Univerzita Hradec Králové

Přírodovědecká fakulta

Katedra matematiky

Normální a Studentovo rozdělení

Bakalářská práce

Autor: Dana Libotovská

Studijní program: B 1103 Aplikovaná matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Vedoucí práce: Mgr. Jitka Kühnová, Ph.D.

Hradec Králové květen 2015

Univerzita Hradec Králové

Přírodověděcká fakulta

Zadání bakalářské práce

Autor:	**Dana Libotovská**
Studijní program:	B 1103 Aplikovaná matematika
Název práce:	Normální a Studentovo rozdělení
Název práce v AJ:	The Normal and Student distribution
Cíl a metody práce:	Normální rozdělení a Studentovo rozdělení patří mezi jedny z nejdůležitějších a nejvíce používaných spojitých rozložení. Normální rozdělení se nazývá též Laplaceovo-Gaussovo podle německého vědce Carla Friedricha Gausse a francouzského vědce Pierra Simona Laplace. Studentova t-rozdělení popsal angličan William Sealy Gosset. Cílem této práce je přiblížit nejen samotná rozdělení, jejich využití, ale i jejich historii a život jejich autorů.
Garantující pracoviště:	Katedra matematiky Přírodovědecké fakulty UHK
Vedoucí práce:	Mgr. Jitka Kühnová, Ph.D.
Konzultant:	
Oponent:	RNDr. Michal Čihák, Ph.D.
Datum zadání práce:	11. 4. 2014
Datum odevzdání práce:	

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny prameny, z kterých jsem vycházela.

V Hradci Králové dne 11. 5. 2015 Dana Libotovská

Poděkování

Tímto bych chtěla poděkovat své vedoucí bakalářské práce Mgr. Jitce Kühnové, Ph.D. za odborné vedení a cenné rady.

Anotace

LIBOTOVSKÁ, Dana. *Normální a Studentovo rozdělení.* Hradec Králové, 2015. Bakalářská práce na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové. Vedoucí bakalářské práce Mgr. Jitka Kühnová, Ph.D. 55 s.

Normální rozdělení a Studentovo rozdělení patří mezi jedny z nejdůležitějších a nejvíce používaných spojitých rozložení. Normální rozdělení se nazývá též Laplaceovo-Gaussovo podle německého vědce Carla Friedricha Gausse a francouzského vědce Pierra Simona Laplace. Studentova t-rozdělení popsal angličan William Sealy Gosset. Cílem této práce je přiblížit nejen samotná rozdělení, jejich využití, ale i jejich historii a život jejich autorů.

Klíčová slova

historie, normální rozdělení, Studentovo rozdělení

Annotation

LIBOTOVSKÁ, Dana. *The Normal and Student distribution.* Hradec Králové, 2015. Bachelor Thesis at Faculty of Science University of Hradec Králové. Thesis Supervisor Mgr. Jitka Kühnová, Ph.D. 55 p.

Normal distribution and Student distribution are among the most important and most widely used continuous distribution. The normal distribution is also called Laplace-Gauss by the German scientist Carl Friedrich Gauss and the French scientist Pierre-Simon Laplace. Student's t-distribution was described by Englishman William Sealy Gosset. The aim of this paper is to explain not only the division, its use, but also their history and the lives of their authors.

Keywords

history, normal distribution, Student distribution

Obsah

Úvod

Jako téma své bakalářské práce jsem si vybrala normální a Studentovo rozdělení, se kterými jsem se setkávala během svého studia. Ovšem zaměřila jsem se především na jejich historii a vědce, kteří za nimi stály.

Normální rozdělení patří mezi nejdůležitější a nejpoužívanější spojitá rozdělení vůbec. Někdy se též nazývá Laplaceovo-Gaussovo, podle francouzského matematika a fyzika Pierra Simona de Laplace a německého matematika a astronoma Carla Friedricha Gausse. Nicméně, jak se později dozvíte, již před Laplaceem a Gaussem popsal normální rozdělení ještě jeden francouzský matematik. Studentovo rozdělení je odvozené od normálního rozdělení. Někdy se pro něj používá též značení t-rozdělení. Jeho historie je spjata s osobností Williama Sealyho Gosseta, pivovarníka z Anglie.

V první kapitole bude přiblížen život i práce výše uvedených matematiků. V další kapitole bude zavedena náhodná veličina, spojitá i diskrétní, náhodný vektor a náhodný výběr. Následuje kapitola o normálním rozdělení, jeho historii, podobě, standardizaci a rozděleních, které z něho vychází. Seznámíme se s centrální limitní větou a se Studentovým rozdělením.

Nakonec se vrátíme k náhodnému výběru a ukážeme si, jak rozdělení výběrových průměrů můžeme aproximovat právě k normálnímu rozdělení.

Veškeré ilustrace byly nakresleny dle předlohy a všechny grafy byly vytvořeny v programu GeoGebra. Práce je vysázena systémem LaTeX.

Kapitola 1

Významní vědci v historii normálního a Studentova rozdělení

Normálním rozdělením se v minulosti zabývalo mnoho vědců. My si ovšem přiblížíme jen ty nejdůležitější, a to nejen z hlediska jejich vědecké práce, ale budeme se zabývat i jejich životy. Kromě nich si přiblížíme i hlavního strůjce Studentova rozdělení.

1.1 Carl Friedrich Gauss

Než se dozvíme něco o Carlu Friedrichovi, měli bychom si trochu přiblížit jeho předky. Roku 1710 se Gaussův děd přestěhoval do Brunšviku, kde se živil zahradničením, především zelinářstvím. V roce 1744 se narodil Gerhard, otec Carla Friedricha. Stal se řemeslníkem, ale dostalo se mu mnohem lepšího vzdělání, než bylo u tehdejších řemeslníků obvyklé. Vyznal se jak v mechanice, tak i v počtech. Byl nejdříve městským správcem vodárny, tzv. wasserkunst meistr, později se stal účetním a pokladním životní pojišťovny (přesněji pohřebního spolku brunšvického).

Děd z matčiny strany Christoph Benze ze vsi Velpke byl kameníkem, při jehož práci jsou nutné geometrické znalosti. Měl syna Friedricha, který se stal tkalcem a protože měl šikovné ruce, vyráběl si sám různé přístroje. Carl Friedrich měl velikou úctu ke strýcovým dovednostem a nazýval ho rozeným géniem.

Roku 1741 se narodila Dorothea, matka našeho Carla Friedricha.[29] V roce 1769 se přestěhovala do Brunšviku. Dorothea vyni-

Obrázek 1.1: Carl Friedrich Gauss

kala svou dobromyslností a moudrostí. Seznámila se s Gerhardem Gaussem a v roce 1776 se za něj provdala. Rok na to, 30. dubna 1777 mu porodila syna, jemuž bylo dáno jméno Johann Friedrich[1]. A v tom jediném potomku se soustředilo všechno matematické nadání, které bylo v obou rodinách. Jak sám Gauss později vtipně vypravoval, uměl dříve počítat než mluvit.

Jeho otec, který měl jednoho léta vyplácet mzdu dělníkům za přesčas, vypočítal podle jednotlivých hodin, co by měl každý jednotlivec dostat. Když však před svým malým synem oznámil svůj výsledek dělníkům, Carl Friedrich se ozval, že je výsledek vypočítán chybně a pověděl otci zcela jistě, co by mělo vyjít. Překvapený otec počítal znovu a byl zahanben, protože zjistil, že jeho tříleté dítě mělo pravdu.

Stejně zajímavý je případ, který se mladému počtáři přihodil, když v obecné škole v roce 1786 postoupil do počtářské třídy. Při matematické kompozici tu byl zaveden systém, kdy se kompozice odevzdávaly učiteli na stůl popořádku, jak byl kdo hotov, aby byla posouzena nejenom správnost, ale i rychlost a zběhlost v počítání matematických příkladů. Při první kompozici, ve které se jednalo o součet řady čísel od 1 do 100, sotva řekl učitel J. G. Büttner znění úlohy, měl již Gauss výsledek vypočítán a první položil kompozici učiteli na stůl se slovy: *„Ligget se!“ (Tu leží!).*[27] Zbytek času klidně seděl v lavici sledovaný nedůvěřivými zraky svého učitele i jeho asistenta Martina Bartelse. Gauss přišel na jednoduchý výpočet této řady. Všiml si totiž, že vždy součet opačných prvků z řady dá pokaždé stejný součet, tedy: $1 + 100 = 101$, $2 + 99 = 101$, atd. což nakonec dá součin $50 \cdot 101 = 5\,050$.[29] Bylo po kompozici a Gaussova odpověď byla samozřejmě správná. Brzy sám pan učitel uznal, že se od něj Gauss nemůže naučit ničemu novému a objednal mu z Hamburku knihu, v níž by mohl samostudiem dál pokračovat.

V době, kdy měli žáci problémy s obyčejnou násobilkou, Gauss již ovládal Newtonovu binominální poučku, ovládal nekonečné řady a přechod na diferenciální a integrální počet mu nedělal žádné problémy.

Roku 1788 začal chodit na gymnázium ve svém rodném městě, kde byl hned zařazen do druhé třídy díky svým rozsáhlým znalostem. Zde se rychle naučil Cicerův sloh, který je znát v Gaussových latinských spisech. Vedle toho se zdokonaloval v matematice tak, že se brzy po městě a okolí roznesla pověst o jeho neobyčejných znalostech a dovednostech.

Roku 1791 přičiněním státního rady Zimmermanna a tajného rady Feronce bylo zjednáno divotvornému počtáři slyšení u dvora vévody brunšvického, Karla Wilhelma Ferdinanda, který poznal, jaký génius v Gaussovi dřímá a dle zásluhy ho ocenil. Získal nejen uznání, ale vévoda se stal Gaussovým mecenášem. Proto se Gauss mohl bezstarostně oddat svým milovaným studiím, aniž by byl nucen přihlížet ke skromným prostředkům svého otce.

Po ukončení školy nastoupil v roce 1792 na collegium Carolinum, kde se zdokonaloval nejen v klasických a moderních jazycích, ale ukončil zde svá matematická studia, probráním klasických Newtonových, Eulerových a Lagrangeových spisů.

V roce 1795 přestoupil na univerzitu v Göttingenu, kde se zabýval studiem filologie, ovšem úspěchy, které měl v matematice, rozhodly brzy nadobro. 30. března 1796, kdy mu ještě nebylo ani 20 let, se mu podařila geometrická konstrukce sedmnáctiúhelníku jen pomocí pravítka a kružítka. *Význam tohoto objevu není ve výsledku, ale v důkazu, který spočíval v hluboké analýze rozkladu polynomů na činitele, jenž otevřel dveře pozdější Galoisově teorii.*[1] Výsledek zveřejnil ve svém monumentálním díle Disquisiones Arithmeticæ[2]. Gaussův počin

[1] Ještě roku 1792 se podepsal do matriky collegium Carolinum Johann Friedrich Carl Gauss aus Braunschweig. Později již své první jméno vynechával z neznámých důvodů.

