

Česká zemědělská univerzita v Praze

Provozně ekonomická fakulta

Katedra systémového inženýrství



Bakalářská práce

Návrh optimálních tras pro techniku údržby ulic

Ivan Evdokimov

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Ivan Evdokimov

Systémové inženýrství a informatika

Systémové inženýrství

Název práce

Návrh optimálních tras pro techniku údržby ulic

Název anglicky

Optimal route proposal for road maintenance vehicles

Cíle práce

Cílem této bakalářské práce je navrhnout optimální trasy pro techniku údržby ulic pro státní podnik města Moskvy "GBU Avtomobilnye Dorogi" na úseku ve středu města. Optimální trasa zde znamená nejkratší a co možná nejmeně nákladnou trasu, která by odpovídala požadavkům podniku ohledně doby údržby a druhů techniky na trase.

Metodika

První teoretická část bakalářské práce bude zahrnovat přehled teoretických východisek práce včetně základů teorie grafů, zejména v souvislosti s problémem čínského listonoše. Dále budou uvedeny hlavní druhy problému čínského listonoše a algoritmy jejich řešení.

Druhá praktická část práce bude obsahovat analýzu zkoumaného úseku údržby ulic, analýzu existujícího plánu tras techniky na daném úseku, samotný návrh optimálního plánu a jeho srovnání s již existujícím plánem.

Doporučený rozsah práce

30 – 40 stran

Klíčová slova

optimalizace, problém čínského listonoše, trasy, udržba ulic

Doporučené zdroje informací

EDMONDS, Jack, JOHNSON, Ellis L. Matching, Euler Tours and the Chinese Postman. Mathematical Programming, 1973, Volume 5, Issue 1, p. 88-124. ISSN 0025-5610.

GIBBONS, Alan. Algorithmic Graph Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. ISBN 0-521-28881-9.

ŠUBRT, Tomáš et al. Ekonomicko-matematické metody. 2. vyd. Plzeň: Aleš Čeněk, 2015. 331 s. ISBN 978-80-7380-563-0.

Předběžný termín obhajoby

2020/21 LS – PEF

Vedoucí práce

RNDr. Petr Kučera, Ph.D.

Garantující pracoviště

Katedra systémového inženýrství

Elektronicky schváleno dne 29. 10. 2020

doc. Ing. Tomáš Šubrt, Ph.D.

Vedoucí katedry

Elektronicky schváleno dne 5. 11. 2020

Ing. Martin Pelikán, Ph.D.

Děkan

V Praze dne 28. 11. 2020

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že svou bakalářskou práci "Návrh optimálních tras pro techniku údržby ulic" jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou citovány v práci a uvedeny v seznamu použitých zdrojů na konci práce. Jako autor uvedené bakalářské práce dále prohlašuji, že jsem v souvislosti s jejím vytvořením neporušil autorská práva třetích osob.

V Praze dne 14.03.2021

Poděkování

Rád bych touto cestou poděkoval panu RNDr. Petru Kučerovi, Ph.D. za odborné vedení, cenné rady a připomínky, které byly nezbytné pro tvorbu této práce, a své rodině za pomoc a podporu.

Návrh optimálních tras pro techniku údržby ulic

Abstrakt

Bakalářská práce „Návrh optimálních tras pro techniku údržby ulic“ pojednává o problému čínského listonoše a uplatnění metod řešení tohoto problému na konkrétní úlohu plánování tras uklízací techniky. Pro účely výzkumu byl zvolen jeden z obsluhovaných obecním podnikem úseků drah, který se nachází ve středu města Moskvy. Cílem práce je nabídnout ekonomicky a časově optimální plán tras uklízací techniky na vybraném úseku drah.

Teoretická část práce je věnována zejména problému čínského listonoše, jeho klasifikaci a algoritmům řešení jednotlivých podtypů problému.

Praktická část obsahuje řešení problému čínského listonoše na daném úseku tras pomocí Edmonds-Johnsonovy metodiky. Po řešení tohoto problému následuje návrh tras provedený s použitím heuristického algoritmu FHK pro min-max k-problém čínského listonoše. Navržené plány tras jsou potom srovnány se skutečně používaným v podniku plánem tras.

Klíčová slova: problém čínského listonoše, min-max k-problém čínského listonoše, údržba drah, optimalizace, trasa, heuristické metody

Optimal route proposal for road maintenance vehicles

Abstract

This bachelor thesis, “Optimal route proposal for road maintenance vehicles”, concerns the Chinese Postman problem and the application of its solution methods to a specific route planning task. For the purposes of this research, a section of roads in the center of Moscow has been chosen. The said section is serviced by a municipal road maintenance company. The objective of this work is offering a route plan for maintenance vehicles on the given road section that would be optimal from economical and temporal standpoints.

The theoretical part of this work is focused on the Chinese Postman problem, its classification, and the algorithms for solving individual subtypes of the problem.

The practical part contains the solution of the Chinese Postman problem as applied to the given road section according to the method introduced by Edmonds and Johnson. The solution is followed by specific route plans created using the Frederickson-Hecht-Kim min-max k-CPP heuristic algorithm. The proposed route plans are then compared with the actual route plan used by the company.

Keywords: Chinese Postman problem, min-max k-Chinese Postman problem, road maintenance, optimization, route, heuristics

Obsah

| | |
|---|----|
| 1. Úvod..... | 11 |
| 2. Cíl práce a metodika | 13 |
| 2.1. Cíl práce..... | 13 |
| 2.2. Metodika..... | 13 |
| 3. Teoretická východiska | 14 |
| 3.1. Obecná problematika údržby drah..... | 14 |
| 3.2. Teorie grafů | 15 |
| 3.2.1. Základní pojmy..... | 15 |
| 3.2.2. Problém čínského listonoše | 16 |
| 3.2.3. Floyd-Warshallův algoritmus pro nalezení nejkratších cest..... | 23 |
| 3.2.4. Přiřazovací úloha | 25 |
| 4. Vlastní práce | 29 |
| 4.1. Charakteristika podniku..... | 29 |
| 4.1.1. Podnikové požadavky..... | 29 |
| 4.2. Řešený problém čínského listonoše..... | 30 |
| 4.2.1. Nalezení 1-cyklu čínského listonoše | 34 |
| 4.2.2. Nalezení 3-min-max-cyklů čínského listonoše heuristikou FHK..... | 38 |
| 4.3. Analýza tras podniku a srovnání s navrženými trasami..... | 43 |
| 4.3.1. Analýza tras podniku..... | 43 |
| 4.3.2. Srovnání navržených plánů s plánem podniku | 45 |
| 5. Závěr | 47 |
| 6. Seznam použitých zdrojů | 49 |

Seznam obrázků a tabulek

| | |
|--|----|
| Obrázek 1 – neohodnocený neorientovaný graf a jeho symetrická matice sousednosti | 16 |
| Obrázek 2 - ohodnocený orientovaný graf a jeho matice sousednosti | 16 |
| Obrázek 3 – „dostavba“ výchozího grafu na graf obsahující eulerovskou cestu | 17 |
| Obrázek 4 – „dostavba“ výchozího grafu na graf obsahující eulerovský cyklus..... | 18 |
| Obrázek 5 – schématické znázornění 3. kroku algoritmu FHK | 21 |
| Obrázek 6 - přeměna \underline{G} na \underline{G}' pro účely řešení WPP..... | 21 |
| Obrázek 7 - graf \underline{Y} | 24 |
| Obrázek 8 - graf \underline{H} | 26 |
| Obrázek 9 – Podnikové technologické schéma úklidu ODCh v zimní období..... | 30 |
| Obrázek 10 – uklízené ulice na satelitním snímku města Moskvy | 31 |
| Obrázek 11 - graf \underline{G} | 33 |

| | |
|---|----|
| Obrázek 12 – graf G' obsahující Eulerovský cyklus | 38 |
| Obrázek 13 – graf P s grafickou reprezentací tras podniku..... | 43 |
| Tabulka 1 – výpočty pro 1. iteraci algoritmu F-W | 24 |
| Tabulka 2 – výchozí matice C s nejkratšími cestami od v_i do v_j | 27 |
| Tabulka 3 – primární redukce matice C na matici C_i | 27 |
| Tabulka 4 – C_i po dosažení krycí čáry..... | 27 |
| Tabulka 5 – začátek sekundární redukce pro matici R | 28 |
| Tabulka 6 – matice R po sekundární redukci | 28 |
| Tabulka 7 – skutečné polohy a zeměpisné souřadnice vrcholů grafu \underline{G} | 32 |
| Tabulka 8 – matice sousednosti W s váhami hran grafu \underline{G} , m | 33 |
| Tabulka 9 – matice nejkratších cest S | 36 |
| Tabulka 10 – vstupní stupně, výstupní stupně a δ_i jednotlivých uzlů..... | 36 |
| Tabulka 11 – počáteční tabulka pro řešení přiřazovací úlohy maďarskou metodou | 37 |
| Tabulka 12 – tabulka 11 po provedení řádkové redukce..... | 37 |
| Tabulka 13 – tabulka 11 po provedení primární redukce s krycími čáry | 37 |
| Tabulka 14 – tabulka 13 po provedení sekundární redukce | 37 |
| Tabulka 15 - navržené cykly čínského listonoše | 39 |
| Tabulka 16 – výpočet s_{\max} a L_j | 40 |
| Tabulka 17 – hodnoty L_j | 41 |
| Tabulka 18 – určení vrcholů pro rozdělení cesty..... | 41 |
| Tabulka 19 – matice sousednosti B s ohodnoceními jednotlivých hran podle počtu techniky..... | 44 |
| Tabulka 20 – ohodnocení jednotlivých plánů podle délky nejdelší trasy..... | 45 |
| Tabulka 21 – ohodnocení jednotlivých plánů podle sumární vzdálenosti cesty techniky D_s | 45 |
| Tabulka 22 – plány rozdělení ODCh na trasy číslo 2 a 8 | 46 |

1. Úvod

Práce komunálních služeb je v současné době sine qua non podmínkou života ve městě. Zajišťuje funkční chod života městského obyvatelstva, jedná-li se konkrétně o odvoz odpadů, zabezpečení bydlišť vodou, plynem a elektřinou, požární ochranu nebo jakoukoli jinou službu věnovanou zvýšení kvality života obyvatel města. Zejména pro plynulost a funkčnost dopravy za městských podmínek v oblastech se studenějším klimatem jsou nezbytné i komunální služby spojené s uklízením městských ulic od námrazy a sněhu.

Optimalizace práce městských komunálních služeb je často spojována s problémem čínského listonoše. Problém v laické formulaci zní: jakou cestou by musel pohybovat listonoš, aby prošel všemi ulicemi a ušel co nejkratší vzdálenost? Tím pádem, problém čínského listonoše se vztahuje spíše na obsluhování celých ulic nebo městských čtvrtí než jednotlivých zákazníků. Na ohraničeném území existuje množina vyžadujících obsluhu cest. Metody řešení problému čínského listonoše vztaženého na reální území pomáhají pracovníkům najít kratší, což znamená méně nákladnou cestu.

Obecně řečeno, problém čínského listonoše je NP-úplnou úlohou, což znamená, že neexistuje všeobecný přesný algoritmus nalezení optimální cesty čínského listonoše. Nicméně, takové algoritmy existují pro jednotlivé jednodušší podtypy problému čínského listonoše. Složitější podtypy jsou však řešeny nepřesnými heuristickými metodami, které nenacházejí optimální řešení, nýbrž řešení se přibližující optimálnímu. V současné době v odborné literatuře je popsáno velké množství nejrůznějších heuristik a algoritmů pro řešení jednotlivých podtypů problému čínského listonoše. Jako obvykle u aproximačních metod, žádná heuristika nemá všeobecně přednost před nějakou jinou, a různé heuristiky mohou dávat různě dobré výsledky za odlišných podmínek.

V dané práci se budu snažit najít optimální plán tras techniky na daném úseku městských ulic za účelem snížení spotřeby pohonných látek a souvisejících nákladů.

Přínosem této práce za pesimistického předpokladu je ověření efektivity státního podniku. Optimistickým předpokladem je zlepšení skutečně používaného podnikem způsobu úklidu daného úseku silnic. Každopádně táto práce bude obsahovat popisy vybraných optimalizačních metod a podrobně popsané postupy řešení dané úlohy.

V první části práce bude dána teoretická charakteristika problému čínského listonoše a dílčích metod používaných pro jeho řešení, včetně základů teorie grafů. Budou uvedeny i

jednotlivé podtypy problému s vybranými algoritmy jejich řešení. Druhá část práce bude věnována řešení konkrétní úlohy pomocí dvou uvedených v první části metod: přesné Edmonds-Johnsonovy metody a Frederickson-Hecht-Kimovy heuristiky. Po řešení bude obsahovat analýzu skutečné používaného podnikem plánu tras a jeho srovnání s navrženými plány.

Práce je zaměřena na největší možné snížení sumární délky tras a sumární vzdálenosti cesty ujeté podnikovou technikou za účelem minimalizace nákladů podniku. Pomocí vybraných metod bude nalezen optimální plán pohybu techniky minimalizující obě dané vzdálenosti.

2. Cíl práce a metodika

2.1. Cíl práce

Cílem dané práce je návrh optimálního plánu tras pro úklid daného úseku ulic ve středu města Moskvy. Plánem tras se rozumí jedna nebo více tras techniky, které odpovídají veškerým podnikovým požadavkům a procházejí spolu všemi ulicemi v daném úseku. Optimálním plánem se rozumí plán sestavený pomocí vybraných metodik, který má nejmenší sumární délku jednotlivých tras, nejkratší možnou sumární délku pohybu techniky a v nejlepší míře odpovídá jiným případným podnikovým požadavkům. Praktickým přínosem použití optimální trasy by mohlo být snížení nákladu na provedení prací na daném úseku ulic, což by teoreticky snížilo i finanční zátěž na podnikový a tím i obecní rozpočet.

2.2. Metodika

Teoretická část práce byla tvořena se snahou o systematizaci informací o problému čínského listonoše z odborné literatury. Seznam použitých zdrojů je uveden na konci práce. Na začátku praktické části práce bude uvedena stručná charakteristika podniku. Následně budou aplikovány dvě optimalizační metody, z nichž jedna je přesná a druhá aproximační. Tyto metody jsou:

- Edmonds-Johnsonův algoritmus nalezení cesty čínského listonoše;
- Frederickson-Hecht-Kimova heuristika pro řešení min-max k-problému čínského listonoše.

Před aplikací uvedených metod na základě podnikových informací bude vytvořen matematický model úlohy. Matice sousednosti zkoumaného grafu v rámci tohoto modelu bude tvořena pomocí map společnosti Google dostupných na maps.google.com. Po návrhu řešení budou provedeny analýza existujícího plánu tras podniku a srovnání tohoto plánu s plány navrženými v rámci praktické části této práce. Předpokládá se, že alespoň jedno z navržených řešení bude stejně dobré nebo lepší než plán tras současně používaný v podniku.

3. Teoretická východiska

3.1. Obecná problematika údržby drah

Problematiku údržby drah lze zařadit do širší a obecnější problematiky komunálních služeb. Má to nezbytně podstatný vliv na průběh, kritéria a cíle prováděné analýzy, jakož i na rozsah dostupných zdrojů. Komunální služby patří k veřejnému sektoru ekonomiky. Znamená to, že podniky se věnující uskutečnění těchto služeb jsou financovány ze státního nebo obecního rozpočtu a nedobývají ze svých služeb zisk stejným způsobem jako soukromé firmy. Z toho plyne, že cílem optimalizace způsobů uskutečnění komunálních služeb z hlediska podniku není zvýšení zisku. V závislosti na preferencích podniku a obyvatelstva vybraného města se optimalizační práce provádí za účelem buď snížení veřejných nákladů na službu za zachování kvality jejího provedení, nebo za účelem zvýšení kvality obsluhy za minimálního nárůstu nákladů.

Všechno uvedené platí pro konkrétní službu zkoumanou v rámci dané bakalářské práce, tj. údržbu drah v zimním období. Městské cesty musejí být ošetřeny v adekvátním rozsahu a odpovídajícím způsobem pro zachování jejich funkčnosti, a žádné pokusy o snižování nákladů nesmějí být prováděny na úkor těchto prioritám. Na druhé straně, náklady na provedení prací by měly finančně zatěžovat podnik, veřejný rozpočet a tím i občany v co nejmenší míře.

Plánování tras pro účely odstranění sněhu a námrazy z vozovek je úlohou problematickou nejen z výše uvedených důvodů, ale i z technického hlediska. Ve skutečné praxi běžně jde říct, že konkrétní metodiky a výsledky plánování tras by měly záležet na desítkách faktorů, včetně například městské nebo vesnické polohy cesty, charakteru srážek, související infrastruktury, způsobu dalšího odvozu sněhu po očištění vozovek, parkovaných aut po stranách vozovky, et cetera. (Campbell & Langevin, 2000) Autoři citovaného zdroje uvádějí, že vhodnější řešení problému sestavení plánu tras lze dosáhnout použitím specializovaných počítačových systémů.

Vzhledem k nemožnosti použití takového systému v rámci dané bakalářské práce optimalizace bude provedena za předpokladu ceteris paribus: na zkoumaném úseku tras se předpokládají stejné klimatické, dopravní, infrastrukturní a operační podmínky, za kterých existuje současně používaný v podniku plán tras. Předpokládá se zachování stejných druhů techniky na stejných částech zkoumaného úseku tras. Změny v současném podnikovém

plánu budou souviset jenom s posloupnosti procházení částí grafu a s matematickým modelem sestaveným na základě podnikových dat.

3.2. Teorie grafů

3.2.1. Základní pojmy

Podle přesnější definice graf $G = (V, E)$ je uspořádaná dvojice, která se skládá z množiny uzlů V a množiny hran E , přičemž hrana je dvojicí uzlů. Hrana e_i může mít tvar buď neuspořádané dvojice uzlů $\{u, v\}$ nebo uspořádané dvojice (u, v) . Podle obsahu uspořádaných hran grafy se třídí na orientované (tj. obsahující jenom uspořádané hrany), neorientované (obsahující jenom neuspořádané) a částečně orientované. Poslední kategorie grafů se používá vzácně a je obvykle nahrazována grafy orientovanými (Šubrt a kol., 2015). Nicméně, specifické druhy zkoumaného problému čínského listonoše se vztahují na zejména částečně orientované grafy.

Když hrana e začíná nebo končí v uzlu v , říká se, že e a v spolu incidují. Počet incidujících s uzlem hran je označován jako stupeň uzlu. Pro orientované grafy se rozlišují navíc takzvané vstupní a výstupní stupně uzlů nebo in-degree d^- a out-degree d^+ . Jsou počty orientovaných hran končících, respektive začínajících v daném uzlu (Gibbons, 1985). Uzly, pro které platí, že $d^- > d^+$, nazývají se koncentrické, uzly s $d^- < d^+$ jsou excentrické.

V orientovaném grafu posloupnosti vrcholu od v_1 do v_n , kde pro každý pár uzlů existuje hrana od v_i do v_{i+1} , se říká cesta neboli sled. Cyklus je sled, jehož $v_1 = v_n$. Graf, v němž existuje cesta mezi každým v_i a v_j , $i \neq j$, je souvislý graf. (Šubrt a kol., 2015)

Eulerovskou cestou se rozumí cesta zahrnující všechny hrany v daném grafu přesně jednou. Eulerovským cyklem se nazývá eulerovská cesta, začínající a končící ve stejném uzlu grafu. (Gibbons, 1985)

Podmínky existence eulerovského cyklu v orientovaném grafu jsou následující:

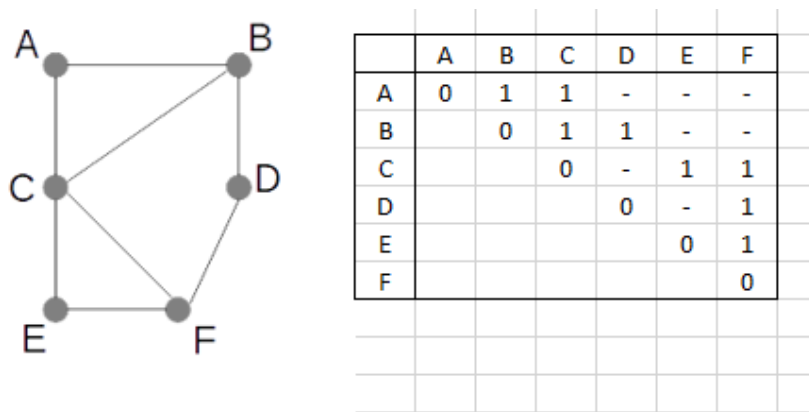
- a) Graf musí být souvislý;
- b) Pro $\forall i, i \in \langle 1, n \rangle$: $d_i^- = d_i^+$, tj. graf je takzvaně bilancovaný. (Gibbons, 1985)

Podmínky existence eulerovské cesty nebo eulerovského cyklu v neorientovaném grafu zahrnují souvislost grafu, ale liší se v požadavku k stupňům uzlů. Neorientovaný graf,

v němž existuje eulerovská cesta, musí mít buď 2 nebo 0 vrcholů s lichým stupněm. Existence eulerovského cyklu vyžaduje, aby veškeré vrcholy grafu měly sudý stupeň.

