



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

## ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

## ANALÝZA VOLNÉHO A VÁZANÉHO KROUCENÍ OTEVŘENÝCH A UZAVŘENÝCH TENKOSTĚNNÝCH PROFILŮ

ANALYSIS OF SIMPLE AND NON-UNIFORM TORSION WITH RESTRICTED WARPING OF OPENED AND CLOSED THIN-WALLED PROFILES

### BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

#### AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Radim Zavičák

#### VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. František Šebek,  
Ph.D.

BRNO 2023



# Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	<b>Radim Zavičák</b>
Studijní program:	Základy strojního inženýrství
Studijní obor:	Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce:	<b>doc. Ing. František Šebek, Ph.D.</b>
Akademický rok:	2022/23

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

## **Analýza volného a vázaného kroucení otevřených a uzavřených tenkostěnných profilů**

### **Stručná charakteristika problematiky úkolu:**

Ve strojírenství se kroucení podrobují nekruhové příčné průřezy tenkostěnných profilů, ať už záměrně či nikoli. Často pak nicméně bývá zabráněno deplanaci, tedy jejich osové dilataci a problém se komplikuje, jelikož kromě smykových napětí vznikají i napětí normálová.

### **Cíle bakalářské práce:**

1. Rešerše volného a vázaného kroucení tenkostěnných profilů.
2. Výběr několika případů kroucení otevřených i uzavřených profilů a jejich analytické a numerické řešení.
3. Formulace závěrů o nebezpečnosti jednotlivých stavů vzhledem k meznímu stavu pružnosti.

### **Seznam doporučené literatury:**

GERE, J. M. a B. J. GOODNO. Mechanics of Materials. 8th Ed. Stamford: Cengage Learning, 2013. ISBN 978-1-111-57774-2.

HIBBELER, R. C. Mechanics of Materials. 10th Ed. Boston: Pearson, 2017. ISBN 978-0-134-31965-0.

JANÍČEK, P., ONDRÁČEK, E., VRBKA, J. a J. BURŠA. Mechanika těles: Pružnost a pevnost I. 3. přeprac. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2004. ISBN 80-214-2592-X.

KALIVODA, O. Krut prutů s nekruhovým příčným průřezem. Brno, 2015. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky.

MACH, O. Analýza vybraných metod pro řešení krutu tyčí s nekruhovým příčným průřezem. Brno, 2016. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky.

ONDRÁČEK, E., J. VRBKA, P. JANÍČEK a J. BURŠA. Mechanika těles: Pružnost a pevnost II. 4. přeprac. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006. ISBN 80-214-3260-8.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2022/23

V Brně, dne

L. S.

---

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jiří Hlinka, Ph.D.  
děkan fakulty

## **Abstrakt**

Tato práce se zabývá řešením volného a vázaného kroucení prutů nekruhových tenkostěnných profilů. V teoretické části je kladen důraz především na odvození analytického řešení pro výpočet napětí u otevřených a uzavřených profilů. Analytické řešení je následně aplikováno na řešení konkrétních příkladů. Výsledky jsou verifikovány metodou konečných prvků. V závěrečné části práce bylo provedeno srovnání analytických a numerických výsledků a byla diskutována bezpečnost jednotlivých stavů vůči meznímu stavu pružnosti.

## **Abstract**

This thesis deals with the solution of simple and non-uniform torsion with restricted warping of non-circular thin-walled profiles. In the theoretical part, the emphasis is mainly on the derivation of analytical solution for calculation of stress in open and closed profiles. Analytical solution is then applied to solve specific examples. The results are verified by the finite element method. In the final part of the thesis, a comparison of analytical and numerical results was made and the safety of individual states with respect to the limit state of elasticity was discussed.

## **Klíčová slova**

Analytický výpočet, krut prutů, tenkostěnný profil, vázané kroucení, volné kroucení

## **Key words**

Analytical calculation, torsion of bars, thin-walled profile, non-uniform torsion of restricted warping, simple torsion

## **Bibliografická citace:**

ZAVIČÁK, Radim. *Analýza volného a vázaného kroucení otevřených a uzavřených tenkostěnných profilů* [online]. Brno, 2023 [cit. 2023-05-12]. Dostupné z: <https://www.vut.cz/studenti/zav-prace/detail/146795>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce František Šebek.

## **Čestné prohlášení**

Prohlašuji, že svou závěrečnou práci jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího závěrečné práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu použitých zdrojů.

Brno \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
Radim Zavičák

## **Poděkování**

Tímto bych chtěl poděkovat vedoucímu mé bakalářské práce doc. Ing. Františku Šebkovi, Ph.D. za věcné připomínky, cenné rady a doporučení při zpracovávání. Dále bych chtěl také poděkovat mé rodině, především pak rodičům, nejen za podporu při studiu.



## Obsah

1	Úvod.....	10
2	Krut prutů nekruhových průřezů .....	11
3	Střed smyku.....	12
4	Volné kroucení prutů otevřených tenkostěnných profilů .....	13
4.1	Výpočet napětí pro I-profil .....	14
4.2	Výpočet napětí pro C-profil.....	15
4.3	Výpočet napětí pro otevřený kruhový průřez .....	16
5	Volné kroucení prutů uzavřených tenkostěnných profilů .....	17
5.1	Ověření platnosti Saint-Venantova kroucení na dutém kruhovém průřezu.....	18
5.1.1	Saint-Venantova teorie .....	18
5.1.2	Základní teorie pružnosti a pevnosti .....	18
5.2	Výpočet napětí pro průřez tvaru dutého čtverce.....	20
6	Vázané kroucení prutů tenkostěnných profilů .....	21
6.1	Deformační rozbor.....	21
6.2	Napěťový rozbor.....	22
6.3	Rozbor napětí pro symetrický I-profil .....	22
6.4	Relativní velikosti Saint-Venantova a vázaného kroucení .....	23
6.5	Výpočet napětí pro I-profil .....	24
6.5.1	Napětí ve vetknutí .....	25
6.5.2	Napětí na volném konci.....	26
6.5.3	Napětí ve vzdálenosti 200 mm od vetknutí .....	27
7	Numerické řešení.....	28
7.1	Verifikace výpočtu volného kroucení I-profilu .....	30
7.2	Verifikace výpočtu volného kroucení C-profilu.....	32
7.3	Verifikace výpočtu volného kroucení otevřeného kruhového průřezu.....	33
7.4	Verifikace výpočtu volného kroucení průřezu tvaru dutého čtverce.....	34
7.5	Verifikace výpočtu vázaného kroucení I-profilu .....	36
7.6	Celkové srovnání analytického a numerického řešení .....	38
8	Závěr.....	39
	Seznam použitých zdrojů .....	40

# 1 Úvod

Pružnost a pevnost je velmi rozsáhlá vědní disciplína. Základní částí je statická pružnost a pevnost, která se zabývá silovým působením a následnou deformací těles a jejich prvků, které musí splňovat podmínky statické rovnováhy [1]. Při reálném zatěžování tělesa je možné použít vztahy ze statické pružnosti pouze v těch případech, kdy zatěžování tělesa je tak pomalé, že setrvačné síly jsou nepodstatné [1].

Napětově-deformační analýza prochází neustálým vývojem, kdy analytický přístup, který byl v minulosti nejdominantnější, je stále častěji nahrazován numerickými metodami jako jsou Metoda Konečných Prvků (MKP), metoda konečných objemů a další [2]. V porovnání s klasickými metodami jsou numerické metody univerzální ve smyslu jejich použití nezávisle na geometrii, materiálu atd. [2].

Nicméně nevýhodou MKP je, že nedokáže dodat žádné vztahy, kterými by se dala predikovat změna získaných hodnot při měnícím se zatížení [2]. Dalším častým problémem je chybné zadání okrajových podmínek, které vedou k nesprávným výsledkům. Analytické vztahy tak mohou sloužit jako účinný nástroj pro verifikaci získaných výsledků.

Tato práce se bude zabývat problematikou volného a vázaného kroucení přímých prismatických prutů tenkostěnného uzavřeného nebo otevřeného profilu. Důraz bude kladen na odvození potřebných vztahů pro výpočet napětí. Řešení bude demonstrováno na několika ukázkových typech příčných průřezů. Takto získané výsledky budou následně porovnány s výsledky získanými numerickými metodami, konkrétně MKP.

## 2 Krut prutů nekruhových průřezů

Pokud je přímý prismatický (tzn. s konstantním příčným průřezem po celé své délce) prut nekruhového průřezu zatížen kroučícím momentem, pak se tento průřez kromě natočení začne i deformovat ve směru podél střednice prutu [3]. Tento jev je též nazýván jako deplanace příčného průřezu. Navíc ztrácíme podmínku symetrie kolem střednice. Není proto možné použít základní teorii pro kroucení prutů [3].

Z hlediska vazeb je potřeba rozlišit volné a vázané kroucení. Při volném kroucení je prut uložen ve vazbách, které odebírají všechny stupně volnosti, ale zároveň zde není žádným způsobem zamezeno deplanaci příčného průřezu. Příčné průřezy, které byly před zatížením rovinné a kolmé na střednici, již po deformaci rovinné a kolmé na střednici nejsou [4]. Protože je deformace ve všech příčných průřezích shodná a nastává, aniž by byla způsobena normálovým napětím, je jediným vzniklým napětím smykové napětí [4].

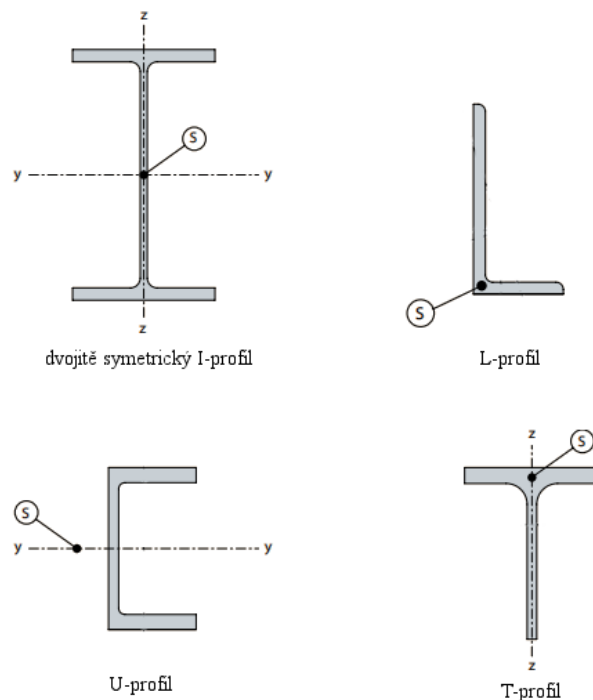
Vázané kroucení vznikne, pokud kterémukoliv příčnému průřezu není umožněno volně deplanovat nebo se kroučící moment mění po délce prutu [4]. V takovém případě se deformace vzniklé kroucením liší po délce prutu a v příčných průřezích vzniknou kromě smykových napětí i normálová tahová nebo tlaková napětí [4].

### 3 Střed smyku

Když je ocelový nosník podroben kroucení, nejčastěji jako výsledek excentricky aplikovaného zatížení, vygenerovaný kroutící moment je výsledkem síly a její kolmé vzdálenosti od středu smyku, který nemusí být vždy shodný s těžištěm [5].

Pokud má příčný průřez alespoň jednu osu symetrie, bude střed smyku ležet na ní [5]. Tudiž pro příčné průřezy, které mají více než jednu osu symetrie, bude střed smyku totožný s těžištěm příčného průřezu. Prut se vždy kroutí kolem podélné osy, která prochází středem smyku a je rovnoběžná se střednicí prutu [5]. Pokud je tedy střed smyku totožný s těžištěm příčného průřezu, zůstává střednice prutu přímková. Naopak pokud střed smyku není totožný s těžištěm, střednice po zatížení kroutícím momentem přímková nezůstane (bude mít tvar šroubovice).

Pozice středu smyku závisí pouze na vlastnostech příčného průřezu [6]. Pro prismatické pruty je proto konstantní po celé délce střednice. Výslednice smykových toků musí být v rovnováze se smykovými silami působícími na příčný průřez [6].

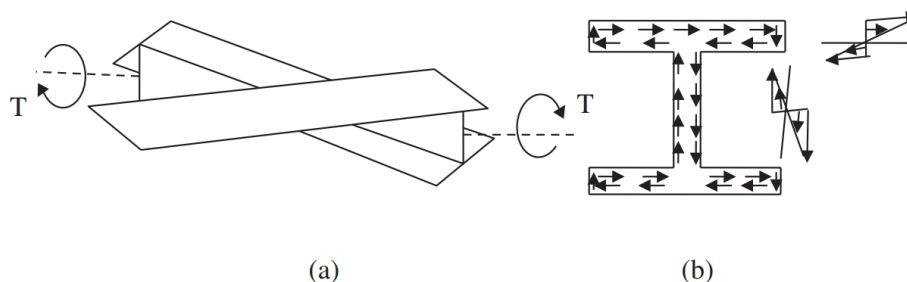


Obr. 3.1 Střed smyku u vybraných tvarů příčného průřezu [5]

Na obr. 3.1 jsou vyobrazeny středy smyku u vybraných tvarů příčného průřezu. Osy  $y$  a  $z$  jsou osy symetrie daného tvaru.

