PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA UNIVERZITY PALACKÉHO
KATEDRA ALGEBRY A GEOMETRIE

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Agregační funkce na ohraničených svazech

2017 Zbyněk Kurač

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením Mgr. Jozefa Pócse, Ph.D., a že jsem uvedl veškerou použitou literaturu.

V Olomouci 25. duben 2017 ....

Rád bych poděkoval vedoucímu mé práce Mgr. Jozefu Pócsovi, Ph.D., za připomínky a čas, který mi věnoval. Dále bych chtěl poděkovat celé katedře algebry a geometrie Univerzity Palackého, především vedoucímu katedry prof. Mgr. Radomíru Halašovi, Dr., za pomoc při otázkách, na které jsem při vypracovávání práce narazil. Mé poděkování též patří rodině a přátelům, zejména mé sestře Mgr. Andree Šperkové a bývalým kolegům Mgr. Martinu Pospíšilovi a Mgr. Petru Sapákovi. Jako poslednímu bych rád poděkoval Pánu Bohu za veškeré nápady, které vedly k úspěšným matematickým výsledkům.

Obsah

Úvod

Téma této diplomové práce je studium teorie agregačních funkcí na konečných svazech. Velkou pozornost v práci věnujeme tomu, jak co nejvíce zmenšit počet funkcí obsažených v generující množině agregačního klonu. V první části práce připomeneme obecnou definici agregační funkce na reálném intervalu a zároveň ukážeme nejznámější agregační funkce s jejich grafy. Následně se zabýváme konstrukcí klonů pomocí zobrazení Pol a Inv, přičemž dokážeme tzv. Bakerovu-Pixleyho větu. V následující kapitole se nejprve zaměříme na definici agregační funkce na svazech a posléze představíme metodu konstrukce generující množiny popsanou v článku [4]. Dále budeme tuto generující množinu postupně redukovat. V předposlední a nejdůležitější podkapitole 3.4 této kapitoly ukážeme, že lineární řetězce mají charakteristickou generující množinu, která je ze všech n prvkových svazů nejmohutnější. Závěrem celé práce jsou dva příklady, na kterých jsou ukázány nejdůležitější výsledky předchozích kapitol.

1 Krátký úvod do agregačních funkcí

Uvažujme množinu přípustných hodnot (typicky interval). Příkladem mohou být platy všech obyvatel České republiky. Naším cílem je z této množiny hodnot dostat jedinou hodnotu, představující určitý charakter dané množiny. Obecně se tento proces nazývá *agregace* a numerickou funkci provádějící tento proces nazýváme *agregační funkce*. Nejznámější agregační funkcí je aritmetický průměr představující hodnotu, kolem které se nachází nejvíce hodnot z množiny naměřených hodnot. Další známé agregační funkce jsou například geometrický či harmonický průměr nebo minimum a maximum. Pokud bychom použili aritmetický průměr na již zmíněnou množinu platů občanů ČR, tak jak už všichni víme, tato hodnota je velice nepřesná. Z tohoto důvodu bychom mohli položit otázku, zda existuje jiná agregační funkce, která by dávala přesnější výsledky. Ze všeho nejdříve je potřeba obecně definovat agregační funkci, abychom mohli hledat nějaké další.

Definice 1.1. Nechť $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Pak *agregační funkce na intervalu* $I \subseteq \mathbb{R}$ je taková funkce $A : I^n \to I$, pro kterou platí

i) je neklesající (v každé proměnné),

ii) splňuje okrajové podmínky, tj.

$$\inf_{\mathbf{x} \in I^n} A(\mathbf{x}) = \inf I \quad \text{a} \quad \sup_{\mathbf{x} \in I^n} A(\mathbf{x}) = \sup I,$$

kde číslo n se nazývá *arita* agregační funkce.

V případě platů lze v některých případech najít lepší agregační funkci a tedy na předchozí otázku odpovědět kladně. To znamená, že v těchto případech se neosvědčil jako dobrou volbou aritmetický průměr. Vhodnější agregační funkcí je tzv. *medián*, který ignoruje největší a nejmenší platy. Proto podává mnohem lepší zastupující hodnotu než aritmetický průměr.

V následujícím příkladu ukážeme rozdíl mezi aritmetickým průměrem a mediánem. Zároveň bude vidno, že medián je v tomto případě mnohem lepší reprezentativní hodnotou než aritmetický průměr.

Příklad 1.2. Vybereme náhodně devět občanů České republiky a naším úkolem bude určit „charakteristický" plat této skupinky lidí. Vybraní lidé mají následující platy uspořádané podle velikosti (kvůli mediánu):

$$10000, 11000, 13000, 15000, 18000, 23000, 37000, 59000, 188000.$$

Nejdříve vypočítáme „charakteristický“ plat pomocí aritmetického průměru, tj. sečteme všechny hodnoty (374000) a vydělíme číslem 9. Výsledkem je přibližně hodnota 41555 Kč.

Druhou možností jak vypočítat „charakteristický“ plat je pomocí mediánu, který v případě souboru s lichým počtem čísel, vybere prostřední číslo. Pokud má soubor sudý počet čísel, pak se na prostřední dvě čísla použije aritmetický průměr. Vybrali jsme lichý počet občanů a proto zvolíme první možnost. Prostředním číslem a zároveň i „charakteristickým“ platem je číslo 18000 Kč.

Vidíme, že druhý odhad „charakteristického“ platu je mnohem přesnější než první. Taktéž jsme poukázali na to, proč se zkoumají agregační funkce. Tento problém, který jsme nastínili se nevyskytuje pouze u platů, ale i v jiných oblastech. Proto mají agregační funkce široké pole působnosti (pravděpodobnost, ekonomika, informatika, atd.).

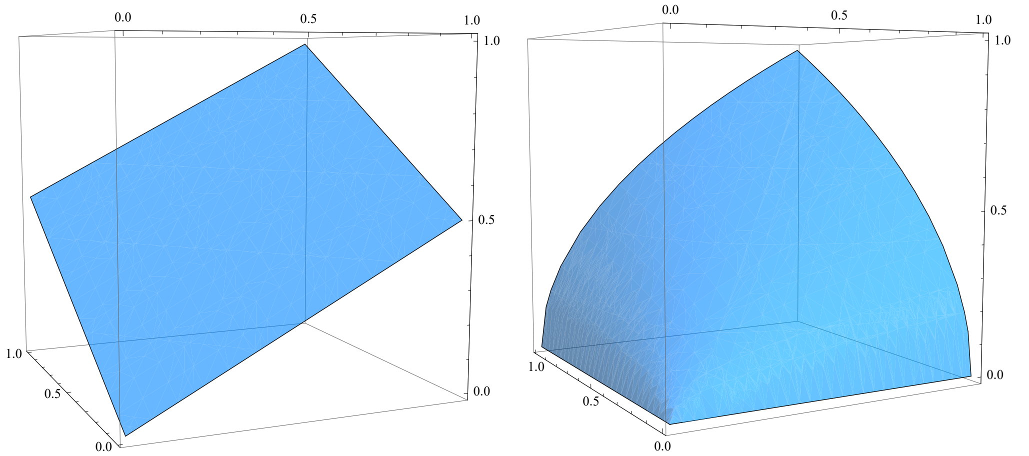
Nyní představíme nejznámější agregační funkce tím způsobem, že určíme jejich funkční předpisy a jejich binární verze zobrazíme grafem.

Označení: Je zvykem značit agregační funkce velkými písmeny, jak je to nastíněno například v monografii [3].

$$\begin{aligned} AM(\mathbf{x}) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \\ GM(\mathbf{x}) &= \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}, \\ MIN(\mathbf{x}) &= \min\{x_1,\ldots,x_n\}, \\ MAX(\mathbf{x}) &= \max\{x_1,\ldots,x_n\}, \\ P_k(\mathbf{x}) &= x_k. \end{aligned}$$

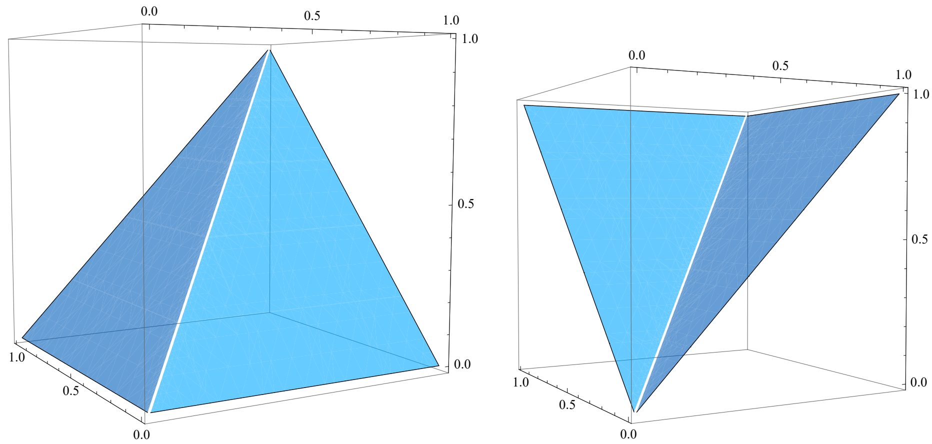
Grafy můžeme nakreslit pouze pro $n = 2$. Pro hodnotu $n = 1$ jsou všechny funkce identitami a pro hodnotu $n = 3$ nelze nakreslit grafy, neboť grafy jsou 4-dimenzionální. Za interval I zvolme $\langle 0, 1\rangle$. Poté zmíněné funkce a jejich grafy vypadají následovně:

$$AM(x, y) = \frac{x + y}{2} \quad ; \quad GM(x, y) = \sqrt{x \cdot y}$$



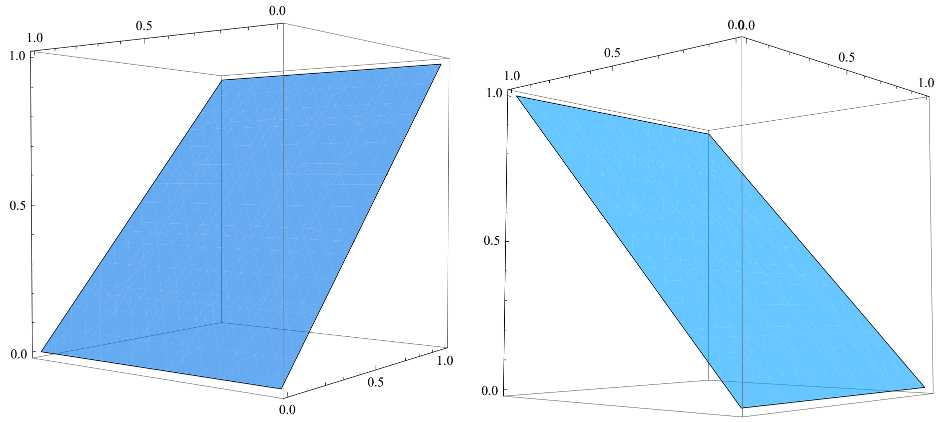
Obrázek 1: Grafy binárních agregačních funkcí AM a GM na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$

$$MIN(x, y) = \min\{x, y\} \quad ; \quad MAX(x, y) = \max\{x, y\}$$



Obrázek 2: Grafy binárních agregačních funkcí MIN a MAX na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$

$$P_1(x, y) = x \quad ; \quad P_2(x, y) = y$$



Obrázek 3: Grafy první a druhé binární projekční agregační funkce na intervalu $\langle 0, 1\rangle$

Dalším důležitým pojmem je skládání agregačních funkcí, který hraje důležitou roli v teorii klonů a následně pak v generování agregačního klonu. S ohledem na to vyslovíme jednu důležitou větu o agregačních funkcích. Důkaz této věty uvedeme později, až budeme toto tvrzení aplikovat na svazy.

Věta 1.3. [3] *Nechť I je reálný interval a k, n jsou přirozená čísla. Nechť $A : I^k \to I$ a $B_1, \ldots, B_k : I^n \to I$ jsou agregační funkce na I. Pak funkce $C = A\left(B_1, \ldots, B_k\right) : I^n \to I$ daná předpisem*

$$C(\mathbf{x}) = A\Big(B_1(\mathbf{x}), \ldots, B_k(\mathbf{x})\Big) \quad \forall \mathbf{x} \in I^n$$

je n-ární agregační funkce na I.

Ukážeme jednoduchý příklad, kde aplikujeme větu 1.3. Jako funkci A sice zvolíme ternární agregační funkci, ale funkce B_1, B_2 a B_3 budou binární. Můžeme tedy nakreslit graf složené agregační funkce C.

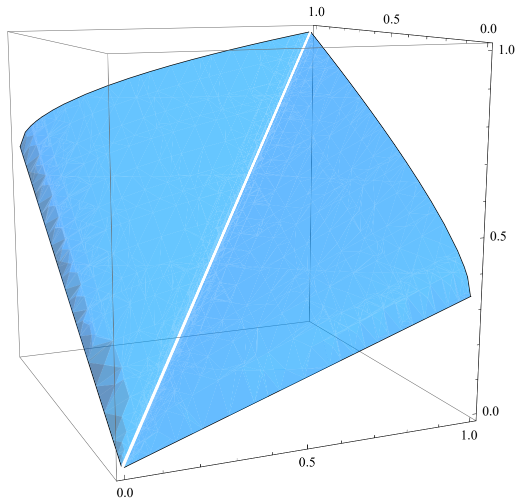
Příklad 1.4. Nechť $I = \langle 0, 1 \rangle$ a zvolme za agregační funkce A, B_1, B_2, B_3 následující funkce:

$$
\begin{aligned}
A(x,y,z) &= \frac{x+y+z}{3}, \\
B_1(x,y) = \sqrt{x \cdot y}, \quad B_2(x,y) &= y, \quad B_3(x,y) = \max\{x,y\}.
\end{aligned}
$$

Potom podle věty 1.3 je agregační funkce C ve tvaru

$$C(x,y) = \frac{1}{3}\left(\sqrt{x \cdot y} + y + \max\{x,y\}\right)$$

a její graf je zobrazen na obrázku 4.



Obrázek 4: Graf složené agregační funkce C

2 Konstrukce klonů pomocí zobrazení Pol a Inv

Agregační funkce úzce souvisí s teorii klonů a proto nejprve připomeneme několik důležitých pojmů z této oblasti. Klony lze definovat vícero způsoby, my však použijeme konstrukci využívající zobrazení Pol a Inv. Cílem této kapitoly je dokázat tzv. Bakerovu-Pixleyho větu, která bude později hrát významnou roli při generování agregačních klonů.

2.1 Zobrazení Pol a Inv

Úvodem této kapitoly připomeneme dva klíčové pojmy, které jsou podstatné k definici klonu. Těmi pojmy jsou projektivní zobrazení (projekce) a skládání zobrazení.

Nechť A je libovolná množina a $n \in \mathbb{N}$. Pak pro každé $i \leq n$ a pro každé $x_1, \dots, x_n \in A$ je *i-tá n-ární projekce* definována

$$p_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i.$$

Nechť $f : A^k \to A$ a $g_1, \dots, g_k : A^n \to A$. Potom složením k-ární funkce f a k n-árních funkcí $g_1, \dots, g_k$ rozumíme n-ární funkci $f(g_1, \dots, g_k) : A^n \to A$ definovanou vztahem

$$f(g_1, \dots, g_k)(\mathbf{x}) = f\left(g_1(\mathbf{x}), \dots, g_k(\mathbf{x})\right) \quad \forall \mathbf{x} \in A^n.$$

Dále je potřeba definovat dvě množiny, se kterými budeme po zbytek této kapitoly pracovat. První je $\mathcal{O}_A^{(n)} = \{f : A^n \to A\}$ množina všech n-árních funkcí definovaných na množině A a druhá je $\mathcal{R}_A^{(n)} = \{\rho \subseteq A^n\}$ množina všech n-árních relací definovaných na množině A. Potom nekonečným sjednocením přes aritu funkce dostáváme množinu

$$\mathcal{O}_A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_A^{(n)}$$

jako množinu všech konečně-árních funkcí definovaných na množině A a množinu

$$\mathcal{R}_A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}_A^{(n)}$$

představující množinu všech konečně-árních relací na množině A.

Po krátkém úvodu bude naším cílem definovat jeden z nejdůležitějších pojmů této kapitoly, pomocí kterého definujeme zobrazení Pol a Inv. Dříve než tak učiníme, zavedeme symboliku funkcí, která nás bude provázet celým textem. Taktéž nám pomůže lépe pochopit následující definici.

Označení: Nechť M je libovolná matice typu $m \times n$ nad množinou A a f je libovolná n-ární funkce. Pak symbolem f^{r} rozumíme funkci f aplikovanou na řádky matice M, tj.

$$f^{\mathrm{r}}(M) = f^{\mathrm{r}} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(a_{11}, \dots, a_{n1}) \\ \vdots \\ f(a_{1m}, \dots, a_{nm}) \end{pmatrix},$$

výsledkem je m-tice hodnot z množiny A.

Analogicky definujeme g^{c}, kde funkce g je m-ární a aplikovaná na sloupce matice M. Tedy

$$g^{\mathrm{c}}(M) = g^{\mathrm{c}} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(a_{11}, \dots, a_{1m}) \\ \vdots \\ g(a_{n1}, \dots, a_{nm}) \end{pmatrix},$$

výsledkem je n-tice hodnot z množiny A.

Vzhledem k důležitosti právě zavedeného označení, které bude často používáno v důkazech, uděláme názorný příklad.

Příklad 2.1. Nechť M je matice typu 3×4 nad množinou $\mathbb{N}$, která je ve tvaru

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

a funkce f je definována vztahem $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, kde operace $+$ je klasické sčítání. Pak aplikováním funkce f na řádky matice M dostáváme

$$f^{\mathrm{r}}(M) = f^{\mathrm{r}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(1,2,3,6) \\ f(3,2,4,1) \\ f(5,6,7,2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Pokud bychom chtěli funkci f aplikovat na sloupce matice M, dospěli bychom k tomu, že to nelze, neboť funkce f je kvaternární, ale sloupce obsahují pouze 3 prvky. Abychom mohli aplikovat funkci f na sloupce, musíme zvolit jinou matici, která musí mít 4 řádky. Zvolíme nejjednodušší cestu a pouze provedeme transpozici matice M.

$$M^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 7 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pak aplikováním funkce f na sloupce matice M^{T} dostáváme

$$\begin{aligned} f^{\mathrm{c}}(M^{\mathrm{T}}) &= f^{\mathrm{c}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 7 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \Big(f(1,2,3,6), f(3,2,4,1), f(5,6,7,2) \Big) \\ &= (12, 10, 20). \end{aligned}$$

Aplikováním funkce f na řádky matice M^{T} dospějeme ke stejnému problému jako v předchozím případě.

Definice 2.2. Nechť $\rho \subseteq A^d$ je d-ární relace na A a nechť $f : A^n \to A$ je n-ární operace na A. Řekneme, že operace f *zachovává relaci* ρ (ozn. $f \lhd \rho$), jestliže pro každou matici C typu $d \times n$ nad množinou A takovou, že každý její sloupec náleží relaci ρ platí, že výsledek operace f aplikované na řádky náleží relaci ρ.

Jinými slovy, nechť $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n$ jsou sloupce matice C a $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_d$ jsou řádky matice C, tj.

$$C = (\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n) = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_d \end{pmatrix}.$$

Pak platí

$$\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n \in \rho \quad \Rightarrow \quad f^{\mathrm{r}}(C) = f^{\mathrm{r}}(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n) = (f(\mathbf{r}_1), \ldots, f(\mathbf{r}_d)) \in \rho.$$

Poznámka: Můžeme používat též označení, relace ρ je *invariantní* vzhledem k funkci f, nebo zkráceně relace ρ je f-*invariantní*. Symbolem $f \lhd R$ rozumíme, že funkce f zachovává každou relaci z množiny R. Naopak symbolem $F \lhd \rho$ rozumíme, že relace ρ je invariantní vzhledem ke každé funkci $f \in F$.

Poznámka: Po zbytek této kapitoly budeme, většinou v důkazech, používat písmena „c“ a „r“ k označení sloupců a řádků dané matice a to buď přímo, jako v předchozí definici, nebo za použití indexů.

Příklad 2.3. Uvažujme množinu $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ a na ní definovanou ternární relaci $\rho = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4\}$, kde $\mathbf{c}_1 = (0, 1, 2)$, $\mathbf{c}_2 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{c}_3 = (2, 3, 4)$ a $\mathbf{c}_4 = (0, 2, 4)$. Zvolme funkci $f : A^5 \to A$ danou předpisem

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \pmod 5$$

a ověřme, zda zachovává relaci ρ. Podle definice zvolíme libovolnou matici typu 3×5 složenou z některých sloupců $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4$. Například

$$C = (\mathbf{c}_3, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Nyní aplikujeme funkci f na řádky matice C.

$$\begin{aligned} f^{\mathrm{r}}(C) &= f^{\mathrm{r}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(2,1,2,0,2) \\ f(3,2,3,1,3) \\ f(4,3,4,2,4) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \notin \rho. \end{aligned}$$

Tedy funkce f nezachovává relaci ρ.

Na druhou stranu, zvolme funkci $g : A^4 \to A$ jako první kvaternární projekci, tj.

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = p_1^4(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1.$$

Následně, jako v předchozím případě, zvolíme libovolnou matici D, tentokrát však typu 3×4. Například

$$D = (\mathbf{c}_4, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aplikováním funkce g dostáváme

$$\begin{aligned} g^r(D) &= g^r \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(0,0,0,0) \\ g(2,1,1,2) \\ g(4,2,2,4) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \in \rho. \end{aligned}$$

Lehce se přesvědčíme, že funkce g zachovává relaci ρ, neboť výsledek je vždy první sloupec v libovolné matici D.

Právě zmíněný příklad názorně ukázal, jaké typy funkcí zachovávají každou relaci. Těmi funkcemi jsou projekce. Z tohoto důvodu jsou projekce tak důležitými funkcemi v teorii klonů.

Následně definujeme zobrazení Pol a Inv. Tyto zobrazení jsou stejně důležitá jako zobrazení uvedená na začátku kapitoly, tj. projekce a skládání funkcí. Víme, že pomocí projekcí a skládání funkcí budeme později definovat klon, ale touto definicí myslíme zcela obecnou definici. My však budeme klon definovat právě pomocí zobrazení Pol a Inv. Ještě připomeňme co znamená symbol $\mathrm{P}(A)$. Ten představuje potenční množinu množiny A.

Definice 2.4. Nechť $F \subseteq \mathcal{O}_A$ je libovolná množina funkcí na množině A a $R \subseteq \mathcal{R}_A$ libovolná množina relací na množině A. Potom definujeme zobrazení $\mathrm{Inv}F : P(\mathcal{O}_A) \to P(\mathcal{R}_A)$ a $\mathrm{Pol}R : P(\mathcal{R}_A) \to P(\mathcal{O}_A)$ následovně

$$\mathrm{Inv}F = \{\rho \in \mathcal{R}_A \mid f \triangleleft \rho, \forall f \in F\} = \{\rho \in \mathcal{R}_A \mid F \triangleleft \rho\},$$

$$\mathrm{Pol}R = \{f \in \mathcal{O}_A \mid f \triangleleft \rho, \forall \rho \in R\} = \{f \in \mathcal{O}_A \mid f \triangleleft R\}.$$

Jinými slovy, množina $\mathrm{Inv}F$ obsahuje všechny relace invariantní vzhledem ke všem funkcím $f \in F$. Naopak množina $\mathrm{Pol}R$ obsahuje všechny funkce, které zachovávají všechny relace $\rho \in R$.

2.2 Vlastnosti zobrazení Pol a Inv

Tato kapitola ukazuje vlastnosti zobrazení Pol a Inv, které budeme potřebovat k ověření toho, že zobrazení Pol a Inv vytváří klon a dále je využijeme v důkazu již zmíněné Bakerově-Pixleyho větě. Ze začátku definujeme Galoisovu konexi, protože jak uvidíme v následující větě, tak zobrazení Pol a Inv ji splňují.

Definice 2.5. *Galoisova konexe* mezi množinami A a B je dvojice zobrazení (f, g), kde $f : P(A) \to P(B)$, $g : P(B) \to P(A)$ taková, že pro všechny podmnožiny $X, X' \subseteq A$ a $Y, Y' \subseteq B$ jsou splněny následující podmínky

i) $X \subseteq X' \Rightarrow f(X) \supseteq f(X') \quad \text{a} \quad Y \subseteq Y' \Rightarrow g(Y) \supseteq g(Y')$,

ii) $X \subseteq g(f(X)) \quad \text{a} \quad Y \subseteq f(g(Y))$.

Věta 2.6. [10] *Nechť $F, F_i, G \subseteq \mathcal{O}_A$ a $R, R_i, Q \subseteq \mathcal{R}_A$ pro $i \in I$ jsou libovolné podmnožiny funkcí a relací definovaných na množině A. Pak platí následující vlastnosti:*

i) $F \subseteq G \Rightarrow \mathrm{Inv}F \supseteq \mathrm{Inv}G$,
$R \subseteq Q \Rightarrow \mathrm{Pol}R \supseteq \mathrm{Pol}Q$;

ii) $F \subseteq \mathrm{Pol}\,\mathrm{Inv}F$,
$R \subseteq \mathrm{Inv}\,\mathrm{Pol}R$;

iii) $\mathrm{Inv}\,\mathrm{Pol}\,\mathrm{Inv}F = \mathrm{Inv}F$,
$\mathrm{Pol}\,\mathrm{Inv}\,\mathrm{Pol}R = \mathrm{Pol}R$;

iv) $F \subseteq \mathrm{Pol}R \Leftrightarrow R \subseteq \mathrm{Inv}F$;

v) $\mathrm{Inv}\left(\bigcup_{i\in I} F_i\right) = \bigcap_{i\in I} \mathrm{Inv}F_i$,
$\mathrm{Pol}\left(\bigcup_{i\in I} R_i\right) = \bigcap_{i\in I} \mathrm{Pol}R_i$.

Důkaz. Vlastnost i) je přímým důsledkem definice Inv a Pol.

ii) Z definice 2.4 víme, že množina $\mathrm{Inv}F$ obsahuje všechny F-invariantní relace. Pokud bychom nyní na takto vzniklé relace použili zobrazení Pol, dostaneme funkce, které tyhle F-invariantní relace zachovávají. Je zřejmé, že mezi tyto funkce patří funkce z F, neboť jsme pomocí nich tyto relace vytvořili. Analogicky se důkaz provede pro druhou inkluzi.

iii) Nechť $R = \mathrm{Inv}F$. Pak podle vlastnosti ii) platí $R \subseteq \mathrm{Inv}\,\mathrm{Pol}R$ a $F \subseteq \mathrm{Pol}\,\mathrm{Inv}F$. Pokud na druhou podmínku aplikujeme operaci Inv, dostáváme pomocí vlastnosti i) následující inkluzi

$$\mathrm{Inv}F \supseteq \mathrm{Inv}\,\mathrm{Pol}\,\mathrm{Inv}F.$$

Podle předpokladu platí

$$R \subseteq \mathrm{Inv}\,\mathrm{Pol}R = \mathrm{Inv}\,\mathrm{Pol}\,\mathrm{Inv}F \subseteq \mathrm{Inv}F = R.$$

Odtud tedy dostáváme, že $\mathrm{Inv}\,\mathrm{Pol}\,\mathrm{Inv}F = \mathrm{Inv}F$. Analogicky by se dokázala druhá rovnost z vlastnosti *iii*).

iv)

$$\begin{aligned} F \subseteq \mathrm{Pol}R \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{Inv}F \supseteq \mathrm{Inv}\,\mathrm{Pol}R \supseteq R, \\ R \subseteq \mathrm{Inv}F \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{Pol}R \supseteq \mathrm{Pol}\,\mathrm{Inv}F \supseteq F. \end{aligned}$$

v) Jelikož pro každé $i \in I$ je $F_i \subseteq \bigcup_{i\in I} F_i$, pak z vlastnosti *i*) plyne

$$\mathrm{Inv}\left(\bigcup_{i\in I} F_i\right) \subseteq \mathrm{Inv}F_i \quad \forall i \in I.$$

Tedy $\mathrm{Inv}\left(\bigcup_{i\in I} F_i\right)$ je obsažený v jejich průniku, tj.

$$\mathrm{Inv}\left(\bigcup_{i\in I} F_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} \mathrm{Inv}F_i.$$

Naopak množina $\bigcap_{i\in I} \mathrm{Inv}F_i$ obsahuje relace, které jsou F_i-invariantní pro každé $i \in I$. Pak zřejmě obsahuje relace, které jsou F_i-invariantní pro nějaké $i \in I$. Platí tedy

$$\bigcap_{i\in I} \mathrm{Inv}F_i \subseteq \mathrm{Inv}\left(\bigcup_{i\in I} F_i\right).$$

Analogicky se dokáže druhá rovnost. □

V právě zmíněné větě jsme používali kombinaci zobrazení Inv a Pol, která budou ve zbytku kapitoly velice důležitá. Dalo by se očekávat, že zkombinovaný operátor Inv Pol nebo Pol Inv musí mít určitou vlastnost vzhledem k tomu, že zobrazení Inv a Pol splňují Galoisovu konexi. Ukazuje se, že takovou vlastnost skutečně má. Tou vlastností je uzávěrový operátor. Nejdříve připomeneme definici uzávěrového operátoru a v další větě dokážeme, že zkombinovaný operátor Inv Pol nebo Pol Inv je uzávěrovým operátorem.