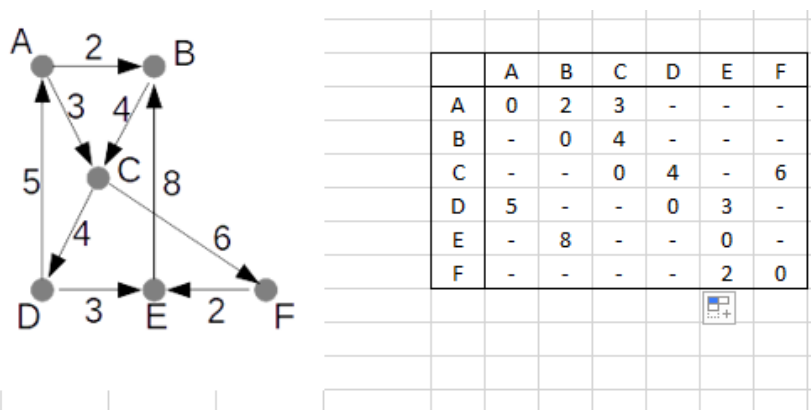
Matice sousednosti grafu W je alternativní grafickému zobrazení reprezentace grafu přes tabulkovou formu. Je čtvercovou maticí $n \times n$, kdež $n = |V|$. Řádky vyznačují výchozí uzly hran, zatímco sloupce vyznačují konečné vrcholy hran. Jednotlivé elementy matice mohou nabývat buď hodnot 0 a 1, čímž jednoduše ukazují na existenci hrany od v_i do v_j , nebo stejných hodnot jako příslušné hrany v případě ohodnoceného grafu. (Šubrt a kol., 2015)

Obrázek 1 – neohodnocený neorientovaný graf a jeho symetrická matice sousednosti



Zdroj: vlastní zpracování

Obrázek 2 - ohodnocený orientovaný graf a jeho matice sousednosti



Zdroj: vlastní zpracování

Úplný graf je graf obsahující hranu $\{v_i, v_j\}$ pro každý pár vrcholů $i, j, i \neq j$.

3.2.2. Problém čínského listonoše

Poprvé problém čínského listonoše (Chinese Postman Problem, dále PČL, CPP) byl navržen čínským matematikem Kwanem Mei-Ko v roce 1962. V nejjednodušší formulaci

zní takto: nalézt nejkratší možnou cestu (nebo cyklus), která prochází veškerými hranami grafu. Z praktického hlediska tento problém se může vztahovat například na nalezení cesty listonoše, který musí obejít všechny ulice ve svém okrese pro doručení korespondence, odkud vlastně pochází název problému.

Obecně řečeno, PČL je NP-úplným problémem (Pearn W. L., 1994). Pro některé jednotlivé typy problému však byly nalezeny algoritmy řešení v polynomičném čase.

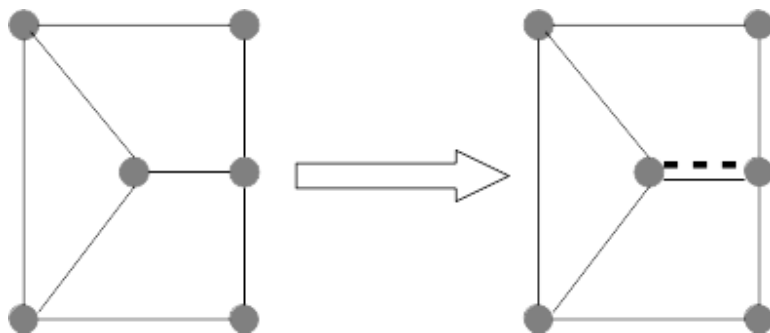
Níže uvádím základní typy problému čínského listonoše.

3.2.2.1. Neorientovaný PČL (Undirected CPP)

Neorientovaný PČL je problém čínského listonoše řešený na neorientovaném grafu. Praktickým příkladem takového problému může sloužit výše popsána situace listonoše, který musí obejít veškeré ulice v nějakém okrese. Dálo by se říct, že v takové situaci na směru pohybu po jednotlivých ulicích nezáleží. Tím pádem, reálná situace může být modelována pomocí neorientovaného grafu, jehož hrany představují jednotlivé ulice, a uzly – křižovatky.

Algoritmus nalezení cesty čínského listonoše v neorientovaném PČL spočívá v nalezení eulerovské cesty v grafu. Když graf nespĺňuje podmínky existence eulerovské cesty, tj. má více než 2 vrcholy lichého stupně, provádí se „dostavba“ doplňujících hran mezi vrcholy lichého stupně, aby jejich stupeň nabyl sudé hodnoty. Tyto doplňující hrany představují opakované procházení skutečně existujících v grafu hran a mají stejné ohodnocení. Podstata algoritmu spočívá v nalezení co nejkratší kombinace hran mezi uzly (Edmonds & Johnson, 1973). Tím pádem, součástí algoritmu je přiřazovací úloha s využitím matice nejkratších cest. Postup řešení přiřazovací úlohy a nalezení matice nejkratších cest bude popsán níže.

Obrázek 3 – „dostavba“ výchozího grafu na graf obsahující eulerovskou cestu



Zdroj: vlastní zpracování v programu LibreOffice Draw

Algoritmus Edmondse-Johnsona má polynomičnou výpočetní složitost $O(|V|^3)$ (Pearn W. L., 1994).

3.2.2.2. Orientovaný PČL (Oriented CPP)

Orientovaný PČL je problémem čínskeho listonoše vztaženým na orientovaný graf. Příkladem takového problému může sloužit převážná většina praktických problémů vyžadujících projížďení určitého úseku drah ve městě technikou, například, pro odvoz odpadu nebo úklid cest. Orientované hrany reprezentují tím pádem směry pohybu techniky po ulicích a obecně směr cestovního provozu. Orientovanost hran je nezbytná, například, i pro reprezentaci jednosměrných ulic.

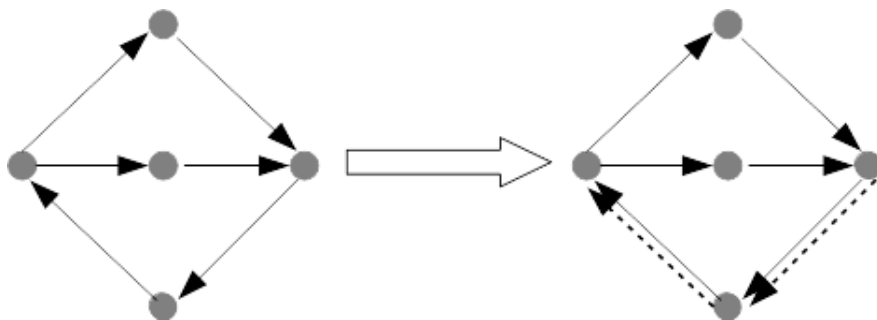
Algoritmus nalezení cyklu čínskeho listonoše (dále ČL) Edmonds-Johnsonovou metodou stejně jako u neorientovaného PČL zahrnuje nalezení eulerovské cesty v grafu nebo její „dostavbu“ doplňujícími hranami představujícími opakování průjezdu již existujících hran. Jediným rozdílem jsou podmínky existence eulerovského cyklu v daném grafu. Vzhledem k podmínce, že graf musí pro existenci cyklu ČL být bilancovaný, dostavba doplňujících cest se provádí od koncentrických uzlů k excentrickým. Charakter uzlu se vypočítává pomocí vzorce

$$\delta_i = d_i^- - d_i^+ \quad (3.1),$$

přičemž δ_i má zápornou hodnotu u excentrických uzlů a kladnou u koncentrických.

Po nalezení koncentrických a excentrických uzlů se provádí dostavba doplňujících cest stejným způsobem jako u neorientovaného PČL. (Edmonds & Johnson, 1973)

Obrázek 4 – „dostavba“ výchozího grafu na graf obsahující eulerovský cyklus



Zdroj: vlastní zpracování v programu LibreOffice Draw

Algoritmus Edmondse-Johnsona pro řešení orientovaného PČL má stejnou polynomičnou složitost $O(|V|^3)$ jako v případě neorientovaného PČL.

3.2.2.3. Smíšený PČL (Mixed CPP)

Smíšený PČL je problémem ČL vztaženým na smíšený graf, tj. graf, z jehož hran některé jsou orientované a některé nejsou. Prakticky by to mohlo představovat poněkud vzácnou situaci projíždění technikou polních nebo lesních cest.

Tento druh PČL je považován za problém se složitostí NP-úplný za výjimkou případů, když každý uzel v grafu má sudý stupeň. (Edmonds & Johnson, 1973; Pearn, 1994)

3.2.2.4. k-PČL (k-CPP)

K-PČL na rozdíl od výše uvedených problémů předpokládá, že vybraný úsek je obsluhován několika listonoši nebo jednotkami techniky. Za určitých podmínek je řešitelný v polynomiálním čase pomocí algoritmu Edmondse-Johnsona a metodiky používané pro problém CARP (Benavent, Campos, Corberan, & Mota, 1992), ale obecně je považován za NP-úplný problém (Pearn W. L., 1994).

3.2.2.5. Min-max k-CPP

Min-max k-PČL je jedním z několika základních podtypů k-PČL. Hlavním charakteristickým rysem tohoto problému je snaha o minimalizaci délky nejdelší z k navrhovaných tras za účelem nejrychlejšího možného procházení celého grafu. Vzhledem k samozřejmé použitelnosti výsledků je jedním z podtypů PČL nejširěji zkoumaných v odborné literatuře.

Prvním navrženým způsobem řešení tohoto problému je Frederickson-Hecht-Kimova heuristická metoda pojmenovávaná podle iniciál autorů FHK. Spočívá v rozdělení cesty ČL nalezené v daném grafu podle metodiky Edmondse-Johnsona na k částí s co nejméně se odlišujícími délkami.

Algoritmus FHK vyžaduje jako vstupy:

- 1) $R = (v_1, e_{i_1}, v_{i_2}, e_{i_2}, \dots, v_{i_m}, e_{i_m}, v_1)$ – cyklus ČL nalezený pomocí algoritmu Edmondse-Johnsona;
- 2) $L = c(R)$ – sumární ohodnocení (tj. délku) cyklu ČL;
- 3)

$$s_{max} = \frac{\max \{s(v_1, v_{ij}) + c(v_{ij}, v_{ij+1}) + s(v_{ij+1}, v_1)\}}{2} \quad (3.2),$$

tj. poloviční délku nejdelšího z nejkratších možných cyklů, začínajících v v_1 a zahrnujících jednotlivé hrany (v_{ij}, v_{ij+1}) ;

4)

$$L_j = \frac{j}{k}(L - 2s_{max}) + s_{max} \text{ pro } \forall j \in \langle 1, k \rangle \quad (3.3),$$

tj. sumární délku cesty ČL v bodech rozdělení na jednotlivé části.

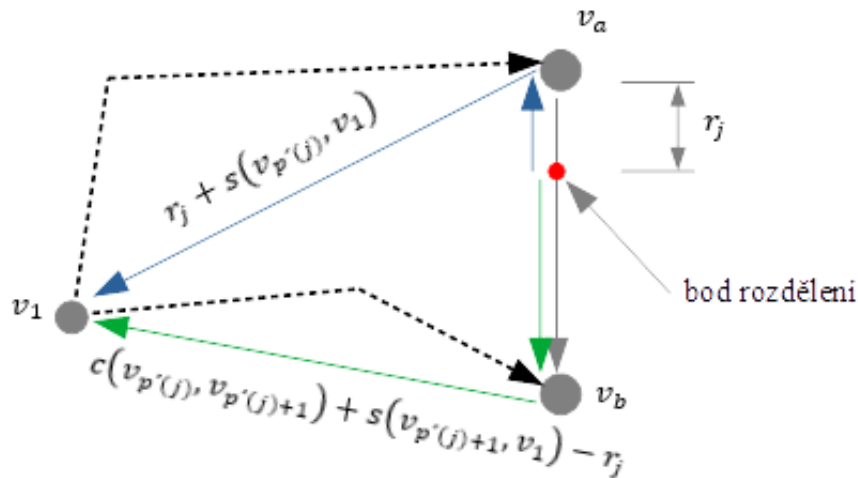
Samotný algoritmus má následující podobu:

1. Nalézt metodou Edmondse-Johnsona 1-cyklus ČL.
2. Pro $\forall j \in \langle 1, k \rangle$ najít poslední vrchol $v_{p'(j)}$ takový, že platí $c(R_{v_{p'(j)}}) \leq L_j$.
3. Ať $r_j = L_j - c(R_{v_{p'(j)}})$. Pro $\forall j \in \langle 1, k \rangle$
 - a. když $r_j + s(v_{p'(j)}, v_1) \leq c(v_{p'(j)}, v_{p'(j)+1}) + s(v_{p'(j)+1}, v_1) - r_j$, pak $v_{p(j)} = v_{p'(j)}$.
 - b. Jinak $v_{p(j)} = v_{p'(j)+1}$.
4. Sestavit nejkratší možné trasy spojením v_1 s příslušnými $v_{p(j)}$. (Frederickson, Hecht, & Kim, 1978)

Tento poněkud děsivě vypadající algoritmus je třeba vysvětlit. L_j udává polohu bodu, kde cyklus ČL by musel být rozdělen na jednotlivé trasy za ideálních podmínek. Nicméně, pravděpodobnost toho, že tento bod se bude nacházet přesně v nějakém z vrcholů, je zanedbatelná. Ergo, s velice vysokou pravděpodobností cyklus ČL by musel být rozdělen uprostřed hrany, což není v rozsahu možností matematického modelu.

Třetí krok algoritmu je tím pádem věnován zvolení vrcholů $v_{p(j)}$, kde se cyklus bude dělit na jednotlivé trasy. Předpokládejme, že optimální bod rozdělení cyklu leží mezi vrcholy v_a (obecně $v_{p'(j)}$) a v_b (obecně $v_{p'(j)+1}$) na orientované hraně (v_a, v_b) . r_j udává vzdálenost bodu rozdělení od vrcholu v_a . $r_j + s(v_{p'(j)}, v_1)$ je délka návratu z bodu rozdělení do výchozího vrcholu cyklu ČL přes v_a , $c(v_{p'(j)}, v_{p'(j)+1}) + s(v_{p'(j)+1}, v_1) - r_j$ – přes v_b . Rozdělení se provádí v tom z vrcholů, přes který vede kratší cesta zpět do v_1 .

Obrázek 5 – schématické znázornění 3. kroku algoritmu FHK



Zdroj: vlastní zpracování v programu LibreOffice Draw

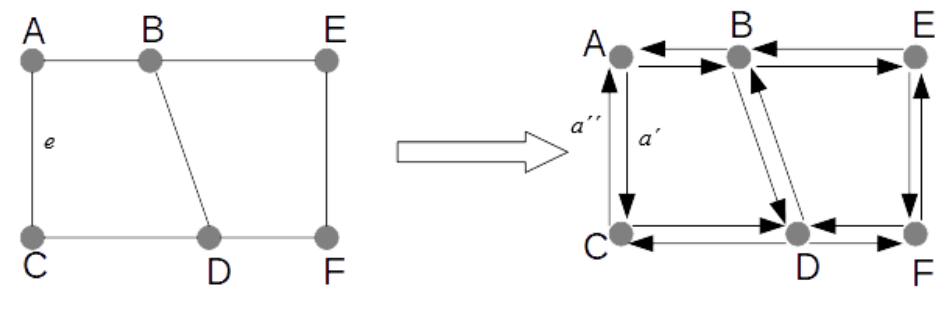
Kromě heuristického algoritmu FHK, jsou současně známy i jiné algoritmy pro řešení min-max k-CPP. Jsou to například heuristiky Augment-Merge (Ahr & Reinelt, 2002) a Cluster (ibidem).

3.2.2.6. Větrný PČL (Windy PP)

Takzvaný větrný problém ČL se vztahuje na neorientované grafy, v nichž se liší ohodnocení stejných hran při procházení různými směry. Prakticky by taková situace mohla nastat například při pohybu pěšky z kopce nebo do kopce.

Řešení tohoto typu PČL zahrnuje přepracování neorientovaného grafu G na orientovaný graf G' s příslušnými ohodnoceními orientovaných hran s ohledem na směr pohybu mezi jednotlivými vrcholy. Tím pádem, neorientovaná hrana e se převádí na orientované hrany a' a a'' .

Obrázek 6 - přeměna G na G' pro účely řešení WPP



Zdroj: vlastní zpracování v programu LibreOffice Draw

Tento typ problému ČL je řešitelný v polynomičtém čase jenom v případě, když pro každou kružnici C v G cykly C' a C'' mají stejné sumární ohodnocení. V tomto případě ohodnocení neorientované hrany $w(e)$ je rovné $\frac{1}{2}(w(a') + w(a''))$ a problém je dále řešen algoritmem Edmondse-Johnsona pro neorientované grafy. V opačném případě větrný PČL má složitost NP-těžký. (Guan, 1984)

3.2.2.7. Hierarchický PČL (Hierarchical CPP)

Hierarchický PČL rozděluje hrany grafu na třídy (clustery) podle jejich priority tak, že žádná hrana z méně prioritní třídy nesmí být procházena dříve než hrany z třídy více prioritní. Prakticky se uplatňuje v některých úlohách plánování techniky pro údržbu ulic a pro určení správného způsobu řezu u autogenního řezání (Ghiani & Improta, 2000).

Obecně hierarchický PČL je NP-těžký, ale pro případ, když clusterly se procházejí úplně před začátkem nového clusteru a jsou spojené, existuje algoritmus se složitostí $O(p^3|V|^3)$, kdež p je počet clusterů neboli tříd priority (Ghiani & Improta, 2000).

3.2.2.8. Kapacitně omezený PČL (CCPP/CARP)

Kapacitně omezený PČL (Capacitated CPP) předpokládá, že každá hrana grafu má požadavek $q(e_i)$ a obsluhující jednotka má konečnou kapacitu zdroje pro uspokojení těchto požadavků W . Cílem úlohy je tím pádem najít kombinací cyklů R_j , jejichž sumární délka je minimální a pro které platí, že $\sum q(e_i) \leq W$ pro $e_i \in R_j$. Prakticky tato úloha modeluje například pohyb auta myjícího vozovky s omezenou kapacitou tanku na vodu. $q(e_i)$ v tomto případě je množství vody potřebné pro umytí části ulice e_i , zatímco W vyznačuje celkový objem tanku.

Heuristický algoritmus pro řešení CCPP zahrnuje následující kroky:

1. Sestavit separátní cyklus R_i pro obsluhování každé hrany e_i v daném grafu.
2. Začínaje nejdelším R_i prozkoumat možnost obsluhování jednotlivých e_i z kratších cyklů delšími cykly.
3. Prozkoumat možnost dalšího spojení cyklů s ohledem na kapacitní a jiné požadavky. Spojit dva cykly s nejlepšími důsledky spojení.
4. Opakovat krok 3, dokud je možné. (Golden & Wong, 1981)

Konkrétnější, ale poněkud složitější heuristický algoritmus pro řešení CCPP je uveden v článku „The Optimum Traversal of a Graph“ (Christofides, 1973). Zahrnuje

nalezení matice nejmenších spotřeb $\mathbf{Q} = [q_{ij}]$ pomocí Floyd-Warshallova algoritmu (viz níže) a iterativní odstranění nalezených cyklů z grafu.

Kapacitní problém ČL má výpočetní složitost NP-těžký. (Golden & Wong, 1981)

3.2.2.9 Vesnický PČL (Rural PP)

Vesnický PČL je specifickým druhem PČL vyžadujícím nalezení nejkratšího způsobu procházení jenom některých hran v neorientovaném grafu nebo několika oddělených komponent nesouvislého neorientovaného grafu. Typickým použitím tohoto problému pro reálný úkol je, podle názvu, plánování cest vně měst a ve vesnických oblastech.

Algoritmus řešení vesnického PČL zahrnuje následující kroky:

1. Transformace výchozího grafu \mathbf{G} obsahujícího jenom nezbytné hrany e_n na úplný graf $\mathbf{G}_u = (V, E_n \cup E_d)$, kdež E_d je množina dodaných hran.
2. Zjednodušení \mathbf{G}_u odstraněním hran (i, j) z E_d , když
 - a. $c_{ij} = c_{ik} + c_{kj}$ pro libovolné k ;
 - b. Hrany stejné délky spojující stejné komponenty obsahující e_n .
3. Transformace \mathbf{G} na graf \mathbf{G}_c , kdež jednotlivé oddělené komponenty grafu jsou přijaté za uzly.
4. Nalezení kostry \mathbf{G}_T grafu \mathbf{G}_c například Kruskalovým algoritmem. $\mathbf{G}_T = (V, E_T)$.
5. Řešení PČL pro neorientované grafy na grafu $\mathbf{G} \cup E_T$. (Pearn & Wu, 1995)

Vesnický problém ČL má výpočetní složitost NP-těžký. (Pearn & Wu, 1995)

3.2.3. Floyd-Warshallův algoritmus pro nalezení nejkratších cest

V rámci výše uvedených metod (zejména metodiky řešení PČL podle Edmondse-Johnsona a heuristiky FHK) se několikrát vyžadovalo nalezení nejkratší možné cesty mezi jednotlivými páry vrcholů. Pro vrcholy nacházející se v grafu blízko sebe nebo spojené jedinou cestou je tato úloha triviální, ale pro větší grafy s rozvětvenými složitými cestami se potřebuje způsob spočítat nejkratší cesty algoritmicky a se společným výstupem, preferenčně v maticové formě. Floyd-Warshallův algoritmus (dále F-W algoritmus) odpovídá všem těmto požadavkům.

Princip F-W algoritmu se tkví v iterativním nahrazení výchozích délek cesty v matici sousednosti \mathbf{A} kratší délkou cesty (viz dále). F-W algoritmus je použitelný pro veškeré grafy

neobsahující cykly se záporným sumárním ohodnocením hran. Vyžaduje jako vstup matici sousednosti A grafu G . $a_{ij} = 0$ pro $i = j$. Neexistujícím hranám (i, j) se přiřazuje ohodnocení $Z \gg \max(a_{ij})$.