## 4 Volné kroucení prutů otevřených tenkostěnných profilů

Pro otevřený tenkostěnný profil platí, že střednicová křivka příčného průřezu netvoří uzavřený obrazec. Předpokládá se, že je směr smykových napětí v každém místě rovnoběžný s tečnou ke střednicové křivce [4]. Rozložení smykových napětí je pro úzký obdélník i pro tenkostěnné průřezy složené z více obdélníkových částí patrné na obr. 4.1 b). Deformace příčných průřezů při zatížení kroutícím momentem je naznačena na obr. 4.1 a). Z tohoto obrázku je také patrné, že horní a spodní pásnice se vůči sobě deformují v osové směru opačnými směry.



Obr. 4.1 Kroucení prutu otevřeného profilu  
a) I-profil zatížený konstantním momentem b) rozložení napětí v příčném průřezu [4]

Smyková napětí se u volného kroucení nazývají Saint-Venantova kroutící napětí [4]. Velikost těchto napětí je přímo úměrná vzdálenosti od střednicové křivky. Pro volné kroucení je vztah [4] mezi kroutícím momentem  $M_k$  (též nazývaný jako Saint-Venantův nebo prostý kroutící moment) a úhlem zkroucení  $\varphi$  dán jako

$$M_k = GJ \frac{d\varphi}{dx}, \quad (4.1)$$

kde  $G$  je modul pružnosti ve smyku daného materiálu,  $J$  je torzní konstanta příčného průřezu a  $x$  je podélná osa prutu a člen  $d\varphi/dx$  je poměrný úhel zkroucení, který je pro volné kroucení konstantní po celé délce prutu. Pokud je příčný průřez složen z více obdélníkových elementů, pak je torzní konstanta pro tento průřez dána [4]

$$J = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n b_i t_i^3, \quad (4.2)$$

kde  $b_i$  a  $t_i$  jsou délky a tloušťky všech obdélníkových elementů příčného průřezu,  $n$  je počet elementů v příčném průřezu. Rovnice (4.2) je platná pouze pokud je poměr  $b_i/t_i$  větší než 10. Pokud je poměr menší, je potřeba zavést korekční faktor [4]. Místo působení nejvyššího smykového napětí je na povrchu nejtlustšího elementu příčného průřezu a je dáno [4]

$$\tau_{max} = \frac{M_k}{J} t_{max}, \quad (4.3)$$

kde  $t_{max}$  je maximální tloušťka elementu příčného průřezu.

Dosazením rovnice ( 4.1 ) pro prostý kroučící moment do rovnice ( 4.3 ) maximálního smykového napětí získáme vztah mezi smykovým napětím a poměrným úhlem zkroucení

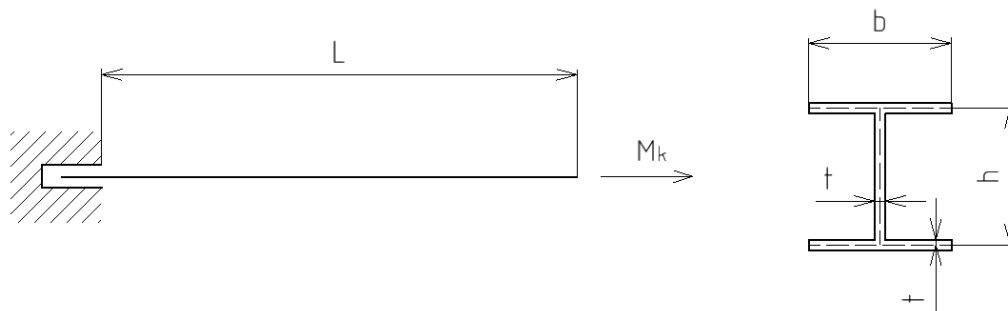
$$\tau_{max} = G t_{max} \Phi', \quad ( 4.4 )$$

kde člen  $\Phi'$  je stejná derivace jako v rovnici ( 4.1 ), tedy  $\Phi' = \frac{d\varphi}{dx}$ .

#### 4.1 Výpočet napětí pro I-profil

V této části bude proveden výpočet napětí působícího v přímém prismatickém prutu s příčným průřezem tvaru I-profilu. Pro výpočet budou použity vztahy uvedené výše.

Prut je na jedné straně zatížen kroučícím momentem a na druhé straně je použita vazba, která omezuje všechny posuvy a rotace. Vazba nicméně umožňuje deplanaci příčných průřezů. Jedná se tedy o volné kroucení. Tuto konfiguraci je možné vidět na obr. 4.2.



Obr. 4.2 Schéma volného kroucení I-profilu

Rozměry zakótované na obr. 4.2 mají velikost:  $h = 50$  mm,  $b = 50$  mm,  $t = 1$  mm. Velikost kroučícího momentu je  $M_k = 10$  Nm. Prut je vyroben z oceli, která má vlastnosti:  $E = 200$  GPa,  $\mu = 0,3$ ,  $G = 76,92$  MPa,  $\sigma_k = 500$  MPa. Tyto vlastnosti materiálu budou použity u všech výpočtů provedené v této práci.

Nejprve je potřeba zjistit velikost torzní konstanty, kterou je možné vypočítat ze vztahu ( 4.2 )

$$J = \frac{1}{3} [2bt^3 + (h - t)t^3] = \frac{1}{3} [2 \cdot 50 \cdot 1^3 + (50 - 1) \cdot 1^3] = 49,67 \text{ mm}^4.$$

Jelikož je tloušťka v každém bodě příčného průřezu shodná a kroučící moment se po délce prutu nemění, bude maximum smykového napětí na celém povrchu součásti. Jeho velikost uvádí vztah ( 4.3 )

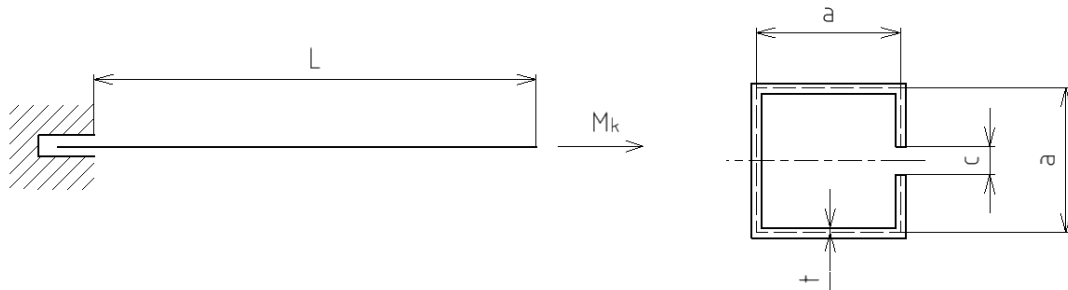
$$\tau_{max} = \frac{M_k}{J} t_{max} = \frac{10\,000}{49,67} \cdot 1 \doteq 201 \text{ MPa.}$$

Velikost redukovaného napětí dle von Misesova kritéria získáme ze základního vztahu pro prutovou napjatost

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{0^2 + 3 \cdot 201^2} \doteq 349 \text{ MPa.}$$

## 4.2 Výpočet napětí pro C-profil

Výpočet maximálního napětí bude obdobný jako v předcházejícím příkladu. Uložení, zatížení a materiál budou shodné jako v předchozím příkladu. Příčný průřez bude mít v tomto případě ale tvar C-profilu, jak je znázorněno na obr. 4.3.



Obr. 4.3 Schéma volného kroucení C-profilu

Rozměry zakótované na obr. 4.3 mají velikost:  $a = 50$  mm,  $c = 2$  mm,  $t = 1$  mm. Velikost kroutícího momentu je  $M_k = 10$  Nm.

Pro zjištění velikosti torzní konstanty je použit vztah ( 4.2 )

$$J = \frac{1}{3}[3at^3 + (a - c)t^3] = \frac{1}{3}[3 \cdot 50 \cdot 1^3 + (50 - 2) \cdot 1^3] = 66 \text{ mm}^4.$$

Maximální smykové napětí se bude nacházet na celém povrchu součásti, jelikož je tloušťka konstantní a velikost kroutícího momentu se po délce prutu nemění. Pro velikost maximálního smykového napětí je použit vztah ( 4.3 )

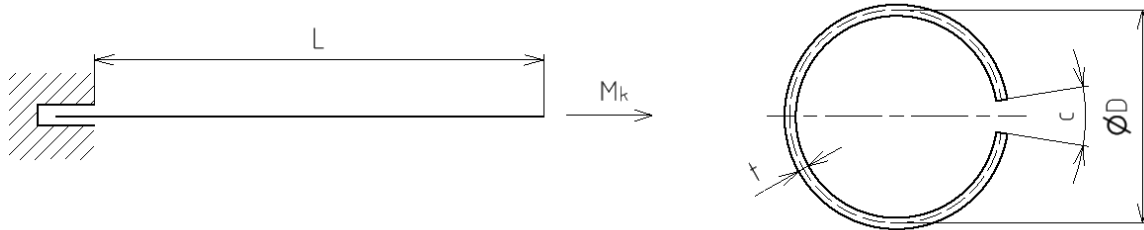
$$\tau_{max} = \frac{M_k}{J} t_{max} = \frac{10\,000}{66} \cdot 1 \doteq 151,5 \text{ MPa.}$$

Redukované napětí dle von Misesse je pro prutovou napjatost

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{0^2 + 3 \cdot 151,5^2} \doteq 262 \text{ MPa.}$$

### 4.3 Výpočet napětí pro otevřený kruhový průřez

Tvarem otevřeného kruhového průřezu je myšlena trubka, ze které je po celé její délce odříznut úzký pruh materiálu. Tento tvar je vyobrazen na obr. 4.4. Uložení, zatížení a materiál jsou shodné jako v podkapitole 4.1.



Obr. 4.4 Schéma volného kroucení otevřeného kruhového průřezu

Rozměry zakótované na obr. 4.4 mají velikost:  $D = 50$  mm,  $c = 2$  mm,  $t = 1$  mm. Velikost kroutícího momentu je  $M_k = 10$  Nm.

I když se v příčné průřezu zobrazeném na obr. 4.4 nenacházejí žádné obdélníkové elementy, je možné ve vztahu ( 4.2 ) brát rozměr  $b$  jako délku kruhového oblouku. Pokud by se totiž tento oblouk rozdělil na nekonečně malé elementy délky  $ds$ , pak by se tyto elementy mohly považovat za obdélníky. Součet všech délek  $ds$  těchto elementů je pak celková délka oblouku. Torzní konstanta je pak

$$J = \frac{1}{3} [(\pi D - c)t^3] = \frac{1}{3} [(\pi \cdot 50 - 2) \cdot 1^3] = 51,7 \text{ mm}^4.$$

Z důvodů uvedených v předcházejícím příkladu se bude nacházet maximální smykové napětí na celém povrchu součásti. Jeho velikost je dána vztahem ( 4.3 )

$$\tau_{max} = \frac{M_k}{J} t_{max} = \frac{10\,000}{51,7} \cdot 1 \doteq 193,4 \text{ MPa.}$$

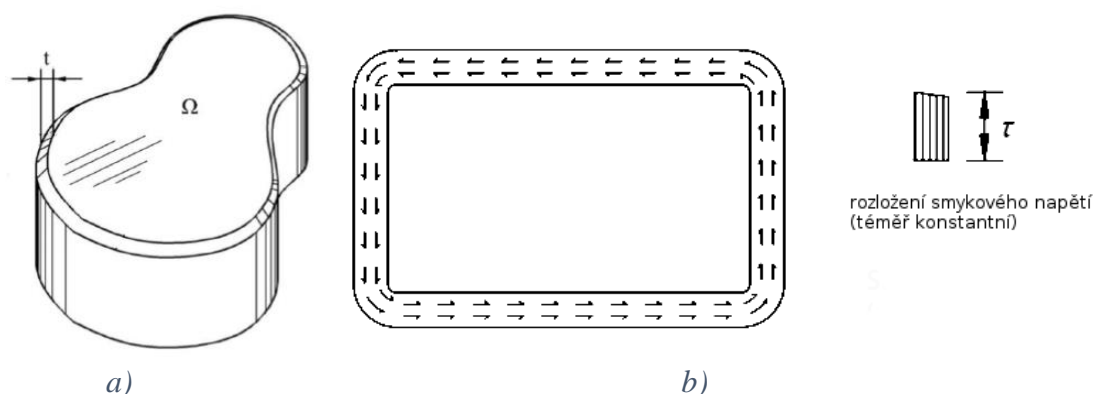
Redukované napětí dle von Misesova kritéria je pro prutovou napjatost

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{0^2 + 3 \cdot 193,4^2} \doteq 335 \text{ MPa.}$$



## 5 Volné kroucení prutů uzavřených tenkostěnných profilů

U uzavřeného profilu vytváří střednicová křivka uzavřenou oblast. Pro uzavřený profil jsou všechna smyková napětí ve stejném smyslu otáčení, viz obr. 5.1 b). Maximalizuje se tak jejich efekt [5]. Na obr. 5.1 b) je také naznačeno rozložení smykového napětí po tloušťce stěny, které je téměř konstantní a pro účely odvození následujících vztahů bude uvažováno jako konstantní.



