek k příkladu 5

S pomocí informace, že v rovnostranném trojúhelníku jsou všechny vnitřní úhly stejně velké, tedy $\alpha = 60°$*, dopočítáme úhel SAB. Zjistíme, že dostaneme úhel* $\frac{\alpha}{2} = 30°$*.*
Ze zadání známe velikost strany a, můžeme tedy použít funkce cosinus a pomocí poloviny strany a a úhlem $\frac{\alpha}{2}$ *vypočítat poloměr kružnice opsané.*

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{\alpha}{2}}{r} \Rightarrow r = \frac{\frac{a}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{5,3}{\cos 30} \doteq 6,1\,cm.$$

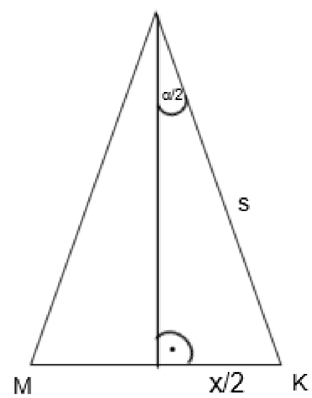
Příklad 6. *Martin a Karel se vsadili o to, kdo doplave dříve k bójce. Oba startují ve stejné vzdálenosti od bójky a směry, kterými k bójce poplavou, svírají úhel* $10°$*. Jak daleko stáli na startu od sebe, jestliže vítězný Martin doplaval k bójce za* $2,3$ *minuty rychlostí* $0,83\,m/s$*.*

Řešení. *Nejprve si vypočítáme vzdálenost Martina od bójky. Využijeme vztah, který nám říká, že vzdálenost se rovná součinu rychlosti a času. Ze zadání vyčteme, že rychlost Martina je* $0,83\,m/s$ *a dráhu uplave za* $2,3$ *minuty. Čas si tedy převedeme na sekundy.*

$$2,3\,min = 183\,s$$

$$s = v \cdot t = 0,83 \cdot 183 = 115\,m$$

Z náčrtku 3.1.1 vidíme, že střed vzdálenosti mezi chlapci svírá se vzdáleností k bójce pravý úhel. Využijeme-li funkci sinus a polovinu úhlu α*, budeme schopni vypočítat polovinu vzdálenosti mezi chlapci.*



Obrázek 3.10: Náčrtek k příkladu 6

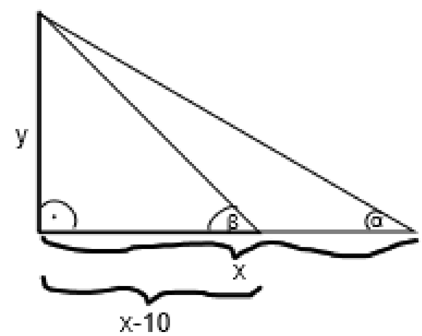
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{x}{2}}{s} \Rightarrow x = 2s\sin\frac{\alpha}{2} = 2 \cdot 115 \cdot \sin 5 \doteq 20\,m$$

3.1.2. Kategorie B

Středně obtížná kategorie je označena písmenem B a je určena pro žáky 1. a 2. ročníku střední školy.

Příklad 7. *Honza uviděl na špičce komína čapí hnízdo pod úhlem* $45°$*. Když popošel ke komínu o* $10\,m$ *blíže, viděl hnízdo pod úhlem* $53°$*. V jaké výšce se čapí hnízdo nachází?*

Řešení. *Budeme-li vycházet z následujícího obrázku 3.1.2, kde úhel* $\alpha = 45°$ *a úhel* $\beta = 53°$*, bude pro výšku komína* y *a vzdálenost Honzy od komína označenou písmenem* x *platit:*



Obrázek 3.11: Náčrtek k příkladu 7

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x \tan \alpha$$

$$\tan \beta = \frac{y}{x-10} \Rightarrow y = (x-10) \tan \beta = x \tan \beta - 10 \tan \beta.$$

Nyní získáme rovnost:

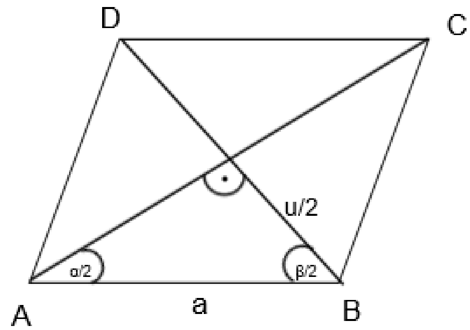
$$x \tan \alpha = x \tan \beta - 10 \tan \beta \Rightarrow x = \frac{10 \tan \beta}{\tan \beta - \tan \alpha}.$$

Po dosazení získáme rovnost:

$$x = \frac{10 \tan 53^\circ}{\tan 53^\circ - \tan 45^\circ} = 40,58 \doteq 41m.$$

Příklad 8. *Nechť je dán kosočtverec ABCD. Délka úhlopříčky BD je* $6\,cm$ *a vztah mezi úhly je* $2\alpha = \beta$*. Urči obvod kosočtverce.*

Řešení. *Nejprve vypočítáme velikosti úhlů* α *a* β*. Vycházíme z vlastnosti, která nám říká, že protější úhly v kosočtverci se rovnají.*



Obrázek 3.12: Náčrtek k příkladu 8

Dostaneme tedy rovnost:

$$2\alpha + 2\beta = 360^\circ \tag{3.1}$$

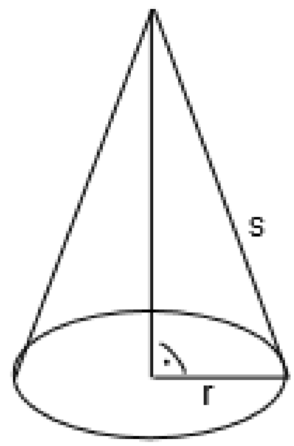
Ze zadání víme, že v tomto případě pro úhly platí $2\alpha = \beta$. *Po dosazení do rovnice* (3.1) *získáme:*

$$\beta + 2\beta = 360^\circ \Rightarrow 3\beta = 360^\circ.$$

Pro úhly bude platit:

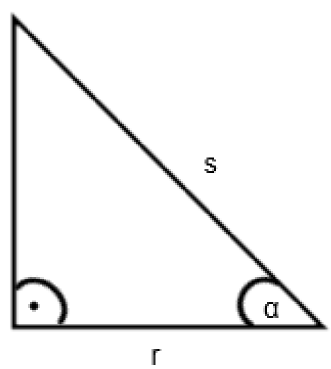
$$\beta = 120^\circ \text{ a } \alpha = 60^\circ.$$

Příklad 9. *Obsah pláště kužele je* $118,94\,cm^2$ *a obsah podstavy je* $50,27\,cm^2$. *Urči velikost úhlu, který bude svírat rovina podstavy kužele se stranou kužele.*



Obrázek 3.13: Příklad 9

Řešení. *V této úloze využijeme vzorce pro výpočet obsahu podstavy kužele a povrchu pláště kužele.*



Obrázek 3.14: Náčrtek k příkladu 9

Na obrázku vidíme, že z těchto vzorců si pro výpočet úhlu α *budeme muset vyjádřit délku pláště označenou písmenem* s *a poloměr podstavy kužele, který je označen písmenem* r.
Pro obsah podstavy kužele platí: $S_p = \pi r^2$ *a pro povrch pláště kužele platí:* $S_k = \pi r s$.
Z rovnice pro výpočet obsahu podstavy si vyjádříme poloměr podstavy r *a dosadíme*

hodnoty:

$$S_p = \pi r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{S_p}{\pi}} = \sqrt{\frac{50,27}{\pi}} = 4\,cm.$$