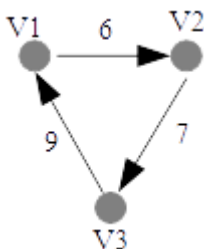
Postup algoritmu je následující:

1. $A_G^0 = A_G$.
2. Pro $i, j, k = (1, 2, 3, \dots, n)$ $a_{ij}^k = \min(\{a_{ij}^{k-1}; a_{ik}^{k-1} + a_{kj}^{k-1}\})$.
3. Opakovat krok 2 do dostání výsledné matice A_G^n . (Floyd, 1962)

Vlastní podstata prováděné ve kroku 2 operace se spočívá v pokusu zkrátit skutečnou cestu (i, j) přes k -tý vrchol a uložit výsledek do matice v případě, když zkrátit cestu se povedlo.

Zkusíme vysvětlit postup algoritmu na jednoduchém příkladu grafu Y z obrázku 7.

Obrázek 7 - graf Y



Zdroj: vlastní zpracování v programu LibreOffice Draw

Výchozí matice sousednosti $A_Y^0 = \begin{matrix} & & 0 & 6 & 100 \\ 100 & & 0 & 7 & \\ & 9 & 100 & 0 & \end{matrix}$. Pro $k = 1$ zkusíme zkrátit

nějakou z cest. Srovnáme a_{ij} a $a_{ik} + a_{kj}$ pro $i, j = (1, 2, 3)$.

Tabulka 1 – výpočty pro 1. iteraci algoritmu F-W

| k | i | j | a_{ij} | $a_{ik} + a_{kj}$ |
|---|---|---|----------|-------------------|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| | | 2 | 6 | 100 |
| | | 3 | 100 | 100 |
| | 2 | 1 | 100 | 100 |
| | | 2 | 0 | 0 |
| | | 3 | 7 | 200 |
| | 3 | 1 | 9 | 9 |
| | | 2 | 100 | 15 |
| | | 3 | 0 | 0 |

Zdroj: vlastní zpracování v programu MS Excel

Lze pozorovat, že procházením uzlu v_1 se povedlo zkrátit cestu (v_3, v_2) . Novou hodnotu přiřadíme a_{32}^1 , po čemž nalezneme upravenou matici sousednosti A_Y^1 . Zopakujeme algoritmus pro $k = \{2, 3\}$ a nalezneme následující upravené matice:

$$A_Y^1 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 100 \\ 100 & 0 & 7 \\ 9 & 15 & 0 \end{pmatrix} \quad A_Y^2 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 100 \\ 13 & 0 & 7 \\ 9 & 15 & 0 \end{pmatrix} \quad A_Y^3 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 16 \\ 13 & 0 & 7 \\ 9 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

Výsledná matice A_Y^3 udává délky nejkratších cest mezi jednotlivými hranami grafu G . Úplně analogickým postupem by mohla být vytvořena matice požadavků Q potřebná pro řešení kapacitního problému ČL.

F-W algoritmus má výpočetní složitost $O(|V|^3)$. Pro grafy s větším počtem vrcholů vhodnější než ruční přepočítání metodikou je použití specializovaného programu, který by mohl uskutečnit zpracování automaticky. Pseudokód takového programu je uveden v učebnici *Algorithmic Graph Theory* (Gibbons, 1985) na straně 20:

```

1 Initialise  $W_0$ 
2 For  $k = 1$  to  $n$  do
3   For  $i = 1$  to  $n$  do
4     For  $j = 1$  to  $n$  do
5        $W_k[i, j] := \min((W_{k-1}[i, k] + W_{k-1}[j, k]); W_{k-1}[i, j])$ 
6 Output  $W_n$ .
```

Skutečně napsaný na základě tohoto pseudokódu program bude uveden v kapitole 4.2.1. Nalezení 1-cyklu čínského listonošev praktické části dané práce.

3.2.4. Přiřazovací úloha

Přiřazovací úloha je typem distribuční úlohy věnovaným nalezení optimálního způsobu párování prvků ze dvou různých množin. Příkladem přiřazovací úlohy může být úkol přiřazení pracovníka ke pracovišti, distribučního místa k odběrateli nebo zdrojů k výrobkům za maximalizace výkonů nebo minimalizace nákladů. (Šubrt a kol., 2015)

V učebnici *Ekonomicko-matematické metody* (Šubrt a kol., 2015) matematický model přiřazovací úlohy je zadán jako

$$z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow MIN \quad (3.4)$$

za podmínek

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.5)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.6)$$

$$x_{ij} \in \{0; 1\} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n; j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.7).$$

To znamená, že v tabulce hodnot c_{ij} musíme vybrat jednu hodnotu c_{ij} v každém řádku a v každém sloupci tak, aby jejich součet byl minimální.

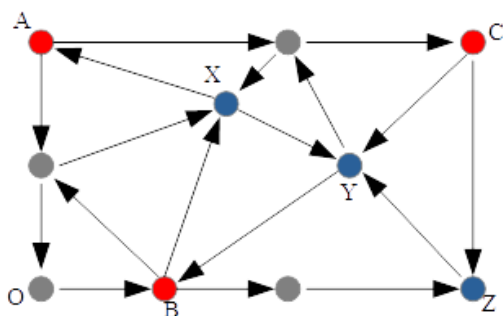
V rámci metody Edmondse-Johnsona pro řešení problému čínského listonoše přiřazovací úloha určuje nejkratší možnou kombinaci hran nezbytnou pro dostavbu grafu na graf obsahující eulerovský cyklus (nebo eulerovskou cestu). Přiřazování probíhá mezi koncentrickými a excentrickými vrcholy ve případě orientovaného grafu nebo mezi vrcholy lichého stupně ve případě grafu orientovaného. Příslušné hodnoty c_{ij} pro daný matematický model jsou rovny odpovídajícím hodnotám s_{ij} , kdež \mathbf{S} je matice nejkratších cest vytvořená pomocí F-W algoritmu.

Řešení přiřazovací úlohy probíhá takzvanou maďarskou metodou zahrnující následující kroky:

1. Primární redukce.
2. Nalezení nezávislých nul.
3. Test optimality.
4. Případná sekundární redukce po nesplnění testu optimality.

Ukážeme postup maďarské metody na příkladu grafu **H**.

Obrázek 8 - graf **H**



Zdroj: vlastní zpracování v programu LibreOffice Draw

Cílem je nalezení nejkratší kombinace cest od koncentrických vrcholů $V_K = \{X, Y, Z\}$ do excentrických vrcholů $V_E = \{A, B, C\}$. Předpokládejme, že máme pro H matici S vytvořenou. Příslušná matice hodnot $C = [c_{ij}]$ má následující tvar:

Tabulka 2 – výchozí matice C s nejkratšími cestami od v_i do v_j

| | A | B | C |
|---|----|----|----|
| X | 25 | 54 | 60 |
| Y | 54 | 33 | 39 |
| Z | 82 | 61 | 67 |

Zdroj: vlastní zpracování v programu MS Excel

Primární redukce zahrnuje řádkovou a sloupcovou redukci. Obě tyto metody spočívají v odečtení minimální hodnoty v řádku nebo sloupci ode všech hodnot v řádku nebo sloupci. Na pořadí provedení řádkové a sloupcové redukce v rámci primární redukci výsledek nezáleží.

Tabulka 3 – primární redukce matice C na matici C_i

| ŘÁDKOVÁ REDUKCE | | | | SLOUPCOVÁ REDUKCE | | | |
|-----------------|----|----|----|-------------------|----|----|----|
| | A | B | C | | A | B | C |
| X | 0 | 29 | 35 | X | 0 | 29 | 29 |
| Y | 21 | 0 | 6 | Y | 21 | 0 | 0 |
| Z | 21 | 0 | 6 | Z | 21 | 0 | 0 |

Zdroj: vlastní zpracování v programu MS Excel

Dalším krokem algoritmu je nalezení tzv. nezávislých nul. Nezávislé nuly se dělí na silně a slabě nezávislé. Silně nezávislé nuly jsou nuly obsažené v tabulce po primární redukci, které jsou jedinými nulami ve svém řádku i sloupci zároveň. Slabě nezávislé nuly jsou nuly, které jsou jedinými nulami buď ve svém řádku nebo ve svém sloupci. Silně nezávislé nuly se určují před slabými.

Silně nezávislá nula v matici C_i je jedna – c_{11} . To znamená, že musíme zvolit kombinaci cest $X \rightarrow A$. Přeškrtneme tzv. krycí čarou buď řádek nebo sloupec, kde se nachází silně nezávislá nula:

Tabulka 4 – C_i po dosažení krycí čáry

| ŘÁDKOVÁ RED. | | | |
|--------------|--------------|---------------|---------------|
| | A | B | C |
| X | 0 | 29 | 29 |
| Y | 21 | 0 | 0 |
| Z | 21 | 0 | 0 |

Zdroj: vlastní zpracování v programu MS Excel

Poté potřebujeme vybrat kombinace mezi $\{Y; Z\}$ a $\{B; C\}$. Je patrné, že C_i obsahuje nuly na místech odpovídajících všem možným kombinacím těchto vrcholů, tj. úloha je degenerovaná. To znamená, že kombinaci můžeme vybrat libovolným způsobem. Pro účely řešení daného příkladu přiřadíme hodnotu 1 elementům matice x_{11}, x_{22} a x_{33} . Výsledná hodnota účelové funkce se tím pádem bude rovnat $x_{11} * c_{11} + x_{22} * c_{22} + x_{33} * c_{33} = 125$.

V případě, když nebyly nalezeny žádné silně ani slabě nezávislé nuly nebo nepodařilo se nalézt množinu z n nezávislých nul, provádí se tzv. sekundární redukce. V upravené matici zkusíme pokryt krycími čarami veškeré nuly:

Tabulka 5 – začátek sekundární redukce pro matici R

| | W | X | Y | Z |
|---|----|----|----|----|
| A | 0 | 18 | 34 | 0 |
| B | 22 | 0 | 0 | 42 |
| C | 0 | 16 | 26 | 0 |
| D | 0 | 31 | 29 | 0 |

Zdroj: vlastní zpracování v programu MS Excel

Během sekundární redukce se hodnota nejmenšího nepokrytého elementu matice odečítá od všech nepokrytých elementů a přičítá ke všem elementům pokrytým dvakrát. Po sekundární redukci matice z tabulky 5 bude mít následující tvar:

Tabulka 6 – matice R po sekundární redukci

| | W | X | Y | Z |
|---|----|----|----|----|
| A | 0 | 2 | 18 | 0 |
| B | 38 | 0 | 0 | 58 |
| C | 0 | 0 | 10 | 0 |
| D | 0 | 15 | 29 | 0 |

Zdroj: vlastní zpracování v programu MS Excel

Matice **R** po sekundární redukci obsahuje množinu z n nezávislých nul. Další sekundární redukce není potřebná.

4. Vlastní práce

4.1. Charakteristika podniku

Pro řešení problém čínského listonoše byl zvolen městský státní podnik „GBU Avtomobilnye Dorogi“ podřízený úřadu bydlení a komunálních služeb města Moskvy. Podle firemní webové stránky (GBU "Avtomobilnye dorogi", 2021) podnik byl uznán jako největší společnost svého druhu v Evropě v roce 2018. Hlavním úkolem podniku je zajištění údržby, úklidu a adekvátního zařízení cest a silnic města.

Součástí těchto úloh je zimní úklid silnic běžně a po sněžení. Podle podnikového řádu hlavním úkolem zimní údržby je odstranění a prevence výskytu sněhu a ledu na vozovce.

Celkový vozový park podle webové stránky firmy (GBU "Avtomobilnye dorogi", 2021) činí 6500 jednotek techniky. To zahrnuje speciální techniku pro čištění tras v zimě a v létě, techniku pro zpracování vozovky reagenty proti námraze, tzv. kombinovanou techniku s nástroji pro čištění tras i zpracování reagenty, speciální techniku pro údržbu chodníků a nákladní auta pro odvoz sněhu z bočních částí vozovky po vlastním úklidu cest. Podle řádu podniku jsou tyto vozy vybaveny:

- A. Navigačními prostředky pracujícími ve spojení se systémem GLONASS (alternativním systémem pro GPS vyvinutým v Rusku) s povinnou možností telemetrického předávání dat do automatického řídicího a informačního systému pro kontrolu cesty auta;
- B. Dle možnosti snímači úrovně paliva ve vozu;
- C. Dle možnosti snímači funkce doplňujících zařízení pro čištění sněhu.

4.1.1. Podnikové požadavky

Řád podniku ukládá časové limity pro vykonání prací, které činí 5 hodin od začátku sněžení pro zpracování vozovky reagenty působícími proti námraze, 5 hodin od ukončení sněžení pro práce spojené s odstraněním sněhu a námrazy a 16 hodin pro výsledné formování sněhových valů pro jejich následný odvoz. V případě prodlouženého sněžení odstranění sněhu a námrazy se provádí jednou na každé 5 cm sněhu.

Preferencí podniku je stále množství tras techniky na vybraném úseku drah, což znamená preferované rozdělení tohoto úseku na tři trasy. Samozřejmostí je i požadavek

podniku o maximální možné zkrácení délky tras pro minimalizaci používaného množství pohonných hmot.

Z těchto požadavků plyne, že řešený v rámci této práce problém lze klasifikovat jako min-max k-CPP.

4.2. Řešený problém čínského listonoše

Problém čínského listonoše řešený v rámci této práce se tkví v návržení plánu tras pro úsek drah (dále nazývaný podle firemní zkratky ODCh) ve středu města Moskvy pomocí vybraných optimalizačních metod.

Obsluhovaný úsek drah je zadán pomocí podnikového technického schématu a je z větší části tvořen tzv. „kremlovským kruhem“, tj. kruhem ulic nejbližším ke Kremlu a geografickému středu města. Součástí úseku mimo vlastně kremlovský kruh jsou ulice Tverská, Vozdviženka a Znamenka, Puškinské, Maněžné a Nové náměstí, Velký kamenný most a parkoviště před Velkým divadlem.

Obrázek 9 – Podnikové technologické schéma úklidu ODCh v zimní období



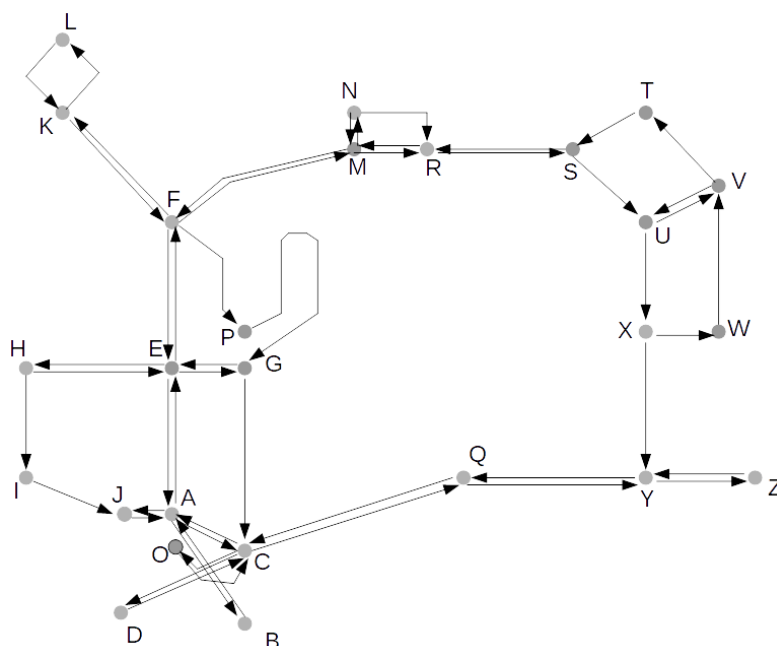
Zdroj: GBU „Avtomobilnye Dorogi“

Tabulka 7 – skutečné polohy a zeměpisné souřadnice vrcholů grafu G

| Vrchol | Skutečná poloha | Souřadnice |
|--------|--|----------------------|
| O | Parkoviště podniku pod Velkým kamenným mostem | 55.747924, 37.611848 |
| A | Křižovatka ulice Znamenka a Borovického náměstí | 55.749129, 37.608662 |
| B | Konečný bod úklidu Velkého kamenného mostu | 55.746840, 37.612058 |
| C | Křižovatka ulice Maněžnaja a Kremlovského nábřeží | 55.747757, 37.612505 |
| D | Křižovatka Prečistěnského nábřeží a ulice Lenivka | 55.746457, 37.609937 |
| E | Křižovatka ulic Vozdviženka a Mochovaja | 55.752402, 37.610838 |
| F | Křižovatka ulic Tverskaja, Mochovaja a Ochotnyj Rjad | 55.756889, 37.615101 |
| G | Sapožkovské náměstí | 55.752372, 37.612416 |
| H | Křižovatka ulice Vozdviženka a Arbatského náměstí | 55.752944, 37.601309 |
| I | Křižovatka ulice Znamenka a Gogolevského bulváru | 55.751046, 37.600624 |
| J | Křižovatka ulice Znamenka a Borovického náměstí | 55.749149, 37.608779 |
| K | Křižovatka ulice Tverskaja a Tverského bulváru | 55.764624, 37.605627 |
| L | Křižovatka ulice Malaja Dmitrovka a Puškinského náměstí | 55.766395, 37.606595 |
| M | Křižovatka ulic Ochotnyj Rjad a Teatralnyj Projezd | 55.758545, 37.618405 |
| N | Konečný bod parkoviště před Velkým divadlem | 55.759543, 37.618134 |
| P | Křižovatka Maněžného náměstí a ulice Maněžnaja | 55.754287, 37.613195 |
| Q | Průsek Kremlovského nábřeží a středu Velkého Moskvoreckého mostu | 55.749714, 37.624314 |
| R | Křižovatka Teatralního náměstí a ulice Teatralnyj Projezd | 55.758816, 37.620049 |
| S | Křižovatka Lubjanského náměstí a ulice Lubjanskyj Projezd | 55.759633, 37.625769 |
| T | Křižovatka Lubjanského náměstí a ulice Lubjanskyj Projezd | 55.760271, 37.626713 |
| U | Křižovatka Starého náměstí a náměstí Iljinskije Vorota | 55.756589, 37.630053 |
| V | Křižovatka ulic Lubjanskyj Projezd a Marosejka | 55.757160, 37.631470 |
| W | Křižovatka Slavjanského náměstí a ulice Soljanskij Projezd | 55.753795, 37.634819 |
| X | Křižovatka Slavjanského náměstí a ulice Kitajgorodskij Projezd | 55.753410, 37.633474 |
| Y | Křižovatka ulice Kitajgorodskij Projezd a Moskvoreckého nábřeží | 55.749586, 37.632210 |
| Z | Křižovatka Moskvoreckého a Ustjinského nábřeží | 55.747514, 37.639994 |

Zdroj: vlastní zpracování pomocí [http:// maps.google.com](http://maps.google.com)

Obrázek 11 - graf G



Zdroj: vlastní zpracování v programu LibreOffice Draw

Pomocí servisu Google Maps v programu MS Excel byla sestavena matice sousednosti W s ohodnocením jednotlivých hran grafu představujícím vzdálenosti od sebe bodů odpovídajících jednotlivým uzlům grafu G . Váhy jsou dány v metrech a zaokrouhleny na nejbližší pětinu metru. Skutečně neexistujícím hranám podle metodiky doporučené v učebnici Algorithmic Graph Theory (Gibbons, 1985) byla přidělena váha 1000000 metru, která kvůli vlastnostem zobrazení v programu je v tabulce znázorněna jako „#####“.

Tabulka 8 – matice sousednosti W s váhami hran grafu G , m

| w | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
|----|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | O | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z | |
| 1 | O | 0 | ##### | 35 | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### |
| 2 | A | ##### | 0 | 490 | 150 | ##### | 475 | ##### | ##### | ##### | ##### | 140 | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### |
| 3 | B | ##### | 490 | 0 | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### |
| 4 | C | 35 | 150 | ##### | 0 | 215 | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### |
| 5 | D | ##### | ##### | ##### | 210 | 0 | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### |
| 6 | E | ##### | 485 | ##### | ##### | ##### | 0 | 585 | 90 | 585 | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### |
| 7 | F | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | 585 | 0 | ##### | ##### | ##### | ##### | 1040 | ##### | 295 | ##### | 360 | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### |
| 8 | G | ##### | ##### | ##### | 535 | ##### | 70 | ##### | 0 | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### |
| 9 | H | ##### | ##### | ##### | 0 | ##### | 590 | ##### | ##### | 0 | 220 | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### |
| 10 | I | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | 0 | 550 | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### |
| 11 | J | ##### | 140 | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | 0 | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### |
| 12 | K | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | 0 | 265 | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### |
| 13 | L | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | 0 | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### |
| 14 | M | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | 0 | 110 | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### |
| 15 | N | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### |
| 16 | P | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### |
| 17 | Q | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | 495 |
| 18 | R | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### |
| 19 | S | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### |
| 20 | T | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### |
| 21 | U | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### |
| 22 | V | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### |
| 23 | W | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### |
| 24 | X | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### |
| 25 | Y | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### |
| 26 | Z | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### | ##### |

Zdroj: vlastní zpracování v programu MS Excel pomocí <http://maps.google.com>

4.2.1. Nalezení 1-cyklu čínského listonoše

Použitá v rámci této práce heuristická metodika Frederickson-Hecht-Kim (dále FHK) věnovaná řešení k -problému čínského listonoše zahrnuje jako první krok nalezení 1-cyklu čínského listonoše a jeho následné rozdělení na k částí. Algoritmus nalezení cyklu čínského listonoše je popsán v kapitole 3.2.2.2. Orientovaný PČL (Oriented CPP)

Prvním krokem nalezení cesty čínského listonoše je tvorba matice nejkratších cest mezi jednotlivými vrcholy. V kapitole 3.2.3. Floyd-Warshallův algoritmus pro nalezení nejkratších cest jíž byl uveden pseudokód z učebnice *Algorithmic Graph Theory* (Gibbons, 1985), na jehož základě byl napsán kód pro splnění tohoto algoritmu v programovacím jazyce Pascal.