Obr. 5.1 a) Obecný tvar tenkostěnného uzavřeného profilu [7] b) Rozložení smykového napětí v příčném průřezu [5]

Je zavedena veličina  $q$ , která udává velikost síly na jednotku délky oblouku střednicové křivky [3]. Tato je označována jako smykový tok a smykové napětí v kterémkoli bodě je

$$\tau = \frac{q}{t}, \quad (5.1)$$

kde  $t$  je tloušťka stěny uzavřeného profilu. Síla vyvolaná na nekonečně malém elementu oblouku  $ds$  je  $q ds$  [3]. Pro vyhodnocení celkového momentu, který vyvolává smykový tok  $q$ , je nutné použít integrál po uzavřené střednicové křivce [3]

$$M_k = \oint r q ds = q \oint r ds, \quad (5.2)$$

$r$  je kolmá vzdálenost od nějakého bodu  $O$  uvnitř střednicové křivky k tečně nakreslené v kterémkoli bodě na střednicové křivce. Rovnici (5.2) je možno upravit do tvaru

$$M_k = 2q\Omega, \quad (5.3)$$

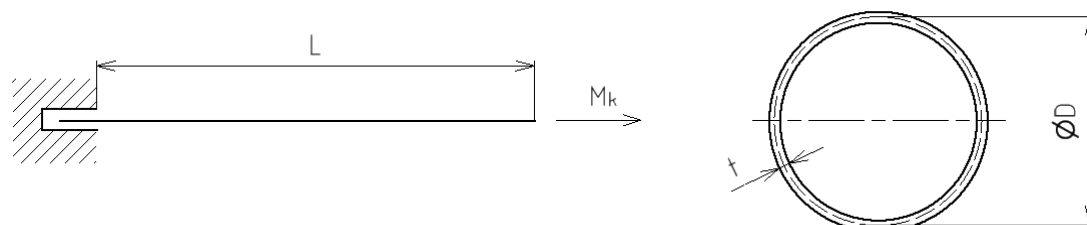
kde  $\Omega$  je plocha uzavřená střednicovou křivkou, viz obr. 5.1 a). Po vyjádření smykového toku z rovnice (5.3) a dosazením do rovnice (5.1) získáme vztah pro smykové napětí ve tvaru

$$\tau = \frac{M_k}{2\Omega t}. \quad (5.4)$$

Ze vztahu je tedy patrné, že na rozdíl od otevřených tenkostěnných profilů je nejvyšší smykové napětí v místě nejmenší tloušťky, což je pravý opak.

## 5.1 Ověření platnosti Saint-Venantova kroucení na dutém kruhovém průřezu

V této podkapitole bude proveden ověřující výpočet pro Saint-Venantovo kroucení na dutém kruhovém průřezu. Kontrola bude provedena pomocí základní vztahů z pružnosti a pevnosti. Uložení, zatížení a materiál jsou shodné jako v podkapitole 4.1.



Obr. 5.2 Schéma volného kroucení pro dutý kruhový průřez

Rozměry zakótované na obr. 5.2 mají velikost:  $D = 50$  mm,  $t = 1$  mm. Velikost kroučícího momentu je  $M_k = 10$  Nm.

### 5.1.1 Saint-Venantova teorie

Pro Saint-Venantovo kroucení je nutné znát velikost plochy, kterou uzavírá střednicová křivka (v tomto případě kružnice). Obsah se tedy vypočte podle jednoduchého vzorce

$$\Omega = \frac{\pi D^2}{4}.$$

Po dosazení do vztahu ( 5.4 ) je získána velikost maximálního smykového napětí

$$\tau = \frac{M_k}{2\Omega t} = \frac{2M_k}{\pi D^2 t} = 2,55 \text{ MPa}.$$

Toto napětí se nachází ve všech místech prutu, protože Saint-Venantova teorie předpokládá konstantní rozložení napětí po tloušťce stěny. Zároveň se jedná o přímý prismatický prut a velikost kroučícího momentu je po jeho délce konstantní.

### 5.1.2 Základní teorie pružnosti a pevnosti

Pro kruhový, popř. mezikruhový příčný průřez, je možné vypočítat velikost působícího smykového napětí také pomocí základních vztahů pružnosti a pevnosti. Pro krut je velikost maximálního smykového napětí dána vztahem [1]

$$\tau = \frac{M_k}{W_k},$$

kde  $W_k$  je modul průřezu v krutu a je dán vztahem

$$W_k = \frac{I_p}{\rho},$$

kde  $\rho$  je vzdálenost vnějšího povrchu, tedy

$$\rho = \frac{D + t}{2}$$

a  $I_p$  je polární moment průřezu. Pro trubku je

$$I_p = \frac{\pi}{32} [(D + t)^4 - (D - t)^4].$$

Dosazením předchozích třech rovnic do první rovnice je možné získat hodnotu maximálního smykového napětí

$$\tau_{\max} = \frac{16M_k}{\pi[(D + t)^4 - (D - t)^4]} (D + t) = \frac{16 \cdot 10\,000}{\pi[(50 + 1)^4 - (50 - 1)^4]} (50 + 1) = 2,60 \text{ MPa.}$$

Tato hodnota napětí se nachází na vnějším průměru trubky a napětí lineárně klesá směrem ke středu smyku, kde je smykové napětí nulové. Procentuální odchylka maximálního smykového napětí získaného Saint-Venantovou teorií a klasickou teorií je 1,9 %.

Pokud je nicméně proveden výpočet napětí působícího na střednicové kružnici trubky. Pro výpočet napětí je použit shodný vztah jako u maximálního napětí, ale vzdálenost od středu smyku je

$$\rho = \frac{D}{2}.$$

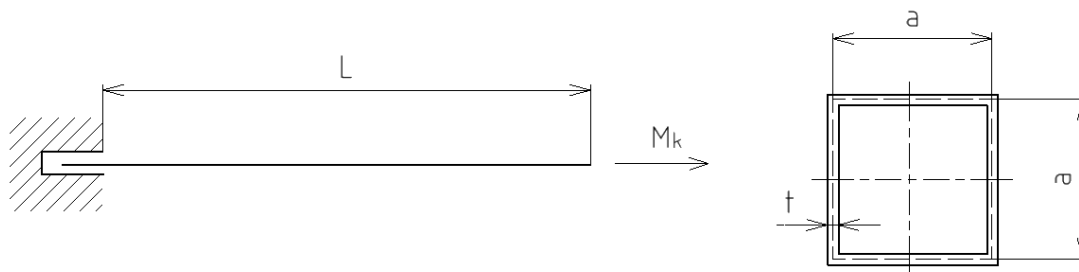
Získáme tedy vztah pro smykové napětí působící na střednicové kružnici.

$$\tau = \frac{16M_k}{\pi[(D + t)^4 - (D - t)^4]} D = \frac{16 \cdot 10\,000}{\pi[(50 + 1)^4 - (50 - 1)^4]} 50 = 2,55 \text{ MPa.}$$

Hodnota napětí na střednicové kružnici odpovídá té získané Saint-Venantovou teorií. Je to důsledek zjednodušujícího předpokladu uvažování konstantního napětí po tloušťce trubky.

## 5.2 Výpočet napětí pro průřez tvaru dutého čtverce

V této podkapitole budou aplikovány vztahy pro tenkostěnné uzavřené profily uvedené výše pro výpočet napětí působícího v prutu s příčným průřezem tvaru dutého čtverce, jako je zobrazeno na obr. 5.3. Uložení, zatížení a materiál jsou shodné jako v podkapitole 4.1.



Obr. 5.3 Schéma volného kroucení dutého čtverce

Rozměry zakótované na obr. 5.3 mají velikost:  $a = 50$  mm,  $t = 1$  mm. Velikost kroutícího momentu je  $M_k = 10$  Nm.

Velikost střednicové plochy  $\Omega$  je

$$\Omega = a^2,$$

po dosazení do vztahu ( 5.4 ) získáme velikost smykového napětí

$$\tau = \frac{M_k}{2\Omega t} = \frac{M_k}{2a^2 t} = \frac{10\,000}{2 \cdot 50^2 \cdot 1} = 2,00 \text{ MPa.}$$

Toto napětí se nachází ve všech místech prutu, protože je tloušťka stěny ve všech místech stejná a kroutící moment je konstantní. Redukované napětí získáme dle von Misesova kritéria pro prutovou napjatost

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{0^2 + 3 \cdot 2^2} \doteq 3,46 \text{ MPa.}$$

Jelikož jsou zachovány vnější rozměry příčného průřezu i velikost kroutícího momentu, je možné smykové napětí porovnat se smykovým napětím u C-profilu. C-profil byl totiž vytvořen ze čtvercového dutého průřezu rozříznutím jedné stěny. Porovnáním je zřejmé, že pokud je střednicová křivka uzavřená, je prut schopen několikanásobně efektivněji přenášet kroutící moment. Při volbě příčného průřezu u prutů, které jsou primárně zatíženy kroutícím momentem, je vhodné volit uzavřený profil.

## 6 Vázané kroucení prutů tenkostěnných profilů

U vázaného kroucení, jak již bylo diskutováno výše, vznikají při zatížení krouticím momentem kromě smykových napětí i napětí normálová. Normálová napětí vznikají v místech vazeb, které neumožňují deplanaci, nebo v místech změny krouticího momentu.

### 6.1 Deformační rozbor

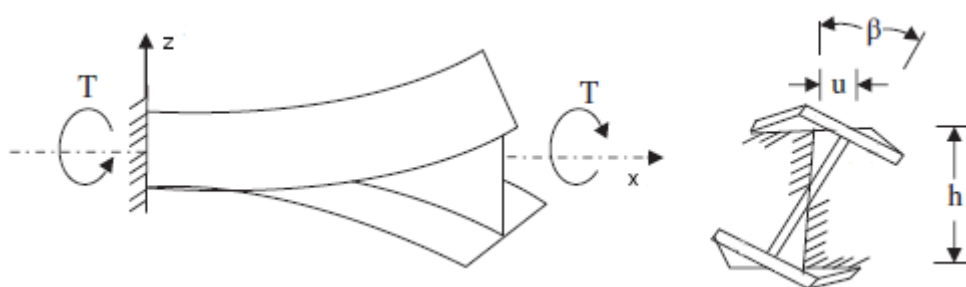
V každém bodě podél rozpětí prutu je kroucení přenášeno částečně jako Saint-Venantovo kroucení a částečně jako vázané kroucení [5]. Podíl těchto kroucení je závislý na torzní tuhosti příčného průřezu a u některých tvarů příčného průřezu je možné vázané kroucení zanedbat [5]. Významnost těchto dvou typů kroucení udává tab. 6.1.

Tab. 6.1 Významnost Saint-Venantova a vázaného kroucení pro různé typy průřezů [5]

Typ průřezu	Tvar	Saint-Venant	Vázané
Kruhový dutý průřez	○	✓	—
Obdélníkový a eliptický dutý průřez	□ □ 0	✓	✗
T-profily, L-profily a X-profily	T L +	✓	✗
I-profily a U-profily	T I C	✓	✓

Legenda: ✓ = významný; ✗ = zanedbatelný; — = nenastává

Jak je z tab. 6.1 patrné, tak vázané kroucení má významný vliv pouze na I-profily a U-profily, popřípadě na C-profily. U jiných typů příčných průřezů je možné vázané kroucení zanedbat, jelikož průřezy výrazně nedeplanují [5].



Obr. 6.1 Vázané kroucení I-profilu [4]

Je uvažován případ symetrického I-profilu, kde je jeden konec pevně uchycen a je zde zamezeno deplanaci. Na druhém, volném konci, je profil zatížen krouticím momentem a příčný průřez může deplanovat. V tomto případě má zamezení deplanace příčného průřezu za následek rozdílné ohýbání pásnic, kdy jedna pásnice se ohýbá doprava a druhá doleva, jak je ukázáno na obr. 6.1.

## 6.2 Napěťový rozbor

Celkový kroutící moment působící na prut se skládá ze Saint-Venantova a vázaného kroutícího momentu [5], je možné tedy psát

$$M_k = M_{SV} + M_w.$$

Jednotlivé kroutící momenty mohou být vyjádřeny v závislosti na úhlu zkroucení  $\varphi$ , respektive na jeho derivacích. Pro Saint-Venantův kroutící moment je dosaženo z rovnice ( 4.1 )

$$M_k = GJ\Phi' + EI_w\Phi''', \quad ( 6.1 )$$

kde  $E$  je modul pružnosti v tahu,  $I_w$  je deplanační konstanta (též nazývána jako výsečový moment setrvačnosti) a  $\Phi'$  (resp.  $\Phi'''$ ) je první (resp. třetí) derivace úhlu zkroucení podle vzdálenosti  $x$  podél střednice prutu.