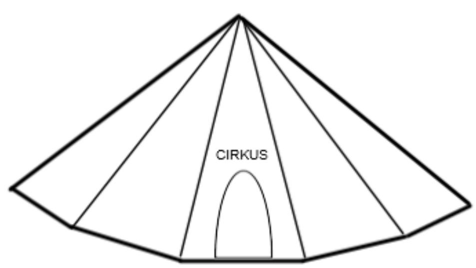
Z rovnice pro výpočet povrchu pláště kužele si vyjádříme délku pláště s a dosadíme hodnoty:

$$S_k = \pi r s \Rightarrow s = \frac{S_k}{\pi r} = \frac{118,94}{4\pi} = 9,465\,cm.$$

Nyní využijeme funkce cosinus pro výpočet úhlu:

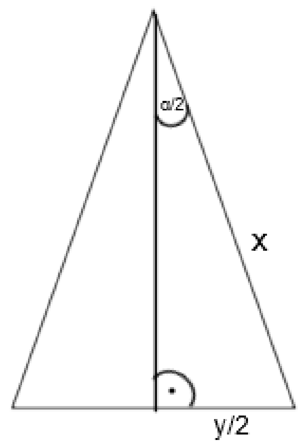
$$\cos\alpha = \frac{r}{s} = \frac{4}{9,465} \Rightarrow \alpha = 65^\circ.$$

Příklad 10. *Cirkusový stan dosahuje v nejvyšším bodu výšky* $15\,m$*. Vrchní plachta je připevněna k zemi osmi lany dlouhými* $20\,m$*. Urči obvod stanu.*



Obrázek 3.15: Příklad 10

Řešení. *Ze zadání víme, že stan je upevněn osmi lany. Dostaneme tedy osmiúhelník, ve kterém vypočítáme velikost vnitřního úhlu* α*:* $\alpha = 360^\circ/8 = 45^\circ$*.*
Protože víme, že osmiúhelník je tvořen z 8 stejných trojúhelníku, využijeme funkci sinus pro výpočet délky základny jednoto trojúhelníku:



Obrázek 3.16: Náčrtek k příkladu 10

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{y}{2}}{x} \Rightarrow y = 2x\sin\frac{\alpha}{2} = 2\cdot 20\sin\frac{45^\circ}{2} = 15,307\,m.$$

Nyní délku základny jednoho trojúhelníku vynásobíme 8 *a získáme tak obvod stanu* O_s*:*

$$O_s = 8\cdot y = 8\cdot 15,307 = 122,459 \doteq 122\,m.$$

Příklad 11. *Výletní letadlo se nachází ve výšce* 900 *m nad zemí. Ve chvíli, kdy pilot zjistí, že je letadlo poškozeno, má pouze* 3 *minuty na přistání. V okolí jsou pouze tři možná místa pro přistání. Místo A vidí pod úhlem* 82°*, místo B vidí pod úhlem* 84° *a místo C pod úhlem* 86°*. Na které místo může pilot doletět, když maximální rychlost letadla je* 200 *km/h.*

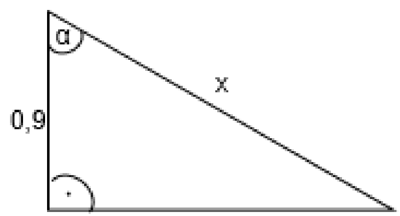
Řešení. *Nejprve je potřeba vypočítat vzdálenost, do které letadlo zvládne doletět. Využijeme tedy vzorec, kde s je vzdálenost, v je rychlost a t je čas:*

$$s = vt = 200\frac{3}{60} = 10\,km.$$

Dále převedeme výšku letadla na kilometry:

$$900\,m = 0,9\,km.$$

Aby byl pilot schopen doletět na dané místo, musí platit, že vzdálenost letadla od místa přistání být musí menší nebo rovna $10\,km$. *Nyní se pokusíme zjistit, zda by pilot doletěl na místo A:*



Obrázek 3.17: Náčrtek k příkladu 11

$$\cos 82^\circ = \frac{0,9}{x} \Rightarrow x = \frac{0,9}{\cos 82^\circ} = 6,5\,km.$$

Nyní se pokusíme zjistit, zda by pilot doletěl na místo B:

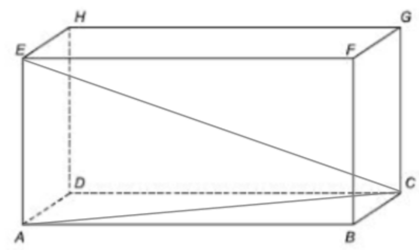
$$\cos 84^\circ = \frac{0,9}{x} \Rightarrow x = \frac{0,9}{\cos 84^\circ} = 8,6\,km.$$

Nyní se pokusíme zjistit, zda by pilot doletěl na místo A:

$$\cos 86^\circ = \frac{0,9}{x} \Rightarrow x = \frac{0,9}{\cos 86^\circ} = 12,9\,km.$$

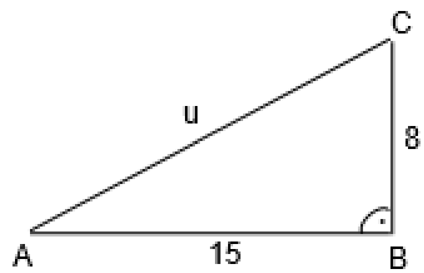
Z toho vyplívá, že pilot může doletět na místo A nebo na místo B.

Příklad 12. *V kvádru ABCDEFGH vypočítejte úhel ACE, když víte, že* $a = 15$ *cm,* $b = 8$ *cm a* $c = 10$ *cm.*



Obrázek 3.18: Příklad 12

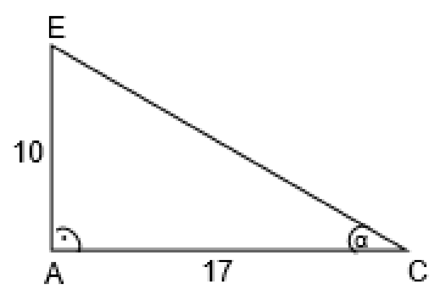
Řešení. *Nejprve si vypočítáme délku úhlopříčky AC pomocí Pythagorovy věty:*



Obrázek 3.19: Náčrtek k příkladu 12

$$u^2 = 15^2 + 8^2 \Rightarrow u = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17\,cm.$$

Dále víme, že úhel EAC je pravý. Využijeme tedy pro výpočet úhlu ACE, který označíme písmenem α, funkci tangens:



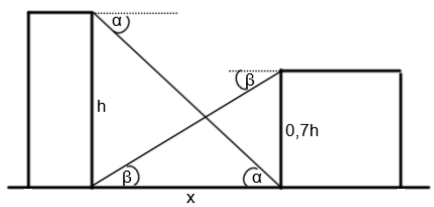
Obrázek 3.20: Náčrtek k příkladu 12

$$\tan\alpha = \frac{u}{c} = \frac{17}{10} = 0,588 \Rightarrow \alpha = 30°27' \doteq 30°.$$

3.1.3. Kategorie C

Nejobtížnější kategorie je označena písmenem C a je zaměřena na žáky 3. a 4. ročníku střední školy.

