UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Důležité funkce v teorii pravděpodobnosti

Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Jan Tomeček, Ph.D.**
Vypracovala: **Monika Halouzková**
Studijní program: B1103 Aplikovaná matematika
Studijní obor: Matematika-ekonomie se zaměřením na bankovnictví
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2016

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Monika Halouzková

Název práce: Důležité funkce v teorii pravděpodobnosti

Typ práce: Bakalářská

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: RNDr. Jan Tomeček, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2016

Abstrakt: Hlavním cílem této bakalářské práce je vyšetření průběhu některých funkcí vyskytujících se v teorii pravděpodobnosti a ve statistice. V dnešní době nám k určení vlastností těchto funkcí může posloužit výpočetní technika. Používají se speciální matematické programy např. Graphmatica, Maple, Mathematica, MatLab a další, případně je možné využít online aplikace. Přesto není na škodu umět tyto vlastnosti určit pomocí papíru a tužky, tak jako je tomu tak v této práci.

Klíčová slova: funkce, graf, definiční obor, obor hodnot, funkční hodnota, periodicita, sudost a lichost, monotonie, lokální extrémy, konvexnost a konkávnost, inflexní body, asymptoty, normální rozdělení, exponenciální rozdělení, χ^2-rozdělení.

Počet stran: 36

Počet příloh: 0

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Monika Halouzková

Title: Important functions in the probability theory

Type od thesis: Bachelor’s

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: RNDr. Jan Tomeček, Ph.D.

The year of presentation: 2016

Abstract: The main idea of this bachelor thesis is the examination of the course of the functions occurring in the theory of probability and statistics. These days computer programs can serve to accomplish this task. People use special mathematical programs such as Graphmatica, Maple, Mathematica, MatLab and others, it is alternatively possible to use the online application. If we can determine these properties by using paper and pencil, so it isn’t lost labour.

Key words: function, chart, definition, domain values, functional value, periodicity, evenness and oddness, monotony, local extremes, convexity and concavity, inflection points, asymptotes, normal division, exponential division, χ^2-division.

Number of pages: 36

Number of appendices: 0

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně pod vedením RNDr. Jana Tomečka, Ph.D. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využila, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

V Olomouci dne 22. dubna 2016 ....

podpis

Obsah

Poděkování

Děkuji RNDr. Janu Tomečkovi, Ph.D. za velkou ochotu, cenné rady, připomínky a za veškerý čas, který mi věnoval při vedení bakalářské práce. Také bych ráda poděkovala své rodině a přátelům, kteří mě po celou dobu mého studia podporovali.

Úvod

Tato bakalářská práce obsahuje průběhy některých důležitých funkcí vyskytujících se v teorii pravděpodobnosti a statistice.

Vyšetřením průběhu funkce rozumíme určení vlastností funkce a následné načrtnutí grafu funkce. Samotný graf nám dává mnohem lepší představu o tom, jak nějaká (závislá) veličina reaguje na změnu jiné (nezávislé) veličiny, např. jak závisí ujetá dráha na době, po kterou se předmět pohyboval nebo vliv průměrné rychlosti automobilu na spotřebu benzínu. Dále slouží k rychlé orientaci, popř. lze z něj vyčíst vlastnosti funkce.

Pokud máme o studované funkci dostatek informací, není problém její graf načrtnout. Jednou z alternativních možností, využívaných v praxi, je počítání pomocí program Maple, Wolfram Alpha, Graphmatica, Matlab, atd. Dále je možné využít některé online aplikace dostupné např. na graph.seriesmathstudy.com nebo um.mendelu.cz. Přestože pomocí několika málo příkazů získáme poměrně rychle vyšetřený celý průběh funkce, program nám v některých případech ani nestačí. Například v situaci, kdy máme složitý předpis funkce (např. χ^2-rozdělení), který je natolik komplikovaný nebo závisí na parametru, jako je tomu tak v této práci. Proto jsem zvolený problém řešila převážně ručně s využitím programu Wolfram Alpha, který mi pomohl k ověření správnosti mých výpočtů. K tvorbě grafů jsem použila jednoduchý software Graph, s výjimkou obrázku č. 2, který jsem převzala z publikace **[5]**.

Práce je rozdělena do dvou částí. V první si uvedeme nezbytný přehled základních pojmů týkajících se průběhu funkce, bez nichž se v celé práci neobejdeme. Druhá část nás uvede do problematiky teorie pravděpodobnosti a statistiky, podrobně si ukážeme postup výpočtu průběhu hustot některých absolutně spojitých rozdělení pravděpodobností a na základě získaných údajů sestrojíme výsledný graf.

Mojí snahou bylo především vytvořit motivační pomůcku ke studiu problematiky průběhu funkce, a to jak pro studenty matematických oborů Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého, tak pro širokou veřejnost.

1 Průběh funkce

V této kapitole si podrobně vysvětlíme jednotlivé vlastnosti funkcí a základní pojmy s nimi spojené, se kterými se setkáme při vyšetřování průběhu funkce. Pro teoretickou část byla převážně využita literatura **[1]**, **[2]**, **[3]** a **[4]**.

Zpravidla nás budou zajímat tyto vlastnosti:

- definiční obor a obor hodnot,
- periodičnost, sudost a lichost funkce,
- průsečíky jejího grafu s osami x a y,
- intervaly spojitosti funkce, body nespojitosti a limity v bodech nespojitosti,
- první derivace funkce, kterou využijeme k určení intervalů monotonie, stacionárních bodů a lokálních extrémů,
- druhá derivace funkce s jejíž pomocí stanovíme inflexní body, intervaly konvexnosti a konkávnosti,
- rovnice asymptot.

1.1 Funkce a její graf, funkční hodnota, definiční obor, obor hodnot

Před samotným zavedením pojmů, týkajících se vlastností funkce, je nejdříve nutné uvést několik důležitých definic, které s průběhem funkce úzce souvisí. Je tedy potřebné formulovat pojem funkce, graf, funkční hodnota, definiční obor a obor hodnot.

Definice 1. *Reálná funkce jedné reálné proměnné* (dále jen funkce) je zobrazení f množiny $A \subset \mathbb{R}$ do množiny $\mathbb{R}$. Proměnnou $x \in A$ nazýváme *nezávisle proměnná*. Číslo $f(x)$ se nazývá *funkční hodnota* funkce f v bodě x.
Množina $A \subset \mathbb{R}$ se nazývá *definiční obor* funkce f a značíme ho $D(f)$. Množina $\{y \in \mathbb{R};\ y = f(x),\ x \in D(f)\}$ se nazývá *obor hodnot* funkce f a značíme ho $H(f)$.

Definice 2. *Grafem funkce* f nazýváme množinu všech bodů

$$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in D(f), y = f(x)\}.$$

1.2 Periodicita, sudost a lichost

Důležitými vlastnostmi funkce jedné proměnné je její periodicita, sudost a lichost, a proto si v této podkapitole uvedeme jejich definice.

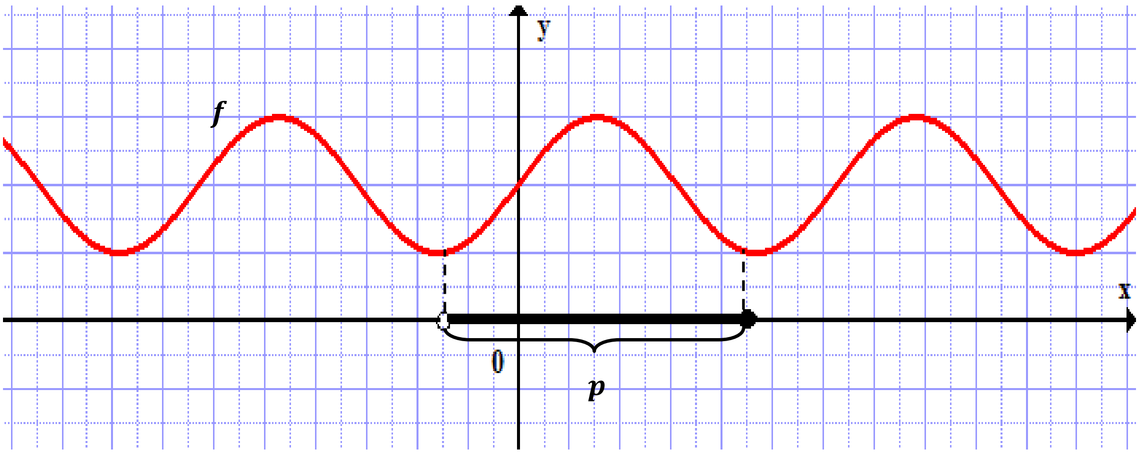
Definice 3. Funkce f se nazývá *periodická*, jestliže existuje číslo $p \in (0; \infty)$ takové, že

a) $\forall x \in \mathbb{R}$ platí $x \in D(f)$ právě tehdy, když $x + p \in D(f)$,

b) $f(x + p) = f(x)$ pro každé $x \in D(f)$.

Číslo p se nazývá perioda funkce f. Nejmenší kladná perioda funkce f se nazývá *primitivní perioda* funkce f.

Graf periodické funkce může vypadat např. takto:



Obrázek 1: Graf funkce $f(x)$ = sin(x) + 2.

Při zkoumání vlastností periodické funkce se stačí omezit jen na libovolný polozavřený interval délky p, kde p je primitivní perioda. Takový interval se nazývá *základní interval periodicity* této funkce.

Definice 4. Funkce f se nazývá *sudá*, resp. *lichá*, jestliže

a) $\forall x \in \mathbb{R}$ platí $x \in D(f)$ právě tehdy, když $-x \in D(f)$,

b) $f(-x) = f(x)$, resp. $f(-x) = -f(x)$ pro každé $x \in D(f)$.

