UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

Bakalářská práce

Veronika Kremlová

Konstrukční úlohy řešené s využitím shodnosti a podobnosti

Olomouc 2022

vedoucí práce: Mgr. Jiří Vaško

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně s použitím pramenů uvedené v seznamu literatury.

V Olomouci dne 30. 11. 2022 ....

podpis

Poděkování

Děkuji paní Mgr. Jitce Hodaňové, Ph.D. a panu Mgr. Jiřímu Vaško za odborné vedení mé bakalářské práce, za cenné rady a čas, který mi věnovali.

Obsah

Úvod

Jak jistě plyne z názvu, bakalářská práce se bude zabývat shodnými a podobnými zobrazeními v konstrukčních úlohách.

S konstrukčními úlohami shodnosti a podobnosti jsme se setkali již na základní škole, kdy jsme využívali věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků. Na střední škole jsme se už setkali se složitějšími úlohami, kdy jsme pomocí shodných či podobných zobrazení měli sestrojit nějaký útvar. To však bylo pro mnoho žáků velkým problémem. Na základě toho jsem se rozhodla zpracovat řešené příklady s využitím těchto zobrazení v rovině.

Jak už bylo zmíněno, cílem práce bude vypracovat soubor řešených konstrukčních úloh s využitím některého ze shodných zobrazení nebo s využitím podobného zobrazení.

Celá práce je rozdělena do šesti kapitol. První kapitola je zaměřena na planimetrii, kde se seznámíme se základními geometrickými pojmy a útvary, jimiž jsou trojúhelník, kružnice a mnohoúhelníky.

Druhá až pátá kapitola se zaměřuje na zobrazení v rovině. Postupně se zde budeme zaobírat jednotlivými shodnými zobrazeními v rovině, stejnolehlým zobrazením a s ním souvisejícím podobným zobrazením v rovině. Součástí kapitol shodné zobrazení v rovině a podobné zobrazení v rovině jsou podkapitoly o shodnosti či podobnosti trojúhelníků, kde si vysvětlíme, za jakých podmínek jsou dva trojúhelníky shodné resp. podobné. S podobným zobrazením souvisí také věty o pravoúhlém trojúhelníku, které můžeme nalézt v kapitole 5.2.

Poslední kapitola je věnována vybraným řešeným konstrukčním úlohám s využitím shodných a podobných zobrazení v rovině. Všechny úlohy jsou stejně strukturovány, nejprve je napsané zadání úlohy a následně řešení úlohy, které obsahuje postup konstrukce zapsán symbolikou, konstrukci, důkaz a diskuzi. Konstrukce je zpracována v počítačovém programu GeoGebra.

Součástí práce je seznam matematických symbolů, které v té této práci používám.

Pro lepší pochopení určitých pojmů je práce doplněna obrázky, které jsou vypracovány v programu GeoGebra.

1 Planimetrie

1.1 Základní geometrické pojmy

Při soustavném výkladu geometrie se vychází z několika základních vět (axiomů) obsahujících základní pojmy a popisujících vztahy mezi nimi. Na jejich základě se dokazuje platnost dalších vět a tvoří se další pojmy definicemi. Tomuto postupu se říká axiomatická výstavba euklidovské geometrie. Poprvé v historii ji užil již ve třetím století před naším letopočtem řecký matematik *Eukleides* v díle *Základy*. Důsledně axiomatický výklad přesněji podal německý matematik *David Hilbert* v knize *Základy geometrie*, která vyšla roku 1899. *(Polák, 2012, s. 414)*

Geometrii dělíme na dvě části, a to planimetrii (geometrie v rovině) a stereometrii (geometrie v prostoru). My se však budeme zabývat pouze planimetrií.

1.1.1 Přímka, polopřímka, úsečka

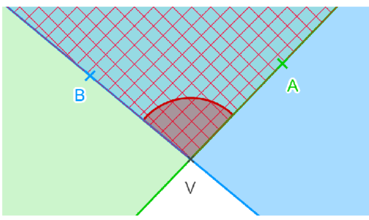
Dvěma různými body je určena jediná přímka. Říkáme, že body A, B jsou incidentní s přímkou p, neboli body A, B leží na přímce p nebo přímka p prochází dvěma body A, B.

Bod ležící na přímce rozděluje přímku na dvě navzájem opačné polopřímky a je jejich společným počátkem.

Úsečka AB je průnikem polopřímek AB, BA; přitom $A \neq B$. Body A, B se nazývají krajní body úsečky. *(Pomykalová, 2006, s. 9,10)*

1.1.2 Polorovina, úhel, dvojice úhlů

Přímka dělí rovinu na dvě navzájem opačné poloroviny a je jejich společnou hraniční přímkou. Dvě různé polopřímky VA, VB dělí rovinu na dva úhly AVB. Polopřímky VA, VB se nazývají ramena a bod V vrchol obou úhlů. Nejsou-li polopřímky VA, VB opačné, je jeden úhel AVB průnikem polorovin VAB, VBA a nazývá se konvexní úhel $\sphericalangle AVB$ (obr. 1.1.2-1).



Obr. 1.1.2-1 *Konvexní úhel*

Geometrický útvar se nazývá konvexní, jestliže úsečka spojující libovolné jeho dva body náleží tomuto útvaru. *(Pomykalová, 2006, 12 – 14)*

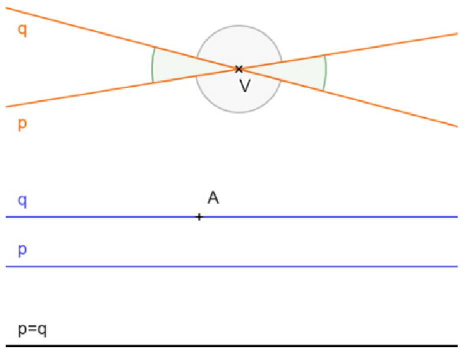
1.1.3 Dvě přímky, rovnoběžnost přímek, kolmost přímek v rovině

Dvě různé přímky mohou mít v rovině (obr. 1.1.3-1).

a) právě jeden společný bod, tzv. průsečík, těmto přímkám říkáme různoběžné přímky,

b) žádný společný bod, pak mluvíme o rovnoběžných přímkách,

c) nekonečně mnoho společných bodů, kdy se jedná o přímky totožné (splývající).



***Obr. 1.1.3-1** Vzájemná poloha dvou přímek v rovině*

Pro rovnoběžné přímky platí věta:

Daným bodem lze vést k dané přímce právě jednu rovnoběžku. *(Molnár, 2001, s. 9)*

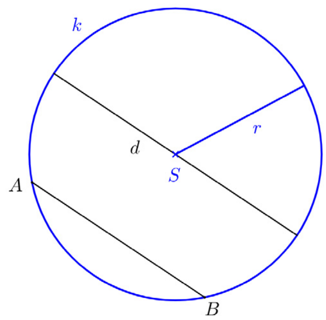
Různoběžné přímky rozdělují rovinu, ve které leží, na čtyři konvexní úhly se společným vrcholem. Je-li jeden úhel sevřený těmito různoběžkami pravý, pak jsou i zbylé tři úhly pravé. Takovým přímkám říkáme, že jsou navzájem na sebe kolmé, neboli každá z nich je kolmicí k druhé přímce. Průsečík kolmice s danou přímkou se nazývá pata kolmice P.

Pro kolmost přímek platí věta:

Daným bodem lze vést k dané přímce právě jednu kolmici. *(Polák, 2012, s. 422)*

1.2 Kružnice

Kružnice k je množina všech bodů roviny, které mají od daného bodu S této roviny danou vzdálenost r (obr. 1.2-1). Symbolicky značíme $k(S;r)$.



***Obr. 1.2-1** Kružnice k*

Bod S se nazývá střed kružnice a vzdálenost r poloměr kružnice. Libovolnou úsečku, jejímiž krajními body jsou dva různé body kružnice, nazýváme tětivou kružnice. Prochází-li tato úsečka středem kružnice, nazývá se průměr kružnice d, jehož délka je $2r$. *(Polák, 2012, s. 427)*

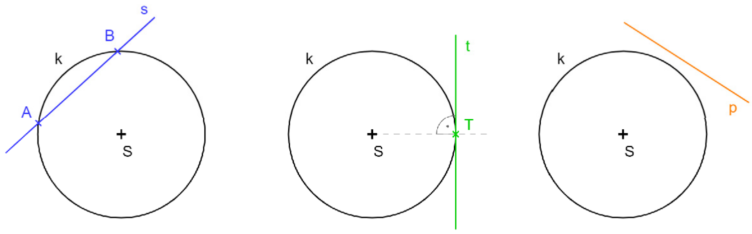
1.2.1 Vzájemná poloha přímky a kružnice, dvou kružnic v rovině

Přímka a kružnice mohou mít v téže rovině (obr. 1.2.1-1):

a) právě dva společné body, pak je přímka sečnou kružnice,

b) právě jeden společný bod, pak je přímka tečnou kružnice,

c) žádný společný bod, pak je přímka vnější přímkou kružnice.

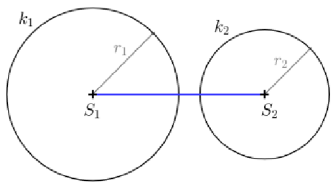
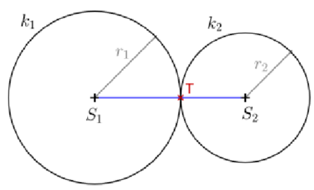
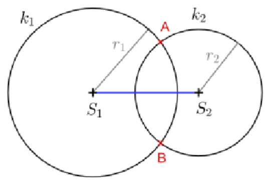


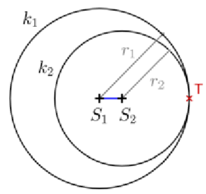
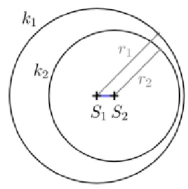
Obr. 1.2.1-1 *Vzájemná poloha přímky a kružnice*

Dvě kružnice v rovině se společným středem nazýváme soustředné kružnice a dvě kružnice v rovině s různými středy nesoustředné kružnice. Úsečka, jejímiž krajními body jsou tyto středy, se nazývá středná. *(Polák, 2012, s. 428)*

Dvě nesoustředné kružnice $k_1(S_1; r_1)$, $k_2(S_2; r_2)$, kde $r_1 > r_2$ mohou mít právě jednu z následujících poloh (tab. 1.2.1-1):

Tab. 1.2.1-1 *Vzájemná poloha dvou nesoustředných kružnic*

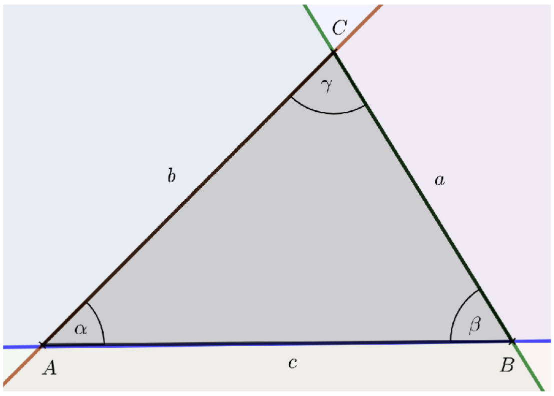
Vzájemná poloha	**Nutná a postačující podmínka**	**Náčrtek**	**Společné body**
každá kružnice leží vně druhé	$\lvert S_1S_2 \rvert > r_1 + r_2$		žádný společný bod
kružnice mají vnější dotyk	$\lvert S_1S_2 \rvert = r_1 + r_2$		jeden společný bod
kružnice se protínají	$r_1 - r_2 < \lvert S_1S_2 \rvert < r_1 + r_2$		dva společné body

kružnice mají vnitřní dotyk	$\lvert S_1S_2 \rvert = r_1 - r_2$		jeden společný bod
jedna kružnice leží vně druhé	$0 < \lvert S_1S_2 \rvert < r_1 - r_2$		žádný společný bod

(Pomykalová, 2006, *s. 56,57)*

1.3 Trojúhelník

Mějme dány tři různé body A, B, C, které neleží na jedné přímce. Trojúhelník ABC (obr. 1.3-1) je průnikem polorovin ABC, BCA, CAB. Označujeme symbolicky $\triangle ABC$.



***Obr. 1.3-1** Trojúhelník ABC*

Body A, B, C se nazývají vrcholy trojúhelníku, úsečky AB, BC, CA strany trojúhelníku a konvexní úhly $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCA$ vnitřní úhly trojúhelníku. Strany trojúhelníku značíme malými písmeny a, b, c a vnitřní úhly trojúhelníka řeckými písmeny α, β, γ. *(Polák, 2012, s. 424)*

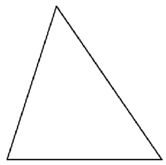
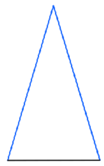
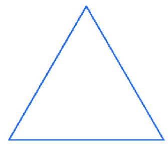
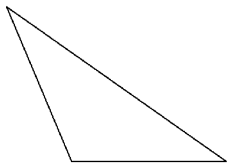
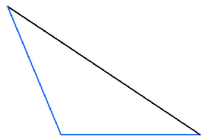
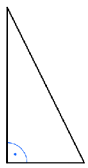
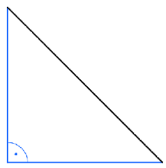
Základní věta o trojúhelníkové nerovnosti:

Jsou-li A, B, C vrcholy trojúhelníka ABC, pak pro jejich vzdálenosti (délky stran trojúhelníku) platí vztah: $\lvert AC \rvert + \lvert BC \rvert > \lvert AB \rvert$. *(Polák, 2012, s. 425)*

1.3.1 Klasifikace trojúhelníků

Trojúhelníky můžeme klasifikovat podle délek jeho stran či podle velikosti jeho vnitřních úhlů (tab. 1.3.1-1).

Tab. 1.3.1-1 *Klasifikace trojúhelníků*

podle délek stran **podle velikosti úhlu**	**různostranné**	**rovnoramenné**	**rovnostranné**
ostroúhlé			
tupoúhlé			∅
pravoúhlé			∅

Podle délek stran:

a) různostranné, v nichž žádné dvě strany nejsou shodné,
b) rovnoramenné, které mají dvě strany (ramena) shodné; třetí strana se nazývá základna,
c) rovnostranné, jež jsou speciálním případem rovnoramenných trojúhelníků a mají všechny strany shodné.

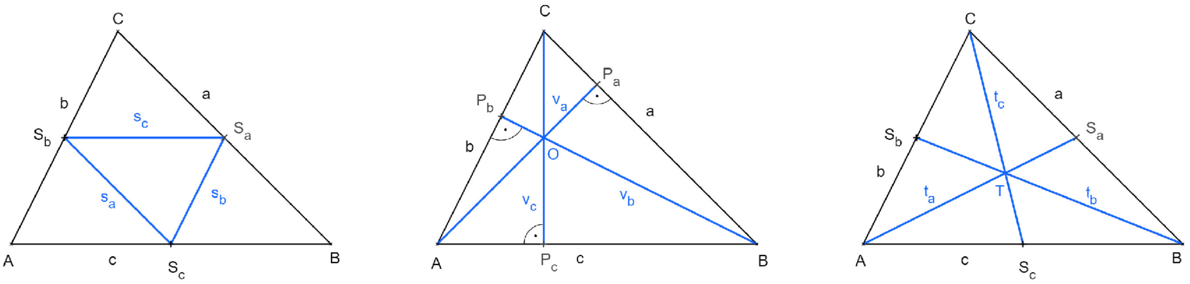
Podle velikosti vnitřních úhlů:

a) ostroúhlé se všemi ostrými úhly,
b) tupoúhlé s jedním tupým úhlem,
c) pravoúhlé s jedním pravým úhlem, u kterých se strana ležící proti tomuto úhlu nazývá přepona a zbylé dvě strany odvěsny.

V každém trojúhelníku platí:

Součet vnitřních úhlů trojúhelníku ABC je úhel přímý, neboli $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. *(Pomykalová, 2006, s. 23,24)*

1.3.2 Základní pojmy trojúhelníků

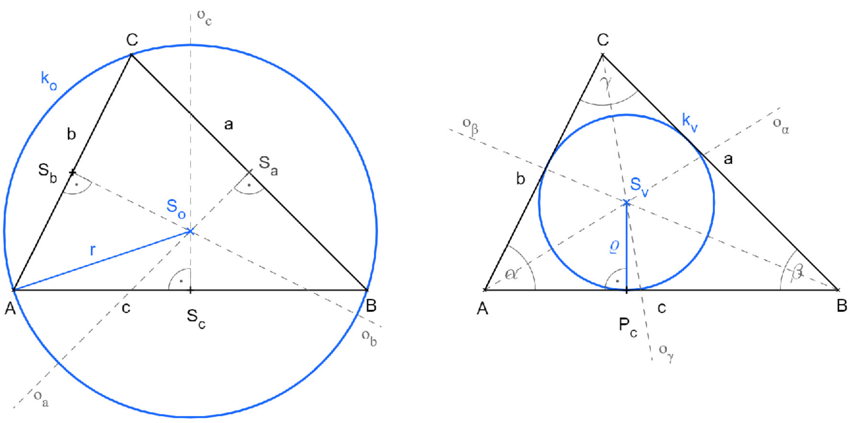


Obr. 1.3.2-1 *Střední příčky, výšky a těžnice trojúhelníka*

Střední příčka s trojúhelníka ABC je úsečka, jejíž krajní body jsou středy dvou stran trojúhelníku (obr. 1.3.2-1). Střední příčka trojúhelníka je rovnoběžná se stranou, jejímž středem neprochází. Její délka je rovna polovině délky této strany. *(Jančovičová at al., 1995, s. 35)*

Výška trojúhelníka ABC je úsečka, jejímiž krajními body jsou vrchol trojúhelníku a pata kolmice vedená tímto vrcholem k přímce určené zbývajícími vrcholy trojúhelníku (obr. 1.3.2-1). Výšky se označují zpravidla v_a, v_b, v_c. Ortocentrum O je bod, ve kterém se protínají všechny tři výšky trojúhelníku, tzv. průsečík výšek. *(Pomykalová, 2006, s. 27)*

Těžnice trojúhelníku ABC je úsečka spojující vrchol trojúhelníku se středem jeho protější strany (obr. 1.3.2-1). Označují se zpravidla t_a, t_b, t_c. Všechny tři těžnice každého trojúhelníku se protínají v jednom bodě T zvaném těžiště trojúhelníku. Tento bod dělí těžnici na dvě úsečky. Delší část obsahuje vrchol a je dvakrát delší než kratší strana. *(Jančovičová at al., 1995, s. 38)*



Obr. 1.3.2-2 *Kružnice opsaná a vepsaná trojúhelníku*

Každému trojúhelníku můžeme opsat i vepsat kružnici (obr. 1.3.2-2). Kružnice opsaná k_o trojúhelníku ABC je kružnice procházející všemi vrcholy $\triangle ABC$. Střed S_o této kružnice se nachází na průsečíku os stran $\triangle ABC$. Vzdálenost libovolného vrcholu ke středu kružnice opsané je poloměrem kružnice opsané r. Kružnice vepsaná k_v trojúhelníku ABC je kružnice, která se dotýká všech stran $\triangle ABC$. Má střed S_v v průsečíku os vrcholových úhlů $\triangle ABC$. Poloměrem ϱ této kružnice je kolmá vzdálenost středu S_v k libovolné straně $\triangle ABC$. *(Pomykalová, 2006, s. 28, 29)*

1.4 Mnohoúhelníky

Nechť je dáno n takových úseček A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, …, $A_{n-1}A_n$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$), že každé dvě sousední úsečky mají společný právě jeden krajní bod a neleží v téže přímce. Pak sjednocení množiny všech úseček A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, …, $A_{n-1}A_n$ nazýváme lomenou čárou $A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$. Uzavřená lomená čára $A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_1$, jež leží v rovině a sama sebe neprotíná, ohraničuje část roviny, která se nazývá mnohoúhelník či n-úhelník $A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n$.