[2] Aritmetické výklady

byl milníkem, jelikož od dob Eukleida se to nikomu nepodařilo.

Mnoho matematiků se již po tisíce let snažilo o sestrojení pravidelných n-úhelníků pomocí pravítka a kružítka. Dokázali sestrojit n-úhelníky, kde n je násobkem tří, pěti a mocnin čísla 2. Gauss k tomuto výčtu přidal další mnohoúhelníky, konkrétně s počtem stran ve tvaru $F_k = 2^{2^k} + 1$, kde $k \in \mathbb{N}$. Několik prvních takto vzniklých čísel je: $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65\,357$, $F_5 = 4\,294\,967\,297$.[3] V roce 1832 byl sestrojen 257úhelník.[24]

Když v roce 1798 ukončil svá univerzitní studia, vrátil se do Brunšviku, kde se připravoval na doktorát z filozofie, která se považovala za závěrečnou zkoušku na německých univerzitách.

Matematická dizertace, kterou v roce 1797 předložil na Helmstädtské univerzitě, podala důkaz základní věty algebry.[4] *Gaussův důkaz, třebaže ne příliš přesvědčivý, byl pozoruhodný svou kritikou dřívějších pokusů. Později zveřejnil další tři důkazy tohoto důležitého výsledku, poslední na padesáté výročí prvního, což svědčí o tom, jaký význam tomuto tématu přikládal.*[1] Základní věta algebry má hned několik verzí, z nichž jedna zní, že každý polynom čili mnohočlen stupně $n \geq 1$ s reálnými nebo komplexními koeficienty má n reálných nebo komplexních kořenů. Jinak vyjádřeno, pro každý polynom $P(x)$ n-tého stupně, existuje n hodnot x_i, pro něž platí $P(x_i) = 0$. Polynom n-tého stupně má tvar

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad \text{kde } a_n \neq 0$$

Gauss na svůj první důkaz přišel v roce 1797. Jeho důkaz se zaměřoval na polynomy s reálnými koeficienty. Podle dnešních měřítek nebyl Gaussův důkaz zcela kompletní, protože se v něm spoléhá na spojitost některých křivek, proti všem předchozím pokusům to ale bylo výrazným zlepšením.[24]

Po formálním zakončení svých studií začal pracovat na svém díle, které by mu zaručilo slávu, kdyby náhodou nic jiného nenapsal. Jedná se o teorii čísel, kterou začal sestavovat v roce 1795 a v roce 1801 byl spis vydán. Název „Disquisitiones arithmeticæ“[5] značil velmi objemný spis. Ovšem v této době bylo opravdu málo matematiků, kteří dokázali tento originální spis oplývající tolika novými výzkumy číst a proniknout do něho. *Kniha začíná prvním pojednáním o modulární aritmetice, pak zevrubně probírá řešení kvadratických polynomů dvou proměnných v oboru celých čísel a končí teorií faktorizace.*[1] O tomto klíčovém díle Stephen Hawking napsal: „*Když Gauss začal pracovat na svých epochálních Disquisitiones Arithmeticæ, byla teorie čísel pouze souborem izolovaných poznatků... V Disquisitiones zavedl pojem kongregace, jímž teorii čísel sjednotil.*“[24] Jak řekl matematik Leopold Kronecker, „*ohromující je už jen pomyslet na to, že jediný člověk v tak mladém věku dokázal vytvořit tak hluboké a skvěle uspořádané pojednání o celé nové disciplíně.*“[24] Gaussův přístup k předkládání vět následovaných důkazy, důsledky a příklady, jak jej předvedl v Disquisitiones Arithmeticæ, napodobili i další matematici, kteří přišli po něm. Disquitiones byly počátkem, z něhož v 19. století vycházela práce řady předních badatelů v teorii čísel.[24]

Nicméně Gauss se tehdy dostal do povědomí široké veřejnosti díky výpočtu dráhy asteroidu Ceres, kterou původně objevil v roce 1800 italský astronom Giusseppe Piazzi. *Tento objev vzbudil senzaci, ale asteroid zmizel za Sluncem dříve, než bylo možné provést dostatek pozorování na to, aby se s dostatečnou přesností dala vypočítat jeho oběžná dráha a aby se dalo určit, kde se asteroid znovu vynoří. O čest ho znovu najít soutěžilo mnoho astronomů, ale zvítězil Gauss.*[1] Gauss byl schopen dokázat správnost své metody v roce 1809 díky

[3]Takto vytvořená čísla jsou známá jako Fermatova a nemusí to být vždy prvočísla.

[4]Matematické tvrzení říkající, že každý polynom v oboru komplexních čísel musí mít alespoň jeden kořen.

[5]„Aritmetické výklady“

normálnímu rozdělení chyb. Normální rozložení bylo popsáno už dříve v roce 1805 matematikem Adrien-Marie Legendrem[6], ale Gauss tvrdil, že jej využíval už od roku 1795. *Gauss skutečně používal normální rozdělení a byl považován za jeho objevitele. Ale v roce 1908 anglický statistik Karl Pearson nalezl historické spisy, dokazující, že normální rozdělení ve skutečnosti objevil již o století dříve anglický matematik Abraham de Moivre.*[8]

V roce 1802 bylo Gaussovi nabídnuto, aby dělal ředitele hvězdárny v Petrohradě, to však odmítl, raději zůstal ve své vlasti, kde mu bylo vévodou nabídnuto 400 tolarů ročně a tak mohl dále pracovat podle své libosti. Když pak byl vévoda brunšvický poslán jako diplomat do Petrohradu a zjistil, jak si tam génia Gausse cení a chtějí ho pro sebe získat, plat mu ještě zvýšil.

Tato doba pobytu Gausse v rodném městě patří k nejlepším v jeho životě. V roce 1805 se oženil. Vzal si Johannu Ostrofovu, s níž se důvěrně znal již několik let a blaženě s ní žil do roku 1809, kdy bohužel zemřela.

Roku 1807 se stal profesorem astronomie a také ředitelem hvězdárny ve městě Göttingen. Na tomto místě působil až dokonce svého života. V této době byla uveřejněna tzv. „metoda nejmenších čtverců“ spočívající v minimalizaci chyb měření, na níž se zakládal Gaussův úspěch při určování planetárních drah.

Původně sepsal toto dílo v němčině, avšak po naléhání nakladatele Perthese, který ho chtěl vydat ve francouzštině, kvůli většímu odbytu, Gauss přeložil spis alespoň do latiny. Dne 28. března 1809 dokončil k tomuto epochálnímu dílu předmluvu a dal mu název „Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientum“.[7] Uveřejnění tohoto spisu naplnilo celý hvězdářský svět novým obdivem. Diplomy pro Gausse se hrnuly ze všech učených společností z celého světa.

Do této slávyplné doby připadá i smutná rodinná událost. Dne 10. září 1809 porodila Gaussova žena Johanna třetí dítě, avšak den po porodu zemřela. Gauss ale dlouho vdovcem nebyl. Za necelý rok, 4. srpna 1810, si vzal za ženu Minu, dceru tamního dvorního rady Waldecka. Mina byla důvěrnou přítelkyní zesnulé Johanny a znala dobře rodinné poměry a dokázala znovu upevnit rodinné blaho.

Gauss si po svatbě oblíbil život v Göttingenu. Odmítl nabídku práce v Berlíně, kam ho chtěli povolat, aby oživil slávu tamní univerzity. Göttingen vábil všechny hvězdáře, kteří se zde chtěli naučit novým metodám v pozorování i počítání drah. Na podzim roku 1816 se přestěhoval náš ředitel do nové hvězdárny. Řídil ji a tvořil zde až do konce svého života.

Gauss přijal výzvu, aby prováděl pozorování v oblasti Hannoveru, a kvůli tomuto výzkumu pobýval často v terénu. Tento projekt, který probíhal mezi lety 1818–1832, narážel na mnohé problémy, ale současně vedl k četným novým poznatkům a technologickému vývoji. Jako jeden z výsledků tohoto projektu Gauss vymyslel heliotrop.[8]

Podnikal mnoho cest po Německu za vědci a účastnil se různých výzkumů. V roce 1828 poznal při svém pobytu v Berlíně fyzika Wilhelma Webera[9]. Gausse velice zaujaly jeho magneticko-elektrické práce. V roce 1833 vydal pojednání o měření absolutní intenzity zemského

[6] Adrien-Marie Legendre byl francouzský matematik narozen v polovině osmnáctého století. Přispěl k rozvoji statistiky, teorie čísel matematické a analýzy a abstraktní algebry.

[7] „Teorie pohybu nebeských těles obíhajících po eliptických drahách kolem Slunce“

[8] Zrcadlový přístroj vrhající sluneční paprsky daným směrem na velkou vzdálenost. Používá se k signalizaci dalekých měřických cílů.[4]

[9] Wilhelm Eduard Weber byl něm. fyzik, profesor na universitě v Göttingenu. Byl členem Královské společnosti v Londýně a francouzské akademie. Zabýval se elektrickými a magnetickými jevy. Určil rychlost světla.[4]

magnetismu. Rok na to sestrojil s Weberem první elektrický telegraf, jenž byl roku 1837 upraven Steinheilem pro širší použití. V roce 1839 vydal své třetí fundamentální dílo „Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus“[10], tedy všeobecnou teorii magnetismu.

Neustával ve své práci ani s přibývajícím věkem. Každý den si ovšem našel čas na odpočinek. Mezi jedenáctou hodinou a jednou chodil do čtenářského muzea, kde udržoval spojení se všemi svými známými a s pomocí novin i s okolním světem.

Bohužel postupem času umírali jeho staří přátelé (Olbers, Bessel, Schumacher, Goldschmiedt a jiní). Všichni ctitelé jeho génia opouštěli pozemský svět, jen on, nejslavnější z nich, žil.

Teprve koncem roku 1854 se dostavily příznaky nemoci, na důkaz toho, že ani on není nesmrtelný. Nemoc začala otokem nohou a s postupem času se zhoršila. Duševně byl ještě čilý, ale nemoc ho přesto pokořila. 23. února ráno v 1 hodinu a 5 minut se navždy zastavilo jeho srdce skoro současně s jeho hodinkami. *Gausse není více! Rozlehlo se smutným hlasem po celém vzdělaném světě: Gauss bude věčně žíti! Bylo hlasu tohoto jasnou ozvěnou.* [27]

Gauss považoval svůj sedmnáctiúhelník i ve starším věku za svůj největší úspěch a žádal, aby byl vytesán na jeho hrobě. Kameník to podle legendy odmítl s tím, že tak obtížně sestrojený obrazec by se v konečném výsledku prakticky nelišil od kružnice.