Poznámka 1. Graf sudé funkce je osově souměrný podle osy y a graf liché funkce je středově souměrný podle počátku soustavy souřadnic.

1.3 Monotonie

Pomocí diferenciálního počtu lze určit intervaly, v nichž je funkce rostoucí, resp. klesající a stanovit její extrémy (viz podkapitola 1.4).

Definice 5. Jestliže pro všechny $x_1, x_2 \in (\mathrm{a}, \mathrm{b})$, $x_1 < x_2$ platí

a) $f(x_1) < f(x_2)$, pak se funkce f nazývá *rostoucí na intervalu* (a, b),

b) $f(x_1) > f(x_2)$, pak se funkce f nazývá *klesající na intervalu* (a, b),

c) $f(x_1) \geq f(x_2)$, pak se funkce f nazývá *nerostoucí na intervalu* (a, b),

d) $f(x_1) \leq f(x_2)$, pak se funkce f nazývá *neklesající na intervalu* (a, b).

Věta 1. Nechť má funkce f derivaci na otevřeném intervalu (a, b). Potom platí

a) je-li $f'(x) > 0\ \forall x \in (\mathrm{a}, \mathrm{b})$, pak je f *rostoucí na intervalu* (a, b),

b) je-li $f'(x) < 0\ \forall x \in (\mathrm{a}, \mathrm{b})$, pak je f *klesající na intervalu* (a, b),

c) je-li $f'(x) = 0\ \forall x \in (\mathrm{a}, \mathrm{b})$, pak je f *konstantní na intervalu* (a, b),

d) je-li $f'(x) \leq 0\ \forall x \in (\mathrm{a}, \mathrm{b})$, pak je f *nerostoucí na intervalu* (a, b),

e) je-li $f'(x) \geq 0\ \forall x \in (\mathrm{a}, \mathrm{b})$, pak je f *neklesající na intervalu* (a, b).

Definice 6. Funkce, která je rostoucí nebo klesající na intervalu (a, b), se nazývá *ryze monotónní* na intervalu (a, b). Funkce, která je nerostoucí nebo neklesající na intervalu (a, b), se nazývá *monotónní* na intervalu (a, b).

1.4 Lokální extrémy

V této části si uvedeme definice a věty nezbytné při vyšetřování lokálních extrémů zadané funkce. Především mluvíme o jednotlivých typech lokálních extrémů a dále ukazujeme, jak při jejich hledání použít první a vyšší derivace studované funkce. Lokální extrémy hledáme vždy na otevřené množině a dávají informaci o vlastnostech funkce v daném bodě a jeho bezprostředním okolí.

Věta 2. *(Nutná podmínka pro lokální extrém)* Nechť má funkce f derivaci v bodě $x_0 \in D(f)$. Má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém, potom $f'(x_0) = 0$.

Důsledek 1. Jestliže existuje $f'(x_0)$ a $f'(x_0) \neq 0$, pak f nemá v x_0 lokální extrém.

Tento důsledek nám zmenšuje množinu bodů, kde je možný lokální extrém. Tedy hledáme-li lokální extrémy funkce, prověřujeme tzv. *stacionární body* a body, v nichž *derivace neexistuje.*

Definice 7. *Stacionárním bodem* funkce f nazveme bod $x_0 \in D(f)$, pro který $f'(x_0) = 0$.

Definice 8. Říkáme, že funkce f má v bodě $x_0 \in D(f)$ ostré lokální maximum $f(x_0)$, resp. ostré lokální minimum $f(x_0)$, existuje-li redukované okolí $\mathcal{U}^*(x_0)$ takové, že pro všechny body $x \in \mathcal{U}^*(x_0)$ platí $f(x) < f(x_0)$, resp. $f(x) > f(x_0)$.

Existenci a druh extrému určuje *první postačující podmínka existence lokálního extrému:*

Věta 3. Nechť f je spojitá v bodě $x_0 \in D(f)$ a nechť má f první derivaci na nějakém $\mathcal{U}^*(x_0) \subset D(f)$ (přičemž v x_0 derivace existovat nemusí). Pak platí:

a) Je-li $f' > 0$ na $\mathcal{U}^*_-(x_0)$ a $f' < 0$ na $\mathcal{U}^*_+(x_0)$, potom má f v bodě x_0 *ostré lokální maximum.*

b) Je-li $f' < 0$ na $\mathcal{U}^*_-(x_0)$ a $f' > 0$ na $\mathcal{U}^*_+(x_0)$, potom má f v bodě x_0 *ostré lokální minimum.*

V praxi se také často užívá k určení druhu extrému tzv. *druhá věta o postačujících podmínkách* pro lokální extrémy:

Věta 4. Nechť x_0 je stacionárním bodem funkce f a nechť existuje nenulová $f''(x_0)$. Potom má funkce f v x_0 ostrý lokální extrém.

a) Je-li $f''(x_0) > 0$, má funkce f v bodě x_0 *ostré lokální minimum.*

b) Je-li $f''(x_0) < 0$, má funkce f v bodě x_0 *ostré lokální maximum.*

Poznámka 2. Pokud $f''(x_0) = 0$, výše uvedenou větu nelze použít. V tomto případě zpravidla používáme Větu 3.

1.5 Konvexnost a konkávnost

Při vyšetřování průběhu funkce nám obvykle nestačí znát definiční obor, intervaly monotonie a lokální extrémy. Kromě již zmíněného je nutné k přesnějšímu nakreslení a popisu grafu funkce také vědět, zda je funkce konvexní nebo konkávní. Tyto vlastnosti nám pomůže odhalit druhá derivace funkce.

Definice 9. Řekneme, že funkce f je

a) *konvexní na intervalu* $I \subset D(f)$, jestliže pro každé tři body $x_1,\ x_2,\ x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$ platí, že bod $P_2 = (x_2, f(x_2))$ leží buď pod spojnicí bodů $P_1 = (x_1, f(x_1))$ a $P_3 = (x_3, f(x_3))$ nebo na ní.

b) *konkávní na intervalu* $I \subset D(f)$, jestliže pro každé tři body $x_1,\ x_2,\ x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$ platí, že bod $P_2 = (x_2, f(x_2))$ leží buď nad spojnicí bodů $P_1 = (x_1, f(x_1))$ a $P_3 = (x_3, f(x_3))$ nebo na ní.

Leží-li P_2 pod (resp. nad) spojnicí P_1 a P_3, nazývá se funkce f *ryze konvexní* (resp. *ryze konkávní*) na I.

Definice 10. Říkáme, že funkce f je *konvexní*, resp. *konkávní* v intervalu *I*, jestliže v každém bodě I je konvexní, resp. konkávní.

Hledání intervalů konvexnosti, resp. konkávnosti je podle následující věty vlastně hledáním intervalů, na kterých je funkce $f'(x)$, rostoucí resp. klesající.

Věta 5. Nechť f má na (a, b) druhou derivaci. Potom platí

a) f je *konvexní* na $(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \Leftrightarrow f''(x) \geq 0\ \forall x \in (\mathrm{a}, \mathrm{b})$,

b) $f''(x) > 0\ \forall x \in (\mathrm{a}, \mathrm{b}) \Rightarrow f$ je ryze *konvexní* na (a, b),

c) f je *konkávní* na $(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \Leftrightarrow f''(x) \leq 0\ \forall x \in (\mathrm{a}, \mathrm{b})$,

d) $f''(x) < 0\ \forall x \in (\mathrm{a}, \mathrm{b}) \Rightarrow f$ je ryze *konkávní* na (a, b).

1.6 Inflexní body

Dalším velmi důležitým pojmem, bez kterého se neobejdeme při vyšetřování průběhu funkce, je inflexní bod.

Definice 11. Nechť f je spojitá v bodě x_0 a má v bodě x_0 derivaci (vlastní nebo nevlastní). Říkáme, že f má v x_0 inflexi, jestli existuje $\mathcal{U}^*(x_0) \subset D(f)$ tak, že f je konkávní na $\mathcal{U}_-^*(x_0)$ a konvexní na $\mathcal{U}_+^*(x_0)$ nebo naopak. Bod $(x_0, f(x_0))$ se nazývá *inflexní bod* funkce f.

Poznámka 3. Inflexní bod poznáme tedy tak, že v něm druhá derivace (pokud existuje) mění znaménko.

K nalezení inflexních bodů nám pomůže *nutná podmínka existence inflexe*:

Věta 6. Nechť má funkce f v bodě x_0 inflexi a nechť existuje $f''(x_0)$. Potom $f''(x_0)$ = 0.

Poznámka 4. Jedná se o nutnou podmínku existence inflexe, nikoli o postačující. Obrácená věta totiž neplatí. Přestože je druhá derivace funkce v nějakém bodě nulová, nemusí mít funkce v tomto bodě inflexi.

Důsledek 2. Inflexe nemůže být v bodech, ve kterých existuje druhá derivace a je nenulová.

Pomocí dvou postačujících podmínek existence inflexe zjistíme inflexní body:

Věta 7. Nechť má funkce f spojitou první derivaci v bodě x_0 a nechť existuje $\mathcal{U}^*(x_0)$ takové, že $\forall x \in \mathcal{U}^*(x_0)$ existuje $f''(x)$. Mění-li funkce f'' při průchodu bode x_0 znaménko, má funkce f v bodě x_0 inflexi. Nemění-li f'' při průchodu znaménko, f nemá v x_0 inflexi.