Příklad 13. *Ze střechy hotelu vidíme patu nákupního centra pod hloubkovým úhlem* $64°$ *a ze střechy nákupního centra vidíme patu hotelu pod hloubkovým úhlem* $12°$*. Jak jsou tyto budovy od sebe vzdáleny, když víme, že výška nákupního centra dosahuje* $70\,\%$ *druhé odmocniny výšky hotelu.*



Obrázek 3.21: Náčrtek k příkladu 13

Řešení. *Nejprve si pomocí funkce tangens vyjádříme výpočet vzdálenosti budov pomocí výšky hotelu:*

$$\tan\alpha = \frac{h}{x} \Rightarrow x = \frac{h}{\tan\alpha}. \tag{3.2}$$

Nyní si vyjádříme výpočet vzdálenosti budov pomocí výšky nákupního centra:

$$\tan\beta = \frac{0,7\sqrt{h}}{x} \Rightarrow x = \frac{0,7\sqrt{h}}{\tan\beta}.$$

Pomocí předchozích vztahů vyjadřujících vzdálenost budov si vyjádříme výšku hotelu:

$$\frac{h}{\tan\alpha} = \frac{0,7\sqrt{h}}{\tan\beta} \Rightarrow \frac{h^2}{\tan^2\alpha} = \frac{0,7^2 h}{\tan^2\beta}$$

$$\Rightarrow h = \frac{0,7^2\tan^2\alpha}{\tan^2\beta} = \frac{0,7^2\tan^2 64}{\tan^2 12}$$

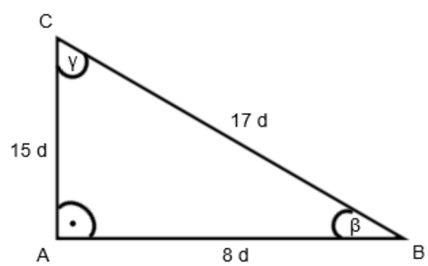
$$\doteq 45,591\,m.$$

Nyní dopočítáme vzdálenost mezi budovami dosazením hodnot do rovnice (3.2) :

$$x = \frac{45,591}{\tan 64} = 22,236\, m.$$

Příklad 14. *Poměr stran v pravoúhlém trojúhelníku ABC je* 17 : 15 : 8*. Jakou velikost bude mít nejmenší úhel v trojúhelníku ABC?*

Řešení. *Nejprve si označíme strany trojúhelníku ABC malými písmeny a, b, c tak, že písmeno a bude přepona a písmena b a c budou odvěsny. Tedy dostaneme:* $a = 17\, d, b = 15\, d, c = 8\, d.$



Obrázek 3.22: Náčrtek k příkladu 14

Na obrázku 3.1.3 vidíme, že úhel $\alpha = 90°$*. Nyní dopočítáme úhel* β *pomocí funkce sinus:*

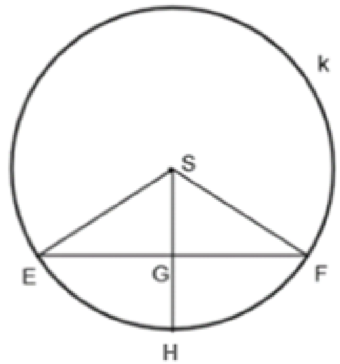
$$\sin \beta = \frac{b}{a} = \frac{15\, d}{17\, d} \Rightarrow \beta = 61°55'.$$

Dále si vypošítáme úhel γ *pomocí funkce cosinus:*

$$\cos \gamma = \frac{b}{a} = \frac{15\, d}{17\, d} \Rightarrow \gamma = 28°4'.$$

Nejmenší úhel bude tedy $\gamma = 28°4'$.

Příklad 15. *Poloměr v dané kružnici k se středem S je* $12,5\, cm$ *a kruhový oblouk mezi body E a F měří* $8\, cm$*. Jaká bude velikost úsečky GH, jestliže je úsečka SH kolmá na úsečku EF a bod G danou úsečku EF půlí.*

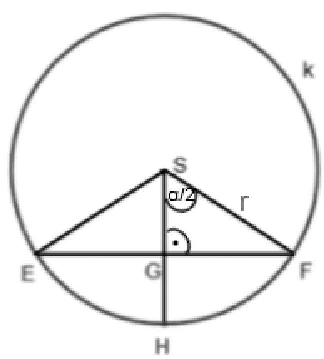


Obrázek 3.23: Příklad 15

Řešení. *V tomto příkladu využijeme pro výpočet velikosti kruhového oblouku následující rovnici, ve které l je délka kruhového oblouku a r poloměr kružnice:*

$$l = \frac{2\pi r}{360}\alpha = \frac{\pi r}{180}\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{180l}{\pi r} = \frac{180 \cdot 8}{\pi 12,5} = 36°40^{'}.$$

Dále v pravoúhlém trojúhelníku FGS budeme počítat s úhlem $\frac{\alpha}{2}$ a pomocí funkce cosinus vypočítáme délku úsečky GS:



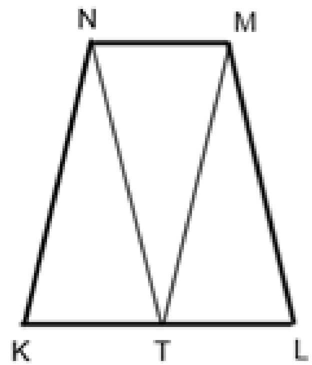
Obrázek 3.24: Náčrtek k příkladu 15

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{|GS|}{r} \Rightarrow |GS| = r\cos\frac{\alpha}{2} = 12,5\cos\frac{36°40^{'}}{2} = 11,863\,cm.$$

Nyní stačí dopočítat délka úsečky GH:

$$|GH| = r - |GS| = 12,5 - 11,863 = 0,637 \doteq 0,6\,cm.$$

Příklad 16. *Urči, v jakém poměru jsou úhly NTM a KNM v rovnoramenném lichoběžníku KLMN, který má výšku* 12 *cm a dále víme, že obsah rovnoramenného trojúhelníku TMN je* $55,2\,cm^2$.

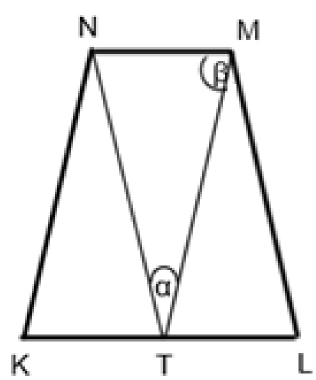


Obrázek 3.25: Příklad 16

Řešení. *Nejprve vypočítáme délku základny a trojúhelníku TMN pomocí vzorce pro výpočet obsahu rovnoramenného trojúhelníku:*

$$S = \frac{1}{2}av \Rightarrow a = \frac{2S}{v} = \frac{2 \cdot 55,2}{12} = 9,2\,cm.$$

Zaměříme se na trojúhelník TMN a vypočítáme úhel NTM označený písmenem α *pomocí funkce tangens:*



Obrázek 3.26: Náčrtek k příkladu 16

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{v} \Rightarrow \alpha = 42^\circ.$$

Nyní ve stejném trojúhelníku dopočítáme úhel β označený písmenem β:

$$\beta = \frac{180^\circ - 42}{2} = 70^\circ.$$

Jelikož je lichoběžník KLMN složen ze tří shodných rovnoramenných trojúhelníků, vypočítame úhel KNM jako součet úhlů α a β:

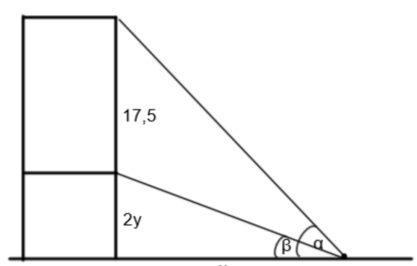
$$|\angle KNM| = \gamma = \alpha + \beta = 42^\circ + 70^\circ = 112^\circ.$$

Nyní dopočítáme poměr úhlů α a γ:

$$\alpha : \gamma = 42 : 112 = 3 : 8.$$

Příklad 17. *Skladník naskládal na dopravní loď přepravní kontejnery do výšky* $17,5\,m$. *Z místa, na kterém se skladník nachází, lze ze země vidět horní hranu věže z kontejnerů pod úhlem* $68^\circ 12'$. *Dále zjistil, že horní hranu kontejneru, který na loď položil jako druhý v pořadí, lze vidět pod úhlem* 45°. *Z kolika kontejnerů je tato věž poskládána?*

Řešení. *Nejprve zjistíme, v jaké vzdálenosti x od kontejnerů se skladník nachází.*



Obrázek 3.27: Náčrtek k příkladu 17

Využijeme funkci tangens a výšku celé věže z kontejnerů označenou písmenem h:

$$\tan\alpha = \frac{h}{x} \Rightarrow x = \frac{h}{\tan\alpha} = \frac{17,5}{\tan 68^\circ 12'} = 7\,m.$$