Obyčejně se lidé domnívají, že matematici bývají nudní, dokonce bezcitní a nepřístupní. Co je na tom pravdy teď nebudeme rozebírat, ovšem Gauss byl velmi jemnocitný a především jeho rodina mu byla nadevše. Jeho něžná starost o matku, která u něj na hvězdárně posledních 22 let bydlela, mohla být vzorem pro každého syna. Staral se i o blaho všech svých dětí, jichž měl z prvního i druhé manželství po třech, vždy dva syny a jednu dceru. I o vnoučata se staral víc, než bylo zvykem.

Přátelství Gauss nevyhledával, ale pokud si někdo získal jeho sympatie, byl mu přítelem v pravém slova smyslu až do smrti. Byl prostě milý a obětavý. Jeho největšími přáteli byli astronom a geodet Heinrich Christian Schumacher a fyzik Wilhelm Weber. Jen se Schumacherem si vyměnil nad 2 500 dopisů.[27]

Gauss nevyhledával žádné zábavy ani hlučná povyražení. Nejraději pracoval ve své hvězdárně, ale svůj čas rovnoměrně rozděloval mezi rodinu, psací stůl a observatoř. Co se týče zábav ryze duševních, měl rád zejména čtení rozmanitých spisů, především krásné literatury. Oblíbil si německého spisovatele Jeana Paula[11] pro bohatost myšlenek, hloubku citu a jeho humor. Později četl i anglickou literaturu, zejména Waltera Scotta[12], jehož díla znal dopodrobna.

Ve věku 62 let se rozhodl naučit se rusky. Provedl to pomocí slovníku a gramatiky tak rychle, že brzy dokázal číst prózu i poezii. Vedl skoro celou korespondenci s Petrohradem v ruštině a velice rád se bavil s Rusy, kteří zavítali do Göttingenu, v jejich rodném jazyce.

Gauss byl velice nábožensky založený, věřil v nesmrtelnost duše a nejvyšší božskou spravedlnost.

Nestaral se o vyznamenání, i když za žádné nezapomněl slušně poděkovat. Dokonce byl schopný napsat i dva nebo tři dopisy Schumachrovi, aby se dozvěděl, zda ten či onen, komu chtěl poděkovat za vyznamenání, se oslovuje „Excellenz“ či ne. Nestaral se ani o zvučné a

[10]„Obecná teorie zemského magnetismu“

[11]Jean Paul, vl. jm. Johann Paul Friedrich Richter byl něm. spisovatel, který se proslavil zejména humoristickými romány a povídkami.[4]

[12]Sir W. Scott byl skotský romantický básník a prozaik. Autor románů ze skotských, anglických i evropských dějin, jimiž začal tradici evropských historických románů jako Waverley, Rob Roy, Ivanhoe atd.[4]

čestné tituly, kterých měl tedy požehnaně.[13] Nestaral se ani o peníze. Byly mu nabízeny různé posty s větším platem, ale on raději zůstal ve své milované hvězdárně.

Gauss byl nejenom velice nedostižný génius, ale také velice slušný a skromný člověk.

1.2 Abraham de Moivre

Abraham de Moivre se narodil 26. května 1667 ve Vitry-le-François, v oblasti Champagne, který je asi v půli cesty mezi Paříží a Nancy. Jeho otec, Daniel de Moivre, byl chirurgem. Rodina nebyla nějak zvlášť bohatá, ale stálý příjem v té době znamenal hodně. De Moivreovi rodiče byli protestanti. Nejdříve tedy navštěvoval katolickou školu ve Vitry, která byla velmi nábožensky tolerantní vzhledem k vypětí, které panovalo ve Francii. Když mu bylo jedenáct, rodiče ho poslali na protestanskou akademii do Sedanu. Po několika letech zde, studoval další 2 roky logiku v Saumuru, kde se mu do rukou dostalo i pár matematických spisů, i když matematika nebyla jeho oborem. V roce 1684 odešel do Paříže, kde studoval fyziku na Collége de Harcourt a soukromě ho z matematiky doučoval Jacques Ozanam.[26]

Obrázek 1.2: Abraham de Moivre

Když v roce 1685 Ludvík XIV. ediktem z Fontainebleau zrušil edikt nantský, prohlásil tím protestanské náboženství nezákonným. Hugenoti se stali předmětem perzekucí, byli pronásledováni a terorizováni. De Moivre byl uvězněn kvůli své víře v opatství St. Martin, ale životopisci se rozcházejí v délce jeho pobytu zde. Posléze emigroval do Anglie, kde strávil 66 let svého života.[26] Po příjezdu do Londýna se stal soukromým učitelem matematiky. Docházel za svými studenty domů nebo se s nimi setkával v londýnských kavárnách.

De Moivre se dál věnoval studiu matematiky po návštěvě Williama Cavedishe, hraběte z Devonshiru , u něhož viděl Newtonovu knihu Principia Mathematica.[17] Už při přečtení prvních stran pochopil, že je tento spis mnohem hlubší než ostatní knihy, co dřív četl. Protože

[13] Jeho úplný titul zněl: Tajný dvorní rada, komandér řádu Dannebrogského, rytíř řádu Guelfického, francouzského řádu čestné legie, pruského řádu pro civilní zásluhy a řádu hvězdy severní, profesor a ředitel hvězdárny v Göttingenu, člen společnosti nauk v Göttingenu, Londýně, Kodani, Praze, Upsale, člen akademie věd v Berlíně, Neapoli, Paříži, Mnichově, Stockholmu, Palermu, Bologni, Turíně, Brusselu, Petrohradě, člen společnosti „socie italiana“, společnosti přírodovědecké v Marburgu, astronomické v Londýně, umělecké v Edinburghu, fyzikální v Cambridge a Frankfurtu, matematické v Hamburku, literárně-vědecké v Kurlandu, Athenea ve Florencii, královského Institutu holanského, americké akademie pro vědy a umění atd.[27]

neměl moc volného času, vytrhal z knihy listy, ty nosil po kapsách a pročítal si je mezi jednotlivými lekcemi matematiky, které dával svým studentům.

Roku 1692 se seznámil s Edmundem Halleym, který byl v té době náměstkem ministra Královské společnosti, a brzy poté se setkal s Newtonem, se kterým se spřátelil.[17][26] V roce 1697 byl zvolen členem Královské společnosti. V roce 1710 byl de Moivre jmenován do komise ustavené Královskou společností, která měla rozhodnout spor o prvenství objevu diferenciálního a integrálního počtu mezi Isaacem Newtonem a Gottfriedem Wilhelmem Leibnizem. Jeho jmenování do komise ale souviselo s jeho přátelstvím s Isaacem Newtonem.

De Moivre byl průkopníkem v analytické geometrii a v teorii pravděpodobnosti. V roce 1718 publikoval práci „The Doctrine of Chance: A method of calculating the probabilities of events in play“[14]. Definice statistické nezávislosti jevů se objevila v jeho knize v souvislosti s řadou problémů týkajících se vrhání kostek a jiných her. Jeho objevem jsou také statistiky úmrtnosti a objev teorie úrokového počtu.

Vydání The Doctrine of Chance z roku 1756 obsahovalo to, co bylo pravděpodobně největším Moivreovým přínosem do oblasti pravděpodobnosti a statistiky, a to aproximace binomického rozdělení podle normálního rozdělení v případě velkého počtu pokusů.[26] De Moivre nejprve publikoval tento výsledek v latinské brožuře 13. listopadu 1733. Moivreovým cílem bylo zlepšit Bernoulliho zákon velkých čísel. Práce obsahuje:

„*... první výskyt normálního pravděpodobnostního integrálu. Objevil ho, i když nedokázal pojmenovat parametr, který se nyní nazývá směrodatná odchylka ...*“[3]

De Moivre proslul vzorcem

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx).[2]$$

Tento vzorec je znám jako Moivreova věta, a platí pro libovolné komplexní číslo x a libovolné celé číslo n.[26]

Přes značný de Moivreův vědecký přínos byla jeho hlavním zdrojem příjmů soukromá výuka matematiky. Uvádí se, že byl pravidelným zákazníkem Slaughterovy kavárny, která se nacházela v St. Martin's Lane na Cranbourn Street, kde získával nějaké peníze z hraní šachů. V zoufalé snaze získat křeslo na univerzitě v Cambridge požádal Leibnize přes Johanna Bernoulliho, aby ho písemně podpořil u vedení Cambridgeské univerzity. Bernoulli tak učinil v roce 1710, vysvětlil Leibnizovi, jaký de Moivre žije mizerný život v chudobě. Vlastně Leibniz se setkal s de Moivrem už dříve, když byl v Londýně v roce 1673, a pokusil se získat profesuru pro de Moivra v Německu, ale bez úspěchu. Dokonce i jeho vlivní angličtí přátelé, jako Newton a Halley, mu nemohli pomoci získat univerzitní post. Přinejmenším za to mohl z části i jeho francouzský původ.

De Moivre pokračoval ve studiu pravděpodobnosti a matematiky až do své smrti v roce 1754. Pár jeho spisů bylo zveřejněno až po jeho skonu. Čím byl starší, tím se stával letargičtějším a potřeboval delší dobu ke spánku. Všiml si, že spal navíc 15 minut každý den a díky tomuto faktu správně spočítal datum své smrti, jako v den, kdy doba jeho spánku překročí 24 hodin, tedy 27. listopadu 1754.[3] Zemřel v Londýně a jeho tělo bylo pohřbeno v kostele St Martin-in-the-Fields, později bylo jeho tělo přestěhováno.