Věta 8. Nechť má funkce f v bodě x_0 derivaci třetího řádu a nechť $f''(x_0) = 0.$ Jestliže $f'''(x_0) \neq 0$, pak má funkce f v x_0 inflexi.

1.7 Asymptoty

Pro nakreslení grafu je rovněž užitečné vědět, má-li zkoumaná funkce asymptoty. Asymptoty jsou přímky, které nám poskytují informace o chování zkoumané funkce pro $x \to \pm\infty$ a v okolí bodů, v nichž má funkce nespojitost 2. druhu.

Definice 12. Nechť je f definována alespoň v jednom jednostranném redukovaném okolí bodu $c \in \mathbb{R}$. Má-li funkce f v bodě c alespoň jednu jednostrannou limitu nevlastní, pak se přímka daná rovnicí $x = c$ nazývá *vertikální asymptota funkce* f.

Definice 13. Nechť je f definována na (a, ∞). Existuje-li přímka $p\colon y = kx + q$, taková že

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (kx + q)) = 0,$$

pak se přímka p nazývá *asymptota se směrnicí funkce* f v nevlastním bodě ∞.

Poznámka 5. Podobně definujeme asymptotu pro $x \to -\infty$.

Věta 9. Přímka daná rovnicí $p: y = kx + q$ je asymptotou funkce f pro $x \to \pm\infty$ právě tehdy, když existují vlastní limity

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{a} \quad q = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx).$$

Asymptoty lze rozdělit do dvou skupin. Pokud existuje asymptota, ke které se graf funkce blíží, když se x blíží k

a) nějakému číslu *c*, tak mluvíme o *vertikální asymptotě.* Tyto asymptoty jsou vždy kolmé na osu x.
b) hodnotě $\pm\infty$, tak mluvíme o *asymptotě se směrnicí*. Tyto asymptoty jsou přímky vodorovné nebo šikmé, vždy jde o graf lineární funkce.

2 Hustoty některých absolutně spojitých rozdělení pravděpodobností

Tak jako tomu napovídá nadpis této kapitoly, v práci se budeme zabývat některými hustotami absolutně spojitých rozdělení pravděpodobností. V úvodu této části se seznámíme s pojmy jako je náhodná veličina, rozdělení pravděpodobností, distribuční funkce a nakonec hustota náhodné veličiny. Pro teoretickou část byla především využita literatura **[5]** a **[6]**.

Náhodná veličina X představuje číselné ohodnocení výsledků náhodného pokusu (počet zmetků v sérii výrobků, teplota pacienta ve °C, počet padlých líců při hodech třemi mincemi), tedy její hodnoty (realizace) jsou ovlivněny náhodou. Bez užití náhodných veličin není myslitelná ani žádná aplikace matematické statistiky.

Způsob, kterým každé hodnotě přiřazujeme pravděpodobnost toho, že náhodná veličina nabude této hodnoty v různých číselných intervalech, se nazývá rozdělení pravděpodobností. Jednou z možností, jak popsat toto rozdělení, je užití tzv. distribuční funkce. Rozdělení pravděpodobností náhodných veličin dělíme na:

- *diskrétní* (mají konečně nebo spočetně mnoho hodnot, např. počet vyklíčených rostlin z *n* zasazených rostlin stejného druhu nebo počet hodů, které předchází prvnímu padnutí šestky na kostce v sérii nezávislých náhodných pokusů),
- *absolutně spojitá* (mají nespočetně mnoho hodnot, např. výška zdravého dospělého člověka v cm či životnost daného spotřebitele).

Jejich rozdělení můžeme také popsat alternativním způsobem – pomocí pravděpodobnostní funkce a hustoty, se kterými se často pracuje lépe než s obecnou distribuční funkcí. Znalost rozdělení pravděpodobností diskrétní náhodné veličiny X je rovnocenná znalosti její pravděpodobnostní funkce. V absolutně spojitém případě je to ekvivalentní znalosti hustoty. Avšak v mnoha situacích stačí rozdělení charakterizovat pomocí několika vhodně zvolených hodnot, tzv. číselných charakteristik. Mezi nejznámější patří střední hodnota a rozptyl, které představují teoretické obdoby aritmetického průměru a rozptylu.

Níže uvedené řešené příklady budou mít stejnou strukturu, tzn. že:

1. určují informace o stanovení definičního oboru, oboru hodnot, periodičnosti, sudosti a lichosti funkce, průsečících s osami x a y,
2. popisují intervaly spojitosti funkce, body nespojitosti a limity v bodech nespojitosti,
3. uvádí výpočet první derivace funkce, kterou využijeme k určení intervalů monotonie, stacionárních bodů a lokálních extrémů,
4. uvádí výpočet druhé derivace funkce a s její pomocí určíme intervaly konvexnosti a konkávnosti, inflexní body, dále rovnice asymptot,
5. znázorňují grafy funkcí.

Ukážeme si průběh hustoty

- normálního rozdělení,
- exponenciálního rozdělení,
- χ^2-rozdělení.

2.1 Normální rozdělení

Normální rozdělení je jedno z nejčastěji používaných rozdělení pravděpodobnosti absolutně spojité náhodné veličiny, které je charakterizováno pomocí střední hodnoty μ a rozptylu σ^2. Toto rozdělení značíme $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ a je symetrické podle bodu μ. Obvykle popisuje náhodné chyby vznikající při opakovaném měření fyzikálních veličin nebo některé děje v přírodě, technice i ekonomii. Jako příklad náhodného děje, který se řídí normálním rozdělením, může sloužit např. výška člověka, IQ, délka končetin, životní kapacita plic, maximální dosažená rychlost automobilu atd. Pro funkci hustoty normálního rozdělení je typický tvar Gaussovy křivky, podle níž je také někdy toho rozdělení pojmenováno jako Gaussovo rozdělení.

Speciálním případem normálního rozdělení je normované rozdělení $\mathrm{N}(0;\,1)$, někdy též standardizované normální rozdělení.

Vyšetříme průběh hustoty normálního rozdělení, která má předpis

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ x \in \mathbb{R},$$

kde $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}^+$ jsou parametry.

1. Definiční obor dané funkce je $D(f) = \mathbb{R}$. Protože je symetrický kolem nuly, má smysl vyšetřovat sudost nebo lichost. Funkce není sudá ani lichá v případě $\mu \neq 0$, což plyne např. z toho, že $f(\mu) \neq f(-\mu)$ ani $f(\mu) \neq -f(\mu)$. Pouze pro $\mu = 0$ se jedná o funkci sudou, jelikož platí

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = f(-x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pomocí rovnice $f(x) = 0$, tj.

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(-x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = 0,$$

určíme průsečíky s osou x. Z toho, že funkce e^x je vždy kladná, vyplývá, že neexistuje žádné reálné číslo x takové, aby $\mathrm{e}^{-\frac{(-x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = 0$, tj. funkce $f(x)$ nemá s osou x žádné průsečíky.
Vyšetřením rovnice $x = 0$, tj.

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(-0-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

dostáváme jediný průsečík, který protne osu y v hodnotě $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}$.
Dále zjistíme znaménko funkce, tj. kladnost a zápornost. Z předpisu funkce jde vidět, že $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, tudíž funkce je kladná na $\mathbb{R}$.

Graficky:

+

$D(f) = \mathbb{R}$

2. Vypočteme limity funkce v nevlastních bodech (tzn. $\pm\infty$). Snadno spočítáme

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right] \text{"}=\text{"} \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(\infty-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right] \text{"}=\text{"} \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\infty}\right] = 0$$

a $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right] \text{"}=\text{"} \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(-\infty-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right] \text{"}=\text{"} \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\infty}\right] = 0.$$

Z výpočtů vyplývá, že v bodě ∞ i $-\infty$ existuje asymptota se směrnicí o rovnici $y = 0$.

3. Abychom našli intervaly ryzí monotonie a lokální extrémy funkce f, vypočítáme její první derivaci. Platí

$$f'(x) = \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right]' = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right) 2(x-\mu) = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} (x-\mu),$$

$$D(f') = \mathbb{R}.$$

Pro nalezení stacionárních bodů funkce f řešíme rovnici $f'(x) = 0$, tj.

$$-\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} (x-\mu) = 0.$$

Po vydělení celé rovnice zápornou konstantou $-\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}$ a kladným výrazem $\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, dostáváme

$$x - \mu = 0.$$

V našem případě má uvažovaná rovnice právě jedno řešení $x = \mu$, které je hledaným stacionárním bodem funkce f. Jelikož je f' spojitá na $\mathbb{R}$ a nulová pouze v bodě $x = \mu$, k určení znaménka derivace stačí vypočítat derivaci v bodě z intervalu $(-\infty;\ \mu)$ a $(\mu;\ \infty)$. Například pro $\mu - 1 \in (-\infty;\ \mu)$ platí

$$f'(\mu - 1) = \frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1^2}{2\sigma^2}} > 0$$

a pro $\mu + 1 \in (\mu;\ \infty)$ platí

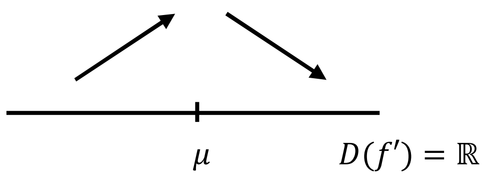
$$f'(\mu + 1) = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1^2}{2\sigma^2}} < 0.$$

Výsledky zapíšeme do tabulky a znázorníme na ose *x*.