## 6.3 Rozbor napětí pro symetrický I-profil

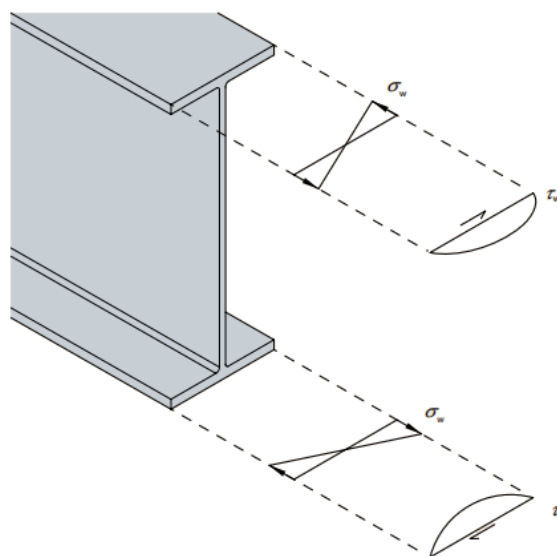
Pro symetrický I-profil je možné použít vztah pro deplanační konstantu [5]

$$I_w \approx I_f \frac{(h - t_f)^2}{2}, \quad ( 6.2 )$$

kde  $(h - t_f)$  je vzdálenost mezi střednicemi obou pásnic a  $I_f$  je kvadratický moment průřezu jedné pásnice

$$I_f = \frac{b^3 t_f}{12}, \quad ( 6.3 )$$

kde  $b$  představuje šířku pásnice a  $t_f$  tloušťku pásnice.



Obr. 6.2 Rozložení vázaného napětí v pásnicích při zabrání deplanace [5]

Zamezení deplanace (způsobeno buď kvůli vnitřním omezením přidružené proměnnému krouticímu momentu nebo kvůli vnějším omezením na koncích prutu) způsobuje vznik normálových a smykových napětí [5]. Pro symetrický I-profil je rozložení napětí možné vidět na obr. 6.2. Normálové napětí má své maximum na konci pásnic a je dáno vztahem [5]

$$\sigma_w = \pm E W_{n0} \Phi'', \quad (6.4)$$

kde  $W_{n0}$  je normalizovaná deplanační funkce na konci pásnice a  $\Phi''$  je druhá derivace úhlu zkroucení podle vzdálenosti  $x$  podél střednice. Smykové napětí má své maximum naopak na spojnici pásnice a stojny, kde je normálové napětí nulové, a je dáno vztahem [5]

$$\tau_w = \frac{E S_{w1}}{t} \Phi''', \quad (6.5)$$

kde  $S_{w1}$  je deplanační statický moment uprostřed pásnice. V praxi je nicméně smykové napětí od vázaného kroucení pro I-profil malé a běžně se zanedbává [5].

Hodnoty funkcí  $W_{n0}$  a  $S_{w1}$  jsou závislé na poloze bodu ve kterém je odpovídající napětí vyšetřováno [5]. Pro přehlednost jsou významné polohy v příčném průřezu označeny číslicí v dolním indexu funkce. Číslice 0 odpovídá konci pásnic, tedy místu maxima normálového napětí. Číslice 1 odpovídá místu spojnice pásnice se stojinou, kde je naopak maximum vázaného smykového napětí. Vztah [6] pro normalizovanou deplanační funkci na konci pásnice pro I-profil, který má dvě roviny symetrie, je

$$W_{n0} = \frac{b(h - t_f)}{4}, \quad (6.6)$$

kde  $b$  je šířka pásnic a člen  $(h - t_f)$  je vzdálenost střednic obou pásnic.

## 6.4 Relativní velikosti Saint-Venantova a vázaného kroucení

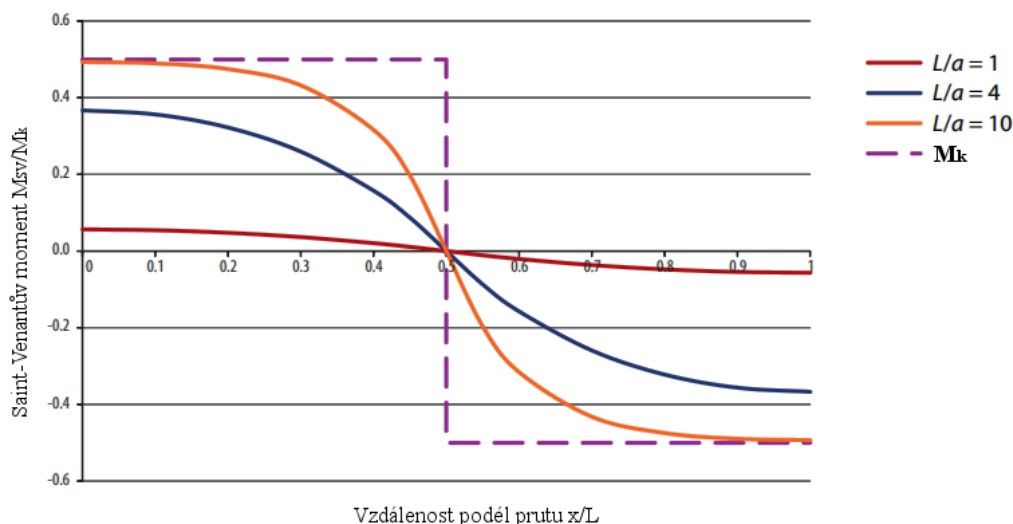
Rovnice (6.1) může být přepsána do tvaru

$$\frac{M_k}{GJ} = \Phi' - a^2 \Phi''',$$

kde

$$a = \sqrt{\frac{EI_w}{GJ}}. \quad (6.7)$$

Parametr  $a$  je známý jako torzní ohybová konstanta, která má rozměr délky [5]. Tento parametr udává, jak rychle odeznívá efekt zabránění deplanace [5]. Jeho efekt může být ilustrován na příkladu prutu, který se vystaven krouticímu momentu uprostřed svého rozpětí a na obou koncích prutu je použita vazba, která odebírá všech šest stupňů volnosti zároveň, ale umožňuje deplanaci příčných průřezů. Pro tuto konfiguraci je sestaven graf na obr. 6.3.

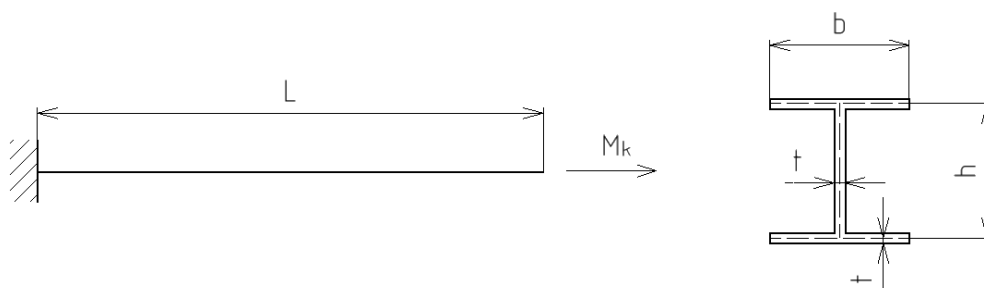


Obr. 6.3 Rozložení Saint-Venantova momentu v prutu zatíženého uprostřed krouticím momentem [5]

Na obr. 6.3 jsou zobrazeny průběhy Saint-Venantova momentu pro tři různé poměry  $L/a$ . Svislá osa udává relativní velikost Saint-Venantova momentu ku celkovému krouticímu momentu v prutu. V každém místě podél střednice je vázaný krouticí moment dán jako rozdíl celkového momentu, v grafu zobrazen fialovou čárkovanou čarou, a Saint-Venantova momentu [5]. Z grafu je patrné, že pokud je délka nosníku dostatečně velká nebo torzní ohybová konstanta dostatečně malá, tedy poměr  $L/a=10$ , bude na koncích prutu přítomný pouze Saint-Venantův krouticí moment. V opačném případě velmi krátkého prutu, tedy pro poměr  $L/a=1$ , je většina kroucení přenášena jako vázané [5].

## 6.5 Výpočet napětí pro I-profil

Vázané kroucení u prutu vzniká buď změnou krouticího momentu po jeho délce nebo jako v tomto případě zamezením deplanace příčného průřezu. Na obr. 6.4 je zobrazen prut, který je na jedné straně zatížen krouticím momentem a na druhé straně je použita vazba vetknutí, která odebrává všech šest stupňů volnosti a taktéž zamezuje deplanaci příčných průřezů. Na volném konci můžou příčné průřezy deplanovat a nebude tak zde vznikat normálové napětí od vázaného kroucení. Nebezpečné místo z hlediska mezního stavu pružnosti se proto může nacházet ve dvou místech. Ve vetknutí na konci pásnic, kde působí nejvyšší normálové napětí od vázaného kroucení, nebo na volném konci, kde působí nejvyšší smykové napětí od volného kroucení.



Obr. 6.4 Schéma vázaného kroucení I-profilu



Rozměry zakótované na obr. 6.4 mají stejnou velikost jako u volného kroucení, tedy:  $L = 2$  m,  $b = 50$  mm,  $h = 50$  mm,  $t = 1$  mm. Velikost kroučícího momentu je taktéž stejně velká  $M_k = 10$  Nm.

Pro výpočet napětí je nejprve nutné určit charakteristiky příčného průřezu. Velikost torzní konstanty je již vypočítána v podkapitole 4.1, tedy  $J = 49,67$  mm<sup>4</sup>. Velikost deplanační konstanty je určena dosazením vztahu ( 6.3 ) do vztahu ( 6.2 )

$$I_w \approx \frac{b^3 t h^2}{24} = \frac{50^3 \cdot 1 \cdot 50^2}{24} = 1,3 \cdot 10^7 \text{ mm}^6.$$

Další průřezovou charakteristikou je normalizovaná deplanační funkce. Její velikost na konci pásnice, kterou udává vztah ( 6.6 ), je

$$W_{n0} = \frac{bh}{4} = \frac{50 \cdot 50}{4} = 625 \text{ mm}^2.$$

Z těchto průřezových charakteristik je možné vypočítat velikost torzní ohybové konstanty. Pro výpočet je použit vztah ( 6.7 )

$$a = \sqrt{\frac{EI_w}{GJ}} = \sqrt{\frac{200\,000 \cdot 1,3 \cdot 10^7}{76\,920 \cdot 49,67}} \doteq 824,9 \text{ mm}.$$

### 6.5.1 Napětí ve vetknutí

Pro vyčíslení napětí je potřeba znát první a druhou derivaci úhlu zkroucení. Pro konfiguraci, kdy na jedné straně je prut vetknutý a na volném konci zatížen kroučícím momentem, odvodil Hughes [5] vztahy pro první a druhou derivaci úhlu zkroucení

$$\begin{aligned} \phi' &= \frac{M_k}{GJ} \left[ \tanh\left(\frac{L}{a}\right) \sinh\left(\frac{x}{a}\right) - \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + 1 \right] = \\ &= \frac{10\,000}{76\,920 \cdot 49,67} \left[ \tanh\left(\frac{2\,000}{824,9}\right) \sinh\left(\frac{0}{824,9}\right) - \cosh\left(\frac{0}{824,9}\right) + 1 \right] = 0 \frac{1}{\text{mm}} \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} \phi'' &= \frac{M_k}{GJ} \left[ \tanh\left(\frac{L}{a}\right) \cosh\left(\frac{x}{a}\right) - \sinh\left(\frac{x}{a}\right) \right] = \\ &= \frac{10\,000}{76\,920 \cdot 49,67} \left[ \tanh\left(\frac{2\,000}{824,9}\right) \cosh\left(\frac{0}{824,9}\right) - \sinh\left(\frac{0}{824,9}\right) \right] = \\ &= 3,166 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{mm}^2}. \end{aligned}$$

Proměnná  $x$  udávám vzdálenost podél střednice prutu (ve vetknutí  $x = 0$ ). Ve vetknutí bude všechen kroučící moment přenášen jako vázané kroucení, protože první derivace úhlu zkroucení má ve vetknutí nulovou hodnotu. Ve vetknutí bude proto působit pouze normálové napětí od

vázaného kroucení, protože smykové napětí od vázaného kroucení zanedbáváme a Saint-Venantův kroučící moment zde má nulovou hodnotu. Pro velikost normálového napětí je použit vztah ( 6.4 )

$$\sigma_w = \pm EW_{n0}\Phi'' = \pm 200\,000 \cdot 625 \cdot 3,166 \cdot 10^{-6} \doteq \pm 396 \text{ MPa.}$$

Toto napětí se nachází na koncích pásnic, kdy na jednom konci pásnice je tahové napětí a na druhém konci je tlakové. Jelikož v místě vetknutí už nepůsobí žádné další napětí, je normálové napětí  $\sigma_w$  zároveň i redukované napětí.