O lomené čáře $A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$ se říká, že je hranice mnohoúhelníku, body A_1, A_2, …, A_n se nazývají vrcholy mnohoúhelníku.

Vrcholy n-úhelník, které jsou krajními body některé jeho strany, se nazývají sousední vrcholy. Úsečka, jejíž krajní body jsou libovolné dva nesousední vrcholy, se nazývá úhlopříčka n-úhelník.

Každý mnohoúhelník, který je konvexním geometrickým útvarem, se nazývá konvexní mnohoúhelník. Každý mnohoúhelník, který není konvexním geometrickým útvarem, se nazývá nekonvexní mnohoúhelník.

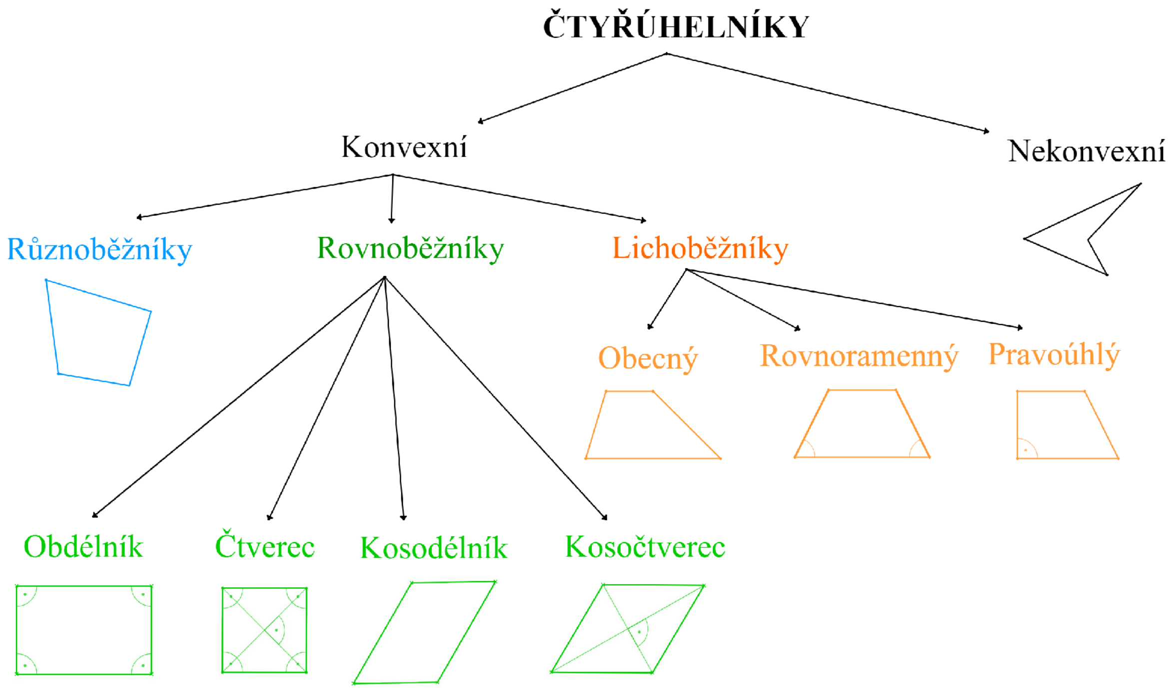
Nechť body A_{i-1}, A_i a A_i, A_{i+1} jsou dvojice sousedních vrcholů mnohoúhelníku. Polopřímky A_iA_{i-1}, A_iA_{i+1} jsou ramena dvou úhlů a ten z nich, který obsahuje alespoň jeden vnitřní bod mnohoúhelníku, se nazývá vnitřní úhel mnohoúhelníku.

Součet velikostí všech vnitřních úhlů konvexního n-úhelníku je $(n-2) \cdot 180°$. *(Polák, 2012, s. 448, 449)*

Pravidelný n-úhelník je mnohoúhelník, jehož všechny strany i vnitřní úhly jsou shodné. Pravidelnému n-úhelníku lze opsat i vepsat kružnici. *(Pomykalová,* 2006, *s. 44)*

1.4.1 Čtyřúhelníky

Čtyřúhelník je n-úhelník, kde $n = 4$. Čtyřúhelníky klasifikujeme následovně (obr.1.4.1-1):



***Obr. 1.4.1-1** Klasifikace čtyřúhelníků*

Konvexní čtyřúhelníky dělíme podle vzájemné polohy stran:

a) různoběžníky, jejichž každé dvě strany nejsou rovnoběžné,
b) rovnoběžníky, u kterých jsou každé dvě protější strany rovnoběžné,
c) lichoběžníky, jejichž dvě protější strany jsou rovnoběžné a zbývající dvě strany jsou různoběžné; rovnoběžné strany se nazývají základny a různoběžné strany ramena lichoběžníku.

Rovnoběžníky dále klasifikujeme na:

a) Obdélník, který má všechny vnitřní úhly pravé. Úhlopříčky obdélníku jsou shodné.
b) Čtverec, který má všechny vnitřní úhly pravé a všechny strany shodné. Je to tedy pravidelný čtyřúhelník, jehož úhlopříčky jsou shodné, navzájem kolmé a půlí jeho vnitřní úhly.
c) Kosodélník, jehož žádný vnitřní úhel není pravý a jehož sousední strany nejsou shodné.
d) Kosočtverec, jehož žádný vnitřní úhel není pravý a jehož všechny strany jsou shodné. Úhlopříčky kosočtverce jsou navzájem kolmé a půlí jeho vnitřní úhly.

V každém rovnoběžníku platí tyto věty:

1. protilehlé strany jsou shodné,
2. protilehlé vnitřní úhly jsou shodné,
3. úhlopříčky se navzájem půlí, tj. průsečík úhlopříček je středem každé z nich a je středem souměrnosti rovnoběžníku.

Zvláštní případy lichoběžníku:

a) Rovnoramenný lichoběžník, jehož ramena jsou shodné úsečky. Vnitřní úhly přilehlé k téže základně jsou shodné.
b) Pravoúhlý lichoběžník, jehož právě jedno rameno je kolmé k jeho základnám.

(Polák, 2012, s. 450 – 452)

2 Geometrická zobrazení v rovině

Než se dostaneme k jednotlivým zobrazením je potřeba si nejprve definovat pojem zobrazení v rovině.

Je-li každému bodu X roviny přiřazen (určitým předpisem) právě jeden bod X' téže roviny, pak mluvíme o zobrazení Z v rovině. Zapisujeme $\boldsymbol{Z}: X \to X'$. Bod X nazýváme vzor bodu X' a bod X' nazýváme obraz bodu X. *(Molnár, 2001, str. 83)*

Body X, pro jejichž obrazy platí $X' = X$, se nazývají samodružné body zobrazení $\boldsymbol{Z}$ v rovině. Obrazem geometrického útvaru U v dané zobrazení je geometrický útvar U'. Je-li $U' = U$, nazýváme útvar U samodružným útvarem zobrazení $\boldsymbol{Z}$ v rovině. Zobrazení, ve kterém je každý bod samodružný, se nazývá identita. *(Pomykalová, 2006, s. 124)*

3 Shodná zobrazení v rovině

Zobrazení $\boldsymbol{Z}$ v rovině se nazývá shodné zobrazení (neboli shodnost, resp. izometrie), právě když pro každé dva body X, Y roviny a jejich obrazy X', Y' v tomto zobrazení platí:

$$|XY| = |X'Y'|.$$

Shodnost zapisujeme symbolem $\cong$. Každé shodné zobrazení, které není identitou, můžeme názorně realizovat přemístěním, např. užitím průsvitného papíru, následovně: Obkreslíme rovinný útvar U na průsvitný papír, pak tuto průsvitku přemístíme (můžeme i obrátit „na rub“) a útvar v přemístěné poloze opět obkreslíme na uvažovanou rovinu (nákresnu). Dostaneme tak shodný útvar U', který je obrazem útvaru U. Podle toho, zda průsvitku ponecháme „lícem“ či ji obrátíme „na rub“, rozlišujeme shodnosti přímé a nepřímé. Jestliže při přemísťování průsvitný papír nebudeme obracet „na rub“, bude se jednat o shodnost přímou. Pokud však průsvitku při přemístění obrátíme „na rub“, budeme hovořit o shodnosti nepřímé. *(Polák, 2012, str. 464)*

V každém shodném zobrazení platí:

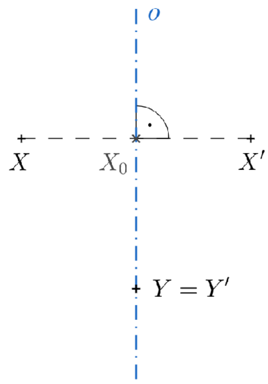
a) obrazem každé úsečky AB je úsečka $A'B'$ s ní shodná,
b) obrazem každé polopřímky $\mapsto AB$ je polopřímka $\mapsto A'B'$; obrazy navzájem opačných polopřímek jsou opačné polopřímky,
c) obrazem každé přímky $\leftrightarrow AB$ je přímka $\leftrightarrow A'B'$; obrazy rovnoběžných přímek jsou rovnoběžné přímky,
d) obrazem každé poloroviny $\mapsto pA$ je polorovina $\mapsto p'A'$; obrazy navzájem opačných polorovin jsou opačné poloroviny,
e) obrazem každého konvexního úhlu $\sphericalangle AVB$ je konvexní úhel $\sphericalangle A'V'B'$ s ním shodný,
f) obrazem každého trojúhelníku $\triangle\ ABC$ je trojúhelník $\triangle\ A'B'C'$ s ním shodný.

(Polák, 2012, str. 464)

Nyní se blíže podíváme na jednotlivá shodná zobrazení v rovině, jimiž jsou osová souměrnost, středová souměrnost, posunutí, otočení a posunutá souměrnost.

3.1 Osová souměrnost

Nechť je v rovině dána přímka o. Osovou souměrností s osou o (obr. 3.1-1) rozumíme shodné zobrazení $\boldsymbol{O}(\boldsymbol{o})$ v rovině, v němž je každý bod přímky o samodružný a každému bodu $X \notin o$ roviny je přiřazen bod X' tak, že přímka o je osa úsečky XX'. Přímka o se nazývá osa souměrnosti. *(Molnár, 2001, str. 86)*



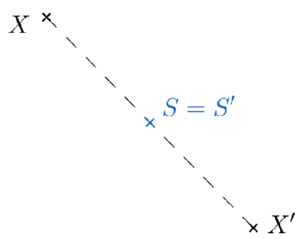
Obr. 3.1-1 *Osová souměrnost*

Osová souměrnost je nepřímá shodnost. Z definice plyne, že osová souměrnost je jednoznačně určena osou souměrnosti o. Může však být určena dvojicí různých bodů X, X', jestliže každý z nich je obrazem druhého v této souměrnosti. Osou souměrnosti je v tomto případě osa úsečky XX'.

Silně samodružnými přímkami osové souměrnosti jsou v dané rovině osa souměrnosti o a slabě samodružnými přímkami všechny přímky k ní kolmé. *(Pomykalová, 2006, s. 125, 126)*

3.2 Středová souměrnost

Nechť je dán bod S. Středovou souměrností se středem S (obr. 3.2-1) nazýváme shodné zobrazení $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{S})$ v rovině, v němž je bod S samodružný a každému bodu $X \neq S$ roviny je přiřazen bod X' tak, že bod S je středem úsečky XX'. Bod S se nazývá střed souměrnosti. *(Molnár, 2001, str. 95)*



Obr. 3.2-1 *Středová souměrnost*

Středová souměrnost je shodnost přímá. Jednoznačně je určena středem souměrnosti S. Je však jednoznačně určená také dvojicí různých bodů X, X', jestliže každý z nich je obrazem druhého v této středové souměrnosti. Středem souměrnosti je pak střed úsečky X'.

Slabě samodružné přímky středové souměrnosti jsou všechny přímky, které procházejí středem souměrnosti S. *(Pomykalová, 2006, s. 133)*

3.3 Posunutí

Nejprve se musíme seznámit s pojmem orientovaná úsečka, její velikostí a směrem.

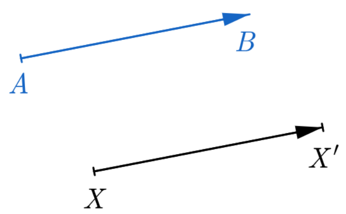
Orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$ je úsečka AB doplněná o orientaci. Krajní bod A nazveme počátečním bodem a krajní bod B bodem koncovým orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$. Zavádí se také nulová orientovaná úsečka $\overrightarrow{AA}$, jejíž počáteční a koncový bod splývá. Graficky se orientovaná úsečka značí šipkou u koncového bodu. *(Polák, 2012, str. 544)*

Velikostí (délkou) orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ se rozumí velikost úsečky AB. Značíme ji $|\overrightarrow{AB}|$. Pro velikost nenulové orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ platí $|\overrightarrow{AB}| > 0$. Velikost nulové orientované úsečky $\overrightarrow{AA}$ je rovna nule. *(Polák, 2012, str. 545)*

Dvě nenulové orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$ jsou souhlasně orientované, tj. mají stejný směr, jestliže:

- leží na téže přímce a polopřímka $\mapsto AB$ je částí polopřímky $\mapsto CD$ nebo polopřímka $\mapsto CD$ je částí polopřímky $\mapsto AB$ nebo obě polopřímky splynou,
- leží na různých rovnoběžných přímkách a polopřímky $\mapsto AB$ a $\mapsto CD$ leží v téže polorovině s hraniční přímkou $\leftrightarrow AC$. *(Pomykalová, 2006, s. 139)*

Je dána nenulová orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$. Posunutí neboli translace (obr. 3.3-1) je shodné zobrazení $\boldsymbol{\mathcal{T}}(\overrightarrow{\boldsymbol{AB}})$ v rovině, které každému bodu X přiřazuje bod X' tak, že orientované úsečky $\overrightarrow{XX'}$ a $\overrightarrow{AB}$ mají stejnou délku a stejný směr.



Obr. 3.3-1 *Posunutí*

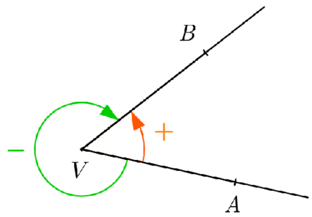
Orientovanou úsečku $\overrightarrow{AB}$ se nazývá vektor posunutí. Délka orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ udává velikost posunutí a směr posunutí. Translace je shodnost přímá.

Posunutí určené nulovou orientovanou úsečkou je identita. Posunutí určené nenulovou orientovanou úsečkou nemá žádné samodružné body. Slabě samodružné přímky posunutí jsou všechny přímky rovnoběžné s orientovanou úsečkou určující posunutí. *(Pomykalová, 2006, s. 139, 140)*

3.4 Otočení

Otočení jako shodné zobrazení v rovině si zavedeme pomocí orientovaného úhlu.

Orientovaný úhel $\widehat{AVB}$ (obr. 3.4-1) je uspořádaná dvojice polopřímek $\mapsto VA$, $\mapsto VB$ se společným počátkem V. Polopřímka $\mapsto VA$ je počátečním ramenem a polopřímka $\mapsto VB$ koncovým ramenem tohoto orientovaného úhlu. *(Molnár, 2001, str. 90)*



Obr. 3.4-1 *Orientovaný úhel*

Orientovaný úhel si můžeme představit jako počáteční a koncovou polohu polopřímky, která se otáčí kolem svého počátku (o libovolný počet otáček). Otáčení polopřímky může mýt buď v kladném smyslu, tj. proti směru hodinových ručiček, nebo v záporném smyslu, a to po směru hodinových ručiček. Graficky znázorníme orientovaný úhel obloukem se šipkou. *(Pomykalová, 2006, s. 145)*

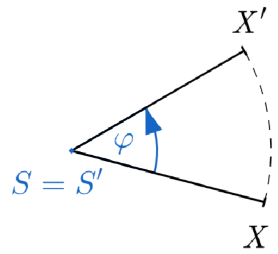
Velikostí orientovaného úhlu $\widehat{AVB}$ rozumíme každé číslo tvaru $\alpha + k \cdot 360°$, kde $k \in \mathbb{Z}$ a α je velikost úhlu $\sphericalangle AVB$ (symbolicky $|\sphericalangle AVB|$) vytvořeného otočením polopřímky $\mapsto VA$ do polohy polopřímky $\mapsto VB$ v kladném směru. Písmeno α se nazývá základní velikost orientovaného úhlu $\widehat{AVB}$, $\alpha \in \langle 0°; 360°)$. *(Molnár, 2001, str. 90)*

Jestliže počáteční rameno splývá s koncovým, vzniká nulový orientovaný úhel. Jeho základní velikost je 0°.