Interval:	$(-\infty;\ \mu)$	$(\mu;\ \infty)$
Znaménko $f'(x)$	+	$-$

Tabulka 1: Znaménko první derivace

Graficky:



Z tabulky 1, tzn. z ryzí monotonie plyne, že funkce není periodická. Protože je f spojitá na $\mathbb{R}$, a tedy i ve stacionárním bodu $x = \mu$, a dále f' mění při průchodu tímto bodem znaménko (mění se zde derivace z kladné na zápornou), má funkce f v bodě μ lokální maximum s hodnotou $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

4. Druhá derivace funkce je

$$f''(x) = \left[-\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} (x-\mu)\right]' = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \left\{ \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \left[-\frac{1}{2\sigma^2} 2(x-\mu)(x-\mu)\right] + \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \left[-\frac{1}{\sigma^2}(x-\mu)^2 + 1\right],\ D(f'') = \mathbb{R}.$$

Určíme na jaké množině je funkce konvexní, tj. řešíme nerovnici

$$f''(x) > 0,$$

což je ekvivalentní s

$$-\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \left[-\frac{1}{\sigma^2}(x-\mu)^2 + 1\right] > 0.$$

Protože výraz $-\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ je vždy záporný, lze jím vydělit a dostaneme

$$\left[-\frac{1}{\sigma^2}(x-\mu)^2 + 1\right] < 0.$$

Po dalších úpravách snadno dostáváme

$$(x-\mu)^2\ >\ \sigma^2,$$

neboli

$$|x-\mu|\ >\ \sigma.$$

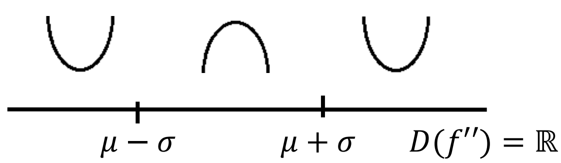
V posledním kroku vyřešíme $x - \mu\ >\ \sigma\ \ \wedge\ \ -x + \mu\ >\ \sigma$. Pro lepší orientaci si výsledky zapíšeme do následující tabulky:

Interval:	$(-\infty;\ \mu - \sigma)$	$(\mu - \sigma;\ \mu + \sigma)$	$(\mu + \sigma;\ \infty)$
Znaménko $f''(x)$	$+$	$-$	$+$

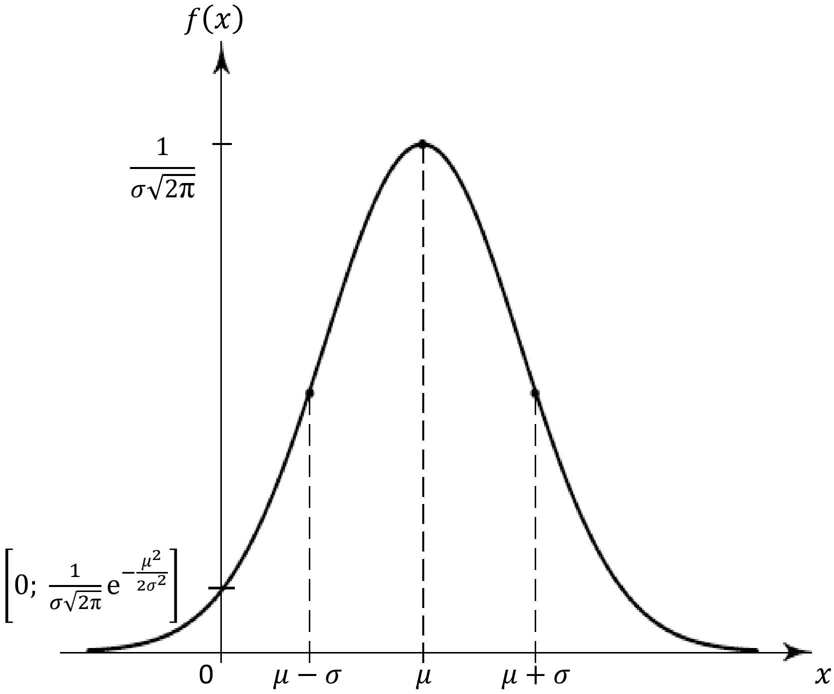
Tabulka 2: Znaménko druhé derivace

Hledanými inflexními body jsou $x = \mu - \sigma$ a $x = \mu + \sigma$. Na intervalech $(-\infty;\ \mu - \sigma)$ a $(\mu + \sigma;\ \infty)$ je funkce konvexní, zatímco na intervalu $(\mu - \sigma;\ \mu + \sigma)$ je funkce konkávní.

Graficky:



5. Na závěr sestrojíme graf funkce f.



Obrázek 2: Graf hustoty normálního rozdělení

2.2 Exponenciální rozdělení

V teorii pravděpodobnosti a matematické statistice je exponenciální rozdělení dalším příkladem rozdělení pravděpodobnosti absolutně spojitého typu. Typickým příkladem náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením je doba mezi výskytem dvou po sobě následujících náhodných jevů. Např. ve fyzice dobře popisuje čas radioaktivního rozpadu, v teorii hromadné obsluhy zase dobu čekání ve frontě nebo dobu životnosti výrobků a zařízení, u kterých dochází k poruše ze zcela náhodných příčin, nikoliv zákonitě v důsledku mechanického opotřebení či důsledku únavy materiálu apod.

Toto rozdělení úzce souvisí s Poissonovým rozdělením, které modeluje počet nějakých událostí v čase (počet dopravních nehod na vybrané křižovatce za určitý časový interval), zatímco dobu do výskytu příslušné události (dobu od jedné nehody do druhé) lze modelovat exponenciálním rozdělením.

Hustota exponenciálního rozdělení s parametrem λ je dána předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 0, & pro\ \ x \leq 0, \\ \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\lambda}}, & pro\ \ x > 0. \end{cases}$$

1. $D(f) = \mathbb{R}$. Z první části předpisu funkce je zřejmé, že je na intervalu $(-\infty;\ 0\rangle$ konstantní, a proto její vlastnosti nemá smysl podrobněji vyšetřovat. Průběh funkce budeme tedy řešit pouze pro kladné x, pro které má funkce f předpis

$$\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\lambda}}.$$

Funkce není ani sudá ani lichá, což plyne např. z toho, že $f(-1) = 0$ a $f(1) > 0$, tzn. neplatí ani $f(-1) = f(1)$ ani $f(-1) = -f(1)$.

Průsečíky s osou x získáme z rovnice $f(x) = 0$ na intervalu $(0;\ \infty)$, tj.

$$\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\lambda}} = 0,\ x > 0.$$

Z výše uvedeného vyplývá, že rovnice nemá řešení, tj. funkce pro $x > 0$ nemá s osou x žádné průsečíky. Průsečíky s osou y nemá smysl vyšetřovat, protože $x > 0$.

Znaménko funkce $\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\lambda}}$ je kladné, protože funkce e^{x} je vždy kladná a parametr $\lambda > 0$.

2. Funkce je spojitá na intervalu $(0;\ \infty)$. Vypočteme limity funkce v krajních bodech vyšetřovaného intervalu (tzn. v bodech 0^{+} a ∞). Snadno spočítáme

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\lambda}} = \text{"}\left[\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\frac{\infty}{\lambda}}\right]\text{"} = \text{"}\left[\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\infty}\right]\text{"} = 0.$$

Z hodnoty limity plyne, že funkce $f(x)$ má v bodě ∞ asymptotu se směrnicí o rovnici $y = 0$. Dále platí

$$\lim_{x\to 0^{+}} f(x) = \lim_{x\to 0^{+}} \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\lambda}} = \text{"}\left[\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\frac{0}{\lambda}}\right]\text{"} = \text{"}\left[\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-0}\right]\text{"} = \frac{1}{\lambda}.$$

Funkce f nemá vertikální asymptoty. V bodě $x = 0$ má nespojitost prvního druhu, tzn. skok, jelikož

$$\lim_{x\to 0^{+}} f(x) = \lim_{x\to 0^{+}} \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\lambda}} = \frac{1}{\lambda} \neq 0 = \lim_{x\to 0^{-}} 0 = \lim_{x\to 0^{-}} f(x).$$

3. Abychom našli intervaly ryzí monotonie a lokální extrémy funkce f, vypočítáme její první derivaci. Opět vyšetřujeme pouze na intervalu $(0;\ \infty)$. Platí

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\lambda}}\right)' = -\frac{1}{\lambda^{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\lambda}},\ D(f') = (0;\ \infty).$$

Z kladnosti funkce e^{x} a nerovnosti $-\frac{1}{\lambda^{2}} < 0$ plyne, že $f'(x) < 0$ pro $\forall x \in (0;\ \infty)$, a proto je funkce f klesající na intervalu $(0;\ \infty)$. Funkce f nemá lokální extrémy na $(0;\ \infty)$.