### 6.5.2 Napětí na volném konci

Pro vyčíslení napětí na volném konci je zapotřebí přepočítat velikosti první a druhé derivace úhlu zkroucení, kdy  $x = L$

$$\begin{aligned} \phi' &= \frac{M_k}{GJ} \left[ \tanh\left(\frac{L}{a}\right) \sinh\left(\frac{L}{a}\right) - \cosh\left(\frac{L}{a}\right) + 1 \right] = \\ &= \frac{10\,000}{76\,920 \cdot 49,67} \left[ \tanh\left(\frac{2\,000}{824,9}\right) \sinh\left(\frac{2\,000}{824,9}\right) - \cosh\left(\frac{2\,000}{824,9}\right) + 1 \right] = \\ &= 2,1567 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{mm}} \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} \phi'' &= \frac{M_k}{GJ} \left[ \tanh\left(\frac{L}{a}\right) \cosh\left(\frac{x}{a}\right) - \sinh\left(\frac{x}{a}\right) \right] = \\ &= \frac{10\,000}{76\,920 \cdot 49,67} \left[ \tanh\left(\frac{2\,000}{824,9}\right) \cosh\left(\frac{0}{824,9}\right) - \sinh\left(\frac{0}{824,9}\right) \right] = 0 \frac{1}{\text{mm}^2}. \end{aligned}$$

Z velikostí první a druhé derivace je patrné, že na volném konci bude působit pouze smykové napětí od Saint-Venantova kroucení. Normálové napětí od vázaného kroucení zde bude nulové, protože příčný průřez na volném konci může deplanovat. Velikost smykového napětí je možné vyčíslit pomocí vztahu ( 4.4 )

$$\tau = Gt\Phi' = 76\,920 \cdot 1 \cdot 2,1567 \cdot 10^{-3} \doteq 166 \text{ MPa.}$$

Redukované napětí dle von Misesova kritéria pro prutovou napjatost je dáno

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{0^2 + 3 \cdot 166^2} \doteq 287 \text{ MPa.}$$

Toto napětí se nachází na povrchu celého příčného průřezu na volném konci prutu, protože je tloušťka v celém tomto průřezu stejná.

Kritické místo vůči meznímu stavu pružnosti se nachází na konci pásnic ve vetknutí, protože se zde nachází nejvyšší hodnota redukovaného napětí.

### 6.5.3 Napětí ve vzdálenosti 200 mm od vetknutí

V místě vetknutí není možné zjistit velikost napětí pomocí MKP, protože je toto místo výrazně ovlivněno okrajovými podmínkami. Aby bylo tedy možné porovnat analytický výpočet s metodou konečných prvků, bude následovat výpočet napětí ve vzdálenosti 200 mm od vetknutí, tedy  $x = 200 \text{ mm}$ . Je nutné přepočítat hodnoty první a druhé derivace

$$\begin{aligned}\phi' &= \frac{M_k}{GJ} \left[ \tanh\left(\frac{L}{a}\right) \sinh\left(\frac{x}{a}\right) - \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + 1 \right] = \\ &= \frac{10\,000}{76\,920 \cdot 49,67} \left[ \tanh\left(\frac{2\,000}{824,9}\right) \sinh\left(\frac{200}{824,9}\right) - \cosh\left(\frac{200}{824,9}\right) + 1 \right] = \\ &= 5,622 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{mm}}\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\phi'' &= \frac{M_k}{GJ} \left[ \tanh\left(\frac{L}{a}\right) \cosh\left(\frac{x}{a}\right) - \sinh\left(\frac{x}{a}\right) \right] = \\ &= \frac{10\,000}{76\,920 \cdot 49,67} \left[ \tanh\left(\frac{2\,000}{824,9}\right) \cosh\left(\frac{200}{824,9}\right) - \sinh\left(\frac{200}{824,9}\right) \right] = \\ &= 2,4837 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{mm}^2}.\end{aligned}$$

V tomto místě bude působit normálové napětí od vázaného kroucení, jelikož je toto místo stále dostatečně blízko místa vetknutí. Dále zde bude působit i smykové napětí od Saint-Venantova kroucení, jelikož už zde není nulová derivace úhlu zkroucení. Pro vyčíslení těchto napětí jsou použity vztahy ( 6.4 ) a ( 4.4 )

$$\sigma_w = \pm E W_{n0} \Phi'' = \pm 200\,000 \cdot 625 \cdot 2,4837 \cdot 10^{-6} \doteq \pm 310 \text{ MPa}$$

$$\tau = G t \Phi' = 76\,920 \cdot 1 \cdot 0,5622 \doteq 43 \text{ MPa}.$$

Normálové napětí působí, obdobně jako ve vetknutí, na koncích pásnic. Smykové napětí je konstantní v celém příčném průřezu, protože je konstantní i tloušťka. Kritická místa z hlediska mezního stavu pružnosti se proto budou nacházet na koncích pásnic. Redukované napětí dle von Misesova kritéria pro prutovou napjatost je dáno

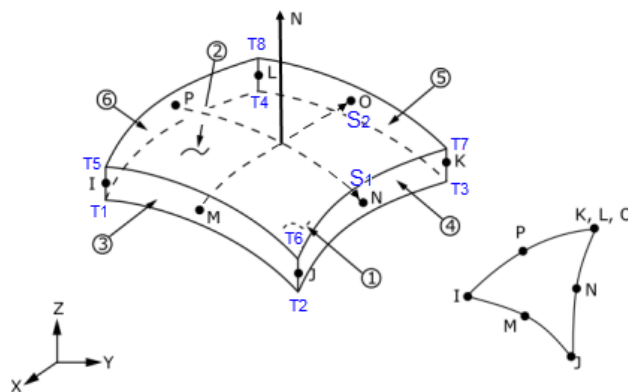
$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{310^2 + 3 \cdot 43^2} \doteq 319 \text{ MPa}.$$

## 7 Numerické řešení

Pro numerické řešení napětí působící v prutu je použita MKP. Tato metoda slouží nejen ke strukturálním analýzám, ale také k řešení problémů vedení tepla, vizualizaci proudění tekutin nebo modální analýzy apod.

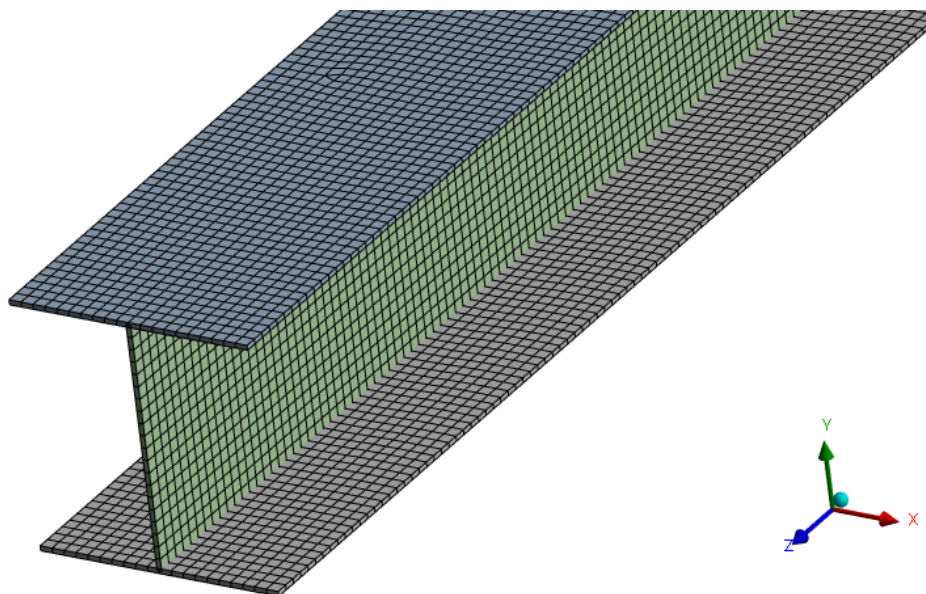
Z matematického úhlu pohledu je MKP metodou řešení soustav lineárních (parciálních) diferenciálních rovnic, která vychází z variačních metod [8]. V klasické mechanice poddajných těles se aplikují zejména energetické variační principy virtuálních posuvů, resp. minima celkové potenciální energie a virtuálních sil [8]. Tvarově složitě těleso je rozděleno na konečný počet jednodušších podtěles tzv. prvky. Primárním výstupem jsou posuvy jednotlivých uzlů, které se nacházejí na jednotlivých prvcích. Z těchto posuvů je následně možné vyčíslit napětí, popř. další veličiny.

Numerické výpočty a modelování jsou prováděny v programu Ansys Workbench 2022 R2. Konkrétně jsou použity moduly Ansys Mechanical a DesignModeler. Všechna tělesa byla modelována jako plošná tělesa. Ty byly následně vysítovány prvky typu SHELL281, který se zobrazuje na obr. 7.1.



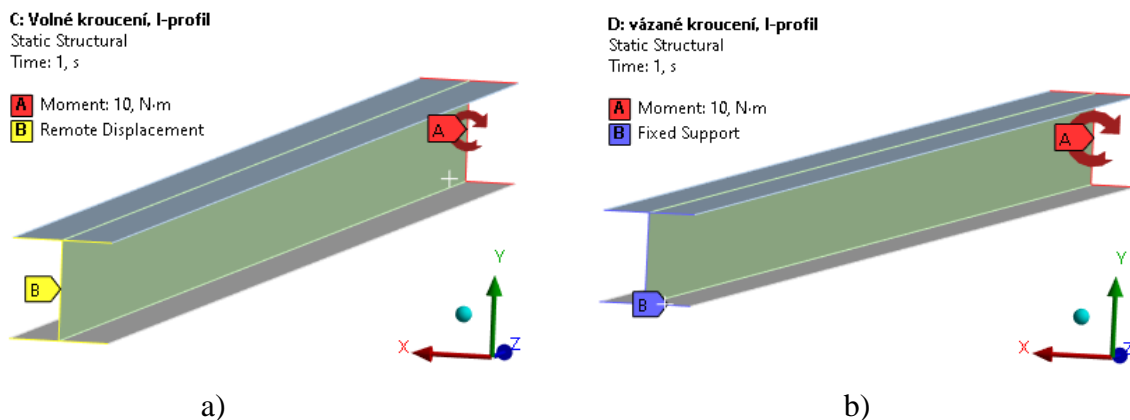
Obr. 7.1 Prvek typu SHELL281 [9]

Tento prvek má osm uzlů, které jsou označeny písmeny I, J, K, L, M, N, O a P, a každý uzel má šest stupňů volnosti: posuvy v ose  $x$ ,  $y$  a  $z$  a rotace kolem těchto os [9]. Prvek trojúhelníkového tvaru je možné vytvořit předepsáním stejného čísla uzlu pro uzly K, L a O [9].



Obr. 7.2 Konečnoprvková síť u I-profilu

Na obr. 7.2 je zobrazena konečnoprvková síť pro prut s I-profilem. Pro vytvoření této sítě byla použita funkce „Body sizing“, kde byla nastavena velikost prvků na 2,5 mm (u vázaného kroucení na 3,125 mm) z důvodu omezení studentské verze licence a funkce „Method“, kde bylo nastaveno preferování čtyřúhelníkových prvků a také, že tyto prvky budou kvadratické. Konečnoprvkové sítě u ostatních tvarů příčného průřezu byly vytvořeny stejným způsobem.



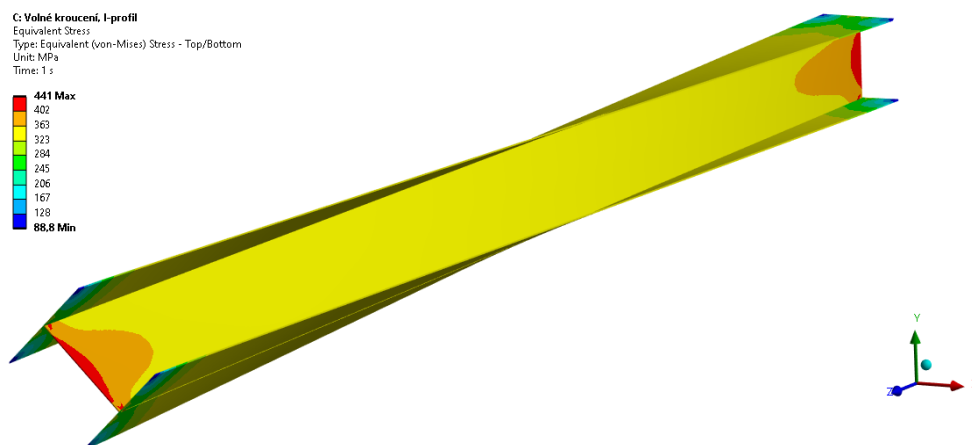
Obr. 7.3 a) Okrajové podmínky u volného kroucení b) Okrajové podmínky u vázaného kroucení

U všech příkladů byla na jednom konci prutu použita okrajová podmínka „Moment“. Tato podmínka rozmístí síly do všech uzlů na zvolené hraně tak, aby tyto síly vytvářely zadaný moment kolem zvolené osy a zároveň byl jejich součet nulový. Na druhém konci prutu byla v případě volného kroucení, které je vyobrazeno na obr. 7.3 a), použita okrajová podmínka „Remote displacement“, která umožňuje omezit posuvy nebo rotace v libovolném vzdáleném bodě. Pro případy řešené v této práci byly omezeny všechny posuvy i všechny rotace a zvolený bod byl umístěn do těžiště příčného průřezu na konci prutu. Pro případ vázaného kroucení, které je vyobrazeno na obr. 7.3 b), byla použita okrajová podmínka „Fixed“, která omezuje zvolené posuvy a rotace na celé zvolené geometrii. Opět byly zamezeny všechny posuvy a rotace.