Nyní jsme si vysvětlili, co je to orientovaný úhel a s tím související jeho základní velikost. V dalším kroku se můžeme zaměřit konkrétně na shodné zobrazení v rovině, kterým je otočení.

Je dán bod S a orientovaný úhel, jehož velikost je φ. Otočení neboli rotace kolem středu S (obr. 3.4-2) je shodné zobrazení $\boldsymbol{\mathcal{R}(S, \varphi)}$ v rovině, v němž je bod S samodružný. Toto zobrazení přiřazuje každému bodu $X \neq S$ bod X' tak, že $|X'S| = |XS|$ a orientovaný úhel

$\widehat{XSX'}$ má velikost φ. Bod S se nazývá střed otočení a orientovaný úhel o velikost φ se nazývá úhel otočení. *(Pomykalová, 2006, s. 147, 148)*



Obr. 3.4-2 *Otočení*

Otočení je shodnost přímá. Z definice tohoto shodného zobrazení v rovině plyne, že je jednoznačně určené středem otočení S, velikostí úhlu otočení φ a daným smyslem otočení. *(Polák, 2012, str. 466)*

Speciálním případem otočení je středová souměrnost se středem S, tj. $\varphi = 180° + k \cdot 360°$, $k \in \mathbb{Z}$. V případě, že $\varphi = k \cdot 360°$, $k \in \mathbb{Z}$ je zobrazení identitou. Otočení, které není středová souměrnost, nemá samodružné přímky. *(Pomykalová, 2006, s. 148)*

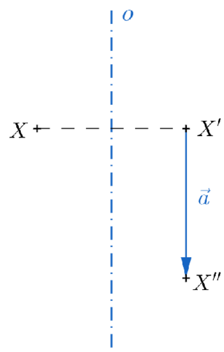
3.5 Skládání shodných zobrazení

Jsou dána dvě shodná zobrazení $\boldsymbol{Z_1}$, $\boldsymbol{Z_2}$ a libovolný bod X roviny; $\boldsymbol{Z_1}: X \to X'$, $\boldsymbol{Z_2}: X' \to X''$. Zobrazení $\boldsymbol{Z}: X \to X''$ se nazývá složené zobrazení $\boldsymbol{Z}$ ze zobrazení $\boldsymbol{Z_1}$, $\boldsymbol{Z_2}$ v tomto pořadí. Symbolicky zapíšeme $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z_2} \circ \boldsymbol{Z_1}$. *(Pomykalová, 2006, s. 153)*

Pro skládání shodností platí tyto věty:

1. Složením dvou přímých shodností nebo dvou nepřímých shodností vznikne shodnost přímá. Složením přímé a nepřímé shodnosti dostaneme shodnost nepřímou.
2. Každou přímou shodnost lze složit ze dvou osových souměrností. Každá nepřímá shodnost je buď osová souměrnost, anebo zobrazení složené ze tří osových souměrností (resp. z osové souměrnosti a posunutí podél její osy).

Shodné zobrazení v rovině vzniklé složením osové souměrnosti a posunutím podél této osy se nazývá posunutá souměrnost Ps (obr. 3.5-1). Lze ji získat také složením středové souměrnosti a osové souměrnosti, jejíž osa neprochází středem souměrnosti. Posunutá souměrnost nemá žádné samodružné body. *(Polák, 2012, s. 467)*



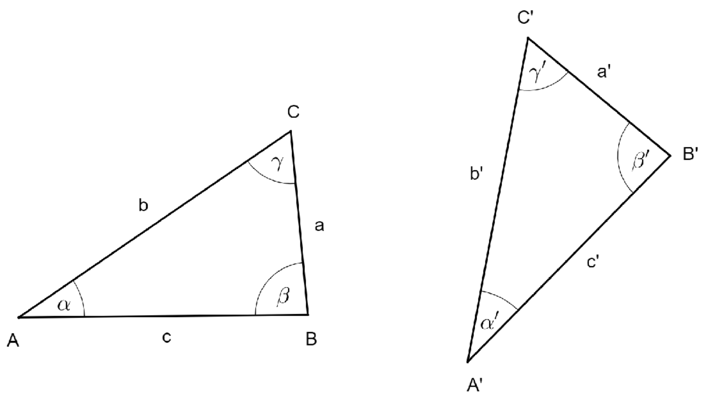
Obr. 3.5-1 *Posunutá souměrnost*

Věta o určenosti shodného zobrazení v rovině:

Jsou-li dány dva shodné trojúhelníky $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Existuje právě jedno shodné zobrazení v rovině, které přiřazuje $A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$. *(Šedivý, 1980, s. 20)*

Shodná zobrazení umožňují zpřesnit pojem shodnosti geometrických útvarů: Dva geometrické útvary U, U' jsou shodné útvary v rovině, právě když existuje shodné zobrazení této roviny na sebe, v němž jeden z útvarů je obrazem druhého. Píšeme pak $U \cong U'$. *(Polák, 2012, str. 468)*

3.6 Shodnost trojúhelníků



Obr. 3.6-1 *Shodné trojúhelníky*

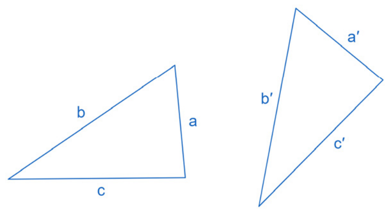
Trojúhelníky ABC, $A'B'C'$ jsou navzájem shodné trojúhelníky (obr. 3.6-1) právě tehdy, když mají stejné velikosti odpovídajících si stran a stejné velikosti příslušných úhlů, tj. když platí:

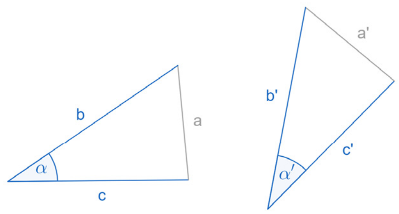
$$a = a', b = b', c = c',$$
$$\alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma'.$$

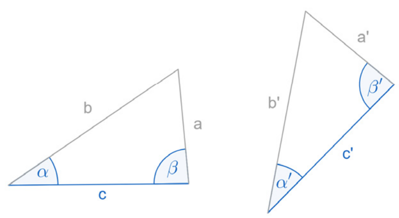
Shodnost trojúhelníku zapisujeme symbolicky $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$; pořadí písmen přitom volíme tak, aby vrcholy, které si odpovídají, byly zapsány v obou trojicích na týchž místech. *(Kadleček, 1996, str. 15)*

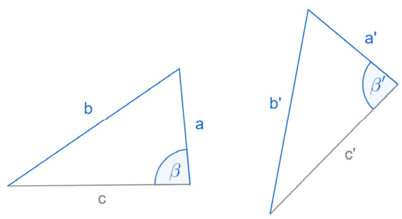
Máme-li zjistit, zda jsou dva trojúhelníky shodné, není nutné ověřovat shodnost všech tří dvojic stran a tří dvojic vnitřních úhlů. Stačí ověřit, je-li splněno některé z kritérií, postačujících podmínek, shodnosti trojúhelníků (tab. 3.6.-1). *(Polák, 2012, s. 436)*

Tab. 3.6-1 *Věty o shodnosti trojúhelníků*

<table>
<tr><th>Typ věty</th><th>Definice</th><th>Náčrtek a symbolika</th></tr>
<tr><td>Věta sss</td><td>Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve všech třech stranách.</td><td>

$a' = a,\ b' = b,\ c' = c$</td></tr>
<tr><td>Věta sus</td><td>Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve dvou stranách a úhlu jimi sevřeném.</td><td>

$b' = b,\ c' = c,\ \alpha' = \alpha$</td></tr>
<tr><td>Věta usu</td><td>Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v jedné straně a ve dvou úhlech k ní přilehlých.</td><td>

$c' = c,\ \alpha' = \alpha,\ \beta' = \beta$</td></tr>
<tr><td>Věta Ssu</td><td>Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve dvou stranách a v úhlu proti větší z nich.</td><td>

je-li $b > a$, pak $a' = a,\ b' = b,\ \beta' = \beta$</td></tr>
</table>

(Kadleček, 1996, str. 16)

4 Stejnolehlost

V geometrických zobrazeních v rovině neexistují pouze shodná zobrazení, ve kterých je obrazem úsečky úsečka s ní shodná. Ale existují také zobrazení, která přiřazují k sobě jako vzor a obraz úsečky o nestejné velikosti. Přitom poměr délek úseček, obrazu a vzoru je konstantní.

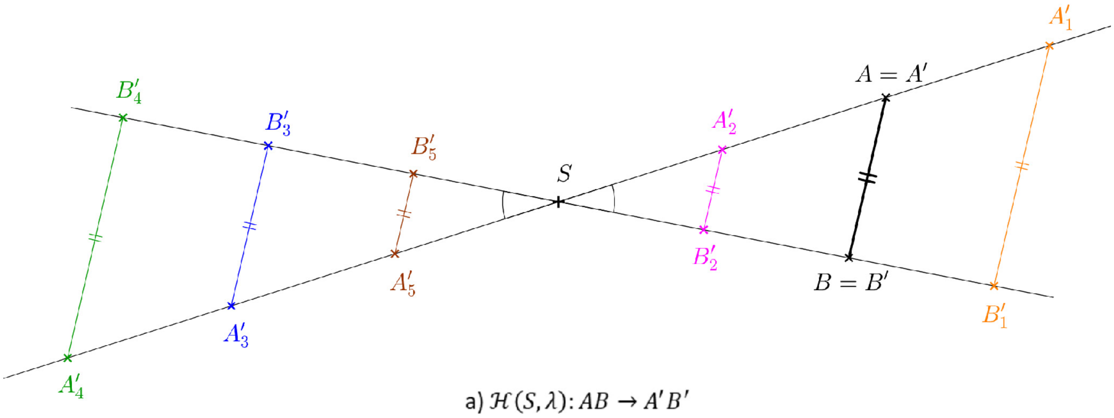
Je dán bod S a reálné číslo λ ($\lambda \neq 0$). Stejnolehlost neboli homotetie se středem S a koeficientem stejnolehlosti λ je zobrazení $\boldsymbol{\mathcal{H}(S,\lambda)}$, které přiřazuje:

- každému bodu $X \neq S$ bod X' tak, že platí $|SX'| = |\lambda| \cdot |SX|$; přitom pro $\lambda > 0$ leží bod X' na polopřímce $\mapsto SX$, pro $\lambda < 0$ je bod X' bodem opačné polopřímky,
- bodu S bod $S' = S$.

Je-li X vzor a X' jeho obraz ve stejnolehlosti $\mathcal{H}(S,\lambda)$, píšeme $\mathcal{H}(S,\lambda): X \to X'$. O útvarech U, U', pro něž platí $\mathcal{H}(S,\lambda): U \to U'$ říkáme, že jsou stejnolehlé. *(Pomykalová, 2006, s. 160, 161)*

Ukažme si stejnolehlost $\mathcal{H}(S,\lambda)$ na příkladu úsečky AB (obr. 4-1): Jestliže je dána úsečka AB a bod S jako střed stejnolehlosti, pak pro obrazy této úsečky platí:

a) je-li $\lambda = 1$, pak každý bod úsečky AB je samodružný; zobrazení je identita,
b) je-li $\lambda > 1$, pak obraz A_1' bodu A úsečky AB leží na polopřímce $\mapsto SA$ a zároveň platí $|SA_1'| > |SA|$; obdobně pro bod B,
c) je-li $\lambda \in (0, 1)$, pak obraz A_2' bodu A úsečky AB leží na polopřímce $\mapsto SA$ a zároveň platí $|SA_2'| < |SA|$; obdobně pro bod B,
d) je-li $\lambda = -1$, pak je zobrazení středovou souměrností se středem S,
e) je-li $\lambda < -1$, pak obraz A_4' bodu A úsečky AB leží na polopřímce opačné k $\mapsto SA$ a zároveň platí $|SA_4'| > |SA|$; obdobně pro bod B,
f) je-li $\lambda \in (-1, 0)$, pak obraz A_5' bodu A úsečky AB leží na polopřímce opačné k $\mapsto SA$ a zároveň platí $|SA_5'| < |SA|$; obdobně pro bod B,
g) jsou rovnoběžné s úsečkou AB,
h) jsou souhlasně orientovány ve stejnolehlosti s kladným koeficientem ($\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$) a opačně orientovány se záporným koeficientem shodnosti ($\mathcal{H}_3$, $\mathcal{H}_4$, $\mathcal{H}_5$).



a) $\mathcal{H}(S, \lambda): AB \rightarrow A'B'$

b) $\mathcal{H}_1(S, \lambda): AB \rightarrow A'_1B'_1$

c) $\mathcal{H}_2(S, \lambda): AB \rightarrow A'_2B'_2$

d) $\mathcal{H}_3(S, \lambda): AB \rightarrow A'_3B'_3$

e) $\mathcal{H}_4(S, \lambda): AB \rightarrow A'_4B'_4$

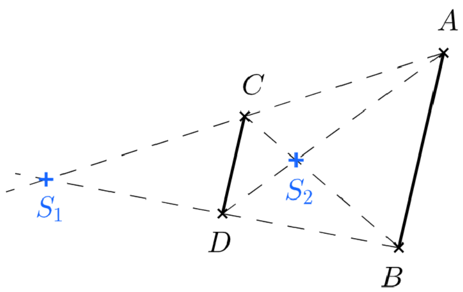
f) $\mathcal{H}_5(S, \lambda): AB \rightarrow A'_5B'_5$

Obr. 4-1 *Stejnolehlé zobrazení úsečky AB*

Stejnolehlost zachovává velikost úhlů. Jediným samodružným bodem ve stejnolehlosti, která není identitou, je střed stejnolehlosti. Slabě samodružné přímky jsou všechny přímky, které procházejí středem stejnolehlosti.

Z definice plyne, že stejnolehlost je jednoznačně určena svým středem S a koeficientem stejnolehlosti λ. Může však být také dána středem S a dvojicí bodů: vzoru $A \neq S$ a jeho obrazu $A' \neq S$. Snadno pak sestrojíme ke každému bodu $X \neq S$ jeho obraz X', který musí ležet na přímce $\leftrightarrow SX$ a na přímce vedené bodem A' rovnoběžné s přímkou $\leftrightarrow AX$. *(Pomykalová, 2006, s. 162, 163)*

Nechť jsou dány dvě rovnoběžné úsečky různých délek, pak existují právě dvě stejnolehlosti, které zobrazí jednu úsečku na druhou.



Obr. 4-2 *Stejnolehlost dána dvěma rovnoběžnými úsečkami*

Je-li úsečka CD obrazem úsečky AB (obr. 4-2), pak pro stejnolehlost se středem S_1 je koeficient $\lambda_1 = \frac{|CD|}{|AB|}$ a pro stejnolehlost se středem S_2 je koeficient $\lambda_2 = -\frac{|CD|}{|AB|}$. Bod S_1

se nazývá vnější střed stejnolehlosti a bod S_2 se nazývá vnitřní střed stejnolehlosti. *(Pomykalová, 2006, s. 165)*

Ke každé stejnolehlosti $\mathcal{H}(S, \lambda)$ existuje stejnolehlost $\mathcal{H}\left(S, \frac{1}{\lambda}\right)$, která zobrazuje obrazy v původní stejnolehlosti zpět na jejich vzory. Obě stejnolehlosti nazýváme navzájem inverzní. *(Kadleček, 1996, s. 101)*

5 Podobná zobrazení v rovině

Zobrazení $\boldsymbol{Z}$ v rovině nazýváme podobným zobrazením (neboli podobností), právě když každé dvojici bodů X, Y roviny přiřazuje jako obrazy takové body X', Y', že platí $|X'Y'| = k \cdot |XY|$, kde $k > 0$ je daná konstanta zvaná koeficient podobnosti. Podobnost zapisujeme symbolem $\sim$. *(Polák, 2012, str. 468)*

Stejnolehlost s koeficientem stejnolehlosti λ je podobnost s koeficientem podobnosti $|\lambda|$. Shodnost je zvláštní případ podobnosti pro $k = 1$. *(Pomykalová, 2006, s. 180)*

V každém podobném zobrazení platí:

a) obrazem každé úsečky AB v podobnosti s koeficientem k je úsečka $A'B'$ délky $|A'B'| = k \cdot |AB|$,
b) obrazem každé polopřímky $\mapsto AB$ je polopřímka $\mapsto A'B'$; obrazy navzájem opačných polopřímek jsou navzájem opačné polopřímky,
c) obrazem každé přímky $\leftrightarrow AB$ je přímka $\leftrightarrow A'B'$; obrazy rovnoběžných přímek jsou rovnoběžné přímky,
d) obrazem každé poloroviny $\mapsto pA$ je polorovina $\mapsto p'A'$; obrazy navzájem opačných polorovin jsou navzájem opačné poloroviny,
e) obrazem každého konvexního úhlu $\sphericalangle AVB$ je úhel $\sphericalangle A'V'B'$ s ním shodný,
f) obrazem každého trojúhelníku $\triangle ABC$ je podobný trojúhelník $\triangle A'B'C'$.

Analogicky jako u shodnosti lze definovat přímou podobnost (nemění smysl obíhání) a nepřímou podobnost (mění smysl obíhání).