Poznámka 6. V případě, kdy uvažujeme konstantní funkci danou předpisem $f(x) = 0$

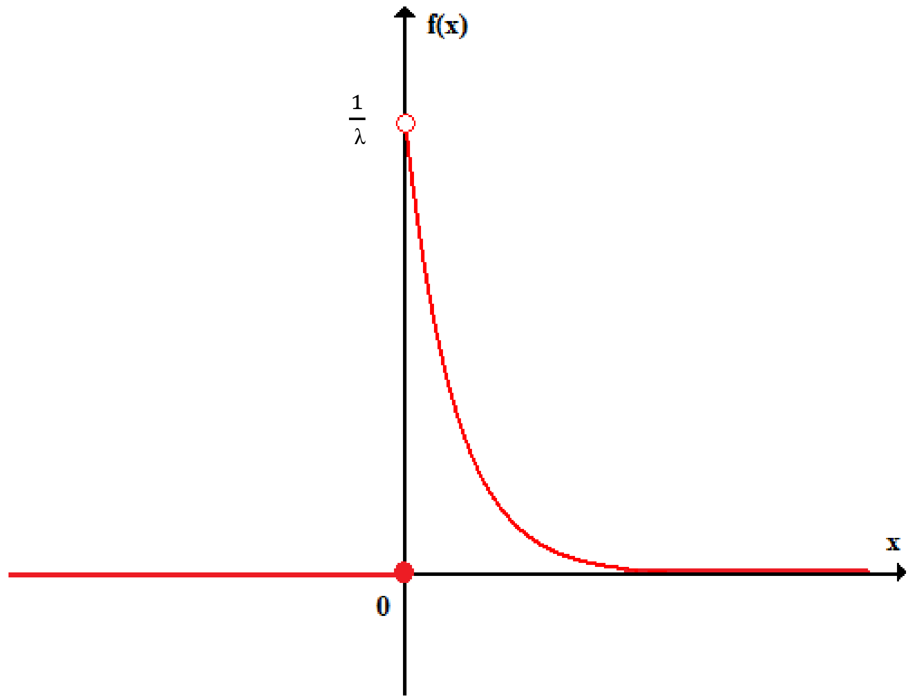
pro $\forall x \leq 0$, jsou hledanými stacionárními body všechny body $[x; 0]$ patřící do intervalu $(-\infty;\ 0\rangle$. Funkce f nemá v počátku soustavy souřadnic lokální ani globální extrémy.

4. Druhá derivace funkce má tvar

$$f''(x) = \left(-\,\frac{1}{\lambda^2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\lambda}}\right)' = \frac{1}{\lambda^3}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\lambda}},\ \forall x > 0.$$

Platí že, $f''(x) > 0$, protože výraz $\mathrm{e}^{-\frac{x}{\lambda}}$ nabývá vždy kladných hodnot a hodnota $\frac{1}{\lambda^3} > 0$. Uvažovaná funkce nemá žádné inflexní body a je konvexní na intervalu $(0;\ \infty)$.

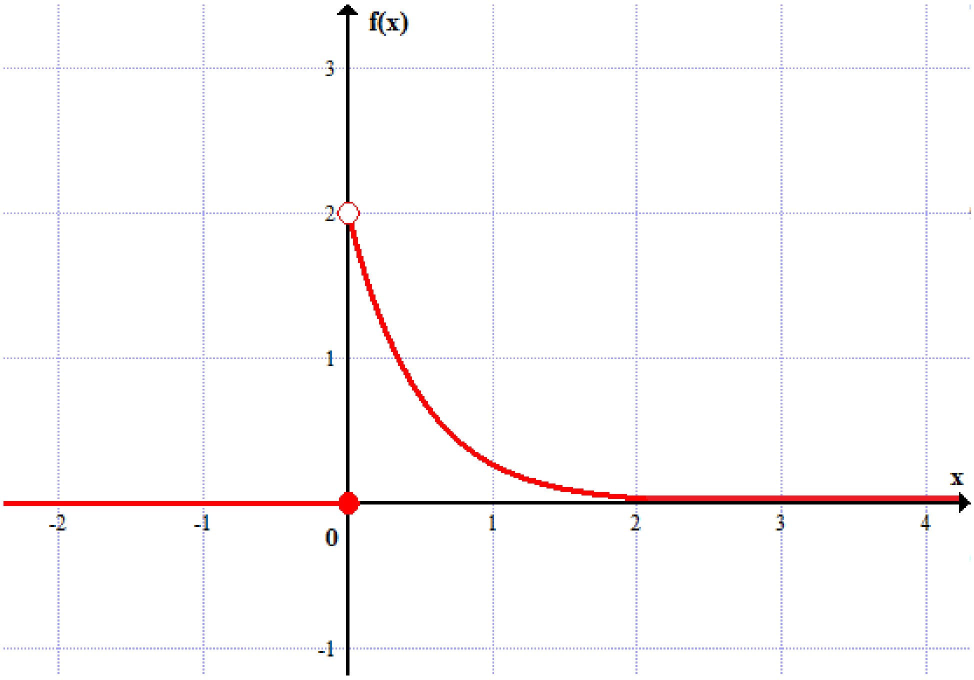
5. Ze získaných údajů již můžeme snadno načrtnout graf funkce.



Obrázek 3: Graf hustoty exponenciálního rozdělení pro obecné λ

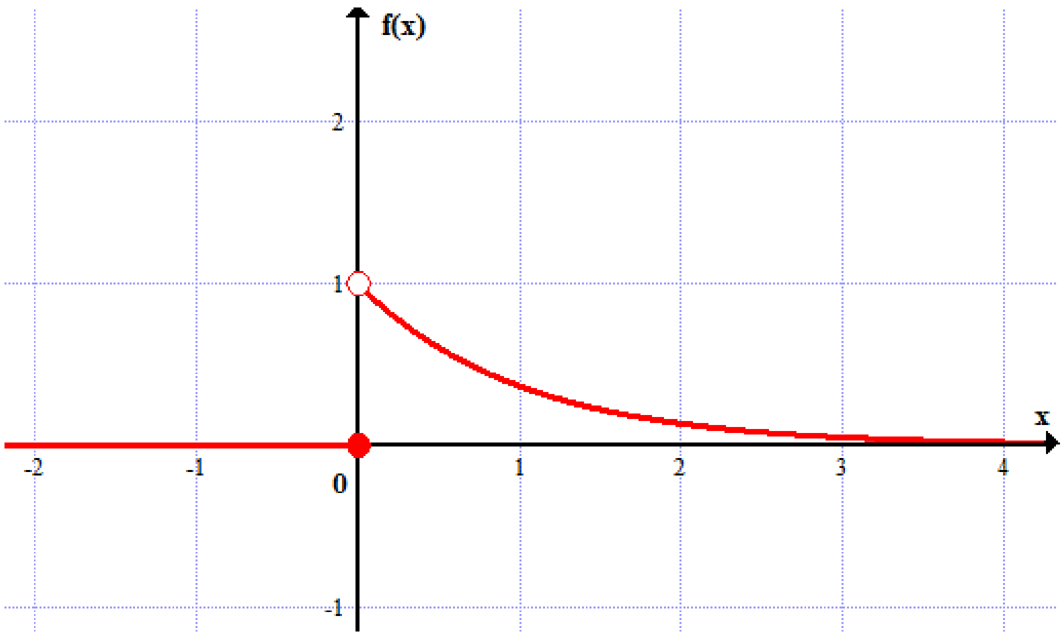
Pro představu si uvedeme další grafy této funkce, které odpovídají různým hodnotám parametru λ:

a) $\lambda = \frac{1}{2}$



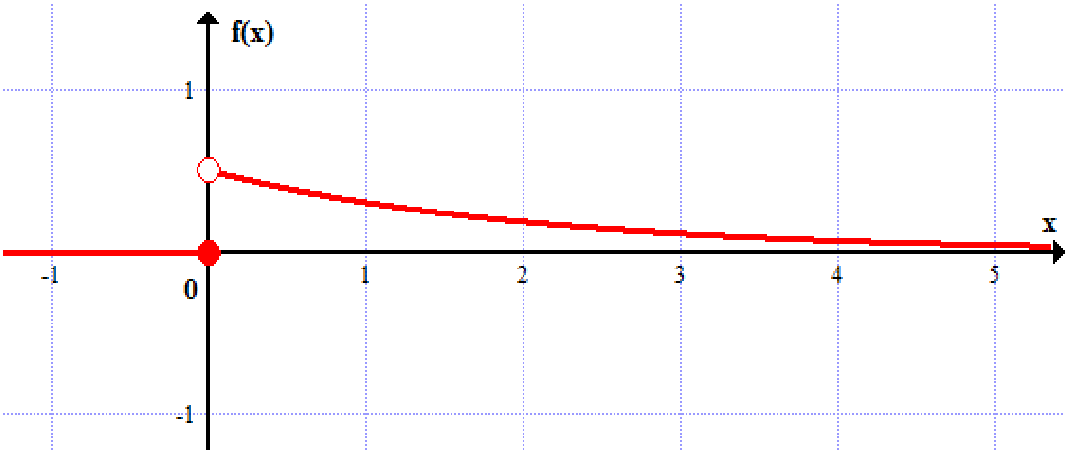
Obrázek 4: Graf hustoty exponenciálního rozdělení pro $\lambda = \frac{1}{2}$

b) $\lambda = 1$



Obrázek 5: Graf hustoty exponenciálního rozdělení pro λ = 1

c) $\lambda = 2$



Obrázek 6: Graf hustoty exponenciálního rozdělení pro λ = 2

2.3 χ^2-rozdělení

χ^2-rozdělení je absolutně spojité rozdělení pravděpodobnosti, které má široké uplatnění v teoretické statistice. Jedná se o rozdělení odvozené z normálního rozdělení. Používáme ho k testování nezávislosti náhodných veličin nebo k ověření jsou-li dva či více výběrů homogenní vzhledem k jisté veličině (např. posuzujeme-li, zda politické názory obyvatel jsou různé v různých regionech apod.). Pokud zkoumáme, jestli náhodné veličiny pocházejí z určitého rozdělení, můžeme použít χ^2-rozdělení. Tento test je nám znám pod názvem *Test dobré shody*.

Věta 10. Nechť $\mathrm{X}_1,\ldots\ldots,\mathrm{X}_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny, $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{X}_i \sim \mathrm{N}(0;\ 1)$, $\forall i = 1,\ldots\ldots, n$. Náhodná veličina $\mathrm{Y}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i^2$ má hustotu

$$g_n(x) = \begin{cases} 0, & pro\ x \leq 0, \\ \dfrac{x^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, & pro\ x > 0. \end{cases}$$

Funkce g_n je *hustotou* tzv. χ^2-rozdělení o n stupních volnosti, kde $n \in \mathbb{N}$ je parametr tohoto rozdělení.