V následujících podkapitolách bude provedena verifikace výsledků získanými analytickými vztahy. V jednotlivých podkapitolách bude vždy uvedena jen hodnota získaná pomocí MKP. V poslední podkapitole bude následně provedeno srovnání všech výsledků.

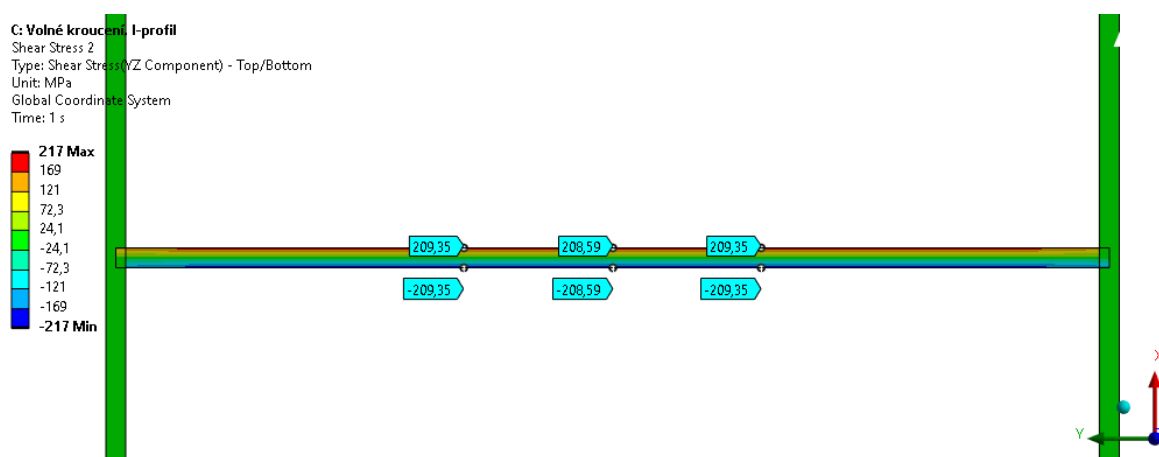
## 7.1 Verifikace výpočtu volného kroucení I-profilu

V této a v následujících podkapitolách bude porovnáno analytické řešení s MKP. V tomto případě bude ověřen výpočet z kapitoly 4.1.



Obr. 7.4 Redukované napětí v celém prutu

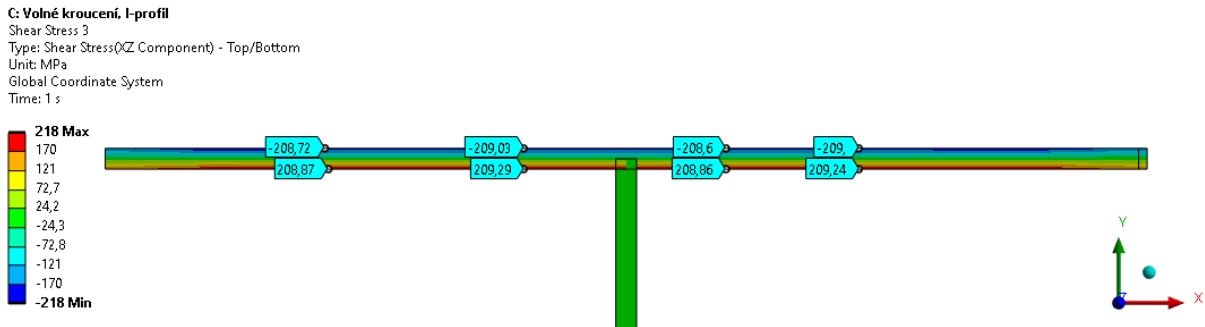
Na obrázku obr. 7.4 je zobrazeno redukované napětí dle von Misesova kritéria pro celý prut. Nicméně z obrázku je patrné, že oba konce prutu jsou silně ovlivněny okrajovými podmínkami a velikosti napětí jsou zde zavádějící. Z tohoto důvodu jsou na následujících obrázcích zobrazeny napětí v příčném průřezu, který se nachází uprostřed délky prutu. Tímto způsobem budou zobrazeny napětí i u ostatních příkladů.



Obr. 7.5 Smykové napětí  $\tau_{yz}$  ve stojně

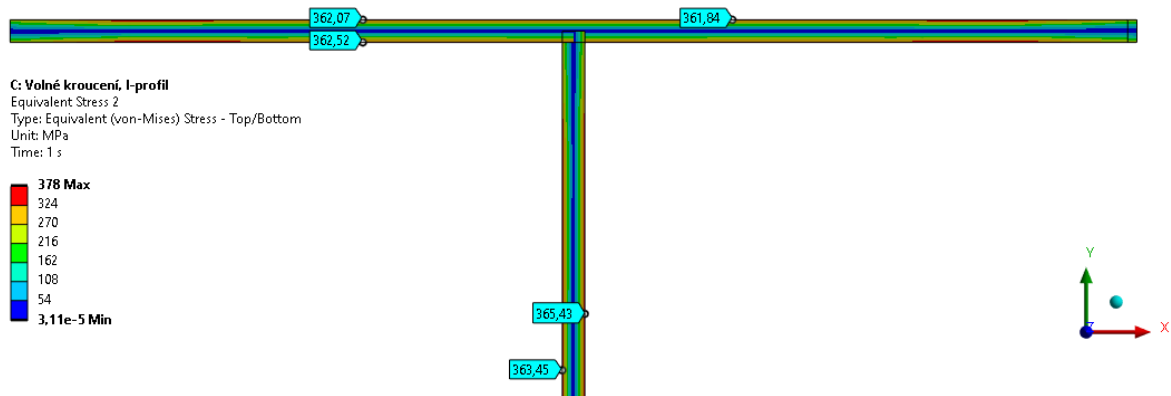
Na obr. 7.5 je zobrazen průběh smykového napětí ve stojně, dle zobrazeného souřadnicového systému jde o napětí  $\tau_{yz}$ . Z průběhu je patrné, že smykové napětí se s tloušťkou mění. Svého maxima dosahuje vždy na povrchu, a naopak uprostřed tloušťky stojiny je hodnota smykového napětí nulová. Tato skutečnost potvrzuje předpoklad lineárního rozložení Saint-Venantova

napětí v příčném průřezu. Jako vypovídající hodnota napětí nebude vzata maximální hodnota, kterou zobrazuje stupnice. Je to z důvodu, že u konců jednotlivých obdélníkových částí příčného profilu se koncentruje napětí. Tuto skutečnost ale analytický výpočet neuvažuje, a proto není velikost smykového napětí v tomto místě vypovídající. Odpovídající hodnota se tedy nachází v dostatečné vzdálenosti od spojnic stojiny s pásnicemi. Vypovídající hodnota smykového napětí ve stojině, kterou zobrazují na obr. 7.5 štítky, je  $\tau_{yz} = 209$  MPa.



Obr. 7.6 Smykové napětí  $\tau_{xz}$  v pásnici

Z důvodu čitelnosti je na obr. 7.6 zobrazen průběh pouze jedné pásnice. Na druhé pásnici jsou velikosti napětí shodné. Stejně jako ve stojně se maximum napětí nachází na povrchu součásti a uprostřed tloušťky je smykové napětí nulové. Opět se zde nachází koncentrace napětí, a proto je vypovídající nejvyšší smykové napětí v pásnici  $\tau_{xz} = 209$  MPa. Napětí je shodné s tím ve stojině.



Obr. 7.7 Redukované napětí v příčném průřezu

Z obr. 7.7 je patrné, že maximální redukované napětí se nachází na povrchu součásti. To je očekávané, jelikož jedinou nenulovou složkou napětí je smykové napětí  $\tau_{xz}$ , resp.  $\tau_{zx}$ , které má své maximum právě na povrchu. Maximální vypovídající velikost redukovaného napětí dle von Misesova kritéria je u I-profilu  $\sigma_{red} = 365$  MPa.

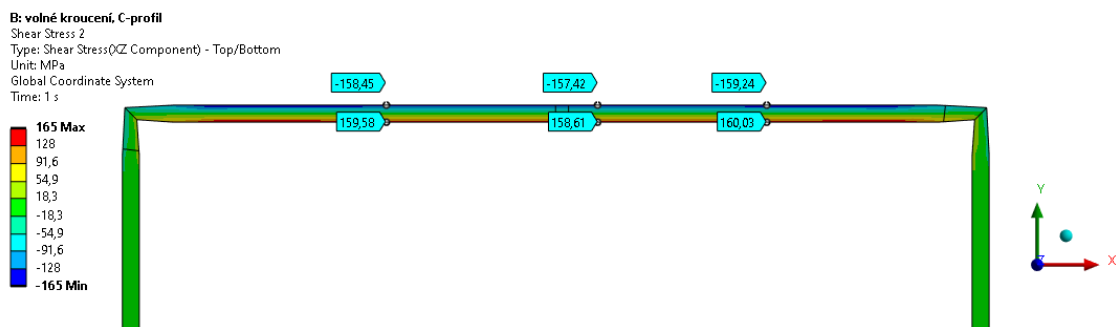
## 7.2 Verifikace výpočtu volného kroucení C-profilu

Níže bude provedeno numerické ověření analytického výpočtu z kapitoly 4.2. Zobrazené příčné průřezy se nacházejí uprostřed rozpětí prutu. Z důvodu čitelnosti budou zobrazeny průběhy napětí pouze v horní polovině průřezu. Ve spodní polovině budou průběhy totožné.



Obr. 7.8 Smykové napětí  $\tau_{yz}$  v příčném průřezu

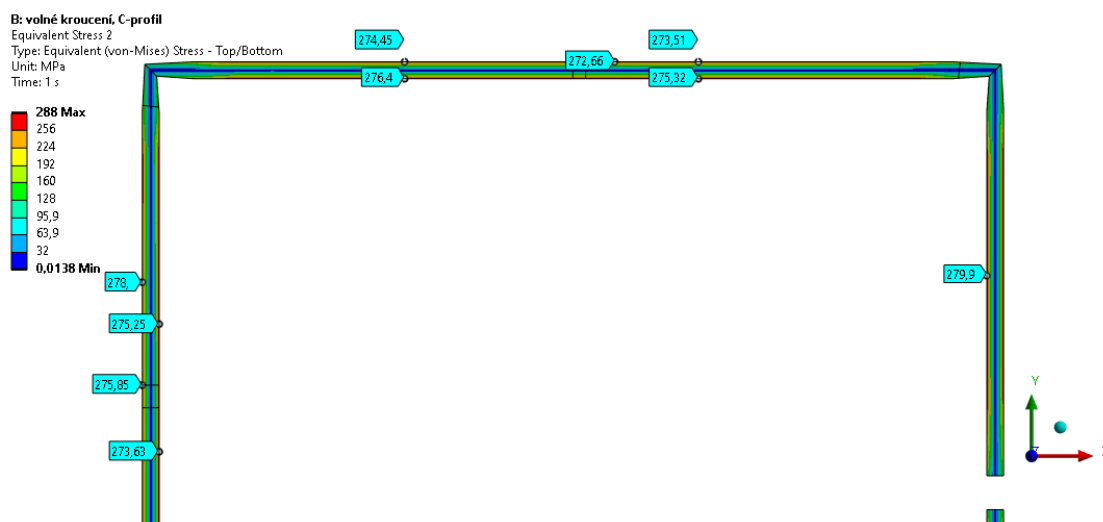
Na obr. 7.8 je vyobrazen průběh smykového napětí v horní polovině příčného průřezu prutu. Vzhledem k zobrazenému souřadnicovému systému se jedná o smykové napětí  $\tau_{yz}$ . Stejně jako v předcházejícím příkladu se zde nacházejí koncentrovaná napětí a maximální vypovídající smykové napětí je tedy  $\tau_{yz} = 163$  MPa.



Obr. 7.9 Smykové napětí  $\tau_{xz}$  v příčném průřezu

Na obr. 7.9 je zobrazen průběh smykového napětí  $\tau_{xz}$  v příčném průřezu prutu. Velikost maximálního vypovídajícího smykového napětí je  $\tau_{xz} = 160$  MPa.