Dále vypočítáme výšku jednoho kontejneru označenou písmenem y pomocí známého úhlu, pod kterým vidíme vrchní hranu druhého kontejneru. Opět zde využijeme funkci tangens:

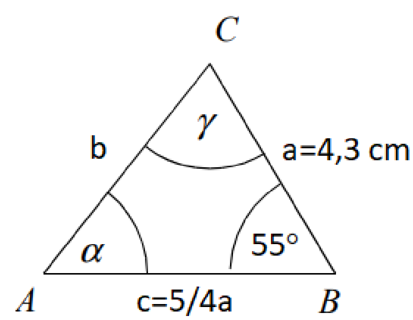
$$\tan\beta = \frac{2y}{x} \Rightarrow y = \frac{x\tan\beta}{2} = \frac{7\cdot\tan 45°}{2} = 3,5\,m.$$

Nyní pomocí údajů o celkové výšce věže z kontejnerů a výšce jednoho kontejneru dopočítáme počet p kontejnérů, které tuto věž tvoří:

$$p = \frac{h}{y} = \frac{17,5}{3,5} = 5.$$

Příklad 18. *V obecném trojúhelníku ABC vypočítej úhel α, jestliže víš, že $a = 4,3\,cm$, $c = \frac{5}{4}a$ a úhel má velikost $\beta = 55°$.*

Řešení. *Při řešení tohoto příkladu využijeme znalost sinové a cosinové věty.*



Obrázek 3.28: Náčrtek k příkladu 18

Nejprve pomocí cosinové věty dopočítáme délku strany b.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta = a^2 + \left(\frac{5}{4}a\right)^2 - 2a\left(\frac{5}{4}a\right)\cos\beta =$$

$$= 4,3^2 + \left(\frac{5}{4}\cdot 4,3\right)^2 - 2\cdot 4,3\cdot\left(\frac{5}{4}\cdot 4,3\right)\cos 55 = 20,867$$

$$\Rightarrow\ b = 4,568\,cm.$$

Nyní můžeme využít sinovou větu pro zjistění velikosti úhlu α.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}\ \Rightarrow\ \sin\alpha = \frac{\sin\beta}{b}a = \frac{\sin 55}{4,568}\cdot 4,3 = 0,771\ \Rightarrow\ \alpha = 50°27'.$$

3.2. Test pro žáky 9. ročníku

V této části diplomové práce se zaměřím na vyhodnocení znalostí žáků, které se týkají goniometrických funkcí. Výzkum provedu formou testu obsahujícího úlohy ze sborníku příkladů. Výzkum měl být původně prováděn na Základní škole Křižná ve Valašském Meziříčí. Na této škole jsem absolvovala 1. i 2. souvislou pedagogickou praxi. Bohužel učivo zabývající se goniometrickými funkcemi je na této škole vyučováno až v devátém ročníku v měsíci červnu. Proto se z důvodu pandemické situace a online výuky dané učivo na škole nestihlo odučit. Z tohoto důvodu jsem se obrátila na Střední průmyslovou školu stavební ve Valašském Meziříčí a požádala jsem učitele, zda bych výzkum mohla provést na této škole. Učitelé mi vyšli vstříct a dali žákům prvních ročníku na přelomu září a října řešit příklady kategorie A, tedy Příklady 1 až 6. Po vzoru Matematického klokana měli k dispozici možnosti odpovědí A-E.

Matematický klokan je mezinárodní matematická soutěž inspirována australskou soutěží pořádanou v osmdesátých letech minulého století. Jako první země v Evropě začala Matematického klokana organizovat Francie v roce 1991. Česká republika pořádá tuto soutěž od roku 1995. V současné době se soutěž Matematický klokan pořádá zhruba v sedmdesáti státech po celém světě. Na konání této soutěže v České republice spolupracují Jednota českých matematiků a fyziků s Katedrou matematiky PdF UP a Katedrou algebry a geometrie PřF UP v Olomouci. Soutěže se účastní žáci základních a středních škol v šesti kategoriích, kterými jsou: Cvrček (2. - 3. třída ZŠ), Klokánek (4. - 5. třída ZŠ), Benjamín (6. - 7. třída ZŠ), Kadet (8. - 9. třída ZŠ), Junior (1. - 2. ročník SŠ) a Student (3. - 4. ročník SŠ). Tato soutěž se koná pro všechny kategorie v jeden den a žáci řeší soubor testových úloh rozdělených do třech kategorií podle obtížnosti, přičemž žáci mají na výběr jednu z pěti nabízených možností řešení (viz [20]).

Výzkumné šetření bylo prováděno u žáků prvního ročníku ve třídách $D1$, $A1$ a $TS1$. Protože se ale ne všichni žáci seznámili na základní škole s goniometrickými funkcemi, vybrala jsem si z těchto tříd pouze žáky, kteří se už na základní škole s tímto učivem setkali.

První ročník Střední průmyslové školy stavební navštěvuje celkem 86 žáků. S goniometrickými funkcemi se na základní škole setkalo pouze 51 žáků, což bylo $59,3\,\%$.

Celkově se tedy výzkumu účastnilo 51 žáků. Ve třídě $D1$, která je zaměřena na pozemní stavitelství a design interiéru, převažují počtem dívky. Z celkového počtu 27 žáků třídy $D1$ se výzkumu účastilo 13 žáků (8 dívek a 5 chlapců). Ve třídě $A1$, která je zaměřena na pozemní stavitelství a architekturu, převažují počtem chlapci. Z celkového počtu 30 žáků $A1$ se výzkumu účastilo 21 žáků (8 dívek a 13 chlapců). Ve třídě $TS1$, která je zaměřena na pozemní stavitelství a technické zařízení budov, převažují počtem chlapci. Z celkového počtu 29 žáků $TS1$ se výzkumu účastilo 18 žáků (3 dívky a 15 chlapců).
Podmínky výzkumu:

- žáci mají 25 minut na řešení příkladů,
- žáci mohou používat kalkulačku,
- žákům bude poskytnut prázdný papír, na kterém mohou provádět výpočty. Tento papír nebude součástí šetření, žáci si ho budou moci ponechat.

Pro větší motivaci žáků řešit dané příklady jsme se s učiteli domluvili, že žáci, kteří budou mít pět a více příkladů správně, budou odměněni známkou 1 do průběžného hodnocení.

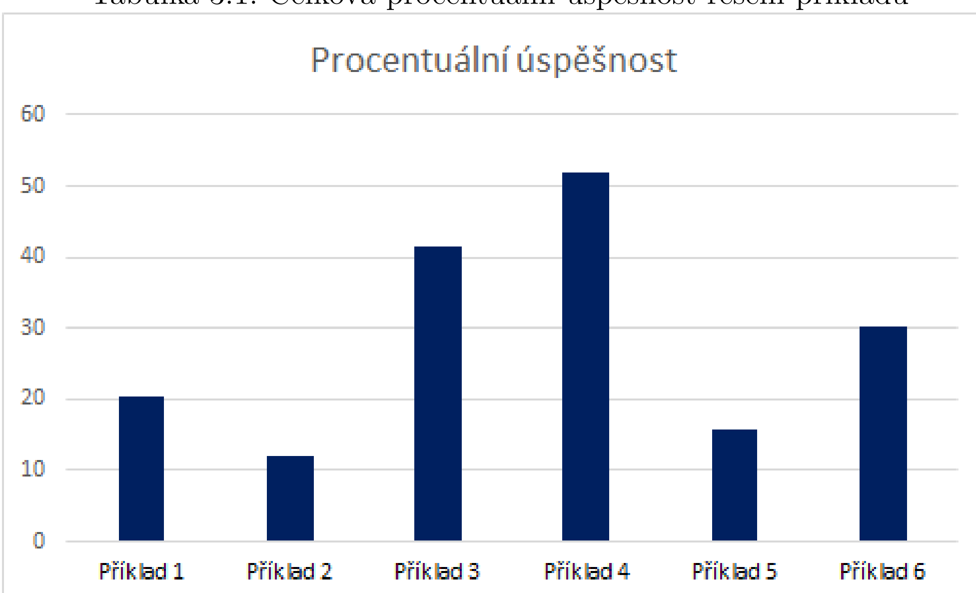
Učitelům byly poskytnuty také postupy řešení příkladů a po ukončení výzkumu si s žáky jednotlivé příklady prošli, aby zjistili, co jim u daných příkladů dělalo největší potíže. Tyto poznatky zmíním v následujícím textu při analýze jednotlivých příkladů.