Definice 2.7. Nechť A je neprázdná množina. Zobrazení $F : P(A) \to P(A)$ se nazývá *uzávěrový operátor* na množině A, jestliže pro všechny podmnožiny $X, Y \subseteq A$ platí

i) $X \subseteq F(X)$,

ii) $X \subseteq Y \Rightarrow F(X) \subseteq F(Y)$,

iii) $F(F(X)) = F(X)$.

Množina $F(X)$ se nazývá *uzavřená* a říkáme, že uzavřená množina $F(X)$ je *generována množinou* X.

Obecně lze dokázat, že složení funkcí z Galoisovy konexe je uzávěrový operátor. Toto tvrzení lze například nalézt v monografii [2]. Dokázali jsme, že zobrazení Inv a Pol splňují Galoisovu konexi a tedy podle této věty, zkombinovaný operátor Inv Pol nebo Pol Inv je uzávěrovým operátorem. Nebudeme zde dokazovat zmíněné obecné tvrzení, ale z důvodů korektnosti dokážeme, že Inv Pol a Pol Inv jsou uzávěrovými operátory.

Věta 2.8. *Operátor* $\mathrm{Pol}\,\mathrm{Inv} : P(\mathcal{O}_A) \to P(\mathcal{O}_A)$ *je uzávěrový operátor na množině* $\mathcal{O}_A$*, tj. pro libovolné podmnožiny* $F, G \subseteq \mathcal{O}_A$ *platí*

i) $F \subseteq \mathrm{Pol}\,\mathrm{Inv}F$,

ii) $F \subseteq G \Rightarrow \mathrm{Pol}\,\mathrm{Inv}F \subseteq \mathrm{Pol}\,\mathrm{Inv}G$,

iii) $\mathrm{Pol}\,\mathrm{Inv}(\mathrm{Pol}\,\mathrm{Inv}F) = \mathrm{Pol}\,\mathrm{Inv}F$.

Operátor $\mathrm{Inv}\,\mathrm{Pol} : P(\mathcal{R}_A) \to P(\mathcal{R}_A)$ *je uzávěrový operátor na množině* $\mathcal{R}_A$*, tj. pro libovolné podmnožiny* $R, Q \subseteq \mathcal{R}_A$ *platí*

i) $R \subseteq \mathrm{Inv}\,\mathrm{Pol}(R)$,

ii) $R \subseteq Q \Rightarrow \mathrm{Inv}\,\mathrm{Pol}R \subseteq \mathrm{Inv}\,\mathrm{Pol}Q$,

iii) $\mathrm{Inv}\,\mathrm{Pol}(\mathrm{Inv}\,\mathrm{Pol}R) = \mathrm{Inv}\,\mathrm{Pol}R$.

Důkaz. Dokážeme, že Pol Inv je uzávěrovým operátorem. Analogicky by se dokázalo, že Inv Pol je uzávěrový operátor. Ověříme vlastnosti z definice 2.7. Vlastnost i) je přímo první inkluze vlastnosti *ii*) věty 2.6.

ii) Nechť $F, G \in \mathcal{O}_A$ a $F \subseteq G$. Pak platí

$$\begin{aligned} F &\subseteq G \\ \mathrm{Inv}F &\supseteq \mathrm{Inv}G \\ \mathrm{Pol}\,\mathrm{Inv}F &\subseteq \mathrm{Pol}\,\mathrm{Inv}G, \end{aligned}$$

kde jsme v obou krocích použili vlastnost i) z věty 2.6.

iii) Z první rovnosti ve vlastnosti iii) věty 2.6 dostáváme

$$\mathrm{Pol}\,\mathrm{Inv}\,(\mathrm{Pol}\,\mathrm{Inv}F) = \mathrm{Pol}\,(\mathrm{Inv}\,\mathrm{Pol}\,\mathrm{Inv}F) = \mathrm{Pol}\,\mathrm{Inv}F.$$

□

2.3 Bakerova-Pixleyho věta

V této kapitole již definujeme pojem klonu. Definice 2.9 je obecnou definicí klonu, která jak již víme, využívá projekce a skládání funkcí. Hned vzápětí se podíváme na to, jak to vypadá s libovolným průnikem klonů. Dále bude naším cílem ukázat, že množina funkcí Pol Inv$F$ splňuje definici klonu pro libovolnou množinu funkcí $F \subseteq \mathcal{O}_A$, což odpovídá tomu, že množiny Pol Inv$F$ pro všechny podmnožiny funkcí $F \subseteq \mathcal{O}_A$, jsou právě všechny klony na množině A.

Definice 2.9. Podmnožina $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{O}_A$ se nazývá *klonem* na množině A, jestliže obsahuje všechny projekce a je uzavřená na skládání funkcí.

Věta 2.10. *Nechť A je libovolná množina a $\mathcal{C}_i, i \in I$ jsou klony na množině A. Pak $\bigcap \{\mathcal{C}_i \mid i \in I\}$ je klon na množině A.*

Důkaz. Je potřeba ověřit, že $\bigcap \{\mathcal{C}_i \mid i \in I\}$ splňuje definici 2.9. První podmínka je evidentně splněna, neboť každý klon $\mathcal{C}_i$ obsahuje všechny projekce, čímž i $\bigcap \{\mathcal{C}_i \mid i \in I\}$ musí obsahovat všechny projekce.

Nechť f je n-ární funkce a $g_1, \ldots, g_n$ jsou m-ární funkce patřící do průniku všech klonů $\mathcal{C}_i$, tj. $f, g_1, \ldots, g_m \in \bigcap \{\mathcal{C}_i \mid i \in I\}$. Potom patří i do $\mathcal{C}_i$ pro každé $i \in I$. Vzhledem k tomu, že $\mathcal{C}_i$ jsou klony, tak $f(g_1, \ldots, g_m) \in \mathcal{C}_i$ pro každé $i \in I$, tedy $f(g_1, \ldots, g_m) \in \bigcap \{\mathcal{C}_i \mid i \in I\}$. Tím jsme dokázali, že $\bigcap \{\mathcal{C}_i \mid i \in I\}$ je uzavřený na skládání. Celkově dostáváme, že $\bigcap \{\mathcal{C}_i \mid i \in I\}$ je klon na množině A. □

Korektnost následující definice plyne z právě zmíněné věty 2.10.

Definice 2.11. Nechť A je libovolná množina a $F \subseteq \mathcal{O}_A$ je množina funkcí definovaných na množině A. Řekneme, že klon $\mathcal{C}$ je *generovaný množinou F*, jestliže $\mathcal{C} = \bigcap \{\mathcal{C}' \mid F \subseteq \mathcal{C}', \mathcal{C}' \text{ je klon na } A\}$, tj. $\mathcal{C}$ je nejmenší (jednoznačně určený) klon obsahující množinu funkcí F. Tento klon budeme označovat symbolem $\mathcal{C}(F)$.

Navíc, jestliže je množina funkcí $F \subseteq \mathcal{O}_A$ konečná, pak klon $\mathcal{C}(F)$ nazýváme *konečně generovaný množinou F*.

Věta 2.12. *Nechť podmnožina funkcí $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{O}_A$ je klon na množině A, pak* $\operatorname{Pol}\operatorname{Inv}\mathcal{C} = \mathcal{C}$.

Důkaz. Z předchozích vět víme, že platí inkluze $\mathcal{C} \subseteq \operatorname{Pol}\operatorname{Inv}\mathcal{C}$. V dalším kroku dokážeme obrácenou inkluzi $\operatorname{Pol}\operatorname{Inv}\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}$. To tedy znamená, že pokud funkce $f \in \operatorname{Pol}\operatorname{Inv}\mathcal{C}$, pak $f \in \mathcal{C}$. Toto tvrzení je ekvivalentní k tvrzení: $f \notin \mathcal{C}$ implikuje $f \notin \operatorname{Pol}\operatorname{Inv}\mathcal{C}$.

Nechť $g : A^n \to A$ je libovolná n-ární funkce definovaná na množině A. Pak ji můžeme reprezentovat[1] jako prvek množiny $A^{|A|^n}$, tj. funkce g je reprezentována jako $|A|^n$-tice prvků z množiny A indexovaná všemi prvky $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{|A|^n} \in A^n$, kterou označíme $\overline{g}$. Dále zvolíme relaci ρ následovně

$$\rho = \left\{\overline{g} \mid g \in \mathcal{C}^{(n)}\right\} \subseteq A^{|A|^n}.$$

V následujících dvou krocích dokážeme, že relace $\rho \in \operatorname{Inv}\mathcal{C}$ a libovolná funkce, která nepatří do klonu $\mathcal{C}$, nezachovává relaci ρ.

[1]Například binární funkci $g : A^2 \to A$, definované na množině A o mohutnosti $|A| = 3$, odpovídá 3^2-tice prvků $(y_1, \ldots, y_9) \in A^9$, kde y_i je výslednou hodnotou funkce f při vstupní dvojici $\mathbf{x}_i \in A^2$.

1) Nechť $h \in \mathcal{C}$ je m-ární funkce a $\overline{g_1}, \ldots, \overline{g_m} \in \rho$. Pak

$$
\begin{aligned}
h^{\mathrm{r}}\left(\overline{g_1}, \ldots, \overline{g_m}\right) &= h^{\mathrm{r}} \begin{pmatrix} g_1(\mathbf{x}_1) & \ldots & g_m(\mathbf{x}_1) \\ \vdots & & \vdots \\ g_1(\mathbf{x}_i) & \ldots & g_m(\mathbf{x}_i) \\ \vdots & & \vdots \\ g_1(\mathbf{x}_{|A|^n}) & \ldots & g_m(\mathbf{x}_{|A|^n}) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} h\left(g_1(\mathbf{x}_1), \ldots, g_m(\mathbf{x}_1)\right) \\ \vdots \\ h\left(g_1(\mathbf{x}_i), \ldots, g_m(\mathbf{x}_i)\right) \\ \vdots \\ h\left(g_1(\mathbf{x}_{|A|^n}), \ldots, g_m(\mathbf{x}_{|A|^n})\right) \end{pmatrix} = \overline{h\left(g_1, \ldots, g_m\right)},
\end{aligned}
$$

kde $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{|A|^n} \in A^n$ jsou všechny navzájem různé $|A|^n$-tice množiny A^n. Zřejmě funkce $h\left(g_1, \ldots, g_m\right) \in \mathcal{C}$, tedy $\overline{h\left(g_1, \ldots, g_m\right)} \in \rho$. Tím jsme dokázali, že libovolná funkce z klonu $\mathcal{C}$ zachovává relaci ρ.

2) Nechť $f \in \mathcal{O}_A \setminus \mathcal{C}$ je n-ární funkce a $p_1, \ldots, p_n^n \in \mathcal{C}$ jsou n-ární projekce, jimž po řadě odpovídají $|A|^n$-tice $\overline{p_1^n}, \ldots, \overline{p_n^n} \in \rho$. Pak

$$
\begin{aligned}
f^{\mathrm{r}}\left(\overline{p_1^n}, \ldots, \overline{p_n^n}\right) &= f^{\mathrm{r}} \begin{pmatrix} p_1^n(\mathbf{x}_1) & \ldots & p_n^n(\mathbf{x}_1) \\ \vdots & & \vdots \\ p_1^n(\mathbf{x}_i) & \ldots & p_n^n(\mathbf{x}_i) \\ \vdots & & \vdots \\ p_1^n(\mathbf{x}_{|A|^n}) & \ldots & p_n^n(\mathbf{x}_{|A|^n}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f\left(\mathbf{x}_1\right) \\ \vdots \\ f\left(\mathbf{x}_i\right) \\ \vdots \\ f\left(\mathbf{x}_{|A|^n}\right) \end{pmatrix} = \\
&= \overline{f}.
\end{aligned}
$$

Z toho, že $f \notin \mathcal{C}$ plyne $\overline{f} \notin \rho$. Tím jsme dokázali, že pokud funkce nepatří do klonu $\mathcal{C}$, pak nezachovává každou relaci z $\operatorname{Inv} \mathcal{C}$, tj. $f \notin \operatorname{Pol} \operatorname{Inv} \mathcal{C}$.

□

Věta 2.13. *Nechť $F \subseteq \mathcal{O}_A$. Pak množina funkcí* $\operatorname{Pol} \operatorname{Inv} F$ *obsahuje všechny projekce a je uzavřená na skládání funkcí, tj. tvoří klon.*

Důkaz. 1. Nechť p_i^n je i-tá n-ární projekce a $\rho \in \operatorname{Inv} F$ je d-ární relace. Pak pro každé $i \leq n$ platí

$$
\begin{aligned}
&(a_{11}, \ldots, a_{d1}), \ldots, (a_{1n}, \ldots, a_{dn}) \in \rho \;\Rightarrow \\
\Rightarrow &\left(p_i^n(a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, p_i^n(a_{d1}, \ldots, a_{dn})\right) = (a_{1i}, \ldots, a_{di}) \in \rho.
\end{aligned}
$$

2. Nechť f je k-ární funkce a $g_1, \dots, g_k$ jsou n-ární funkce takové, že $f, g_1, \dots, g_k \lhd \mathrm{Inv}F$. Nechť $\rho \subseteq A^d$, $\rho \in \mathrm{Inv}F$, pak bude naším cílem dokázat, že $(f(g_1, \dots, g_k)) \lhd \mathrm{Inv}F$.

$$
\begin{aligned}
f(g_1, \dots, g_k)^{\mathrm{r}}\Big((a_{11}, \dots, a_{d1}), \dots, (a_{1n}, \dots, a_{dn})\Big) = \\
= f^{\mathrm{r}}\bigg(g_1^{\mathrm{r}}\Big((a_{11}, \dots, a_{d1}), \dots, (a_{1n}, \dots, a_{dn})\Big), \dots \\
\dots, g_k^{\mathrm{r}}\Big((a_{11}, \dots, a_{d1}), \dots, (a_{1n}, \dots, a_{dn})\Big)\bigg) = \\
= f^{\mathrm{r}}\bigg(\underbrace{\Big(g_1(a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, g_1(a_{d1}, \dots, a_{dn})\Big)}_{\boldsymbol{s_1^c} \in \rho}, \dots \\
\dots, \underbrace{\Big(g_k(a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, g_k(a_{d1}, \dots, a_{dn})\Big)}_{\boldsymbol{s_k^c} \in \rho}\bigg) = \\
= f^{\mathrm{r}}\left(\boldsymbol{s_1^c}, \dots, \boldsymbol{s_k^c}\right) = \left(f(\boldsymbol{s_1^r}), \dots, f(\boldsymbol{s_d^r})\right) \in \rho.
\end{aligned}
$$

□

Důsledek 2.14. *Nechť $F \subseteq \mathcal{O}_A$ je libovolná množina funkcí definovaných na množině A. Pak $\mathcal{C}(F) = \mathrm{Pol}\,\mathrm{Inv}\,F$.*

Důkaz. Podle věty 2.13 je $\mathrm{Pol}\,\mathrm{Inv}F$ klon obsahující množinu funkcí F, tedy $F \subseteq \mathcal{C}(F) \subseteq \mathrm{Pol}\,\mathrm{Inv}F$. Na druhou stranu, z toho, že $F \subseteq \mathcal{C}(F)$ plyne $\mathrm{Pol}\,\mathrm{Inv}F \subseteq \mathrm{Pol}\,\mathrm{Inv}\,\mathcal{C}(F) = \mathcal{C}(F)$. Spojením obou inkluzí dostáváme rovnost a tedy i tvrzení důsledku. □

Ve větě 2.13 jsme se zabývali pouze operátorem Pol Inv a nikoli operátorem Inv Pol. Důvod je prostý. Definice klonu je definována na množině funkcí, ale množina $\mathrm{Inv}\,\mathrm{Pol}R$ obsahuje relace. Proto na ní nemůžeme aplikovat definici 2.9.

V závěru této kapitoly se budeme zabývat otázkou, zda daná funkce patří do klonu či nikoliv. Odpovědí na tuto otázku, je již několikrát zmíněná Bakerova-Pixleyho věta, kterou zformulovali anglický matematik Alan K. Baker a americký matematik Alden F. Pixley. Abychom tuto větu mohli vyslovit, musíme definovat tzv. *nu-funkci.*

Definice 2.15. Nechť $n \geq 3$ a f je n-ární funkce na A. Pak f se nazývá *nu-funkce* (*near-unanimity*), jestliže pro každé $x, y \in A$ platí

$$f(y, x, \ldots, x) = f(x, y, x, \ldots, x) = \ldots = f(x, \ldots, x, y) = x,$$

tj. jestliže všech $n-1$ vstupů z n je stejný, pak i výsledek operace f je stejný.

Speciálně pro $n = 3$ dostáváme

$$f(x, x, y) = f(x, y, x) = f(y, x, x) = x \quad \forall x, y \in A$$

funkci f nazývající se *majoritní funkce* na A.

Samozřejmě naším cílem není pouze Bakerovu-Pixlyeho větu vyslovit, ale i dokázat. V první části důkazu využíváme pouze vlastnosti zobrazení Pol a Inv, ale druhá část důkazu je mnohem komplikovanější. V této části bude ústředním pojmem nejmenší invariantní relace na množině, který je více rozvíjen v článku [9]. Tento pojem budeme definovat v definici 2.21, ale v důkazu Bakerově-Pixleyho větě budeme potřebovat konkrétní tvar této relace, který je znázorněn až v lemmatu 2.22. Navíc v důkazu tohoto lemmatu využijeme jisté vlastnosti relací, která tvrdí, že každá F-invariantní relace je $\mathcal{C}(F)$-invariantní relací. Abychom tuto vlastnost mohli dokázat, musíme nejdříve definovat řád funkce. Tato definice navíc využívá dva pojmy, kterými jsou term a hloubka termu.

Definice 2.16. Nechť X je množina proměnných a F množina funkcí. Pak *n-árním termem nad množinou X* rozumíme

i) každou proměnnou $x \in X$,

ii) jestliže $f \in F$ je m-ární funkce a $t_1, \ldots, t_m$ jsou n-ární termy, pak $f(t_1, \ldots, t_m)$ je n-ární term,

iii) každý další term vznikne konečným počtem kroků i) a ii).

Poznámka: Každou funkci z množiny F lze napsat ve tvaru termu, přičemž tento term není jednoznačně určený, viz příklad 2.19.

Definice 2.17. Nechť X je množina proměnných, F je množina funkcí a t je libovolný n-ární term nad množinou X. Pak *hloubku termu* $dth(t)$ definujeme následovně

i) $dth(t) = 0$, jestliže t je proměnná,

ii) $dth(t) = \max\{dth(t_1), \ldots, dth(t_k)\} + 1$, jestliže $t = f(t_1, \ldots, t_k)$, kde $f \in F$ je libovolná k-ární funkce a $t_1, \ldots, t_k$ jsou termy, pro které již známe hloubku.

Definice 2.18. Nechť $f \in \mathcal{C}(F)$ a T je množina termů určující funkci f. Řekneme, že funkce f je *řádu* n, jestliže $n = \min\{dth(t) \mid t \in T\}$.

Vzhledem ke složitosti dané problematiky, uděláme názorný příklad.

Příklad 2.19. Uvažujme množinu funkcí $F = \{f, g, h\}$, kde f je unární, g je binární a h je ternární funkce. Předpokládejme, že kvaternární funkci $k \in \mathcal{C}(F)$ lze napsat pouze následujícími třemi termy:

1. $k(x_1, x_2, x_3, x_4) \; = \; f\big(h(x_1, x_3, x_4)\big);$
2. $k(x_1, x_2, x_3, x_4) \; = \; g\Big(f\big(h(x_2, x_2, x_4)\big), h\big(f(x_1), f(x_2), f(x_3)\big)\Big);$
3. $k(x_1, x_2, x_3, x_4) \; = \; h\Bigg(g\big(f(x_2), h(x_1, x_3, x_4)\big)$

$$f\Big(g\big(h(x_1, x_1, x_1), f(x_1)\big)\Big)$$

$$h\big(f(x_1), f(x_2), f(x_3)\big)\Bigg).$$

Nyní určíme hloubku jednotlivých termů určující funkci k.

1. Z první podmínky definice 2.17 plyne, že proměnné mají hloubku 0 a tedy term $h(x_1, x_3, x_4)$ má hloubku 1. Aplikováním podmínky ii) z definice 2.17 dostáváme, že term $f(h(x_1, x_3, x_4))$ má hloubku 2.

2. Z předchozího bodu víme, že term $f(h(x_1, x_3, x_4))$ má hloubku 2. Dále termy $f(x_i)$ pro $i = 1, 2, 3$ mají hloubku 1 a tedy aplikováním podmínky ii) z definice 2.17 dostáváme, že term $h(f(x_1), f(x_2), f(x_3)))$ má hloubku 2. Celkově term $g(f(h(x_2, x_2, x_4)), h(f(x_1), f(x_2), f(x_3)))$ má hloubku 3.

3. Termy $f(x_2)$ a $h(x_1, x_3, x_4)$ mají hloubku 1. Aplikováním podmínky ii) z definice 2.17 platí, že term $g(f(x_2), h(x_1, x_3, x_4))$ má hloubku 2. Záměnou parametrů nezměníme hloubku, proto term $g(h(x_1, x_1, x_1), f(x_1))$ má též hloubku 2. Načež term $f(g(h(x_1, x_1, x_1), f(x_1)))$ má hloubku 3. Poslední vyskytující se term $h(f(x_1), f(x_2), f(x_3))$ má hloubku 2. Celkově tedy term

$$h(g(f(x_2), h(x_1, x_3, x_4)), f(g(h(x_1, x_1, x_1), f(x_1))), h(f(x_1), f(x_2), f(x_3)))$$

má hloubku 4, neboť

$$\max\{2, 3, 2\} + 1 = 4.$$

Podle definice 2.18 je funkce k řádu 2, jelikož nejmenší hloubka termu určující funkci k je 2, tj. $\min\{dth(t_1), dth(t_2), dth(t_3)\} = \min\{2, 3, 4\} = 2$, kde t_1, t_2, t_3 jsou po řadě termy určující funkci k.

Pomocí pojmu řád funkce již můžeme dokázat následující větu, která ukazuje vlastnost F-invariantních relací.

Věta 2.20. *Nechť A je množina a $F \subseteq \mathcal{O}(A), \rho \in \mathcal{R}(A)$. Pak relace ρ je F-invariantní právě tehdy, když je $\mathcal{C}(F)$-invariantní.*

Důkaz. I. $\mathrm{Inv}F \subseteq \mathrm{Inv}\, \mathcal{C}(F)$

1. Nechť $k \in \mathcal{C}(F)$ je řádu 1. Pak ji lze napsat ve tvaru $k = f(g_1, \dots, g_n)$, kde $f \in F$ a g_i jsou projekce. Jelikož projekce vždy zachovávají relaci ρ, pak z vlastností skládání plyne, že i funkce $f(g_1, \dots, g_n)$ zachovává relaci ρ.

2. Předpokládejme, že funkce řádu $\leq n$ zachovávají relaci ρ. Chceme dokázat, že funkce řádu $n + 1$ zachovávají relaci ρ. Nechť $k = f(g_1, \dots, g_n)$ je řádu $n + 1$, přičemž řád $g_i < n + 1$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$. Jenomže podle indukčního předpokladu, funkce g_i zachovávají relaci ρ. Tedy i funkce $f(g_1, \dots, g_n)$ zachovává relaci ρ.

II. $\mathrm{Inv}\, \mathcal{C}(F) \subseteq \mathrm{Inv}F$

Tato inkluze je triviální, neboť za předpokladu, že každá funkce z $\mathcal{C}(F)$ zachovává relaci ρ, ihned plyne, že každá funkce z F zachovává relaci ρ.

□

Posledním krokem, před vyslovením Bakerovy-Pixleyho věty, je definice již zmíněné nejmenší invariantní relace a jejího konkrétního tvaru, který využijeme v důkazu oné věty.

Definice 2.21. Pro $F \subseteq \mathcal{O}_A$ a $\rho \in \mathcal{R}_A^{(m)}$ definujeme relaci

$$\Gamma_F(\rho) = \bigcap \left\{ \rho' \in \mathcal{R}_A^{(m)} \mid \rho \subseteq \rho', \rho' \lhd F \right\},$$

tj. $\Gamma_F(\rho)$ je nejmenší m-ární F-invariantní relace na množině A obsahující relaci ρ.

Lemma 2.22. [9] *Nechť $\rho = \{\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n\}$ je libovolná d-ární relace a $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{O}_A$ je klon. Pak*

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathcal{C}}(\rho) &= \left\{ g^{\mathrm{r}}(\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n) \mid g \in \mathcal{C}^{(n)} \right\} = \left\{ g^{\mathrm{r}}(\rho) \mid g \in \mathcal{C}^{(n)} \right\} \\ &= \left\{ \big(g(\boldsymbol{r}_1), \ldots, g(\boldsymbol{r}_d) \big) \mid g \in \mathcal{C}^{(n)} \right\}. \end{aligned}$$

Důkaz. Pravou stranu rovnosti označíme symbolem φ a dokážeme, že relace φ je nejmenší d-ární $\mathcal{C}$-invariantní relace na množině A obsahující relaci ρ.

i) Inkluze $\rho \subseteq \varphi$ plyne z toho, že množina funkcí $\mathcal{C}^{(n)}$ obsahuje všechny n-ární projekce.

ii) Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p \in \varphi$. Pak pro každou p-ární funkci $q \in \mathcal{C}$ existují n-ární funkce $g_1, \ldots, g_p \in \mathcal{C}$ takové, že platí

$$q^{\mathrm{r}}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p) = q^{\mathrm{r}}\big(g_1^{\mathrm{r}}(\rho), \ldots, g_p^{\mathrm{r}}(\rho)\big) = q(g_1, \ldots, g_p)^{\mathrm{r}}(\rho).$$

Jelikož složená funkce $q(g_1, \ldots, g_p) \in \mathcal{C}$, pak d-tice $q^{\mathrm{r}}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p) \in \varphi$ a tedy φ je $\mathcal{C}$-invariantní.

iii) Nechť $\mathbf{s} \in \varphi$. Pak $\exists\, h \in \mathcal{C}^{(n)} : \mathbf{s} = h(\rho)$.