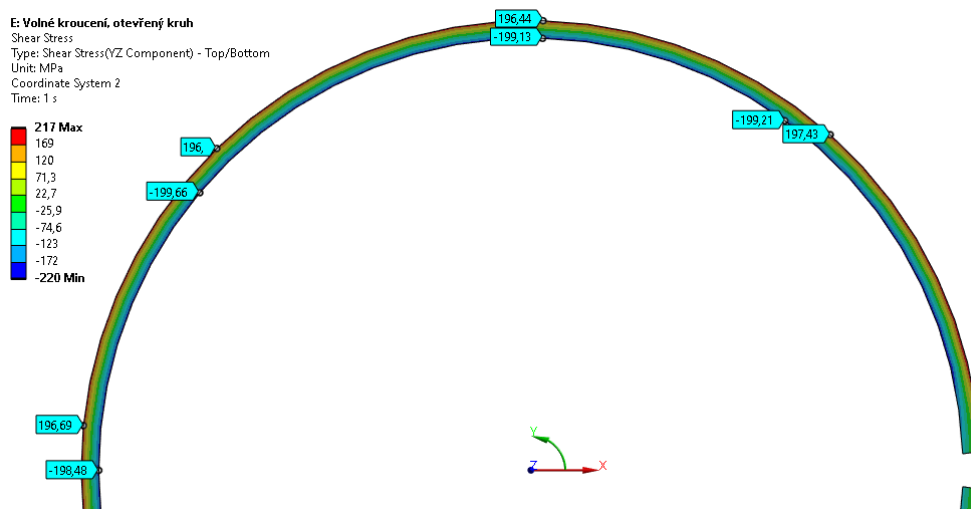


Obr. 7.10 Redukované napětí v příčném profilu

Na obr. 7.10 je zobrazen průběh redukovaného napětí dle von Misesova kritéria v příčném průřezu. Maximální hodnoty opět nabývá na povrchu součásti. Nejvyšší vypovídající redukované napětí je u C-profilu  $\sigma_{red} = 280$  MPa.

### 7.3 Verifikace výpočtu volného kroucení otevřeného kruhového průřezu

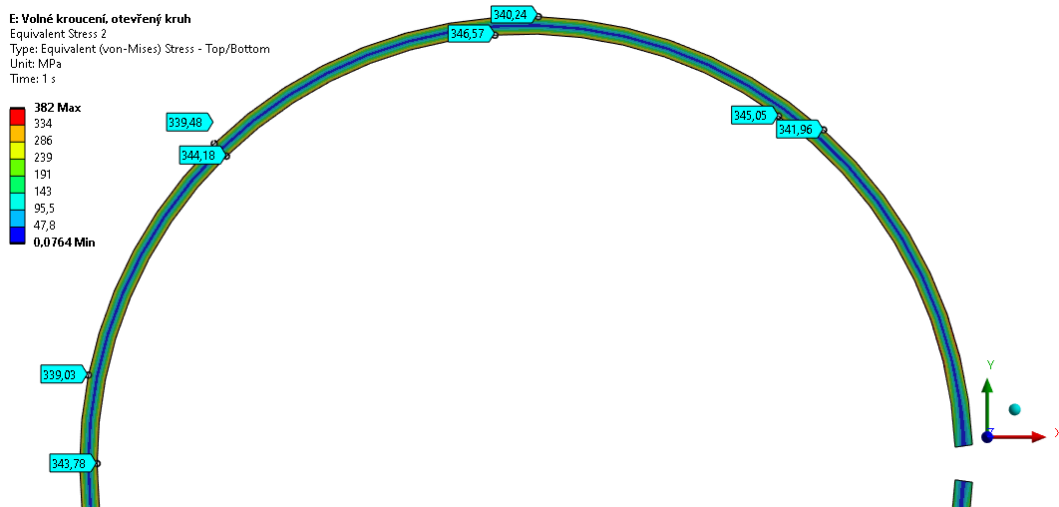
Níže bude provedeno numerické ověření analytického výpočtu z kapitoly 4.3. Zobrazené příčné průřezy se nacházejí uprostřed rozpětí prutu. Z důvodu čitelnosti budou zobrazeny průběhy napětí pouze v horní polovině průřezu. Ve spodní polovině budou průběhy totožné.



Obr. 7.11 Smykové napětí  $\tau_{yz}$  v příčném průřezu

Na obr. 7.11 je zobrazen průběh smykového napětí v příčném průřezu. Jelikož se o zakřivená profil není možné vykreslit průběh smykového napětí v kartézském souřadnicovém systému, je nutné použít válcový souřadnicový systém. Svého maxima dosahuje smykové napětí opět na

povrchu součásti. Pro válcový souřadnicový systém, který je zobrazen na obr. 7.11, je nejvyšší vypovídající hodnota smykového napětí  $\tau_{yz} = 200$  MPa.

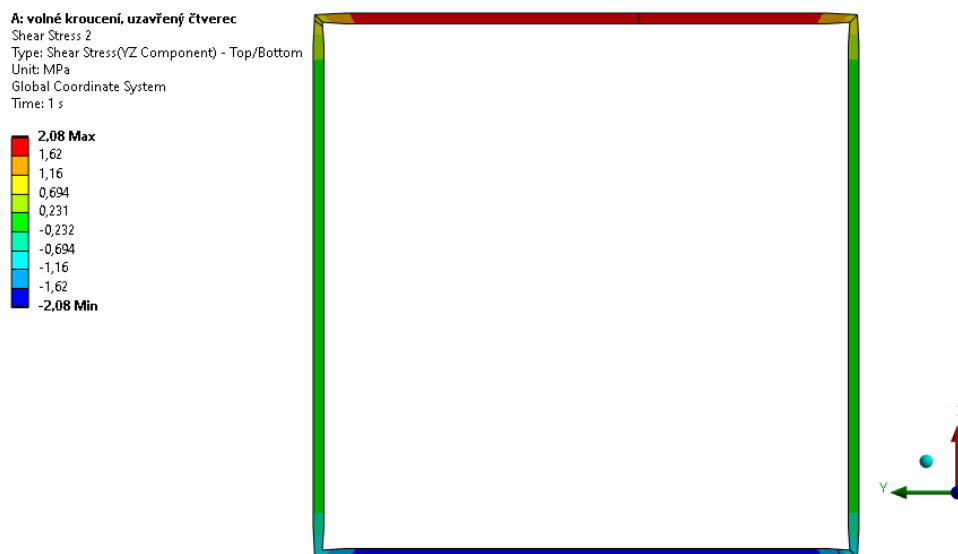


Obr. 7.12 Redukované napětí v příčném průřezu

Na obr. 7.12 je zobrazen průběh redukovaného napětí dle von Misesova kritéria v příčném průřezu. Nejvyšší hodnota redukovaného napětí působícího v otevřeném kruhovém průřezu je  $\sigma_{red} = 347$  MPa.

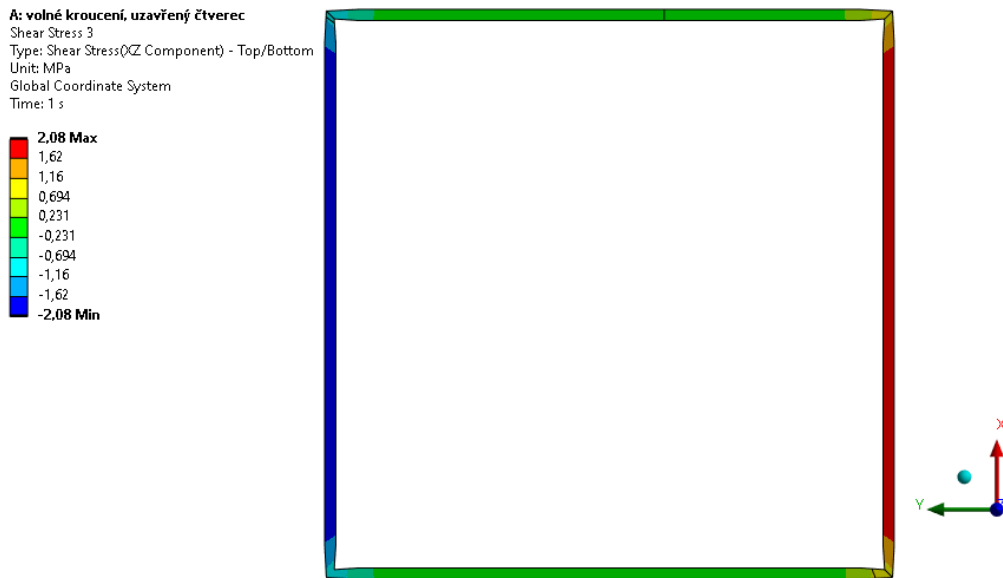
## 7.4 Verifikace výpočtu volného kroucení průřezu tvaru dutého čtverce

Níže bude provedena verifikace analytického výpočtu z kapitoly 5.2. Zobrazené příčné průřezy se nacházejí uprostřed rozpětí prutu.



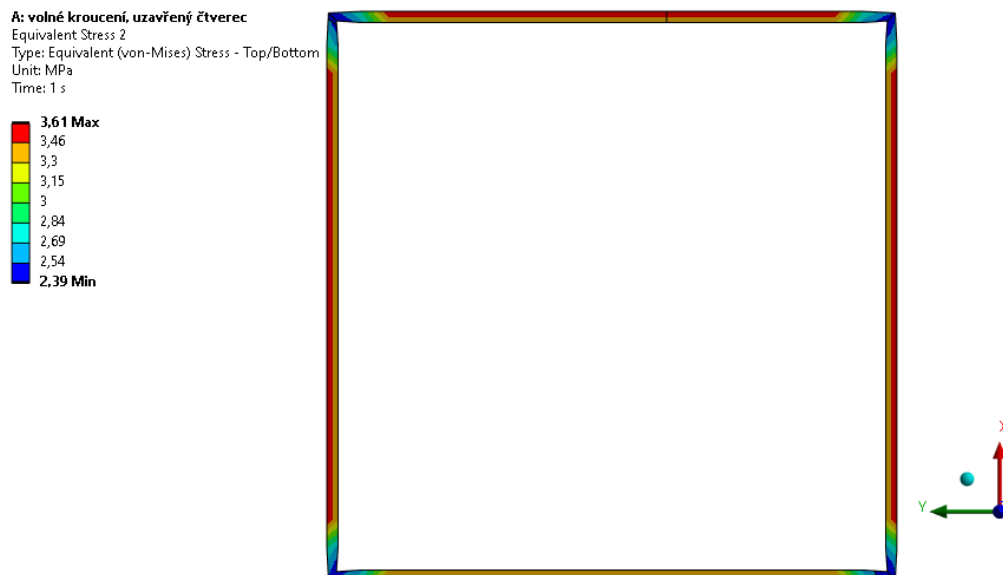
Obr. 7.13 Smykové napětí  $\tau_{yz}$  v příčném průřezu

Na obr. 7.13 je zobrazen průběh smykového napětí  $\tau_{yz}$  v příčném průřezu. Je patrné, že napětí se po tloušťce stěny mění jen velmi málo. Navíc je napětí v horní i dolní stěně stejně velké a liší se pouze směrem působení. Prut je tak schopen přenášet mnohem vyšší zatížení silovou dvojicí, která vyvolává krouticí moment uvnitř prutu. To je hlavní rozdíl od kroucení otevřených profilů. Nejvyšší hodnota smykového napětí je  $\tau_{yz} = 2,08$  MPa.



Obr. 7.14 Smykové napětí  $\tau_{xz}$  v příčném průřezu

Na obr. 7.14 je zobrazen průběh smykového napětí  $\tau_{xz}$  v příčném průřezu. Popis průběhu je totožný jako u předcházejícího obrázku. Maximální hodnota smykového napětí  $\tau_{xz}$  je taktéž totožná, tedy  $\tau_{xz} = 2,08$  MPa.

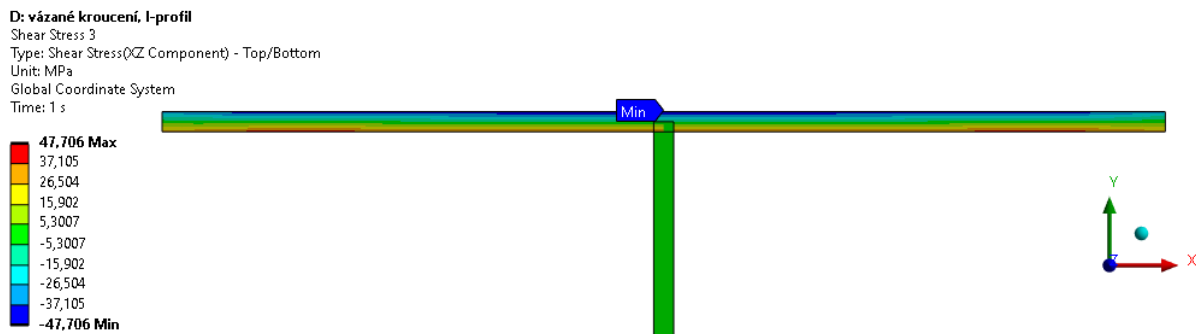


Obr. 7.15 Redukované napětí v příčném průřezu

Na obr. 7.15 je zobrazen průběh redukovaného napětí dle von Misesova kritéria v příčném průřezu. Maximální hodnota redukovaného napětí je  $\sigma_{red} = 3,61$  MPa.