3.2.1. Statistické šetření celého vzorku respondentů

Ve statistickém šetření se zaměřím na vyhodnocování správnosti řešení jak u celého vzorku respondentů, tak žáky rozdělím na dívky a chlapce a popíšu, jak se řešení u těchto skupin budou lišit. Jak jsem již dříve zmínila, výzkumu se účastnilo 51 žáků. V tomto vzorku bylo celkem 19 dívek a 32 chlapců. Celková úspěšnost při řešení daných příkladů byla 28, 6 %.

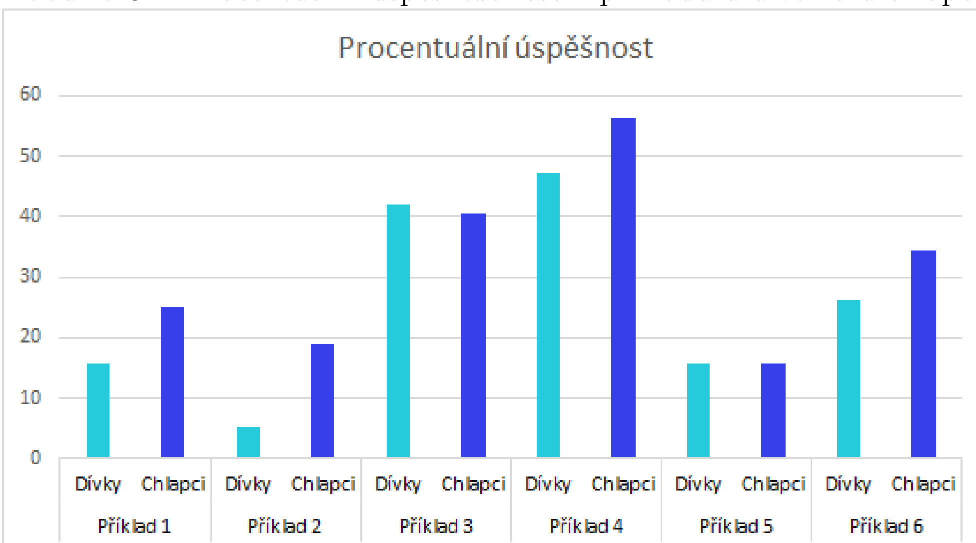
V následující tabulce (3.2.1) je ukázána procentuální úspěšnost všech žáků při řešení jednotlivých příkladů. Nejlépe si žáci vedli při výpočtu příkladu číslo 4, u kterého byla úspěšnost 51, 8 %. Žákům se také ve 41, 4 % dařilo dojít ke správnému výsledku u příkladu číslo 3 a 30, 3 % žáků vyřešilo správně příklad číslo 6. Naopak nejmenší úspěšnost řešení byla u příkladu 2, a to 12, 0 %. Dále pouze 51, 8 % žáků správně vypočítalo příklad 5 a 20, 4 % žáků bylo uspěšných při řešení příkladu číslo 1. Tabulka 3.2.1 nám také ukazuje, že v testu byly zastoupeny příklady rozdílné obtížnosti.

Tabulka 3.1: Celková procentuální úspěšnost řešení příkladů



Nyní se zaměřím na rozdíly úspěšnosti řešení u dívek a u chlapců. Celková úspěšnost u dívek dosáhla 25, 5 % a u chlapců dosáhla 31, 8 %. Dále vidíme, že u všech příkladů kromě příkladu číslo 3 a příkladu číslo 5, ve kterém byla úspěšnost shodná, řešili příklady lépe chlapci. U příkladu 1 měly dívky nižší úspěšnost o 9, 2 %. Největší rozdíl nabízí příklad 2 a to 13, 5 %. Pouze příklad číslo 3 zvládli lépe dívky. Zde byl rozdíl ale jen 1,5 %. Příklad 4 nabízí nejvyšší úspěšnost řešení jak u dívek, tak u chlapců. Nicméně opět si vedli lépe chlapci o 6,8 %. U příkladu číslo 5 byla úspěšnost u chlapců a dívek shodná. Při řešení příkladu 6 si opět počínali lépe chlapci a to o 8,1 %.

Tabulka 3.2: Procentuální úspěšnost řešení příkladů u dívek a u chlapců



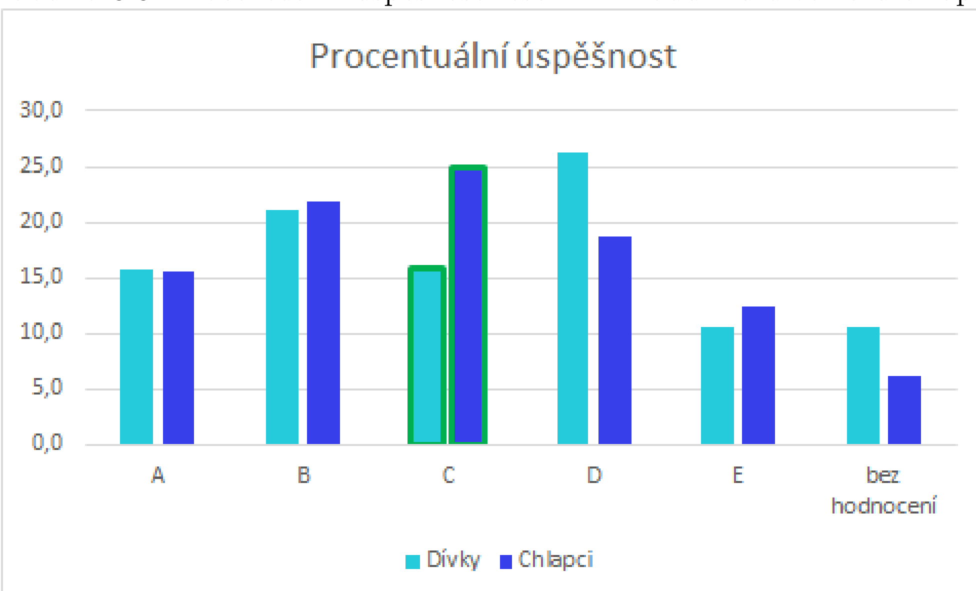
3.2.2. Statistické šetření jednotlivých příkladů

V této části diplomové práce podrobněji rozeberu jednotlivé příklady. Ukáži, jaké odpovědi dívky a chlapci volili a popíši, co žákům dělalo při řešení příkladů potíže. Do tabulek jsem zahrnula i možnost bez hodnocení. To znamená, že někteří žáci pravděpodobně kvůli časovému limitu 25 minut nebo obtížnosti příkladu nestihli vypočítat všechny příklady a proto u některých příkladů nebyla vybrána žádná odpověď. Správná odpověď v každé tabulce je zvýrazněna zelenou barvou.

Příklad 1

V příkladu 1 měli žáci za úkol počítat výšku mezi dvěma patry. Zde byla strávná odpověď C. Jak můžeme z grafu 3.2.2 vyčíst, chlapci měli 25 % úspěšnost, což bylo přibližně o 10 % více, jak u dívek. U tohoto příkladu můžeme vydět, že dívky ve větším počtu volily odpověď B a D. Správná odpověď byla vybrána největším počtem chlapců, těsne za touto odpovědí vybírali chlapci odpověď B. Po konzultaci tohoto příkladu s učitelem, žáci uvedli jako největší problém skutečnost, že si v náčrtku zakreslili úhel α špatně. Také uváděli informaci, že si nepamatují definice goniometrických funkcí. Tento problém se samožřejmě přenášel i do následujících příkladů.