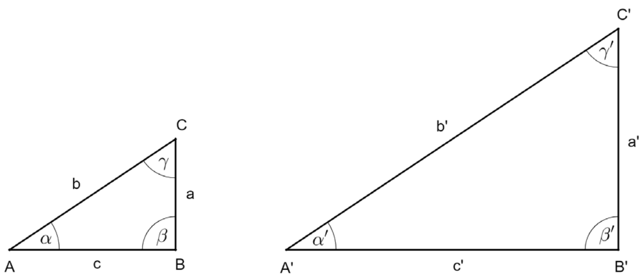
Věta o určenosti podobného zobrazení v rovině:

Jsou-li dány dva podobné trojúhelníky ABC, $A'B'C'$, existuje právě jedno podobné zobrazení v rovině, které zobrazuje $A \rightarrow A'$, $B \rightarrow B'$, $C \rightarrow C'$. *(Šedivý, 1963, s. 64)*

Podobná zobrazení umožnují definovat pojem podobnosti geometrických útvarů: Dva geometrické útvary U, U' jsou podobné útvary v rovině, právě když existuje podobné zobrazení této roviny na sebe, ve kterém jeden z útvarů je obrazem druhého. Píšeme pak $U \sim U'$. *(Polák, 2012, str. 468)*

Složením stejnolehlosti a libovolné shodnosti vzniká podobnost, a naopak každou podobnost lze rozložit ve stejnolehlost a shodnost. *(Pomykalová, 2006, s. 183)*

5.1 Podobnost trojúhelníků



Obr. 5.1-1 *Podobné trojúhelníky*

Dva trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ (obr. 5.1-1) se nazývají podobné trojúhelníky, právě když existuje takové kladné číslo k, že platí: $a' = k \cdot a,\ b' = k \cdot b,\ c' = k \cdot c$ čili

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k.$$

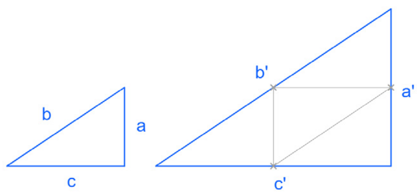
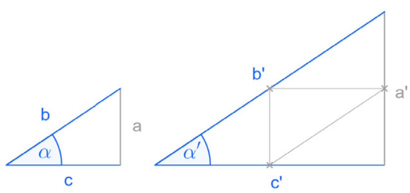
Symbolicky pak píšeme $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

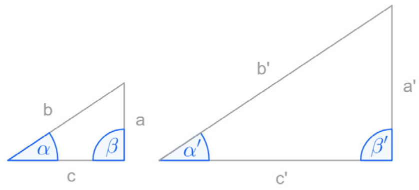
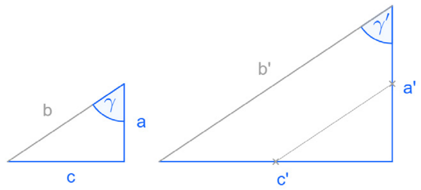
Je-li $k > 1$ představuje podobnost zvětšení, je-li $k \in (0{,}1)$ představuje zmenšení, pro $k = 1$, se jedná o shodnost (identitu).

Pro podobné trojúhelníky lze na základě definice dokázat větu: V podobných trojúhelnících ABC, $A'B'C'$ jsou odpovídající si úhly shodné a tedy platí: $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$. *(Polák, 2012, str. 436, 137)*

Pro ověřování shodnosti trojúhelníku jsme používali věty o shodnosti. Podobně tomu tak bude také pro ověřování podobnosti trojúhelníků (tab. 5.1-1).

Tab. 5.1-1 *Věty o podobnosti trojúhelníků*

Typ věty	**Definice**	**Náčrtek a symbolika**
Věta sss	Dva trojúhelníky jsou si navzájem podobné, shodují-li se všechny tři poměry velikostí sobě odpovídajících stran.	 $a' : a = b' : b = c' : c$
Věta sus	Dva trojúhelníky jsou si navzájem podobné, shodují-li se v jednom úhlu a v poměrech velikostí sobě dvou odpovídajících stran tomuto úhlu přilehlých.	 $\alpha' = \alpha,\ b' : b = c' : c$

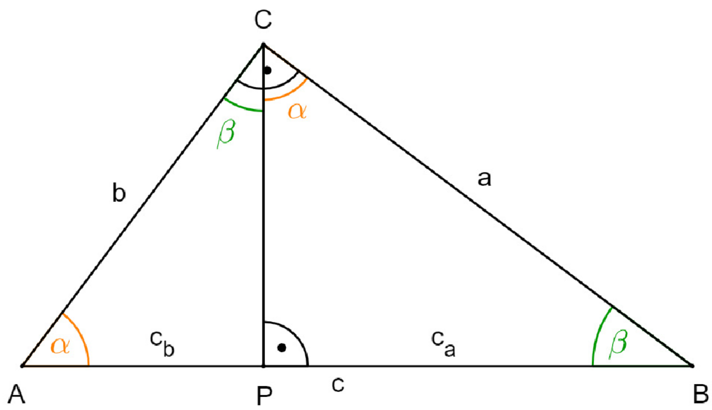
Věta uu	Dva trojúhelníky si jsou navzájem podobné, shodují-li se ve dvou úhlech.	 $\alpha' = \alpha, \beta' = \beta$
Věta Ssu	Dva trojúhelníky jsou navzájem podobné, shodují-li se poměry velikostí dvou dvojic sobě odpovídajících stran a mají-li oba trojúhelníky stejně velký úhel proti větší z těchto stran.	 je-li $c \geq a$, pak $a' : a = c' : c, \gamma' = \gamma$

(Kadleček, 1996, str. 77)

5.2 Věty o pravoúhlém trojúhelníku

Trojúhelník ABC nazýváme pravoúhlým, je-li jeden z jeho vnitřních úhlů pravý, tj. jeho velikost je 90°. Pokud je pravý úhel při vrcholu C, nazývají se strany CA, CB (svírající pravý úhel) odvěsny, strana AB (ležící proti pravému úhlu) přepona. *(Molnár, 2001, str. 36)*

V libovolném pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhel při vrcholu C sestrojíme výšku CP k přeponě AB (obr. 5.2-1). Označme a, b délky odvěsen, c délku přepony, v výšku k přeponě, c_a délku úsečky BP a c_b délku úsečky AP. Úsečky c_a a c_b se nazývají úseky přepony. *(Pomykalová, 2006, s. 183)*



***Obr. 5.2-1** Pravoúhlý trojúhelník*

Vidíme, že každé dva z pravoúhlých trojúhelníků ACP, CBP, ABC jsou podobné. Na základě podobností trojúhelníku můžeme odvodit následující věty.

Euklidova věta o výšce:

V pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C platí vztah:

$$v^2 = c_a \cdot c_b.$$

Slovy: Obsah čtverce sestrojeného nad výškou pravoúhlého trojúhelníku se rovná obsahu obdélníku sestrojeného z obou úseků přepony.

Euklidova věta o odvěsně:

V pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C platí vztahy:

$$a^2 = c \cdot c_a,$$

$$b^2 = c \cdot c_b.$$

Slovy: Obsah čtverce sestrojeného nad odvěsnou pravoúhlého trojúhelníku se rovná obsahu obdélníku sestrojeného z přepony a přilehlého úseku.

Pythagorova věta:

V pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C pro velikosti jeho odvěsen a, b a velikost přepony c platí vztah:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Slovy: Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku se rovná součtu obsahů čtverce nad oběma odvěsnami.

Obrácená věta k Pythagorově větě:

Platí-li pro velikost stran a, b, c trojúhelníku ABC vztah $a^2 + b^2 = c^2$, pak je tento trojúhelník pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C.

(Molnár, 2001, str. 37,38)

6 Řešené konstrukční úlohy

Při řešení konstrukčních úloh se dělá vždy náčrtek s rozborem, postup konstrukce, konstrukce, důkaz a diskuse. Rozbor je úvaha o řešení úlohy a je obvykle načrtnut rukou. Kdybychom jej rýsovali v programu, byl by stejný obrázek jako samotná konstrukce. Z tohoto důvodu jej v řešených úlohách vynecháme a budeme uvádět pouze ostatní části. K postupu konstrukce budeme využívat matematických symbolů (viz Seznam matematických symbolů).

Konstrukce úloh jsou řešeny v programu GeoGebra. Matematický software GeoGebra spojuje geometrii, algebru, tabulky, grafy, statistiku a počet v jednom programu. Nabízí on-line platformu s více než milionem bezplatných učebních zdrojů. Aplikace GeoGebra, učební zdroje, GeoGebra Classroom a další funkce jsou každému dostupné zdarma jak ke stažení, tak on-line na webových stránkách *geogebra.org* . Výhodou programu je také, že je přeložen do několika světových jazyků, včetně češtiny. *(GeoGebra, © 2022)*

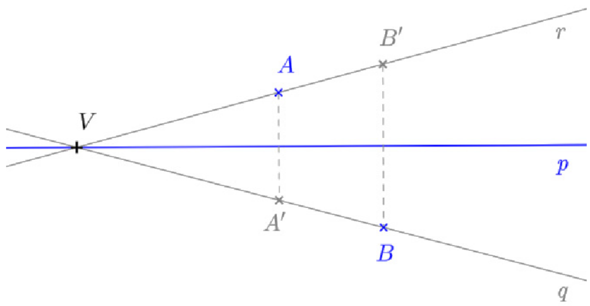
6.1 Úlohy řešeny s využitím osové souměrnosti

Příklad 1

Zadání: Je dána přímka p a body A, B ležící v opačných polorovinách s hraniční přímkou p (AB není kolmá k p). Sestrojte na přímce p bod V tak, aby osa úhlu AVB ležela v přímce p. *(Pomykalová, 2006, s. 132)*

Konstrukce a její postup:

1. Dáno: p, A, B
2. A'; $\mathcal{O}(p): A \rightarrow A'$
3. $\leftrightarrow A'B = q$
4. B'; $\mathcal{O}(p): B \rightarrow B'$
5. $\leftrightarrow AB' = r$
6. V; $V \in q \cap r$



***Obr. 6.1-1** Konstrukce bodu V*

Důkaz: Úloha je řešená s využitím osové souměrnosti s osou souměrnosti p. Z definice tohoto zobrazení plyne: $AA' \perp p$, $BB' \perp p$, přičemž $|Ap| = |A'p|$, $|Bp| = |B'p|$, přímky q, r jsou navzájem osově souměrné podle osy p a velikosti úhlů $|\sphericalangle qp|$, $|\sphericalangle rp|$ jsou shodné. Hledaný bod V splňuje podmínky úlohy.

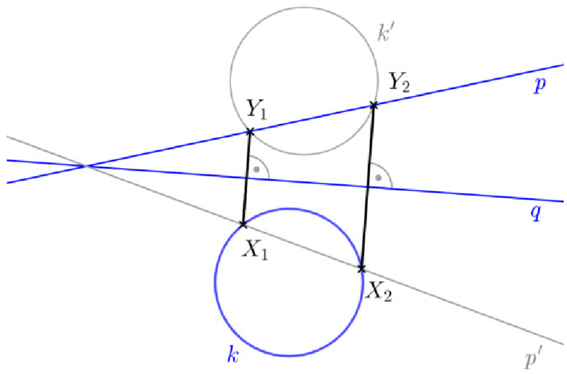
Diskuse: Počet řešení záleží na poloze bodů A, B. Úloha má jedno řešení, je-li $|Ap| \neq |Bp|$ (obr. 6.1-1). Je-li $|Ap| = |Bp|$ úloha nemá žádné řešení ($p \parallel q \parallel r$).

Příklad 2

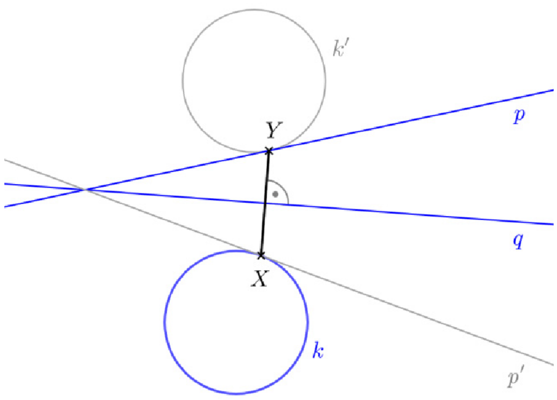
Zadání: Jsou dány dvě různoběžky p, q a kružnice k. Sestrojte úsečku XY tak, aby platilo $X \in k$, $Y \in p$, úsečka XY je kolmá na přímku q a střed úsečky XY leží na přímce q. Zvolte postupně vzájemnou polohu kružnice a přímek tak, aby úloha měla 2 řešení, resp. 1, resp. 0 řešení. *(Petáková, 2013, s. 79)*

Konstrukce a její postup:

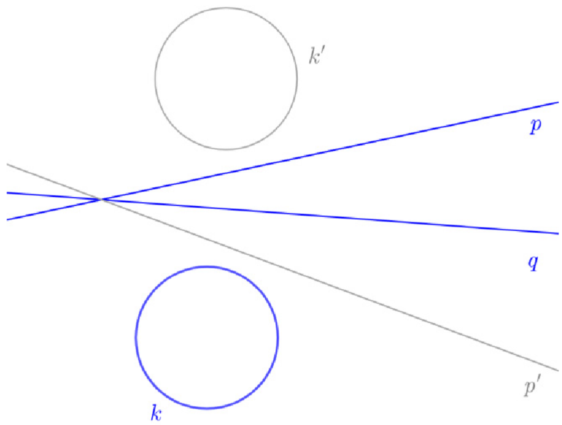
1. Dáno: p, q, k
2. p'; $\mathcal{O}(q): p \to p'$
3. X; $X \in k \cap p'$
4. k'; $\mathcal{O}(q): p \to k'$
5. Y; $Y \in p \cap k'$
6. XY



***Obr. 6.1-2a** Konstrukce úsečky XY – 2 řešení*



***Obr. 6.1-2b** Konstrukce úsečky XY – 1 řešení*



***Obr. 6.1-2c** Konstrukce úsečky XY – 0 řešení*

Důkaz: Řešení plyne z vlastností osové souměrnosti, kde přímka q je osou souměrnosti. Z definice tohoto zobrazení plyne, že $XY \perp q$, $|Xq| = |Yq|$, přičemž $X \in k$, $Y \in p$. Úsečka XY splňuje podmínky úlohy.

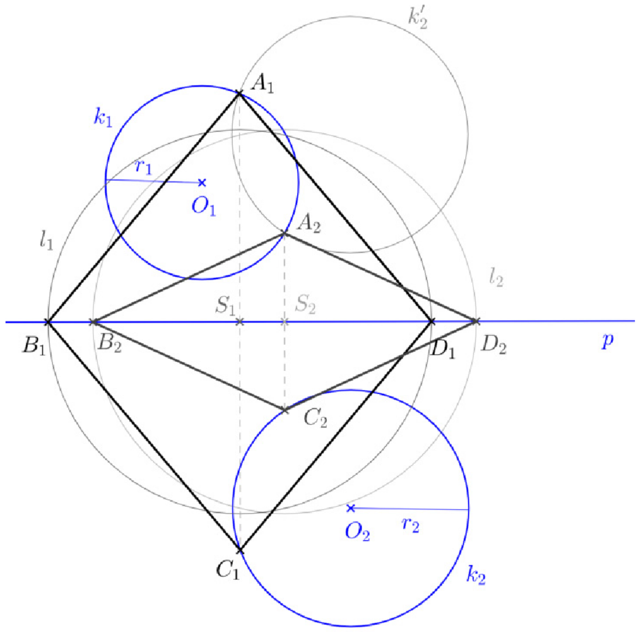
Diskuse: Počet řešení závisí na vzájemné poloze přímek p, q a kružnice k. Úloha má právě dvě řešení, je-li obraz přímky p v osové souměrnosti s osou q sečnou kružnice k (obr. 6.1-2a). Je-li obraz přímky p v tomto zobrazení tečnou kružnice k, pak má úloha právě jedno řešení (obr. 6.1-2b). Úloha nemá žádné řešení, je-li obraz přímky p v tomto zobrazení vnější přímkou kružnice k. (obr. 6.1-2c).

Příklad 3

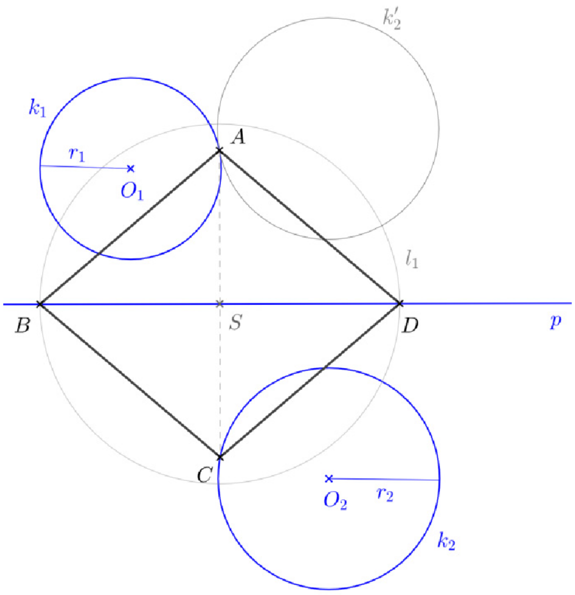
Zadání: Kružnice $k_1(O_1;\ r_1)$, $k_2(O_2;\ r_2)$ leží v opačných polorovinách s hraniční přímkou p. Sestrojte kosočtverec $ABCD$ tak, aby jeho vrcholy A, C ležely po řadě na kružnicích k_1, k_2 a úhlopříčka BD ($|BD| = 5\,cm$) na přímce p. Volte vzájemnou polohu kružnic k_1, k_2 a přímky p tak, aby úloha měla 2, resp. 1, resp. 0 řešení. *(Pomykalová, 2006, s. 132)*

Konstrukce a její postup:

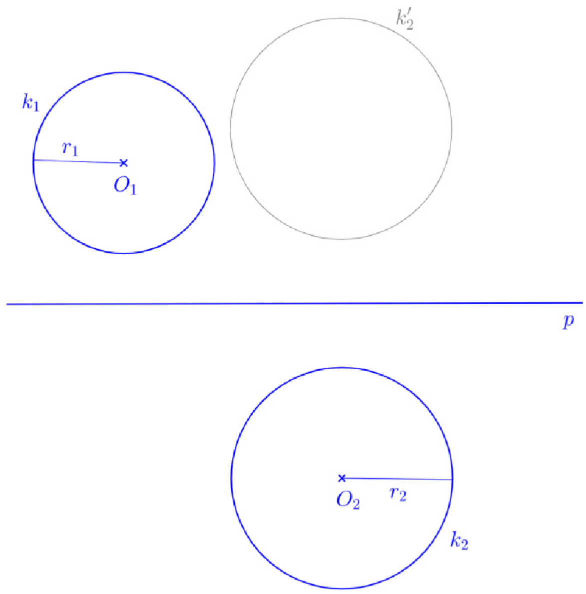
1. Dáno: k_1, k_2, p
2. k_2'; $\boldsymbol{O}(p): k_2 \to k_2'$
3. A; $A \in k_1 \cap k_2'$
4. C; $\boldsymbol{O}(p): A \to C$
5. S; $S \in p \cap AC$
6. l; $l\left(S; \frac{1}{2}|BD| = 2{,}5\ cm\right)$
7. B; $B \in l \cap p$
8. D; $D \in l \cap p$
9. kosočtverec $ABCD$



Obr. 6.1-3a *Konstrukce kosočtverce ABCD – 2 řešení*



Obr. 6.1-3b *Konstrukce kosočtverce ABCD – 1 řešení*



Obr. 6.1-3c *Konstrukce kosočtverce ABCD – 0 řešení*

Důkaz: Úloha je řešena s využitím osové souměrnosti s osou souměrnosti p. Z definice tohoto zobrazení plyne, že $AC \perp p$, přičemž $|Ap| = |Cp|$. Bod A tedy leží na kružnici k_1 a obrazu kružnice k_2. Úsečky AD, CD a úsečky AB, CB jsou navzájem souměrné podle osy p. Z vlastností kosočtverce plyne: $|AB| = |BC| = |CD| = |DA|$, velikosti protějších úhlů jsou shodné, bod S je středem úhlopříček a úhlopříčky jsou na sebe kolmé. Kosočtverec $ABCD$ splňuje podmínky zadání.