Označme relaci $\overline{\varphi} = \varphi \setminus \{\mathbf{s}\}$. Předpokládejme, že $\overline{\varphi}$ je $\mathcal{C}$-invariantní. Jelikož existují funkce $q' \in \mathcal{C}^{(p)}$ a $g_1', \ldots, g_p' \in \mathcal{C}^{(n)}$ takové, že

$$q'(g_1', \ldots, g_p') = h,$$

pak z ii) platí $\mathbf{s} = h(\rho) \in \overline{\varphi}$, což je spor s tím, že $\overline{\varphi}$ je $\mathcal{C}$-invariantní.

$\square$

Konečně již víme vše potřebné k tomu, abychom mohli vyslovit i dokázat Bakerovu-Pixleyho větu.

Věta 2.23. (Bakerova-Pixleyho) *Nechť A je konečná množina a $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{O}_A$ je klon, který obsahuje $(d+1)$-ární* **nu***-funkci. Pak*

$$\mathcal{C} = \operatorname{Pol}\operatorname{Inv}^{(d)}\mathcal{C}.$$

Důkaz. I. Nejdříve dokážeme triviální inkluzi $\mathcal{C} \subseteq \operatorname{Pol}\operatorname{Inv}^{(d)}\mathcal{C}$. Z vlastností operátorů Inv a Pol plyne

$$\begin{aligned} \operatorname{Inv}\mathcal{C} &\supseteq \operatorname{Inv}^{(d)}\mathcal{C} \\ \mathcal{C} = \operatorname{Pol}\operatorname{Inv}\mathcal{C} &\subseteq \operatorname{Pol}\operatorname{Inv}^{(d)}\mathcal{C}. \end{aligned}$$

II. Nyní se zabývejme inkluzí $\mathcal{C} \supseteq \operatorname{Pol}\operatorname{Inv}^{(d)}\mathcal{C}$. Nechť f je libovolná n-ární funkce z množiny $\operatorname{Pol}\operatorname{Inv}^{(d)}\mathcal{C}$. Pak definujeme množinu

$$M_f = \left\{B \subseteq A^n \mid \exists g \in \mathcal{C}^{(n)} : f|_B = g|_B\right\}$$

a dokážeme, že $A^n \in M_f$. Tedy pro každou funkci $f \in \operatorname{Pol}\operatorname{Inv}^{(d)}\mathcal{C}$ existuje funkce $g \in \mathcal{C}^{(n)}$ taková, že $f|_{A^n} = g|_{A^n}$.

Důkaz provedeme matematickou indukcí přes mohutnost množiny B.

1. Předpokládejme, že $|B| \leq d$. Pokud $|B| < d$, pak relaci ρ_B můžeme doplnit libovolnými vektory z B na případ $|B| = d$. Tedy množina B je tvaru

$$B = \{(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, (x_{d1}, \dots, x_{dn})\} \subseteq A^n.$$

Z množiny B vytvoříme d-ární relaci ρ_B po složkách, tj.

$$\rho_B = \langle (x_{11}, \dots, x_{d1}), \dots, (x_{1n}, \dots, x_{dn}) \rangle \in \mathcal{R}_A^{(d)}.$$

Vzájemně jednoznačný vztah mezi množinou B a relací ρ_B můžeme znázornit následující maticí, kde řádky jsou prvky množiny B a sloupce jsou prvky relace ρ_B.

$$E = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{d1} & \dots & x_{dn} \end{pmatrix}$$

Následně použijeme nejmenší d-ární $\mathcal{C}$-invariantní relaci obsahující relaci ρ_B z lemmatu 2.22. Nechť $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n$ jsou všechny d-tice z relace ρ_B a n odpovídá aritě zvolené funkce f. Pak

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mathcal{C}}(\rho_B) &= \left\{ g^{\mathrm{r}}(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n) \mid g \in \mathcal{C}^{(n)} \right\} \\
&= \left\{ g^{\mathrm{r}}(\rho_B) \mid g \in \mathcal{C}^{(n)} \right\} \\
&= \left\{ \big(g(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, g(x_{d1}, \dots, x_{dn}) \big) \mid g \in \mathcal{C}^{(n)} \right\}.
\end{aligned}$$

Z předpokladu $f \in \operatorname{Pol} \operatorname{Inv}^{(d)} \mathcal{C}$, tj. $f \lhd \Gamma_{\mathcal{C}}(\rho_B)$ platí

$$f^{\mathrm{r}}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \in \Gamma_{\mathcal{C}}(\rho_B) \quad \forall\, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \Gamma_{\mathcal{C}}(\rho_B).$$

A tedy platí $f(\rho_B) \in \Gamma_{\mathcal{C}}(\rho_B)$.

Vzhledem k tomu, že relace $\Gamma_{\mathcal{C}}(\rho_B)$ je nejmenší, tak $f(\rho_B)$ nevytvoří žádnou novou d-tici a odtud plyne, že existuje funkce $g \in \mathcal{C}^{(n)}$ taková, že $f(\rho_B) = g(\rho_B)$. Pak tedy

$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in B.$$

2. Předpokládejme, že $|B| > d$ a každá podmnožina $B' \subseteq A^n$ pro kterou platí $|B'| < |B|$ náleží do množiny M_f.

Z toho, že $|B| > d$ existuje $(d+1)$ navzájem různých prvků z množiny B, tj.

$$(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, (x_{d+1,1}, \dots, x_{d+1,n}) \in B.$$

Dále pro každé $i \in \{1, \dots, d+1\}$ definujme množiny

$$B_i = B \setminus \{(x_{i1}, \dots, x_{in})\}.$$

Podle indukčního předpokladu existují funkce $g_1, \dots, g_{d+1} \in \mathcal{C}^{(n)}$ takové, že

$$\forall i \in \{1, \dots, d+1\} \quad \forall \mathbf{x} \in B_i : f(\mathbf{x}) = g_i(\mathbf{x}).$$

Definujme funkci g následujícím způsobem: $g = m(g_1, \dots, g_{d+1})$, kde m je $(d+1)$-ární nu-funkce z klonu $\mathcal{C}$. Zřejmě $g \in \mathcal{C}^{(n)}$.

Pak pro každý prvek $\mathbf{y} \in B$ platí, že náleží alespoň d množinám z množin $B_1, \ldots, B_{d+1}$. Předpokládejme, že prvek $\mathbf{y}$ náleží množinám $B_1, \ldots, B_{j-1}$, $B_{j+1}, \ldots B_{d+1}$. Proto platí

$$\begin{aligned} g(\mathbf{y}) &= m(g_1, \ldots, g_{d+1})(\mathbf{y}) = \\ &= m\big(g_1(\mathbf{y}), \ldots, g_{j-1}(\mathbf{y}), g_j(\mathbf{y}), g_{j+1}(\mathbf{y}), \ldots, g_{d+1}(\mathbf{y})\big) = \\ &= m\big(f(\mathbf{y}), \ldots, f(\mathbf{y}), g_j(\mathbf{y}), f(\mathbf{y}), \ldots, f(\mathbf{y})\big) = f(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{y} \in B. \end{aligned}$$

Celkově tedy dostáváme, že pro každou funkci z množiny $\operatorname{Pol}\operatorname{Inv}^{(d)}\mathcal{C}$ existuje funkce z klonu $\mathcal{C}$, která splňuje $f|_A = g|_A$. Tím je tvrzení dokázané. □

Větu 2.23 jsme zmínili pouze kvůli jejímu důkazu. Na druhou stranu následující důsledek, který je ekvivalentní tvrzení k Bakerově-Pixleyho větě, poskytuje užitečný způsob, jak Bakerovu-Pixleyho větu v následujících kapitolách aplikovat.

Důsledek 2.24. [5] *Nechť $\mathcal{C}$ je klon na množině A a $f \in \mathcal{O}_A$. Předpokládejme, že klon $\mathcal{C}$ obsahuje $(d+1)$-ární* nu*-funkci. Pak $f \in \mathcal{C}$ právě tehdy, když f zachovává všechny d-ární $\mathcal{C}$-invariantní relace.*

Důkaz. Jestliže funkce $f \in \mathcal{C}$, pak zachovává všechny $\mathcal{C}$-invariantní relace a tedy zachovává i všechny d-ární $\mathcal{C}$-invariantní relace. Naopak předpokládejme, že funkce f zachovává všechny d-ární $\mathcal{C}$-invariantní relace. Podle předchozí věty víme, že množina všech funkcí zachovávající všechny d-ární $\mathcal{C}$-invariantní relace je stejná jako množina všech funkcí zachovávající všechny $\mathcal{C}$-invariantní relace. Odtud plyne, že funkce f zachovává všechny $\mathcal{C}$-invariantní relace. □

Závěrem celé této kapitoly bude další důsledek Bakerové-Pixleyho věty, který ukazuje zajímavou vlastnost klonů obsahujících nu-funkci. Tento důsledek bude taktéž důležitý v další kapitole, neboť jak se dozvíme, tak svazy obsahují nu-funkci a tedy agregační klony jsou konečně generované.

Důsledek 2.25. [5] *Nechť $\mathcal{C}$ je klon na konečné množině A obsahující* nu*-funkci. Pak klon $\mathcal{C}$ je konečně generovaný.*

Důkaz. Vzhledem k tomu, že A je konečná, pak existuje konečně mnoho d-árních $\mathcal{C}$-invariantních relací a tedy existuje i konečně mnoho d-árních ne-$\mathcal{C}$-invariantních relací σ. Pro každou takovou relaci σ existuje funkce $f_\sigma \in \mathcal{C}$ taková, že f_σ nezachovává relaci σ.

Ukážeme, že množina všech funkcí f_σ spolu s nu-funkcí je konečně generující množina klonu $\mathcal{C}$. Označme množinu $\mathcal{D}$ jako klon generovaný nu-funkci a funkcemi f_σ. Zřejmě $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$. Dokážeme, že $\mathrm{Inv}^{(d)}\mathcal{C}$ a $\mathrm{Inv}^{(d)}\mathcal{D}$ mají stejné d-ární relace. Z toho, že $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ plyne, že $\mathrm{Inv}^{(d)}\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Inv}^{(d)}\mathcal{D}$. Ale z konstrukce klonu $\mathcal{D}$ víme, že pro každou ne-$\mathcal{C}$-invariantní relací σ existuje funkce $f_\sigma \in \mathcal{D}$ taková, že nezachovává relaci σ, tj. σ je ne-$\mathcal{D}$-invariantní relace.

Celkově dostáváme, že jelikož $\mathrm{Inv}^{(d)}\mathcal{C}$ a $\mathrm{Inv}^{(d)}\mathcal{D}$ mají stejné relace, pak z Baker-Pixleyho věty obdržíme požadovanou rovnost $\mathcal{D} = \mathcal{C}$. $\square$

3 Generování agregačního klonu

V této kapitole bude naším cílem veškeré znalosti z předchozích kapitol aplikovat na konečné svazy. V úvodní kapitole jsme uvedli definici agregační funkce na intervalu a základní větu o skládání agregačních funkcí. Totéž bude naším cílem vyslovit a tentokrát i dokázat pro svazy.

3.1 Agregační klon

Z definice 1.1 víme, co je to agregační funkce na intervalu. Pro připomenutí, je to taková n-ární funkce, která je neklesající a splňuje okrajové podmínky. Nyní tuto definici aplikujeme na svazy.

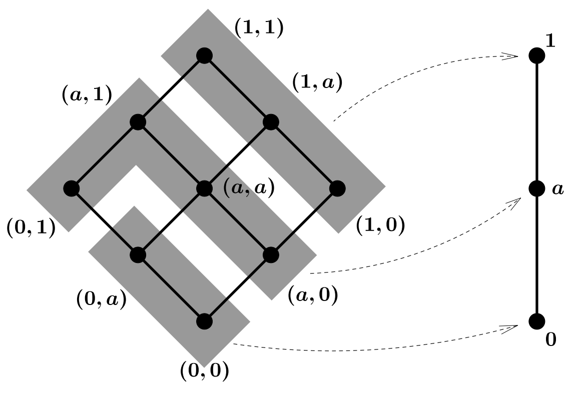
Definice 3.1. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $(L, \leq)$ je konečný svaz. Zobrazení $A : L^n \to L$ se nazývá *n-ární agregační funkce na svazu L*, jestliže je neklesající, tj. pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L^n$ platí

$$\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \Rightarrow A(\mathbf{x}) \leq A(\mathbf{y})$$

a splňuje okrajové podmínky, tj.

$$A(0, \ldots, 0) = 0 \quad \text{a} \quad A(1, \ldots, 1) = 1.$$

Abychom měli alespoň nějakou představu o tom, jak agregační funkce vypadají na svazu, tak uděláme jednoduchý příklad. Zvolíme tříprvkový svaz a zkonstruujeme na něm binární agregační funkci. Příklad takové agregační funkce vidíme na obrázku 5.



Obrázek 5: Příklad binární agregační funkce na tříprvkovém svazu

Chceme ukázat, že agregační funkce tvoří klon. Jelikož z definice klonu (definice 2.9) víme, že potřebujeme projekce a skládání funkcí, pak nám vyvstávají dvě otázky. První zní, zda projekce splňují definici agregační funkce a druhá, jak je to se skládáním agregačních funkcí. Zaměřme se nejprve na projekce. Dokážeme jednoduché lemma, které odpoví kladně na první otázku.

Lemma 3.2. *Každá projekce je agregační funkcí.*

Důkaz. Nechť $i, n \in \mathbb{N}, i \leq n$ a $p_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ je i-tá n-ární projekce. Ověříme, zda projekce je neklesající. Z definice uspořádání na svazu plyne

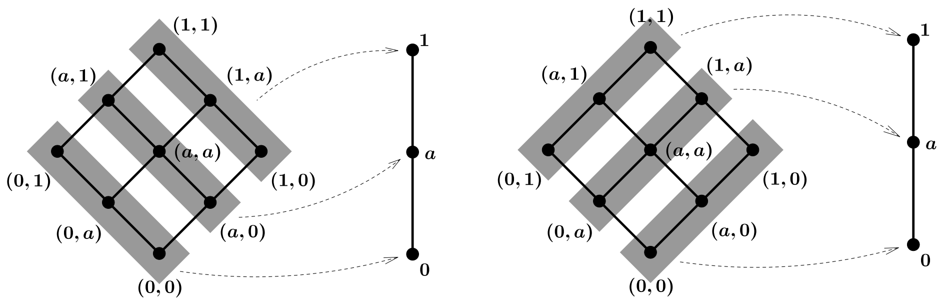
$$\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \Leftrightarrow x_i \leq y_i \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}\,.$$

Odtud z $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ plyne $p_i^n(\mathbf{x}) = x_i \leq y_i = p_i^n(\mathbf{y})$.

Ověření druhé podmínky je triviální. Dostáváme tedy, že každá projekce je agregační funkcí.

□

Příklady první a druhé binární projekční agregační funkce na tříprvkovém svazu jsou zobrazeny na obrázku 6.



Obrázek 6: Binární projekční agregační funkce na tříprvkovém svazu

Dále se budeme zabývat druhou otázkou, jak je to se skládáním agregačních funkcí. Odpovědí na tuto otázku je věta 1.3, kterou musíme přetransformovat na teorii svazů. Dokážeme, že složením agregačních funkcí na svazu dostaneme agregační funkci na svazu. Jejím důsledkem je poté zobecněné tvrzení již zmíněné věty 1.3.

Věta 3.3. *Nechť L je konečný svaz a k, n jsou libovolná přirozená čísla. Nechť $A : L^k \to L$ a $B_1, \ldots, B_k : L^n \to L$ jsou agregační funkce na svazu L. Pak funkce $C = A\,(B_1, \ldots, B_k) : L^n \to L$ dána předpisem*

$$C(\mathbf{x}) = A\Big(B_1(\mathbf{x}), \ldots, B_k(\mathbf{x})\Big) \quad \forall \mathbf{x} \in L^n$$

je n-ární agregační funkce na L.

Důkaz. Cílem je dokázat podmínky z definice agregační funkce na svazu.

1. Funkce C je neklesající:

Nechť $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L^n, \mathbf{x} \leq \mathbf{y}$. Pak $B_i(\mathbf{x}) \leq B_i(\mathbf{y})$, pro všechny $i, (1 \leq i \leq k)$ a následně

$$C(\mathbf{x}) = A\Big(B_1(\mathbf{x}), \ldots, B_k(\mathbf{x})\Big) \leq A\Big(B_1(\mathbf{y}), \ldots, B_k(\mathbf{y})\Big) = C(\mathbf{y}).$$

2. Funkce C splňuje okrajové podmínky:

$$C(0, \ldots, 0) = A\Big(B_1(0, \ldots, 0), \ldots, B_k(0, \ldots, 0)\Big) = A(0, \ldots, 0) = 0,$$
$$C(1, \ldots, 1) = A\Big(B_1(1, \ldots, 1), \ldots, B_k(1, \ldots, 1)\Big) = A(1, \ldots, 1) = 1.$$

□

Důsledek 3.4. *Nechť $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ a L je konečný svaz. Nechť $A : L^k \to L$, $B_1 : L^{n_1} \to L, B_2 : L^{n_2} \to L, \ldots, B_k : L^{n_k} \to L$ jsou agregační funkce definované na L. Pak složená funkce $D_{A,B_1,\ldots,B_k} : L^{n_1+\ldots+n_k} \to L$ dána předpisem*

$$\begin{aligned} D_{A,B_1,\ldots,B_k}(x_1, \ldots, x_{n_1+\ldots+n_k}) = A\Big(&B_1(x_1, \ldots, x_{n_1}), \\ &B_2(x_{n_1+1}, \ldots, x_{n_1+n_2}), \ldots, \\ &B_k(x_{n_1+n_2+\ldots+n_{k-1}+1}, \ldots, x_{n_1+\ldots+n_k})\Big) \end{aligned}$$

je $(n_1 + \ldots + n_k)$-ární agregační funkce na L.

Důkaz. Stačí dokázat, že funkce $D_{A,B_1,\ldots,B_k}$ je neklesající, protože platnost okrajových podmínek je triviální a dokázala by se analogicky jako v předchozím důkazu.

Nechť prvky $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L^{n_1+\ldots+n_k}$ jsou takové, že $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$. Pak z vlastností direktního součinu svazů plyne, že $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ právě tehdy, když $x_i \leq y_i$ pro každé $i \in \{1, \ldots, n_1 + \ldots + n_k\}$. Tedy

$$\begin{aligned} (x_1, \ldots, x_{n_1}) &\leq (y_1, \ldots, y_{n_1}), \ldots \\ \ldots, (x_{n_1+n_2+\ldots+n_{k-1}+1}, \ldots, x_{n_1+\ldots+n_k}) &\leq (y_{n_1+n_2+\ldots+n_{k-1}+1}, \ldots, y_{n_1+\ldots+n_k}). \end{aligned}$$

Odtud dostáváme, že

$$\begin{aligned} & D_{A,B_1,\ldots,B_k}(\mathbf{x}) = \\ = A\Big(&\underbrace{B_1(x_1, \ldots, x_{n_1})}_{\leq B_1(y_1,\ldots,y_{n_1})}, \ldots, \underbrace{B_k(x_{n_1+n_2+\ldots+n_{k-1}+1}, \ldots, x_{n_1+\ldots+n_k}}_{\leq B_k(y_{n_1+n_2+\ldots+n_{k-1}+1},\ldots,y_{n_1+\ldots+n_k})}\Big) \leq \\ \leq A\Big(&B_1(y_1, \ldots, y_{n_1}), \ldots, B_2(y_{n_1+n_2+\ldots+n_{k-1}+1}, \ldots, y_{n_1+\ldots+n_k})\Big) = \\ & = D_{A,B_1,\ldots,B_k}(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

□

V tuto chvíli už máme vše potřebné k tomu, abychom mohli definovat agregační klon. Z definice 2.9 plyne, že podmnožina množiny všech agregačních funkcí na svazu L obsahující všechny projekční agregační funkce, která je uzavřená na skládání agregačních funkcí je klonem. Nazýváme ho *agregačním podklonem*. Z této definice je patrné i to, že množina všech agregačních funkcí na svazu L je klonem, nazýváme ho *agregačním klonem* a právě tímto klonem se budeme po zbytek práce zabývat. Agregační klon množiny všech agregačních funkcí na svazu označíme $\mathcal{C}_L$. Dále ukážeme, že existují nu-funkce na svazech.

Lemma 3.5. *Nechť $(L, \wedge, \vee)$ je libovolný svaz, pak funkce*

$$f(x, y, z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \tag{1}$$
$$g(x, y, z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z) \tag{2}$$

jsou monotónní majoritní funkce na L.

Důkaz. Předpokládejme, že $y = x$. Pak

$$\begin{aligned} f(x,x,z) &= (x \wedge x) \vee (x \wedge z) \vee (x \wedge z) = x \vee (x \wedge z) = x \\ g(x,x,z) &= (x \vee x) \wedge (x \vee z) \wedge (x \vee z) = x \wedge (x \vee z) = x. \end{aligned}$$

Zcela analogicky by se to dokázalo pro jiné shodné dvojice prvků. Dále chceme dokázat první podmínku z definice 3.1, tj. pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L^3$ takové, že $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ platí $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y})$. Nechť $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$. Pak z předpokladu $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ plyne, že $x_i \leq y_i$ pro každé $i \in \{1, 2, 3\}$. Jenomže operace průsek je monotónní funkce a tedy platí, že $(x_i \wedge x_j) \leq (y_i \wedge y_j)$ pro $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Na druhou stranu i operace spojení je monotónní, čímž platí

$$f(\mathbf{x}) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3) \leq (y_1 \wedge y_2) \vee (y_1 \wedge y_3) \vee (y_2 \wedge y_3) = f(\mathbf{y}),$$

což jsme měli dokázat. Analogicky se dokáže monotónnost funkce g. $\square$

Z právě vyslovených poznatků a z existence majoritních funkcí na svazech můžeme vyvodit, že všechny vlastnosti klonů, které jsme získali v předchozí kapitole 2 můžeme použít i na množinu všech agregačních funkcí svazu L. Nejdůležitějšími výsledky budou oba důsledky Bakerové-Pixleyho věty. Z toho, že majoritní funkce jsou agregačními funkcemi a tedy patří do agregačního klonu $\mathcal{C}_L$ plyne, že agregační klon $\mathcal{C}_L$ je konečně generovaný. Tím jsme dospěli k otázce, kterou se budeme dále zabývat. Jakého tvaru je nejméně mohutná množina generující agregační klon $\mathcal{C}_L$, popřípadě jaký je horní odhad všech nejméně mohutných množin generujících agregační klon $\mathcal{C}_L$?

3.2 Agregační funkce χ a $\oplus$

Ke konstrukci nejmenší generující množiny agregačního klonu $\mathcal{C}_L$ použijeme postup popsaný v článku [4]. Základní myšlenkou této konstrukce jsou unární funkce χ a binární funkce $\oplus$, ze kterých můžeme za pomocí svazových operací $\wedge$ a $\vee$ vygenerovat agregační klon $\mathcal{C}_L$. Nejdříve definujeme zmíněné operace χ, $\oplus$ a poté spolu se svazovými operacemi zkonstruujeme funkce $h^A_{\mathbf{a}}$, pomocí kterých dokážeme, že každá agregační funkce je spojením těchto funkcí.

Definice 3.6. Nechť $(L, \leq)$ je konečný svaz. Pak pro každé $a \in L$ definujme funkce $\chi_a : L \to L$ a $\oplus_a : L \times L \to L$ následovně

$$\chi_a(x) = \begin{cases} 1 & ; x \geq a, x \neq 0 \\ 0 & ; \text{jinak}, \end{cases}$$

$$x \oplus_a y = \begin{cases} 1 & ; x = 1, y = 1 \\ 0 & ; x = 0, y = 0 \\ a & ; \text{jinak}. \end{cases}$$

Je evidentní, že funkce χ_a a $\oplus_a$ jsou agregačními funkcemi na L a navíc pro operaci $\oplus_b$ platí asociativní zákon. Proto budeme používat označení

$$\bigoplus_{i=1}^{n}{}_b\, x_i = x_1 \oplus_b x_2 \oplus_b x_3 \oplus_b \ldots \oplus_b x_n,$$

přičemž pro $0 < b < 1$ platí

$$\bigoplus_{i=1}^{n}{}_b\, x_i \neq b \quad \Leftrightarrow \quad (x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0) \quad \text{nebo} \quad (x_1, \ldots, x_n) = (1, \ldots, 1).$$

K definici funkcí $h_{\mathbf{a}}^A$ je potřeba zavést množinu $J_{\mathbf{a}}$ následujícím způsobem: pro $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in L^n$, $J_{\mathbf{a}} = \{1 \leq i \leq n \mid a_i \neq 0\}$, která představuje množinu všech indexů takových, že na daném místě je nenulový prvek.

Definice 3.7. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $A : L^n \to L$ je agregační funkce. Pro každé $\mathbf{a} \in L^n$ takové, že $(0, \ldots, 0) < \mathbf{a} < (1, \ldots, 1)$ definujeme funkci $h_{\mathbf{a}}^A : L^n \to L$ vztahem

$$h_{\mathbf{a}}^A(x_1, \ldots, x_n) \quad = \quad \bigwedge_{i \in J_{\mathbf{a}}} \chi_{a_i}(x_i) \wedge \bigoplus_{i=1}^{n}{}_{A(\mathbf{a})}\, x_i. \tag{3}$$

Následující lemma dokazuje korektnost právě zavedených funkcí, neboli splňují definici agregační funkce na svazu.

Lemma 3.8. [4] *Funkce $h^A_{\mathbf{a}}$ je agregační funkce na L, složená z některých agregačních funkcí χ a $\oplus$. Navíc pro každé $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in L^n$ platí*

$$h^A_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & ;\ \mathbf{x} = (1, \dots, 1) \\ A(\mathbf{a}) & ;\ \mathbf{x} \geq \mathbf{a}, \mathbf{x} \neq (1, \dots, 1) \\ 0 & ;\ \mathbf{x} \ngeq \mathbf{a}. \end{cases} \tag{4}$$

Důkaz. První část tvrzení vyplývá z důsledku 3.3 o skládání agregačních funkcí. Zaměřme se proto na tvar agregační funkce $h^A_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$.