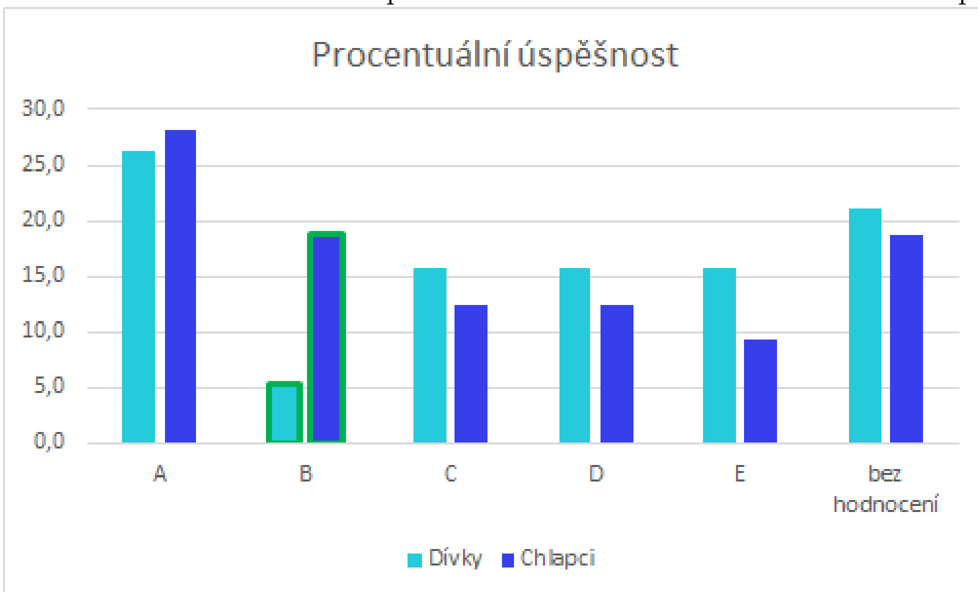
Tabulka 3.3: Procentuální úspěšnost řešení Příkladu 1 u dívek a u chlapců



Příklad 2

Druhý příklad byl zaměřený na výpočet šířky potoka se správnou odpovědí B. Tento příklad se jeví u žáků jako nejobtížnější. Úspěšnost u chlapců dosáhla 18,8 %, u dívek to bylo pouze 5,3 %. Tabulka nám ukazuje, že chlapci ve větší míře vybrali jako potencionálně správnou odpověď řešení A. Kdežto dívkám se jevily jako správné odpovědi všechna ostatní řešení (tedy řešení A, C, D, E). Taky můžeme vidět, že téměř 20 % žáků nevybralo žádnou odpověď. Z těchto informací můžeme usuzovat, že žáci odpověď spíše tipovali a jako nejpravděpodobnější řešení se jim jevila odpověď A. Učiteli poté říkali, že tento příklad byl žáky velmi obtížný. Spousta žáků měla problém s náčrtkem a několik žáků zapomnělo vypočítané úhly sečíst.

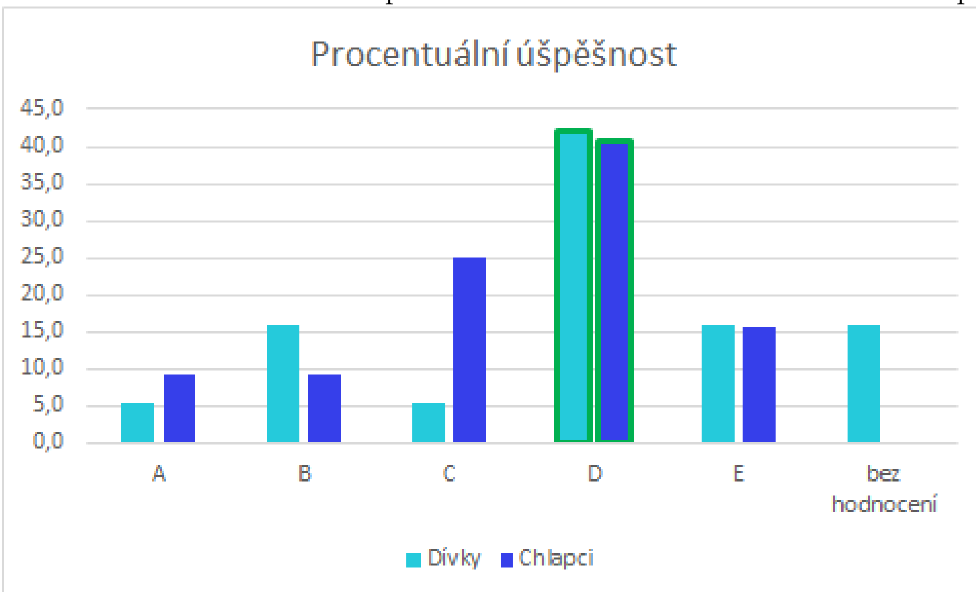
Tabulka 3.4: Procentuální úspěšnost řešení Příkladu 2 u dívek a u chlapců



Příklad 3

U příkladu číslo 3 žáci počítali výškový rozdíl. S tímto typem příkladu se žáci mohou setkat v běžném životě, když uvidí dopravní značku s Nebezpečným stoupáním. Z tohoto důvodu jsem také tento příklad do výzkumu zařadila. Správná odpověď zde byla za B. Příklad 3 správně vyřešilo 42, 1 % dívek a 40, 6 % chlapců. Vysoké procento žáků s tímto příkladem problém nemělo, protože se s tímto typem příkladu setkali již dříve. Špatná odpověď u některých žáků byla zapříčiněna špatným popisem náčrtku, kde žáci počítali s odvěsnou o délce 100 m. Další žáci zapomněli úhel dopočítat a ihned počítali výškový rozdíl s úhlem $\alpha = 7°$.

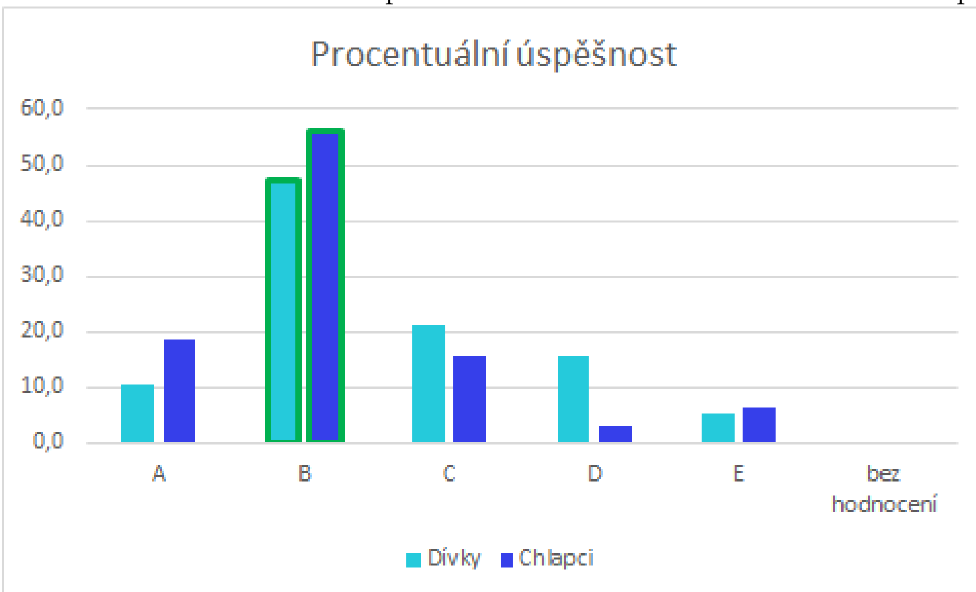
Tabulka 3.5: Procentuální úspěšnost řešení Příkladu 3 u dívek a u chlapců



Příklad 4

V příkladu 4 žáci počítali obvod pravoúhlého trojúhelníku. Zde žáci potřebovali pouze znát definice funkcí sinus a cosinus a vědět, jak se počítá obvod u pravoúhlého trojúhelníku. Tento příklad patřil tedy k jednodušším, proto zde byla také vysoká úspěšnost. Správně příklad vyřešilo 47, 4 % dívek a 56, 3 % chlapců. S tímto příkladem si neporadili ti žáci, kteří si nepamatovali definice funkce sinus a cosinus.