Vzhledem k odlišnosti průběhu funkce pro různé hodnoty parametru n, které jsou kvalitativně jiné, budeme funkci g_n vyšetřovat zvlášť pro hodnoty $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ a $n > 4$:

a) Nejdříve uvažujeme parametr $n = 1$, tj. funkci danou předpisem

$$g_1(x) = \begin{cases} 0, & pro\ x \le 0, \\ \dfrac{x^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{2\pi}} = \dfrac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{2\pi x}}, & pro\ x > 0. \end{cases}$$

1. Definiční obor $D(g_1) = \mathbb{R}$. Funkce není sudá ani lichá, což plyne např. z toho, že $g_1(-1) = 0$ a $g_1(1) > 0$, tzv. neplatí ani $g_1(-1) = g_1(1)$ ani $g_1(-1) = -g_1(1)$. Průsečíky s osou x vypočítáme z rovnice

$$g_1(x) = 0 \text{ na } (0;\ \infty),$$

což je ekvivalentní s

$$\frac{x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{2\pi}} = 0.$$

Protože jmenovatel $\sqrt{2\pi}$ je kladná konstanta a výraz $e^{-\frac{x}{2}}$ nabývá pro každé x kladných hodnot, stačí jen vyřešit

$$x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$$

Funkce $g_1(x)$ nemá žádné průsečíky s osou x, jelikož výše uvedená rovnice nemá řešení, neboť

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \neq 0.$$

Průsečíky s osou y nemá smysl vyšetřovat, protože $x > 0$.
Při určování znaménka funkce vyjdeme z toho, že

$$g_1(x) = \frac{x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{2\pi}} > 0,$$

tzn. funkce g_1 je kladná pro $x > 0$.

2. Nyní vypočítáme limity funkce v bodech nespojitosti a na hranici definičního oboru. V našem případě pouze v bodech 0^+ a ∞. Přímým výpočtem dostaneme

$$\lim_{x \to 0^+} g_1(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Konstantu $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ lze vytknout před limitu, a tedy stačí pouze spočítat

$$\lim_{x \to 0^+} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}.$$

Abychom dospěli ke správnému výsledku, budeme uvažovat hned několik situací. Nejdříve si vypočítáme hodnotu $\lim_{x \to 0^+} x^{-\frac{1}{2}}$, tj.

$$\lim_{x\to 0^+} x^{-\frac{1}{2}} = \infty.$$

Dále při výpočtu využijeme toho, že $\lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = 1$. Teď je již snadné dopočítat, že

$$\lim_{x\to 0^+} g_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{x\to 0^+} x^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\infty \times 1) = \infty.$$

Při výpočtu $\lim_{x\to\infty} g_1(x)$ budeme postupovat obdobně jako v předchozím výpočtu. Platí

$$\lim_{x\to\infty} g_1(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{x\to\infty} x^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = 0 \times 0 = 0.$$

Z výše uvedeného vyplývá, že v bodě ∞ resp. $-\infty$ existují asymptoty se směrnicí o rovnici $y = 0$. Funkce g_1 má vertikální asymptotu o rovnici $x = 0$.

3. Abychom našli intervaly ryzí monotonie a lokální extrémy funkce g_1, vypočítáme její první derivaci a určíme její definiční obor. Platí

$$g'_1(x) = \left(\frac{x^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \right)' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{1}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \left(-\frac{1}{2}\right) \right] =$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{1}{2} - \frac{x}{2}\right) = -\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2\pi}} (x+1), \ x > 0.$$

Pro nalezení stacionárních bodů funkce g_1 řešíme rovnici $g'_1(x) = 0$, tj.

$$-\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2\pi}} (x+1) = 0.$$

Rovnici si zjednodušíme tak, že zápornou konstantu $-2\sqrt{2\pi}$ a součin funkcí $\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{3}{2}}$, který nabývá vždy kladných hodnot, převedeme na pravou stranu rovnice. Upravená rovnice má následující tvar

$$x + 1 = 0.$$

Řešením rovnice je $x = -1$. Protože se omezujeme pouze na interval $(0;\ \infty)$, funkce g_1 nemá žádný stacionární bod.

Znaménko první derivace je záporné, protože pro $x > 0$ je čitatel $\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{x+1}{2}\right)$ vždy kladný a po jeho vynásobení zápornou konstantou $-\sqrt{2\pi}$ dostáváme záporné znaménko, tzn. $g'_1(x) < 0$. Funkce g_1 je klesající a nemá žádný lokální extrém na intervalu $(0;\ \infty)$.

4. Druhá derivace funkce g_1 je

$$g''_1(x) = \left[-\frac{e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2\pi}}(x+1)\right]' = \left[-\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2\sqrt{2\pi}}\left(x^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}\right)\right]' =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left[\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)'\left(x^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}\right)+e^{-\frac{x}{2}}\left(x^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}\right)'\right] =$$

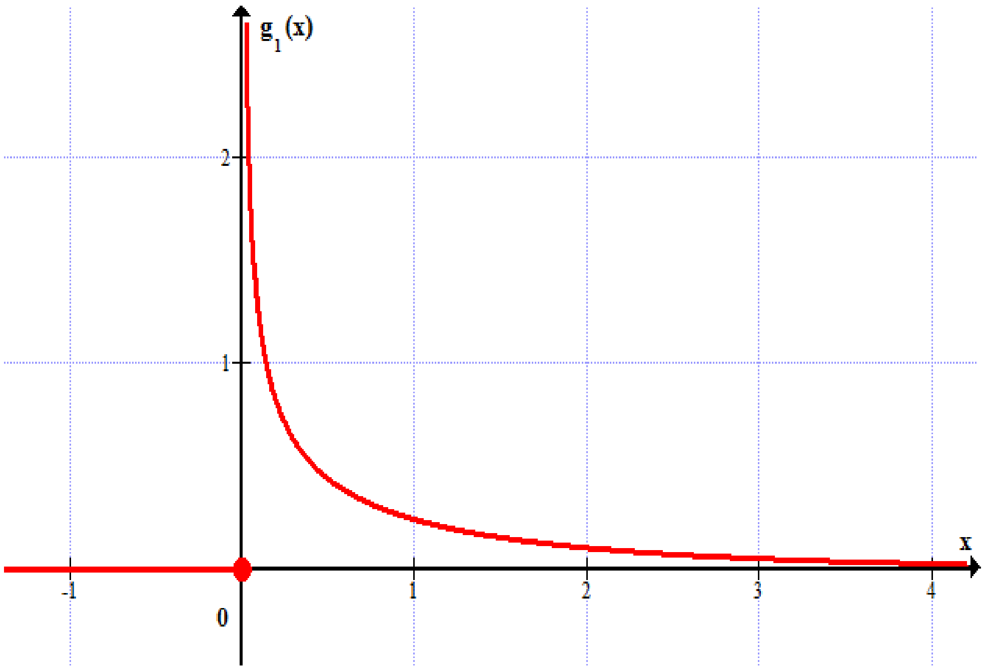
$$= -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left\{\left[\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}\left(x^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}\right)+e^{-\frac{x}{2}}\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}\right)\right]\right\} = \frac{e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{5}{2}}}{4\sqrt{2\pi}}(x^2+2x+3).$$

Z vypočítané druhé derivace jde vidět, že znaménko $g''_1(x)$ je kladné, tzn.

$$\frac{e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{5}{2}}}{4\sqrt{2\pi}}(x^2+2x+3) > 0.$$

Funkce g_1 nemá žádné inflexní body a je konvexní na intervalu $(0;\ \infty)$.

5. Na závěr zkombinujeme všechny předchozí výpočty a obdržíme graf funkce g_1.



Obrázek 7: Graf hustoty χ^2-rozdělení pro n = 1

b) Nyní uvažujeme $n = 2$, tedy funkci mající předpis

$$g_2(x) = \begin{cases} 0, & pro\ x\ \leq 0, \\ \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2}, & pro\ x\ >\ 0. \end{cases}$$

1. $D(g_2) = \mathbb{R}$. Funkce není sudá ani lichá, což plyne např. z toho, že $g_2(-2) = 0$ a $g_2(2) > 0$.

Jelikož $e^{-\frac{x}{2}} \neq 0$, funkce nemá žádné průsečíky s osou x na $(0;\ \infty)$. Funkce g_2 je kladná pro $x > 0$, protože výraz $e^{-\frac{x}{2}}$ nabývá vždy kladných hodnot.

2. Vypočítané limity funkce v bodech nespojitosti a krajních bodech definičního oboru, tedy v bodech 0^+ a ∞, jsou následující

$$\lim_{x\to 0^+} g_2\,(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{a } \lim_{x\to \infty} g_2\,(x) = \lim_{x\to \infty} \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to \infty} e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \times 0 = 0.$$

Z konečnosti limity v nevlastním bodě ∞ vyplývá, že funkce má v tomto bodě asymptotu se směrnicí o rovnici $y = 0$. Protože limita v bodě 0^+ je vlastní, funkce g_2 nemá vertikální asymptoty.

3. První derivace odpovídá výrazu

$$g'_2(x) = -\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}},\ x > 0.$$

Její znaménko je záporné, a proto je funkce $g'_2(x)$ klesající na intervalu $(0;\ \infty)$. Funkce nemá žádné stacionární body.