Předpokládejme, že $\mathbf{1} \neq \mathbf{x} \geq \mathbf{a} > \mathbf{0}$. Platí nám, že $\mathbf{x} \geq \mathbf{a}$ právě tehdy, když $x_i \geq a_i, \forall i \in J_{\mathbf{a}}$. V tom případě $\chi_{a_i}(x_i) = 1, \forall i \in J_{\mathbf{a}}$. Z toho, že $\mathbf{1} \neq \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ plyne $\bigoplus_{A(\mathbf{a})} x_i = A(\mathbf{a})$. Odtud obdržíme

$$h^A_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \bigwedge_{i \in J_{\mathbf{a}}} \chi_{a_i}(x_i) \wedge \bigoplus_{i=1}^{n}{}_{A(\mathbf{a})}\, x_i = 1 \wedge A(\mathbf{a}) = A(\mathbf{a}).$$

Jestliže $\mathbf{x} \ngeq \mathbf{a}$, pak $x_i \ngeq a_i$ pro nějaké $i \in J_{\mathbf{a}}$. Následně tedy $\chi_{a_i}(x_i) = 0$, což dává za výsledek

$$h^A_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \bigwedge_{i \in J_{\mathbf{a}}} \chi_{a_i}(x_i) \wedge \bigoplus_{i=1}^{n}{}_{A(\mathbf{a})}\, x_i = 0 \wedge A(\mathbf{a}) = 0.$$

$\square$

Věta 3.9. [4] *Nechť $A : L^n \to L$ je libovolná agregační funkce na L a funkce $h^A_{\mathbf{a}}$ je definována vztahem (3) pro každé $\mathbf{a} \in L^n \setminus \{(0, \dots, 0), (1, \dots, 1)\} = L^n_*$. Pak*

$$A(\mathbf{x}) = \bigvee_{\mathbf{a} \in L^n_*} h^A_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in L^n. \tag{5}$$

Důkaz. Nechť $\mathbf{x} \in L^n$ je libovolné. Jestliže $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ nebo $\mathbf{x} = \mathbf{1}$, pak podle lemmatu 3.8 platí, že výsledkem je 0 nebo 1, tj. splňuje okrajové podmínky. Proto můžeme předpokládat, že $\mathbf{x} \in L_*^n$. Použitím (4) obdržíme

$$\bigvee_{\mathbf{a} \in L_*^n} h_{\mathbf{a}}^A(\mathbf{x}) = \bigvee_{\substack{\mathbf{a} \in L_*^n \\ \mathbf{a} \leq \mathbf{x}}} h_{\mathbf{a}}^A(\mathbf{x}) \vee \bigvee_{\substack{\mathbf{a} \in L_*^n \\ \mathbf{a} \nleq \mathbf{x}}} h_{\mathbf{a}}^A(\mathbf{x}) = \bigvee_{\substack{\mathbf{a} \in L_*^n \\ \mathbf{a} \leq \mathbf{x}}} A(\mathbf{a}) \vee \bigvee_{\substack{\mathbf{a} \in L_*^n \\ \mathbf{a} \nleq \mathbf{x}}} 0 = \bigvee_{\substack{\mathbf{a} \in L_*^n \\ \mathbf{a} \leq \mathbf{x}}} A(\mathbf{a}).$$

Z toho, že funkce A je neklesající a $\mathbf{x}$ reprezentuje největší prvek množiny $\{\mathbf{a} \in L_*^n \mid \mathbf{a} \leq \mathbf{x}\}$ plyne, že $A(\mathbf{a}) \leq A(\mathbf{x})$ pro každé $\mathbf{a} \in L_*^n, \mathbf{a} \leq \mathbf{x}$. Odtud dostáváme

$$\bigvee_{\mathbf{a} \in L_*^n} h_{\mathbf{a}}^A(\mathbf{x}) = \bigvee_{\substack{\mathbf{a} \in L_*^n \\ \mathbf{a} \leq \mathbf{x}}} A(\mathbf{a}) = A(\mathbf{x}),$$

což jsme měli dokázat. □

Následující věta je přímým důsledkem právě zmíněné věty, neboť každou agregační funkci lze získat spojením funkcí $h_{\mathbf{a}}^A$, které jsou ovšem získány z funkcí χ, $\oplus$ a svazových operací.

Věta 3.10. [4] *Nechť L je konečný svaz. Pak agregační klon $\mathcal{C}_L$ na L je generován svazovými operacemi $\vee$, $\wedge$ a operacemi χ_a, $\oplus_a$ pro $a \in L$.*

3.2.1 Duální princip

Můžeme položit otázku, zda ve formuli (3) lze zaměnit průsek za spojení a ve větě 3.9 spojení za průsek. Takováto záměna se nazývá *duální princip* nebo zkráceně *dualita*. V našem případě je odpověď kladná a proto ukážeme, jak sestrojit duální formuli k formuli (3) a následně pak duální větu k větě 3.9. Jsou-li formule „pěkné“, pak lze duální formuli vytvořit pouze záměnou spojení a průseku, či naopak. Tuto dualitu jsme viděli například u nu-funkcí pro svazy (viz vztahy (1) a (2)). Jelikož vztah (3) není tak jednoduchý, musíme udělat ještě jednu změnu. Tou změnou je duální funkce k funkci χ, kterou označíme μ a definujeme následovně.

Definice 3.11. Nechť $(L, \leq)$ je konečný svaz. Pak pro každé $a \in L$ definujeme funkci $\mu_a : L \to L$ následovně

$$\mu_a(x) = \begin{cases} 0 & ; x \leq a, x \neq 1 \\ 1 & ; \text{jinak.} \end{cases} \tag{6}$$

Podobně jako v předchozím případě vytvoříme množinu nejednotkových indexů a vyslovíme duální definici k definici 3.7. Pro $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in L^n$ označme množinu $\widehat{J_{\mathbf{a}}} = \{1 \leq i \leq n \mid a_i \neq 1\}$.

Definice 3.12. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $A : L^n \to L$ je agregační funkce. Pro každé $\mathbf{a} \in L^n$ splňující $(0, \ldots, 0) < \mathbf{a} < (1, \ldots, 1)$ definujeme funkci $g_{\mathbf{a}}^A : L^n \to L$ vztahem

$$g_{\mathbf{a}}^A(x_1, \ldots, x_n) \;=\; \bigvee_{i \in \widehat{J_{\mathbf{a}}}} \mu_{a_i}(x_i) \vee \bigoplus_{i=1}^{n}{}_{A(\mathbf{a})}\, x_i.$$

Následující lemma opět kontroluje korektnost právě zavedené definice a ukazuje, že jsme dualitu zavedli správně.

Lemma 3.13. [4] *Funkce $g_{\mathbf{a}}^A$ je agregační funkce na L, složená z některých agregačních funkcí μ a $\oplus$. Navíc pro každé $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in L^n$ platí*

$$g_{\mathbf{a}}^A(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & ; \mathbf{x} = (0, \ldots, 0) \\ A(\mathbf{a}) & ; \mathbf{x} \leq \mathbf{a}, \mathbf{x} \neq (0, \ldots, 0) \\ 1 & ; \mathbf{x} \nleq \mathbf{a}. \end{cases} \tag{7}$$

Dokázali jsme vytvořit duální formuli k formuli (3). Stále jsme, ale nezodpověděli druhou část otázky, která se týkala věty 3.9. I v tomto případě dostáváme kladnou odpověď a za použití funkcí $g_{\mathbf{a}}^A$ stačí pouze zaměnit spojení za průsek.

Lemma 3.14. [4] *Nechť $A : L^n \to L$ je libovolná agregační funkce na L a funkce $g_{\mathbf{a}}^A$ je definována vztahem (7) pro každé $\mathbf{a} \in L_*^n$. Pak*

$$A(\mathbf{x}) = \bigwedge_{a \in L_*^n} g_{\mathbf{a}}^A(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in L^n. \tag{8}$$

Samozřejmě i zde dostáváme okamžitý důsledek lemmatu 3.14, který tvrdí, že agregační klon $\mathcal{C}_L$ můžeme vygenerovat i za použití funkcí μ_a.

Věta 3.15. [4] *Nechť L je konečný svaz. Pak agregační klon $\mathcal{C}_L$ na L je generován svazovými operacemi $\vee$, $\wedge$ a operacemi μ_a, $\oplus_a$ pro $a \in L$.*

Závěrem celé této kapitoly týkající se operátorů χ, μ a $\oplus$ položíme zásadní otázku. Lze agregační klon $\mathcal{C}_L$ vygenerovat pouze za pomocí libovolných unárních funkcí a svazových operací. V tomto případě je odpověď záporná, kterou dokazuje následující věta.

Věta 3.16. [4] *Nechť L je svaz s alespoň třemi prvky. Pak množina obsahující svazové operace a všechny unární agregační funkce negeneruje agregační klon $\mathcal{C}_L$.*

Důkaz. Označme $\mathcal{D}$ klon, generovaný všemi unárními agregačními funkcemi na L spolu se svazovými operacemi. Je vidno, že klon $\mathcal{D}$ obsahuje ternární nu-funkce. Proto můžeme použít Baker-Pixleyho větu, která tvrdí, že funkce $f \in \mathcal{O}_L$ náleží do klonu $\mathcal{D}$ právě tehdy, když f zachovává všechny binární $\mathcal{D}$-invariantní relace.

Zvolme relaci $B = \{(1,0),(0,0)\} \subseteq L^2$. Všechny unární agregační funkce splňují okrajové podmínky a odtud je vidět, že relace B je invariantní ke všem unárním agregačním funkcím. Evidentně, B je invariantní i vzhledem ke svazovým operacím. Tedy B je binární $\mathcal{D}$-invariantní relace.

Nechť $a \in L$ je libovolný prvek takový, že $0 < a < 1$. Nechť M je matice, jejichž sloupce tvoří dvojice $(1,0),(0,0) \in B$. Pak funkce $\oplus_a$ nezachovává relaci B, neboť aplikováním funkce $\oplus_a$ na sloupce matice M nedostaneme prvek z relace B, tj.

$$\oplus_a^{\mathrm{c}}(M) = \oplus_a^{\mathrm{c}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \oplus_a 0 & 0 \oplus_a 0 \end{pmatrix} = (a,0) \notin B.$$

Z toho, že agregační funkce $\oplus_a$ nezachovává všechny relace, plyne z důsledku 2.24, že $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} \neq \mathcal{D}$. □

3.3 Vlastnosti agregačních funkcí χ a $\oplus$

V této podkapitole podrobně rozebereme chování funkcí typu χ a $\oplus$ a ukážeme jejich důležité vlastnosti. Budeme se především zabývat tím, jak některé z funkcí χ a $\oplus$ vygenerovat pomocí ostatních funkcí χ, $\oplus$ a svazových operací. Účelem je, abychom dostali co nejméně početnou množinu generující agregační klon $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$.

Na úvod připomeneme některé důležité pojmy z teorie svazů, které při generování funkcí typu χ a $\oplus$ hrají významnou roli. Především se jedná o pojmy, jako množina spojově ireducibilních prvků a generující množina svazu.

Definice 3.17. Prvek $0 \neq a \in L$ se nazývá *spojově ireducibilní* v L, platí-li

$$a = b \vee c \quad \Rightarrow \quad a = b \quad \text{nebo} \quad a = c.$$

Množinu všech spojově ireducibilních prvků svazu L označíme $\mathrm{J}(L)$.

Prvek $1 \neq a \in L$ se nazývá *průsekově ireducibilní* v L, platí-li

$$a = b \wedge c \quad \Rightarrow \quad a = b \quad \text{nebo} \quad a = c.$$

Množinu všech průsekově ireducibilních prvků svazu L označíme $\mathrm{M}(L)$.

Definice 3.18. Nechť $a, b \in L$, $a \neq b$. Řekneme, že prvek b *pokrývá* prvek a (a je *pokrýván* b), jestliže $a \leq b$ a existuje-li prvek $x \in L$ takový, že $a \leq x \leq b$, pak $a = x$ nebo $b = x$.

Označení: Relaci pokrývání budeme označovat symbolem $\prec$, tj. $a \prec b$, jestliže prvek b pokrývá prvek a.

Definice 3.19. Nechť L je svaz s 0 a 1. Pak prvek pokrývající 0 se nazývá *atom* a prvek, který je pokrýván 1 se nazývá *koatom*. Množinu všech atomů svazu L označíme $\mathrm{At}(L)$ a množinu všech koatomů svazu L označíme $\mathrm{KoAt}(L)$.

Definice 3.20. Svaz L se nazývá *atomární* (resp. *koatomární*), jestliže množina spojově (resp. průsekově) ireducibilních prvků obsahuje pouze atomy (resp. koatomy) svazu L, tj.

$$\mathrm{J}(L) = \mathrm{At}(L) \quad (\text{resp. } \mathrm{M}(L) = \mathrm{KoAt}(L))\,.$$

Lemma 3.21. [6] *Neprázdný průnik podsvazů svazu L je podsvazem svazu L.*

Důkaz. Předpokládejme, že $A_i, i \in I$ jsou podsvazy svazu L a jejich průnik A je neprázdný, tj. $A = \bigcap\{A_i, i \in I\} \neq \emptyset$. Dále uvažujme prvky $a, b \in A$. Pak $a, b \in A_i$ pro každé $i \in I$, načež A_i je podsvaz a proto platí $a \vee b \in A_i$ a $a \wedge b \in A_i$ pro každé $i \in I$. Odtud vyplývá, že $a \vee b \in A$ a $a \wedge b \in A$, tedy A je podsvaz. $\square$

Část následující definice je známá z teorie svazů, kterou ale doplníme o nový pojem tzv. *nejméně mohutné generující množiny svazu.*

Definice 3.22. Nechť L je svaz a $H \neq \emptyset$ je libovolná podmnožina v L. Pak průnikem všech podsvazů obsahující množinu H, dostaneme *podsvaz generovaný množinou* H, označujeme ho $\langle H \rangle_L$.

Pokud $\langle H \rangle_L = L$, pak množinu H nazýváme *generující množinou* svazu L.

Nechť $H_1, \ldots, H_n$ jsou všechny generující množiny svazu L. Označme $h = \min\{|H_1|, \ldots, |H_n|\}$. Pak generující množiny H_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ pro které platí $|H_i| = h$ se nazývají *nejméně mohutné generující množiny* svazu L.

Po tomto krátkém opakování, již můžeme přistoupit k samotnému generování funkcí χ a $\oplus$. Nejprve se zaměříme na funkce typu χ. Ze všeho nejdřív dokážeme, že lze vygenerovat funkce χ_0 a χ_1 pomocí ostatních funkcí χ. Později ukážeme důležitější vlastnost, týkající se generování funkcí χ_0 a χ_1 s využitím funkcí $\oplus$. Následující vlastnost nám ukáže, že důležitými parametrickými funkcemi typu χ jsou takové, které mají spojově ireducibilní parametr, tj. $\chi_x, x \in \mathrm{J}(L)$. Poslední vlastnost funkcí χ se zaměřujeme na atomické funkce χ, což jsou takové funkce χ_a, kde parametr a je atomem svazu. Dokážeme, že ve svazu s více atomy, lze pomocí jediné atomické funkce χ vygenerovat všechny ostatní atomické funkce χ. I v tomto případě později ukážeme mnohem důležitější vlastnost využívající atomické funkce χ.

Lemma 3.23. *Nechť L je alespoň čtyřprvkový konečný svaz. Pak pro každé $a, b, c \in L$ takové, že $a, b \neq 1$, $a \nleq b$, $c \neq 0$ platí*

i) $\chi_0(x) = \chi_c\,(x \oplus_c x) \quad \forall x \in L,$

ii) $\chi_1(x) = \chi_a\,(x \oplus_b x) \quad \forall x \in L.$

Speciálně, pro svaz L s právě jedním atomem a_1 platí

$$\chi_0(x) = \chi_{a_1}(x) \quad \forall x \in L.$$

Důkaz. *i)*

$$\chi_c(x) = \begin{cases} 1 & ; x \geq c \\ 0 & ; \text{jinak}, \end{cases} \qquad x \oplus_c x = \begin{cases} 1 & ; x = 1 \\ 0 & ; x = 0 \\ c & ; \text{jinak}. \end{cases}$$

$$\chi_c\,(x \oplus_c x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & ; x = 1 \\ 0 & ; x = 0 \\ \chi_c(c) & ; \text{jinak} \end{array} \right\} \Rightarrow \chi_c\,(x \oplus_c x) = \chi_0(x) \quad \forall x \in L.$$

ii)

$$\chi_a(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & ; x \geq a \\ 0 & ; \text{jinak}, \end{array} \right. \qquad x \oplus_b x = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & ; x = 1 \\ 0 & ; x = 0 \\ b & ; \text{jinak}. \end{array} \right.$$

Z předpokladu $a \nleq b$ plyne $\chi_a(b) = 0$. Platí tedy

$$\chi_a\,(x \oplus_b x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & ; x = 1 \\ 0 & ; x = 0 \\ \chi_a(b) & ; \text{jinak} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & ; x = 1 \\ 0 & ; \text{jinak} \end{array} \right\} = \chi_1(x).$$

$\square$

Lemma 3.24. *Nechť L je konečný svaz. Pak pro každé $a_1, \ldots, a_n \in L$ platí*

i) $\chi_{a_1}(x) \wedge \ldots \wedge \chi_{a_n}(x) = \chi_{a_1 \vee \ldots \vee a_n}(x) \quad \forall x \in L,$

ii) $\chi_{a_1}(x) \vee \ldots \vee \chi_{a_n}(x) = \chi_{a_1 \wedge \ldots \wedge a_n}(x) = \chi_0(x) \quad \forall x \in L,$ *za předpokladu, že $a_1, \ldots, a_n$ jsou právě všechny atomy svazu L.*

Důkaz. *i*)

$$\begin{aligned} \chi_{a_1}(x) \wedge \ldots \wedge \chi_{a_n}(x) = 1 \quad & \Leftrightarrow \quad \chi_{a_1}(x) = 1 \ \text{ a} \ldots \text{a } \ \chi_{a_n}(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \quad x \geq a_1 \ \text{ a} \ldots \text{a } \ x \geq a_n \quad \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \quad x \geq a_1 \vee \ldots \vee a_n \quad \Leftrightarrow \quad \chi_{a_1 \vee \ldots \vee a_n}(x) = 1. \end{aligned}$$

V ostatních případech platí $\chi_{a_1}(x) \wedge \ldots \wedge \chi_{a_n}(x) = 0$.

ii) Předpokládejme, že prvky $a_1, \ldots, a_n$ jsou právě všechny atomy svazu L. Potom všechny atomické funkce $\chi_{a_i} = 1$ pro každé $0 \neq x \in L$. Spojení funkcí $\chi_{a_1}(x) \vee \ldots \vee \chi_{a_n}(x) = 0$ právě tehdy, když $x = 0$, což podle definice 3.6 přesně odpovídá funkci χ_0.

$\square$

Věta 3.25. *Nechť L je svaz s atomy $a_1, \ldots, a_n$. Pak pro pevně zvolený atom a_j a pro každé $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j\}$ platí*

$$\chi_{a_i}(x) = \chi_{a_j}\Big(\big(x \wedge (x \oplus_{a_i} x)\big) \oplus_{a_j} \big(x \wedge (x \oplus_{a_i} x)\big)\Big) \;\; \forall x \in L.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned}
x \oplus_{a_i} x &= \begin{cases} 1 & ; x = 1 \\ 0 & ; x = 0 \\ a_i & ; \text{jinak,} \end{cases} \\
x \wedge (x \oplus_{a_i} x) &= \begin{cases} x \wedge 1 & ; x = 1 \\ x \wedge a_i & ; 0 \neq x \neq 1 \\ x \wedge 0 & ; x = 0, \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & ; x = 1 \\ a_i & ; x \geq a_i, x \neq 1 \\ 0 & ; \text{jinak,} \end{cases} \\
\big(x \wedge (x \oplus_{a_i} x)\big) \oplus_{a_j} \big(x \wedge (x \oplus_{a_i} x)\big) &= \begin{cases} 1 & ; x = 1 \\ a_j & ; x \geq a_i, x \neq 1 \\ 0 & ; \text{jinak,} \end{cases} \\
\chi_{a_j}\Big(\big(x \wedge (x \oplus_{a_i} x)\big) \oplus_{a_j} \big(x \wedge (x \oplus_{a_i} x)\big)\Big) &= \begin{cases} 1 & ; x \geq a_i \\ 0 & ; \text{jinak} \end{cases} = \chi_{a_i}(x).
\end{aligned}$$

□

Ve druhé polovině této podkapitoly se zaměříme na vlastnosti funkcí typu $\oplus$. Podobně jako u funkcí χ se nejdříve zaměříme na funkce $\oplus_0$ a $\oplus_1$. Dokážeme oboustranné generování těchto funkcí pomocí funkcí χ_0 a χ_1, to znamená, že z funkcí χ_0 a χ_1 lze vygenerovat funkce $\oplus_0$ a $\oplus_1$ a naopak z funkcí $\oplus_0$ a $\oplus_1$ lze vygenerovat funkce χ_0 a χ_1. Druhý způsob generování bude v závěrečné částí práce nesmírně důležitým, co se týče nejméně početnější generující množiny. Druhou a poslední vlastností funkcí $\oplus$ je jejich vztah vůči svazovým operacím.

Lemma 3.26. *Nechť L je konečný svaz s atomy $a_1, \dots, a_n$. Pak platí následující rovnosti:*

i) $x \oplus_0 y = \chi_1(x) \wedge \chi_1(y)$,

ii) $x \oplus_1 y = \bigvee_{i=1}^{n} \Big(\chi_{a_i}(x) \vee \chi_{a_i}(y)\Big) = \chi_0(x) \vee \chi_0(y)$.

Speciálně:

i) $x \oplus_0 x = \chi_1(x)$,

ii) $x \oplus_1 x = \chi_0(x)$.

Důkaz. *i*)

$$x \oplus_0 y = \begin{cases} 1 & ; x = 1, y = 1 \\ 0 & ; \text{jinak}, \end{cases} \qquad \chi_1(x) = \begin{cases} 1 & ; x = 1 \\ 0 & ; \text{jinak}, \end{cases}$$

$$\chi_1(x) \wedge \chi_1(y) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & ; x = 1, y = 1 \\ 0 & ; \text{jinak} \end{array} \right\} = x \oplus_0 y.$$

ii)

$$x \oplus_1 y = \begin{cases} 0 & ; x = 0, y = 0 \\ 1 & ; \text{jinak}, \end{cases} \qquad \chi_{a_i}(x) = \begin{cases} 1 & ; x \geq a_i \\ 0 & ; \text{jinak}, \end{cases}$$

$$\chi_{a_i}(x) \vee \chi_{a_i}(y) = \begin{cases} 1 & ; x \geq a_i \,\text{nebo}\, y \geq a_i \\ 0 & ; \text{jinak}. \end{cases}$$

Odtud dostáváme

$$\bigvee_{i=1}^{n} (\chi_{a_i}(x) \vee \chi_{a_i}(y)) = \begin{cases} 0 & ; x = 0, y = 0 \\ 1 & ; x \neq 0 \text{ nebo } y \neq 0. \end{cases}$$

Tedy

$$\bigvee_{i=1}^{n} (\chi_{a_i}(x) \vee \chi_{a_i}(y)) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & ; x = 0, y = 0 \\ 1 & ; \text{jinak} \end{array} \right\} = x \oplus_1 y.$$

□

Lemma 3.27. *Nechť L je konečný svaz. Pak pro každé $a, b \in L$ platí následující rovnosti:*

i) $(x \oplus_a y) \wedge (x \oplus_b y) = x \oplus_{a \wedge b} y \quad \forall x, y \in L,$

ii) $(x \oplus_a y) \vee (x \oplus_b y) = x \oplus_{a \vee b} y \quad \forall x, y \in L.$

Důkaz. Pokud $(x, y) = (1, 1)$ nebo $(x, y) = (0, 0)$, pak obě rovnosti jsou triviálně splněny.

Nechť $(0, 0) \neq (x, y) \neq (1, 1)$. Potom pro každé $x, y \in L$ platí $x \oplus_a y = a$ a $x \oplus_b y = b$. Odtud plynou rovnosti obou tvrzení, tj.

$$\begin{aligned} (x \oplus_a y) \wedge (x \oplus_b y) &= a \wedge b = x \oplus_{a \wedge b} y, \\ (x \oplus_a y) \vee (x \oplus_b y) &= a \vee b = x \oplus_{a \vee b} y. \end{aligned}$$

$\square$

3.3.1 Další vlastnosti funkcí χ pomocí horizontálních sum

Po vyslovení věty 3.25 vyvstává otázka, zda lze podobným způsobem vygenerovat i koatomické funkce χ. Ukazuje se, že odpověď není tak snadná, jako v případě atomických funkcí χ. K vygenerování koatomických funkcí χ totiž nelze přistupovat zcela obecně. Abychom mohli vygenerovat koatomické funkce χ, tak koatomy musí splňovat jistou podmínku. Následující lemma dokazuje, prozatím jediný možný způsob, jak vygenerovat koatomické funkce χ. Z tohoto důvodu se koatomickými funkcemi χ nebudeme dále zabývat.

Lemma 3.28. *Nechť L je konečný svaz s koatomy $z_1, \ldots, z_m$, kde $m \geq 2$. Předpokládejme, že všechny koatomy $z_1, \ldots, z_m$ svazu L pokrývají jediný a ten samý prvek, tj. existuje právě jeden prvek $b \in L$ takový, že $b \prec z_i$ pro každé $i \in \{1, \ldots, m\}$. Pak koatomickou funkci χ_{z_i} pro $i \in \{1, \ldots, m\}$ lze vyjádřit ve tvaru*

$$\chi_{z_i}(x) = \Phi\Big(x \wedge (x \oplus_{z_i} x)\Big) \quad \forall x \in L, \tag{9}$$

kde

$$\Phi(x) = \chi_1\Big(x \vee (x \oplus_{z_1} x)\Big) \vee \chi_1\Big(x \vee (x \oplus_{z_m} x)\Big). \tag{10}$$

Důkaz. Nejdříve zjistíme obecný tvar funkce Φ (viz vztah (10)) a posléze do něho dosadíme vztah (9).

$$
\begin{aligned}
x \vee (x \oplus_{z_1} x) &= \begin{cases} 1 & ; x = 1 \text{ nebo } x = z_j, \text{ pro } j \neq 1 \\ z_1 & ; x \leq z_1, x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0, \end{cases} \\
\chi_1\big(x \vee (x \oplus_{z_1} x)\big) &= \begin{cases} 1 & ; x = 1 \text{ nebo } x = z_j, \text{ pro } j \neq 1 \\ 0 & ; x \leq z_1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Analogicky dostaneme druhý výraz ve funkci Φ, akorát místo indexu 1 je index m. Celkově je funkce Φ tvaru

$$
\Phi(x) = \begin{cases} 1 & ; x = 1 \text{ nebo } x = z_j, \ \forall j \in \{1, \ldots, m\} \\ 0 & ; x \leq b, \end{cases}
$$

kde předpoklad existence prvku b spočívá v tom, aby všechny prvky svazu L až na koatomy, byli menší než všechny koatomy, tj.

$$
\forall x \in L \ \ \forall i \in \{1, \ldots, m\} : x \leq z_i.
$$

Tedy funkce Φ zobrazuje koatomy z_i na hodnotu 1, jinak je výsledkem hodnota 0. Závěrem se podíváme na výraz (9).

$$
\begin{aligned}
x \oplus_{z_i} x &= \begin{cases} 1 & ; x = 1 \\ 0 & ; x = 0 \\ z_i & ; \text{jinak}, \end{cases} \\
x \wedge (x \oplus_{z_i} x) &= \begin{cases} 1 & ; x = 1 \\ z_i & ; x = z_i \\ b & ; x = b \text{ nebo } x = z_j, \text{ pro } j \neq i \\ x & ; x < b \\ 0 & ; x = 0, \end{cases} \\
\Phi\big(x \wedge (x \oplus_{z_i} x)\big) &= \left\{ \begin{array}{ll} 1 & ; x = 1 \text{ nebo } x = z_i \\ 0 & ; \text{jinak} \end{array} \right\} = \chi_{z_i}(x).
\end{aligned}
$$

□

Ve zbylé části této podkapitoly budeme řešit následující otázky: Lze generující vztahy v lemmatu 3.28 využít ke generování jiných funkcí typu χ? Pro jakou další třídu svazů, kromě třídy jedno-atomických svazů, lze vygenerovat všechny atomické funkce χ? Na první otázku odpovíme kladně s využitím tzv. *horizontálních sum.* Co se týče druhé otázky, tak dokážeme, že další třídou je třída všech svazů, neboli v každém svazu lze vygenerovat všechny atomické funkce χ.

Definice 3.29. [7] Svaz L nazveme *horizontální sumou* podsvazů $L_i, i \in I$, jestliže

i) $L = \bigcup\limits_{i \in I} L_i$,

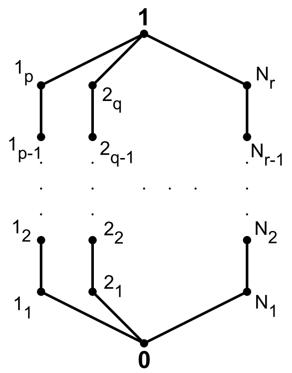
ii) $L_i \cap L_j = \{0, 1\}$ pro každé $i, j \in I, i \neq j$,

iii) $a \vee b = 1$ a $a \wedge b = 0$ pro každé $i, j \in I, i \neq j$ a pro každé $a \in L_i \setminus \{0, 1\}$, $b \in L_j \setminus \{0, 1\}$.