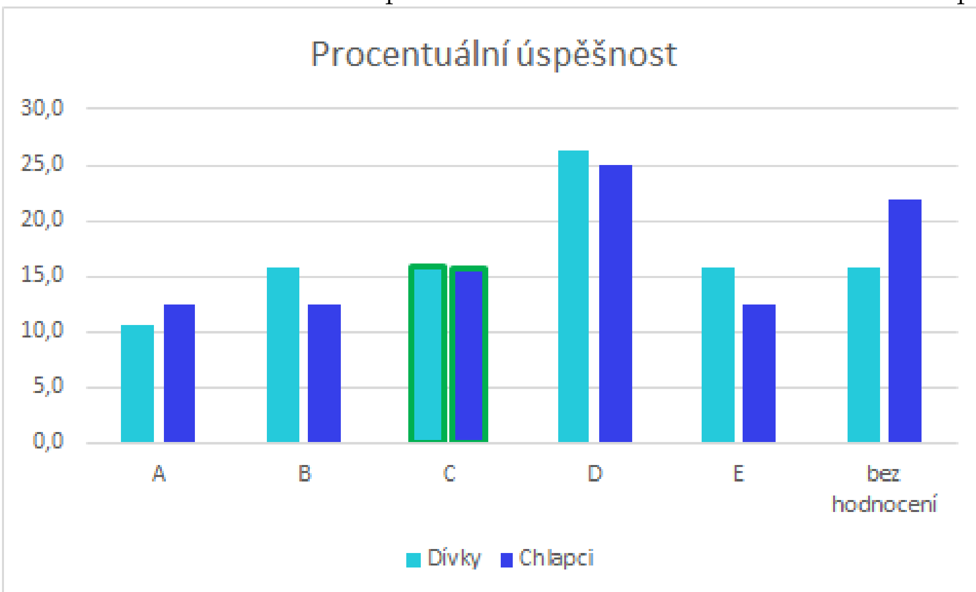
Tabulka 3.6: Procentuální úspěšnost řešení Příkladu 4 u dívek a u chlapců



Příklad 5

Příklad 5 byl zaměřený na výpočet poloměru kruhové desky. Správné řešení u tohoto příkladu byla odpověď C. Můžeme vidět, že procentuální úspěšnost byla u dívek a chlapců téměř stejná a to 15,8 % a 15,6 %. Také si můžeme všimnout, že žáci volili ve větší míře odpověď D (26,3 % dívek a 25,0 % chlapců). Ostatní odpovědi byly vybírány zhruba ve stejné míře. Z tohoto můžeme usuzovat, že většina žáků svou odpověď nejspíše vybrala náhodně. Velké množsví žáků zde nevybralo žádnou odpověď (15,8 % dívek a 21,9 % chlapců). Žáci učiteli sdělili, že pro ně byl příklad velmi obtížný. Nepamatovali si vlastnosti rovnostranného trojúhelníku a kružnice opsané.

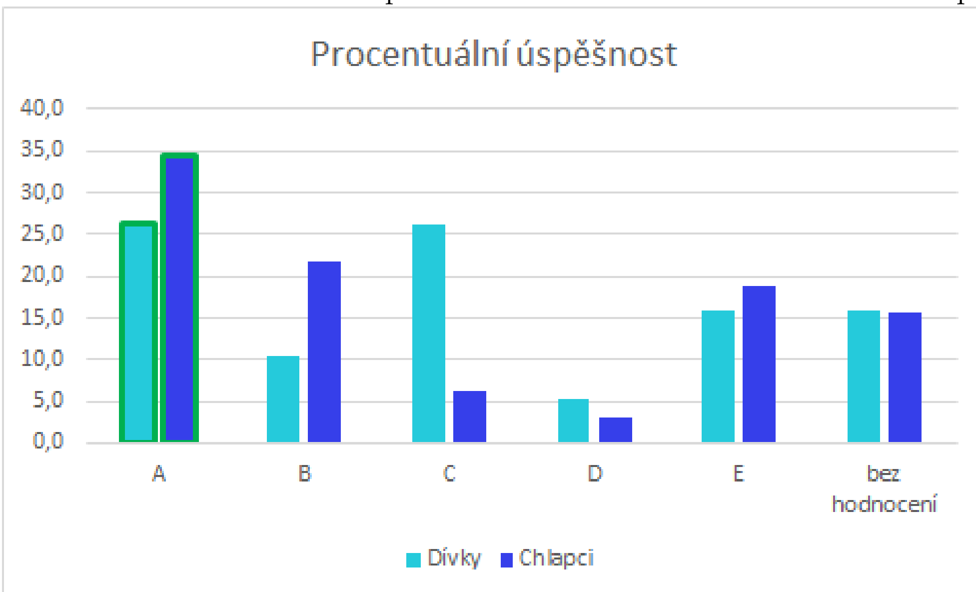
Tabulka 3.7: Procentuální úspěšnost řešení Příkladu 5 u dívek a u chlapců



Příklad 6

V posledním příkladu měli žáci za úkol spočítat vzdálenost dvou plavců, kde spávně bylo řešení A. Správnou odpověď vybralo 26,3 % dívek a 34,4 % chlapců. Také zde byli žáci, kteří se nedopracovali k žádné odpovědi (15,8 % dívek a 15,6 % chlapců). Na začátku tohoto příkladu si žáci museli vypočítat dráhu k bójce, k čemuž mohli využít vzorec s=v*t. Právě tato část dělala žákům největší potíž. Velké množství z nich si tento vzorec, který by měli znát z předmětu fyzika, nepamatovalo. Dále si někteří žáci neuvědomili, že pokud si úhel α rozpůlí, mohou využít funkce sinus v pravoúhlém trojúhelníku.

Tabulka 3.8: Procentuální úspěšnost řešení Příkladu 6 u dívek a u chlapců



Výzkumné šetření nám ukázalo, že znalosti žáků v oblasti goniometrických funkcí nejsou na vysoké úrovni a je zde velký potenciál pro zlepšení vědomostí žáků v daném učivu. Tento výsledek ale může být zapříčiněn pandemickou situací. Z časových možností vyplynulo, že učitelé dané učivo probírali se žáky jen okrajově. Další možnost je, že se danému učivu přikládá málo pozornosti na základních školách, protože nebývá u žáku velmi oblíbené.

Závěr

První část diplomové práce byla věnována obecným vlastnostem komplexních čísel a komplexních funkcí. Dále jsem zde nastínila vlastosti mocninných řad a exponenciálních funkcí, které jsem poté využila v části práce zabývající se goniometrickými funkcemi sinus a cosinus v komplexním oboru. Zde jsem vysvětlila vlastnosti těchto funkcí, mezi něž patřila např. parita, periodicita, diferencovatelnost, a některé tyto vlastnosti jsem doplnila o konkrétní příklady. Také jsem zde zmínila funkce tangens a cotangens v komplexním oboru a ukázala některé jejich vlastosti.