Vzhledem k potřebě definovat pro algoritmus matici \mathbf{W} s rozměry 26×26 se vyžadoval pomocný program pro sestavení její šablony. Níže následuje kód tohoto programu v jazyce Pascal:

```
program defw(output);
var
  i, j : integer;

begin
  for i:=1 to 26 do
    begin
      for j:=1 to 26 do
        begin
          write('w[');
          write(i);
          write(', ');
          write(j);
          write('] := ');
          if i = j then
            write('0')
          else
            write('1000000');
          writeln(';');
        end;
      end;
    end;
end.
```

Výsledná šablona definuje dvojrozměrné pole \mathbf{W} s rozměry 26×26 , které obsahuje nuly na hlavní diagonále. Ostatní buňky tohoto pole jsou obsazeny hodnotou 1000000. Odpovídající vahám hran grafu hodnoty byly do šablony dosazovány ručně.

Po dosažení souvisejících hodnot vah do pole **W** pseudokód je přepracován na kód v jazyce Pascal:

```
Program weightmatrix(output);

var
  w : Array [1..26, 1..26] of integer;
  n, k, i, j, prev, prsum : integer;

begin
  n:=26;
  w[1,1] := 0;
  w[1,2] := 1000000;
  w[1,3] := 1000000;
  w[1,4] := 35;
  w[1,5] := 1000000;
  [...]
  w[26,21] := 1000000;
  w[26,22] := 1000000;
  w[26,23] := 1000000;
  w[26,24] := 1000000;
  w[26,25] := 530;
  w[26,26] := 0;

  for k:=1 to n+1 do
    begin
      for i:=1 to n do
        begin
          writeln('');
          for j:=1 to n do
            begin
              write(w[i, j]);
              write(' ');
              prev := w[i, j];
              prsum := w[i, k] + w[k, j];
              if prev <= prsum then
                w[i, j] := prev
              else
                w[i, j] := prsum;
            end;
          end;
          writeln('');
        end;
      end;
    end.
end.
```

Výsledkem provedení tohoto algoritmu je matice nejkratších cest **S** vyžadovaná mimo jiné i pro heuristiku FHK. Po převedení do tabulkové formy v programu MS Excel má následující tvar:

Tabulka 9 – matice nejkratších cest S

| s | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| | O | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
| 1 O | 0 | 185 | 675 | 35 | 250 | 660 | 1245 | 750 | 1245 | 1465 | 325 | 2285 | 2550 | 1540 | 1650 | 1605 | 810 | 1635 | 2005 | 2960 | 2430 | 2530 | 2965 | 2870 | 1305 | 1835 |
| 2 A | 185 | 0 | 490 | 150 | 365 | 475 | 1060 | 565 | 1060 | 1280 | 140 | 2100 | 2365 | 1355 | 1465 | 1420 | 925 | 1450 | 1820 | 2775 | 2245 | 2345 | 2780 | 2685 | 1420 | 1950 |
| 3 B | 675 | 490 | 0 | 640 | 855 | 965 | 1550 | 1055 | 1550 | 1770 | 630 | 2590 | 2855 | 1845 | 1955 | 1910 | 1415 | 1940 | 2310 | 3265 | 2735 | 2835 | 3270 | 3175 | 1910 | 2440 |
| 4 C | 35 | 150 | 640 | 0 | 215 | 625 | 1210 | 715 | 1210 | 1430 | 290 | 2250 | 2515 | 1505 | 1615 | 1570 | 775 | 1600 | 1970 | 2925 | 2395 | 2495 | 2930 | 2835 | 1270 | 1800 |
| 5 D | 245 | 360 | 850 | 210 | 0 | 835 | 1420 | 925 | 1420 | 1640 | 500 | 2460 | 2725 | 1715 | 1825 | 1780 | 985 | 1810 | 2180 | 3135 | 2605 | 2705 | 3140 | 3045 | 1480 | 2010 |
| 6 E | 660 | 485 | 975 | 625 | 840 | 0 | 585 | 90 | 585 | 805 | 625 | 1625 | 1890 | 880 | 990 | 945 | 1400 | 975 | 1345 | 2300 | 1770 | 1870 | 2305 | 2210 | 1895 | 2425 |
| 7 F | 1130 | 1070 | 1560 | 1095 | 1310 | 585 | 0 | 560 | 1170 | 1390 | 1210 | 1040 | 1305 | 295 | 405 | 360 | 1870 | 390 | 760 | 1715 | 1185 | 1285 | 1720 | 1625 | 2060 | 2590 |
| 8 G | 570 | 555 | 1045 | 535 | 750 | 70 | 655 | 0 | 655 | 875 | 695 | 1695 | 1960 | 950 | 1060 | 1015 | 1310 | 1045 | 1415 | 2370 | 1840 | 1940 | 2375 | 2280 | 1805 | 2335 |
| 9 H | 1095 | 910 | 1400 | 1060 | 1275 | 590 | 1175 | 680 | 0 | 220 | 770 | 2215 | 2480 | 1470 | 1580 | 1535 | 1835 | 1565 | 1935 | 2890 | 2360 | 2460 | 2895 | 2800 | 2330 | 2860 |
| 10 I | 875 | 690 | 1180 | 840 | 1055 | 1165 | 1750 | 1255 | 1750 | 0 | 550 | 2790 | 3055 | 2045 | 2155 | 2110 | 1615 | 2140 | 2510 | 3465 | 2935 | 3035 | 3470 | 3375 | 2110 | 2640 |
| 11 J | 325 | 140 | 630 | 290 | 505 | 615 | 1200 | 705 | 1200 | 1420 | 0 | 2240 | 2505 | 1495 | 1605 | 1560 | 1065 | 1590 | 1960 | 2915 | 2385 | 2485 | 2920 | 2825 | 1560 | 2090 |
| 12 K | 2170 | 2110 | 2600 | 2135 | 2350 | 1625 | 1040 | 1600 | 2210 | 2430 | 2250 | 0 | 265 | 1335 | 1445 | 1400 | 2910 | 1430 | 1800 | 2755 | 2225 | 2325 | 2760 | 2665 | 3100 | 3630 |
| 13 L | 2460 | 2400 | 2890 | 2425 | 2640 | 1915 | 1330 | 1890 | 2500 | 2720 | 2540 | 290 | 0 | 1625 | 1735 | 1690 | 3200 | 1720 | 2090 | 3045 | 2515 | 2615 | 3050 | 2955 | 3390 | 3920 |
| 14 M | 1425 | 1365 | 1855 | 1390 | 1605 | 880 | 295 | 855 | 1465 | 1685 | 1505 | 1335 | 1600 | 0 | 110 | 655 | 2165 | 95 | 465 | 1420 | 890 | 990 | 1425 | 1330 | 1765 | 2295 |
| 15 N | 1525 | 1465 | 1955 | 1490 | 1705 | 980 | 395 | 955 | 1565 | 1785 | 1605 | 1435 | 1700 | 100 | 0 | 755 | 2265 | 185 | 555 | 1510 | 980 | 1080 | 1515 | 1420 | 1855 | 2385 |
| 16 P | 770 | 755 | 1245 | 735 | 950 | 270 | 855 | 200 | 855 | 1075 | 895 | 1895 | 2160 | 1150 | 1260 | 0 | 1510 | 1245 | 1615 | 2570 | 2040 | 2140 | 2575 | 2480 | 2005 | 2535 |
| 17 Q | 810 | 925 | 1415 | 775 | 990 | 1400 | 1985 | 1490 | 1985 | 2205 | 1065 | 3025 | 3290 | 2280 | 2390 | 2345 | 0 | 2375 | 2745 | 3700 | 3170 | 3270 | 3705 | 3610 | 495 | 1025 |
| 18 R | 1520 | 1460 | 1950 | 1485 | 1700 | 975 | 390 | 950 | 1560 | 1780 | 1600 | 1430 | 1695 | 95 | 205 | 750 | 2165 | 0 | 370 | 1325 | 795 | 895 | 1330 | 1235 | 1670 | 2200 |
| 19 S | 1890 | 1830 | 2320 | 1855 | 2070 | 1345 | 760 | 1320 | 1930 | 2150 | 1970 | 1800 | 2065 | 465 | 575 | 1120 | 1795 | 370 | 0 | 955 | 425 | 525 | 960 | 865 | 1300 | 1830 |
| 20 T | 2000 | 1940 | 2430 | 1965 | 2180 | 1455 | 870 | 1430 | 2040 | 2260 | 2080 | 1910 | 2175 | 575 | 685 | 1230 | 1905 | 480 | 110 | 0 | 535 | 635 | 1070 | 975 | 1410 | 1940 |
| 21 U | 2180 | 2295 | 2785 | 2145 | 2360 | 1985 | 1400 | 1960 | 2570 | 2790 | 2435 | 2440 | 2705 | 1105 | 1215 | 1760 | 1370 | 1010 | 640 | 530 | 0 | 100 | 535 | 440 | 875 | 1405 |
| 22 V | 2280 | 2370 | 2860 | 2245 | 2460 | 1885 | 1300 | 1860 | 2470 | 2690 | 2510 | 2340 | 2605 | 1005 | 1115 | 1660 | 1470 | 910 | 540 | 430 | 100 | 0 | 635 | 540 | 975 | 1505 |
| 23 W | 2715 | 2805 | 3295 | 2680 | 2895 | 2320 | 1735 | 2295 | 2905 | 3125 | 2945 | 2775 | 3040 | 1440 | 1550 | 2095 | 1905 | 1345 | 975 | 865 | 535 | 435 | 0 | 975 | 1410 | 1940 |
| 24 X | 1740 | 1855 | 2345 | 1705 | 1920 | 2330 | 1830 | 2390 | 2915 | 3135 | 1995 | 2870 | 3135 | 1535 | 1645 | 2190 | 930 | 1440 | 1070 | 960 | 630 | 530 | 95 | 0 | 435 | 965 |
| 25 Y | 1305 | 1420 | 1910 | 1270 | 1485 | 1895 | 2480 | 1985 | 2480 | 2700 | 1560 | 3520 | 3785 | 2775 | 2885 | 2840 | 495 | 2870 | 3240 | 4195 | 3665 | 3765 | 4200 | 4105 | 0 | 530 |
| 26 Z | 1835 | 1950 | 2440 | 1800 | 2015 | 2425 | 3010 | 2515 | 3010 | 3230 | 2090 | 4050 | 4315 | 3305 | 3415 | 3370 | 1025 | 3400 | 3770 | 4725 | 4195 | 4295 | 4730 | 4635 | 530 | 0 |

Zdroj: vlastní zpracování v programu MS Excel

Následujícím krokem algoritmu je nalezení v grafu G koncentrických a excentrických uzlů. Docílit toho se dá analýzou matice sousednosti W , v níž počet hodnot mezi 0 a 1000000 v i -tém sloupci reprezentuje vstupní stupeň vrcholu i , označenou jako d_i^- , zatímco počet takových hodnot v i -tém řádku reprezentuje pro daný vrchol jeho výstupní stupeň, d_i^+ . Rozdílem těchto hodnot vypočteme hodnotu δ_i , která bude kladná pro excentrické vrcholy a záporná pro koncentrické.

Tabulka 10 – vstupní stupně, výstupní stupně a δ_i jednotlivých uzlů

| i | Vrchol | d_i^- | d_i^+ | δ_i | i | Vrchol | d_i^- | d_i^+ | δ_i | i | Vrchol | d_i^- | d_i^+ | δ_i |
|----|--------|---------|---------|------------|---|--------|---------|---------|------------|---|--------|---------|---------|------------|
| 1 | O | 1 | 1 | 0 | | | | | | | | | | |
| 2 | A | 4 | 4 | 0 | | | | | | | | | | |
| 3 | B | 1 | 1 | 0 | | | | | | | | | | |
| 4 | C | 4 | 5 | -1 | | | | | | | | | | |
| 5 | D | 1 | 1 | 0 | | | | | | | | | | |
| 6 | E | 4 | 4 | 0 | | | | | | | | | | |
| 7 | F | 4 | 3 | 1 | | | | | | | | | | |
| 8 | G | 2 | 2 | 0 | | | | | | | | | | |
| 9 | H | 2 | 1 | 1 | | | | | | | | | | |
| 10 | I | 1 | 1 | 0 | | | | | | | | | | |
| 11 | J | 1 | 2 | -1 | | | | | | | | | | |
| 12 | K | 2 | 2 | 0 | | | | | | | | | | |
| 13 | L | 1 | 1 | 0 | | | | | | | | | | |
| 14 | M | 3 | 3 | 0 | | | | | | | | | | |
| 15 | N | 2 | 1 | 1 | | | | | | | | | | |
| 16 | P | 1 | 1 | 0 | | | | | | | | | | |
| 17 | Q | 2 | 2 | 0 | | | | | | | | | | |
| 18 | R | 2 | 3 | -1 | | | | | | | | | | |
| 19 | S | 2 | 2 | 0 | | | | | | | | | | |
| 20 | T | 1 | 1 | 0 | | | | | | | | | | |
| 21 | U | 2 | 2 | 0 | | | | | | | | | | |
| 22 | V | 2 | 2 | 0 | | | | | | | | | | |
| 23 | W | 1 | 1 | 0 | | | | | | | | | | |
| 24 | X | 2 | 1 | 1 | | | | | | | | | | |
| 25 | Y | 2 | 3 | -1 | | | | | | | | | | |
| 26 | Z | 1 | 1 | 0 | | | | | | | | | | |

Zdroj: vlastní zpracování v programu MS Excel

Tabulka 10 udává koncentrické vrcholy C, J, R a Y a excentrické vrcholy F, H, N a X. Řešení přiřazovací úlohy nalezení nejkratší možné kombinace cest z koncentrických do

excentrických vrcholů je následujícím krokem v algoritmu Edmondse-Johnsona. Využitím hodnot z matice **S** vytvoříme počáteční tabulku pro řešení této úlohy maďarskou metodou.

Tabulka 11 – počáteční tabulka pro řešení přiřazovací úlohy maďarskou metodou

| | F | H | N | X |
|---|------|------|------|------|
| C | 1210 | 1210 | 1615 | 2835 |
| J | 1200 | 1200 | 1605 | 2825 |
| R | 390 | 1560 | 205 | 1235 |
| Y | 2480 | 2480 | 2885 | 4105 |

Zdroj: vlastní zpracování v programu MS Excel

Provedení řádkové redukce vyžaduje odečtení nejmenší hodnoty v řádku od všech hodnot v daném řádku. Po řádkové redukci tabulka má následující tvar:

Tabulka 12 – tabulka 11 po provedení řádkové redukce

| | F | H | N | X |
|---|-----|------|-----|------|
| C | 0 | 0 | 405 | 1625 |
| J | 0 | 0 | 405 | 1625 |
| R | 185 | 1355 | 0 | 1030 |
| Y | 0 | 0 | 405 | 1625 |

Zdroj: vlastní zpracování v programu MS Excel

Analogickým způsobem se provádí sloupcová redukce, po čemž se považuje za provedenou i redukce primární.

Tabulka 13 – tabulka 11 po provedení primární redukce s krycími čáry

| | F | H | N | X |
|---|-----|------|-----|-----|
| C | 0 | 0 | 405 | 595 |
| J | 0 | 0 | 405 | 595 |
| R | 185 | 1355 | 0 | 0 |
| Y | 0 | 0 | 405 | 595 |

Zdroj: vlastní zpracování v programu MS Excel

Tabulka 11 vyžaduje použití jenom tří krycích čar a neobsahuje množinu z n nezávislých nul. Potřebuje se provedení sekundární redukce.

Tabulka 14 – tabulka 13 po provedení sekundární redukce

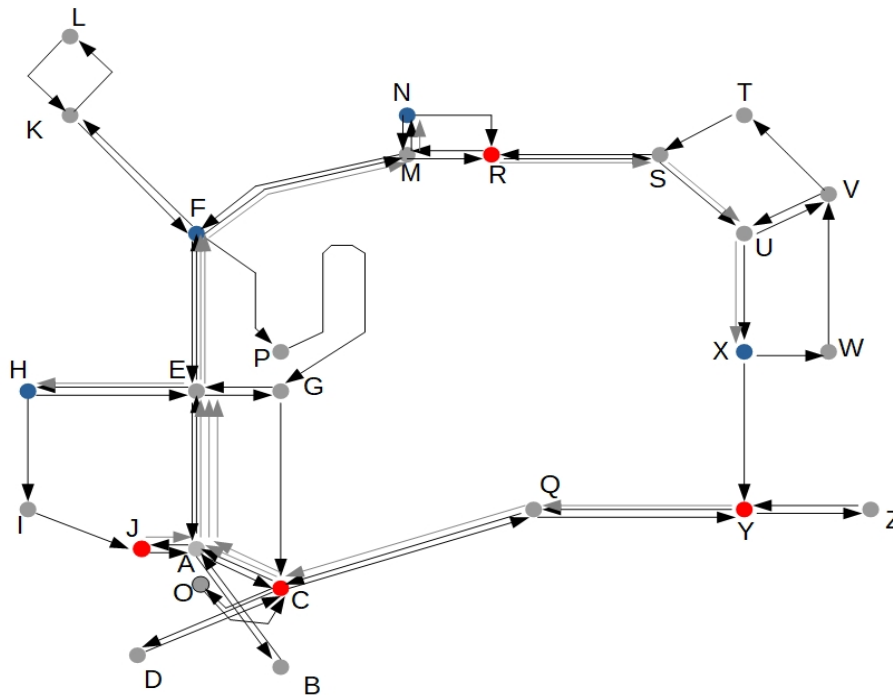
| | F | H | N | X |
|---|-----|------|---|-----|
| C | 0 | 0 | 0 | 190 |
| J | 0 | 0 | 0 | 190 |
| R | 580 | 1750 | 0 | 0 |
| Y | 0 | 0 | 0 | 190 |

Zdroj: vlastní zpracování v programu MS Excel

Po provedení sekundární redukce tabulka obsahuje jednu slabě nezávislou nulu, odpovídající orientované cestě $R \rightarrow X$. Po vynechání R a X z řešení je zřejmé, že úloha je degenerovaná a ostatní uzly mohou být spojeny v libovolné kombinaci. Pro účely práce byly

vybrány spojení $J \rightarrow F$, $C \rightarrow H$ a $Y \rightarrow N$. Korespondující řešení přiřazovací úlohy cesty byly dostaveny v grafu G . Následující graf G' má všechny vrcholy stupně 0, čímž splňuje podmínky existence Eulerovského cyklu a tím i cyklu čínského listonoše.

Obrázek 12 – graf G' obsahující Eulerovský cyklus



Zdroj: vlastní zpracování v programu LibreOffice Draw

Nalezení samotného cyklu čínského listonoše může být provedeno použitím algoritmů Fleuryho a Hierholzera. V rámci této práce tyto algoritmy nebyly popsány z důvodu omezení objemu práce, a použity taky nebudou. Vzhledem k větší flexibilitě výsledků (čímž se myslí možnost sestavit více variant cyklu čínského listonoše ze stejného vstupu) nalezení cyklů čínského listonoše bylo provedeno manuálně s potřebnou úpravou cyklů pro účely heuristiky FHK.

4.2.2. Nalezení 3-min-max-cyklů čínského listonoše heuristikou FHK

Heuristickému algoritmu FHK byly podrobeny celkem 8 cyklů čínského listonoše uvedených níže ve formě posloupností procházených vrcholů:

Tabulka 15 - navržené cykly čínského listonoše

| | | Posloupnost vrcholů |
|--------|---|---|
| Cyklus | 1 | O-C-A-E-F-K-L-K-F-M-R-S-U-V-T-S-U-X-W-V-U-X-Y-Z-Y-Q-C-D-C-Q-Y-Q-C-A-B-A-J-A-C-A-E-H-I-J-A-E-F-M-N-M-N-R-S-R-M-F-E-H-E-A-E-F-P-G-E-G-C-O |
| | 2 | O-C-A-J-A-E-H-I-J-A-E-F-K-L-K-F-M-R-S-U-V-T-S-U-X-W-V-U-X-Y-Q-C-A-B-A-C-D-C-Q-Y-Z-Y-Q-C-A-E-F-M-N-M-N-R-S-R-M-F-E-H-E-A-E-F-P-G-E-G-C-O |
| | 3 | O-C-A-J-A-B-A-C-A-E-H-I-J-A-E-F-K-L-K-F-M-R-S-U-V-T-S-U-X-W-V-U-X-Y-Z-Y-Q-C-D-C-Q-Y-Q-C-A-E-F-M-N-M-N-R-S-R-M-F-E-H-E-A-E-F-P-G-E-G-C-O |
| | 4 | O-C-D-C-Q-Y-Z-Y-Q-C-A-J-A-B-A-E-H-I-J-A-E-F-K-L-K-F-M-R-S-U-V-T-S-U-X-W-V-U-X-Y-Q-C-A-C-A-E-F-M-N-M-N-R-S-R-M-F-E-H-E-A-E-F-P-G-E-G-C-O |
| | 5 | O-C-D-C-A-J-A-B-A-E-H-I-J-A-E-F-K-L-K-F-M-R-S-U-V-T-S-U-X-W-V-U-X-Y-Q-C-A-C-Q-Y-Z-Y-Q-C-A-E-F-M-N-M-N-R-S-R-M-F-E-H-E-A-E-F-P-G-E-G-C-O |
| | 6 | O-C-A-B-A-C-D-C-A-E-F-K-L-K-F-M-R-S-U-V-T-S-U-X-W-V-U-X-Y-Q-C-Q-Y-Z-Y-Q-C-A-E-H-I-J-A-J-A-E-F-M-N-M-N-R-S-R-M-F-E-H-E-A-E-F-P-G-E-G-C-O |
| | 7 | O-C-Q-Y-Q-C-A-E-F-K-L-K-F-M-R-S-U-V-T-S-U-X-W-V-U-X-Y-Z-Y-Q-C-D-C-A-J-A-B-A-C-A-E-H-I-J-A-E-F-M-N-M-N-R-S-R-M-F-E-H-E-A-E-F-P-G-E-G-C-O |
| | 8 | O-C-A-J-A-B-A-C-D-C-Q-Y-Z-Y-Q-C-A-E-H-I-J-A-E-F-K-L-K-F-M-R-S-U-V-T-S-U-X-W-V-U-X-Y-Q-C-A-E-F-M-N-M-N-R-S-R-M-F-E-H-E-A-E-F-P-G-E-G-C-O |

Zdroj: vlastní zpracování v programu MS Excel

Z důvodu omezení objemu práce níže bude uveden postup rozdělení jenom jednoho z těchto cyklů, zcela analogický z hlediska postupu rozdělením jiných cyklů. Tabulky s provedením výpočtů pro ostatní cykly budou součástí přílohy k dané bakalářské práci. Jako příklad pro ukázání postupu provedení algoritmu náhodným losováním byl vybrán cyklus číslo 2.