Vzhledem k tomu, že ve zbytku práce budeme za podsvazy L_i brát pouze lineární řetězce, tak vyslovíme tvrzení, které tyto horizontální sumy charakterizuje.

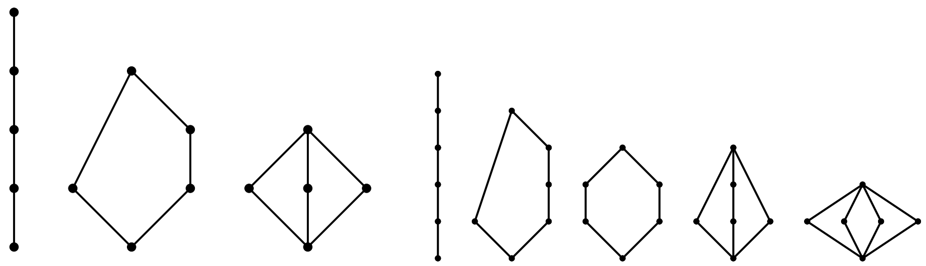
Věta 3.30. [7] *Ohraničený svaz L je horizontální sumou ohraničených lineárních řetězců právě tehdy, když $a \vee b = 1$ a $a \wedge b = 0$ pro každou dvojici nesrovnatelných prvků $a, b \in L$.*

Poznámka: Třídu všech svazů, které jsou ve tvaru horizontální sumy n lineárních řetězců, označíme symbolem HC_n. Potom o svazech z této třídy budeme hovořit jako o HC_n-svazech. Na obrázku 7 je znázorněn HC_n-svaz se speciálním označením prvků pro snadnější pochopení. Na druhou stranu platí, že každý svaz je horizontální sumou sama sebe a tedy i lineární řetězec je horizontální sumou. My však budeme považovat lineární řetězce za horizontální sumy řetězců a tedy třídu HC_1 ztotožníme s třídou lineárních řetězců.



Obrázek 7: Obecný HC_n-svaz

Na obrázku 8 jsou zobrazeny všechny HC_n-svazy ($n = 1, 2, 3, 4$) s počtem prvků 5 a 6. Všechny svazy, s menším počtem prvků, jsou horizontální sumy. Jedná se o lineární řetězce nebo horizontální sumu dvou tříprvkových řetězců.



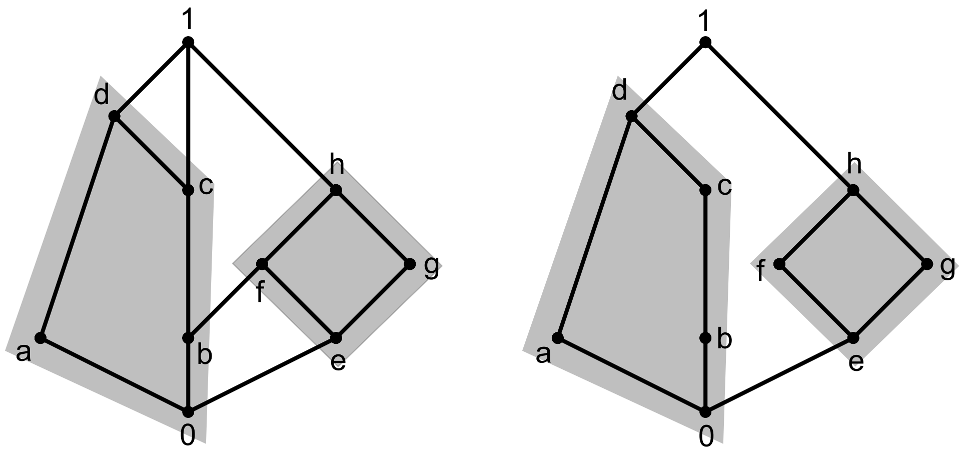
Obrázek 8: Všechny HC_n-svazy s pěti a šesti prvky

S pojmem HC_n-svazu již můžeme odpovědět na první otázku, týkající se využití vztahů z lemmatu 3.28. Dříve než přistoupíme k odpovědi, tak nastíníme způsob, jakým dané vztahy využijeme. V lemmatu 3.28 jsme předpokládali, že koatomy $z_1, \ldots, z_m$ pokrývají jediný a ten samý prvek b. Odtud už je patrné, že podsvaz $\langle b, 1 \rangle$ obsahující koatomy $z_1, \ldots, z_m$ splňuje definici 3.29, jelikož je horizontální sumou m tříprvkových lineárních řetězců. V následující větě 3.32 dokážeme, jak vztahy z lemmatu 3.28 ovlivňují HC_n-svazy, které jsou „přímo vloženy“ do svazu L, tzv. NC-podsvazy.

Definice 3.31. Nechť M je podsvaz svazu L s nejmenším prvkem 0_M a největším prvkem 1_M. Pak se podsvaz M nazývá *NC-podsvazem* (*non-covering*) svazu L, jestliže žádný prvek z podsvazu M nepokrývá či není pokrýván prvkem z $L \setminus M$, vyjma nejmenšího a největšího prvku podsvazu M, tj.

$$\forall x \in M \setminus \{0_M, 1_M\} \quad \nexists\, y, z \in L \setminus M : y \prec x \text{ nebo } x \prec z.$$

Na obrázku 9 je znázorněný rozdíl mezi (obyčejným) podsvazem a NC-podsvazem. V prvním svazu jsou intervaly $\langle 0, d \rangle$ a $\langle e, h \rangle$ (obyčejnými) podsvazy, které nejsou NC-podsvazy. Podsvaz $\langle 0, d \rangle$ není NC-podsvazem, protože prvek b je pokryt prvkem $f \in L \setminus \langle 0, d \rangle$ a prvek c je pokryt prvkem $1 \in L \setminus \langle 0, d \rangle$. Totéž platí i u podsvazu $\langle e, h \rangle$, kde prvek f pokrývá prvek $b \in L \setminus \langle e, h \rangle$. Ve druhém svazu jsou $\langle 0, d \rangle$ a $\langle e, h \rangle$ NC-podsvazy. Neexistují totiž prvky mimo podsvaz, které by pokrývaly nebo byly pokrývány prvky z tohoto podsvazu. S tímto objasněním již můžeme přistoupit k následující větě.



Obrázek 9: Rozdíl mezi (obyčejným) podsvazem a NC-podsvazem

Věta 3.32. *Nechť L je konečný svaz a $M \in \mathrm{HC}_n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Předpokládejme, že svaz M je* NC*-podsvazem svazu L, přičemž všechny atomy podsvazu M označíme prvky $c_1, \ldots, c_n$ a nejmenší a největší prvek svazu M označíme po řadě $0_M, 1_M \in L$. Pak funkce χ_{c_i}, pro $i = 1, \ldots, n$ lze vyjádřit ve tvaru*

$$\chi_{c_i}(x) = \Phi\Big(x \wedge (x \oplus_{c_i} x)\Big) \quad \forall x \in L, \tag{11}$$

kde

$$\Phi(x) = \chi_{1_M}\Big(x \vee (x \oplus_{c_1} x)\Big) \vee \chi_{1_M}\Big(x \vee (x \oplus_{c_n} x)\Big). \tag{12}$$

Důkaz. Důkaz provedeme podobně jako v lemmatu 3.28. Nejdříve se tedy podíváme na funkci Φ a poté do ní dosadíme výraz $x \wedge (x \oplus_{c_i} x)$.

$$x \vee (x \oplus_{c_1} x) = \begin{cases} 1 & ; x = 1 \\ x & ; c_1 < x \\ c_1 & ; x \leq c_1 \\ 0 & ; x = 0 \\ x \vee c_1 & ; \text{jinak.} \end{cases}$$

Zaměřme se na poslední podmínku $x \vee c_1$. Vzhledem ke konstrukci HC_n-svazů víme, že pro každý prvek $x \in M$, nesplňující předchozí podmínky, platí $x \vee c_1 = 1_M$. Pro ostatní prvky $y \in L$, nesplňující předchozí podmínky, už nutně musí platit $y \vee c_1 \geq 1_M$.

$$\chi_{1_M}\big(x \vee (x \oplus_{c_1} x)\big) = \begin{cases} 0 & ; x \leq c_1 \text{ nebo } x > c_1, x < 1_M \\ 1 & ; \text{jinak.} \end{cases}$$

Analogicky se dokáže tvar výrazů obsahující prvek c_n. Spojením obou těchto výrazů dostaneme funkci Φ, která má předpis

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & ; x \leq 0_M \\ 1 & ; \text{jinak.} \end{cases}$$

Ve druhé části důkazu analyzujeme formuli (11). Výraz $x \wedge (x \oplus_{c_i} x)$ bude podobný výrazu, který jsme již ověřovali na začátku důkazu. Poté ho dosadíme do funkce Φ a dokážeme, že se jedná o funkci χ_{c_i}. Pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ platí

$$x \wedge (x \oplus_{c_i} x) = \begin{cases} 1 & ; x = 1 \\ x & ; x \leq 0_M \\ c_i & ; x \geq c_i \\ 0 & ; x = 0 \\ x \wedge c_i & ; \text{jinak.} \end{cases}$$

Pro poslední podmínku platí totéž co předtím, ale místo prvku 1_M použijeme prvek 0_M, tj. pro každý prvek $y \in L$, nesplňující předchozí podmínky, platí $y \wedge c_i \leq 0_M$.

$$\Phi\big(x \wedge (x \oplus_{c_i} x)\big) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & ; c_i \leq x \\ 0 & ; \text{jinak} \end{array} \right\} = \chi_{c_i}(x).$$

□

Nyní částečně odpovíme na druhou otázku. Hledáme takové typy svazů, u kterých by šlo vygenerovat všechny atomické funkce typu χ. Prozatím víme, že lze vygenerovat jedinou a tím zároveň všechny atomické funkce χ u svazů s právě jedním atomem. Dále z věty 3.25 plyne, že u každého svazu s více atomy, lze vygenerovat téměř všechny atomické funkce χ, neboli právě jednu atomickou funkci χ potřebujeme k vygenerování ostatních atomických funkcí. Následující tvrzení, které je důsledkem věty 3.32, nám dokazuje, že u všech HC$_n$-svazů lze vygenerovat všechny atomické funkce χ.

Důsledek 3.33. *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $L \in \mathrm{HC}_n$ je svaz s atomy $a_1, \ldots, a_n$. Pak lze vygenerovat všechny atomické funkce χ_{a_i} následujícím způsobem:*

$$\chi_{a_i}(x) = \Phi\Big(x \wedge (x \oplus_{a_i} x)\Big) \quad \forall x \in L,$$

kde

$$\Phi(x) = \chi_1\Big(x \vee (x \oplus_{a_1} x)\Big) \vee \chi_1\Big(x \vee (x \oplus_{a_n} x)\Big).$$

Důkaz. Pro HC_1-svazy důsledek platí, neboť $\chi_0 = \chi_a$. Zaměříme se proto na HC_n-svazy pro $n \geq 2$. Důkaz bychom mohli provést tím způsobem, že aplikujeme větu 3.25 a poté aplikováním věty 3.32 vygenerujeme zbylou atomickou funkci χ. Pro tentokrát větu 3.25 nepoužijeme a důkaz provedeme pouze za použití věty 3.32.

Předpokládejme, že svaz $L \in \mathrm{HC}_n$ má atomy $a_1, \ldots, a_n$. Pak podle věty 3.32 lze každou atomickou funkci χ vyjádřit vztahem

$$\chi_{a_i}(x) = \Phi\Big(x \wedge (x \oplus_{a_i} x)\Big),$$

kde

$$\Phi(x) = \chi_1\Big(x \vee (x \oplus_{a_1} x)\Big) \vee \chi_1\Big(x \vee (x \oplus_{a_n} x)\Big).$$

Přičemž nikde ve zmíněných vztazích není použita žádná atomická funkce χ. Tím jsme dokázali tvrzení důsledku. □

Vraťme se k větě 3.32 a podívejme se na vlastnosti prvků $c_1, \ldots, c_n$. Lehce se přesvědčíme, že prvky $c_1, \ldots, c_n$ pokrývají jediný prvek 0_M a spojením dvou libovolných prvků c_i a c_j dostáváme prvek 1_M. Odtud vyvstává otázka, zda tyto předpoklady stačí k vygenerování funkcí χ_{c_i}, pro $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ukazuje se, že odpověď je kladná. Výsledkem je, že větu 3.32 můžeme zobecnit.

Věta 3.34. *Nechť L je konečný svaz a $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Předpokládejme, že existují prvky $c_1, \ldots, c_n \in L$ pokrývající jediný a ten samý prvek $b \in L$ a existuje prvek $d \in L$ takový, že pro každé $i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j$ platí $c_i \vee c_j = d$. Pak pro $i = 1, \ldots, n$ lze vyjádřit funkce χ_{c_i} následujícím způsobem:*

$$\chi_{c_i}(x) = \Phi\Big(x \wedge (x \oplus_{c_i} x)\Big) \quad \forall x \in L,$$

kde

$$\Phi(x) = \chi_d\Big(x \vee (x \oplus_{c_1} x)\Big) \vee \chi_d\Big(x \vee (x \oplus_{c_n} x)\Big).$$

Důkaz. Nechť $c_i \in L$, $i \in \{1, \dots, n\}$ je libovolný, ale pevně zvolený. Chceme dokázat, že pro prvky $x \geq c_i$ nabývá funkce χ_{c_i} hodnoty 1 a pro ostatní prvky nabývá hodnoty 0. Pro hodnoty 0 a 1 je to zřejmé. Proto předpokládáme, že $0 < x < 1$.

1. $x \geq c_1$

$$\begin{aligned}
\chi_{c_1}(x) &= \Phi\Big(x \wedge (x \oplus_{c_1} x)\Big) = \Phi(x \wedge c_1) = \Phi(c_1) = \\
&= \chi_d\Big(c_1 \vee (c_1 \oplus_{c_1} c_1)\Big) \vee \chi_d\Big(c_1 \vee (c_1 \oplus_{c_n} c_1)\Big) = \\
&= \chi_d\,(c_1 \vee c_1) \vee \chi_d\,(c_1 \vee c_n) = \\
&= \chi_d\,(c_1) \vee \chi_d\,(d) = 0 \vee 1 = 1.
\end{aligned}$$

2. $x \geq c_n$

$$\begin{aligned}
\chi_{c_n}(x) &= \Phi\Big(x \wedge (x \oplus_{c_n} x)\Big) = \Phi(x \wedge c_n) = \Phi(c_n) = \\
&= \chi_d\Big(c_n \vee (c_n \oplus_{c_1} c_n)\Big) \vee \chi_d\Big(c_n \vee (c_n \oplus_{c_n} c_n)\Big) = \\
&= \chi_d\,(c_n \vee c_1) \vee \chi_d\,(c_n \vee c_n) = \\
&= \chi_d\,(d) \vee \chi_d\,(c_n) = 1 \vee 0 = 1.
\end{aligned}$$

3. $x \geq c_i$, $i \neq 1, i \neq n$

$$\begin{aligned}
\chi_{c_i}(x) &= \Phi\Big(x \wedge (x \oplus_{c_i} x)\Big) = \Phi(x \wedge c_i) = \Phi(c_i) = \\
&= \chi_d\Big(c_i \vee (c_i \oplus_{c_1} c_i)\Big) \vee \chi_d\Big(c_i \vee (c_i \oplus_{c_n} c_i)\Big) = \\
&= \chi_d\,(c_i \vee c_1) \vee \chi_d\,(c_i \vee c_n) = \\
&= \chi_d\,(d) \vee \chi_d\,(d) = 1 \vee 1 = 1.
\end{aligned}$$

Pro $i = 1$ a $i = n$ dostaneme opět hodnotu 1. Jediná změna bude v posledním řádku, kde bude $0 \vee 1 = 1$.

4. $x < c_i \Leftrightarrow x \leq b$

$$\begin{aligned}
\chi_{c_i}(x) &= \Phi\Big(x \wedge (x \oplus_{c_i} x)\Big) = \Phi(x) = \\
&= \chi_d\Big(x \vee (x \oplus_{c_1} x)\Big) \vee \chi_d\Big(x \vee (x \oplus_{c_n} x)\Big) = \\
&= \chi_d\,(x \vee c_1) \vee \chi_d\,(x \vee c_n) = \\
&= \chi_d\,(c_1) \vee \chi_d\,(c_n) = 0 \vee 0 = 0.
\end{aligned}$$

5. Prvky x a c_i jsou nesrovnatelné. Pak platí

$$\chi_{c_i}(x) \;\; = \;\; \Phi\Big(x \wedge (x \oplus_{c_i} x)\Big) = \Phi(y),$$

kde $y \leq b$. Ze 2. podmínky plyne, že pro prvky $x < c_i \Leftrightarrow x \leq b$ nabývá funkce Φ hodnoty 0.

Dokázali jsme, že funkce χ_{c_i} nabývají hodnot 1 pouze za předpokladu, že $x \geq c_i$, což odpovídá definici funkce χ_{c_i}. Tím je tvrzení dokázáno.

$\square$

Důsledek 3.35. *Nechť L je konečný svaz a $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Předpokládejme, že existují prvky $c_1, \ldots, c_n \in L$ pokrývající stejný prvek $b \in L$ a existuje prvek $d \in L$ takový, že pro různá $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ platí podmínka $c_i \vee c_j = d$. Pak pro ty prvky $c_i \in L$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, jenž ten prvek b je jediný, tj. c_i pokrývá jenom a pouze prvek b, lze vyjádřit funkce χ_{c_i} stejným způsobem jako ve větě 3.34.*

Důkaz. Důkaz je zcela analogický jako důkaz věty 3.34, jen na místo generování všech funkcí χ_{c_i}, $i \in \{1, \ldots, n\}$ se zaměříme na ty funkce χ_{c_i}, kde prvek c_i splňuje vlastnost, že pokrývá pouze prvek b. $\square$

Důsledek 3.36. *Nechť L je konečný svaz a $\mathrm{KoAt}(L)$ je množina všech koatomů svazu L. Předpokládejme, že existuje podmnožina $Z \subsetneq \mathrm{KoAt}(L)$ pokrývající jediný a ten samý prvek $b \in L$. Pak koatomickou funkci χ_z, $z \in Z$ lze vyjádřit ve tvaru*

$$\chi_z(x) = \Phi\Big(x \wedge (x \oplus_z x)\Big) \quad \forall x \in L,$$

kde

$$\Phi(x) = \chi_1\Big(x \vee (x \oplus_{z_1} x)\Big) \vee \chi_1\Big(x \vee (x \oplus_{z_2} x)\Big),\; z_1, z_2 \in Z, z_1 \neq z_2.$$

V závěru příští podkapitoly se k tomuto tématu ještě vrátíme a proto pojmenujeme prvky d a $c_1, \ldots, c_n$ z věty 3.34. Prvek d budeme nazývat *spojovým D-prvkem* a jemu odpovídající prvky $c_1, \ldots, c_n$ budeme nazývat *C-prvky.*

Zbývá nám kompletně odpovědět na druhou otázku ohledně třídy svazů, u kterých lze vygenerovat všechny atomické funkce χ. Jak už jsme řekli, tak tato třída bude odpovídat třídě všech svazů z důvodu, že k vygenerování všech atomických funkcí χ je potřeba pouze funkce χ_0 nebo χ_1 a funkcí $\oplus$.

Důsledek 3.37. *Nechť L je konečný svaz s atomy $a_1, \ldots, a_n$. Pak lze vygenerovat všechny atomické funkce χ_{a_i} podle následujícího vztahu:*

$$\chi_{a_i}(x) = \Phi\Big(x \wedge (x \oplus_{a_i} x)\Big) \quad \forall x \in L,$$

kde

$$\Phi(x) = \chi_1\Big(x \vee (x \oplus_1 x)\Big) = \chi_0(x).$$

Důkaz.

$$\chi_{a_i}(x) = \Phi\Big(x \wedge (x \oplus_{a_i} x)\Big) = \begin{cases} 1 & ; x = 1 \\ 0 & ; x = 0 \\ \Phi(x \wedge a_i) & ; \text{jinak.} \end{cases}$$

Předpokládejme, že $x \neq 0$ a $x \neq 1$. Pak

$$\chi_{a_i}(x) = \Phi\Big(x \wedge a_i\Big) = \begin{cases} \Phi(a_i) & ; x \geq a_i \\ \Phi(0) & ; \text{jinak.} \end{cases}$$

Hodnoty 0 a a_i dosadíme do funkce Φ a dostaneme

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= \chi_1\Big(0 \vee (0 \oplus_1 0)\Big) = \chi_1(0) = 0 \\ \Phi(a_i) &= \chi_1\Big(a_i \vee (a_i \oplus_1 a_i)\Big) = \chi_1\left(a_i \vee 1\right) = \chi_1(1) = 1. \end{aligned}$$

Tím je důsledek dokázaný. Lze ho dokázat i jednodušším způsobem s využitím toho, že funkce $\Phi(x) = \chi_0(x)$. Stačí do podmínky *ii*) v lemmatu 3.24 dosadit za x výraz $x \wedge (x \oplus_{a_i} x)$ pro pevné a_i. Tím pro $0 \neq x \neq 1$ dostaneme

$$\begin{aligned} &\chi_{a_1}(x \wedge (x \oplus_{a_i} x)) \vee \ldots \vee \chi_{a_i}(x \wedge (x \oplus_{a_i} x)) \vee \ldots \vee \chi_{a_n}(x \wedge (x \oplus_{a_i} x)) = \\ &\qquad = \chi_{a_i}(x \wedge (x \oplus_{a_i} x)) = \chi_0(x \wedge (x \oplus_{a_i} x)), \end{aligned}$$

kde $\chi_{a_j}(x \wedge (x \oplus_{a_i} x)) = 0$ pro $j \neq i$ a $\chi_{a_i}(x \wedge (x \oplus_{a_i} x)) = \chi_{a_i}(x)$. Případy $x = 0$ a $x = 1$ jsou triviální. $\square$

3.4 Mohutnost generující množiny agregačního klonu

V této kapitole zužitkujeme všechno, co jsme doposud zjistili a budeme se především zabývat otázkou, kterou jsme položili na konci kapitoly o agregačních klonech, tj. jaký je horní odhad nejméně mohutné množiny generující agregační klon $\mathcal{C}_L$. Než přistoupíme k samotné odpovědi na zmíněnou otázku, je nutné definovat několik důležitých pojmů.

Definice 3.38. Nechť L je (konečný) svaz a G je libovolná generující množina agregačního klonu $\mathcal{C}_L$.

1. Množinu G nazveme *$(\chi, \oplus)$-generující množinou*, jestliže obsahuje pouze funkce typu χ, $\oplus$ a svazové operace.

2. Množinu G nazveme *$(\mu, \oplus)$-generující množinou*, jestliže obsahuje pouze funkce typu μ, $\oplus$ a svazové operace.

3. Množinu G nazveme *minimální generující množinou*, jestliže pro libovolnou funkci $f \in G$ platí, že množina $G \setminus \{f\}$ negeneruje agregační klon $\mathcal{C}_L$, tj. žádná vlastní podmnožina množiny G není generující množinou agregačního klonu $\mathcal{C}_L$.

Naším cílem bude nalézt takový obecný tvar $(\chi, \oplus)$-generující množiny, z kterého budeme moci usoudit, že je horním odhadem všech nejméně mohutných generujících množin agregačního klonu $\mathcal{C}_L$. Vzhledem k tomu, že k dokazování budeme využívat Bakerovu-Pixleyho větu, tak nemůžeme z hledané množiny vyloučit svazové operace, neboť bychom přišli o nu-funkce. Z tohoto důvodu se zabýváme pouze funkcemi χ a $\oplus$.

Nejdříve se budeme zajímat o funkce typu χ. V podkapitole 3.3 jsme zjistili, jak svazové operace ovlivňují funkce χ. V případě průseku funkcí $\chi_{x_1}, \ldots, \chi_{x_n}$ dostaneme funkci χ_y, kde $y = x_1 \vee \ldots \vee x_n$. Tím pádem dokážeme vygenerovat všechny funkce χ_b, kde prvek b je spojením některých prvků svazu L. Přesně tuto podmínku splňují všechny prvky z L, které nejsou spojově ireducibilní, tj. $L \setminus \mathrm{J}(L)$. Výsledkem je, že hledaná množina obsahuje funkce χ_x, pro $x \in \mathrm{J}(L)$. Dále uvažujme dva případy pro množinu spojově ireducibilních prvků $\mathrm{J}(L) = \mathrm{At}(L)$ a $\mathrm{J}(L) \neq \mathrm{At}(L)$. První případ není množný, jelikož z následující věty plyne, že za tohoto předpokladu lze vygenerovat všechny funkce typu χ a tím pádem nemůže být horním odhadem.

Věta 3.39. *Nechť L je konečný svaz a množina spojově ireducibilních prvků obsahuje pouze atomy svazu L, tj. $\mathrm{J}(L) = \mathrm{At}(L)$. Nechť H_L je minimální generující množina svazu L. Pak množina $\{\oplus_b \mid b \in H_L\} \cup \{\vee, \wedge\}$ je minimální $(\chi,\oplus)$-generující množinou agregačního klonu $\mathcal{C}_L$.*

Důkaz. Předpokládejme, že minimální $(\chi,\oplus)$-generující množina obsahuje pouze funkce $\oplus_b, b \in H_L$ a svazové operace, kde H_L je nejméně mohutná generující množina svazu L. Dokážeme, že pomocí těchto funkcí lze vygenerovat všechny funkce typu χ. Důkaz minimality provedeme zcela analogicky, jako důkaz věty 3.16, tzn. nalezneme množinu dvojic (relaci), která je uzavřená na generující funkce a dokážeme, že existuje agregační funkce, pro kterou tato množina není uzavřená.

Z lemmatu 3.27 plyne, že z funkcí $\oplus_b, b \in H_L$ lze vygenerovat všechny ostatní funkce $\oplus$, tj. $\oplus_c, c \in L \setminus H_L$. Dále pomocí funkce $\oplus_0$ lze vygenerovat funkci χ_1 následujícím vztahem:

$$x \oplus_0 x = \chi_1(x) \quad \forall x \in L.$$

Použitím důsledku 3.37 dostáváme, že pomocí funkce χ_1 lze vygenerovat všechny atomické funkce $\chi_{a_1}, \ldots, \chi_{a_n}$, kde $\mathrm{At}(L) = \{a_1, \ldots, a_n\}$, podle vztahu:

$$\chi_{a_i}(x) = \Phi\Big(x \wedge (x \oplus_{a_i} x)\Big), \quad \forall x \in L, \quad i \in \{1, \ldots, n\}$$

kde

$$\Phi(x) = \chi_1\Big(x \vee (x \oplus_1 x)\Big).$$

V posledním kroku aplikujeme na všechny funkce χ_{a_i} lemma 3.24 a tím dostaneme všechny funkce χ_d pro $d \in L$. Tím jsme dostali množinu obsahující funkce $\chi_e, \oplus_e$ pro $e \in L$ a svazové operace. Podle věty 3.10 platí, že tato množina generuje agregační klon $\mathcal{C}_L$. Závěrem dostáváme, že množina obsahující pouze funkce $\oplus_b, b \in H_L$ a svazové operace generuje agregační klon $\mathcal{C}_L$.