4. Vypočítáme druhou derivaci

$$g''_2(x) = \frac{1}{8}e^{-\frac{x}{2}},\ D(g''_2) = (0;\ \infty).$$

Uvažovaná funkce nemá žádné inflexní body. Dále platí, že funkce g_2 je na intervalu $(0;\ \infty)$ konvexní, protože znaménko druhé derivace je kladné.

5. Graf funkce g_2 je na obrázku.

Obrázek 8: Graf hustoty χ^2-rozdělení pro n = 2

c) Uvažujeme $n = 3$, tedy funkci mající předpis

$$g_3(x) = \begin{cases} 0, & pro\ x \le 0, \\ \dfrac{e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \dfrac{e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}}, & pro\ x > 0. \end{cases}$$

1. $D(g_3) = \mathbb{R}$. Funkce není sudá ani lichá, což plyne např. z toho, že $g_3(-1) \neq g_3(1)$ ani $g_3(-1) \neq -g_3(1)$.

Funkce nemá žádné průsečíky s osou x na $(0;\ \infty)$, protože řešení rovnice

$$x^{\frac{1}{2}} = 0$$

nepatří do intervalu $(0;\ \infty)$. Z předpisu $g_3(x)$ jde vidět, že funkce je kladná pro $x > 0$.

2. Určíme limity funkce v krajních bodech vyšetřovaného intervalu. Platí

$$\lim_{x\to 0^+} g_3\,(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (1 \times 0) = 0$$

$$\text{a } \lim_{x\to \infty} g_3\,(x) = \lim_{x\to \infty} \frac{e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{x\to \infty} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{1}{2}} = 0 \times \infty = 0.$$

Z výše uvedeného vyplývá, že v bodě ∞ existuje asymptota se směrnicí o rovnici $y = 0$. Protože limita v bodě 0^+ je vlastní, funkce g_3 nemá vertikální asymptoty.

3. První derivace má tvar

$$g'_3(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} \left(x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right),\ x > 0.$$

Pro nalezení stacionárních bodů funkce g_3 řešíme rovnici $g'_3(x) = 0$ na intervalu $(0, \infty)$, tj.

$$\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} (x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}) = 0.$$

Rovnici si zjednodušíme tak, že funkci $\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}}$, která nabývá vždy kladných hodnot, převedeme na pravou stranu rovnice. Po úpravě má následující tvar

$$(x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}) = 0.$$

Řešením rovnice je $x = 1$. Pomocí stacionárního bodu rozdělíme definiční obor funkce g_3 na dva intervaly $(0;\ 1)$ a $(1;\ \infty)$. Dále určíme na jaké množině je funkce klesající, tj.

$$\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} (x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}) < 0.$$

Dostáváme tedy, že $x > 1$. Na intervalu $(0;\ 1)$ je funkce g'_3 kladná, tudíž funkce g_3 je rostoucí na $(0;\ 1)$. Výsledky zapíšeme do následující tabulky.

Interval:	$(0;\ 1)$	$(1;\ \infty)$
Znaménko $g'_3(x)$	$+$	$-$

Tabulka 3: Znaménko první derivace

Funkce g_3 má v bodě 1 lokální maximum s hodnotou $\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$, protože g'_3 mění při průchodu stacionárním bodem znaménko.

4. Druhá derivace funkce g_3 je

$$g''_3(x) = \left[\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right)\right]' = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left[\left(\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right)'\left(x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right) + \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right)'\right] =$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{4\sqrt{2\pi}}\left(x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{3}{2}}\right) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{3}{2}}}{4\sqrt{2\pi}}\left(x^2 - 2x - 1\right),\ x > 0.$$

Při hledání inflexních bodů řešíme rovnici

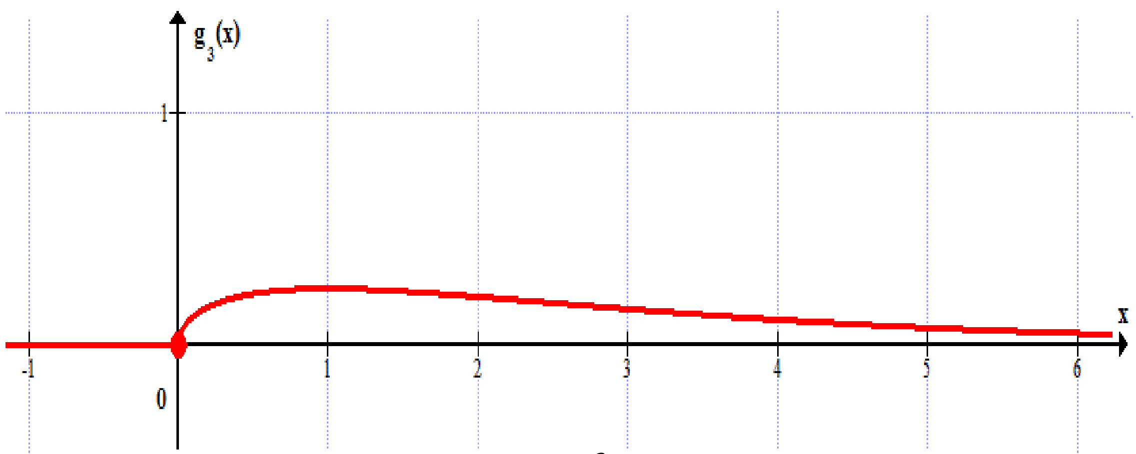
$$\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{3}{2}}}{4\sqrt{2\pi}}\left(x^2 - 2x - 1\right) = 0.$$

Na intervalu $(0;\ \infty)$ je řešením rovnice $x = 1 + \sqrt{2}$, které rozděluje $D(g''_3)$ na dva intervaly $(0;\ 1 + \sqrt{2})$ a $(1 + \sqrt{2};\ \infty)$. Při určování, kdy je funkce konvexní a konkávní postupujeme obdobně jako v předchozích příkladech. Výsledky si opět zapíšeme do tabulky.

Interval:	$(0;\ 1 + \sqrt{2})$	$(1 + \sqrt{2};\ \infty)$
Znaménko $g''_3(x)$	$-$	$+$

Tabulka 4: Znaménko druhé derivace

5. Graf funkce g_3 je



Obrázek 9: Graf hustoty χ^2-rozdělení pro n = 3

d) Pro $n > 3$ dostáváme předpis funkce

$$g_n(x) = \begin{cases} 0, & pro\ x \leq 0, \\ \dfrac{x^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, & pro\ x > 0. \end{cases}$$

1. Definiční obor g_n je množina všech reálných čísel, tzn. $D(g_n) = \mathbb{R}$. Funkce není sudá ani lichá pro každé $n > 3$, $n \in \mathbb{N}$, což plyne např. z toho, že $g_n(-1) \neq g_n(1)$ ani $g_n(-1) \neq -g_n(1)$.

Průsečíky s osou *x* vypočítáme z rovnice

$$g_n(x) = 0 \text{ na } (0;\ \infty),$$

což je ekvivalentní s

$$\frac{x^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = 0.$$

Jmenovatel $2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ je kladná konstanta a výraz $\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ nabývá vždy kladných hodnot, a proto stačí pouze řešit

$$x^{\frac{n}{2}-1} = 0.$$

Jelikož $x > 0$, pak také $x^{\frac{n}{2}-1} > 0$. Funkce g_n nemá žádné průsečíky s osou *x* a navíc funkce g_n je kladná.

2. Nyní vypočítáme limity funkce v krajních bodech vyšetřovaného intervalu, tj. v bodech 0^+ a ∞. Snadno spočítáme

$$\lim_{x\to 0^+} g_n(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}.$$

Dále si stačí uvědomit, že $\lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = 1$ a hodnota $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{n}{2}-1}$ pro libovolné $n > 3$ je nula, protože $\frac{n}{2} - 1 > 0$. Nakonec tedy

$$\lim_{x\to 0^+} g_n(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}(0 \times 1) = 0.$$

Při výpočtu limity $\lim_{x\to\infty} g_n(x)$ budeme postupovat obdobně jako v předchozím výpočtu. Platí

$$\lim_{x\to\infty} g_n(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \lim_{x\to\infty} x^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}.$$

Přitom víme, že $\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = 0$ a $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{n}{2}-1} = \infty$. Dostáváme tedy neurčitý výraz "$\infty \times 0$", který si přepíšeme do tvaru

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}} = "\frac{\infty}{\infty}".$$

V tomto případě je splněna jedna z podmínek použití L'Hospitalova pravidla. Zlomek rozšíříme výrazem x^n a dále upravíme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}} \frac{x^n}{x^n} = \lim_{x\to\infty} x^{\left(\frac{n}{2}-1-n\right)} \frac{x^n}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}} x^{\frac{-2-n}{2}}.$$

Vypočítáme si jednotlivé limity. Platí, že

a) $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{-2-n}{2}} = "\left[\infty^{\frac{-2-n}{2}}\right]" = 0$, protože výraz $\frac{-2-n}{2}$ je vždy záporný,

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}$, do níž dosadíme proměnnou x, je rovna neurčitému výrazu "$\frac{\infty}{\infty}$". S využitím L'Hospitalova pravidla dostáváme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}} =^{l'H} \lim_{x\to\infty} 2n \frac{x^{n-1}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}} =^{l'H} \lim_{x\to\infty} 4n(n-1) \frac{x^{n-2}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}} =^{l'H} \ldots =^{l'H} \lim_{x\to\infty} 2^n \frac{n!}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}} = 0.$$

Z výše popsaného postupu získáváme, že $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{-2-n}{2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}} = 0 \times 0 = 0$. Pro parametry $n > 3$, z uvedeného vyplývá, že v bodě ∞ resp. $-\infty$ existují asymptoty se směrnicí o rovnici $x = 0$. Funkce nemá vertikální asymptoty, protože limita v bodě 0 je vlastní.