V druhé polovině své diplomové práce jsem jsem nejprve vytvořila sbírku příkladů obsahující goniometrické funkce v reálném oboru. Ta se skládala ze tří kategorií různé obtížnosti a každá kategorie obsahovala 6 příkladů. Tyto příklady byly vytvářeny tak, aby si žáci udělali představu, že se s goniometrickými funkcemi mohou setkat v běžném životě. Příklady byly doplněny o způsob řešení. Následující kapitola byla věnována výzkumnému šetření. Výzkumné šetření jsem původně měla provádět na ZŠ Křižná ve Valašském Meziříčí. Z důvodu pandemické situace se učivo goniometrické funkce na této škole nestihlo probrat. Proto jsem tento výzkum provedla na Střední průmyslové škole stavební ve Valašském Meziříčí v prvním ročníku na začátku školního roku. Pro výzkum jsem zvolila příklady kategorie A. Podobně jako u matematické soutěže Matematický klokan jsem k těmto příkladům přidala 5 možných odpovědí. Šetření se účastnio celkem 51 žáků (19 dívek a 22 chlapců) z celkového počtu 85 žáků navštěvujících první ročník. Zbylí žáci se na základní škole s goniometrickými funkcemi nesetkali, proto byli předem z výzkumu vyřazeni. Žáci dotali 25 minut pro řešení příkladů. Z výzkumu vyplynulo, že celková úspěšnost řešení příkladů byla $28,6\%$. Při rozdělení žáků na dívky a chlapce jsme zjistili, že dívky dosáhly úspěšnosti $25,5\%$ a chlapci $31,8\%$. Na začátku výzkumného šetření jsem očekávala, že úspěšnost řešení bude vyšší, než které bylo skutečtě dosaženo.

Při vypracovávání práce jsem si prohloubila znalosti komplexních goniometrických funkcí sinus a cosinus. V praktické části jsem se naučila, jak zpracovat získaná data z výzkumného šetření a jak se v těchto datech orientovat. Ukázala jsem na konkrétních příkladech, že goniometrické funkce jsou velmi často využívany v běžném životě a přesvědčila jsem se, že pokud jsou tyto funkce žákům ukazovány na konkrétních využitelných příkladech, žáci k tomuto učivu získají pozitivnější přístup. Při psaní diplomové práce jsem se naučila pracovat s cizojazyčnými publikacemi, prohloubila si znalosti v textovém editoru TeX a při tvorbě obrázků jsem se naučila pracovat s programem SMART Notebook.

Literatura

[1] Veselý, J.: *Komplexní analýza pro učitele* Univerzita Karlova v Praze: Nakladatelství Karolinum, Praha, 2000. ISBN 80-246-0202-4.

[2] Kalas, J.: *Analýza v komplexním oboru* Masarykova univerzita, Brno, 2006. ISBN 80-210-4045-9.

[3] Ráb, M.: *Komplexní čísla v elementární matematice* 2. vydání, Masarykova univerzita, Brno, 1996. ISBN: 802101475X.

[4] Yang, D.: *Trigonometric functions and Complex Numbers: In MAthematical Olympiad and Competitions* World Scientific Publishing Company, Singapore, 2016. ISBN: ?978-1938134869.

[5] Smýkalová, R.: *Goniometrické funkce v elementární matematice* CERM, Brno, 2015. ISBN: 978-80-7204-937-0.

[6] Bouchala, J.: *Funkce komplexní proměnné [online]* [cit.2022-01-30]. Dostupné z: https://homel.vsb.cz/ bou10/archiv/fkp.pdf

[7] Lomtatidze, L.,Plch, R.: *Sázíme v LaTeXu diplomovou práci pro matematiky* Masarykova univerzita, Brno, 2003. ISBN: 80-210-3228-6.

[8] Jarník, J.: *Komplexní čísla a funkce* Masarykova univerzita, Mladá fronta, Praha, 1967.

[9] Calda, E.: *Matematika pro gymnázia - Komplexní čísla* Prometheus nakladatelství, Praha, 2010. ISBN: 978-80-7196-364-6.

[10] Lang, S.: *Complex analysis* 4. vydání, Springer, New York, 1999. ISBN: 978-0387985923.

[11] Needham, S.:: *Complex analysis* Oxford University press, New York, 1997. ISBN: 978-0198534464.

[12] Zeman, J.: *Úvod do komplexní analýzy* 2. vydání, Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc, 1998. ISBN 80-706-7906-9.

[13] Odvárko, O., Kadleček, J.: *Matematika pro 9.ročník ZŠ,2.d.* Prometheus nakladatelství, Praha, 2018. ISBN: 978-80-7196-441-4.

[14] Odvárko, O.: *Matematika pro gymnázia - Goniometrie* Prometheus nakladatelství, Praha, 2010. ISBN: 978-80-7196-359-2.

[15] Vondra, J.: *Matematika pro SŠ 3. díl-Planimetrie* Didaktis, Brno, 2019. ISBN: 978-80-7358-320-0.

[16] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání* [online]. MŠMT, Praha, 2013, [cit. 2021-11-27]. Dostupné z WWW:¡http://www.nuv.cz/t/rvp-pro-zakladni-vzdelavani¿.

[17] *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia* [online]. MŠMT, Praha, 2021, [cit. 2022-03-04]. Dostupné z WWW:¡https://www.nuv.cz/t/rvp-pro-gymnazia¿.

[18] *Rámcový vzdělávací program pro obor 36-47-M/01 Stavebnictví* [online]. MŠMT, Praha, 2019, [cit. 2022-03-04]. Dostupné z WWW:¡https://www.nuv.cz/file/4008/¿.

[19] *Rámcový vzdělávací program pro obor 36-45-M01 Technická zařízení budov* [online]. MŠMT, Praha, 2019, [cit. 2022-03-04]. Dostupné z WWW:¡https://www.nuv.cz/file/4006/¿.

[20] Informace o soutěži. *Matematický klokan* [online]. Olomouc, [cit. 2022-03-24]. Dostupné z WWW:¡https://matematickyklokan.net¿.

Příloha A

Ukázka testu pro žáky 9. ročníku

Goniometrické funkce - příklady

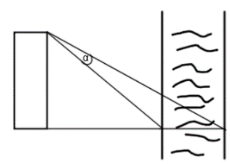
Třída: …….

Pohlaví: chlapec – dívka

1) Určete výšku mezi dvěma patry, pokud víte, že počet schodů mezi dvěma patry je 24, sklon stoupání je 30° a délka schodu je 31,5 cm.

a) 400,5 cm b) 421,25 cm c) 436,5 cm d) 445,2 cm e) 455,5 cm

2) Z věže vysoké 21 m a vzdálené 27,5 m od potoka vidíme šířku potok v zorném úhlu 4°. Jak je tato řeka široká?

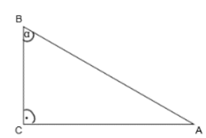


a) 2,1 m b) 4,4 m c) 12,6 m d) 22 m

e) 31,9 m

3) Na začátku kopce cyklista uviděl značku, která cyklistu informovala, že ho čeká stoupání 7 %. Tento kopec měří 4,5 km. Jaký výškový rozdíl cyklistu čeká?

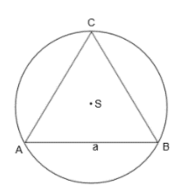
a) 302 m b) 305 m c) 310 m d) 314 m e) 319 m



4) Jaký bude obvod pravoúhlého trojúhelníku ABC s délkou přepony 8,5 cm, když navíc víme, že úhel alfa má velikost 40°.

a) 17,75 cm b) 20,5 cm c) 23 cm d) 25,5 cm e) 28 cm

5) Jaký musí být nejmenší poloměr kruhové desky, aby se z něho dal vyříznout rovnostranný trojúhelník ABC o straně a = 10,6 cm?



a) 3,7 cm b) 5 cm c) 6,1 cm d) 7,5 cm e) 8,9 cm

6) Martin a Karel se vsadili o to, kdo doplave dříve k bójce. Oba startují ve stejné vzdálenosti od bójky a směry, kterými k bójce poplavou, svírají úhel 10°. Jak daleko stáli na startu od sebe, jestliže vítězný Martin doplaval k bójce za 2,3 minuty rychlostí 0,83 m/s.

a) 20 m b) 22,5 m c) 25 m d) 27,5 m e) 30 m