[14] Teorie pravděpodobnosti: Způsob výpočtu pravděpodobnosti událostí ve hře

1.3 Pierre Simon, markýz de Laplace

Obrázek 1.3: Pierre Simon de Laplace

Pierre Simon byl synem venkovského zemědělce Pierra de Laplace a Marie Anny Sochon, kterou si Pierre de Laplace vzal, ve svých 26 letech, 6. června 1744. Pierre Simon se narodil jako čtvrté z pěti dětí, 23. března 1749 v Beaumontu-en-Auge v Normandii. Měl starší sestru Marii Annu a mladšího bratra Olivera. Starší dvojčata Jacques Pierre a Julie Marguerite bohužel zemřela, když Pierru Simonovi byly 2 roky. V 8 letech přišel i o svou matku.[15]

Jako malý chodil do benediktinské školy v Beaumontu-en-Auge, jelikož si jeho otec přál, aby se stal knězem. Už tady se projevilo jeho nadání na matematiku. V roce 1766 nastoupil na univerzitu v Caen na teologickou fakultu, ale namísto studia na univerzitě se roku 1768 přestěhoval do Paříže. Zdá se tedy, že nikdy nezískal titul. Na univerzitě, byl vyučován dvěma nadšenými učiteli matematiky, Christophem Gadbledem a Pierrem Le Canuem, kteří mu otevřeli oči a probudili jeho zanícení pro matematiku.[15] Do Paříže dorazil s doporučujícím dopisem, který byl adresován Jeanu Le Rondovi d'Alembertovi. Tehdy bylo Laplacemu pouhých 20 let. D'Alembert mu pomohl získat profesuru na École Royale Militaire, kde učil v letech 1769–1776.[1] Měl na starost výuku geometrie, trigonometrie, základní analýzy a statistiky mladistvým kadetům z dobrých rodin.[14]

Laplace začal brzy vydávat své vlastní matematické spisy. Jeho počáteční prací byl spis z 28. března 1770, který pojednával o minimech a maximech funkcí. Hned následující spis z 18. července 1770 pojednával o diferenčních rovnicích.[14]

V roce 1773 získal Laplace přidružené členství ve Francouzské akademii věd.[1] V roce 1780 Laplace a chemik Antoine-Laurent Lavoisier aplikovali kvantitativní metody na porovnání živých a neživých systémů a dokázali pomocí kalorimetru, který předtím vynalezli, že dýchání je formou spalování. Laplace se pak vrátil k bádání na poli astronomie, zkoumal planetární odchylky, vzájemné gravitační působení planet jako celek a v roce 1786 dokázal, že to, jak se oběžné dráhy planet od sebe vzdalují nebo se k sobě přibližují, vždy zůstane malými, stabilními odchylkami, které se zase opraví. Účinky odchylek jsou proto mírné a stabilní, nikoli rostoucí a ničivé.

Poslední zdánlivou anomálii v teoretickém popisu sluneční soustavy odstranil v roce 1787, když prohlásil, že zrychlení Měsíce závisí na excentricitě oběžné dráhy Země. Třebaže střední pohyb Měsíce kolem Země závisí především na jejich vzájemné gravitační přitažlivosti, poněkud se zmenšuje působením Slunce na Měsíc. Z teoretického popisu sluneční soustavy tak zmizela poslední hrozba nestability.

Roku 1796 Laplace publikoval pojednání „Exposition du systéme du monde“[15], částečně populární stať o své práci na poli nebeské mechaniky. Kniha obsahovala „mlhovinnou nebulární hypotézu“, která viděla původ sluneční soustavy v ochlazování a smršťování plynné mlhoviny, což silně ovlivnilo budoucí názory na původ vesmíru. V roce 1773 začal pracovat na významném životním díle, inspirovaného Newtonem. „Traité de mecanique céleste“[16], která vyšla v pěti svazcích v letech 1798–1827, shrnovala výsledky získané jeho matematickým vývojem a využitím gravitačního zákona. Pustil se do řešení obtížného úkolu: proč se zdá, že se oběžná dráha Jupiteru neustále smršťuje, zatímco oběžná dráha Saturnu se v jednom kuse rozpíná. *Vzájemná gravitační interakce těles sluneční soustavy byla tak složitá, že matematické řešení se jevilo jako nemožné; i sám Newton (1642–1727) dospěl k závěru, že to, aby byla zachována rovnováha soustavy, opakovaně vyžaduje Boží zásah. Laplace pak přišel s teorií neměnnosti středních vzdáleností planet (průměrnou úhlovou rychlostí). V témže roce předložil ucelenou mechanickou interpretaci sluneční soustavy, když ukázal metody pro výpočet pohybů planet, jejich měsíců a jejich odchylek včetně řešení problému přílivu a odlivu moře. Díky této knize se stal slavným.*[1]

15. května 1788 se oženil s Marií Charlotte de Courty de Romanges. Narodily se jim dvě děti. Před Velkou francouzskou revolucí zastával velice lukrativní místo „zkoušejícího pro královské dělostřelectvo“. V této funkci měl to potěšení zkoušet slibného sedmnáctiletého mladíka jménem Napoleon Bonaparte.[23] Patrně proto, že nezastával vyhraněné politické názory a nepatřil k aristokracii, unikl za Francouzské revoluce uvěznění a popravě. Dost mu také pomohlo, že se přiznal k „nepřekonatelné nenávisti ke královské rodině.“[23] Byl prezidentem Komise pro zeměpisné měření[17], pomáhal při organizaci metrického systému, pomáhal založit vědeckou Arcueilskou společnost a stal se markýzem. Šest týdnů sloužil jako ministr vnitra v Napoleonově vládě; ten vzpomínal, že Laplace *„vnesl do vlády ducha nekonečně malých veličin“*.[1]

Prvním významným pojednáním o pravděpodobnosti, které propojuje teorii pravděpodobnosti a kalkulus byla „Théorie analytiqui des probablités“[18]. První vydání, které vyšlo v roce 1812, Laplace věnoval „Velkému Napoleonovi“. Ve vydání z roku 1814, kdy se k moci ve Francii opět dostali Bourboni, napsal *„pád impéria, které chtělo získat nadvládu nade všemi, mohl být s velkou pravděpodobností předpovězen každým, kdo je zběhlý v pravděpodobnostním počtu.“*[23] V tomto pojednání se zabývá metodami nalezení pravděpodobnosti složeného jevu z pravděpodobností jeho složek metodou nejmenších čtverců nebo Buffonovou jehlou[19] spolu s řadou jejich praktických aplikací.

Stephen Hawking nazval „Théorie analytiqui des probablités“ „mistrovským kusem“ a dodal: *„Laplace zastával názor, že svět je deterministický a že v něm žádné pravděpodobnosti neexistují. Pravděpodobnosti jsou pouze důsledkem našeho nedostatečného poznání.“*[24]

K objasnění toho, jak pravděpodobnostní procesy vedou k předvídatelným výsledkům, Laplace uvádí příklad, kdy je několik nádob umístěných dokola. V jedné nádobě jsou jen bílé míčky, ve druhé jen černé a v ostatních je různý poměr černých a bílých míčků. Jestliže z jedné nádoby vytáhneme jakýkoli míček a vhodíme ho do sousední nádoby a pokračujeme

[15] „Soustava světa“

[16] „Nebeská mechanika“

[17] Board of Longitude

[18] Analytická teorie pravděpodobnosti

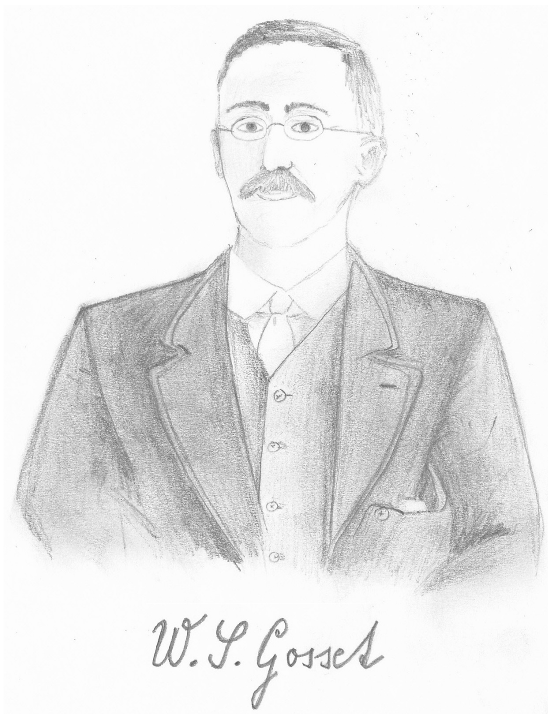
[19] Francouzský přírodovědec, matematik a osvícenský spisovatel Georges Louis Leclerc, hrabě de Buffon ukázal, že házením jehly na nalinkovaný list papíru a počítáním případů, kdy se jehla dotkne linky, je možné odhadnout hodnotu matematické konstanty π. [24]

s tím pořád dokola, nakonec bude ve všech nádobách stejný poměr bílých a černých míčků. Laplace na tom ukazuje, jak „přirozené síly“ dokážou vytvořit výsledky, které se vyznačují předvídatelností a jistým řádem. „*Je pozoruhodné, jak se věda zrozená z úvah o hrách založených na náhodě stává nejvýznamnějším předmětem lidského poznání... Nejdůležitější otázky života jsou ve skutečnosti ve své většině pouze úlohami pravděpodobnosti,*“ napsal Laplace.[24]

Laplace zemřel 5. března 1827 ráno. Jen málo událostí by způsobilo, že by Francouzská akademie věd zrušila svou schůzi, ale v ten den, kdy Laplace zemřel, ji zrušila jako projevení respektu jednomu z největších vědců všech dob.[5]

1.4 William Sealy Gosset

William Sealy Gosset se narodil 13. června 1876 v Canterbury ve Velké Británii jako první z pěti dětí Anges Sealy Vidalové a plukovníka Frederica Gosseta, který patřil mezi tzv. Royal Engineers, obecně známých jako ženisté, kteří zajišťovali technickou podporu britských ozbrojených sil. Plukovník Frederic Gosset pocházel ze staré hugenotské[20] rodiny, která musela opustit Francii po zrušení ediktu nantského. Rodina nebyla dobře finančně zajištěná, proto bylo štěstím, že William Gosset získal stipendium na Winchester College. Gosset chtěl jít ve šlépějích svého otce, proto se přihlásil na Royal Military Academy ve Woolwichu, kam ho bohužel nepřijali kvůli jeho špatnému zraku. Namísto toho pokračoval ve svém studiu na New College v Oxfordu. Během studia byl oceněný několika tituly za své vědomosti z matematiky[21] a z chemie[22].[6]



Obrázek 1.4: William Sealy Gosset

Po dokončení školy v roce 1899 ho zaměstnal Arthur Guiness ve své firmě *Arthur Guiness, Son & Co., Ltd.* se sídlem v Dublinu v Irsku. Byl zaměstnán v pivovaru St James's Gate Brewery, který se zabýval výrobou černého piva. Management firmy najal v té době řadu čerstvých absolventů[23]

[20] Hugenoti byli francouzští protestanti, stoupenci Kalvínova učení, které se ve Francii rozšířilo kolem poloviny 16. století. Bojovali proti královské moci a nepřátelství s katolíky vedlo až k náboženským válkám. Časem uzavřeli spojenectví s anglickou královnou Alžbětou I. a vytvořili si v jižní Francii prakticky samostatné území. Ediktem nantským z roku 1598 dosáhli náboženské svobody a politické rovnoprávnosti. Po jeho zrušení v roce 1685 byli krutě pronásledováni.[4]

[21] „First in the Mathematical Moderations examination“

[22] „First-Class Degree in Chemistry“

[23] Jako noví pivovarníci byli jmenováni: v roce 1893 Thomas Case, 1895 Alan McMullen, 1897 Arthur Jackson, 1899 E. G. Peake, v říjnu 1899 W. S. Gosset, v lednu 1900 Geoffrey Phillpotts atd.[12]

z Cambridge a Oxfordu s nejlepšími výsledky v naději, že zavedou do výroby nové věděcké metody, které by optimalizovali vaření piva. Měli potřebu pečlivější vědecké analýzy různých procesů, z nichž každý hluboce ovlivňoval kvalitu finálního produktu pivovaru, piva. V tomto Gosset nezklamal. Začal si časem uvědomovat důležitost statistických metod při postupech, které ve firmě převládaly. Aplikoval své statistické znalosti, a to jak v pivovaru, tak na farmě, k výběru nejlepších a nejvýnosnějších odrůd ječmene.[12]