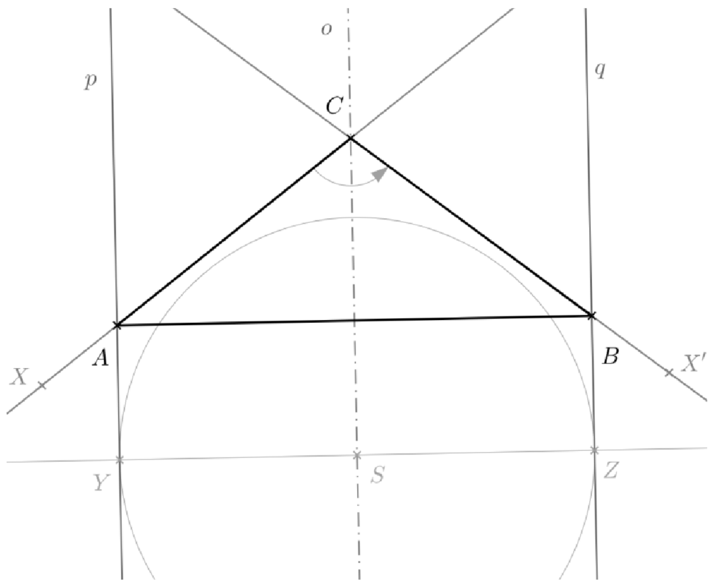
Diskuse: Počet řešení závisí na vzájemné poloze kružnic k_1, k_2. Úloha má dvě řešení, má-li obraz kružnice k_2 v osové souměrnosti s osou p s kružnicí k_1 společné právě dva body (obr. 6.1-3a). Má-li obraz kružnice k_2 v tomto zobrazení s kružnicí k_1 společný právě jeden bod, pak úloha má jedno řešení (obr. 6.1-3b). Je-li průnik obrazu kružnice k_2 v tomto zobrazení s kružnici k_1 prázdná množina, pak úloha nemá řešení (obr. 6.1-3c).

Příklad 4

Zadání: Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC (AB je základna), je-li $|AB| = 6\ cm$, $\gamma = 105°$. *(Pomykalová, 2006, s. 131)*

Konstrukce a její postup:

1. $\sphericalangle XCX'$; $|\sphericalangle XCX'| = 105°$
2. o; o je osa $\sphericalangle XCX'$
3. p; $p \parallel o$; $|po| = \frac{1}{2}|AB| =$ $= 3\ cm$
4. A; $A \in p \cap \leftrightarrow CX$
5. q; $\boldsymbol{O}(o): p \rightarrow q$
6. B; $B \in q \cap \leftrightarrow CX'$
7. $\triangle ABC$



Obr. 6.1-4 *Konstrukce trojúhelníku ABC*

Důkaz: Úloha je řešena s využitím osové souměrnosti. Z vlastností rovnoramenných trojúhelníků plyne, že osa úsečky AB půlí úhel při vrcholu C. Tato osa rozděluje rovnoramenný trojúhelník na dva osově souměrné pravoúhlé trojúhelníky, kde bod C se nachází na ose souměrnosti a bod B je obrazem bodu A. Trojúhelník ABC splňuje podmínky zadání.

Diskuse: Úloha má v dané polorovině jedno řešení (obr. 6.1-4).

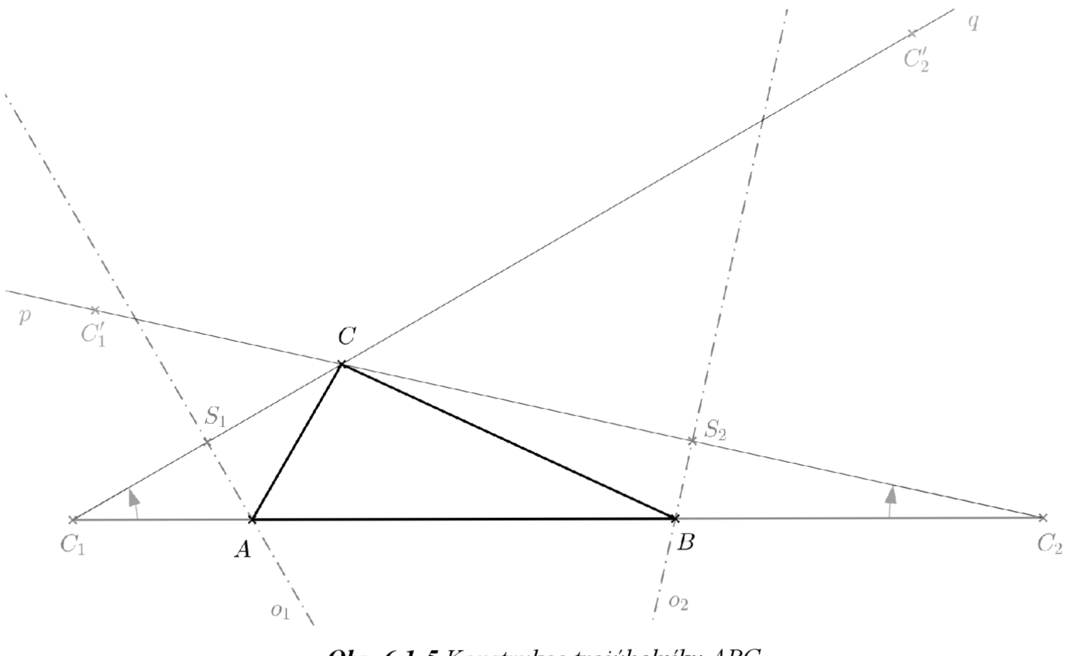
Příklad 5

Zadání: Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, je-li dán jejich obvod $o = 12\ cm$ a úhly $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$. *(Pomykalová, 2006, s. 130)*

Postup konstrukce:

1. $C_1C_2;\ |C_1C_2| = o = 12\ cm$
2. $C_1';\ \boldsymbol{\mathcal{R}}\left(C_2;\ -\frac{1}{2}\beta = -22{,}5°\right): C_1 \to C_1'$
3. $\mapsto C_2C_1' = p$
4. $C_2';\ \boldsymbol{\mathcal{R}}\left(C_1;\ \frac{1}{2}\alpha = 30°\right): C_2 \to C_2'$
5. $\mapsto C_1C_2' = q$
6. $\mathrm{C};\ \mathrm{C} \in p \cap\ q$
7. $S_1;\ S_1 \in CC_1, |C_1S_1| = |CS_1|$
8. $o_1;\ o_1 \perp CC_1,\ S_1 \in o_1$
9. $A;\ A \in o_1 \cap\ C_1C_2$
10. $S_2;\ S_2 \in CC_2, |C_2S_2| = |CS_2|$
11. $o_2;\ o_2 \perp CC_2,\ S_2 \in o_1$
12. $B;\ B \in o_2 \cap\ C_1C_2$
13. $\triangle\ ABC$

Konstrukce:



Obr. 6.1-5 *Konstrukce trojúhelníku ABC*

Důkaz: Řešení úlohy plyne z vlastnosti osové souměrnosti. Trojúhelníky C_1AC, C_2BC jsou rovnoramenné. Z definice osové souměrnosti plyne, že osa úsečky C_1C je osou souměrnosti v zobrazení $\boldsymbol{O}(o_1): AC_1 \to AC$ a osa úsečky C_2C je osou souměrnosti v zobrazení $\boldsymbol{O}(o_2): BC_2 \to BC$.

Diskuse: Úloha má jedno řešení (obr. 6.1-5).

6.2 Úlohy řešeny s využitím středové souměrnosti

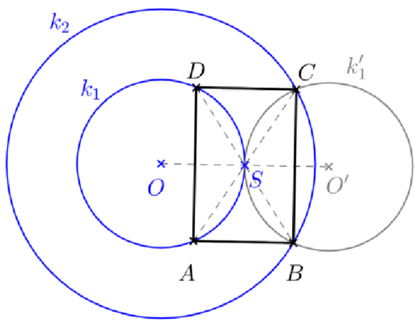
Příklad 1

Zadání: Jsou dány dvě soustředné kružnice $k_1(O;\, r_1)$, $k_2(0;\, r_2)$, $r_2 > r_1$, a bod S ležící na menší z nich. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$ se středem S, jehož vrcholy leží na daných kružnicích. *(Pomykalová, 2006, s. 135)*

Postup konstrukce:

1. Dáno: k_1, k_2, S
2. k_1'; $\boldsymbol{S}(S): k_1(O;\, r_1) \to k_1'(O';\, r_1)$
3. C, B; $\{C, B\} = k_2 \cap k_1'$
4. A, D; $\boldsymbol{S}(S): C \to A, B \to D$
5. rovnoběžník $ABCD$

Konstrukce:



Obr. 6.2-1 *Konstrukce rovnoběžníku ABCD*

Důkaz: Úloha je řešena s využitím středové souměrnosti, kde středem souměrnosti je bod S. Z definice této souměrnosti plyne: $|AS| = |CS|, |BS| = |DS|$, tedy bod C leží na průniku kružnice k_2 a obrazu kružnice k_1 v zobrazení $\boldsymbol{S}(S): A \to C$ (obdobně bod B). Protější strany čtyřúhelníku jsou rovnoběžné a mají stejnou velikost. Čtyřúhelník $ABCD$ splňuje podmínky zadání.

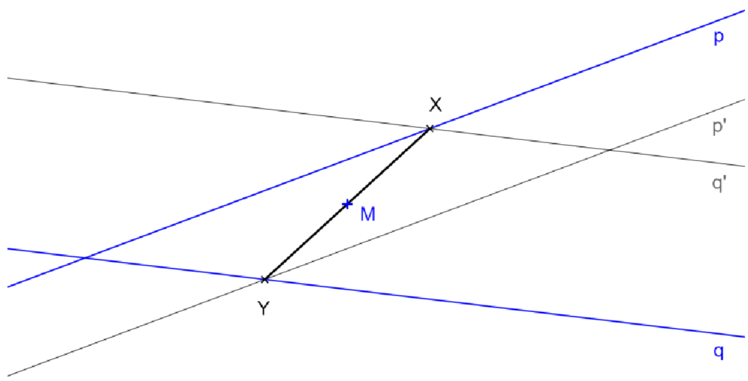
Diskuse: Počet řešení závisí na poloměru kružnic k_1, k_2. Je-li $r_1 > \frac{1}{3}r_2$, pak úloha má jedno řešení, kružnice k_2 se protne s obrazem kružnice k_1 ve dvou bodech (obr. 6.2-1). Je-li $r_1 = \frac{1}{3}r_2$, kružnice k_2 s obrazem kružnice k_1 má jeden společný bod a výsledkem je úsečka, což neodpovídá zadání. V případě, že by $r_1 < \frac{1}{3}r_2$, pak by kružnice k_2 s obrazem kružnice k_1 neměla žádný společný bod, tudíž by nevznikl žádný rovinný útvar, který by splňoval zadání.

Příklad 2

Zadání: Jsou dány dvě různoběžky p, q a bod M ($M \notin p$, $M \notin q$). Sestrojte úsečku XY tak, aby platilo: $X \in p$, $Y \in q$ a bod M je střed úsečky XY *(Petáková, 2013, s. 79)*.

Konstrukce a její postup:

1. Dáno: p, q, M
2. p'; $\boldsymbol{S}(M): p \to p'$
3. Y; $Y \in q \cap p'$
4. q'; $\boldsymbol{S}(M): q \to q'$
5. X; $X \in p \cap q'$
6. XY



Obr. 6.2-2 *Konstrukce úsečky XY*

Důkaz: Úloha je řešená s využitím středové souměrnosti se středem souměrnosti M. Dle vlastností středové souměrnosti jsou přímky p, q v tomto zobrazení rovnoběžné se svými obrazem p', q' v tomto pořadí, tím je zajištěno: $|XM| = |YM|$. Bod X je obrazem bodu Y, který leží na přímce q, proto bod X je průnikem přímky p a obrazu přímky q v zobrazení $\boldsymbol{S}(M)$.

Diskuse: Úloha má jedno řešení, neboť obraz přímky q protne přímku p v jednom bodě (obr. 6.2-2).

Příklad 3

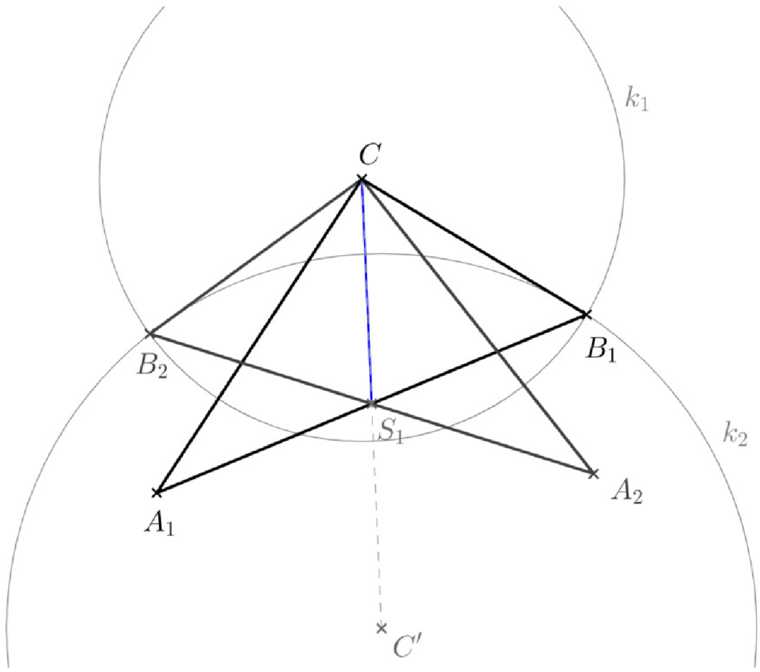
Zadání: Je dána úsečka CS_1, $|CS_1| = 3\ cm$. Sestroj trojúhelník ABC, pro který je úsečka CS_1 těžnicí t_c a pro který platí: $a = 3{,}5\ cm$, $b = 5\ cm$. *(Petáková, 2013, s. 80)*

Postup konstrukce:

1. Dáno: $CS_1; |CS_1| = 3\ cm$
2. $k_1; k_1(C; 3{,}5\ cm)$
3. $C'; \boldsymbol{S}(S_1): C \to C'$

4. $k_2; k_2(C'; 5\ cm)$
5. $B; B \in k_1 \cap k_2$
6. $A; \boldsymbol{S}(S_1): B \to A$
7. $\triangle ABC$

Konstrukce:



Obr. 6.2-3 *Konstrukce trojúhelníku ABC*

Důkaz: Řešení úlohy plyne z vlastností středové souměrnosti se středem souměrnosti S_1. V tomto shodném zobrazení platí, že $|AS_1| = |BS_1|$, tedy bod B je obrazem bodu A v zobrazení $\boldsymbol{S}(S_1)$.

Diskuse: Úloha má dvě řešení, neboť kružnice $k_1(C; |CB|)$ a $k_2(C'; |CA|)$ mají společné dva body B_1, B_2 (obr. 6.2-3).