Zbývá nám dokázat, že se jedná o minimální generující množinu. Symbolem J označíme $(\chi,\oplus)$-generující množinu obsahující pouze funkce $\oplus_b, b \in H_L$ a svazové operace. Dokážeme, že množina $J \setminus \{\oplus_a\}$, pro nějaké $a \in H_L$, negeneruje agregační klon $\mathcal{C}_L$. Nechť M je podsvaz svazu L generovaný množinou $H_L \setminus \{a\}$. Pak zvolme množinu B jako množinu všech dvojic (x, x), kde x je prvkem podsvazu M, tj.

$$B = \{(x, x) \mid x \in M\}.$$

Ověříme, že je uzavřená na všechny operace z množiny $J \setminus \{\oplus_a\}$.

$$\oplus_c^{\mathrm{r}} \begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \oplus_c y \\ x \oplus_c y \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & ; x = y = 0 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & ; x = y = 1 \\ \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} & ; \text{jinak}, \end{cases}$$

$$\vee^{\mathrm{r}} \begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \vee y \\ x \vee y \end{pmatrix},$$

$$\wedge^{\mathrm{r}} \begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \wedge y \\ x \wedge y \end{pmatrix}.$$

Evidentně výsledek funkce $\oplus_c$, pro dvojice z množiny B, vždy padne do množiny B, protože prvek $c \in H_L \setminus \{a\}$. Podobně spojením, či průsekem dvojic z množiny B, dostaneme opět dvojici náležící množině B, jelikož M je podsvazu svazu L. Jenomže množina B není uzavřená na operaci $\oplus_a$, protože prvek a nenáleží podsvazu M, čímž tedy dvojice (a, a) nenáleží množině B. Tím jsme dokázali, že množina J je minimální $(\chi,\oplus)$-generující množinou agregačního klonu $\mathcal{C}_L$ za předpokladu $\mathrm{J}(L) = \mathrm{At}(L)$. □

Předpokládáme tedy, že platí $\mathrm{J}(L) \neq \{a_1, \ldots, a_n\} = \mathrm{At}(L)$. Pak existuje prvek $b \in \mathrm{J}(L)$ takový, že $b \neq a_i$ pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ a následně z lemmatu 3.23 plyne, že pomocí χ_b lze vygenerovat funkci χ_1. Dále z důsledku 3.37 dostáváme, že pomocí funkce χ_1 lze vygenerovat všechny funkce χ_{a_i}. Závěrečným krokem je vygenerování všech funkcí χ_x pro $x \in L$ použitím lemmat 3.23 a 3.24. Dohromady platí, že z množiny spojově ireducibilních prvků můžeme odstranit všechny atomy, případně prvek 1, tj. hledaná množina obsahuje funkce χ_x pro $x \in \mathrm{J}(L) \setminus \{1, a_1, \ldots, a_n\}$.

Nyní přejdeme k funkcím $\oplus$. Tento případ je jednodušší, protože stačí použít funkce $\oplus_x$ pro $x \in H_L$, kde H_L je minimální generující množina svazu L. Poté s využitím lemmatu 3.27 dostaneme, že lze vygenerovat všechny funkce $\oplus_y$ pro $y \in L \setminus H_L$. Pro funkce $\oplus$ nám vyplývá, že hledaná množina obsahuje funkce $\oplus_x$ pro $x \in H_L$. V následující větě ukážeme důležitost množiny H_L spočívající v tom, že žádnou další funkci $\oplus_a$, pro $a \in H_L \setminus \{0, 1\}$, nelze vygenerovat. Předpoklad, že $a \neq 0$ a $a \neq 1$ je důležitý v tom smyslu, že pokud minimální $(\chi,\oplus)$-generující množina obsahuje alespoň jednu funkci typu χ, pak lze vždy vygenerovat funkce $\oplus_0$ a $\oplus_1$ pomocí lemmatu 3.23.

Věta 3.40. *Nechť L je konečný svaz a H je minimální generující množina svazu L. Označme množinu*

$$G = \Big\{\chi_a \mid a \in L\Big\} \cup \Big\{\oplus_b \mid b \in H \setminus \{0,1\}\Big\} \cup \Big\{\vee, \wedge\Big\}.$$

Pak množina $G_c = G \setminus \{\oplus_c\}$ pro libovolné $c \in H \setminus \{0,1\}$, negeneruje agregační klon $\mathcal{C}_L$.

Důkaz. Předpokládejme, že množina B obsahuje všechny dvojice (x,x), kde $x \in [H \setminus \{c\}]$, tj. x je prvkem podsvazu generovaného množinou $H \setminus \{c\}$. Ověříme, že množina B je uzavřená na všechny operace z množiny G_c.

$$\chi_a^{\mathrm{r}} \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_a(x) \\ \chi_a(x) \end{pmatrix},$$

kde pro $x \geq a$ dostáváme dvojici $(1,1)$ a jinak dostaneme dvojici $(0,0)$. Obě tyto dvojice náleží množině B. Dále ověříme funkce $\oplus_b$, pro $b \in H \setminus \{c\}$.

$$\oplus_b^{\mathrm{r}} \begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \oplus_b y \\ x \oplus_b y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} \in B.$$

V případě, $(x,x) = (y,y) = (0,0)$ nebo $(x,x) = (y,y) = (1,1)$ dostaneme dvojice $(0,0)$ a $(1,1)$. Poslední operace jsou průsek a spojení.

$$\wedge^{\mathrm{r}} \begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \wedge y \\ x \wedge y \end{pmatrix},$$

$$\vee^{\mathrm{r}} \begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \vee y \\ x \vee y \end{pmatrix}.$$

Evidentně obě dvojice do množiny B patří, neboť jsme ji tak zkonstruovali. Nyní na libovolné dvojice z množiny B aplikujeme funkci $\oplus_c$.

$$\oplus_c^{\mathrm{r}} \begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \oplus_c y \\ x \oplus_c y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix}.$$

Jenomže dvojice (c,c) nenáleží množině B, protože prvek c je jedním z generátorů svazu L a nelze ho vygenerovat pomocí prvků z množiny $H \setminus \{c\}$. Tím jsme dokázali, že množina G_c negeneruje agregační klon $\mathcal{C}_L$. □

Spojením obou předchozích odstavců dostáváme, že hledaná generující množina agregačního klonu $\mathcal{C}_L$ je ve tvaru

$$\Big\{\chi_a \mid a \in \mathrm{J}(L) \setminus \{1, a_1, \ldots, a_n\}\Big\} \cup \Big\{\oplus_b \mid b \in H_L\Big\} \cup \Big\{\vee, \wedge\Big\},$$

a její mohutnost představuje horní odhad pro nejméně mohutné generující množiny

$$\begin{aligned} (|\mathrm{J}(L)| - n - 1) + |H_L| + 2 \quad &\text{pro} \quad 1 \in \mathrm{J}(L), \\ (|\mathrm{J}(L)| - n) + |H_L| + 2, \quad &\text{pro} \quad 1 \notin \mathrm{J}(L). \end{aligned}$$

Duálně pro svaz L s koatomy $z_1, \ldots, z_m$ a z množiny průsekově ireducibilních prvků $\mathrm{M}(L)$ můžeme vytvořit množinu tvaru

$$\Big\{\mu_a \mid a \in \mathrm{M}(L) \setminus \{0, z_1, \ldots, z_m\}\Big\} \cup \Big\{\oplus_b \mid b \in H_L\Big\} \cup \Big\{\vee, \wedge\Big\}.$$

Její mohutnost je rovna

$$\begin{aligned} (|\mathrm{M}(L)| - n - 1) + |H_L| + 2 \quad &\text{pro} \quad 0 \in \mathrm{M}(L), \\ (|\mathrm{M}(L)| - n) + |H_L| + 2, \quad &\text{pro} \quad 0 \notin \mathrm{M}(L). \end{aligned}$$

Tvrzení 3.41. *Nechť L je konečný svaz s n atomy a m koatomy a H_L je nejméně mohutná generující množina svazu L. Nechť G je libovolná nejméně mohutná množina generující agregační klon $\mathcal{C}_L$. Pak*

$$|G| \leq \min\big\{|\mathrm{J}(L)| - n, |\mathrm{M}(L)| - m\big\} + |H_L| + 2.$$

Navíc, pokud $1 \in \mathrm{J}(L), 0 \in \mathrm{M}(L)$, pak pro mohutnost generující množiny G platí

$$|G| \leq \min\big\{|\mathrm{J}(L)| - n - 1, |\mathrm{M}(L)| - m - 1\big\} + |H_L| + 2.$$

Nadále se budeme věnovat pouze (χ,$\oplus$)-generujícím množinám, neboť cokoliv dokážeme pro (χ,$\oplus$)-generující množiny, tak pomocí duality to lze převést na (μ,$\oplus$)-generující množiny. Jako první se budeme věnovat hornímu odhadu z tvrzení 3.41. Naším cílem je nalézt takovou třídu svazů, které mají nejmohutnější minimální (χ,$\oplus$)-generující množiny ze všech svazů. Tudíž hledáme takový svaz L, jenž jeho mohutnost minimální (χ,$\oplus$)-generující množiny je ostře větší, než mohutnost minimální (χ,$\oplus$)-generující množiny libovolného svazu M se stejným počtem prvků jako svazu L. Otázku můžeme přeformulovat tak, že hledáme takové typy svazů, jenž mají nejmohutnější množiny spojově ireducibilních prvků a zároveň nejmohutnější minimální generující množiny svazu L. Nyní už je odpověď v celku jasná. Hledaná třída odpovídá třídě lineárních řetězců. Následující věta dokazuje, že lineární řetězce mají nejmohutnější minimální $(\chi,\oplus)$-generující množiny, a zároveň ukazuje jakého jsou tvaru.

Věta 3.42. *Nechť $n \geq 4$ je přirozené číslo a L je konečný svaz o n prvcích s libovolným atomem a. Předpokládejme, že množina K má tvar*

$$K = \Big\{\chi_b \mid b \in L \setminus \{0, a, 1\}\Big\} \cup \Big\{\oplus_c \mid c \in L \setminus \{0, 1\}\Big\} \cup \Big\{\vee, \wedge\Big\}.$$

Pak svaz L je lineárním řetězcem právě tehdy, když množina K je minimální $(\chi, \oplus)$-generující množinou agregačního klonu $\mathcal{C}_L$ obsahující $\{\vee, \wedge\}$.

Důkaz. I. Nechť L je lineární řetězec a f je libovolná agregační funkce z K, která není svazovou operací. Označme $\overline{K} = K \setminus \{f\}$. Chceme dokázat, že klon $\mathcal{D}$ generovaný množinou $\overline{K}$ není agregačním klonem $\mathcal{C}_L$. Z toho, že klon $\mathcal{D}$ obsahuje svazové operace, plyne existence nu-funkcí. Můžeme tedy použít Bakerovu-Pixleyho větu tvrdící, že každá agregační funkce z $\mathcal{D}$ musí zachovávat každou binární $\mathcal{D}$-invariantní relaci. Naším cílem je nalézt takovou $\mathcal{D}$-invariantní relaci, která není zachovávaná nějakou agregační funkcí. Množina $\overline{K}$ obsahuje dva typy funkcí, a proto se zaměříme na dva případy.

1. Nechť $f = \chi_c$ pro $c \in L$ takové, že c není atom nebo $c \neq 1$. Z lemmatu 3.23 víme, že funkce $\chi_0 = \chi_a$ a χ_1 lze vždy vygenerovat. Zvolme relaci $B = \{(x, x) \mid x \in L\} \cup \{(b, c)\}$, kde prvek b splňuje $b \prec c$.

Volba relace B samozřejmě závisí na funkci f. Jelikož funkce f je typu χ, pak rozdílnou dvojicí je právě dvojice (b, c), kde $f(b) = 0$ a $f(c) = 1$. Druhá část relace B vznikne z dvojice (b, c) aplikováním ostatních funkcí. Ověříme, že takto definovaná relace je $\overline{K}$-invariantní.

$$\chi_d^{\mathrm{r}}\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_d(b) \\ \chi_d(c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{pro} \quad d < c$$
$$\chi_d^{\mathrm{r}}\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_d(b) \\ \chi_d(c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{pro} \quad d > c.$$

Použitím libovolné agregační funkce $\oplus_e \in K, e \in L \setminus \{0, 1\}$ na libovolné dvojice $(0, 0) \neq (x_1, x_2) \neq (1, 1), (0, 0) \neq (y_1, y_2) \neq (1, 1)$ z B dostáváme

$$\oplus_e^{\mathrm{r}}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \oplus_e y_1 \\ x_2 \oplus_e y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ e \end{pmatrix}.$$

Tím jsme dostali tvar relace B. Nakonec ověříme, že relace B je uzavřená na svazové operace.

$$\vee^{\mathrm{r}}\begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \vee y \\ x \vee y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \end{pmatrix},$$

$$\vee^{\mathrm{r}}\begin{pmatrix} x & b \\ x & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \vee b \\ x \vee c \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} & ;\text{ pro } x \leq b \\ \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} & ;\text{ pro } x \geq c. \end{cases}$$

Zcela analogicky se dokáže průsek. Skutečně, takhle definovaná relace B je $\overline{K}$-invariantní a tedy je binární $\mathcal{D}$-invariantní relací. Jenomže funkce f nezachovává relaci B, neboť

$$\chi_c^{\mathrm{r}}\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_c(b) \\ \chi_c(c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin B.$$

Odtud podle Baker-Pixleho věty plyne, že $\mathcal{C}_L \neq \mathcal{D}$.

2. Nechť $f = \oplus_c$ pro $c \in L$ různé od 0 a 1. Potom můžeme relaci E zvolit následujícím způsobem $E = \{(d, 0) \mid d \in L \setminus \{c\}\} \cup \{(0, 0), (1, 0)\}$.

V tomto případě jsou klíčové dvojice $(0, 0)$ a $(1, 0)$, podobně jako ve větě 3.16. Druhou část relace E dostaneme aplikováním všech ostatních funkcí právě na tyto dvojice. I tentokrát musíme ověřit, že se jedná o $\overline{K}$-invariantní relaci.

Použitím libovolné agregační funkce $\oplus_e \in \overline{K}$ dostáváme

$$\oplus_e^{\mathrm{r}}\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \oplus_e y \\ 0 \oplus_e 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tím jsme dostali tvar relace E. Pokud bychom nyní použili agregační funkce $\chi_c \in K$ nebo svazové operace, tak nedostaneme žádnou novou dvojici. Ověřili bychom to stejně jako v předchozím případě, jenomže tentokrát je to triviální, protože aplikováním funkcí $\chi_c \in K$ dostaneme dvojice $(0, 0)$ nebo $(1, 0)$ a pro svazové operace je výsledek zřejmý. Tedy relace E je $\overline{K}$-invariantní a jedná se o binární $\mathcal{D}$-invariantní relaci. Jenomže funkce f nezachovává relaci E, neboť pro $x, y \in L \setminus \{c\}$, $x \neq y$ platí

$$\oplus_c^{\mathrm{r}}\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \oplus_c y \\ 0 \oplus_c 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \notin E.$$

Pak podle Baker-Pixleho věty, $\mathcal{C}_L \neq \mathcal{D}$.

II. Předpokládejme, že množina K je minimální $(\chi, \oplus)$-generující množinou agregačního klonu $\mathcal{C}_L$ obsahující $\{\vee, \wedge\}$, tj. $\overline{K} = K \setminus \{g\}$ negeneruje agregační klon $\mathcal{C}_L$ pro libovolnou funkci $g \in K$.

Zřejmě v každém svazu P, který není lineárním řetězcem, existují prvky $s, t \in P$ takové, že $s \wedge t = u$ a $s \vee t = v$, kde u a v jsou nějaké prvky z P různé od s a t.

Jestliže existují prvky $s, t \in P$ takové, že $u \neq 0$ nebo $v \neq 1$, pak lze vynechat operace $\oplus_u$ nebo $\oplus_v$ dle lemmatu 3.27. Předpokládejme, že lze vygenerovat funkci $\oplus_u$, pak $\overline{K} = K \setminus \{\oplus_u\}$ generuje agregační klon $\mathcal{C}_L$, což je spor s předpokladem.

Pokud pro všechny prvky $s, t \in P$ platí $u = 0$ a $v = 1$, pak podle věty 3.30 platí, že svaz $P \in \mathrm{HC}_n$ pro nějaké $n \geq 2$. Aplikováním důsledku 3.33 dostáváme, že lze vygenerovat všechny atomické funkce χ pomocí funkce $\chi_1(x) = x \oplus_0 x = (x \oplus_a x) \wedge (x \oplus_b x)$, kde $a, b \in P$ jsou libovolné nesrovnatelné prvky. To znamená, že množina K bez všech atomických funkcí χ generuje agregační klon $\mathcal{C}_L$, což je spor. Výsledkem je, že jediná třída svazů, která nám zbyla, je třída HC_1 odpovídající třídě lineárních řetězců. □

Důsledek 3.43. *Nechť L je alespoň čtyřprvkový konečný svaz a množina K je minimální $(\chi, \oplus)$-generující množina agregačního klonu $\mathcal{C}_L$. Pak svaz L je lineárním řetězcem právě tehdy, když*

$$|K| = 2n - 3.$$

Důkaz. Z věty 3.42 víme, že $(\chi, \oplus)$-generující množina K má tvar

$$K = \{\chi_b \mid b \in L \setminus \{0, a, 1\}\} \cup \{\oplus_c \mid c \in L \setminus \{0, 1\}\} \cup \{\vee, \wedge\}.$$

Označme množiny $M = \{\chi_b \mid b \in L \setminus \{0, a, 1\}\}$ a $N = \{\oplus_c \mid c \in L \setminus \{0, 1\}\}$ a určeme jejich mohutnosti.

$$\begin{aligned} |M| &= |L| - 3 = n - 3, \\ |N| &= |L| - 2 = n - 2. \end{aligned}$$

Pak pro množinu K platí

$$\begin{aligned} |K| &= |M \cup N \cup \{\vee, \wedge\}| = |M| + |N| + |\{\vee, \wedge\}| \\ &= (n - 3) + (n - 2) + 2 = 2n - 3. \end{aligned}$$

□

Ve větě 3.42 jsme předpokládali, že počet prvků ve svazu je větší než 3. Otázkou by proto mohlo být, jak je to se svazy s menším počtem prvků. Odpovědí je následující lemma, ve kterém dokážeme, jak vypadají minimální nejméně mohutné $(\chi, \oplus)$-generující množiny agregačních klonů zmíněných svazů. Zároveň se podíváme na rozdíl generujících množin obou čtyřprvkových svazů.

Lemma 3.44. *Nechť L je svaz s n prvky. Jestliže*

i) $n = 2$*, pak minimální* $(\chi, \oplus)$*-generující množina má tvar* $\{\vee, \wedge\}$.

ii) $n = 3$*, pak minimální* $(\chi, \oplus)$*-generující množina má tvar*

$$\{\oplus_0, \oplus_a, \oplus_1\} \cup \{\vee, \wedge\}, \text{ kde prvek } a \text{ splňuje } 0 < a < 1.$$

iii) $n = 4$*, pak minimální* $(\chi, \oplus)$*-generující množina má tvar*

1. $\{\chi_b\} \cup \{\oplus_a, \oplus_b\} \cup \{\vee, \wedge\}$*, jestliže* L *je lineární řetězec, splňující* $0 < a < b < 1$.
2. $\{\oplus_a, \oplus_b\} \cup \{\vee, \wedge\}$*, jestliže* $L \in HC_2$*, tj.* L *je horizontální suma dvou tříprvkových lineárních řetězců (prvky* $a, b \in L$ *splňující* $0 \neq a \neq 1$ *a* $0 \neq b \neq 1$ *jsou nesrovnatelné).*

Důkaz. i) Předpokládejme, že svaz L má dva prvky 0 a 1. Pak podle věty 3.10 má $(\chi, \oplus)$-generující množina tvar

$$\{\chi_0, \chi_1\} \cup \{\oplus_0, \oplus_1\} \cup \{\vee, \wedge\}.$$

Nejprve se zaměříme na funkce χ. Z definice 3.6 dostáváme, že obě funkce jsou identity. tj.

$$\chi_0(x) = \chi_1(x) = x.$$

Za druhé se přesvědčíme, že pro funkce $\oplus_0$ a $\oplus_1$ platí následující vztahy

$$\begin{aligned} x \oplus_0 y &= x \wedge y, \\ x \oplus_1 y &= x \vee y. \end{aligned}$$

Ověřili jsme, že funkce χ ani $\oplus$ nepotřebujeme a tedy dvouprvkový svaz má $(\chi, \oplus)$-generující množinu tvaru $\{\vee, \wedge\}$.

ii) Předpokládejme, že svaz L má 3 prvky $0, a, 1$. Pak podle věty 3.10 má $(\chi, \oplus)$-generující množina tvar

$$P = \{\chi_0, \chi_a, \chi_1\} \cup \{\oplus_0, \oplus_a, \oplus_1\} \cup \{\vee, \wedge\}.$$

Jelikož svaz má pouze jeden atom, pak $\chi_0 = \chi_a$. Dále z lemmatu 3.26 platí, že $x \oplus_0 x = \chi_1(x)$ a $x \oplus_1 x = \chi_0(x)$. Tím jsme dostali odpovídající tvar $(\chi, \oplus)$-generující množiny. Zbývá dokázat minimalita generující množiny. Generující množina obsahuje pouze funkce $\oplus_a$, pro $a \in H_L$, kde H_L je nejméně mohutná generující množina svazu L, tj. $H_L = \{0, a, 1\}$. Tedy z důsledku 3.39 plyne, že generující množina je minimální.

iii) Předpokládejme, že svaz L má 4 prvky $0, a, b, 1$. Pak podle věty 3.10 má $(\chi, \oplus)$-generující množina tvar

$$\{\chi_0, \chi_a, \chi_b, \chi_1\} \cup \{\oplus_0, \oplus_a, \oplus_b, \oplus_1\} \cup \{\vee, \wedge\}.$$

V předchozích podmínkách jsme měli zaručeno, že svaz je jediný. Tahle vlastnost nyní neplatí, protože existují dva čtyřprvkové svazy. Musíme tedy zkonstruovat obě $(\chi, \oplus)$-generující množiny.

1. Jestliže svaz L je lineární řetězec, pak tvrzení ihned plyne z věty 3.42.

2. Nechť svaz L je horizontální suma dvou tříprvkových lineárních řetězců, tj. prvky $0 \neq a \neq 1$ a $0 \neq b \neq 1$ jsou nesrovnatelné. Pak množina spojově ireducibilních prvků obsahuje pouze prvky a a b, tj. $\mathrm{J}(L) = \{a, b\}$. Pak z věty 3.39 a jejího důsledku 3.39 plyne, že množina ve tvaru $\{\oplus_a, \oplus_b\} \cup \{\vee, \wedge\}$ je minimální $(\chi, \oplus)$-generující množinou agregačního klonu $\mathcal{C}_L$.

□

Na začátku této podkapitoly jsme zjistili, za jakých předpokladů minimální $(\chi,\oplus)$-generující množina neobsahuje žádnou funkci typu χ. Podobným způsobem bychom se mohli ptát na otázku, kdy minimální $(\chi,\oplus)$-generující množina obsahuje alespoň jednu funkci typu χ. Odpovědí je věta 3.46, která je pouze nutnou podmínkou k existenci funkce typu χ, nikoliv postačující. Protipříkladem je totiž příklad 3.51, který podmínku ve větě 3.46 nesplňuje, ale obsahuje funkci typu χ. Předtím než vyslovíme větu 3.46 je nutné definovat důležitý pojem.

Definice 3.45. Nechť L je svaz a prvky $a, b \in L$ splňují $a \prec b$. Řekneme, že prvky a a b se *vzájemně jednoznačně pokrývají*, jestliže pro prvek a platí, že je pokrýván pouze prvkem b a naopak pro prvek b platí, že pokrývá pouze prvek a, tj.

$$\nexists\, x \in L \setminus \{a, b\} : x \prec b \ \text{ nebo } \ a \prec x.$$

Věta 3.46. *Nechť L je konečný svaz a (a,b) je vzájemně jednoznačně se pokrývající dvojice prvků taková, že $a \neq 0$ a $b \neq 1$. Pak každá minimální $(\chi,\oplus)$-generující množina agregačního klonu $\mathcal{C}_L$ obsahuje funkci χ_b.*

Důkaz. Zvolme množinu G jako $(\chi,\oplus)$-generující množinu agregačního klonu $\mathcal{C}_L$ obsahující všechny funkce typu χ a $\oplus$, tj.

$$G = \{\chi_x \mid x \in L\} \cup \{\oplus_y \mid y \in L\} \cup \{\wedge, \vee\}\,.$$

Dokážeme, že množina $G_b = G \setminus \{\chi_b\}$ negeneruje agregační klon $\mathcal{C}_L$. Tím dokážeme, že funkce χ_b musí být obsažena v každé minimální $(\chi,\oplus)$-generující množině a tím zároveň i v každé nejméně mohutné $(\chi,\oplus)$-generující množině. Zvolme množinu $B = \{(a,b)\} \cup \{(x,x) \mid x \in L\}$. Ověříme, že množina B je uzavřená na všechny operace z množiny G_b. Nechť $x \in L \setminus \{b\}$ a $y \in L$, pak platí

$$\chi_x^{\mathrm{r}}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_x(a) \\ \chi_x(b) \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & ;\text{pro } \ x \leq a, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & ;\text{pro } \ x \nleq a. \end{cases}$$

Evidentně, aplikováním funkce χ_x na libovolnou dvojici (z,z), $z \in L$ dostaneme opět dvojici $(0,0)$ nebo $(1,1)$.

$$\oplus_y^{\mathrm{r}}\begin{pmatrix} a & z \\ b & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \oplus_y z \\ b \oplus_y z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}.$$

Aplikováním funkce $\oplus_y$ na dvojice (z,z) a (z',z'), kde $z,z' \in L$, dostaneme opět dvojici shodných prvků.

Kdyby $a = 0$, pak aplikováním funkce $\oplus_1$ na dvojice $(0,b)$ a $(0,0)$ dostaneme dvojici $(0,1)$, podobně v případě $b = 1$, aplikováním funkce $\oplus_0$ na dvojice $(a,1)$ a $(1,1)$ dostaneme dvojici $(0,1)$.

V případě spojení a průseku se lehce ověří, že dostaneme dvojice z množiny B, neboť výsledkem jsou pouze dvojice (a,b) nebo (z,z). Tím jsme ověřili, že množina B je uzavřená na všechny operace z množiny G_b. Jenomže není uzavřená na operaci χ_b, jelikož

$$\chi_b^{\mathrm{r}}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_b(a) \\ \chi_b(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin B.$$

Z Bakerové-Pixleyho věty plyne, že množina G_b negeneruje agregační klon $\mathcal{C}_L$. $\square$

Lemma 3.47. *Nechť L je konečný svaz a minimální (χ,$\oplus$)-generující množina agregačního klonu $\mathcal{C}_L$ obsahuje alespoň jednu funkci typu χ, pak neobsahuje funkce χ_0, χ_1 a $\oplus_0, \oplus_1$.*

Důkaz. Plyne z důsledků 3.23, 3.23 a z lemmatu 3.26. □

V podkapitole 3.3.1 a v důkazu věty 3.42 jsme viděli užitečné vlastnosti horizontálních sum lineárních řetězců. Ukazuje se, že mají ještě jednu vlastnost, týkající se mohutnosti (χ,$\oplus$)-generující množiny.

Věta 3.48. *Nechť $n \in \mathbb{N}$ je pevně zvolené a $\{L_i \in \mathrm{HC}_n \mid i \in I\}$ je systém konečných svazů se stejným počtem prvků. Pak všechny minimální nejméně mohutné (χ,$\oplus$)-generující množiny agregačních klonů $\mathcal{C}_{L_i}$ jsou stejné, až na označení prvků, tj. mají stejný počet funkcí typu χ a stejný počet funkcí typu $\oplus$.*

Důkaz. Předpokládejme, že všechny svazy L_i mají k prvků. Dále z konstrukce HC_n-svazů vidíme, že každý svaz L_i má n atomů $x_1, \ldots, x_n$. Pro každý jiný prvek $x_j \neq 1$, $j \in \{n+1, \ldots, k-2\}$, kde $x_0 = 0$ a $x_{k-1} = 1$ platí, že existuje jediný atom x_p, $p \in \{1, \ldots, n\}$ takový, že $x_p \leq x_j$. Pak je evidentní, že každý prvek x_j splňuje větu 3.46, neboli existuje prvek $y \in L$ takový, že prvky y a x_j tvoří vzájemně jednoznačně pokrývající se dvojici. Tedy nelze vygenerovat žádnou funkci χ_x pro $x \in L \setminus \{0, 1, x_1, \ldots, x_n\}$. Přitom funkce χ_{x_p}, $p \in \{1, \ldots, n\}$ lze vygenerovat z funkce χ_1, kterou vygenerujeme z některé funkce χ_x, $x \in L \setminus \{0, 1, x_1, \ldots, x_n\}$. Taková funkce vždy existuje, neboť pro svaz, ve kterém taková funkce neexistuje platí, že $0 \prec x_p \prec 1$, tedy všechny atomy se shodují se všemi koatomy. Jenomže takový svaz je ve třídě HC_n jediný.