Před začátkem algoritmu je potřeba dopočítání vstupních hodnot s_{max} a L_j pro $j = \{1,2\}$. s_{max} je definována pomocí vzorce

$$s_{max} = \frac{\max \{s(v_1, v_{ij}) + c(v_{ij}, v_{ij+1}) + s(v_{ij+1}, v_1)\}}{2} \quad (4.1),$$

zatímco vzorec pro výpočet L_j zní

$$L_j = \frac{j}{k}(L - 2s_{max}) + s_{max} \quad \text{pro } j \in \{1; k\} \quad (4.2).$$

Pomocí již nalezených matic \mathbf{W} obsahující ceny jednotlivých hran a \mathbf{S} obsahující ohodnocení nejkratších cest z výchozího bodu O a do něj byla sestavená následující tabulka:

Tabulka 16 – výpočet s_{\max} a L_j

| | OD | DO | $s(O, v_{ij})$ | $c(v_{ij}, v_{ij+1})$ | $s(v_{ij+1}, O)$ | SUM | $c(R_j)$ |
|----|----|----|----------------|-----------------------|------------------|------|----------|
| 1 | O | C | 0 | 35 | 35 | 70 | 35 |
| 2 | C | A | 35 | 150 | 185 | 370 | 185 |
| 3 | A | J | 185 | 140 | 325 | 650 | 325 |
| 4 | J | A | 325 | 140 | 185 | 650 | 465 |
| 5 | A | E | 185 | 475 | 660 | 1320 | 940 |
| 6 | E | H | 660 | 585 | 1095 | 2340 | 1525 |
| 7 | H | I | 1245 | 220 | 875 | 2340 | 1745 |
| 8 | I | J | 1465 | 550 | 325 | 2340 | 2295 |
| 9 | J | A | 325 | 140 | 185 | 650 | 2435 |
| 10 | A | E | 185 | 475 | 660 | 1320 | 2910 |
| 11 | E | F | 660 | 585 | 1130 | 2375 | 3495 |
| 12 | F | K | 1245 | 1040 | 2170 | 4455 | 4535 |
| 13 | K | L | 2285 | 265 | 2460 | 5010 | 4800 |
| 14 | L | K | 2550 | 290 | 2170 | 5010 | 5090 |
| 15 | K | F | 2285 | 1040 | 1130 | 4455 | 6130 |
| 16 | F | M | 1245 | 295 | 1425 | 2965 | 6425 |
| 17 | M | R | 1540 | 95 | 1520 | 3155 | 6520 |
| 18 | R | S | 1635 | 370 | 1890 | 3895 | 6890 |
| 19 | S | U | 2005 | 425 | 2180 | 4610 | 7315 |
| 20 | U | V | 2430 | 100 | 2280 | 4810 | 7415 |
| 21 | V | T | 2530 | 430 | 2000 | 4960 | 7845 |
| 22 | T | S | 2960 | 110 | 1890 | 4960 | 7955 |
| 23 | S | U | 2005 | 425 | 2180 | 4610 | 8380 |
| 24 | U | X | 2430 | 440 | 1740 | 4610 | 8820 |
| 25 | X | W | 2870 | 95 | 2715 | 5680 | 8915 |
| 26 | W | V | 2965 | 435 | 2280 | 5680 | 9350 |
| 27 | V | U | 2530 | 100 | 2180 | 4810 | 9450 |
| 28 | U | X | 2430 | 440 | 1740 | 4610 | 9890 |
| 29 | X | Y | 2870 | 435 | 1305 | 4610 | 10325 |
| 30 | Y | Q | 1305 | 495 | 810 | 2610 | 10820 |
| 31 | Q | C | 810 | 775 | 35 | 1620 | 11595 |
| 32 | C | A | 35 | 150 | 185 | 370 | 11745 |
| 33 | A | B | 185 | 490 | 675 | 1350 | 12235 |
| 34 | B | A | 675 | 490 | 185 | 1350 | 12725 |

| | OD | DO | $s(O, v_{ij})$ | $c(v_{ij}, v_{ij+1})$ | $s(v_{ij+1}, O)$ | SUM | $c(R_j)$ |
|------------|----|----|----------------|-----------------------|------------------|------|----------|
| 35 | A | C | 185 | 150 | 35 | 370 | 12875 |
| 36 | C | D | 35 | 215 | 245 | 495 | 13090 |
| 37 | D | C | 250 | 210 | 35 | 495 | 13300 |
| 38 | C | Q | 35 | 775 | 810 | 1620 | 14075 |
| 39 | Q | Y | 810 | 495 | 1305 | 2610 | 14570 |
| 40 | Y | Z | 1305 | 530 | 1835 | 3670 | 15100 |
| 41 | Z | Y | 1835 | 530 | 1305 | 3670 | 15630 |
| 42 | Y | Q | 1305 | 495 | 810 | 2610 | 16125 |
| 43 | Q | C | 810 | 775 | 35 | 1620 | 16900 |
| 44 | C | A | 35 | 150 | 185 | 370 | 17050 |
| 45 | A | E | 185 | 475 | 660 | 1320 | 17525 |
| 46 | E | F | 660 | 585 | 1130 | 2375 | 18110 |
| 47 | F | M | 1245 | 295 | 1425 | 2965 | 18405 |
| 48 | M | N | 1540 | 110 | 1525 | 3175 | 18515 |
| 49 | N | M | 1650 | 100 | 1425 | 3175 | 18615 |
| 50 | M | N | 1540 | 110 | 1525 | 3175 | 18725 |
| 51 | N | R | 1650 | 185 | 1520 | 3355 | 18910 |
| 52 | R | S | 1635 | 370 | 1890 | 3895 | 19280 |
| 53 | S | R | 2005 | 370 | 1520 | 3895 | 19650 |
| 54 | R | M | 1635 | 95 | 1425 | 3155 | 19745 |
| 55 | M | F | 1540 | 295 | 1130 | 2965 | 20040 |
| 56 | F | E | 1245 | 585 | 660 | 2490 | 20625 |
| 57 | E | H | 660 | 585 | 1095 | 2340 | 21210 |
| 58 | H | E | 1245 | 590 | 660 | 2495 | 21800 |
| 59 | E | A | 660 | 485 | 185 | 1330 | 22285 |
| 60 | A | E | 185 | 475 | 660 | 1320 | 22760 |
| 61 | E | F | 660 | 585 | 1130 | 2375 | 23345 |
| 62 | F | P | 1245 | 360 | 770 | 2375 | 23705 |
| 63 | P | G | 1605 | 200 | 570 | 2375 | 23905 |
| 64 | G | E | 750 | 70 | 660 | 1480 | 23975 |
| 65 | E | G | 660 | 90 | 570 | 1320 | 24065 |
| 66 | G | C | 750 | 535 | 35 | 1320 | 24600 |
| 67 | C | O | 35 | 35 | 0 | 70 | 24635 |
| L | | | | | | | 24635 |
| s_{\max} | | | | | | | 2840 |

Zdroj: vlastní zpracování v programu MS Excel

Sloupec SUM obsahuje součty hodnot $s(v_1, v_{ij})$, $c(v_{ij}, v_{ij+1})$ a $s(v_{ij+1}, v_1)$. Nalezením maximální hodnoty ve sloupci a vydělením ji 2 se vypočítá hodnota s_{max} , která pro G' činí 2840 metrů. Celková délka cesty čínského listonoše se rovná součtu délek jednotlivých hran a činí 24 635 metrů.

S využitím těchto hodnot podle vzorce (4.2) se dá nalézt i hodnoty L_1 a L_2 .

Tabulka 17 – hodnoty L_j

| j | L_j |
|---|------------|
| 1 | 9158,33333 |
| 2 | 15476,6667 |

Zdroj: vlastní zpracování v programu MS Excel

Následujícím krokem algoritmu je nalezení posledních vrcholů, v nichž sumární délka „ujeté“ cesty čínského listonoše (v tabulce číslo 16 obsazená ve sloupci $c(R_j)$) je menší než L_j , tj. vrcholů $v_{p'(1)}$, $v_{p'(2)}$. Jsou to vrcholy W a Z. Body, kde cesta se podle heuristiky FHK musí rozdělit, leží na hranách WV a ZY. Kvůli nemožnosti rozdělit jednotlivou hranu tak, aby byla částečně procházena technikou z jedné trasy a částečně technikou z trasy druhé, musíme pak zvolit vrchol, kde skončí předchozí trasa a začne následující, a to pro obě výše uvedené hrany.

Pro toto rozhodnutí byly vypočteny hodnoty r_j , tj. rozdílu mezi délkou cesty ČL do daného vrcholu $v_{p'(j)}$ a korespondující L_j . Vrchol, kde cesta ČL se dělí na jednotlivé trasy, je dále určen podle metodiky popsané v 3. kroku algoritmu FHK v kapitole 3.2.2.5. Min-max k-CPP Podle výpočtů, vhodnými vrcholy pro rozdělení cesty jsou V a Y.

Tabulka 18 – určení vrcholů pro rozdělení cesty

| J | 1 | 2 |
|-------------------------|---------|---------|
| $v_{p'j}$ | W | Z |
| $v_{p'j+1}$ | V | Y |
| R_j | 243,333 | 376,667 |
| $s(v_{p'j}, O)$ | 2715 | 1835 |
| sum A | 2958,33 | 2211,67 |
| $c(v_{p'j}, v_{p'j+1})$ | 435 | 530 |
| $s(v_{p'j+1}, O)$ | 2280 | 1305 |
| sum B | 2471,67 | 1458,33 |
| V_{pj} | V | Y |

Zdroj: vlastní zpracování v programu MS Excel

Posledním krokem algoritmu je sestavení cest $O \rightarrow V$, $V \rightarrow Y$ a $Y \rightarrow O$ se stejnou posloupností procházených vrcholů jako ve vstupní cestě čínského listonoše, přičemž

výchozí bod O a konečné a počáteční body všech tří tras musí být spojeny nejkratšími cestami. Trasy podle heuristiky FHK tím pádem by musely mít následující podobu:

- 1) O-C-A-J-A-E-H-I-J-A-E-F-K-L-K-F-M-R-S-U-V-T-S-U-X-W-V-U-X-Y-Q-C-O s celkovou délkou 11 630 metrů;
- 2) O-C-A-E-F-M-R-S-U-V-U-X-Y-Q-C-A-B-A-C-D-C-Q-Y-Z-Y-Q-C-O s celkovou délkou 10 115 metrů;
- 3) O-C-Q-Y-Q-C-A-E-F-M-N-M-N-R-S-R-M-F-E-H-E-A-E-F-P-G-E-G-C-O s celkovou délkou 10 310 metrů.

Nyní se objevuje problém, že sumární délka cest nabízených jako výstup z algoritmu činí 32 055 metrů, což převyšuje celkovou délku cesty čínského listonoše o 7 420 metrů. Tato odchylka od optimální délky je zdůvodněna potřebou procházet některé hrany vícekrát než vyžaduje 1-cesta čínského listonoše. Například, hrana CA se prochází čtyřikrát, zatímco pro úplné procházení grafem by stačilo využití této hrany jenom třikrát. Výsledné třicetiprocentní převýšení optimální délky 1-trasy ČL dělá tento výsledek úplně neuspokojivým.

Lepší řešení tohoto problému lze najít odstraněním zbytečně procházených hran. Lze pozorovat, že trasa číslo 2 po návratu do vrcholu V prochází stejnou posloupností vrcholů V-U-X-Y-Q-C jako část trasy č. 1 odpovídající návratu z vrcholu V do vrcholu O. Začátek trasy číslo 3 zbytečně prochází posloupnost Y-Q-C již využitou trasou č. 2. Tím pádem, smysluplnou bude úprava tras nalezených pomocí algoritmu FHK na následující podobu:

- 1) O-C-A-J-A-E-H-I-J-A-E-F-K-L-K-F-M-R-S-U-V-T-S-U-X-W-V-U-X-Y-Q-C-O s celkovou délkou 11 630 metrů;
- 2) O-C-D-C-Q-Y-Q-C-A-B-A-J-A-C-O s celkovou délkou 5 375 metrů;
- 3) O-C-A-E-F-M-N-M-N-R-S-R-M-F-E-H-E-A-E-F-P-G-E-G-C-O s celkovou délkou 7 770 metrů.

Celková délka těchto tří tras činí dohromady 24 775 metrů, což odpovídá délce 1-cesty čínského listonoše zvětšené o 140 metrů. Tato odchylka tvoří nezbytné minimum a existuje kvůli potřebě přidat k 1-cestě čínského listonoše, která vyžaduje výjezd a zájezd na parkoviště jenom jednou, hrany OC a CO s váhou 35 metrů představující výjezd, respektive zájezd zpět na parkoviště jednou na každou dodatečnou trasu.

4.3. Analýza tras podniku a srovnání s navrženými trasami

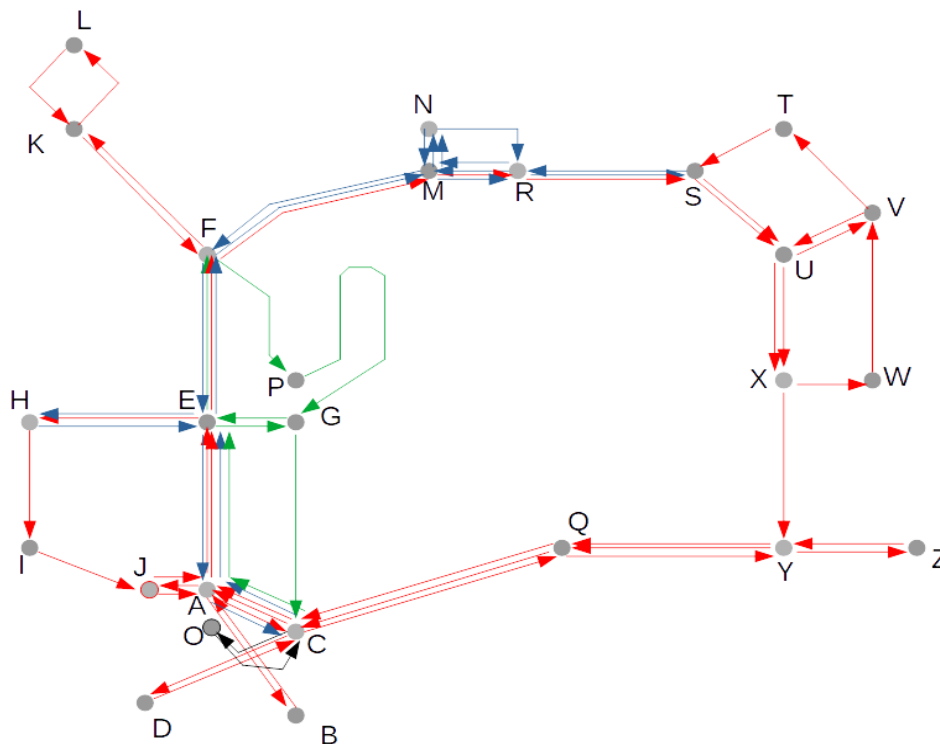
4.3.1. Analýza tras podniku

Současně používané podnikem trasy zadané pomocí posloupností procházených vrcholů jsou:

- 1) O-C-A-J-A-B-A-C-D-C-Q-Y-Z-Y-Q-C-A-E-H-I-J-A-E-F-K-L-K-F-M-R-S-U-V-T-S-U-X-W-V-U-X-Y-Q-C-O s celkovou délkou 16 935 metrů;
- 2) O-C-A-E-F-M-R-S-R-M-N-R-M-N-M-F-E-H-E-A-C s celkovou délkou 5 795 metrů;
- 3) O-C-A-E-F-P-G-E-G-C s celkovou délkou 2 535 metrů.

Dohromady tři trasy podniku mají délku 25 265 m, což je o 490 metrů více než sumární délka tras nalezených pomocí heuristiky FHK. Pro pochopení příčin existence tohoto rozdílu je vhodné použití grafické reprezentace tras podniku.

Obrázek 13 – graf P s grafickou reprezentací tras podniku



Zdroj: vlastní zpracování v programu LibreOffice Draw

Z analýzy grafu **P** je zřejmé, že liší se od grafu **G'** (Obrázek 12) s optimální Eulerovskou cestou tím, že obsahuje navíc čtyři hrany, a to CA, AC, MR a RM, jejichž sumární délka podle matice sousednosti **W** činí $150 + 150 + 95 + 95 = 490$ metrů.

Poslední důležitou otázkou je délka tras s ohledem na potřebný počet techniky pro procházení trasy podle podnikových požadavků, tj. řadou vozů uklízejících celou ulici najednou. Prakticky to znamená, že celá trasa je projížďena počtem techniky potřebným pro uklízení jejího nejširšího úseku. Z toho plyne potřeba vypočíst počet techniky potřebný pro uklízení jednotlivého úseku trasy, jinými slovy, ohodnotit jednotlivé hrany grafu podle počtu vozů potřebných pro jejich úklid najednou v nejširším místě.

Ohodnocení bylo provedeno podle doporučené podnikovými odborníky metodiky, tj. pomocí servisu Google Maps. Parametry techniky byly nalezeny na oficiálních webových stránkách výrobců.

Tabulka 19 – matice sousednosti B s ohodnoceními jednotlivých hran podle počtu techniky

| B | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| | O | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
| 1 O | 0 | ### | ### | 0 | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### |
| 2 A | ### | 0 | 4 | 3 | ### | 7 | ### | ### | ### | ### | 4 | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### |
| 3 B | ### | 4 | 0 | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### |
| 4 C | 0 | 3 | ### | 0 | 4 | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | 2 | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### |
| 5 D | ### | ### | ### | 4 | 0 | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### |
| 6 E | ### | 1 | ### | ### | ### | 0 | 7 | 1 | 3 | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### |
| 7 F | ### | ### | ### | ### | ### | 1 | 0 | ### | ### | ### | ### | 6 | ### | 7 | ### | 1 | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### |
| 8 G | ### | ### | ### | 1 | ### | 1 | ### | 0 | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### |
| 9 H | ### | ### | ### | ### | ### | 1 | ### | ### | 0 | 4 | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### |
| 10 I | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | 0 | 4 | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### |
| 11 J | ### | 4 | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | 0 | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### |
| 12 K | ### | ### | ### | ### | ### | ### | 5 | ### | ### | ### | ### | 0 | 4 | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### |
| 13 L | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | 7 | 0 | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### |
| 14 M | ### | ### | ### | ### | ### | ### | 1 | ### | ### | ### | ### | ### | 0 | 1 | ### | ### | 7 | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### |
| 15 N | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | 1 | 0 | ### | ### | 1 | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### |
| 16 P | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | 1 | ### | ### | ### | ### | ### | 0 | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### |
| 17 Q | ### | ### | ### | 4 | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | 0 | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | 4 | ### |
| 18 R | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | 1 | ### | ### | ### | 0 | 6 | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### |
| 19 S | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | 1 | 0 | ### | 6 | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### |
| 20 T | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | 3 | 0 | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### |
| 21 U | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | 0 | 4 | ### | 5 | ### | ### | ### | ### |
| 22 V | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | 3 | 1 | 0 | ### | ### | ### | ### | ### |
| 23 W | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | 4 | 0 | ### | ### | ### | ### | ### |
| 24 X | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | 3 | 0 | 7 | ### | ### |
| 25 Y | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | 4 | ### | ### | ### | ### | ### | ### | 0 | 3 | ### |
| 26 Z | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | ### | 3 | 0 | ### |

Zdroj: vlastní zpracování v programu MS Excel

Následujícím krokem analýzy bylo nalezení maximálního počtu techniky potřebného pro procházení jednotlivých tras následujícím algoritmem:

1. Najít nejširší hranu trasy č. 1 a přiřadit její šířku trase jako počet potřebné techniky.
2. Pro další trasy najít nejširší hrany nepoužité ve předchozích trasách a přiřadit jejich šířky odpovídajícím trasám.

Analýza ukázala, že pro procházení trasy č. 1 se vyžaduje 7 jednotek techniky, pro procházení trasy č. 2 1 jednotka a pro procházení trasy č. 3 1 jednotka techniky.

Sumární vzdálenost cesty všech jednotek techniky D_s lze nalézt podle vzorce

$$D_s = \sum_{i=1}^3 L_i B_{\max i} \quad (4.3),$$

kdež L_i je celková délka i -té trasy a $B_{\max i}$ je potřebný počet techniky na procházení i -té trasy. Pro podnikový plán rozdělení ODCh tato hodnota činí $7 \times 16\,935 + 1 \times 5\,795 + 1 \times 2\,535 = 126\,875$ metrů.

4.3.2. Srovnání navržených plánů s plánem podniku

Navržené pomoci heuristiky FHK plány rozdělení ODCh na trasy se ohodnocovaly podle dvou minimalizačních kritérií:

- Délka nejdelší trasy;
- Sumární vzdálenost cesty jednotek techniky.