Příklad 4

Zadání: Je dána úsečka AA_1 ($|AA_1| = 5\ cm$). Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které je AA_1 těžnicí t_c a pro které platí $b = 6\ cm$, $\alpha = 45°$. *(Pomykalová, 2006, s. 135)*

Postup konstrukce:

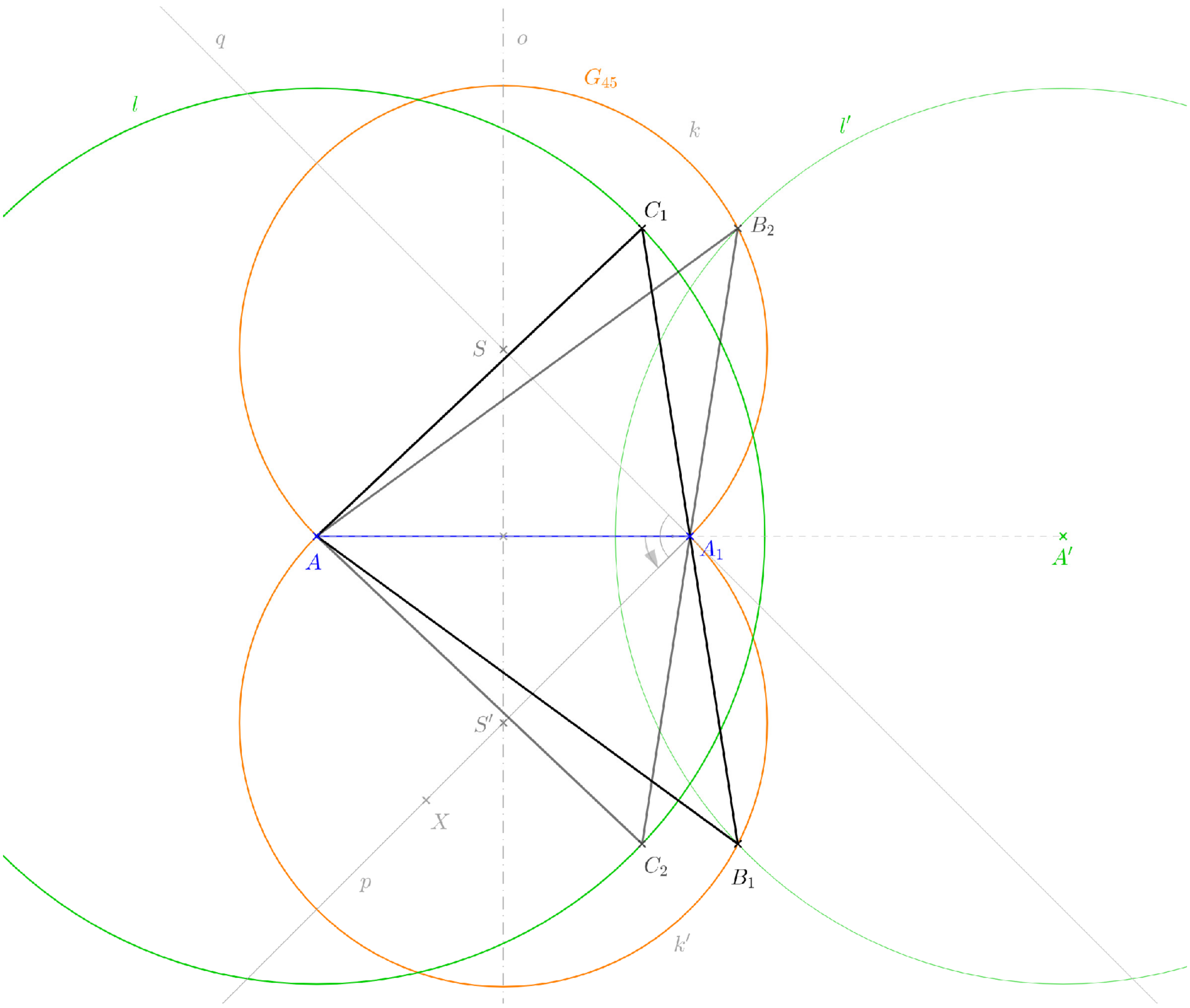
1. Dáno: AA_1; $|AA_1| = 5\ cm$
2. G_{45}
3. l; $l(A; 6\ cm)$
4. l'; $\boldsymbol{S}(A_1): l \to l'$
5. $B; B \in G_{45} \cap l'$

6. C; $\boldsymbol{S}(A_1): B \rightarrow \mathrm{C}$
7. $\triangle\, ABC$

Množina bodů G_{45}, ze kterých je úsečka vidět pod úhlem 45°:

1. $\sphericalangle AA_1X;\ |\sphericalangle AA_1X| = 45°$
2. $\mapsto A_1X = p$
3. $q; q \perp p, A_1 \in q$
4. $o; o$ je osa AA_1
5. $S; S \in q \cap o$
6. $S';\ \boldsymbol{S}(\mathrm{o} \cap \mathrm{AA}_1): S \rightarrow \mathrm{S}'$
7. $\frown SA_1A, \frown S'AA_1$
8. $G_{45};\ G_{45} = \frown SA_1A\ \cup \frown S'AA_1$

Konstrukce:



Obr. 6.2-4 *Konstrukce trojúhelníku ABC*

Důkaz: Úloha je řešena s využitím vlastností středové souměrnosti. Z definice tohoto zobrazení plyne, že bod A_1 je středem souměrnosti a bod B ležící na množině G_{45} je obrazem bodu C ležící na kružnici $l(A; 6\,cm)$, tedy $|CA_1| = |BA_1|$. Trojúhelník ABC splňuje podmínky zadání.

Diskuse: Obraz kružnice l ve středové souměrnosti se středem A_1 má s množinou G_{45} právě dva společné body (bod B trojúhelníku ABC), proto má úloha dvě řešení (obr. 6.2-4).

6.3 Úlohy řešeny s využitím posunutí

Příklad 1

Zadání: Jsou dány přímky $a \parallel b$ a bod M, který leží v rovinném pásu (a, b). Sestrojte kružnici, která se dotýká přímek a, b a prochází bodem M. *(Pomykalová, 2006, s. 142)*

Postup konstrukce:

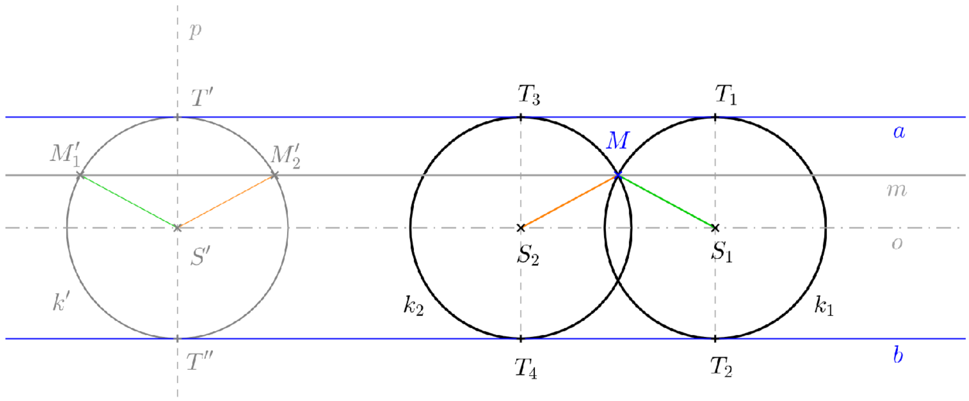
Nejprve si sestrojíme pomocnou kružnici k'.

1. Dáno: $a \parallel b$
2. $p;\ p \perp a$
3. $T';\ T' \in p \cap a$
4. $T'';\ T'' \in p \cap b$
5. $S';\ S' \in p, |S'T'| = |S'T''|$
6. $k';\ k'(S';\ |S'T'|)$

Nyní si bod M zobrazíme do této pomocné kružnice k' a dále budeme postupovat s využitím posunutí.

7. Dáno: M
8. $m; m \parallel a,\ M \in m$
9. $M_1', M_2';\ \{M_1', M_2'\} = m \cap k'$
10. $o; o \parallel a,\ S' \in o$
11. $S_1;\ \mathcal{T}\left(\overrightarrow{M_1'M}\right): S' \to S_1$
12. $k_1;\ k_1(S_1;\ |S_1M|)$
13. $S_2;\ \mathcal{T}\left(\overrightarrow{M_2'M}\right): S' \to S_2$
14. $k_2;\ k_2(S_2;\ |S_2M|)$

Konstrukce:



Obr. 6.3-1 *Konstrukce kružnice*

Důkaz: Úloha je řešena s využitím shodného zobrazení v rovině, kterým je posunutí. Kružnice k' je vzorem tohoto zobrazení s vektory posunutí $\overrightarrow{M_1'M}$ a $\overrightarrow{M_2'M}$, tedy $\mathcal{T}\left(\overrightarrow{M_1'M}\right): k' \to k_1$, $\mathcal{T}\left(\overrightarrow{M_2'M}\right): k' \to k_2$. Úsečky $S'M_1' \parallel S_1M$, $S'M_2' \parallel S_2M$. Body dotyku T', T_1, T_3 se nacházejí na průsečíku přímky a a přímky kolmé na a procházející středem kružnice (obdobně body dotyku T'', T_2, T_4).

Diskuse: Úloha má dvě řešení, jestliže se bod M nachází uvnitř rovinného pásu (a, b) (obr. 6.3-1). Leží-li bod M na jedné ze zadaných rovnoběžných přímek a, b, úloha má právě jedno řešení, bod M bodem dotyku hledané kružnice.

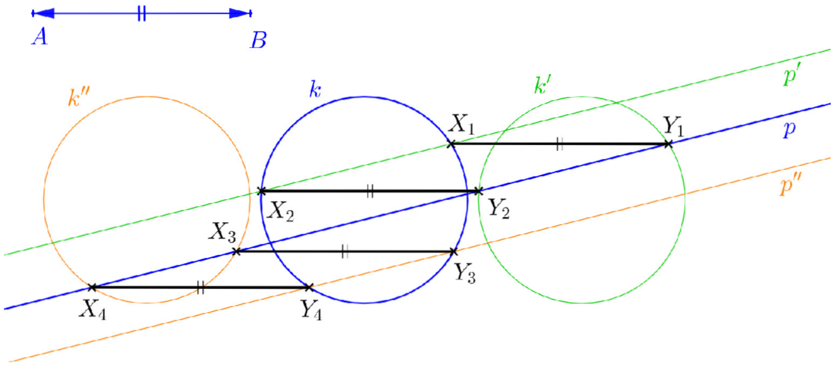
Příklad 2

Zadání: Je dána kružnice k, přímka p a úsečka AB. Sestrojte úsečku XY tak, aby platilo $X \in k$, $Y \in p$, úsečka XY je rovnoběžná s úsečkou AB. Zvolte postupně vzájemnou polohu kružnice a přímky tak, aby úloha měla 4, resp. 3, resp. 2, resp. 1, resp. 0 řešení. *(Petáková, 2013, s. 79)*

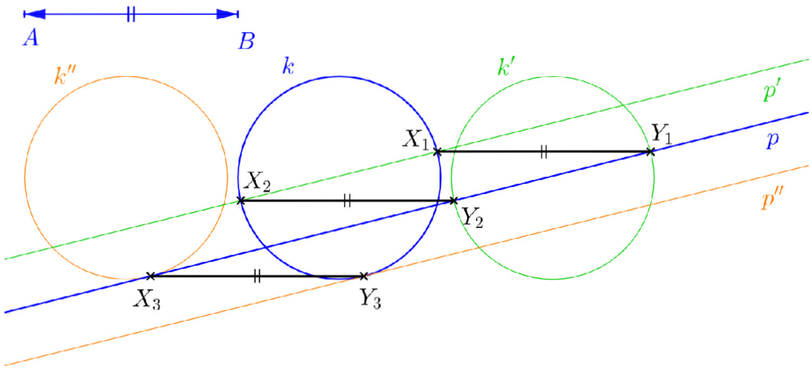
Postup konstrukce:

1. Dáno: p, k, AB
2. k'; $\boldsymbol{\mathcal{T}}(\overrightarrow{AB}): k \to k'$ nebo k''; $\boldsymbol{\mathcal{T}}(\overrightarrow{BA}): k \to k''$
3. Y_1; $Y_1 \in p \cap k'$ nebo Y_2; $Y_2 \in p \cap k''$
4. p'; $\boldsymbol{\mathcal{T}}(\overrightarrow{BA}): p \to p'$ nebo p''; $\boldsymbol{\mathcal{T}}(\overrightarrow{AB}): p \to p''$
5. X_1; $X_1 \in k \cap p'$ nebo Y_2; $Y_2 \in k \cap p''$
6. XY

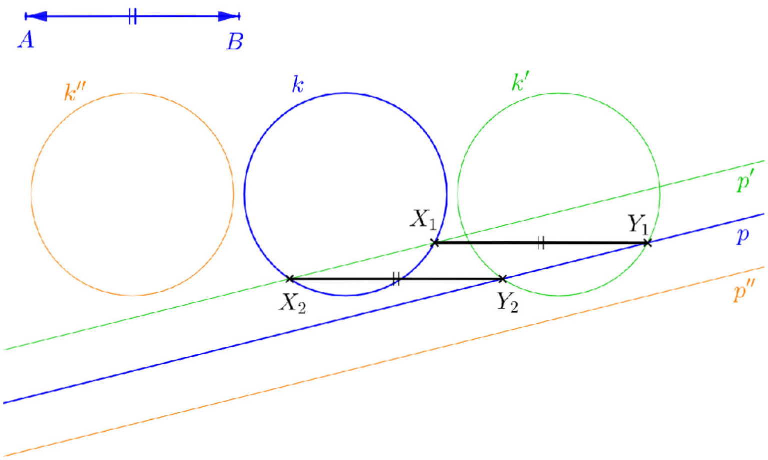
Konstrukce:



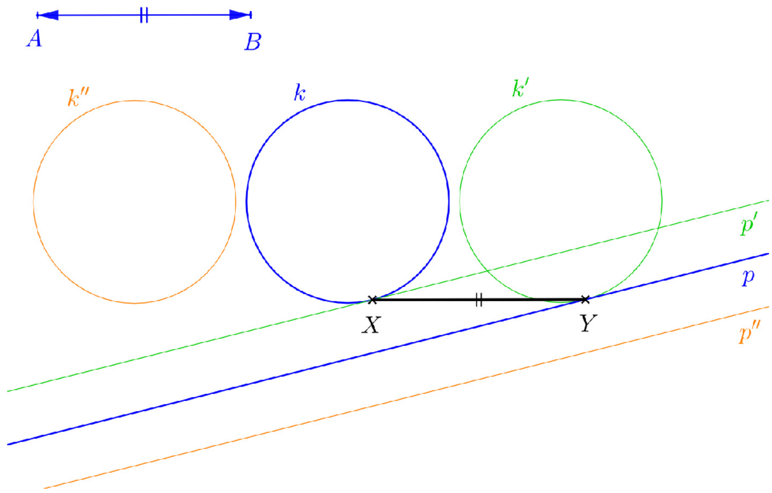
Obr. 6.3-2a *Konstrukce úsečky – 4 řešení*



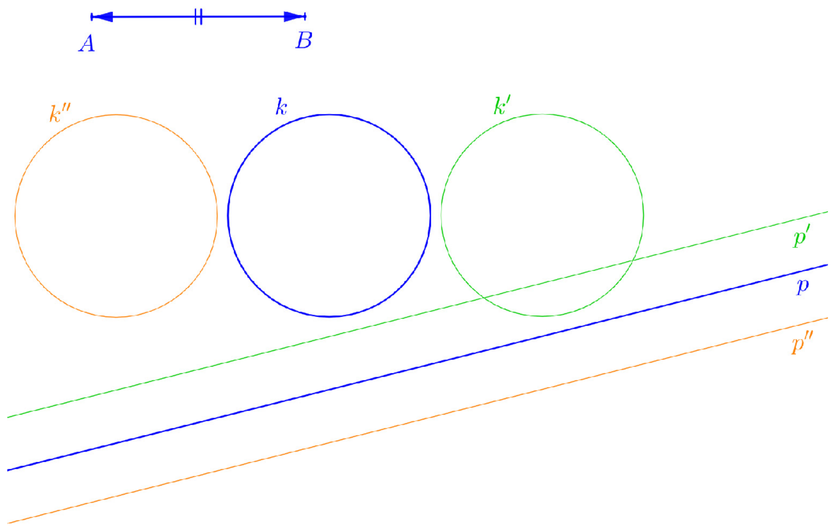
Obr. 6.3-2b *Konstrukce úsečky – 3 řešení*



Obr. 6.3-2c *Konstrukce úsečky – 2 řešení*



Obr. 6.3-2d *Konstrukce úsečky – 1 řešení*



Obr. 6.3-2e *Konstrukce úsečky – 0 řešení*

Důkaz: Úloha je řešena s využitím vlastností shodného zobrazení posunutí. Z vlastností posunutí plyne, že úsečka AB je orientovanou úsečkou toto zobrazení, která udává velikost a směr posunutí. Úsečky AB, X_1Y_1, X_2Y_2 jsou navzájem rovnoběžné a mají stejnou velikost. Body X_1, X_2 se nacházejí na kružnici k a obrazu přímky p v zobrazení $\boldsymbol{\mathcal{T}}(\overrightarrow{BA})$ a body Y_1, Y_2 se nacházejí na přímce p a obrazu kružnice k v zobrazení $\boldsymbol{\mathcal{T}}(\overrightarrow{AB})$.

Diskuse: Počet řešení závisí na poloze přímky p a kružnice k. Úloha má čtyři řešení, mají-li kružnice k s přímkou p právě dva body společné a zároveň obrazy přímky p s vektory posunutí $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{BA}$ jsou sečnou kružnice k (obr. 6.3-2a). Úloha má tři řešení, jestliže má kružnice k s přímkou p právě dva společné body a zároveň obraz přímky p s vektorem posunutí $\overrightarrow{BA}$ je tečnou kružnice k a obraz přímky p s vektorem posunutí $\overrightarrow{AB}$ je sečnou kružnice k, nebo i naopak (obr. 6.3-2b). Má-li obraz přímky p v zobrazení $\boldsymbol{\mathcal{T}}(\overrightarrow{BA})$ právě dva společné body s kružnicí k a obraz přímky p v zobrazení $\mathcal{T}(\overrightarrow{AB})$ nemá s kružnicí k žádný společný bod, pak má úloha dvě řešení (obr. 6.3-2c). Úloha má také dvě řešení právě tehdy, je-li $k \cap p = 1$ a $p \parallel AB$. Je-li přímka p tečnou obrazu kružnice k v zobrazení $\mathcal{T}(\overrightarrow{BA})$ a průnikem kružnice k s obrazem přímky p v zobrazení $\mathcal{T}(\overrightarrow{AB})$ je prázdná množina, pak má úloha jedno řešení (obr. 6.3-2d). Jestliže kružnice k nemá s obrazem přímky p jak v zobrazení $\mathcal{T}(\overrightarrow{AB})$ tak v zobrazení $\mathcal{T}(\overrightarrow{BA})$ společný žádný bod, úloha nemá řešení (obr. 6.3-2e).