Pro funkce $\oplus$ je důkaz triviální, protože všechny prvky, kromě 0 a 1, tvoří nejméně mohutnou generující množinu svazu L_i, $i \in I$. Jelikož všechny svazy L_i mají stejný počet prvků, pak zřejmě mají i stejně mohutné generující množiny. Závěrem, každý svaz L_i, $i \in I$ má minimální nejméně mohutnou (χ,$\oplus$)-generující množinu ve tvaru

$$\Big\{\chi_x \mid x \in L \setminus \{0, 1, x_1, \ldots, x_n\}\Big\} \cup \Big\{\oplus_y \mid y \in L \setminus \{0, 1\}\Big\} \cup \Big\{\vee, \wedge\Big\}.$$

□

Z věty 3.42 víme, jaké typy svazů mají nejmohutnější minimální $(\chi, \oplus)$-generující množiny ze všech minimálních $(\chi, \oplus)$-generujících množin svazů se stejným počtem prvků. Proto se naskýtá otázka, zda existují takové typy svazů, které by měli naopak nejméně mohutnější minimální $(\chi, \oplus)$-generující množiny, tj. zajímá nás dolní odhad pro mohutnosti $(\chi, \oplus)$-generujících množin. Odpověď na tuto otázku je prozatím neznámá, a proto vyslovíme pouze hypotézu, která by mohla být vhodnou odpovědí na zmíněnou otázku.

Hypotéza 3.49. *Nechť L je n prvkový atomární svaz a pro každý jiný n prvkový atomární svaz M platí*

$$|H_L| \leq |H_M|,$$

kde H_L a H_M jsou nejméně mohutné generující množiny svazů L a M. Pak pro minimální nejméně mohutné $(\chi,\oplus)$-generující množiny G_L a G_M agregačních klonů $\mathcal{C}_L$ a $\mathcal{C}_M$ platí nerovnost

$$|G_L| \leq |G_M|.$$

Za předpokladu platnosti této hypotézy, snadno nalezneme dolní odhad pro $(\chi,\oplus)$-generující množiny. Odhadem je množina mohutnosti $|H_L| + 2$ ve tvaru

$$\Big\{ \oplus_b \mid b \in H_L \Big\} \cup \Big\{ \vee, \wedge \Big\}.$$

V následujícím příkladu 3.50 uvidíme, že toto není jediné možné vyjádření dolního odhadu, ale z hypotézy plyne, že mohutnost každého dolního odhadu je rovna mohutnosti výše zmíněné množiny.

Možnou platnost hypotézy 3.49 ukážeme na třídě pětiprvkových a šestiprvkových svazů, to znamená, že sestrojíme všechny pětiprvkové a šestiprvkové svazy a podíváme se na mohutnosti jejich $(\chi, \oplus)$-generujících množin. S využitím všech vlastností, které jsme dokázali v podkapitolách 3.3 a 3.3.1, zkonstruujeme pro všechny takové svazy odhadované nejméně mohutné $(\chi, \oplus)$-generující množiny. Předtím než přejdeme k příkladu, zavedeme označení, které při konstrukci $(\chi, \oplus)$-generujících množin budeme využívat.

Nechť F a G jsou libovolné množiny funkcí a $Proj$ je množina všech projekcí. Řekneme, že z množiny F *lze vygenerovat* množinu G nebo množina G je *generována* množinou F (ozn. $F \Rrightarrow G$), jestliže $G \subseteq \mathrm{Pol}\,\mathrm{Inv}F$, tj. každou funkci z G lze vyjádřit vhodným složením funkcí z $F \cup Proj$. Například

$$\{\chi_a \mid a \in \mathrm{J}(L)\} \cup \{\wedge, \vee\} \Rrightarrow \{\chi_a \mid a \in L\}$$

nebo

$$\{\oplus_b \mid b \in H_L\} \cup \{\wedge, \vee\} \Rrightarrow \{\oplus_b \mid b \in L\}.$$

Příklad 3.50. Nejprve se zabývejme pětiprvkovými svazy. Všechny pětiprvkové svazy, až na izomorfismus, jsou zobrazeny na obrázku 10. Nyní bude našim cílem zkonstruovat odhady všech nejméně mohutných minimálních $(\chi, \oplus)$-generujících množin pětiprvkových svazů. Budeme postupovat následovně:

1. Nalezneme nejméně mohutnou generující množinu H_L svazu L.

2. Použitím lemmatu 3.27 dostaneme, že z parametrických funkcí $\oplus$, s parametrem z množiny H_L, a svazových operací, lze vygenerovat všechny funkce typu $\oplus$, tj.

$$\{\oplus_x \mid x \in H_L\} \cup \{\wedge, \vee\} \Rrightarrow \{\oplus_y \mid y \in L\}.$$

3. Z funkcí $\oplus_0, \oplus_1$ vygenerujeme funkce χ_1 a χ_0 s využitím lemmatu 3.26.

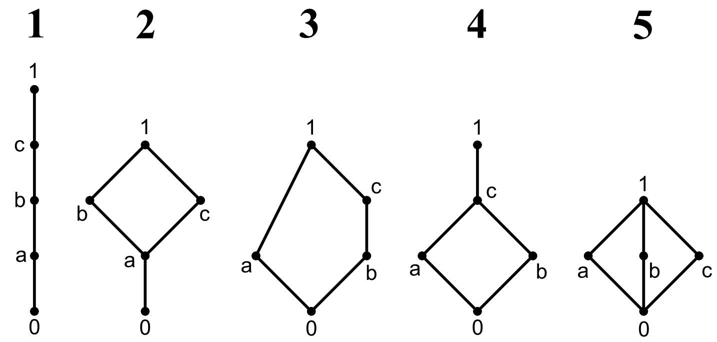
4. Za pomoci všech atomických funkcí $\oplus$, svazových operací a funkcí $\chi_1, \oplus_1$, lze vygenerovat použitím důsledku 3.37 všechny atomické funkce typu χ, tj.

$$\{\chi_1, \oplus_1, \wedge, \vee\} \cup \{\oplus_a \mid a \in \mathrm{At}(L)\} \Rrightarrow \{\chi_a \mid a \in \mathrm{At}(L)\}.$$

5. Z množiny funkcí obsahující všechny atomické funkce χ a svazové operace vygenerujeme, za použití lemmatu 3.24, všechny takové funkce χ_b, kde prvek $b \in L$ je spojením některých atomů, tj.

$$\{\chi_a \mid a \in \mathrm{At}(L)\} \cup \{\wedge, \vee\} \Rrightarrow \left\{\chi_b \mid A \subseteq \mathrm{At}(L), b = \bigvee\nolimits_{a \in A} a\right\}.$$

Další generování funkcí χ záleží na konkrétním typu svazu L. Tento postup není obecným postupem k hledání takové $(\chi, \oplus)$-generující množiny. Jedná se pouze o pomocný postup.



Obrázek 10: Všechny pětiprvkové svazy až na izomorfismus

Nyní už můžeme konstruovat jednotlivé odhady $(\chi, \oplus)$-generujících množin, které budeme značit symboly K_i, $i \in \{1, \ldots, 5\}$ odpovídající danému svazu. Začneme konstrukcí generující množiny svazu 2, protože pro svaz 1 přesně víme, jak vypadá nejméně mohutná $(\chi, \oplus)$-generující množina, díky větě 3.42, tj.

$$K_1 = \{\chi_b, \chi_c\} \cup \{\oplus_a, \oplus_b, \oplus_c\} \cup \{\vee, \wedge\}\,.$$

2:

$$\begin{aligned}
H_L &= \{0, b, c\},\\
\{\oplus_b, \oplus_c, \wedge, \vee\} &\Rrightarrow \{\oplus_a, \oplus_1\},\\
\{\oplus_0, \oplus_1\} &\Rrightarrow \{\chi_1, \chi_0\},\\
\{\chi_0\} &\Rrightarrow \{\chi_a\},\\
\{\chi_1, \oplus_b, \oplus_c, \wedge, \vee\} &\Rrightarrow \{\chi_b, \chi_c\},\\
K_2 &= \{\oplus_0, \oplus_b, \oplus_c\} \cup \{\vee, \wedge\}\,,
\end{aligned}$$

kde jsme v předposledním a posledním generujícím kroku využili lemmata 3.23 a 3.28.

3:

$$\begin{aligned}
H_L &= \{a, b, c\}, \\
\{\oplus_a, \oplus_b, \wedge, \vee\} &\Rrightarrow \{\oplus_0, \oplus_1\}, \\
\{\oplus_0, \oplus_1\} &\Rrightarrow \{\chi_1, \chi_0\}, \\
\{\chi_1, \oplus_a, \oplus_b, \wedge, \vee\} &\Rrightarrow \{\chi_a, \chi_b\}, \\
K_3 &= \{\chi_c\} \cup \{\oplus_a, \oplus_b, \oplus_c\} \cup \{\vee, \wedge\},
\end{aligned}$$

kde jsme v posledním generujícím kroku použili větu 3.32. Je vidět, že jedinou funkci, kterou jsme nedokázali vygenerovat je funkce χ_c a z věty 3.46 plyne, že musí být obsažena v minimální generující množině.

4:

$$\begin{aligned}
H_L &= \{a, b, 1\}, \\
\{\oplus_a, \oplus_b, \wedge, \vee\} &\Rrightarrow \{\oplus_0, \oplus_c\}, \\
\{\oplus_0, \oplus_1\} &\Rrightarrow \{\chi_1, \chi_0\}, \\
\{\chi_1, \oplus_1, \oplus_a, \oplus_b, \wedge, \vee\} &\Rrightarrow \{\chi_a, \chi_b\}, \\
\{\chi_a, \chi_b\} &\Rrightarrow \{\chi_c\}, \\
K_4 &= \{\oplus_a, \oplus_b, \oplus_1\} \cup \{\vee, \wedge\}.
\end{aligned}$$

5:

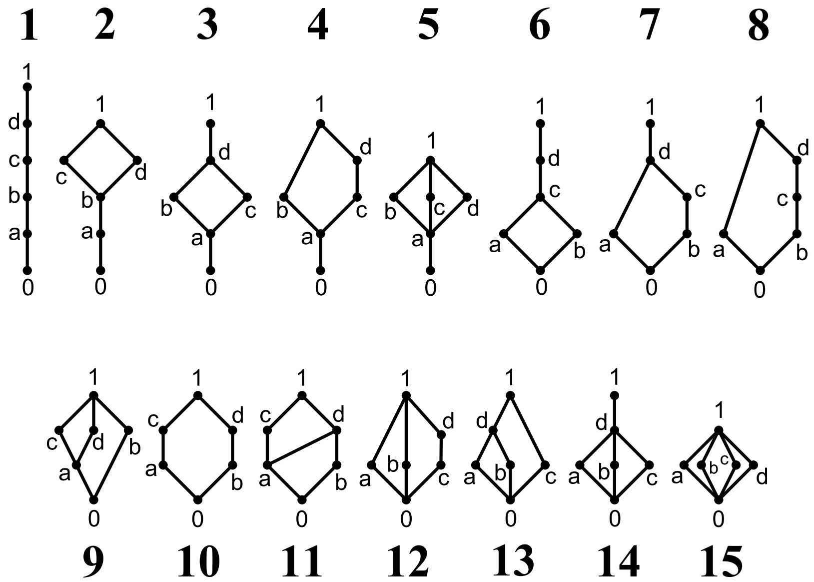
$$\begin{aligned}
H_L &= \{a, b, c\}, \\
\{\oplus_a, \oplus_b, \wedge, \vee\} &\Rrightarrow \{\oplus_0, \oplus_1\}, \\
\{\oplus_0, \oplus_1\} &\Rrightarrow \{\chi_1, \chi_0\}, \\
\{\chi_1, \oplus_a, \oplus_b, \oplus_c, \wedge, \vee\} &\Rrightarrow \{\chi_a, \chi_b, \chi_c\}, \\
K_5 &= \{\oplus_a, \oplus_b, \oplus_c\} \cup \{\vee, \wedge\}.
\end{aligned}$$

Následně určíme mohutnosti všech množin K_i, $i \in \{1, \ldots, 5\}$ a vyvodíme z toho odpovídající důsledky.

$$\begin{aligned}|K_1| &= 7,\\ |K_2| &= 5,\\ |K_3| &= 6,\\ |K_4| &= 5,\\ |K_5| &= 5.\end{aligned}$$

Z výsledků můžeme vidět, že (χ,$\oplus$)-generující množina lineárního řetězce má opravdu největší mohutnost, ale zajímavější poznatek je ten, že platí hypotéza 3.49, neboli atomární svaz s číslem 5, má nejméně mohutnou minimální (χ,$\oplus$)-generující množinu. Na druhou stranu vidíme, že existují další pětiprvkové svazy, jejichž (χ,$\oplus$)-generující množiny mají stejnou mohutnost jako (χ,$\oplus$)-generující množina svazu s číslem 5. Pro přesnější výsledky, ohledně hypotézy 3.49, zkonstruujeme ještě všechny šestiprvkové svazy (obr. 11) a provedeme totéž co u pětiprvkových svazů. Budeme opět používat pomocného postupu zmíněného na začátku příkladu. I tentokrát začneme svazem s číslem 2, přičemž

$$K_1 = \{\chi_b, \chi_c, \chi_d\} \cup \{\oplus_a, \oplus_b, \oplus_c, \oplus_d\} \cup \{\vee, \wedge\}\,.$$



Obrázek 11: Všechny šestiprvkové svazy až na izomorfismus

2:

$$
\begin{aligned}
H_L &= \{0, a, c, d\},\\
\{\oplus_c, \oplus_d, \wedge, \vee\} &\Rrightarrow \{\oplus_b, \oplus_1\},\\
\{\oplus_0, \oplus_1\} &\Rrightarrow \{\chi_1, \chi_0\},\\
\{\chi_0\} &\Rrightarrow \{\chi_a\},\\
\{\chi_1, \oplus_c, \oplus_d, \wedge, \vee\} &\Rrightarrow \{\chi_c, \chi_d\},\\
K_2 &= \{\chi_b\} \cup \{\oplus_a, \oplus_c, \oplus_d\} \cup \{\vee, \wedge\},
\end{aligned}
$$

přičemž nám zůstala funkce χ_b, kterou nedokážeme vygenerovat, protože (a, b) je dvojice vzájemně jednoznačně se pokrývajících prvků a platí věta 3.46. Podobný případ nastane u svazů s číslem $4, 6, 7, 8, 10$ a 12, kde například u svazů 4 a 6 existují dvojice (c, d) a u svazu 7 existuje dvojice (b, c).

3:

$$
\begin{aligned}
H_L &= \{0, b, c, 1\},\\
\{\oplus_b, \oplus_c, \wedge, \vee\} &\Rrightarrow \{\oplus_a, \oplus_d\},\\
\{\oplus_0, \oplus_1\} &\Rrightarrow \{\chi_1, \chi_0\},\\
\{\chi_0\} &\Rrightarrow \{\chi_a\}.
\end{aligned}
$$

V dalším kroku již musíme zvolit nějakou funkci typu χ a s její pomocí vygenerovat ostatní funkce. Zvolíme funkci χ_d, načež použitím věty 3.34 a lemmat 3.23 a 3.26 dostaneme

$$
\begin{aligned}
\{\chi_d, \oplus_b, \oplus_c, \wedge, \vee\} &\Rrightarrow \{\chi_b, \chi_c\},\\
\{\chi_d, \oplus_c, \oplus_d\} &\Rrightarrow \{\chi_0, \chi_1\},\\
\{\chi_0, \chi_1, \vee, \wedge\} &\Rrightarrow \{\oplus_0, \oplus_1\},\\
K_3 &= \{\chi_d\} \cup \{\oplus_b, \oplus_c\} \cup \{\vee, \wedge\}.
\end{aligned}
$$

Lehce se přesvědčíme, že se jedná o minimální $(\chi, \oplus)$-generující množinu[2].

[2]Například, množina $B = \{(a, c), (b, d)\} \cup \{(x, x) \mid x \in L\}$ je uzavřená na operace z $K_3 \setminus \{\chi_d\}$, ale není uzavřená na operaci χ_d.

4:

$$\begin{aligned}
H_L &= \{0, b, c, d\}, \\
\{\oplus_b, \oplus_c, \wedge, \vee\} &\Rrightarrow \{\oplus_a, \oplus_1\}, \\
\{\oplus_0, \oplus_1\} &\Rrightarrow \{\chi_1, \chi_0\}, \\
\{\chi_0\} &\Rrightarrow \{\chi_a\}, \\
\{\chi_1, \oplus_b, \oplus_c, \wedge, \vee\} &\Rrightarrow \{\chi_b, \chi_c\}, \\
K_4 &= \{\chi_d\} \cup \{\oplus_b, \oplus_c, \oplus_d\} \cup \{\vee, \wedge\}.
\end{aligned}$$

5:

$$\begin{aligned}
H_L &= \{0, b, c, d\}, \\
\{\oplus_b, \oplus_c, \wedge, \vee\} &\Rrightarrow \{\oplus_a, \oplus_1\}, \\
\{\oplus_0, \oplus_1\} &\Rrightarrow \{\chi_1, \chi_0\}, \\
\{\chi_0\} &\Rrightarrow \{\chi_a\}, \\
\{\chi_1, \oplus_b, \oplus_c, \oplus_d, \wedge, \vee\} &\Rrightarrow \{\chi_b, \chi_c, \chi_d\}, \\
K_5 &= \{\oplus_0, \oplus_b, \oplus_c, \oplus_d\} \cup \{\vee, \wedge\}.
\end{aligned}$$

6:

$$\begin{aligned}
H_L &= \{a, b, d, 1\}, \\
\{\oplus_a, \oplus_b, \wedge, \vee\} &\Rrightarrow \{\oplus_0, \oplus_c\}, \\
\{\oplus_0, \oplus_1\} &\Rrightarrow \{\chi_1, \chi_0\}, \\
\{\chi_1, \oplus_1, \oplus_a, \oplus_b, \wedge, \vee\} &\Rrightarrow \{\chi_a, \chi_b\}, \\
\{\chi_a, \chi_b, \wedge\} &\Rrightarrow \{\chi_c\}, \\
K_6 &= \{\chi_d\} \cup \{\oplus_a, \oplus_b, \oplus_d\} \cup \{\vee, \wedge\}.
\end{aligned}$$

7:

$$\begin{aligned}
H_L &= \{a, b, c, 1\}, \\
\{\oplus_a, \oplus_b, \wedge, \vee\} &\Rrightarrow \{\oplus_0, \oplus_d\}, \\
\{\oplus_0, \oplus_1\} &\Rrightarrow \{\chi_1, \chi_0\}, \\
\{\chi_1, \oplus_1, \oplus_a, \oplus_b, \wedge, \vee\} &\Rrightarrow \{\chi_a, \chi_b\}, \\
\{\chi_a, \chi_b, \wedge\} &\Rrightarrow \{\chi_d\}, \\
K_7 &= \{\chi_c\} \cup \{\oplus_a, \oplus_b, \oplus_c\} \cup \{\vee, \wedge\}.
\end{aligned}$$

8:

$$\begin{aligned}
H_L &= \{a, b, c, d\},\\
\{\oplus_a, \oplus_b, \wedge, \vee\} &\Rrightarrow \{\oplus_0, \oplus_1\},\\
\{\oplus_0, \oplus_1\} &\Rrightarrow \{\chi_1, \chi_0\},\\
\{\chi_1, \oplus_a, \oplus_b, \wedge, \vee\} &\Rrightarrow \{\chi_a, \chi_b\},\\
K_8 &= \{\chi_c, \chi_d\} \cup \{\oplus_a, \oplus_b, \oplus_c, \oplus_d\} \cup \{\vee, \wedge\}\,.
\end{aligned}$$

V tomto případě nám zůstaly dvě funkce typu χ, kterými jsou χ_c a χ_d, protože ve svazu 8 existují dvě dvojice vzájemně jednoznačně se pokrývajících prvků, kterými jsou (b, c) a (c, d).

9:

$$\begin{aligned}
H_L &= \{c, d, b\},\\
\{\oplus_c, \oplus_d, \oplus_b, \wedge, \vee\} &\Rrightarrow \{\oplus_0, \oplus_a, \oplus_1\},\\
\{\oplus_0, \oplus_1\} &\Rrightarrow \{\chi_1, \chi_0\},\\
\{\chi_1, \oplus_c, \oplus_d, \wedge, \vee\} &\Rrightarrow \{\chi_c, \chi_d\},\\
\{\chi_1, \oplus_1, \oplus_a, \oplus_b, \wedge, \vee\} &\Rrightarrow \{\chi_a, \chi_b\},\\
K_9 &= \{\oplus_b, \oplus_c, \oplus_d\} \cup \{\vee, \wedge\}\,.
\end{aligned}$$

10:

$$\begin{aligned}
H_L &= \{a, b, c, d\},\\
\{\oplus_a, \oplus_b, \wedge, \vee\} &\Rrightarrow \{\oplus_0, \oplus_1\},\\
\{\oplus_0, \oplus_1\} &\Rrightarrow \{\chi_1, \chi_0\},\\
\{\chi_1, \oplus_a, \oplus_b, \wedge, \vee\} &\Rrightarrow \{\chi_a, \chi_b\},\\
K_{10} &= \{\chi_c, \chi_d\} \cup \{\oplus_a, \oplus_b, \oplus_c, \oplus_d\} \cup \{\vee, \wedge\}\,.
\end{aligned}$$

Toto je druhý a poslední případ, kdy nám zůstanou dvě funkce typu χ. Obdobně jako u svazu 8, tak i zde existují dvě dvojice vzájemně jednoznačně se pokrývajících prvků, kterými jsou (a, c) a (b, d).

11:

$$\begin{aligned}
H_L &= \{a, b, c\},\\
\{\oplus_a, \oplus_b, \oplus_c, \wedge, \vee\} &\Rrightarrow \{\oplus_d, \oplus_1\},\\
\{\oplus_0, \oplus_1\} &\Rrightarrow \{\chi_1, \chi_0\},\\
\{\chi_1, \oplus_1, \oplus_a, \oplus_b, \wedge, \vee\} &\Rrightarrow \{\chi_a, \chi_b\},\\
\{\chi_a, \chi_b, \wedge\} &\Rrightarrow \{\chi_d\},\\
\{\chi_1, \oplus_c, \oplus_d, \wedge, \vee\} &\Rrightarrow \{\chi_c\},\\
K_{11} &= \{\oplus_a, \oplus_b, \oplus_c\} \cup \{\vee, \wedge\}\,.
\end{aligned}$$

12:

$$
\begin{aligned}
H_L &= \{a,b,c,d\}, \\
\{\oplus_a,\oplus_b,\wedge,\vee\} &\Rrightarrow \{\oplus_0,\oplus_1\}, \\
\{\oplus_0,\oplus_1\} &\Rrightarrow \{\chi_1,\chi_0\}, \\
\{\chi_1,\oplus_a,\oplus_b,\oplus_c,\wedge,\vee\} &\Rrightarrow \{\chi_a,\chi_b,\chi_c\}, \\
K_{12} &= \{\chi_d\}\cup\{\oplus_a,\oplus_b,\oplus_c,\oplus_d\}\cup\{\vee,\wedge\}\,.
\end{aligned}
$$

Zbyla nám funkce χ_d, poněvadž ve svazu 12 tvoří (c,d) vzájemně jednoznačně se pokrývající dvojici. Toto je poslední případ, kdy nám zůstane funkce typu χ. V následujících případech lze vygenerovat všechny funkce typu χ.

13:

$$
\begin{aligned}
H_L &= \{a,b,c\}, \\
\{\oplus_a,\oplus_b,\oplus_c,\wedge,\vee\} &\Rrightarrow \{\oplus_0,\oplus_d,\oplus_1\}, \\
\{\oplus_0,\oplus_1\} &\Rrightarrow \{\chi_1,\chi_0\}, \\
\{\chi_1,\oplus_1,\oplus_a,\oplus_b,\oplus_c,\wedge,\vee\} &\Rrightarrow \{\chi_a,\chi_b,\chi_c\}, \\
\{\chi_a,\chi_b,\wedge\} &\Rrightarrow \{\chi_d\}, \\
K_{13} &= \{\oplus_a,\oplus_b,\oplus_c\}\cup\{\vee,\wedge\}\,.
\end{aligned}
$$

14:

$$
\begin{aligned}
H_L &= \{a,b,c,1\}, \\
\{\oplus_a,\oplus_b,\wedge,\vee\} &\Rrightarrow \{\oplus_0,\oplus_d\}, \\
\{\oplus_0,\oplus_1\} &\Rrightarrow \{\chi_1,\chi_0\}, \\
\{\chi_1,\oplus_1,\oplus_a,\oplus_b,\oplus_c,\wedge,\vee\} &\Rrightarrow \{\chi_a,\chi_b,\chi_c\}, \\
\{\chi_a,\chi_b,\wedge\} &\Rrightarrow \{\chi_d\}, \\
K_{14} &= \{\oplus_a,\oplus_b,\oplus_c,\oplus_1\}\cup\{\vee,\wedge\}\,.
\end{aligned}
$$

15:

$$
\begin{aligned}
H_L &= \{a,b,c,d\}, \\
\{\oplus_a,\oplus_b,\wedge,\vee\} &\Rrightarrow \{\oplus_0,\oplus_d\}, \\
\{\oplus_0,\oplus_1\} &\Rrightarrow \{\chi_1,\chi_0\}, \\
\{\chi_1,\oplus_a,\oplus_b,\oplus_c,\oplus_d,\wedge,\vee\} &\Rrightarrow \{\chi_a,\chi_b,\chi_c,\chi_d\}, \\
K_{15} &= \{\oplus_a,\oplus_b,\oplus_c,\oplus_d\}\cup\{\vee,\wedge\}\,.
\end{aligned}
$$

Shrnutím všech konstrukcí dostáváme následující mohutnosti odhadovaných nejméně mohutných $(\chi,\oplus)$-generujících množin:

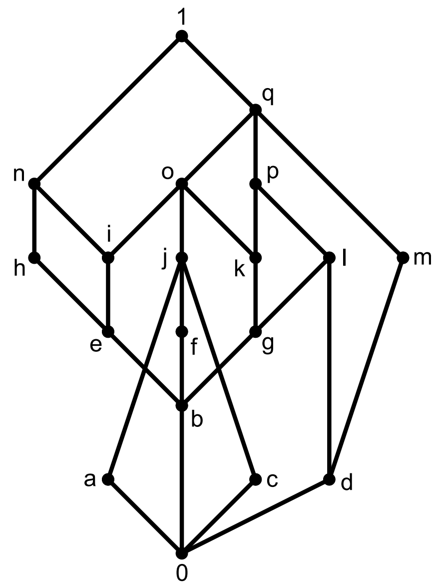
$$\begin{aligned}
|K_1| &= 9,\\
|K_2| &= 6,\\
|K_3| &= 5,\\
|K_4| &= 6,\\
|K_5| &= 6,\\
|K_6| &= 6,\\
|K_7| &= 6,\\
|K_8| &= 8,\\
|K_9| &= 5,\\
|K_{10}| &= 8,\\
|K_{11}| &= 5,\\
|K_{12}| &= 7,\\
|K_{13}| &= 5,\\
|K_{14}| &= 6,\\
|K_{15}| &= 6.
\end{aligned}$$

Ve třídě šestiprvkových svazů máme dva atomární svazy, kterými jsou svazy s číslem 13 a 15. Svaz s číslem 15 nepřipadá v úvahu, protože jeho mohutnost generující množiny H_L je ostře větší, než mohutnost generující množiny H_L svazu 13. Tedy nám zůstal pouze svaz s číslem 13, jehož mohutnost minimální nejméně mohutné $(\chi,\oplus)$-generující množiny je rovna 5. Podle hypotézy 3.49, neexistuje $(\chi,\oplus)$-generující množina šestiprvkového svazu s menší mohutností. Námi odhadnuté $(\chi,\oplus)$-generující množiny tuto vlastnost splňují a tedy hypotéza 3.49 platí.