Tabulka 20 – ohodnocení jednotlivých plánů podle délky nejdelší trasy

| Plán | L_i | | | Celkem | MAX(L_i) |
|------|-------|-------|-------|--------|--------------|
| | 1 | 2 | 3 | | |
| 1 | 9385 | 4795 | 10595 | 24775 | 10595 |
| 2 | 11630 | 5375 | 7770 | 24775 | 11630 |
| 3 | 13970 | 3035 | 7770 | 24775 | 13970 |
| 4 | 4095 | 12910 | 7770 | 24775 | 12910 |
| 5 | 13035 | 3970 | 7770 | 24775 | 13035 |
| 6 | 11085 | 3070 | 10620 | 24775 | 11085 |
| 7 | 2610 | 12425 | 9740 | 24775 | 12425 |
| 8 | 5655 | 11350 | 7770 | 24775 | 11350 |
| ORIG | 16935 | 5795 | 2535 | 25265 | 16935 |

Zdroj: vlastní zpracování v programu MS Excel

Tabulka 21 – ohodnocení jednotlivých plánů podle sumární vzdálenosti cesty techniky D_s

| Plán | $B_{\max(i)}$ | | | D_{s_i} |
|------|---------------|---|---|-----------|
| | 1 | 2 | 3 | |
| 1 | 7 | 4 | 4 | 127255 |
| 2 | 7 | 4 | 1 | 110680 |
| 3 | 7 | 4 | 1 | 117700 |
| 4 | 4 | 7 | 1 | 114520 |
| 5 | 7 | 4 | 1 | 114895 |
| 6 | 7 | 4 | 4 | 132355 |
| 7 | 4 | 7 | 4 | 136375 |
| 8 | 4 | 7 | 1 | 109840 |
| ORIG | 7 | 1 | 1 | 126875 |

Zdroj: vlastní zpracování v programu MS Excel

Podle analýzy výsledků metodou váženého součtu (Šubrt a kol., s. 171) se zohledňováním obou těchto kritérií nejlepšími plány jsou varianty číslo 2 a 8 uvedené v tabulce 22.

Tabulka 22 – plány rozdělení ODCh na trasy číslo 2 a 8

| Plán | Trasa | Posloupnost vrcholů | L_i | D_s |
|------|-------|---|-------|--------|
| 2 | 1 | O-C-A-J-A-E-H-I-J-A-E-F-K-L-K-F-M-R-S-U-V-T-S-U-X-W-V-U-X-Y-Q-C-O | 11630 | 110680 |
| | 2 | O-C-A-B-A-C-D-C-Q-Y-Z-Y-Q-C-O | 5375 | |
| | 3 | O-C-A-E-F-M-N-M-N-R-S-R-M-F-E-H-E-A-E-F-P-G-E-G-C-O | 7770 | |
| 8 | 1 | O-C-A-J-A-B-A-C-D-C-Q-Y-Z-Y-Q-C-O | 5655 | 109840 |
| | 2 | O-C-A-E-H-I-J-A-E-F-K-L-K-F-M-R-S-U-V-T-S-U-X-W-V-U-X-Y-Q-C-O | 11350 | |
| | 3 | O-C-A-E-F-M-N-M-N-R-S-R-M-F-E-H-E-A-E-F-P-G-E-G-C-O | 7770 | |

Zdroj: vlastní zpracování v programu MS Excel

Ve srovnání s originálním plánem podniku plán číslo 2 zkracuje nejdelší trasu o 5305 metrů, což dělá 31,33 % délky nejdelší trasy v současném podnikovém plánu. Za předpokladu stále rychlosti pohybu techniky mohlo by to znamenat stejné snížení doby průjezdu celým úsekem ulic. Celková vzdálenost pohybu techniky ve srovnání s podnikovým plánem je snížena o 16 195 metrů, tj. o 12,76 %.

Plán číslo 8 má nejdelší trasu kratší vůči podnikové o 5 585 metrů, tj. o 32,98 % původní délky trasy. Celkovou vzdálenost pohybu techniky podle tohoto plánu v rámci modelu by se podařilo snížit o 17 035 metrů, tj. o 13,43 % původní celkové vzdálenosti.

Snížení doby potřebné pro procházení úseku by podle mých představ nesnižovalo náklady na práci kvůli nepřetržitému 24hodinovému provozu zavedenému v podniku na daném úseku ulic. Nicméně, dá se pokusit o ohodnocení ekonomického efektu snížení celkové vzdálenosti pohybu techniky D_s hlavně z hlediska ekonomie paliva.

Různé zdroje uvádějí různé hodnoty spotřeby paliva pro nákladní auto KAMAZ-53605, které je převážně používaným modelem techniky na zkoumaném ODCh. Většina zdrojů však uvádí hodnotu 26 l diesellového paliva na 100 km. Při poněkud optimisticky vzaté ceně 30 rublů za 1 l paliva použití navržených v rámci této práce plánů 2 a 8 by dovolilo ušetřit 126, respektive 133 rublů za každé procházení celého ODCh. Po vyjádření v dolarech USA podle kurzu od 20.02.2021 tyto hodnoty vycházejí na 1,70\$ a 1,80\$.

5. Závěr

Bakalářská práce „Návrh optimálních tras pro techniku údržby ulic“ byla věnována řešení problému čínského listonoše a jeho podtypu, min-max k-problému čínského listonoše. Cílem práce byl návrh optimálních plánů tras procházejících celý vybraný úsek ulic ve středu města Moskvy za účelem snížení nákladu zejména na pohonné hmoty.

První teoretická část práce obsahuje popis obecné problematiky komunálních služeb, zejména problematiky služeb úklidu vozovek v zimním období. Následně jsou v rámci teoretické části práce uvedeny základy teorie grafů včetně pojmů a dílčích metodik potřebných pro vysvětlení a řešení problému čínského listonoše nebo jeho jednotlivých podtypů.

Druhá praktická část práce zahrnuje stručnou charakteristiku podniku a jeho požadavků kladených na návrh plánu, což dovoluje přesně stanovit řešený podtyp problému. Problém je charakterizován jako min-max k-problém čínského listonoše z důvodu časového omezení doby procházení celého úseku ulic a požadavku podniku ohledně počtu tras v jednotlivém plánu. Maximální délka trasy v plánu L_{max} , sumární délka tras L a vzdálenost pohybu jednotek techniky D_s jsou považovány v rámci práce za hlavní parametry relevantní pro nalezení optimálního řešení dané úlohy. Snadně kvantifikovatelný vliv tyto parametry mají jenom na spotřebu pohonných hmot. Hodnoty jiných parametrů jsou v rámci modelu považovány za rovné korespondujícím hodnotám ve výchozím podnikovém plánu tras vzhledem k obtížné kvantifikaci efektů jejich změn na výsledná řešení.

Po charakteristice podniku a úlohy následuje tvorba matematického modelu pro řešení úlohy a řešení orientovaného problému čínského listonoše pomocí Edmonds-Johnsonovy metody. Výsledkem tohoto řešení z pohledu matematického modelu je upravený výchozí graf obsahující cyklus čínského listonoše.

Osmdesát variant cyklu čínského listonoše byly dále podrobeny heuristické metodice FHK pro řešení min-max k-problému čínského listonoše. Kvalita vytvořených pomocí heuristiky řešení výrazně záležela na vstupním pro danou heuristiku cyklu čínského listonoše. Veškeré navržené podle dané heuristiky plány tras však měly sumární délku tras menší vůči podnikovému plánu o 490 metrů, což tvoří 1,94 % sumární délky tras v podnikovém plánu. Kvalita řešení byla dále hodnocena podle L_{max} a D_s . Podle dvou nejlepších řešení byly tyto

hodnoty zmenšeny o 5 305 m (31,33 %) a 16 195 m (12,76 %), respektive o 5 585 m (32,98 %) a 17 035 m (13,43 %).

Větší praktický přínos spojený především se zmenšením doby potřebné na úklid daného úseku ulic vyplývá ze zkrácení nejdelších tras ve dvou optimálních plánech. Zkrácení celkové vzdálenosti pohybu jednotek techniky autor považuje za vedlejší výsledek optimalizace kvůli skoro zanedbatelným ekonomickým úsporám vyplývajícím z použití navržených plánů tras. Nicméně, lze konstatovat, že podle všech tří zkoumaných parametrů nejlepší z navržených plánů mají přednost vůči současně používanému plánu podniku. Ergo, cíl práce lze považovat za splněný s určitým ohledem na nepřesnost použitých heuristických metod.

V době napsání této práce autor očekává ohodnocení vypracovaných plánů ze strany podniku.

6. Seznam použitých zdrojů

- Ahr, D., & Reinelt, G. (2002). New Heuristics and Lower Bounds for the Min-Max k-Chinese Postman Problem. V R. Möhring, & R. Raman (Editoři), *Lecture Notes in Computer Science* (Sv. 2461). Springer, Berlin, Heidelberg.
- Benavent, E., Campos, V., Corberan, A., & Mota, E. (1992). The Capacitated Arc Routing Problem Lower Bounds. *Networks*, 22, stránky 669-690.
- Campbell, J. F., & Langevin, A. (2000). Roadway Snow and Ice Control. V M. Dror (Editor), *Arc Routing: theory, solutions and applications*. New York: Springer Science+Business Media.
- Christofides, N. (1973). The Optimum Traversal of a Graph. *Omega*, 1 (6), 719-732.
- Edmonds, J., & Johnson, E. L. (1973). Matching, Euler Tours and the Chinese Postman. *Mathematical Programming* (5), stránky 88-124.
- Floyd, R. (1962). Algorithm 97: Shortest Path. *Communications of the ACM*, 5(6), 345. doi:10.1145/367766.368168
- Frederickson, G. H., Hecht, M. S., & Kim, C. E. (1978). Approximation Algorithms for Some Routing Problems. *SIAM Journal on Computing*, 7(2), stránky 178-193. doi:https://doi.org/10.1137/0207017
- GBU "Avtomobilnye dorogi". *Hlavní stránka* [online]. [cit. 2021-01-15]. Dostupné z WWW: <http://www.gbuador.ru>
- Ghiani, G., & Improta, G. (2000). An algorithm for the hierarchical Chinese postman problem. *Operations Research Letters* (26), 27-32.
- Gibbons, A. (1985). *Algorithmic Graph Theory* (1. vyd.). Cambridge: Cambridge University Press. ISBN 0 521 24659 8.
- Golden, B. L., & Wong, R. T. (1981). Capacitated Arc Routing Problems. *Networks*, 11, 305-315.
- Guan, M. (1984). On the Windy Postman Problem. *Discrete Applied Mathematics* (9), 41-46.

- Pearn, W. L. (1994). Solvable cases of the k-person Chinese Postman Problem. *Operations Research Letters* (16), stránky 241-244.
- Pearn, W. L., & Wu, T. C. (1995). Algorithms for the Rural Postman problem. *Computers & Operations Research*, 22 (8), 819-828.
- Šubrt, T., Bartoška, J., Brožová, H., Dömeová, L., Houška, M., & Kučera, P. (2015). *Ekonomicko-matematické metody* (2. vyd.). Plzeň: Vydavatelství a nakladatelství Aleš Čeněk, s.r.o. ISBN 978-80-7380-563-0.

Přílohy

| | |
|---|------|
| Tabulka A 1 - výpočet S_{max} a L_j pro cyklus č. 1 | ii |
| Tabulka A 2 - výpočet S_{max} a L_j pro cyklus č. 3 | iii |
| Tabulka A 3 - výpočet S_{max} a L_j pro cyklus č. 4 | iv |
| Tabulka A 4 - výpočet S_{max} a L_j pro cyklus č. 5 | v |
| Tabulka A 5 - výpočet S_{max} a L_j pro cyklus č. 6 | vi |
| Tabulka A 6 - výpočet S_{max} a L_j pro cyklus č. 7 | vii |
| Tabulka A 7 - výpočet S_{max} a L_j pro cyklus č. 8 | viii |
| Tabulka A 8 - určení vrcholu rozdělení na trasy pro cykly č. 1, 3-8 | ix |
| Tabulka A 9 - upravené plány tras č. 1, 3-7 | x |
| Tabulka A 10 - analýza podnikových tras | xi |

Tabulka A 1 - výpočet Smax a Lj pro cyklus č. 1

| 1 | OD | DO | s(O, vij) | c(vij, vij+1) | s(vij+1, O) | SUM | c(Rj) |
|----|----|----|--------------|------------------|----------------|------|-------|
| 1 | O | C | 0 | 35 | 35 | 70 | 35 |
| 2 | C | A | 35 | 150 | 185 | 370 | 185 |
| 3 | A | E | 185 | 475 | 660 | 1320 | 660 |
| 4 | E | F | 660 | 585 | 1130 | 2375 | 1245 |
| 5 | F | K | 1245 | 1040 | 2170 | 4455 | 2285 |
| 6 | K | L | 2285 | 265 | 2460 | 5010 | 2550 |
| 7 | L | K | 2550 | 290 | 2170 | 5010 | 2840 |
| 8 | K | F | 2285 | 1040 | 1130 | 4455 | 3880 |
| 9 | F | M | 1245 | 295 | 1425 | 2965 | 4175 |
| 10 | M | R | 1540 | 95 | 1520 | 3155 | 4270 |
| 11 | R | S | 1635 | 370 | 1890 | 3895 | 4640 |
| 12 | S | U | 2005 | 425 | 2180 | 4610 | 5065 |
| 13 | U | V | 2430 | 100 | 2280 | 4810 | 5165 |
| 14 | V | T | 2530 | 430 | 2000 | 4960 | 5595 |
| 15 | T | S | 2960 | 110 | 1890 | 4960 | 5705 |
| 16 | S | U | 2005 | 425 | 2180 | 4610 | 6130 |
| 17 | U | X | 2430 | 440 | 1740 | 4610 | 6570 |
| 18 | X | W | 2870 | 95 | 2715 | 5680 | 6665 |
| 19 | W | V | 2965 | 435 | 2280 | 5680 | 7100 |
| 20 | V | U | 2530 | 100 | 2180 | 4810 | 7200 |
| 21 | U | X | 2430 | 440 | 1740 | 4610 | 7640 |
| 22 | X | Y | 2870 | 435 | 1305 | 4610 | 8075 |
| 23 | Y | Z | 1305 | 530 | 1835 | 3670 | 8605 |
| 24 | Z | Y | 1835 | 530 | 1305 | 3670 | 9135 |
| 25 | Y | Q | 1305 | 495 | 810 | 2610 | 9630 |
| 26 | Q | C | 810 | 775 | 35 | 1620 | 10405 |
| 27 | C | D | 35 | 215 | 245 | 495 | 10620 |
| 28 | D | C | 250 | 210 | 35 | 495 | 10830 |
| 29 | C | Q | 35 | 775 | 810 | 1620 | 11605 |
| 30 | Q | Y | 810 | 495 | 1305 | 2610 | 12100 |
| 31 | Y | Q | 1305 | 495 | 810 | 2610 | 12595 |
| 32 | Q | C | 810 | 775 | 35 | 1620 | 13370 |
| 33 | C | A | 35 | 150 | 185 | 370 | 13520 |
| 34 | A | B | 185 | 490 | 675 | 1350 | 14010 |

| | OD | DO | s(O, vij) | c(vij, vij+1) | s(vij+1, O) | SUM | c(Rj) | |
|------|----|----|--------------|------------------|----------------|------|-------|-------|
| 35 | B | A | 675 | 490 | 185 | 1350 | 14500 | |
| 36 | A | J | 185 | 140 | 325 | 650 | 14640 | |
| 37 | J | A | 325 | 140 | 185 | 650 | 14780 | |
| 38 | A | C | 185 | 150 | 35 | 370 | 14930 | |
| 39 | C | A | 35 | 150 | 185 | 370 | 15080 | |
| 40 | A | E | 185 | 475 | 660 | 1320 | 15555 | |
| 41 | E | H | 660 | 585 | 1095 | 2340 | 16140 | |
| 42 | H | I | 1245 | 220 | 875 | 2340 | 16360 | |
| 43 | I | J | 1465 | 550 | 325 | 2340 | 16910 | |
| 44 | J | A | 325 | 140 | 185 | 650 | 17050 | |
| 45 | A | E | 185 | 475 | 660 | 1320 | 17525 | |
| 46 | E | F | 660 | 585 | 1130 | 2375 | 18110 | |
| 47 | F | M | 1245 | 295 | 1425 | 2965 | 18405 | |
| 48 | M | N | 1540 | 110 | 1525 | 3175 | 18515 | |
| 49 | N | M | 1650 | 100 | 1425 | 3175 | 18615 | |
| 50 | M | N | 1540 | 110 | 1525 | 3175 | 18725 | |
| 51 | N | R | 1650 | 185 | 1520 | 3355 | 18910 | |
| 52 | R | S | 1635 | 370 | 1890 | 3895 | 19280 | |
| 53 | S | R | 2005 | 370 | 1520 | 3895 | 19650 | |
| 54 | R | M | 1635 | 95 | 1425 | 3155 | 19745 | |
| 55 | M | F | 1540 | 295 | 1130 | 2965 | 20040 | |
| 56 | F | E | 1245 | 585 | 660 | 2490 | 20625 | |
| 57 | E | H | 660 | 585 | 1095 | 2340 | 21210 | |
| 58 | H | E | 1245 | 590 | 660 | 2495 | 21800 | |
| 59 | E | A | 660 | 485 | 185 | 1330 | 22285 | |
| 60 | A | E | 185 | 475 | 660 | 1320 | 22760 | |
| 61 | E | F | 660 | 585 | 1130 | 2375 | 23345 | |
| 62 | F | P | 1245 | 360 | 770 | 2375 | 23705 | |
| 63 | P | G | 1605 | 200 | 570 | 2375 | 23905 | |
| 64 | G | E | 750 | 70 | 660 | 1480 | 23975 | |
| 65 | E | G | 660 | 90 | 570 | 1320 | 24065 | |
| 66 | G | C | 750 | 535 | 35 | 1320 | 24600 | |
| 67 | C | O | 35 | 35 | 0 | 70 | 24635 | |
| L | | | | | | | | 24635 |
| Smax | | | | | | | | 2840 |

Zdroj: vlastní zpracování v programu MS Excel

Tabulka A 2 - výpočet Smax a Lj pro cyklus č. 3

| 3 | OD | DO | s(O, vij) | c(vij, vij+1) | s(vij+1, O) | SUM | c(Rj) |
|----|----|----|--------------|------------------|----------------|------|-------|
| 1 | O | C | 0 | 35 | 35 | 70 | 35 |
| 2 | C | A | 35 | 150 | 185 | 370 | 185 |
| 3 | A | J | 185 | 140 | 325 | 650 | 325 |
| 4 | J | A | 325 | 140 | 185 | 650 | 465 |
| 5 | A | B | 185 | 490 | 675 | 1350 | 955 |
| 6 | B | A | 675 | 490 | 185 | 1350 | 1445 |
| 7 | A | C | 185 | 150 | 35 | 370 | 1595 |
| 8 | C | A | 35 | 150 | 185 | 370 | 1745 |
| 9 | A | E | 185 | 475 | 660 | 1320 | 2220 |
| 10 | E | H | 660 | 585 | 1095 | 2340 | 2805 |
| 11 | H | I | 1245 | 220 | 875 | 2340 | 3025 |
| 12 | I | J | 1465 | 550 | 325 | 2340 | 3575 |
| 13 | J | A | 325 | 140 | 185 | 650 | 3715 |
| 14 | A | E | 185 | 475 | 660 | 1320 | 4190 |
| 15 | E | F | 660 | 585 | 1130 | 2375 | 4775 |
| 16 | F | K | 1245 | 1040 | 2170 | 4455 | 5815 |
| 17 | K | L | 2285 | 265 | 2460 | 5010 | 6080 |
| 18 | L | K | 2550 | 290 | 2170 | 5010 | 6370 |
| 19 | K | F | 2285 | 1040 | 1130 | 4455 | 7410 |
| 20 | F | M | 1245 | 295 | 1425 | 2965 | 7705 |
| 21 | M | R | 1540 | 95 | 1520 | 3155 | 7800 |
| 22 | R | S | 1635 | 370 | 1890 | 3895 | 8170 |
| 23 | S | U | 2005 | 425 | 2180 | 4610 | 8595 |
| 24 | U | V | 2430 | 100 | 2280 | 4810 | 8695 |
| 25 | V | T | 2530 | 430 | 2000 | 4960 | 9125 |
| 26 | T | S | 2960 | 110 | 1890 | 4960 | 9235 |
| 27 | S | U | 2005 | 425 | 2180 | 4610 | 9660 |
| 28 | U | X | 2430 | 440 | 1740 | 4610 | 10100 |
| 29 | X | W | 2870 | 95 | 2715 | 5680 | 10195 |
| 30 | W | V | 2965 | 435 | 2280 | 5680 | 10630 |
| 31 | V | U | 2530 | 100 | 2180 | 4810 | 10730 |
| 32 | U | X | 2430 | 440 | 1740 | 4610 | 11170 |
| 33 | X | Y | 2870 | 435 | 1305 | 4610 | 11605 |
| 34 | Y | Z | 1305 | 530 | 1835 | 3670 | 12135 |

| | OD | DO | s(O, vij) | c(vij, vij+1) | s(vij+1, O) | SUM | c(Rj) |
|------------------|----|----|--------------|------------------|----------------|------|-------|
| 35 | Z | Y | 1835 | 530 | 1305 | 3670 | 12665 |
| 36 | Y | Q | 1305 | 495 | 810 | 2610 | 13160 |
| 37 | Q | C | 810 | 775 | 35 | 1620 | 13935 |
| 38 | C | D | 35 | 215 | 245 | 495 | 14150 |
| 39 | D | C | 250 | 210 | 35 | 495 | 14360 |
| 40 | C | Q | 35 | 775 | 810 | 1620 | 15135 |
| 41 | Q | Y | 810 | 495 | 1305 | 2610 | 15630 |
| 42 | Y | Q | 1305 | 495 | 810 | 2610 | 16125 |
| 43 | Q | C | 810 | 775 | 35 | 1620 | 16900 |
| 44 | C | A | 35 | 150 | 185 | 370 | 17050 |
| 45 | A | E | 185 | 475 | 660 | 1320 | 17525 |
| 46 | E | F | 660 | 585 | 1130 | 2375 | 18110 |
| 47 | F | M | 1245 | 295 | 1425 | 2965 | 18405 |
| 48 | M | N | 1540 | 110 | 1525 | 3175 | 18515 |
| 49 | N | M | 1650 | 100 | 1425 | 3175 | 18615 |
| 50 | M | N | 1540 | 110 | 1525 | 3175 | 18725 |
| 51 | N | R | 1650 | 185 | 1520 | 3355 | 18910 |
| 52 | R | S | 1635 | 370 | 1890 | 3895 | 19280 |
| 53 | S | R | 2005 | 370 | 1520 | 3895 | 19650 |
| 54 | R | M | 1635 | 95 | 1425 | 3155 | 19745 |
| 55 | M | F | 1540 | 295 | 1130 | 2965 | 20040 |
| 56 | F | E | 1245 | 585 | 660 | 2490 | 20625 |
| 57 | E | H | 660 | 585 | 1095 | 2340 | 21210 |
| 58 | H | E | 1245 | 590 | 660 | 2495 | 21800 |
| 59 | E | A | 660 | 485 | 185 | 1330 | 22285 |
| 60 | A | E | 185 | 475 | 660 | 1320 | 22760 |
| 61 | E | F | 660 | 585 | 1130 | 2375 | 23345 |
| 62 | F | P | 1245 | 360 | 770 | 2375 | 23705 |
| 63 | P | G | 1605 | 200 | 570 | 2375 | 23905 |
| 64 | G | E | 750 | 70 | 660 | 1480 | 23975 |
| 65 | E | G | 660 | 90 | 570 | 1320 | 24065 |
| 66 | G | C | 750 | 535 | 35 | 1320 | 24600 |
| 67 | C | O | 35 | 35 | 0 | 70 | 24635 |
| L | | | | | | | 24635 |
| S _{max} | | | | | | | 2840 |