6.4 Úlohy řešeny s využitím otočení

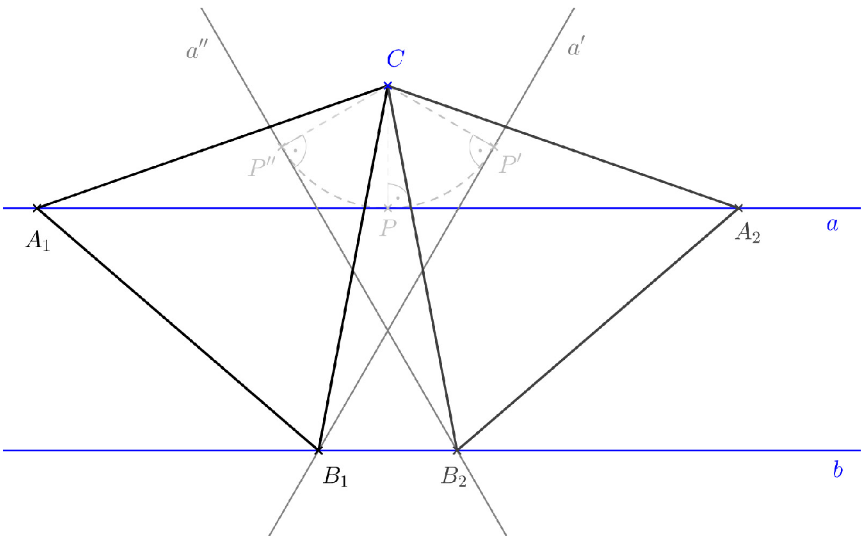
Příklad 1

Zadání: Jsou dány dvě rovnoběžné přímky a, b a mimo ně bod C. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby jeho vrcholy A, B ležely po řadě na přímkách a, b. *(Pomykalová, 2006, s. 149)*

Postup konstrukce:

1. Dáno: a, b, C
2. a'; $\mathcal{R}(\mathrm{C}; 60°)$: $a \to a'$ nebo a''; $\mathcal{R}(\mathrm{C}; -60°)$: $a \to a''$
3. B_1; $B_1 \in b \cap a'$ nebo B_2; $B_2 \in b \cap a''$
4. A_1; $\mathcal{R}(\mathrm{C}; -60°)$: $B_1 \to A_1$ nebo A_2; $\mathcal{R}(\mathrm{C}; 60°)$: $B_2 \to A_2$
5. $\triangle A_1B_1C_1$ nebo $\triangle A_2B_2C_2$

Konstrukce:



***Obr. 6.4-1** Konstrukce trojúhelníka ABC*

Důkaz: Úloha je řešena s využitím vlastností otočení, kde střed otočení je bod C a úhel otočení má velikost 60° (úhel každého vnitřního úhlu v rovnostranném trojúhelníku je 60°). V tomto zobrazení je obrazem bodu A_1 bod B_1 a obrazem přímky a přímka a', proto bod $B_1 \in a' \cap b$. Podmínky zadání jsou splněny.

Diskuse: Úloha má dvě řešení (obr. 6.4-1), neboť přímku a můžeme otočit v kladném i záporném smyslu. V případě, že by přímky a, b byly totožné, úloha by měla jedno řešení (základna AB by ležela na přímce a, resp. b).

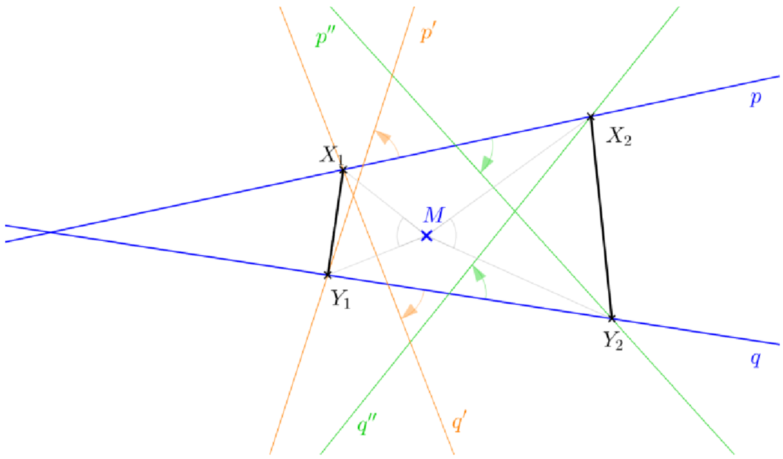
Příklad 2

Zadání: Jsou dány dvě různoběžky p, q a bod M ($M \notin p$, $M \notin q$). Sestrojte úsečku XY tak, aby platilo $X \in p$, $Y \in q$, $|\sphericalangle XMY| = 60°$, $|MX| = |MY|$. Zvolte postupně vzájemnou polohu přímek p, q tak, aby úloha měla 2, resp. 1, resp. 0 řešení. Při jaké vzájemné poloze p, q, M má úloha nekonečně mnoho řešení? *(Petáková, 2013, s. 79)*

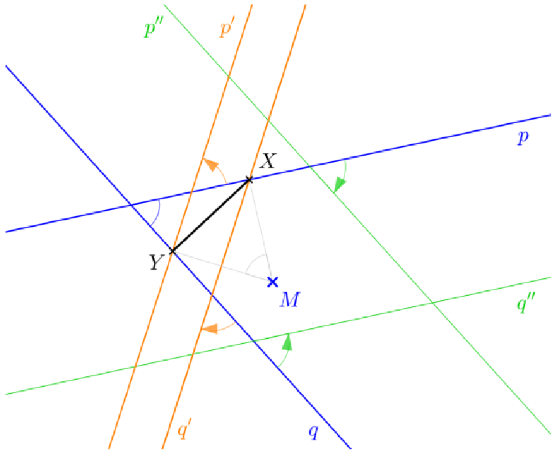
Postup konstrukce:

1. Dáno: p, q, M
2. p'; $\mathcal{R}(M, \pm 60°): p \to p'$
3. Y; $Y \in q \cap p'$
4. q'; $\mathcal{R}(M, \pm 60°): q \to q'$
5. X; $X \in p \cap q'$
6. XY

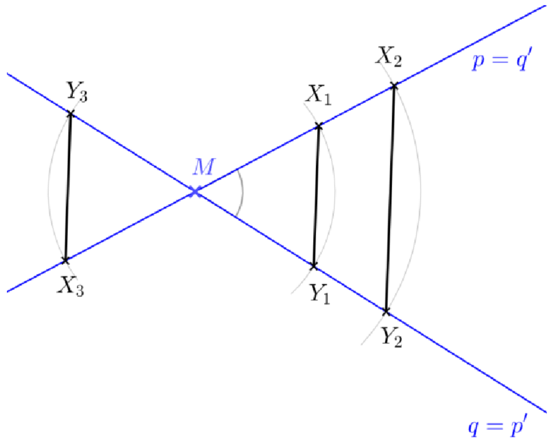
Konstrukce:



***Obr. 6.4-2a** Konstrukce úsečky XY – 2 řešení*



Obr. 6.4-2b Konstrukce úsečky XY – 1 řešení



Obr. 6.4-2c Konstrukce úsečky XY – 0 řešení

Důkaz: Řešení plyne z vlastností rotace. V této úloze je středem otočení bod M a úhlem otočení $\pm 60°$. V zobrazení $\mathcal{R}(M, 60°)$ je bod X obrazem bodu Y, proto přímku p, na níž má ležet bod A, v tomto otočíme. Bod Y je pak průsečíkem obrazu přímky p v zobrazení $\mathcal{R}(M, 60°)$ a přímky q, na níž má dle zadání ležet. Úsečka XY splňuje podmínky zadání.

Diskuse: Počet řešení úlohy závisí na velikosti konvexního úhlu svírající různoběžky p, q a na poloze bodu M. Úloha má dvě řešení, právě když velikost konvexního úhlu přímek p, q se ne nerovná 60°, tj. $|\sphericalangle pq| \neq 60°$ (obr. 6.4-2a). Má-li konvexní úhel přímek p, q velikost právě 60°, tj. $|\sphericalangle pq| = 60°$, úloha má jedno řešení (obr. 6.4-2b). Pokud by bod M byl průsečíkem přímek p, q a zároveň $|\sphericalangle pq| = 60°$, pak by úloha měla nekonečně mnoho řešení (obr. 6.4-2c).

6.5 Úlohy řešeny s využitím stejnolehlosti

Příklad 1

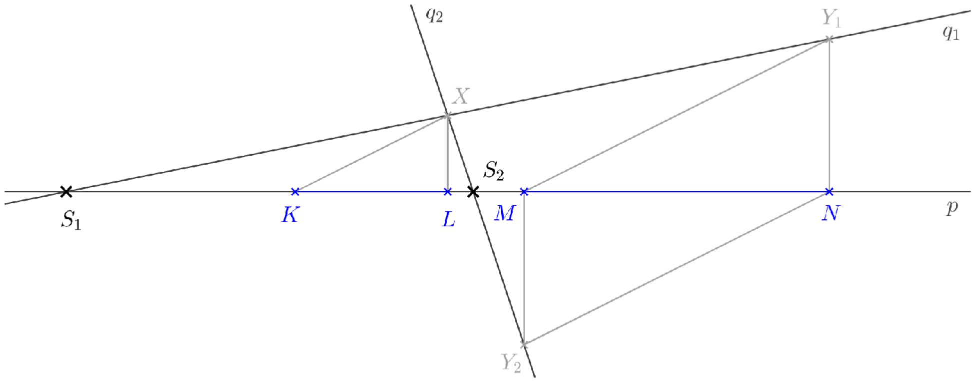
Zadání: Narýsujte středy stejnolehlosti dvou úseček KL, MN, které leží na jedné přímce. Úsečky KL a MN nemají žádný společný bod. *(Petáková, 2013, s. 82)*

Postup konstrukce:

1. Dáno: KL, MN
2. $\leftrightarrow KN = p$
3. Pomocný trojúhelník KLX
4. $\triangle MNY_1; \triangle MNY_1 \sim \triangle KLX$
5. $\leftrightarrow XY_1 = q_1$
6. $S_1;\ S_1 \in p \cap q_1$

7. $\triangle NMY_2; \triangle NMY_2 \sim \triangle KLX$
8. $\leftrightarrow XY_2 = q_2$
9. $S_2;\ S_2 \in p \cap q_2$

Konstrukce:



Obr. 6.5-1 *Středy stejnolehlosti úseček KL, MN*

Důkaz: Úloha je řešená s využitím stejnolehlého zobrazení. Z definice tohoto zobrazení plyne, že $\triangle MNY_1 \sim \triangle KLX$ a $\triangle NMY_2 \sim \triangle KLX$, tedy $KX \parallel MY_1 \parallel NY_2$, $LX \parallel NY_1 \parallel MY_2$, $\frac{|KL|}{|MN|} = \frac{|KX|}{|MY_1|} = \frac{|LX|}{|NY_1|} = \frac{|KX|}{|NY_2|} = \frac{|LX|}{|MY_2|}$. Středy stejnolehlosti se nacházejí mimo zadané úsečky KL a MN.

Diskuse: Úloha má dvě řešení, neboť obraz MN úsečky KL můžeme zobrazit ve stejnolehlosti s kladným i záporným koeficientem (obr. 6.5-1).

Příklad 2

Zadání: Narýsujte společné tečny daných dvou kružnic $k_1(O_1;\ 3{,}5\,cm)$, $k_2(O_2;\ 1{,}5\,cm)$, $|O_1O_2| = 6\,cm$. *(Petáková, 2013, s. 82)*

Postup konstrukce:

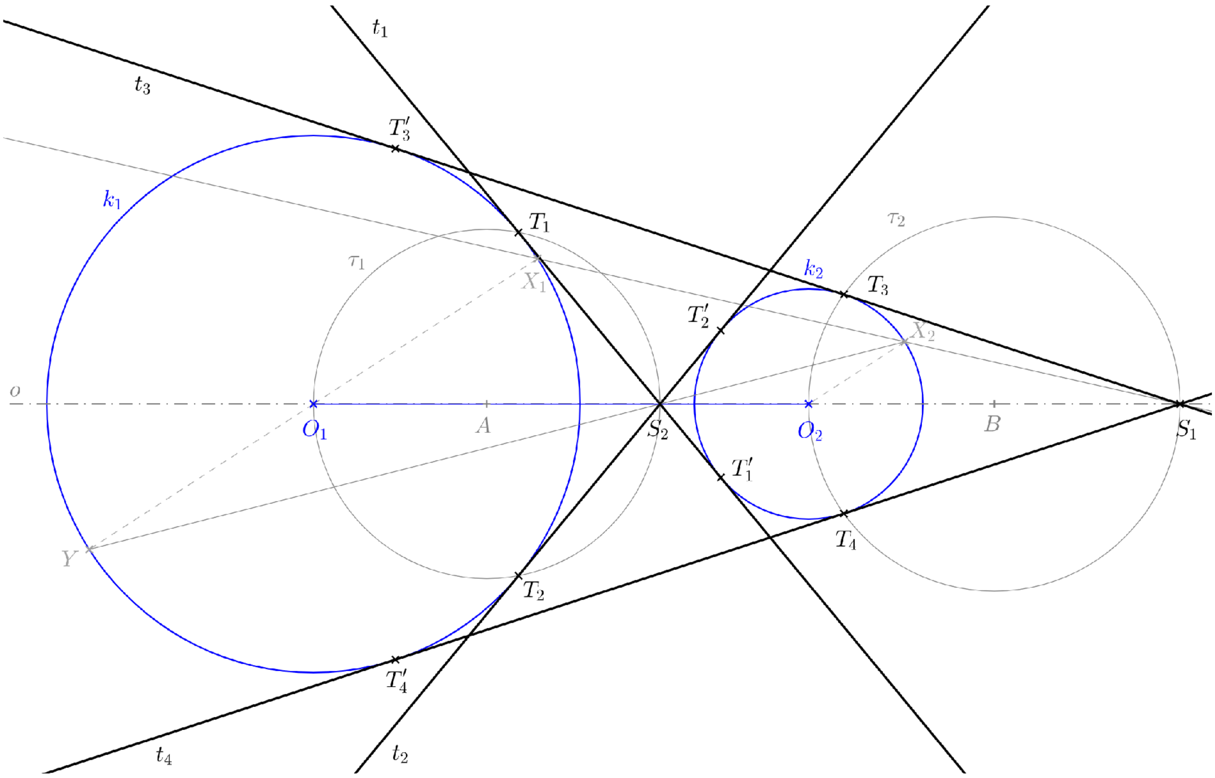
Nejprve najdeme středy stejnolehlosti:

1. Dáno: k_1, k_2
2. $\leftrightarrow O_1O_2 = o$
3. $X_1Y;\ O_1 \in X_1Y;\ X_1 \in k_1, Y \in k_1$
4. $X_2O_2;\ X_2O_2 \parallel X_1Y;\ X_2 \in k_2$
5. $\leftrightarrow X_1X_2$
6. $S_1;\ S_1 \in o \cap \leftrightarrow X_1X_2$
7. $\leftrightarrow X_2Y$
8. $S_2;\ S_2 \in o \cap \leftrightarrow X_2Y$

Nyní pomocí Thaletovy kružnice sestrojíme body dotyku tečen kružnic a následně samotné tečny.

9. τ_1; $\tau_1(A;\ |AS_2|)$
10. T_1, T_2; $\{T_1, T_2\} = \tau_1 \cap k_1$
11. $\leftrightarrow T_1S_2 = t_1$, $\leftrightarrow T_2S_2 = t_2$
12. τ_2; $\tau_2(B;\ |BS_1|)$
13. T_3, T_4; $\{T_3, T_4\} = \tau_2 \cap k_2$
14. $\leftrightarrow T_3S_1 = t_3$, $\leftrightarrow T_4S_1 = t_4$

Konstrukce:



Obr. 6.5-2 *Konstrukce tečen kružnic k_1, k_2*

Důkaz: Úloha je řešena s využitím stejnolehlosti dvou kružnic. Body S_1, S_2 jsou středy stejnolehlosti a kružnice k_1 je obrazem kružnice k_2 s koeficientem $\lambda = \frac{3,5}{1,5} = \frac{7}{3}$. Pro tečny kružnic platí: $t_1 \perp O_1T_1$, $t_2 \perp O_1T_2$, $t_3 \perp O_2T_2$, $t_4 \perp O_2T_4$.

Diskuse: Úloha má čtyři řešení (obr. 6.5-2). V případě, že by kružnice k_1 a k_2 měly společný jeden bod, tj. $|O_1O_2|$ = 5 cm, úloha by měla tři řešení, neboť tento společný bod by byl bodem dotyku tečny a tečna by byla kolmá na osu o.

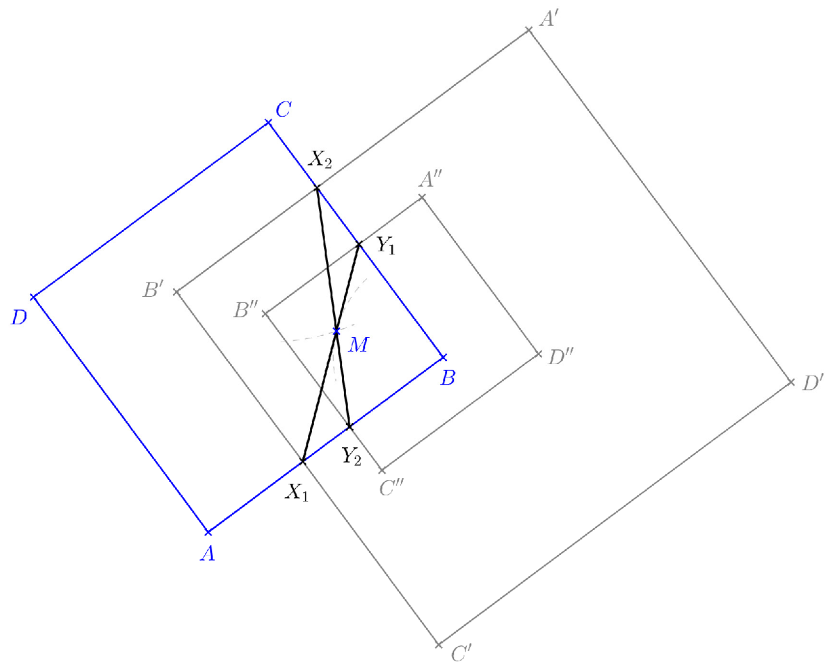
Příklad 3

Zadání: Je dán čtverec $ABCD$ ($|AB|$ = 4 cm). Uvnitř čtverce zvolte bod M, pro který platí: $|CM|$ = 3 cm, $|BM|$ = 1,5 cm. Sestrojte všechny úsečky XY tak, aby body X, Y ležely na obvodu čtverce a aby platilo: $|MX|:|MY| = 3 : 2$. *(Petáková, 2013, s. 83)*

Postup konstrukce:

1. Dáno: $\square\ ABCD, M$
2. $\square\ A'B'C'D';\ \mathcal{H}\left(M;\ -\frac{3}{2}\right): ABCD \rightarrow A'B'C'D'$
3. $X; X \in ABCD \cap\ A'B'C'D'$
4. $\square\ A''B''C''D'';\ \mathcal{H}\left(M;\ -\frac{2}{3}\right): ABCD \rightarrow A''B''C''D''$
5. $Y; Y \in ABCD \cap\ A''B''C''D''$
6. XY

Konstrukce:



Obr. 6.5-3 *Konstrukce úsečky XY*

Důkaz: Řešení úlohy plyne z vlastností stejnolehlého zobrazení, kde bod M je středem stejnolehlosti. Má-li bod X ležet na obvodu čtverce $ABCD$ a $|MX| : |MY| = 3 : 2$, pak tento bod leží na obrazu tohoto čtverce v tomto stejnolehlém zobrazení s koeficientem $-\frac{3}{2}$ (obdobně bod Y).