Gosset si obzvlášť uvědomoval problém malých výběrů. Tehdejší statistické metody nenabízely žádný vhodný aparát na zpracování náhodného výběru malého rozsahu. Dosavadní praxe se zaobírala pouze náhodnými výběry většího rozsahu. Malé vzorky, nicméně, byly typické pro Gossetovu práci v pivovaru. Gosset měl za úkol posoudit kvalitu různých druhů vařených piv, přičemž měl k dispozici jen malý počet vzorků, často méně než 10. Nebyla to tedy žádná náhoda, ale okolnosti pivovarské práce, že se „Studentova“ pozornost zaměřila na tento problém.[30] Gosset se začal hlouběji věnovat této komplikaci, což shrnul v nepublikovaném spisu “The Application of the ‘Law of Error’ to the work of the Brewery”[24] datovaném 3. listopadu 1904. Když nenašel potřebné informace v literatuře, dohodl si schůzku s Carlem Pearsonem[25] v červenci 1905. A později v letech 1906 až 1907 s povolením Guinesse, strávil Gosset dva semestry akademického roku v Pearsonově biometrické laboratoři na University College v Londýně.[6]

V roce 1906 se oženil s Marjory Surtees, nejmladší dcerou Jamese Surteese Philpottse a zároveň sestrou svého spolupracovníka Geoffreyho Philpottse, který s ním pracoval od roku 1900. Joan Fisher Box je svém článku „Guiness, Gosset, Fisher and Small Samples“ napsala o mladých pracovnících pivovaru „*Než se oženili, žili spolu v Guinessově domě pro nezadané pivovarníky v St. James' Gate. V práci spolu jedli v pivovarské jídelně. Mimo službu, byli hodně aktivní hlavně v přírodě; lyžovali, lovili ryby, plavili se na lodi, hráli golf, jezdili na kole, procházeli se po Wicklow Hills, navštěvovali se, četli a povídali si spolu. V některých ohledech byl jejich život jako prodloužení vysoké školy.*“[12]

Postupně Guiness rozšířil výzkumná zařízení. V roce 1900 se otevřely Guinessovy výzkumné laboratoře, v roce 1901 experimentální sladovna a v roce 1903 experimentální pivovar. Od té doby bylo možné sledovat ječmen vypěstovaný na pokusných polích, od zasetí po sklizeň, přes sladovnictví a pivovarnictví až ke konečnému pivu, v jedinečné a komplexní řadě pozorování.[7]

Problémy, kterými se Gosset zabýval, shrnul ve vědeckém časopise Biometrika, jehož spoluzakladatelem byl právě profesor Pearson. Po následujících 25 let Gosset publikoval v Biometrice celkem 14 článků, které napsal pod pseudonymem Student.

A proč publikoval právě pod tímto pseudonymem? Zaměstnanci pivovaru neměli obecně dovoleno publikovat své výsledky, Gossetovi byla však udělena výjimka pod podmínkou, že bude publikovat právě pod pseudonymem kvůli utajení před ostatními zaměstnanci. Dalším důvodem, proč publikoval pod pseudonymem, byl ten, že jeho matematické a filozofické závěry nemohla využít konkurence pro své potřeby. Taktéž se střetáváme s tvrzením, že anonymita byla požadována přímo Guinessem, aby se právě konkurence mimo jiné nedozvěděla, jak je výhodné zaměstnávat statistiky. Pseudonym „Student“ vymyslel Christopher Digges La Touche, který byl výkonným ředitelem pivovaru.[30]

Gosset byl velmi bystrý, s vysokými ideály a rozpustilým smyslem pro humor. Měl velmi přitažlivou povahu, byl tichý, přirozeně přátelský, ochotný, trpělivý, loajální, každý ho měl

[24] „Aplikace 'Zákonu chyby' na práci v pivovaru“[30]

[25] Carl Pearson byl britský matematik, biolog a filozof pozitivista, zakladatel matematické statistiky a její aplikace na biologii (biometrika). Byl profesorem na University College v Londýně, kde založil historicky první katedru statistiky.

rád a věřil mu. Ve velmi rozhádaném světě statistiky, se mu podařilo být v přátelském vztahu s každým. Nikdy nebyl zaměstnán jako statistik.[12] I když si mnozí lidé mysleli, že „Studentova“ génia je pro pivovarnictví potažmo celý průmysl škoda. Byly mu nabízeny i akademické pozice, Gosset ovšem zůstal věrný své práci sládka, neboť to byla právě jeho práce a praktické problémy, které vedly k zavedení nového Studentova t-rozdělení.

Gosset pracoval v pivovaru celý svůj život, nakonec se stal v roce 1935 sládkem v Park Royal, novém pivovaru v severozápadním Londýně, který ovšem spadal pod firmu *Guinees, Son & Co., Ltd.*. William Sealy Gosset zemřel o 2 roky později 16. října 1937 v Beaconsfieldu ve Velké Británii na srdeční infarkt. Zanechal po sobě ženu, tři děti (dvě dcery a jednoho syna), a také vnoučka.

Kapitola 2

Náhodná veličina

Zpracováno dle [10], [11], [18], [19], [25], [28] a [31].

Náhodným pokusem nazveme všechny činnosti, jejichž výsledek není jednoznačně předurčen podmínkami, za kterých probíhají, a které jsou (alespoň v zásadě, teoreticky) neomezeně mnohokrát opakovatelné za stejných podmínek. Nicméně nastane právě jeden z možných výsledků množiny prvků, kterou nazýváme základní prostor. A náhodná veličina je pak zobrazení, které nabývá hodnot z $\mathbb{R}$. Náhodnou veličinou je například počet teček, které padnou, při hodu kostkou, počet zásahů do terče nebo počet orlů při hodech mincí atd.

Definice 2.0.1. Nechť Ω je neprázdná množina s prvky $\omega_1, \dots \omega_n$, $n \in \mathbb{N}$. Množinu Ω nazveme **základní prostor** nebo prostor elementárních jevů a prvky ω_i, $i = 1, \dots, n$ elementární jevy. **Náhodným jevem** nazýváme každou podmnožinu množiny Ω a označíme ho A.

Definice 2.0.2. Nechť Ω je libovolná neprázdná množina. Neprázdný systém $\mathcal{A}$ podmnožin množiny Ω se nazývá **σ-algebra**, jestliže platí

1. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A' \in \mathcal{A}$,
2. $A_i \in \mathcal{A}, i = 1, 2, \dots \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Důkaz. Viz [19, str. 158] □

Definice 2.0.3. Nechť Ω je množina výsledků daného pokusu. Je-li $\mathcal{A}$ σ-algebra podmnožin množiny Ω, nazývá se $\mathcal{A}$ **jevové pole**. Prvky $A \in \mathcal{A}$ se nazývají náhodné jevy.

Věta 2.0.1. *Je-li Ω neprázdná množina výsledků náhodného pokusu a je-li $\mathcal{A}$ nějaká σ-algebra náhodných jevů definovaná na Ω, potom platí*

1. $\emptyset \in \mathcal{A}, \quad \Omega \in \mathcal{A}$,
2. $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i \in \mathcal{A}$,
3. $A_1, A_2 \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$,
4. $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{k} A_i \in \mathcal{A}$,

5. *$A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A - B \in \mathcal{A}$.*

Důkaz. Viz [31, str.21] $\square$

Poznámka 2.0.1. Dvojice $(\Omega, \mathcal{A})$ se nazývá *měřitelný prostor*.

Definice 2.0.4. Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor. Potom zobrazení $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ s vlastnostmi:

1. $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$
2. $0 \leq P(A) \leq 1$ pro všechny $A \in \mathcal{A}$
3. jestliže $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ a $A_i \cap A_j = \emptyset$, když $i \neq j$, tak

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

se nazývá **pravděpodobnost**.

Poznámka 2.0.2. Trojice $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se nazývá *pravděpodobnostní prostor*.

Definice 2.0.5. Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, pak zobrazení: $X \colon \Omega \to \mathbb{R}$ se nazývá **náhodná veličina**, právě když

$$\forall x \in \mathbb{R} : \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$$

Definice 2.0.6. Funkce, která popisuje tzv. rozdělení náhodné veličiny, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definována vztahem

$$\forall x \in \mathbb{R} : F(x) = P(X \leq x),$$

kde $P(X \leq x)$ značí $P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\})$, se nazývá **distribuční funkce**.

Poznámka 2.0.3. Náhodná veličina, která se řídí rozdělením daným distribuční funkcí $F(x)$ se zapisuje $X \sim F(x)$ případně u speciálních náhodných veličin speciálním znakem.

Věta 2.0.2. *Vlastnosti distribuční funkce:*

1. $0 \leq F(x) \leq 1$,
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$,
3. $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$,
4. *$F(x)$ je neklesající, tedy pro všechna $x_i < x_j$ platí $F(x_i) \leq F(x_j)$,*
5. *pro libovolná reálná $a \leq b$ platí $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$,*
6. *pro všechna čísla x_0 platí $P(X = x_0) = F(x_0) - \lim\limits_{x \to x_0^-} F(x)$,*
7. *distribuční funkce je zprava spojitá v libovolném bodě $x_0 \in \mathbb{R}$; limitu zleva budeme značit $\lim\limits_{x \to x_0^-} F(x) = F(x - 0)$,*

8. $P(X < x) = F(x - 0)$,

9. $P(a < X < b) = F(b - 0) - F(a)$,
   $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a - 0)$,
   $P(a \leq X < b) = F(b - 0) - F(a - 0)$.

Důkaz. Viz [19, str. 38–39] □

Náhodná veličina může být diskrétní či spojitá.

2.1 Diskrétní náhodná veličina

Definice 2.1.1. Distribuční funkce náhodné veličiny X, F_X, se nazývá diskrétní, existuje-li posloupnost reálných čísel $\{x_n\}$, kde $n \in N, N \subseteq \mathbb{N}$, a jí odpovídající posloupnost kladných čísel $\{p_n\}$, kde $n \in \mathbb{N}$, takové, že platí

$$F_X(x) = \sum_{n \leq x} p_n.$$

Platí $\sum\limits_{n \in N} p_n = 1$, $p_n > 0$ a $p_n = P(X = x_n)$. Funkce $p_n = p(x_n)$ se nazývá **pravděpodobnostní funkce** náhodné veličiny X. Má-li náhodná veličina X diskrétní distribuční funkci, říkáme, že X je diskrétního typu a její rozdělení se nazývá také **diskrétní**.