Ve výsledcích můžeme vidět i platnosti vět 3.48 a 3.46. Například svazy 8 a 10 jsou HC_2-svazy a mají stejné minimální nejméně mohutné $(\chi,\oplus)$-generující množiny. Věta 3.46 hovořila o vzájemně jednoznačně se pokrývajících prvcích. V našem případě to jsou například dvojice: (a, b) ze svazu 2, (c, d) ze svazů 4 a 6, (b, c) ze svazu 7, atd. Tím pádem jejich odpovídající minimální $(\chi,\oplus)$-generující množiny musí obsahovat alespoň jednu funkci typu χ, což je evidentně pravda.

Závěrem této podkapitoly se vrátíme ke spojovým D-prvkům a C-prvkům z věty 3.34. Pro připomenutí, C-prvky jsou takové prvky ve svazu, jenž pokrývají jediný a ten samý prvek a spojením libovolných dvou C-prvků dostaneme stejný prvek, který se nazývá spojový D-prvek. Očividně, všechny C-prvky příslušející některému spojovému D-prvku, jsou spojově ireducibilní. Z tvrzení 3.41 plyne, že $(\chi, \oplus)$-generující množina obsahuje všechny funkce χ_x pro $x \in \mathrm{J}(L) \setminus \mathrm{At}(L)$. Odtud vidíme, že $(\chi, \oplus)$-generující množina může obsahovat funkce, které lze vygenerovat. Na následujícím příkladu ukážeme postup, jak se těchto funkcí zbavit. Opět to nebude obecný postup, ale pouze návod, jak u svazů, které mají C-prvky, nalézt odhad nejméně mohutné $(\chi,\oplus)$-generující množiny.

Příklad 3.51. Úkolem je ke svazu L, který je zobrazen na obrázku 12, nalézt odhad nejméně mohutné $(\chi, \oplus)$-generující množiny.



Obrázek 12: Svaz L

Nechť H_L je libovolná nejméně mohutná generující množina[3] svazu L. Pak platí následující generující postup:

$$\begin{aligned}
\{\oplus_x, \wedge, \vee \mid x \in H_L\} &\Rrightarrow \{\oplus_y \mid y \in L\}, \\
\{\oplus_0, \oplus_1\} &\Rrightarrow \{\chi_1, \chi_0\}, \\
\{\chi_0, \oplus_a, \oplus_b, \oplus_c, \oplus_d, \wedge, \vee\} &\Rrightarrow \{\chi_a, \chi_b, \chi_c, \chi_d\}, \\
\{\chi_a, \chi_b, \chi_c, \chi_d, \wedge\} &\Rrightarrow \{\chi_j, \chi_q, \chi_l\},
\end{aligned}$$

kde jsme při generování atomických funkcí χ použili funkci χ_0 namísto funkcí χ_1 a $\oplus_1$. Tato úprava je korektní a pouze zjednodušuje pozdější kontrolu. V tuto chvíli nám zůstaly funkce $\chi_e, \chi_f, \chi_g, \chi_h, \chi_i, \chi_k, \chi_m, \chi_n, \chi_o, \chi_p$. Zaměříme se na funkce $\chi_e, \chi_f, \chi_g, \chi_h, \chi_i, \chi_m$, jelikož prvky e, f, g jsou C-prvky odpovídající spojovému D-prvku o, prvky h, i jsou C-prvky odpovídající spojovému D-prvku n a prvek m je C-prvkem odpovídající spojovému D-prvku q. V posledním zmíněném případu využijeme důsledek 3.35. Tedy existují prvky l a m, jenž pokrývají stejný prvek d, jenomže prvek l pokrývá i prvek g. Spojením prvků l a m je prvek q. Podle důsledku 3.35 to znamená, že pomocí funkce χ_q lze vygenerovat pouze funkci χ_m, nikoliv funkci χ_l. Pak podle věty 3.34 a důsledku 3.35 dostáváme

$$\begin{aligned}
\{\chi_q, \oplus_l, \oplus_m, \wedge, \vee\} &\Rrightarrow \{\chi_m\}, \\
\{\chi_o, \oplus_e, \oplus_f, \oplus_g, \wedge, \vee\} &\Rrightarrow \{\chi_e, \chi_f, \chi_g\}, \\
\{\chi_n, \oplus_h, \oplus_i, \wedge, \vee\} &\Rrightarrow \{\chi_h, \chi_i\}.
\end{aligned}$$

Odtud vyplývá, že již zůstaly pouze funkce $\chi_o, \chi_n, \chi_k, \chi_p$. Nyní stačí zkoumat pouze to, zda některé funkce lze vygenerovat pomocí již vygenerovaných funkcí. Nejužitečnější funkcí je funkce χ_k, protože

$$\{\chi_j, \chi_k, \chi_l, \wedge\} \Rrightarrow \{\chi_o, \chi_p\}.$$

Tím pádem zbyly funkce χ_n a χ_k. Zde už nepředpokládáme žádné další generování a výsledkem je následující odhadovaná nejméně mohutná $(\chi,\oplus)$-generující množina

$$G = \{\chi_n, \chi_k\} \cup \{\oplus_x \mid x \in H_L\} \cup \{\vee, \wedge\}.$$

Důkaz toho, že množina G je minimální $(\chi,\oplus)$-generující množinou je jednoduchý. Zvolíme například množiny $B_1 = \{(g, k), (l, p)\} \cup \{(x, x) \mid x \in L\}$

[3]Autor této diplomové práce je přesvědčený, že množina $H_L = \{a, c, f, h, i, m, p\}$ je nejméně mohutnou generující množinou svazu L, ale nemohl to dokázat.

a $B_2 = \{(h,n),(e,i)\} \cup \{(x,x) \mid x \in L\}$. Lehce se přesvědčíme, že množina B_1 je uzavřená na operace z $G \setminus \{\chi_k\}$, ale není uzavřená na operaci χ_n. Podobně množina B_2 je uzavřená na operace z $G \setminus \{\chi_n\}$, ale není uzavřená na operaci χ_k.

Dostali jsme velice překvapivý výsledek, neboť $(\chi,\oplus)$-generující množina G obsahuje funkci χ_n, přičemž prvek n není spojově ireducibilní, tj. $n \notin \mathrm{J}(L)$. Závěrem příkladu ověříme, že jsme konstruovali dobře. Zkontrolujeme pouze generování funkcí χ, protože generování funkcí $\oplus$ je triviální, tj. začneme generovat atomické funkce typu χ.

$$
\begin{aligned}
\chi_a(x) &= \chi_0\big(x \wedge (x \oplus_a x)\big),\\
\chi_b(x) &= \chi_0\big(x \wedge (x \oplus_b x)\big),\\
\chi_c(x) &= \chi_0\big(x \wedge (x \oplus_c x)\big),\\
\chi_d(x) &= \chi_0\big(x \wedge (x \oplus_d x)\big),\\
\chi_j(x) &= \chi_a(x) \wedge \chi_b(x),\\
\chi_q(x) &= \chi_a(x) \wedge \chi_d(x),\\
\chi_l(x) &= \chi_b(x) \wedge \chi_d(x),\\
\chi_m(x) &= \Phi_1\big(x \wedge (x \oplus_m x)\big),\\
\chi_e(x) &= \Phi_2\big(x \wedge (x \oplus_e x)\big),\\
\chi_f(x) &= \Phi_2\big(x \wedge (x \oplus_f x)\big),\\
\chi_g(x) &= \Phi_2\big(x \wedge (x \oplus_g x)\big),\\
\chi_h(x) &= \Phi_3\big(x \wedge (x \oplus_h x)\big),\\
\chi_i(x) &= \Phi_3\big(x \wedge (x \oplus_i x)\big),\\
\chi_o(x) &= \chi_j(x) \wedge \chi_k(x),\\
\chi_p(x) &= \chi_l(x) \wedge \chi_k(x),\\
\text{kde}\quad & \\
\Phi_1(x) &= \chi_q\big(x \vee (x \oplus_l x)\big) \vee \chi_q\big(x \vee (x \oplus_m x)\big),\\
\Phi_2(x) &= \chi_o\big(x \vee (x \oplus_e x)\big) \vee \chi_o\big(x \vee (x \oplus_g x)\big),\\
\Phi_3(x) &= \chi_n\big(x \vee (x \oplus_h x)\big) \vee \chi_n\big(x \vee (x \oplus_i x)\big).
\end{aligned}
$$

V následující tabulce jsou ověřeny všechny funkce χ, které ve svém zápisu využívají některou z funkcí Φ_i, pro $i = 1,2,3$ a tedy i atomární funkce χ, neboť v tom případě je funkce Φ přímo rovna funkci χ_0. Z tabulky je vidět, že jsme ke generování funkcí χ používali správné vztahy a námi odhadnutá minimální množina je korektně zvolená.

x	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q
Φ_1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Φ_2	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Φ_3	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\Phi_1(x \wedge (x \oplus_m x))$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
$\Phi_2(x \wedge (x \oplus_e x))$	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1
$\Phi_2(x \wedge (x \oplus_f x))$	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
$\Phi_2(x \wedge (x \oplus_g x))$	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1
$\Phi_3(x \wedge (x \oplus_h x))$	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
$\Phi_3(x \wedge (x \oplus_i x))$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1
$\chi_0(x \wedge (x \oplus_a x))$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
$\chi_0(x \wedge (x \oplus_b x))$	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
$\chi_0(x \wedge (x \oplus_c x))$	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
$\chi_0(x \wedge (x \oplus_d x))$	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1

Tabulka 1: Vyčíslení některých funkcí typu χ z příkladu 3.51.

3.5 Konkrétní příklady agregačních funkcí

Závěrem celé práce zužitkujeme vše, co jsme se dozvěděli v celé kapitole o generování agregačního klonu. Výchozím svazem bude tříprvkový a poté i čtyřprvkový lineární řetězec, neboť lze jednoduše nakreslit svaz L^2. Proto veškerý postup bude i graficky znázorněn. V příkladu nejdříve určíme minimální nejméně mohutnou $(\chi,\oplus)$-generující množinu daného svazu, a poté zvolíme libovolnou binární agregační funkci A na daném svazu. Následně využijeme funkce $h^A_{\mathbf{a}}$ z definice 3.7, ze kterých, za použití věty 3.9, vygenerujeme naší zvolenou agregační funkci A. Vlastnosti funkcí χ a $\oplus$ využijeme při konstrukci funkcí $h^A_{\mathbf{a}}$.

Nechť L je tříprvkový lineární řetězec s prvky $0, a, 1$. Pak podle lemmatu 3.44 je tvar množiny K následující

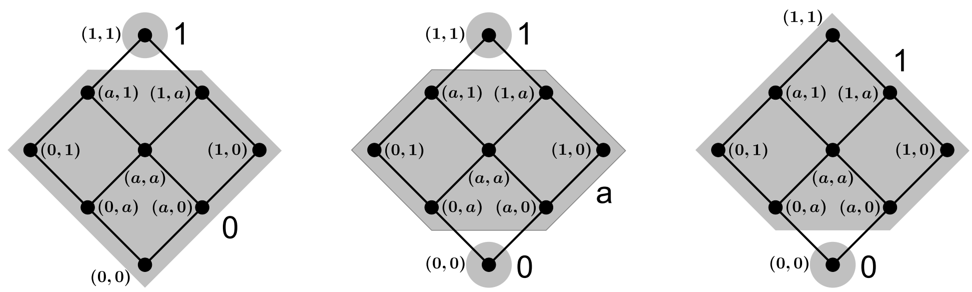
$$K = \{\oplus_0, \oplus_a, \oplus_1\} \cup \{\vee, \wedge\},$$

kde

$$x \oplus_0 y = \begin{cases} 1 & ; x = 1, y = 1 \\ 0 & ; \text{jinak}, \end{cases} \qquad x \oplus_1 y = \begin{cases} 0 & ; x = 0, y = 0 \\ 1 & ; \text{jinak}, \end{cases}$$

$$x \oplus_a y = \begin{cases} 0 & ; x = 0, y = 0 \\ 1 & ; x = 1, y = 1 \\ a & ; \text{jinak}. \end{cases}$$

Označení: Na následujících obrázcích označuje bezpatkové písmo vedle šedých oblastí to, kam se zobrazují body z dané oblasti (místo čárkovaných čar na obrázku 5).



Obrázek 13: Funkce $\oplus_0$, $\oplus_a$ a $\oplus_1$

Zvolme libovolnou agregační funkci A, například tu z obrázku 5 :

$$A(x, y) = \begin{cases} 0 & ; (x, y) = (0, 0), (0, a) \\ a & ; (x, y) = (a, 0), (0, 1), (a, a), (a, 1) \\ 1 & ; (x, y) = (1, 0), (1, a), (1, 1). \end{cases}$$

Dále podle vztahu (3) z definice 3.7 zkonstruujeme funkce $h_{\mathbf{a}}^A(x, y)$ pro každé $(0, 0) \neq \mathbf{a} \neq (1, 1)$. Víme, že u tříprvkového svazu lze vygenerovat všechny funkce typu χ. V následujících rovnostech využijeme známé vztahy pro funkce χ, tj. $\chi_0(x) = x \oplus_1 x, \chi_0(x) = \chi_a(x), \chi_1(x) = x \oplus_0 x$.

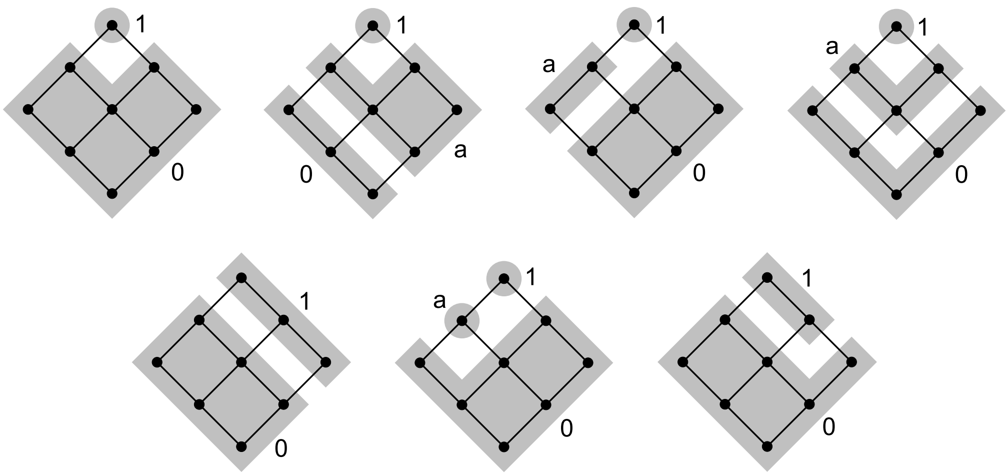
$$
\begin{aligned}
h^A_{(0,a)}(x,y) &= (y \oplus_1 y) \wedge (x \oplus_0 y)\,, \\
h^A_{(a,0)}(x,y) &= (x \oplus_1 x) \wedge (x \oplus_a y), \\
h^A_{(0,1)}(x,y) &= (y \oplus_0 y) \wedge (x \oplus_a y), \\
h^A_{(a,a)}(x,y) &= \big((x \oplus_1 x) \wedge (y \oplus_1 y)\big) \wedge (x \oplus_a y), \\
h^A_{(1,0)}(x,y) &= (x \oplus_0 x) \wedge (x \oplus_1 y)\,, \\
h^A_{(a,1)}(x,y) &= \big((x \oplus_1 x) \wedge (y \oplus_0 y)\big) \wedge (x \oplus_a y), \\
h^A_{(1,a)}(x,y) &= \big((x \oplus_0 x) \wedge (y \oplus_1 y)\big) \wedge (x \oplus_1 y).
\end{aligned}
$$

Nyní musíme všechny funkce vyčíslit pro všechny hodnoty (x,y). Pro přehlednost vytvoříme tabulku.

(x,y)	$(0,0)$	$(0,a)$	$(a,0)$	$(0,1)$	(a,a)	$(1,0)$	$(a,1)$	$(1,a)$	$(1,1)$
$h^A_{(0,a)}(x,y)$	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$h^A_{(a,0)}(x,y)$	0	0	a	0	a	a	a	a	1
$h^A_{(0,1)}(x,y)$	0	0	0	a	0	0	a	0	1
$h^A_{(a,a)}(x,y)$	0	0	0	0	a	0	a	a	1
$h^A_{(1,0)}(x,y)$	0	0	0	0	0	1	0	1	1
$h^A_{(a,1)}(x,y)$	0	0	0	0	0	0	a	0	1
$h^A_{(1,a)}(x,y)$	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Tabulka 2: Vyčíslení funkcí $h^A_{\mathbf{a}}$ svazu L^2.

Z věty 3.9 víme, že spojením funkcí $h^A_{\mathbf{a}}(x,y)$ dostaneme agregační funkci A. V našem případě to zjistíme z tabulky tak, že na jednotlivé sloupce použijeme operaci spojení, a tím dostaneme naši zvolenou agregační funkci A. My použijeme druhou metodu, která je pracnější, ale názornější. Znázorníme všechny funkce $h^A_{\mathbf{a}}$ z tabulky 2, čili každý řádek představuje určitou binární agregační funkci na svazu L. Všechny tyto agregační funkce odpovídající řádkům jsou znázorněny na obrázku 14.



Obrázek 14: Agregační funkce odpovídající řádkům v tabulce 2

Dále provedeme spojení všech agregačních funkcí znázorněných na obrázku 14 a dostaneme agregační funkci z obrázku 5.

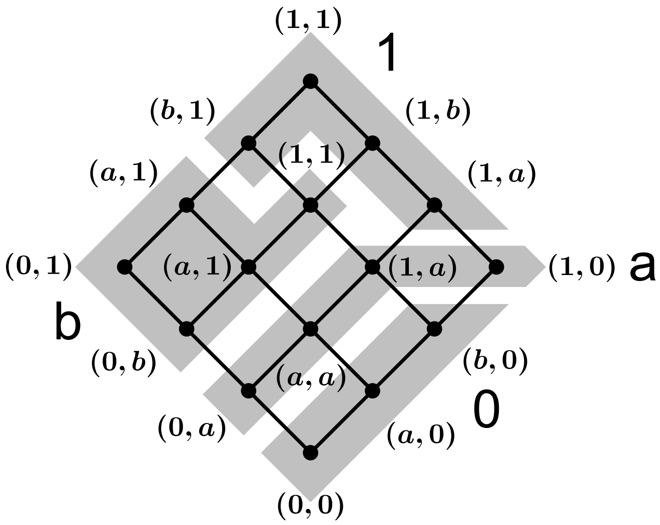
Tímto příkladem jsme názorně ukázali, že ke každé agregační funkci A nad tříprvkovým lineárním řetězcem, existuje 7 funkcí $h_{\mathbf{a}}^{A}$ takových, že jejich spojením dostaneme agregační funkci A. Stejný postup použijeme i na čtyřprvkový lineární řetězec. Jediným rozdílem bude to, že můžeme použít větu 3.42, tzn. lze vygenerovat více funkcí, což se promítne při konstrukci funkcí $h_{\mathbf{a}}^{A}$.

Nechť L je čtyřprvkový lineární řetězec s prvky $0, a, b, 1$. Podle věty 3.42 je tvar množiny K následující

$$K = \{\chi_b\} \cup \{\oplus_a, \oplus_b\} \cup \{\vee, \wedge\}\,.$$

Nechť A je agregační funkce dána předpisem (viz obrázek 15):

$$A(x,y) = \begin{cases} 0 & ;\ (x,y) = (0,0), (a,0), (b,0) \\ a & ;\ (x,y) = (0,a), (a,a), (b,a), (1,0) \\ b & ;\ (x,y) = (0,b), (0,1), (a,b), (a,1), (b,b) \\ 1 & ;\ (x,y) = (1,a), (b,1), (1,b), (1,1). \end{cases}$$



Obrázek 15: Agregační funkce A

Podobně jako v předchozím případě, sestrojíme funkce $h^A_{\mathbf{a}}(x,y)$ pro každé $(0,0) \neq \mathbf{a} \neq (1,1)$. V následujících rovnostech už vidíme poměrně dost známých vztahů, které jsme využívali při generování ostatních funkcí.

$$\begin{aligned}
h^A_{(0,a)}(x,y) &= \chi_b(y \oplus_b y) \wedge (x \oplus_a y),\\
h^A_{(a,0)}(x,y) &= \chi_b(x \oplus_b x) \wedge \big(\chi_b(x \oplus_a x) \wedge \chi_b(y \oplus_a y)\big),\\
h^A_{(0,b)}(x,y) &= \chi_b(y) \wedge (x \oplus_b y),\\
h^A_{(a,a)}(x,y) &= \big(\chi_b(x \oplus_b x) \wedge \chi_b(y \oplus_b y)\big) \wedge (x \oplus_a y),\\
h^A_{(b,0)}(x,y) &= \chi_b(x) \wedge \big(\chi_b(x \oplus_a x) \wedge \chi_b(y \oplus_a y)\big),\\
h^A_{(0,1)}(x,y) &= \chi_b(y \oplus_a y) \wedge (x \oplus_b y),\\
h^A_{(a,b)}(x,y) &= \big(\chi_b(x \oplus_b x) \wedge \chi_b(y)\big) \wedge (x \oplus_b y),\\
h^A_{(b,a)}(x,y) &= \big(\chi_b(x) \wedge \chi_b(y \oplus_b y)\big) \wedge (x \oplus_a y),\\
h^A_{(1,0)}(x,y) &= \chi_b(x \oplus_a x) \wedge (x \oplus_a y),\\
h^A_{(a,1)}(x,y) &= \big(\chi_b(x \oplus_b x) \wedge \chi_b(y \oplus_a y)\big) \wedge (x \oplus_b y),\\
h^A_{(b,b)}(x,y) &= \big(\chi_b(x) \wedge \chi_b(y)\big) \wedge (x \oplus_b y),\\
h^A_{(1,a)}(x,y) &= \big(\chi_b(x \oplus_a x) \wedge \chi_b(y \oplus_b y)\big) \wedge \big(\chi_b(x \oplus_b x) \vee \chi_b(y \oplus_b y)\big),\\
h^A_{(b,1)}(x,y) &= \big(\chi_b(x) \wedge \chi_b(y \oplus_a y)\big) \wedge \big(\chi_b(x \oplus_b x) \vee \chi_b(y \oplus_b y)\big),\\
h^A_{(1,b)}(x,y) &= \big(\chi_b(x \oplus_a x) \wedge \chi_b(y)\big) \wedge \big(\chi_b(x \oplus_b x) \vee \chi_b(y \oplus_b y)\big).
\end{aligned}$$

Dále vytvoříme tabulku pro všechny hodnoty (x, y). Tentokrát pro ověření použijeme první postup, tj. na jednotlivé sloupce aplikujeme operaci spojení. Výsledkem je zvolená agregační funkce A.

(x,y)	$(0,0)$	$(0,a)$	$(a,0)$	$(0,b)$	(a,a)	$(b,0)$	$(0,1)$	(a,b)	(b,a)	$(1,0)$	$(a,1)$	(b,b)	$(1,a)$	$(b,1)$	$(1,b)$	$(1,1)$
$h^A_{(0,a)}(x,y)$	0	a	0	a	a	0	a	a	a	0	a	a	a	a	a	1
$h^A_{(a,0)}(x,y)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$h^A_{(0,b)}(x,y)$	0	0	0	b	0	0	b	b	0	0	b	b	0	b	b	1
$h^A_{(a,a)}(x,y)$	0	0	0	0	a	0	0	a	a	0	a	a	a	a	a	1
$h^A_{(b,0)}(x,y)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$h^A_{(0,1)}(x,y)$	0	0	0	0	0	0	b	0	0	0	b	0	0	b	0	1
$h^A_{(a,b)}(x,y)$	0	0	0	0	0	0	0	b	0	0	b	b	0	b	b	1
$h^A_{(b,a)}(x,y)$	0	0	0	0	0	0	0	0	a	0	0	a	a	a	a	1
$h^A_{(1,0)}(x,y)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	a	0	0	a	0	a	1
$h^A_{(a,1)}(x,y)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b	0	0	b	0	1
$h^A_{(b,b)}(x,y)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b	0	b	b	1
$h^A_{(1,a)}(x,y)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1
$h^A_{(b,1)}(x,y)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
$h^A_{(1,b)}(x,y)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Tabulka 3: Vyčíslení funkcí $h^A_{\mathbf{a}}$ svazu L^2.

Závěr

V první části práce jsme připomněli pojem agregační funkce na intervalu a znázornili vybrané grafy agregačních funkcí. Následně jsme ukázali jednu z důležitých vět teorie agregačních funkcí, která se týkala skládání agregační funkcí. V další části jsme se zabývali konstrukcí klonů pomocí zobrazení Pol a Inv, kterou jsme pak využili k dokázání Baker-Pixleyho věty. Poslední kapitola pojednává o agregačním klonu. V této části jsme se snažili co nejvíce zredukovat generující množinu agregačního klonu.

Celá oblast týkající se agregačních funkcí na svazech je v rozkvětu, a proto každý nový poznatek je velice důležitý. Nejdůležitější otázkou na závěr je, zda existuje i jiná konstrukce nejmenší generující množiny. Je možné, že odpověď na otázku je kladná, ale prozatím se konstrukce R. Halaše a J. Pócse popsaná v článku [4] zdá tou nejpřijatelnější.

Reference

[1] Baker K. A., Pixley A. F. : *Polynomial Interpolation and the Chinese Remainder Theorem for Algebraic Systems*, Springer-Verlag, Math. Zeitschrift 143 (1975) 165-174.

[2] Denecke K., Wismath S. L. : *Universal algebra and applications in theoretical computer science*, Chapman & Hall/CRC, 2002, ISBN 1-58488-254-9.

[3] Grabisch M., Marichal J. L., Mesiar R., Pap E. : *Aggregation functions*, Cambridge: Cambridge University Press New York, 2009, ISBN 978-0-521-51926-7.

[4] Halaš R., Pócs J. : *On the clone of aggregation functions on bounded lattices*, Information Sciences 329 (2016) 381–389.

[5] Halaš R., Pócs J. : *A new generating set of the clone of aggregation functions on bounded lattices*, rukopis.

[6] Chajda I. : *Teorie svazů a universální algebra*, Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2013, ISBN 978-80-244-3914-3.

[7] Chajda I., Länger H. : *Horizontal sums of bounded lattices*, Mathematica Pannonica 20/1 (2009), 1-5.

[8] Kerkhoff S. : *A Generalized Version of the Baker-Pixley Theorem*, Communications in Algebra 42(6), 2014, 2544-2558.

[9] Kerkhoff S. : *A General Galois Theory for Operations and Relations in Arbitrary Categories*, Algebra Universalis 68(3), 2012, 325-352.

[10] Lau D. : *Functions Algebras on Finite Sets: A Basic Course on Many-Valued Logic and Clone Theory*, Berlín: Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2006, ISBN 978-3-540-36022-3.

Seznam obrázků

Seznam tabulek