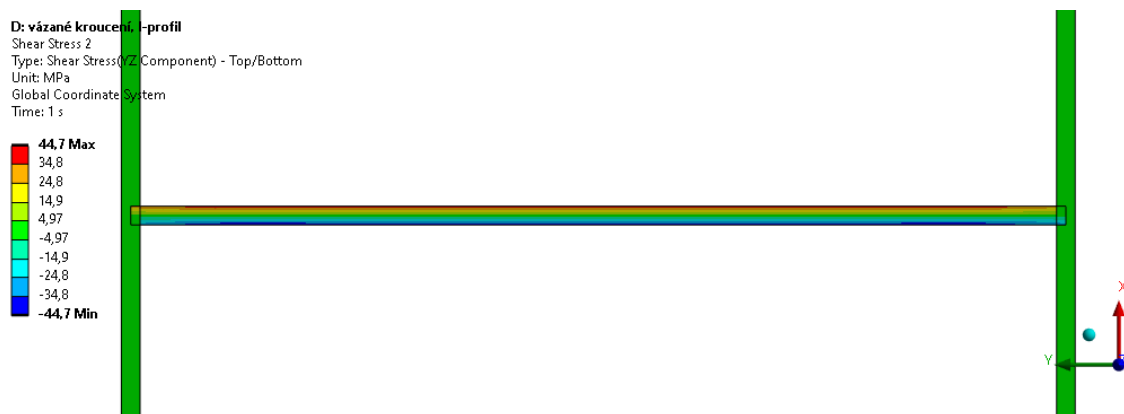
## 7.5 Verifikace výpočtu vázaného kroucení I-profilu

Níže bude provedena verifikace analytického výpočtu z podkapitoly 6.5. Zobrazené příčné průřezy se nacházejí ve vzdálenosti 200 mm od vetknutí.



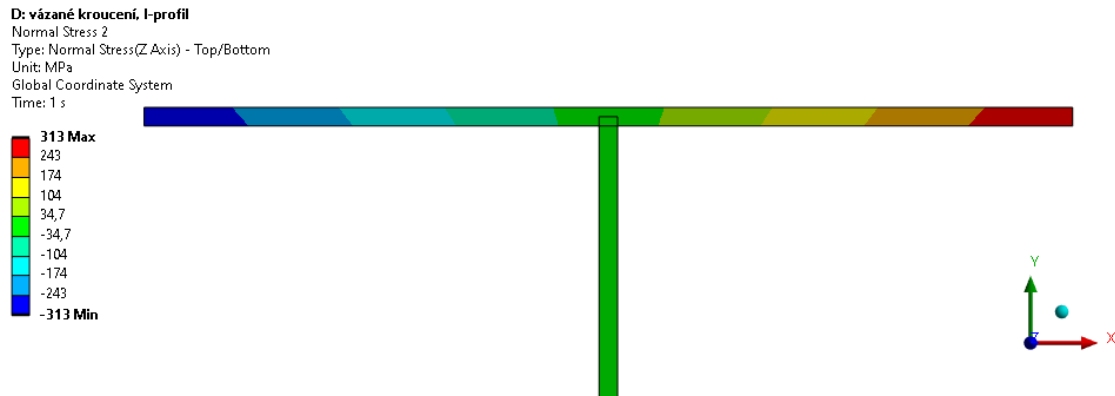
Obr. 7.16 Smykové napětí  $\tau_{xz}$  v pásnici

Na obr. 7.16 je zobrazen průběh smykového napětí  $\tau_{xz}$  v horní pásnici. Ve spodní pásnici je průběh totožný. Maximum smykového napětí, na obrázku značka „Min“, se nachází uprostřed šířky pásnice. Je to z důvodu, že kromě Saint-Venantova smykového napětí se zde nachází i smykové napětí od vázaného kroucení, která má svou maximální hodnotu právě uprostřed šířky pásnice. Nejvyšší hodnota smykového napětí v pásnici je  $\tau_{xz} = 47,7$  MPa.



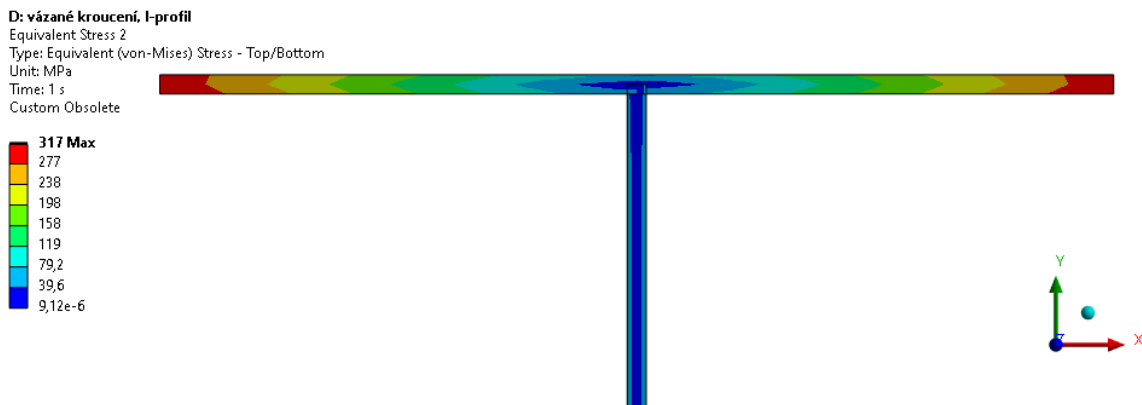
Obr. 7.17 Smykové napětí  $\tau_{yz}$  ve stojině

Na obr. 7.17 je zobrazen průběh smykového napětí  $\tau_{yz}$  ve stojině. Tento průběh je totožný jako u volného kroucení. Jediná odlišnost je, že se zde bude mít smykové napětí menší velikost. Maximální hodnota smykového napětí ve stojině je  $\tau_{yz} = 44,7$  MPa. Je to způsobeno tím, že pouze část celkového kroučícího momentu se v tomto místě přenáší jako Saint-Venantův moment. Zbýlý kroučící moment způsobuje vznik přídavných smykových a normálových napětí v pásnicích.



Obr. 7.18 Normálové napětí  $\sigma_z$  v příčném průřezu

Na obr. 7.18 je zobrazen průběh normálového napětí  $\sigma_z$  v horní pásnici. Ve spodní pásnici je velikost normálového napětí totožná, pouze se změní směr, kdy napravo je tlakové napětí a vlevo je tahové napětí. Z průběhu je patrné, že uprostřed šířky pásnice je normálové napětí nulové a směrem k okrajům pásnice napětí roste, resp. klesá. Tato skutečnost potvrzuje předpoklad lineárního rozložení normálového napětí v pásnicích. Maximální, resp. minimální, hodnota normálového napětí se nachází na konci pásnice a jeho velikost je  $\sigma_z = 313$  MPa.



Obr. 7.19 Redukované napětí v příčném průřezu

Na obr. 7.19 je zobrazen průběh redukovaného napětí dle von Misesova kritéria v příčném průřezu. Na obrázku je zobrazena pouze polovina příčného průřezu z důvodu čitelnosti, v druhé polovině je průběh totožný. Maximální hodnota se nachází na koncích pásnic a jeho velikost je  $\sigma_{red} = 317$  MPa.

## 7.6 Celkové srovnání analytického a numerického řešení

V tab. 7.1 je provedeno celkové srovnání analytického a numerického výpočtu u všech typů příčných průřezů, které jsou uvedeny v této práci.

Tab. 7.1 Srovnání analytického a numerického výpočtu

Název	Maximální redukované napětí analytickým výpočtem	Maximální redukované napětí numerickým výpočtem	Absolutní odchylka	Procentuální Odchylka
Jednotka	MPa	MPa	MPa	%
Volné kroucení				
I-profil	349	365	16	4,58
C-profil	262	280	18	6,87
Otevřený kruhový průřez	335	347	12	3,58
Dutý čtvercový průřez	3,46	3,61	0,15	4,34
Vázané kroucení				
I-profil	319	317	2	0,63

Z tab. 7.1 je patrné, že největší odchylku mezi analytickým a numerickým výpočtem je u volného kroucení otevřeného průřezu tvaru C-profilu, konkrétně 6,87 %. Naopak nejmenší odchylka je u vázaného kroucení I-profilu, konkrétně 0,63 %. Procentuální odchylky jsou vztaženy k hodnotě napětí analytického výpočtu.

## 8 Závěr

Cílem této práce byla aplikace vztahů pro volné a vázané kroucení prutů tenkostěnných profilů, jejich verifikace numerickými metodami a následné srovnání výsledků.

V první části byla provedena rešerše volného kroucení prutů tenkostěnných otevřených a uzavřených profilů. Důraz byl kladen především na odvození potřebných analytických vztahů pro výpočet napětí působícího v prutu. Tyto vztahy byly aplikovány na konkrétních příkladech prutů. Z výsledků bylo zjištěno, že v uzavřených tenkostěnných profilech působí při zachování stejných rozměrů a zatížení mnohonásobně nižší smykové napětí. Při volbě tvaru příčného profilu u součástí, u kterých je předpokládáno zatížení krouticím momentem, je tedy vhodné volit uzavřený tvar tenkostěnného profilu. Dále byly odvozené vztahy použity pro výpočet napětí působícího v prutu s příčným průřezem tvaru mezikružší. Získané hodnoty napětí byly následně porovnány s hodnotami získanými pomocí základních vztahů pružnosti a pevnosti. Zjištěná odchylka od maximálního napětí byla 1,9 %. Tato odchylka se bude zvyšovat s narůstající tloušťkou stěny. Při srovnání napětí působícího na střednicové kružnici se hodnoty napětí získané oběma způsoby shodují. Tyto skutečnosti jsou zapříčiněny zjednodušující podmínkou Saint-Venantova kroucení o uvažování konstantního napětí po tloušťce stěny.

V další části byla provedena rešerše vázaného kroucení tenkostěnných profilů. Při vázaném kroucení vznikne v prutu kromě smykových napětí i normálové. U uzavřených profilů není deplanace příčných průřezů příliš významná a u vázaného kroucení tak bude normálové napětí zanedbatelné. Významná deplanace nastává především u I, U a C-profilů. Pokud tedy deplanaci zamezíme, vznikne u těchto profilů nezanedbatelné normálové napětí. Vztahy odvozené v této části byly aplikovány na příkladu prutu s příčným průřezem tvaru I-profilu. Při srovnání bezpečnosti vůči mezímu stavu pružnosti se nedá jednoznačně stanovit, zda je nebezpečnější volné nebo vázané kroucení. Záleží na použitém kritériu při výpočtu redukovaného napětí.

V poslední části byly analytické výpočty ověřeny pomocí numerických metod. Pro verifikaci byl použit program Ansys Workbench 2022 R2, který využívá pro výpočet MKP. Při hodnocení výsledků bylo nutné hodnoty napětí určovat v dostatečné vzdálenosti od konců prutu, protože hodnoty napětí v těchto místech byly značně zkreslené kvůli okrajovým podmínkám, které zde byly zadány. Výsledky proto byly určovány v příčném průřezu prutu, který se nacházel v polovině rozpětí. Na koncích jednotlivých obdélníkových částí příčných průřezů se projevovaly koncentrace napětí, které při analytickém výpočtu nebyly uvažovány. Z tohoto důvodu nebylo jako vypovídající napětí vždy bráno to maximální napětí, které v příčném průřezu působí. Při srovnání výsledků získanými analytickým a numerickým výpočtem byla nejvýznamnější odchylka zjištěna u volného kroucení prutu s příčným průřezem tvaru C-profilu, konkrétně 6,87 %. Naopak nejmenší odchylka byla zjištěna u vázaného kroucení I-profilu, konkrétně 0,63 %.

## Seznam použitých zdrojů

- [1] JANÍČEK, P., E. ONDRÁČEK, J. VRBKA a J. BURŠA. *Mechanika těles: pružnost a pevnost I. 3.*, přepracované vydání, v Akademickém nakladatelství CERM 1. Brno: CERM, 2004, 287 s. ISBN 80-214-2592-X.
- [2] FRANČŮ, J., P. NOVÁČKOVÁ a P. JANÍČEK. Torsion of a non-circular bar. In: *Engineering Mechanics*. Brno: CERM, 2012, s. 45-60. ISSN 1805-4633.
- [3] ODEN, J. a E. RIPPERGEN. *Mechanics of elastic structures*. 2. vydání. New York: McGraw-Hill, 1981, 460 s. ISBN 0-07-047507-5.
- [4] JERATH, S.. *Structural Stability Theory and Practice*. Newark: John Wiley & Sons, Incorporated, 2020. ISBN 9781119694526.
- [5] HUGHES, A., D. ILES a A. MALIK. *Design of steel beams in torsion*. UK: SCI, 2011. ISBN 978-1-85942-200-7.
- [6] Chapter 5 - Torsion in Structures. In: YOO, C. a S. LEE. *Stability of Structures*. Elsevier Inc, 2011, s. 245-301. ISBN 9780123851222. Dostupné z: doi:10.1016/B978-0-12-385122-2.10005-3
- [7] VOTAVA, O. *Krut prutů s nekrhovým příčným průřezem*. Vysoké učení technické v Brně. Fakulta strojního inženýrství, 2017, 48 s. Vedoucí práce Doc. Ing. Tomáš Profant, Ph.D.
- [8] ŠPANIEL, M. *Metoda konečných prvků při navrhování a kontrole strojních součástí* [online]. 2017. Dostupné také z: <https://portal.cvut.cz/wp-content/uploads/2017/04/HP2007-23-Spaniel.pdf>
- [9] *Ansys: Element library* [online]. verze 2022 R2 [cit. 2023-05-02].