2.1.1 Alternativní rozdělení

Náhodná veličina $X \sim A(\theta)$ nabývá pouze hodnot 0 nebo 1, znamenající např. „úspěch“ nějakého pokusu, jehož pravděpodobnost je θ, kde $\theta \in (0; 1)$.

$$p(x) = \begin{cases} 1 - \theta & \text{pro } x = 0, \\ \theta & \text{pro } x = 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

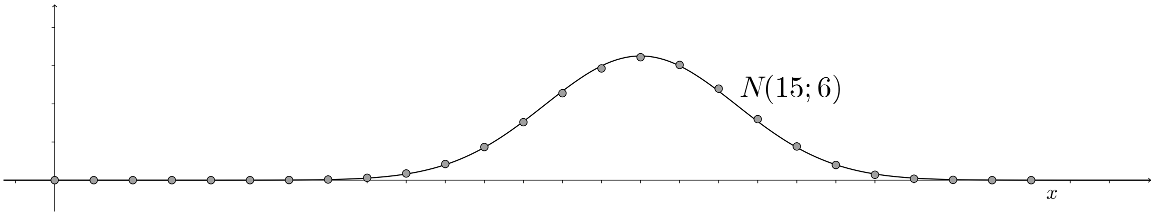
2.1.2 Binomické rozdělení

Binomické rozdělení udává počet „úspěchů“ v n nezávisle opakovaných pokusech, přičemž v každém z těchto pokusů nastává „úspěch“ s pravděpodobností θ, kde $\theta \in (0; 1)$ a n je přirozené číslo. Binomické rozdělení s parametry n, θ má náhodná veličina, která nabývá hodnot $x = 0, 1, \ldots, n$ s pravděpodobností

$$p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n - x} & x = 0, 1, \ldots, n, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $p \in (0, 1), n \in \mathbb{N}$. Označme krátce $X \sim Bi(n, \theta)$.

Střední hodnota $E(X) = n\theta$ a rozptyl $D(X) = n\theta(1 - \theta)$.



Obrázek 2.1: Pravděpodobnostní funkce $Bi(25; 0,6)$ proložené normální křivkou

2.2 Spojitá náhodná veličina

Definice 2.2.1. Řekneme, že náhodná veličina X je **spojitá**, jestliže existuje taková nezáporná reálná funkce $f(x)$ definovaná pro všechna reálná čísla, že platí:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t \qquad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Funkce $f(x)$ z výrazu (2.1) se nazývá **hustota** pravděpodobnosti náhodné veličiny X.

Věta 2.2.1. *Každá spojitá (až na spočetně mnoho bodů), reálná funkce $f(x)$ reálné proměnné x je hustotou pravděpodobnosti nějaké náhodné veličiny X tehdy a jen tehdy, splňuje-li podmínky:*

1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$,
2. $f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}$,
3. $f(x) \geq 0 \qquad x \in (-\infty, \infty)$.

2.2.1 Normální rozdělení

Viz kapitola 3.

2.2.2 χ^2 rozdělení

Věta 2.2.2. *Nechť jsou $X_1, \ldots, X_n$ nezávilé náhodné veličiny, $X_i \sim N(0,1), \forall i = 1, \ldots, n$. Náhodná veličina $Y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$ má hustotu*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{pro } x \leq 0, \\ \frac{1}{\Gamma(\frac{\nu}{2})2^{\frac{\nu}{2}}} x^{\frac{\nu}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} & \textit{pro } x > 0. \end{cases}$$

Poznámka 2.2.1. Více o Γ funkci v sekci 5.1.

Definice 2.2.2. Hustota $f(x)$ z věty 2.2.2 je hustota tzv. χ-kvadrát rozdělení o ν stupních volnosti, $\nu \in \mathbb{N}$ je parametr tohoto rozdělení. Označujeme $X \sim \chi^2(\nu)$.

2.2.3 Studentovo t-rozdělení

Viz kapitola 5.

2.2.4 Fisherovo-Snedecorovo rozdělení

Věta 2.2.3. *Nechť jsou X_1, X_2 nezávilé náhodné veličiny, $X_i \sim \chi^2(\nu_i), i = 1, 2$. Náhodná veličina $Y = \frac{\frac{X_1}{\nu_1}}{\frac{X_2}{\nu_2}}$ má hustotu*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{pro } x \leq 0, \\ \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)\nu_1^{\frac{\nu_1}{2}}\nu_2^{\frac{\nu_2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} \cdot \frac{x^{\frac{\nu_1-2}{2}}}{(\nu_2+\nu_1 x)^{\frac{\nu_2+\nu_1}{2}}} & \textit{pro } x > 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Definice 2.2.3. Hustota $f(x)$ ze vztahu (2.2) je hustota tzv. Fisherova-Snedecorova rozdělení o (ν_1, ν_2) stupních volnosti.[1] Označujeme $X \sim F(\nu_1, \nu_2)$.

2.3 Náhodný vektor

Definice 2.3.1. Mějme pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, na kterém jsou definované náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$. Pak se $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ nazývá náhodný vektor. Funkci

$$\forall (x_i, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ F(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 \leq x_1 \wedge \ldots \wedge X_n \leq x_n)$$

nazýváme distribuční funkcí náhodného vektoru $\mathbf{X}$. Někdy se jí říká sdružená distribuční funkce náhodných veličin $X_1, \ldots, X_n$. Dále platí limity

$$\lim \quad F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$$

$$x_1 \to \infty$$

$$\vdots$$

$$x_n \to \infty$$

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\};\ \lim_{x_i \to -\infty} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

[1]Stupně volnosti tvoří uspořádanou dvojici, jejich pořadí nelze zaměňovat.

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}; \quad \lim_{\substack{x_1 \to \infty \\ \vdots \\ x_{i-1} \to \infty \\ x_{i+1} \to \infty \\ \vdots \\ x_n \to \infty}} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_i(x_i).$$

$F_i(x_i)$ se nazývá marginální distribuční funkce náhodné veličiny X_i.

Definice 2.3.2. Existuje-li taková funkce f, že platí

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, \ldots, u_n) \mathrm{d}u_1 \ldots u_n$$

pak říkáme, že vektor $\mathbf{X}$ má spojité rozdělení a že f je jeho sdružená hustota. Platí

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1, \ldots, \partial x_n} \qquad \text{skoro všude.}$$

Věta 2.3.1. *Mějme náhodný vektor $X = (X_1, \ldots, X_n)'$. Nechť $F(x_1, \ldots, x_n)$ je jeho sdružená distribuční funkce a nechť $F_i(x_i)$ je marginální distribuční funkce náhodné veličiny X_i, $i = 1, \ldots, n$. Řekneme, že náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé, platí-li pro všechna reálná $x_1, \ldots, x_n$ vztah*

$$F(x_1, \ldots, x_n) = F_1(x_1) F_2(x_2) \ldots F_n(x_n).$$

Věta 2.3.2. *Nechť náhodný vektor X má sdruženou hustotu $f(x_1, \ldots, x_n)$. Označme $f_i(x_i)$ marginální hustotu veličiny $X_i, i = 1, \ldots, n$. Pak náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé právě tehdy, platí-li*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \ldots f_n(x_n) \qquad \textit{skoro všude.}$$

Definice 2.3.3. Je-li dána spojitá náhodná veličina X s hustotou $f(x)$, pak číslo

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \mathrm{d}x$$

se nazývá *střední hodnota*, pokud integrál existuje.

Definice 2.3.4. Je-li dána spojitá náhodná veličina X s hustotou $f(x)$, pak číslo

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) \mathrm{d}x - E(X)^2$$

se nazývá *rozptyl*, pokud příslušné integrály existují. $\sqrt{D(X)}$ se nazývá *směrodatná odchylka* náhodné veličiny X.

2.4 Základní soubor a náhodný výběr

Zpracováno dle [19] a [25].

Skupinu prvků nebo jednotek, které můžou být předmětem našeho zkoumání, budeme nazývat základním souborem. Základní soubor může být reálný nebo hypotetický. Reálný základní soubor je takový, jehož prvky existují, a teoreticky se může každý jeho prvek podrobit statistickému zkoumání. Hypotetický soubor existuje pouze v našich představách. Rozsah základního souboru může být konečný nebo nekonečný. Každý základní soubor je charakterizovaný příslušnými znaky, které můžeme popsat nějakým zákonem rozdělení pravděpodobnosti a určitými konstantními ukazateli, které nazýváme parametry. Takovými parametry jsou například střední hodnota, rozptyl nebo směrodatná odchylka.

V nejrůznějších reálných situacích nemusíme rozpoznat správné rozdělení pravděpodobnosti základního souboru ani jeho parametry. Proto se musíme často spokojit s tím, že ze základního souboru uděláme náhodný výběr, který tvoří výběrový statistický soubor a na základě hodnot sledovaného znaku na jednotlivých prvcích výběrového statistického souboru můžeme získat informace o rozdělení pravděpodobnosti základního souboru, resp. o jeho neznámých parametrech. Tedy na základě několika pozorovaných hodnot sledovaného znaku zevšeobecňovat pro celý základní soubor. Tento individuální způsob usuzování je charakteristický pro statistické metody.

Definice 2.4.1. Náhodným výběrem ze základního souboru budeme nazývat posloupnost nezávislých náhodných veličin $X_1, \dots X_n$, které mají stejné rozdělení jako základní soubor.

Definice 2.4.2. Libovolnou náhodnou veličinu T, která vznikne jako funkce náhodného výběru $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$, budeme nazývat statistikou nebo výběrovou charakteristikou.

Definice 2.4.3. Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ je náhodný výběr rozsahu n příslušný k statistickému znaku X. Statistiku

1. $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$ nazýváme výběrový průměr,
2. $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X}_n)^2$ nazýváme výběrový rozptyl,
3. $S_n = \sqrt{S_n^2}$ nazýváme výběrová směrodatná odchylka.

Kapitola 3

Normální rozdělení

Zpracováno dle [10], [11], [13], [19], [22], [28] a [31].