Diskuse: Úloha má dvě řešení, neboť obraz čtverce $ABCD$ s jeho vzorem mají společné dva body X_1, X_2 (obr. 6.5-3).

Příklad 4

Zadání: Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, znáte-li: $a : b = 4 : 5$, $\gamma = 60°$, v_c = 3 cm. *(Petáková, 2013, s. 83)*

Postup konstrukce:

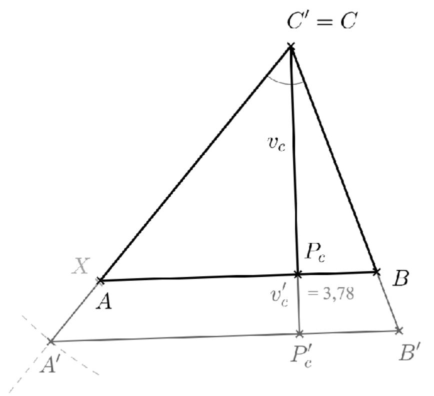
Nejprve sestrojíme pomocný trojúhelník $A'B'C'$ s výškou v_c', kde a' = 4 cm, b' = 5 cm, $\gamma = 60°$.

1. $B'C';\ |B'C'| = 4\,cm$
2. $\sphericalangle B'C'X;\ |\sphericalangle B'C'X| = 60°$
3. $k; k(C'; 5\,cm)$
4. $A'; A' \in k \cap \mapsto C'X$
5. $\triangle A'B'C'$
6. $v_c';\ v_c' \perp A'B', C' \in v_c'$

Nyní sestrojíme podobný trojúhelník ABC s výškou v_c = 3 cm.

7. $\triangle ABC;\ \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(C'; \frac{v_c}{v_c'} = \frac{3}{3{,}78} = \frac{50}{63}\right): \triangle A'B'C' \to \triangle ABC$

Konstrukce:



Obr. 6.5-4 *Konstrukce trojúhelníku ABC*

Důkaz: Úloha je řešena s využitím stejnolehlého zobrazení se středem stejnolehlosti C'. Z definice tohoto zobrazení plyne, že $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Odpovídající si strany △ ABC a △ $A'B'C'$ a jejich výšky v_c, v_c' jsou v poměru 3 : 3,78. Velikost úhlu při vrcholu C' trojúhelníka $A'B'C'$ je shodná s velikosti úhlu při vrcholu C trojúhelníka ABC.

Diskuse: Úloha má jedno řešení (obr. 6.5-4).

6.6 Úlohy řešeny s využitím skládání otočení a stejnolehlosti

Zadání k příkladu 1: Je dána úsečka OP, $|OP| = 4\,cm$. Sestrojte kružnici $k(O; 2{,}5\,cm)$ a přímku p, $p \perp OP \wedge P \in p$. Dále sestrojte jeden bod M, pro který platí $|OM| = 3\,cm$ a $|\sphericalangle POM| = 30°$. *(Petáková, 2013, s. 84)*

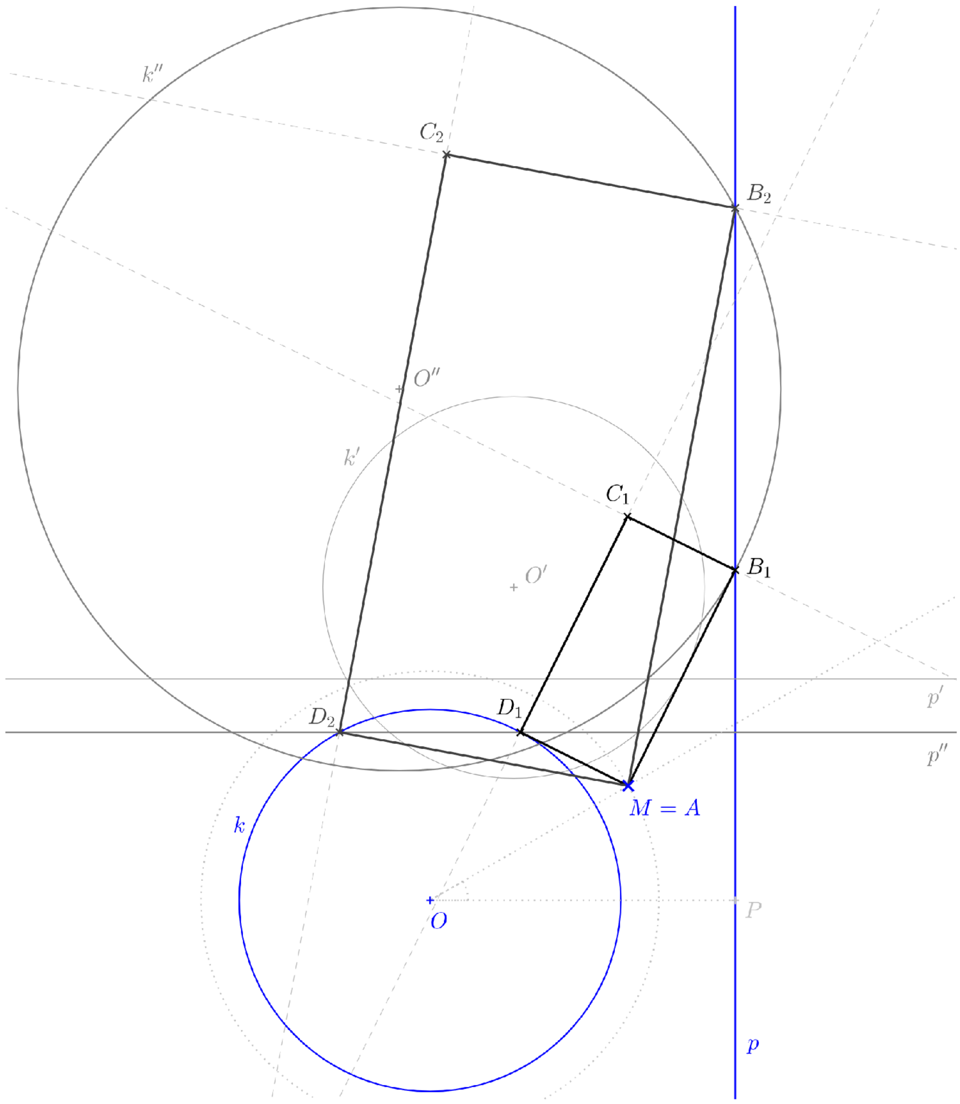
Příklad 1

Zadání: Je dána přímka p, kružnice k a bod M. Sestrojte všechny obdélníky $ABCD$ tak, aby platilo $A = M \wedge B \in p \wedge D \in k \wedge |AB| : |BC| = 2 : 1$.

Postup konstrukce:

1. Dáno: p, k, M
2. k'; $\boldsymbol{\mathcal{R}}(M; -90°)$: $k \rightarrow k'$
3. k''; $\boldsymbol{\mathcal{H}}(M; 2)$: $k' \rightarrow k''$
4. $B; B \in p \cap k''$
5. p'; $\boldsymbol{\mathcal{R}}(M; 90°)$: $p \rightarrow p'$
6. p''; $\boldsymbol{\mathcal{H}}\left(M; \frac{1}{2}\right)$: $p' \rightarrow p''$
7. $D; D \in k \cap p''$
8. $\leftrightarrow BX$; $\leftrightarrow AD \parallel \leftrightarrow BX$
9. $\leftrightarrow DY$; $\leftrightarrow BA \parallel \leftrightarrow DY$
10. C; $C \leftrightarrow DX \cap \leftrightarrow DY$
11. obdélník $ABCD$

Konstrukce:



Obr. 6.6-1 *Konstrukce obdélníku ABCD*

Důkaz: Úloha je řešena s využitím skládání dvou zobrazení, jež jsou otočení a stejnolehlost. Středem otočení i středem stejnolehlosti je bod M. Bod B obdélníku $ABCD$ má dle zadání ležet na přímce p a bod D na kružnici k. Protože $\sphericalangle DAB$ je pravým úhlem a velikost stran AD a AB mají být v poměru $1:2$, bod B musí ležet na obraze k'' kružnice k v zobrazení $\boldsymbol{\mathcal{R}}(M; -90°) \circ \boldsymbol{\mathcal{H}}(M; 2)$, kde $k \rightarrow k''$. Bod B tedy leží na průniku přímky p a obrazu k'' kružnice k v tomto složeném zobrazení. Obdobně bod D, který musí ležet na obraze p'' přímky p v zobrazení $\boldsymbol{\mathcal{R}}(M; 90°) \circ \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(M; \frac{1}{2}\right)$, kde $p \rightarrow p''$. Bod D tedy leží na průniku kružnice k a obrazu p'' přímky p v tomto složeném zobrazení. Obdélník $ABCD$ splňuje podmínky zadání.

Diskuse: Úloha má dvě řešení, neboť obraz kružnice k v zobrazení $\boldsymbol{\mathcal{R}}(M; -90°) \circ \boldsymbol{\mathcal{H}}(M; 2)$ má s přímkou p dva společné body (obr. 6.6-1).

Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo vyřešit vybrané konstrukční úlohy na základě shodných nebo podobných zobrazení a pomoct žákům či studentům lépe porozumět řešení těchto typu úloh.

V této práci jsou vypracovány úlohy jak polohové, tj. je dána poloha zadaných prvků, tak nepolohové, kde není určena poloha zadaných prvků. Polohové úlohy začínají zpravidla slovy *„Je dán prvek…“*, tímto prvkem pak musíme při konstrukci začít. Nepolohové úlohy zpravidla začínají slovy *„Sestrojte … je-li …“*, *„Narýsujte … platí-li“*. Tyto úlohy lze sestrojit kdekoli v rovině a je na nás, jakým prvkem při konstrukci začneme. Umístíme-li tento prvek nepolohové úlohy na rovinu, úloha se změní na polohovou.

Osové souměrnosti využíváme v úlohách, v nichž jsou dány dva útvary v rovině a přímka p a hledáme úsečku, jejíž body leží na daných útvarech a mají od přímky p stejnou vzdálenost. Takovou úlohu řešíme tak, že útvary zobrazíme v této souměrnosti s osou souměrnosti p. Body hledané úsečky jsou pak průnikem vzoru jednoho útvaru a obrazu druhého útvaru. Obdobně postupujeme u jiných shodných zobrazení v rovině s tím, že namísto přímky p máme zadaný jiný prvek. U úloh s využitím středové souměrnosti máme dán střed, který je středem souměrnosti. U posunutí máme danou orientovanou úsečku, která je vektorem posunutí tohoto zobrazení. U úloh s využitím otočení máme dán střed a úhel otočení.

Úlohy, kde se využívá poměru, např. hledání úsečky v daném poměru, jsou konstruovány s využitím stejnolehlého zobrazení. Stejnolehlosti se využívá také u úloh, kde hledáme tečny dvou daných kružnic s různým poloměrem.

Počet řešení daných úloh není vždy na první pohled viditelný. V programu GeoGebra, ve kterém jsou řešeny všechny úlohy této práce, můžeme zřetelněji určit za jakých podmínek má úloha … řešení. V tomto programu lze díky posunování a zvětšování různých geometrických prvků, které jsou dány v zadání, názorně vidět, co se s nimi děje.

Dospěli jsme tedy k závěru, že řadu konstrukčních úloh, můžeme vyřešit s využitím shodností nebo podobností. Počítačový program GeoGebra nám lépe pomůže zjistit všechna řešení dané úlohy.

Literatura

JANČOVIČOVÁ, Eva at al. *Matematika pro nižší třídy víceletých gymnázií: Trojúhelníky a čtyřúhelníky*. Praha: Prometheus, 1995. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-85849-86-0.

KADLEČEK, Jiří. *Geometrie v rovině a v prostoru pro střední školy*. Praha: Prometheus, 1996. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-017-9.

MOLNÁR, Josef. *Planimetrie*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2001. ISBN 80-244-0370-6.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: Příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na VŠ*. Praha: Prometheus, 2013. ISBN 978-80-7196-099-7.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 9., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2012. ISBN 978-80-7196-356-1.

POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: Planimetrie*. 4. vyd. Praha: Prometheus, 2006. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-174-4.

ŠEDIVÝ, Jaroslav. *O podobnosti v geometrii*. Praha: Mladá fronta, 1963. Škola mladých matematiků.

ŠEDIVÝ, Jaroslav. *Shodnost a podobnost v konstrukčních úlohách*. Praha: Mladá fronta, 1980. Škola mladých matematiků.

Internetové zdroje:

O programu GeoGebra. *GeoGebra* [online]. © 2022 [cit. 2022-04-18]. Dostupné z: https://www.geogebra.org/about

Seznam používaných matematických symbolů

$\mathbb{N}$	množina všech přirozených čísel
$\mathbb{Z}$	množina všech celých čísel
A	bod A
$\leftrightarrow AB$	přímka AB
p	přímka p
$\mapsto AB$	polopřímka AB
AB	úsečka AB
$\overrightarrow{AB}$	orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$ s počátečním bodem A a koncovým bodem B
$\mapsto ABC$	polorovina ABC (polorovina s hraniční přímkou AB a vnitřním bodem C)
$\sphericalangle AVB$	konvexní úhel AVB (konvexní úhel s vrcholem V a rameny v polopřímkách VA, VB)
$\widehat{AVB}$	orientovaný úhel $\widehat{AVB}$ s počátečním ramenem VA a koncovým ramenem VB
(a, b)	rovinný pás a, b (pás ohraničený rovnoběžkami a, b)
$\triangle ABC$	trojúhelník ABC
$\square ABCD$	čtverec $ABCD$
t_a	těžnice vedená vrcholem A trojúhelníku
v_a	výška na stranu a trojúhelníku
r	poloměr kružnice
d	průměr kružnice
$k(S; r)$	kružnice k se středem S a poloměrem r
$K(S; r)$	kruh K se středem S a poloměrem r
τ_{AB}	Thaletova kružnice s průměrem AB
$\frown AB$	kružnicový oblou AB (kružnicový oblouk s krajními body A, B)
G_φ	množina bodů, ze kterých je vidět úsečky pod úhlem φ
$A \in p$ $(A \notin p)$	bod A leží (neleží) na přímce p
$A \in p \cap q$	bod A leží na průniku přímky p a přímky q
$\{P\} = p \cap q$	bod A je průsečík přímky p a přímky q
$A = B$ $(A \neq B)$	bod A splývá, resp. je totožný s bodem B (různý od bodu B)

$p = q$ $(p \neq q)$	přímka p splývá, resp. je totožná s přímkou q (různá od přímky q)
$p \parallel q$ $(p \nparallel q)$	přímka p je (není) rovnoběžná s přímkou q
$p \perp q$	přímka p je kolmá k přímce q
$\triangle ABC \cong \triangle KLM$	trojúhelník ABC je shodný s trojúhelníkem KLM
$\triangle ABC \sim \triangle KLM$	trojúhelník ABC je podobný s trojúhelníkem KLM
$\lvert AB \rvert$	délka úsečky AB
$\lvert pA \rvert$	vzdálenost bodu A od přímky p
$\lvert pq \rvert$	vzdálenost rovnoběžných přímek p, q
$\lvert \sphericalangle AVB \rvert$	velikost konvexního úhlu AVB
$^\circ, {}', {}''$	stupeň, minuta, vteřina
$\boldsymbol{Z}$	zobrazení $\boldsymbol{Z}$
$\boldsymbol{Z}: A \to A'$	bod A' je obrazem bodu A v zobrazení $\boldsymbol{Z}$
$\boldsymbol{\mathcal{O}}(o)$	osová souměrnost s osou souměrnosti o
$\boldsymbol{\mathcal{S}}(S)$	středová souměrnost se středem souměrnosti S
$\boldsymbol{\mathcal{T}}\left(\overrightarrow{AB}\right)$	posunutí (translace) určené orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$
$\boldsymbol{\mathcal{R}}(S, \varphi)$	otočení (rotace) se středem S a úhlem otočení φ
$\boldsymbol{\mathcal{H}}(S, \lambda)$	stejnolehlost se středem S a koeficientem λ
$\boldsymbol{Z_2} \circ \boldsymbol{Z_1}$	zobrazení složené ze zobrazení $\boldsymbol{Z_1}$ a $\boldsymbol{Z_2}$ v tomto pořadí

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Přílohy

V rámci řešených úloh bakalářské práce vznikly dynamické konstrukce v programu GeoGebra. Tyto soubory byly nahrány do příloh v IS STAG.

Anotace

Jméno a příjmení:	Veronika Kremlová
Katedra:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	Mgr. Jiří Vaško
Rok obhajoby:	2023

Název práce:	Konstrukční úlohy řešené s využitím shodnosti a podobnosti
Název v angličtině:	Construction problems solved on the basis of identity and similarity
Anotace práce:	Bakalářská práce se zaměřuje na shodná a podobná zobrazení v rovině a využití těchto zobrazení v konstrukčních úlohách. V práci jsou vysvětleny základní pojmy planimetrie, jednotlivá shodná zobrazení v rovině, stejnolehlá zobrazení a s nimi související podobná zobrazení v rovině. V praktické části práce se nacházejí vybrané konstrukční úlohy řešené s využitím těchto zobrazení v rovině. Konstrukce těchto úloh jsou zkonstruovány v programu GeoGebra.
Klíčová slova:	planimetrie, shodná zobrazení v rovině, stejnolehlá zobrazení, podobná zobrazení v rovině, řešené příklady
Anotace v angličtině:	The bachelor thesis focuses on identical and similar transformations in the plane and the use of these transformations in constructional tasks. The thesis explains the basic concepts of planimetry, individual identical transformations in the plane, homothetic transformations and related similar transformations in the plane. The practical part of the thesis contains selected constructional tasks solved using these transformations in the plane. The constructions of these tasks are constructed in the GeoGebra program.
Klíčová slova v angličtině:	planimetry, identical transformations in the plane, homothetic transformations, similar transformations in the plane, solved examples
Přílohy vázané v práci:	
Rozsah práce:	57
Jazyk práce:	Český jazyk