3. Pro první derivaci funkce g_n platí

$$g'_n(x) = \left[\frac{x^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\right]' = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left[\left(\frac{n}{2}-1\right) x^{\frac{n}{2}-2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + x^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-2}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{n}{2} - \frac{x}{2} - 1\right) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-2}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{n-x-2}{2}\right), x > 0.$$

Při hledání stacionárních bodů funkce g_n na intervalu $(0; \infty)$, řešíme rovnici

$$\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-2}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{n-x-2}{2}\right) = 0,$$

kterou lze upravit na $\frac{e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{n}{2}-2}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}(n-x-2)=0.$

Kladnou konstantu $2^{\frac{n}{2}+1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ a součin funkcí $e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{n}{2}-2}$ pro $x\ >0$, které nabývají vždy kladných hodnot, převedeme na pravou stranu rovnice. Zjednodušená rovnice má následující tvar

$$n-2-x=0.$$

Řešení je $x=n-2$, protože $n>2$, jde o kladné řešení. Určíme na jaké množině je funkce rostoucí, tj. řešíme nerovnici

$$g'_n(x)\ >0.$$

Postup výpočtu je obdobný jako u hledání stacionárních bodů. Řešením nerovnice je $n-2-x>0$, což je ekvivalentní s $x<n-2$, tzn. $x\in(0;\,n-2)$. Funkce g_n je rostoucí na $(0;\,n-2)$ a klesající na intervalu $(n-2;\,\infty)$. Protože derivace funkce mění při průchodu přes bod $n-2$ znaménko, má v bodě $n-2$ lokální maximum s hodnotou $\frac{(n-2)^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{n-2}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$.

4. Druhá derivace funkce je

$$g''_n(x)=\left[\frac{e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{n}{2}-2}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{n-x-2}{2}\right)\right]'=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}+1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left[\left(e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{n}{2}-2}\right)'(n-x-2)+(e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{n}{2}-2})(n-x-2)'\right]=$$

$$=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}+1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left\{\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)x^{\frac{n}{2}-2}e^{-\frac{x}{2}}+x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)\right](n-x-2)-(e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{n}{2}-2})\right\},$$

$$D(g''_n)=(0;\ \infty).$$

Vyšetříme body podezřelé z inflexe, tj. body $x>0$ splňující rovnici $g''_n(x)=0$, a tedy

$$\frac{1}{2^{\frac{n}{2}+1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left\{\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)x^{\frac{n}{2}-2}e^{-\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}\right](n-x-2)-(e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{n}{2}-2})\right\}=0.$$

Rovnici upravíme tak, že kladnou konstantu $2^{\frac{n}{2}+1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ násobíme nulou a roznásobíme všechny závorky a vytkneme výraz $\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{n}{2}-2}$. Výsledkem je

$$\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{n}{2}-2}(n^2-2nx-4n+x^2+4x+2)=0.$$

Výraz $\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{n}{2}-2}$ převedeme na pravou stranu rovnice a dostáváme

$$n^2 - 2nx - 4n + x^2 + 4x + 2 = 0,$$

což je ekvivalentní s

$$(n - x - 2)^2 - 2 = 0.$$

Řešením rovnice je $x = n + \sqrt{2} - 2$ a $x = n - \sqrt{2} - 2$.

Dále určíme na jaké množině je funkce konvexní, tj. řešíme nerovnici

$$g''_n(x) > 0.$$

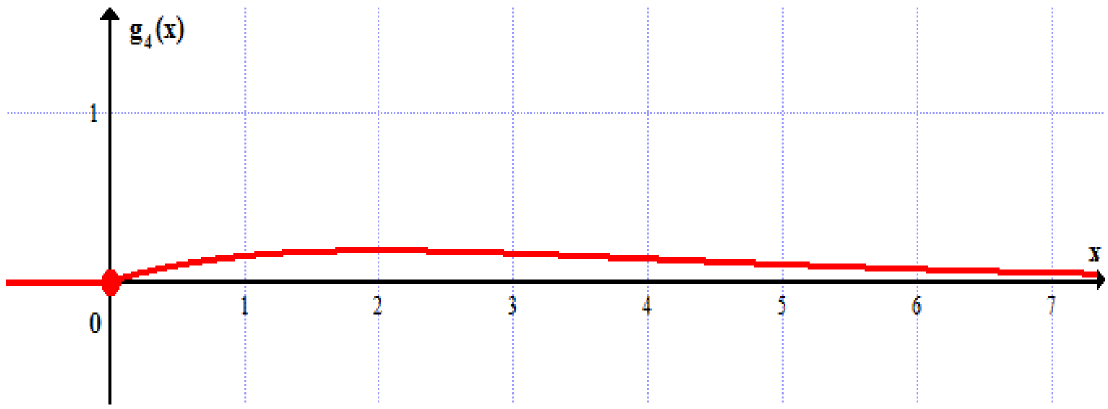
Při vyšetřování nerovnice postupujeme obdobně jako při hledání inflexních bodů. Řešením je tedy $x > n + \sqrt{2} - 2$ a $x > n - \sqrt{2} - 2$. Pro lepší orientaci si výsledky pro parametr $n > 3$ zapíšeme do tabulky.

Interval:	$(0; n - \sqrt{2} - 2)$	$(n - \sqrt{2} - 2;\ n + \sqrt{2} - 2)$	$(n + \sqrt{2} - 2; \infty)$
Znaménko $g''_n(x)$	$+$	$-$	$+$

Tabulka 5: Znaménko druhé derivace

Z tabulky 5 je zřejmé, že funkce je konkávní na intervalu $(n - \sqrt{2} - 2;\ n + \sqrt{2} - 2)$, konvexní na intervalu $(0;\ n - \sqrt{2} - 2)$ a $(n + \sqrt{2} - 2;\ \infty)$.

5. Nyní zkombinujeme všechny předchozí výpočty a ukážeme si, jak vypadá graf funkce g_4.



Obrázek 10: Graf hustoty χ^2-rozdělení pro n = 4

Závěr

Cílem této práce bylo seznámit čtenáře s vyšetřováním průběhu některých důležitých funkcí vyskytujících se v teorii pravděpodobnosti a statistice.

V první části bakalářské práce jsem se především zaměřila na teoretickou stránku problému. Vysvětlila jsem základní vlastnosti průběhu funkce a uvedla nejdůležitější definice a věty z této problematiky.

V druhé části jsem řešila průběhy hustot třech absolutně spojitých rozdělení. Konkrétně se jedná o normální, exponenciální a χ^2-rozdělení. Samozřejmě existuje mnohem více rozdělení pravděpodobnosti, se kterými se můžeme setkat v teorii pravděpodobnosti a statistice, ale doporučený rozsah této práce nedovoluje věnovat pozornost všem. V jednotlivých příkladech jsem stručně nastínila využití těchto rozdělení pravděpodobnosti v praxi. Podrobněji jsem prozkoumala jednotlivé vlastnosti vyšetřovaných funkcí, na základě kterých jsem následně sestrojila výsledný graf. Při řešení problému jsem používala matematický software Wolfram Alpha. Největší výhodou programu je, že poměrně rychle dokáže vypočítat různé číselné vyjádření a nakreslit graf. Sama jsem se ale přesvědčila, že pokud máme složitější předpis funkce, který závisí hned na několika parametrech, tak jako je tomu u χ^2-rozdělení, je potřeba velké opatrnosti a v některých případech se nedá použít.

Bakalářskou práci jsem vypracovávala se zájmem a zaujetím. Nejen, že jsem si oprášila svoje znalosti z oblasti průběhu funkce, pravděpodobnosti a statistiky, ale získala i mnoho nových. Dále jsem si prohloubila znalosti práce s matematickým softwarem a zvýšila efektivitu při práci s literaturou. Téma bylo pro mě velmi přínosné a potvrdila jsem si, že moje volba byla správná.

Doufám, že se mi podařilo zpracovat danou problematiku srozumitelným a přehledným způsobem, který dovolí čtenáři pochopit danou oblast bez větších nesnází.

Použitá literatura

[1] Kouřilová, P., Pavlačková, M.: *Základy matematické analýzy a jejich aplikace v ekonomii*, 1. vydání. Olomouc: Vydavatelství UP, 2013.

[2] Mádrová, V., Marek, J., *Sborník úloh z diferenciálního počtu v R*, 1. vydání. Olomouc: Vydavatelství UP, 2013.

[3] Přednášky z předmětu M1N [online], dostupné z: http://elearning-math.upol.cz/course/view.php?id=160, [citováno 15.3.2015]

[4] Přednášky z předmětu M2N [online], dostupné z: http://elearning-http://elearning-math.upol.cz/course/view.php?id=178, [citováno 25.3.2015]

[5] Hron, K., Kunderová, P.: *Základy počtu pravděpodobnosti a metod matematické statistiky*, 1. vydání. Olomouc: Vydavatelství UP, 2013.

[6] Kunderová, P.: *Úvod do teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky*, 2. vydání. Olomouc: Vydavatelství UP, 2004.

[7] Vošický, Z.: *Matematika v kostce pro střední školy*, 1. vydání. Fragment, 2007.

[8] Exponenciální rozdělení [online], dostupné z: http://iastat.vse.cz/Exponenc.htm, [citováno 14.2.2016]

[9] Chí-kvadrát rozdělení [online], dostupné z: http://iastat.vse.cz/CHikvadr.htm [citováno 23.2.2016]

[10] Průběh funkce [online], dostupné z: stavskola.cz:8091/granty/prezentace/prubeh funkce.ppt, [citováno 15.11.2015]