Normální či Gaussovo rozdělení pravděpodobnosti je považováno za nejdůležitější rozdělení pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny.[22] Je to asi nejvíce používané rozdělení pro modelování náhodného chování proměnných v empirických vědách. Je tomu tak minimálně ze čtyř příčin:

1. mnoho sledovaných proměnných můžeme aproximovaně (tzn. s uspokojivým přiblížením) modelovat pomocí tohoto rozdělení;

2. některé jiné proměnné lze převést jednoduchou transformací na proměnnou, jež má normální rozdělení;

3. existuje mnoho statistických procedur, které byly v důsledku předchozích dvou bodů odvozeny pro toto rozdělení;

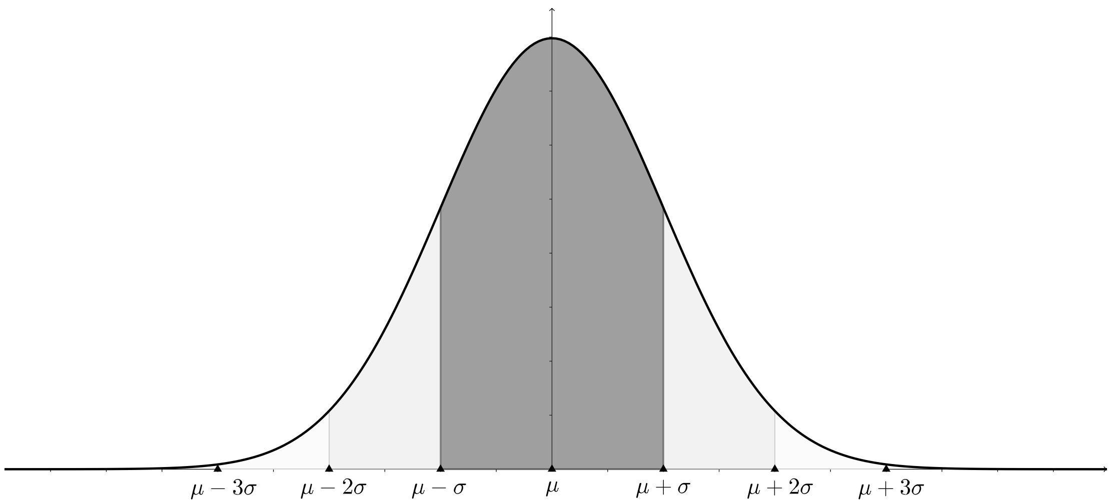
4. protože platí centrální limitní věta (viz kapitola 4), lze často aproximovaně použít procedury, jež byly na základě normálního rozložení navrženy, také při statistickém hodnocení proměnných, které se tímto rozdělením vůbec neřídí.[16]

Jak již bylo zmíněno dříve, normální rozdělení jako první ve skutečnosti popsal anglický matematik Abraham de Moivre (1667–1754). De Moivre objevil „zákon chyb“ a popsal ho v roce 1733 v článku „Approximatio ed summam terminorum bonomii $(a + b)^n$ in seriem expansi“[1]. Zjistil, že když se nashromáždí mnoho nezávislých náhodných faktorů, pak vytvoří křivku zvonového tvaru, kde méně běžné hodnoty najdeme na obou koncích křivky, zatímco běžnější hodnoty se soustřeďují směrem ke středu. Abraham de Moivre popsal v roce 1733 pomocí normální křivky limitní chování binomického rozdělení, když se snažil aproximovat výpočty jednotlivých pravděpodobností binomického rozdělení po velká n. Rozdělení, jež navrhl de Moivre pro tento účel, se nakonec ukázalo být důležitější než samo binomické rozdělení. V roce 1812 odvodil nezávisle normální rozdělení francouzský matematik Pierre Laplace (1749–1827). Jak Laplace, tak Carl Friedrich Gauss (1772–1855) interpretovali toto rozdělení jako zákon chyb a používali ho pro interpretaci astronomických a geodetických měření, výsledků hazardních her a přesnosti dělostřelecké střelby.[16]

[1] „Aproximace součtu binomických členů $(a + b)^n$ rozšířených do řady“

Křivka hustoty má střední hodnotu[2] μ, kde $\mu \in (-\infty, \infty)$, a směrodatnou odchylku σ, jež je měřítkem šířky křivky[3], kde $\sigma \in (0, \infty)$. K jeho označení se používá $N(\mu, \sigma^2)$. Křivka představující hustotu pravděpodobnosti $f(x)$ normálního rozdělení se nazývá Gaussova.[16] Jelikož jak střední hodnota, tak i směrodatná odchylka může být skoro jakékoli číslo, existuje nekonečně mnoho různorodých Gaussových křivek.

Zdá se, že se Gaussova křivka „objevuje zčistajasna“ pokaždé, když se nashromáždí mnoho náhodných faktorů, a proto jí lidé již od jejího objevení přisuzovali téměř mystické vlastnosti. Gaussova křivka svým způsobem vyjadřuje „božský zákon přírody“, kterým se řídí spousta jevů v reálném světě. Například výška lidí, kapacita plic nebo hodnoty IQ mají tendenci být normálně rozloženy kolem svého průměru. Totéž platí pro řadu dalších proměnných, s nimiž se setkáváme v přírodě. V roce 1960 Eugene Fama z chicagské univerzity ukázal, že procentové změny v cenách akcií a dalších aktiv prodávaných na dobře fungujících trzích se řídí normálním rozdělením. Tento objev vedl k založení kvantitativní finanční analýzy. Později se ukázalo, že i devizové výplatní poměry měn lze modelovat pomocí normálního rozdělení. Hodnoty a pravděpodobnosti normálního rozdělení jsou spočítány a nalezneme je v tabulkách, a tak nám umožňují provést pravděpodobnostní výpočty pro libovolnou náhodnou proměnnou, která se řídí tímto rozdělením.[8]



Obrázek 3.1: Gaussova křivka

Uveďme si jeho klíčové parametry:

1. Pravděpodobnost, že hodnota náhodné veličiny s normálním rozdělením se neliší od střední hodnoty o více než jednu směrodatnou odchylku, je přibližně 68 %.

2. Pravděpodobnost, že hodnota náhodné veličiny s normálním rozdělením se neliší od střední hodnoty o více než dvě směrodatné odchylky, je přibližně 95 %.

3. Pravděpodobnost, že hodnota náhodné veličiny s normálním rozdělením se neliší od střední hodnoty o více než tři směrodatné odchylky, je přibližně 99,7 %.

[2]průměr, nebo centrum hmoty, pokud oblasti vytvořené křivkou přisoudíme určitou „váhu“
[3]směrodatná odchylka je jednotka míry, kterou uplatňujeme ve vodorovném směru přes křivku

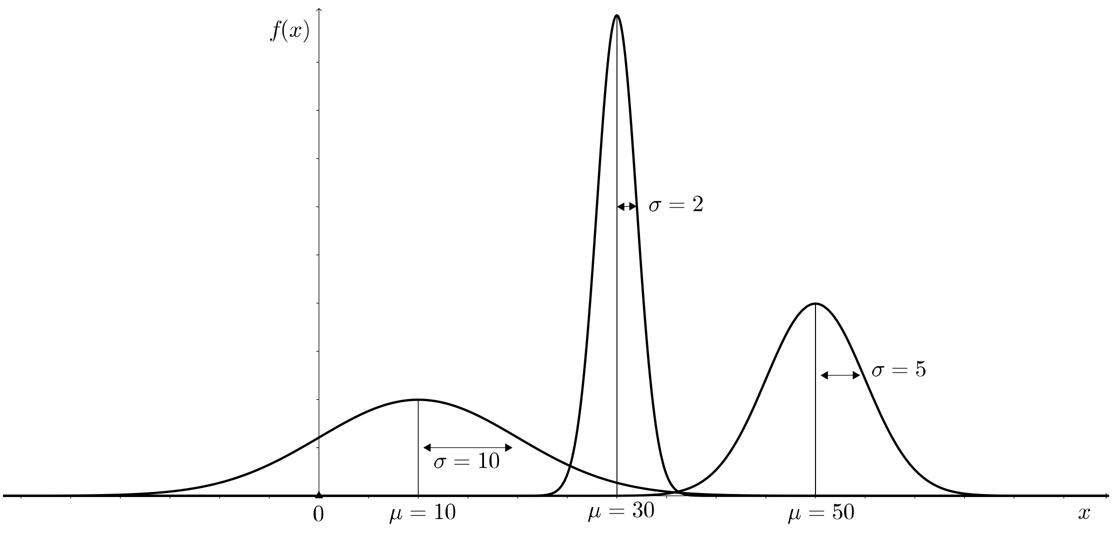
4. Pravděpodobnost, že hodnota náhodné veličiny s normálním rozdělením se neliší od střední hodnoty o více než čtyři směrodatné odchylky, se blíží jistotě.[8]

Chvost normálního rozdělení je oblast na pravé straně od nějakého bodu, který se nachází napravo od střední hodnoty, nebo symetricky oblast na levé straně od nějakého bodu, který se nachází nalevo od střední hodnoty. Název „chvost“ má původ v myšlence Williama Gossetta, který v roce 1908 nakreslil tento vtipný obrázek:

Obrázek 3.2: Chvosty Gaussovy křivky

Normální rozdělení je popsáno křivkou, která je

1. jednovrcholová,
2. symetrická,
3. asymptotická vzhledem k ose x,
4. zvonového tvaru.



Obrázek 3.3: Různé druhy Gaussovy křivky

Hustota pravděpodobnosti normálního rozdělení je dána vztahem:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad x \in (-\infty, \infty)\,. \tag{3.1}$$

Z analytického vyjádření hustoty pravděpodobnosti normálního rozdělení jsou patrny následující důležité vlastnosti:

1. je symetrická vzhledem k parametru μ,
2. v bobě μ nabývá maxima pro dané σ,
3. velikost maxima je nepřímo úměrná velikosti parametru,[22]
4. inflexní body jsou $\mu - \sigma$ a $\mu + \sigma$.

Důkaz. [28, str. 97] □

Mezi normální rozdělení se počítá i degenerované rozdělení, kde náhodná veličina X nabývá hodnoty μ s pravděpodobností 1. Jelikož rozptyl takové veličiny X je nulový, značíme toto rozdělení $N(\mu, 0)$.