Zdroj: vlastní zpracování v programu MS Excel

Tabulka A 3 - výpočet S_{max} a L_j pro cyklus č. 4

| 4 | OD | DO | s(O, v _{ij}) | c(v _{ij} , v _{ij+1}) | s(v _{ij+1} , O) | SUM | c(R _j) |
|----|----|----|---------------------------|--|-----------------------------|------|--------------------|
| 1 | O | C | 0 | 35 | 35 | 70 | 35 |
| 2 | C | D | 35 | 215 | 245 | 495 | 250 |
| 3 | D | C | 250 | 210 | 35 | 495 | 460 |
| 4 | C | Q | 35 | 775 | 810 | 1620 | 1235 |
| 5 | Q | Y | 810 | 495 | 1305 | 2610 | 1730 |
| 6 | Y | Z | 1305 | 530 | 1835 | 3670 | 2260 |
| 7 | Z | Y | 1835 | 530 | 1305 | 3670 | 2790 |
| 8 | Y | Q | 1305 | 495 | 810 | 2610 | 3285 |
| 9 | Q | C | 810 | 775 | 35 | 1620 | 4060 |
| 10 | C | A | 35 | 150 | 185 | 370 | 4210 |
| 11 | A | J | 185 | 140 | 325 | 650 | 4350 |
| 12 | J | A | 325 | 140 | 185 | 650 | 4490 |
| 13 | A | B | 185 | 490 | 675 | 1350 | 4980 |
| 14 | B | A | 675 | 490 | 185 | 1350 | 5470 |
| 15 | A | E | 185 | 475 | 660 | 1320 | 5945 |
| 16 | E | H | 660 | 585 | 1095 | 2340 | 6530 |
| 17 | H | I | 1245 | 220 | 875 | 2340 | 6750 |
| 18 | I | J | 1465 | 550 | 325 | 2340 | 7300 |
| 19 | J | A | 325 | 140 | 185 | 650 | 7440 |
| 20 | A | E | 185 | 475 | 660 | 1320 | 7915 |
| 21 | E | F | 660 | 585 | 1130 | 2375 | 8500 |
| 22 | F | K | 1245 | 1040 | 2170 | 4455 | 9540 |
| 23 | K | L | 2285 | 265 | 2460 | 5010 | 9805 |
| 24 | L | K | 2550 | 290 | 2170 | 5010 | 10095 |
| 25 | K | F | 2285 | 1040 | 1130 | 4455 | 11135 |
| 26 | F | M | 1245 | 295 | 1425 | 2965 | 11430 |
| 27 | M | R | 1540 | 95 | 1520 | 3155 | 11525 |
| 28 | R | S | 1635 | 370 | 1890 | 3895 | 11895 |
| 29 | S | U | 2005 | 425 | 2180 | 4610 | 12320 |
| 30 | U | V | 2430 | 100 | 2280 | 4810 | 12420 |
| 31 | V | T | 2530 | 430 | 2000 | 4960 | 12850 |
| 32 | T | S | 2960 | 110 | 1890 | 4960 | 12960 |
| 33 | S | U | 2005 | 425 | 2180 | 4610 | 13385 |
| 34 | U | X | 2430 | 440 | 1740 | 4610 | 13825 |

| | OD | DO | s(O, v _{ij}) | c(v _{ij} , v _{ij+1}) | s(v _{ij+1} , O) | SUM | c(R _j) |
|------------------|----|----|---------------------------|--|-----------------------------|------|--------------------|
| 35 | X | W | 2870 | 95 | 2715 | 5680 | 13920 |
| 36 | W | V | 2965 | 435 | 2280 | 5680 | 14355 |
| 37 | V | U | 2530 | 100 | 2180 | 4810 | 14455 |
| 38 | U | X | 2430 | 440 | 1740 | 4610 | 14895 |
| 39 | X | Y | 2870 | 435 | 1305 | 4610 | 15330 |
| 40 | Y | Q | 1305 | 495 | 810 | 2610 | 15825 |
| 41 | Q | C | 810 | 775 | 35 | 1620 | 16600 |
| 42 | C | A | 35 | 150 | 185 | 370 | 16750 |
| 43 | A | C | 185 | 150 | 35 | 370 | 16900 |
| 44 | C | A | 35 | 150 | 185 | 370 | 17050 |
| 45 | A | E | 185 | 475 | 660 | 1320 | 17525 |
| 46 | E | F | 660 | 585 | 1130 | 2375 | 18110 |
| 47 | F | M | 1245 | 295 | 1425 | 2965 | 18405 |
| 48 | M | N | 1540 | 110 | 1525 | 3175 | 18515 |
| 49 | N | M | 1650 | 100 | 1425 | 3175 | 18615 |
| 50 | M | N | 1540 | 110 | 1525 | 3175 | 18725 |
| 51 | N | R | 1650 | 185 | 1520 | 3355 | 18910 |
| 52 | R | S | 1635 | 370 | 1890 | 3895 | 19280 |
| 53 | S | R | 2005 | 370 | 1520 | 3895 | 19650 |
| 54 | R | M | 1635 | 95 | 1425 | 3155 | 19745 |
| 55 | M | F | 1540 | 295 | 1130 | 2965 | 20040 |
| 56 | F | E | 1245 | 585 | 660 | 2490 | 20625 |
| 57 | E | H | 660 | 585 | 1095 | 2340 | 21210 |
| 58 | H | E | 1245 | 590 | 660 | 2495 | 21800 |
| 59 | E | A | 660 | 485 | 185 | 1330 | 22285 |
| 60 | A | E | 185 | 475 | 660 | 1320 | 22760 |
| 61 | E | F | 660 | 585 | 1130 | 2375 | 23345 |
| 62 | F | P | 1245 | 360 | 770 | 2375 | 23705 |
| 63 | P | G | 1605 | 200 | 570 | 2375 | 23905 |
| 64 | G | E | 750 | 70 | 660 | 1480 | 23975 |
| 65 | E | G | 660 | 90 | 570 | 1320 | 24065 |
| 66 | G | C | 750 | 535 | 35 | 1320 | 24600 |
| 67 | C | O | 35 | 35 | 0 | 70 | 24635 |
| L | | | | | | | 24635 |
| S _{max} | | | | | | | 2840 |

Zdroj: vlastní zpracování v programu MS Excel

Tabulka A 4 - výpočet Smax a Lj pro cyklus č. 5

| 5 | OD | DO | s(O, vij) | c(vij, vij+1) | s(vij+1, O) | SUM | c(Rj) |
|----|----|----|--------------|------------------|----------------|------|-------|
| 1 | O | C | 0 | 35 | 35 | 70 | 35 |
| 2 | C | D | 35 | 215 | 245 | 495 | 250 |
| 3 | D | C | 250 | 210 | 35 | 495 | 460 |
| 4 | C | A | 35 | 150 | 185 | 370 | 610 |
| 5 | A | J | 185 | 140 | 325 | 650 | 750 |
| 6 | J | A | 325 | 140 | 185 | 650 | 890 |
| 7 | A | B | 185 | 490 | 675 | 1350 | 1380 |
| 8 | B | A | 675 | 490 | 185 | 1350 | 1870 |
| 9 | A | E | 185 | 475 | 660 | 1320 | 2345 |
| 10 | E | H | 660 | 585 | 1095 | 2340 | 2930 |
| 11 | H | I | 1245 | 220 | 875 | 2340 | 3150 |
| 12 | I | J | 1465 | 550 | 325 | 2340 | 3700 |
| 13 | J | A | 325 | 140 | 185 | 650 | 3840 |
| 14 | A | E | 185 | 475 | 660 | 1320 | 4315 |
| 15 | E | F | 660 | 585 | 1130 | 2375 | 4900 |
| 16 | F | K | 1245 | 1040 | 2170 | 4455 | 5940 |
| 17 | K | L | 2285 | 265 | 2460 | 5010 | 6205 |
| 18 | L | K | 2550 | 290 | 2170 | 5010 | 6495 |
| 19 | K | F | 2285 | 1040 | 1130 | 4455 | 7535 |
| 20 | F | M | 1245 | 295 | 1425 | 2965 | 7830 |
| 21 | M | R | 1540 | 95 | 1520 | 3155 | 7925 |
| 22 | R | S | 1635 | 370 | 1890 | 3895 | 8295 |
| 23 | S | U | 2005 | 425 | 2180 | 4610 | 8720 |
| 24 | U | V | 2430 | 100 | 2280 | 4810 | 8820 |
| 25 | V | T | 2530 | 430 | 2000 | 4960 | 9250 |
| 26 | T | S | 2960 | 110 | 1890 | 4960 | 9360 |
| 27 | S | U | 2005 | 425 | 2180 | 4610 | 9785 |
| 28 | U | X | 2430 | 440 | 1740 | 4610 | 10225 |
| 29 | X | W | 2870 | 95 | 2715 | 5680 | 10320 |
| 30 | W | V | 2965 | 435 | 2280 | 5680 | 10755 |
| 31 | V | U | 2530 | 100 | 2180 | 4810 | 10855 |
| 32 | U | X | 2430 | 440 | 1740 | 4610 | 11295 |
| 33 | X | Y | 2870 | 435 | 1305 | 4610 | 11730 |
| 34 | Y | Q | 1305 | 495 | 810 | 2610 | 12225 |

| | OD | DO | s(O, vij) | c(vij, vij+1) | s(vij+1, O) | SUM | c(Rj) | |
|------|----|----|--------------|------------------|----------------|------|-------|-------|
| 35 | Q | C | 810 | 775 | 35 | 1620 | 13000 | |
| 36 | C | A | 35 | 150 | 185 | 370 | 13150 | |
| 37 | A | C | 185 | 150 | 35 | 370 | 13300 | |
| 38 | C | Q | 35 | 775 | 810 | 1620 | 14075 | |
| 39 | Q | Y | 810 | 495 | 1305 | 2610 | 14570 | |
| 40 | Y | Z | 1305 | 530 | 1835 | 3670 | 15100 | |
| 41 | Z | Y | 1835 | 530 | 1305 | 3670 | 15630 | |
| 42 | Y | Q | 1305 | 495 | 810 | 2610 | 16125 | |
| 43 | Q | C | 810 | 775 | 35 | 1620 | 16900 | |
| 44 | C | A | 35 | 150 | 185 | 370 | 17050 | |
| 45 | A | E | 185 | 475 | 660 | 1320 | 17525 | |
| 46 | E | F | 660 | 585 | 1130 | 2375 | 18110 | |
| 47 | F | M | 1245 | 295 | 1425 | 2965 | 18405 | |
| 48 | M | N | 1540 | 110 | 1525 | 3175 | 18515 | |
| 49 | N | M | 1650 | 100 | 1425 | 3175 | 18615 | |
| 50 | M | N | 1540 | 110 | 1525 | 3175 | 18725 | |
| 51 | N | R | 1650 | 185 | 1520 | 3355 | 18910 | |
| 52 | R | S | 1635 | 370 | 1890 | 3895 | 19280 | |
| 53 | S | R | 2005 | 370 | 1520 | 3895 | 19650 | |
| 54 | R | M | 1635 | 95 | 1425 | 3155 | 19745 | |
| 55 | M | F | 1540 | 295 | 1130 | 2965 | 20040 | |
| 56 | F | E | 1245 | 585 | 660 | 2490 | 20625 | |
| 57 | E | H | 660 | 585 | 1095 | 2340 | 21210 | |
| 58 | H | E | 1245 | 590 | 660 | 2495 | 21800 | |
| 59 | E | A | 660 | 485 | 185 | 1330 | 22285 | |
| 60 | A | E | 185 | 475 | 660 | 1320 | 22760 | |
| 61 | E | F | 660 | 585 | 1130 | 2375 | 23345 | |
| 62 | F | P | 1245 | 360 | 770 | 2375 | 23705 | |
| 63 | P | G | 1605 | 200 | 570 | 2375 | 23905 | |
| 64 | G | E | 750 | 70 | 660 | 1480 | 23975 | |
| 65 | E | G | 660 | 90 | 570 | 1320 | 24065 | |
| 66 | G | C | 750 | 535 | 35 | 1320 | 24600 | |
| 67 | C | O | 35 | 35 | 0 | 70 | 24635 | |
| L | | | | | | | | 24635 |
| Smax | | | | | | | | 2840 |

Zdroj: vlastní zpracování v programu MS Excel

Tabulka A 5 - výpočet S_{max} a L_j pro cyklus č. 6

| 6 | OD | DO | $s(O, v_{ij})$ | $c(v_{ij}, v_{ij+1})$ | $s(v_{ij+1}, O)$ | SUM | $c(R_j)$ |
|----|----|----|----------------|-----------------------|------------------|------|----------|
| 1 | O | C | 0 | 35 | 35 | 70 | 35 |
| 2 | C | A | 35 | 150 | 185 | 370 | 185 |
| 3 | A | B | 185 | 490 | 675 | 1350 | 675 |
| 4 | B | A | 675 | 490 | 185 | 1350 | 1165 |
| 5 | A | C | 185 | 150 | 35 | 370 | 1315 |
| 6 | C | D | 35 | 215 | 245 | 495 | 1530 |
| 7 | D | C | 250 | 210 | 35 | 495 | 1740 |
| 8 | C | A | 35 | 150 | 185 | 370 | 1890 |
| 9 | A | E | 185 | 475 | 660 | 1320 | 2365 |
| 10 | E | F | 660 | 585 | 1130 | 2375 | 2950 |
| 11 | F | K | 1245 | 1040 | 2170 | 4455 | 3990 |
| 12 | K | L | 2285 | 265 | 2460 | 5010 | 4255 |
| 13 | L | K | 2550 | 290 | 2170 | 5010 | 4545 |
| 14 | K | F | 2285 | 1040 | 1130 | 4455 | 5585 |
| 15 | F | M | 1245 | 295 | 1425 | 2965 | 5880 |
| 16 | M | R | 1540 | 95 | 1520 | 3155 | 5975 |
| 17 | R | S | 1635 | 370 | 1890 | 3895 | 6345 |
| 18 | S | U | 2005 | 425 | 2180 | 4610 | 6770 |
| 19 | U | V | 2430 | 100 | 2280 | 4810 | 6870 |
| 20 | V | T | 2530 | 430 | 2000 | 4960 | 7300 |
| 21 | T | S | 2960 | 110 | 1890 | 4960 | 7410 |
| 22 | S | U | 2005 | 425 | 2180 | 4610 | 7835 |
| 23 | U | X | 2430 | 440 | 1740 | 4610 | 8275 |
| 24 | X | W | 2870 | 95 | 2715 | 5680 | 8370 |
| 25 | W | V | 2965 | 435 | 2280 | 5680 | 8805 |
| 26 | V | U | 2530 | 100 | 2180 | 4810 | 8905 |
| 27 | U | X | 2430 | 440 | 1740 | 4610 | 9345 |
| 28 | X | Y | 2870 | 435 | 1305 | 4610 | 9780 |
| 29 | Y | Q | 1305 | 495 | 810 | 2610 | 10275 |
| 30 | Q | C | 810 | 775 | 35 | 1620 | 11050 |
| 31 | C | Q | 35 | 775 | 810 | 1620 | 11825 |
| 32 | Q | Y | 810 | 495 | 1305 | 2610 | 12320 |
| 33 | Y | Z | 1305 | 530 | 1835 | 3670 | 12850 |
| 34 | Z | Y | 1835 | 530 | 1305 | 3670 | 13380 |

| | OD | DO | $s(O, v_{ij})$ | $c(v_{ij}, v_{ij+1})$ | $s(v_{ij+1}, O)$ | SUM | $c(R_j)$ | |
|-----------|----|----|----------------|-----------------------|------------------|------|----------|-------|
| 35 | Y | Q | 1305 | 495 | 810 | 2610 | 13875 | |
| 36 | Q | C | 810 | 775 | 35 | 1620 | 14650 | |
| 37 | C | A | 35 | 150 | 185 | 370 | 14800 | |
| 38 | A | E | 185 | 475 | 660 | 1320 | 15275 | |
| 39 | E | H | 660 | 585 | 1095 | 2340 | 15860 | |
| 40 | H | I | 1245 | 220 | 875 | 2340 | 16080 | |
| 41 | I | J | 1465 | 550 | 325 | 2340 | 16630 | |
| 42 | J | A | 325 | 140 | 185 | 650 | 16770 | |
| 43 | A | J | 185 | 140 | 325 | 650 | 16910 | |
| 44 | J | A | 325 | 140 | 185 | 650 | 17050 | |
| 45 | A | E | 185 | 475 | 660 | 1320 | 17525 | |
| 46 | E | F | 660 | 585 | 1130 | 2375 | 18110 | |
| 47 | F | M | 1245 | 295 | 1425 | 2965 | 18405 | |
| 48 | M | N | 1540 | 110 | 1525 | 3175 | 18515 | |
| 49 | N | M | 1650 | 100 | 1425 | 3175 | 18615 | |
| 50 | M | N | 1540 | 110 | 1525 | 3175 | 18725 | |
| 51 | N | R | 1650 | 185 | 1520 | 3355 | 18910 | |
| 52 | R | S | 1635 | 370 | 1890 | 3895 | 19280 | |
| 53 | S | R | 2005 | 370 | 1520 | 3895 | 19650 | |
| 54 | R | M | 1635 | 95 | 1425 | 3155 | 19745 | |
| 55 | M | F | 1540 | 295 | 1130 | 2965 | 20040 | |
| 56 | F | E | 1245 | 585 | 660 | 2490 | 20625 | |
| 57 | E | H | 660 | 585 | 1095 | 2340 | 21210 | |
| 58 | H | E | 1245 | 590 | 660 | 2495 | 21800 | |
| 59 | E | A | 660 | 485 | 185 | 1330 | 22285 | |
| 60 | A | E | 185 | 475 | 660 | 1320 | 22760 | |
| 61 | E | F | 660 | 585 | 1130 | 2375 | 23345 | |
| 62 | F | P | 1245 | 360 | 770 | 2375 | 23705 | |
| 63 | P | G | 1605 | 200 | 570 | 2375 | 23905 | |
| 64 | G | E | 750 | 70 | 660 | 1480 | 23975 | |
| 65 | E | G | 660 | 90 | 570 | 1320 | 24065 | |
| 66 | G | C | 750 | 535 | 35 | 1320 | 24600 | |
| 67 | C | O | 35 | 35 | 0 | 70 | 24635 | |
| L | | | | | | | | 24635 |
| S_{max} | | | | | | | | 2840 |

Tabulka A 6 - výpočet S_{max} a L_j pro cyklus č. 7

| 7 | OD | DO | $s(O, v_{ij})$ | $c(v_{ij}, v_{ij+1})$ | $s(v_{ij+1}, O)$ | SUM | $c(R_j)$ |
|----|----|----|----------------|-----------------------|------------------|------|----------|
| 1 | O | C | 0 | 35 | 35 | 70 | 35 |
| 2 | C | Q | 35 | 775 | 810 | 1620 | 810 |
| 3 | Q | Y | 810 | 495 | 1305 | 2610 | 1305 |
| 4 | Y | Q | 1305 | 495 | 810 | 2610 | 1800 |
| 5 | Q | C | 810 | 775 | 35 | 1620 | 2575 |
| 6 | C | A | 35 | 150 | 185 | 370 | 2725 |
| 7 | A | E | 185 | 475 | 660 | 1320 | 3200 |
| 8 | E | F | 660 | 585 | 1130 | 2375 | 3785 |
| 9 | F | K | 1245 | 1040 | 2170 | 4455 | 4825 |
| 10 | K | L | 2285 | 265 | 2460 | 5010 | 5090 |
| 11 | L | K | 2550 | 290 | 2170 | 5010 | 5380 |
| 12 | K | F | 2285 | 1040 | 1130 | 4455 | 6420 |
| 13 | F | M | 1245 | 295 | 1425 | 2965 | 6715 |
| 14 | M | R | 1540 | 95 | 1520 | 3155 | 6810 |
| 15 | R | S | 1635 | 370 | 1890 | 3895 | 7180 |
| 16 | S | U | 2005 | 425 | 2180 | 4610 | 7605 |
| 17 | U | V | 2430 | 100 | 2280 | 4810 | 7705 |
| 18 | V | T | 2530 | 430 | 2000 | 4960 | 8135 |
| 19 | T | S | 2960 | 110 | 1890 | 4960 | 8245 |
| 20 | S | U | 2005 | 425 | 2180 | 4610 | 8670 |
| 21 | U | X | 2430 | 440 | 1740 | 4610 | 9110 |
| 22 | X | W | 2870 | 95 | 2715 | 5680 | 9205 |
| 23 | W | V | 2965 | 435 | 2280 | 5680 | 9640 |
| 24 | V | U | 2530 | 100 | 2180 | 4810 | 9740 |
| 25 | U | X | 2430 | 440 | 1740 | 4610 | 10180 |
| 26 | X | Y | 2870 | 435 | 1305 | 4610 | 10615 |
| 27 | Y | Z | 1305 | 530 | 1835 | 3670 | 11145 |
| 28 | Z | Y | 1835 | 530 | 1305 | 3670 | 11675 |
| 29 | Y | Q | 1305 | 495 | 810 | 2610 | 12170 |
| 30 | Q | C | 810 | 775 | 35 | 1620 | 12945 |
| 31 | C | D | 35 | 215 | 245 | 495 | 13160 |
| 32 | D | C | 250 | 210 | 35 | 495 | 13370 |
| 33 | C | A | 35 | 150 | 185 | 370 | 13520 |
| 34 | A | J | 185 | 140 | 325 | 650 | 13660 |

| | OD | DO | $s(O, v_{ij})$ | $c(v_{ij}, v_{ij+1})$ | $s(v_{ij+1}, O)$ | SUM | $c(R_j)$ | |
|-----------|----|----|----------------|-----------------------|------------------|------|----------|-------|
| 35 | J | A | 325 | 140 | 185 | 650 | 13800 | |
| 36 | A | B | 185 | 490 | 675 | 1350 | 14290 | |
| 37 | B | A | 675 | 490 | 185 | 1350 | 14780 | |
| 38 | A | C | 185 | 150 | 35 | 370 | 14930 | |
| 39 | C | A | 35 | 150 | 185 | 370 | 15080 | |
| 40 | A | E | 185 | 475 | 660 | 1320 | 15555 | |
| 41 | E | H | 660 | 585 | 1095 | 2340 | 16140 | |
| 42 | H | I | 1245 | 220 | 875 | 2340 | 16360 | |
| 43 | I | J | 1465 | 550 | 325 | 2340 | 16910 | |
| 44 | J | A | 325 | 140 | 185 | 650 | 17050 | |
| 45 | A | E | 185 | 475 | 660 | 1320 | 17525 | |
| 46 | E | F | 660 | 585 | 1130 | 2375 | 18110 | |
| 47 | F | M | 1245 | 295 | 1425 | 2965 | 18405 | |
| 48 | M | N | 1540 | 110 | 1525 | 3175 | 18515 | |
| 49 | N | M | 1650 | 100 | 1425 | 3175 | 18615 | |
| 50 | M | N | 1540 | 110 | 1525 | 3175 | 18725 | |
| 51 | N | R | 1650 | 185 | 1520 | 3355 | 18910 | |
| 52 | R | S | 1635 | 370 | 1890 | 3895 | 19280 | |
| 53 | S | R | 2005 | 370 | 1520 | 3895 | 19650 | |
| 54 | R | M | 1635 | 95 | 1425 | 3155 | 19745 | |
| 55 | M | F | 1540 | 295 | 1130 | 2965 | 20040 | |
| 56 | F | E | 1245 | 585 | 660 | 2490 | 20625 | |
| 57 | E | H | 660 | 585 | 1095 | 2340 | 21210 | |
| 58 | H | E | 1245 | 590 | 660 | 2495 | 21800 | |
| 59 | E | A | 660 | 485 | 185 | 1330 | 22285 | |
| 60 | A | E | 185 | 475 | 660 | 1320 | 22760 | |
| 61 | E | F | 660 | 585 | 1130 | 2375 | 23345 | |
| 62 | F | P | 1245 | 360 | 770 | 2375 | 23705 | |
| 63 | P | G | 1605 | 200 | 570 | 2375 | 23905 | |
| 64 | G | E | 750 | 70 | 660 | 1480 | 23975 | |
| 65 | E | G | 660 | 90 | 570 | 1320 | 24065 | |
| 66 | G | C | 750 | 535 | 35 | 1320 | 24600 | |
| 67 | C | O | 35 | 35 | 0 | 70 | 24635 | |
| L | | | | | | | | 24635 |
| S_{max} | | | | | | | | 2840 |

Zdroj: vlastní zpracování v programu MS Excel

Tabulka A 7 - výpočet S_{max} a L_j pro cyklus č. 8

| 8 | OD | DO | $s(O, v_{ij})$ | $c(v_{ij}, v_{ij+1})$ | $s(v_{ij+1}, O)$ | SUM | $c(R_j)$ |
|----------|----|----|----------------|-----------------------|------------------|------|----------|
| 1 | O | C | 0 | 35 | 35 | 70 | 35 |
| 2 | C | A | 35 | 150 | 185 | 370 | 185 |
| 3 | A | J | 185 | 140 | 325 | 650 | 325 |
| 4 | J | A | 325 | 140 | 185 | 650 | 465 |
| 5 | A | B | 185 | 490 | 675 | 1350 | 955 |
| 6 | B | A | 675 | 490 | 185 | 1350 | 1445 |
| 7 | A | C | 185 | 150 | 35 | 370 | 1595 |
| 8 | C | D | 35 | 215 | 245 | 495 | 1810 |
| 9 | D | C | 250 | 210 | 35 | 495 | 2020 |
| 10 | C | Q | 35 | 775 | 810 | 1620 | 2795 |
| 11 | Q | Y | 810 | 495 | 1305 | 2610 | 3290 |
| 12 | Y | Z | 1305 | 530 | 1835 | 3670 | 3820 |
| 13 | Z | Y | 1835 | 530 | 1305 | 3670 | 4350 |
| 14 | Y | Q | 1305 | 495 | 810 | 2610 | 4845 |
| 15 | Q | C | 810 | 775 | 35 | 1620 | 5620 |
| 16 | C | A | 35 | 150 | 185 | 370 | 5770 |
| 17 | A | E | 185 | 475 | 660 | 1320 | 6245 |
| 18 | E | H | 660 | 585 | 1095 | 2340 | 6830 |
| 19 | H | I | 1245 | 220 | 875 | 2340 | 7050 |
| 20 | I | J | 1465 | 550 | 325 | 2340 | 7600 |
| 21 | J | A | 325 | 140 | 185 | 650 | 7740 |
| 22 | A | E | 185 | 475 | 660 | 1320 | 8215 |
| 23 | E | F | 660 | 585 | 1130 | 2375 | 8800 |
| 24 | F | K | 1245 | 1040 | 2170 | 4455 | 9840 |
| 25 | K | L | 2285 | 265 | 2460 | 5010 | 10105 |
| 26 | L | K | 2550 | 290 | 2170 | 5010 | 10395 |
| 27 | K | F | 2285 | 1040 | 1130 | 4455 | 11435 |
| 28 | F | M | 1245 | 295 | 1425 | 2965 | 11730 |
| 29 | M | R | 1540 | 95 | 1520 | 3155 | 11825 |
| 30 | R | S | 1635 | 370 | 1890 | 3895 | 12195 |
| 31 | S | U | 2005 | 425 | 2180 | 4610 | 12620 |
| 32 | U | V | 2430 | 100 | 2280 | 4810 | 12720 |
| 33 | V | T | 2530 | 430 | 2000 | 4960 | 13150 |
| 34 | T | S | 2960 | 110 | 1890 | 4960 | 13260 |

| | OD | DO | $s(O, v_{ij})$ | $c(v_{ij}, v_{ij+1})$ | $s(v_{ij+1}, O)$ | SUM | $c(R_j)$ |
|-----------|----|----|----------------|-----------------------|------------------|------|----------|
| 35 | S | U | 2005 | 425 | 2180 | 4610 | 13685 |
| 36 | U | X | 2430 | 440 | 1740 | 4610 | 14125 |
| 37 | X | W | 2870 | 95 | 2715 | 5680 | 14220 |
| 38 | W | V | 2965 | 435 | 2280 | 5680 | 14655 |
| 39 | V | U | 2530 | 100 | 2180 | 4810 | 14755 |
| 40 | U | X | 2430 | 440 | 1740 | 4610 | 15195 |
| 41 | X | Y | 2870 | 435 | 1305 | 4610 | 15630 |
| 42 | Y | Q | 1305 | 495 | 810 | 2610 | 16125 |
| 43 | Q | C | 810 | 775 | 35 | 1620 | 16900 |
| 44 | C | A | 35 | 150 | 185 | 370 | 17050 |
| 45 | A | E | 185 | 475 | 660 | 1320 | 17525 |
| 46 | E | F | 660 | 585 | 1130 | 2375 | 18110 |
| 47 | F | M | 1245 | 295 | 1425 | 2965 | 18405 |
| 48 | M | N | 1540 | 110 | 1525 | 3175 | 18515 |
| 49 | N | M | 1650 | 100 | 1425 | 3175 | 18615 |
| 50 | M | N | 1540 | 110 | 1525 | 3175 | 18725 |
| 51 | N | R | 1650 | 185 | 1520 | 3355 | 18910 |
| 52 | R | S | 1635 | 370 | 1890 | 3895 | 19280 |
| 53 | S | R | 2005 | 370 | 1520 | 3895 | 19650 |
| 54 | R | M | 1635 | 95 | 1425 | 3155 | 19745 |
| 55 | M | F | 1540 | 295 | 1130 | 2965 | 20040 |
| 56 | F | E | 1245 | 585 | 660 | 2490 | 20625 |
| 57 | E | H | 660 | 585 | 1095 | 2340 | 21210 |
| 58 | H | E | 1245 | 590 | 660 | 2495 | 21800 |
| 59 | E | A | 660 | 485 | 185 | 1330 | 22285 |
| 60 | A | E | 185 | 475 | 660 | 1320 | 22760 |
| 61 | E | F | 660 | 585 | 1130 | 2375 | 23345 |
| 62 | F | P | 1245 | 360 | 770 | 2375 | 23705 |
| 63 | P | G | 1605 | 200 | 570 | 2375 | 23905 |
| 64 | G | E | 750 | 70 | 660 | 1480 | 23975 |
| 65 | E | G | 660 | 90 | 570 | 1320 | 24065 |
| 66 | G | C | 750 | 535 | 35 | 1320 | 24600 |
| 67 | C | O | 35 | 35 | 0 | 70 | 24635 |
| L | | | | | | | 24635 |
| S_{max} | | | | | | | 2840 |

Zdroj: vlastní zpracování v programu MS Excel

Tabulka A 8 - určení vrcholu rozdělení na trasy pro cykly č. 1, 3-8

| Cyklus 1 | | | Cyklus 3 | | | Cyklus 4 | | |
|-------------|---------|---------|-------------|---------|---------|-------------|---------|---------|
| j | 1 | 2 | j | 1 | 2 | j | 1 | 2 |
| vp'j | Y | A | vp'j | T | Q | vp'j | F | Y |
| vp'j+1 | Q | E | vp'j+1 | S | Y | vp'j+1 | K | Q |
| rj | 23,3333 | 396,667 | rj | 33,3333 | 341,667 | rj | 658,333 | 146,667 |
| s(vp'j, O) | 810 | 660 | s(vp'j, O) | 2000 | 810 | s(vp'j, O) | 1130 | 1305 |
| sum A | 833,333 | 1056,67 | sum A | 2033,33 | 1151,67 | sum A | 1788,33 | 1451,67 |
| c(vp'j, +1) | 775 | 585 | c(vp'j, +1) | 110 | 495 | c(vp'j, +1) | 1040 | 495 |
| s(+1, o) | 35 | 1095 | s(+1, o) | 1890 | 1305 | s(+1, o) | 2170 | 810 |
| sum B | 786,667 | 1283,33 | sum B | 1966,67 | 1458,33 | sum B | 2551,67 | 1158,33 |
| vpj | Q | A | vpj | S | Q | vpj | F | Q |

| Cyklus 5 | | | Cyklus 6 | | | Cyklus 7 | | |
|-------------|---------|---------|-------------|---------|---------|-------------|---------|---------|
| j | 1 | 2 | j | 1 | 2 | j | 1 | 2 |
| vp'j | V | Z | vp'j | U | E | vp'j | X | A |
| vp'j+1 | T | Y | vp'j+1 | X | H | vp'j+1 | W | E |
| rj | 338,333 | 376,667 | rj | 253,333 | 201,667 | rj | 48,3333 | 396,667 |
| s(vp'j, O) | 2280 | 1835 | s(vp'j, O) | 1130 | 1305 | s(vp'j, O) | 1740 | 185 |
| sum A | 2618,33 | 2211,67 | sum A | 1383,33 | 1506,67 | sum A | 1788,33 | 581,667 |
| c(vp'j, +1) | 430 | 530 | c(vp'j, +1) | 440 | 585 | c(vp'j, +1) | 95 | 475 |
| s(+1, o) | 2000 | 1305 | s(+1, o) | 1740 | 1095 | s(+1, o) | 2715 | 660 |
| sum B | 2091,67 | 1458,33 | sum B | 1926,67 | 1478,33 | sum B | 2761,67 | 738,333 |
| vpj | T | Y | vpj | U | H | vpj | X | A |

| Cyklus 8 | | |
|-------------|---------|---------|
| j | 1 | 2 |
| vp'j | F | X |
| vp'j+1 | K | Y |
| rj | 358,333 | 281,667 |
| s(vp'j, O) | 1130 | 1305 |
| sum A | 1488,33 | 1586,67 |
| c(vp'j, +1) | 1040 | 435 |
| s(+1, o) | 2170 | 1305 |
| sum B | 2851,67 | 1458,33 |
| vpj | F | Y |

Zdroj: vlastní zpracování v programu MS Excel

Tabulka A 9 - upravené plány tras č. 1, 3-7

| Plán | Trasa | Posloupnost vrcholů | L_i | $L_{\max}(i)$ | $B_{\max}(i)$ | D_s |
|------|-------|---|-------|---------------|---------------|--------|
| 1 | 1 | O-C-A-E-F-K-L-K-F-M-R-S-U-V-T-S-U-X-W-V-U-X-Y-Z-Y-Q-C-O | 9385 | 10595 | 7 | 127255 |
| | 2 | O-C-D-C-Q-Y-Q-C-A-B-A-J-A-C-O | 4795 | | 4 | |
| | 3 | O-C-A-E-H-I-J-A-E-F-M-N-M-N-R-S-R-M-F-E-H-E-A-E-F-P-G-E-G-C-O | 10595 | | 4 | |
| 3 | 1 | O-C-A-J-A-B-A-C-A-E-H-I-J-A-E-F-K-L-K-F-M-R-S-U-V-T-S-U-X-W-V-U-X-Y-Z-Y-Q-C-O | 13970 | 13970 | 7 | 117700 |
| | 2 | O-C-D-C-Q-Y-Q-C-O | 3035 | | 4 | |
| | 3 | O-C-A-E-F-M-N-M-N-R-S-R-M-F-E-H-E-A-E-F-P-G-E-G-C-O | 7770 | | 1 | |
| 4 | 1 | O-C-D-C-Q-Y-Z-Y-Q-C-O | 4095 | 12910 | 4 | 114520 |
| | 2 | O-C-A-J-A-B-A-E-H-I-J-A-E-F-K-L-K-F-M-R-S-U-V-T-S-U-X-W-V-U-X-Y-Q-C-A-C-O | 12910 | | 7 | |
| | 3 | O-C-A-E-F-M-N-M-N-R-S-R-M-F-E-H-E-A-E-F-P-G-E-G-C-O | 7770 | | 1 | |
| 5 | 1 | O-C-D-C-A-J-A-B-A-E-H-I-J-A-E-F-K-L-K-F-M-R-S-U-V-T-S-U-X-W-V-U-X-Y-Q-C-O | 13035 | 13035 | 7 | 114895 |
| | 2 | O-C-A-C-Q-Y-Z-Y-Q-C-O | 3970 | | 4 | |
| | 3 | O-C-A-E-F-M-N-M-N-R-S-R-M-F-E-H-E-A-E-F-P-G-E-G-C-O | 7770 | | 1 | |
| 6 | 1 | O-C-A-B-A-C-D-C-A-E-F-K-L-K-F-M-R-S-U-V-T-S-U-X-W-V-U-X-Y-Q-C-O | 11085 | 11085 | 7 | 132355 |
| | 2 | O-C-Q-Y-Z-Y-Q-C-O | 3070 | | 4 | |
| | 3 | O-C-A-E-H-I-J-A-J-A-E-F-M-N-M-N-R-S-R-M-F-E-H-E-A-E-F-P-G-E-G-C-O | 10620 | | 4 | |
| 7 | 1 | O-C-Q-Y-Q-C-O | 2610 | 12425 | 4 | 136375 |
| | 2 | O-C-A-E-F-K-L-K-F-M-R-S-U-V-T-S-U-X-W-V-U-X-Y-Z-Y-Q-C-D-C-A-J-A-B-A-C-O | 12425 | | 7 | |
| | 3 | O-C-A-E-H-I-J-A-E-F-M-N-M-N-R-S-R-M-F-E-H-E-A-E-F-P-G-E-G-C-O | 9740 | | 4 | |

Zdroj: vlastní zpracování v programu MS Excel

Tabulka A 10 - analýza podnikových tras

| Trasa | 1 | | | | 2 | | | | 3 | | | | |
|----------------------|-------|----------------|------------------|----------------|----------------|----------------|------------------|----------------|----------------|----------------|------------------|----------------|----------------|
| | j | v _j | v _{j+1} | C _j | B _j | v _j | v _{j+1} | C _j | B _j | v _j | v _{j+1} | C _j | B _j |
| 1 | O | C | 35 | 0 | O | C | 35 | 0 | O | C | 35 | 0 | |
| 2 | C | A | 150 | 3 | C | A | 150 | 3 | C | A | 150 | 3 | |
| 3 | A | J | 140 | 4 | A | E | 475 | 7 | A | E | 475 | 7 | |
| 4 | J | A | 140 | 4 | E | F | 585 | 7 | E | F | 585 | 7 | |
| 5 | A | B | 490 | 4 | F | M | 295 | 7 | F | P | 360 | 1 | |
| 6 | B | A | 490 | 4 | M | R | 95 | 7 | P | G | 200 | 1 | |
| 7 | A | C | 150 | 3 | R | S | 370 | 6 | G | E | 70 | 1 | |
| 8 | C | D | 215 | 4 | S | R | 370 | 1 | E | G | 90 | 1 | |
| 9 | D | C | 210 | 4 | R | M | 95 | 1 | G | C | 535 | 1 | |
| 10 | C | Q | 775 | 2 | M | N | 110 | 1 | C | O | 35 | 0 | |
| 11 | Q | Y | 495 | 4 | N | R | 185 | 1 | | | | | |
| 12 | Y | Z | 530 | 3 | R | M | 95 | 1 | | | | | |
| 13 | Z | Y | 530 | 3 | M | N | 110 | 1 | | | | | |
| 14 | Y | Q | 495 | 4 | N | M | 100 | 1 | | | | | |
| 15 | Q | C | 775 | 4 | M | F | 295 | 1 | | | | | |
| 16 | C | A | 150 | 3 | F | E | 585 | 1 | | | | | |
| 17 | A | E | 475 | 7 | E | H | 585 | 3 | | | | | |
| 18 | E | H | 585 | 3 | H | E | 590 | 1 | | | | | |
| 19 | H | I | 220 | 4 | E | A | 485 | 1 | | | | | |
| 20 | I | J | 550 | 4 | A | C | 150 | 3 | | | | | |
| 21 | J | A | 140 | 4 | C | O | 35 | 0 | | | | | |
| 22 | A | E | 475 | 7 | | | | | | | | | |
| 23 | E | F | 585 | 7 | | | | | | | | | |
| 24 | F | K | 1040 | 6 | | | | | | | | | |
| 25 | K | L | 265 | 4 | | | | | | | | | |
| 26 | L | K | 290 | 7 | | | | | | | | | |
| 27 | K | F | 1040 | 5 | | | | | | | | | |
| 28 | F | M | 295 | 7 | | | | | | | | | |
| 29 | M | R | 95 | 7 | | | | | | | | | |
| 30 | R | S | 370 | 6 | | | | | | | | | |
| 31 | S | U | 425 | 6 | | | | | | | | | |
| 32 | U | V | 100 | 4 | | | | | | | | | |
| 33 | V | T | 430 | 3 | | | | | | | | | |
| 34 | T | S | 110 | 3 | | | | | | | | | |
| 35 | S | U | 425 | 6 | | | | | | | | | |
| 36 | U | X | 440 | 5 | | | | | | | | | |
| 37 | X | W | 95 | 3 | | | | | | | | | |
| 38 | W | V | 435 | 4 | | | | | | | | | |
| 39 | V | U | 100 | 1 | | | | | | | | | |
| 40 | U | X | 440 | 5 | | | | | | | | | |
| 41 | X | Y | 435 | 7 | | | | | | | | | |
| 42 | Y | Q | 495 | 4 | | | | | | | | | |
| 43 | Q | C | 775 | 4 | | | | | | | | | |
| 44 | C | O | 35 | 0 | | | | | | | | | |
| Li | 16935 | | | | 5795 | | | | 2535 | | | | 25265 |
| B _{max} (i) | 7 | | | | 1 | | | | 1 | | | | |

Zdroj: vlastní zpracování v programu MS Excel