Distribuční funkce $F(x)$ je pro $x \in (-\infty, \infty)$ dána předpisem:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}t\,.$$

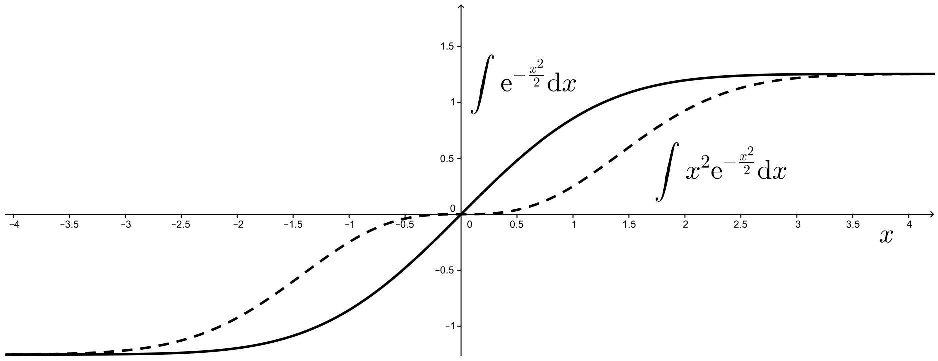
Střední hodnota a rozptyl jsou

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \frac{x-\mu}{\sigma} \\ \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\sigma}\mathrm{d}x \end{array} \right| = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (t\sigma + \mu) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \sigma \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} t\sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{\infty} \mu \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = \sigma \cdot 0 + \mu \cdot 1 = \mu\,,
\end{aligned}$$

protože $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$ (Laplaceův integrál) a $\int_{-\infty}^{\infty} t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = 0$, jelikož $t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ je omezená lichá funkce.

$$\begin{aligned}
D(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) \mathrm{d}x - E(X)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x - \mu^2 = \left| \begin{array}{c} t = \frac{x-\mu}{\sigma} \\ \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\sigma}\mathrm{d}x \end{array} \right| = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (t\sigma + \mu)^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \sigma \mathrm{d}t - \mu^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t^2\sigma^2 + 2t\sigma\mu + \mu^2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t - \mu^2 = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (t^2\sigma^2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{\infty} 2t\sigma\mu \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{\infty} \mu^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t - \mu^2 = \\
&= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t + \frac{2\sigma\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t + \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t - \mu^2 = \\
&= \sigma^2 \cdot 1 + 2\sigma\mu \cdot 0 + \mu^2 \cdot 1 - \mu^2 = \sigma^2\,,
\end{aligned}$$

protože $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$ (Laplaceův integrál) a též $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$. $\int_{-\infty}^{\infty} t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = 0$, jelikož $t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ je omezená lichá funkce.



Obrázek 3.4: Integrály $\int x^2 \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$ a $\int \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$

Uvedeme si několik vlastností, které platí pro náhodné veličiny s normálním rozdělením ve spojení s konstantou či jinou náhodnou veličinou se spojitým rozdělením.

Věta 3.0.1. *Nechť a, b jsou reálná čísla. Je-li $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, pak*

$$a + bX \sim N(a + b\mu, b^2\sigma^2).$$

Důkaz. Viz [11, str. 63]. □

Věta 3.0.2. *Nechť máme dvě nezávislé náhodné veličiny X a Y, jež jsou normálně rozděleny, $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, má rozdělení jejich součtu $X + Y$ tvar*

$$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

Důkaz. Viz [11, str. 64] □

Věta 3.0.3. *Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny, pro které platí $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, \ldots, n$. Označme $\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$ a $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$. Pak*

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\mu, \sigma^2).$$

Důkaz. Viz [11, str. 65]. □

Věta 3.0.4. *Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je výběr z $N(\mu, \sigma^2)$, kde $\sigma^2 > 0$. Pak platí tvrzení*

1. $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$,
2. *je-li $n \geq 2$, pak $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$,*
3. *je-li $n \geq 2$, jsou veličiny $\bar{X}$ a S^2 nezávislé.*

Důkaz. Viz [11, str. 70] □

De Moivre zkoumal normální rozdělení během svého studia aproximací binomického rozdělení, které vzniká například při házení mincí. Pierre Simon de Laplace využil tohoto rozdělení v roce 1783 k měření chybovosti a Carl Friedrich Gauss jej v roce 1809 aplikoval při zkoumání astronomických dat.

Antropolog Francis Dalton k normálnímu rozdělení napsal: „*Stěží znám něco tak příhodného k roznícení představivosti onu nádhernou formu kosmického řádu vyjádřenou „zákonem četnosti chyb“. Je to zákon, který by staří Řekové, kdyby jej znali, přiřadili ke svým bohům. Ve svém poklidu a naprostém sebezapřením vládne i nejdivočejšímu chaosu.*“[24]

3.1 Standardizované normální rozdělení

Zpracováno dle [19] a [25].

Jestliže parametr $\mu = 0$ a $\sigma = 1$, pak se toto rozdělení nazývá normální standardizované či normované rozdělení pravděpodobnosti a značí se $N(0,1)$. Dosazením těchto hodnot parametrů do vztahu (3.1) dostaneme jeho hustotu pravděpodobnosti:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-0)^2}{2\cdot 1^2}},$$

a dostáváme hustotu pravděpodobnosti pro $N(0,1)$, kterou označíme písmenem φ:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Distribuční funkce standardizovaného normálního rozdělení označíme $\Phi(x)$ a je dána vztahem

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

Mezi distribučními funkcemi normálního rozdělení pravděpodobnosti $N(\mu,\sigma^2)$ a $N(0,1)$ platí vztah

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Důkaz. $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} z = \frac{t-\mu}{\sigma} \\ \mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}t}{\sigma} \end{array} \right| = \int\limits_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{d}z = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$

Tento vztah můžeme odvodit i podle věty 3.0.1, když najdeme takové parametry a a b, aby náhodná veličina $U = a + bX$ měla rozdělení $N(0,1)$

$$\begin{aligned} a + b\mu &= 0 \\ b^2\sigma^2 &= 1 \end{aligned}$$

z toho plyne

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{\frac{1}{\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma} \\ a &= -b\mu = -\frac{\mu}{\sigma} \end{aligned}$$

tedy

$$U = -\frac{\mu}{\sigma} + \frac{1}{\sigma}X = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

□

3.2 Standardizace

Při výpočtu úloh se spojitými náhodnými veličinami, které mají normální rozdělení, se tato rozdělení obvykle liší svými parametry μ a σ. Pro usnadnění výpočtů je vhodné tyto náhodné veličiny tzv. „normovat". Od náhodné veličiny X odečteme její střední hodnotu μ a následně vydělíme její směrodatnou odchylkou σ. Platí tedy $\frac{(X-\mu)}{\sigma}$ má rozdělení N(0,1). Tato náhodná veličina se nazývá normovaná a označuje se U.

Distribuční funkce normované náhodné veličiny U, kterou značíme $F(u)$ je vyjádřena vztahem:

$$F(u) = P(U \leq u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = \Phi(u).$$

Hodnoty standardizované normální veličiny jsou uvedeny v tabulkách.

Při sestavování tabulek $N(0,1)$ rozdělení pravděpodobnosti se využívá toho, že standardizované normální rozdělení pravděpodobnosti je symetrické kolem bodu 0, tj. pro jeho distribuční funkci platí vztah

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

a pro jeho hustotu platí

$$\varphi(-x) = \varphi(x).$$

Často řešenou úlohou je určení pravděpodobnosti, že náhodná veličina X s normálním rozdělením $N(\mu, \sigma^2)$ nabude některé hodnoty z intervalu, jehož krajními body jsou x_1 a x_2. Tuto pravděpodobnost lze vypočítat pomocí vzorce:

$$P(x_1 < X \leq x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right).$$

3.3 Přehled rozdělení odvozených od normálního

Zpracováno dle [19] a [31].

Věta 3.3.1. *Nechť jsou $X_1, \ldots, X_n$ nezávislé náhodné veličiny, $X_i \sim N(0,1)$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Pak náhodná veličina*

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$$

neboli chí-kvadrát o n stupních volnosti

Věta 3.3.2. *Nechť jsou X_1, X_2 nezávislé náhodné veličiny, $X_i \sim \chi^2(n_i)$, $i = 1, 2$. Potom má náhodná veličina*

$$Y = \frac{\frac{X_1^2}{n_1}}{\frac{X_2^2}{n_2}} \sim F(n_1, n_2)$$

neboli Fisherovo-Snedecorovo rozdělení s n_1 a n_2 stupni volnosti.

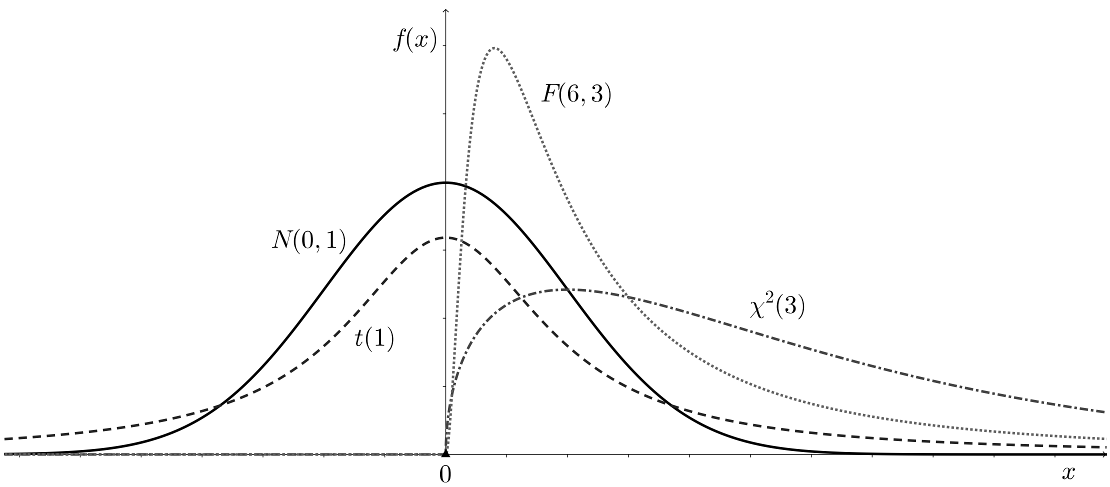
Rozdělení	Označení	Hustota	Definiční obor
normální	$N(\mu, \sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\mathbb{R}$
χ^2 rozdělení	$\chi^2(\nu)$	$\frac{1}{\Gamma(\frac{\nu}{2}) 2^{\frac{\nu}{2}}} x^{\frac{\nu}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$	$(0, \infty)$
Studentovo	$t(\nu)$	$\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$	$\mathbb{R}$
Fisher-Snedecorovo	$F(\nu_1, \nu_2)$	$\frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right) \nu_1^{\frac{\nu_1}{2}} \nu_2^{\frac{\nu_2}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu_1}{2}) \Gamma(\frac{\nu_2}{2})} \cdot \frac{x^{\frac{\nu_1-2}{2}}}{(\nu_2+\nu_1 x)^{\frac{\nu_2+\nu_1}{2}}}$	$(0, \infty)$

Tabulka 3.1: Hustoty rozdělení

Věta 3.3.3. *Nechť jsou $X_0, X_1, \ldots, X_n$ nezávislé náhodné veličiny a nechť $X_j \sim N(0,1)$, $\forall j = 0, 1, \ldots, n$. Pak náhodná veličina*

$$T_n = \frac{X_0}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} X_j^2}} \sqrt{n} \sim t(n)$$

neboli Studentovo rozdělení s n stupni volnosti.



Obrázek 3.5: Křivky hustot rozdělení $N(0,1), \chi^2(3), t(1), F(6,3)$

Kapitola 4

Centrální limitní věta

Zpracováno dle [11], [13], [16], [19], [22] a [31].

Normální rozdělení se často vyskytuje v experimentech, nicméně mnoho různých proměnných není normálně rozděleno, a proto by nebylo vhodné použít normální rozdělení jako model. Přesto, jestliže jsou vzorky dost velké, normální rozdělení může být použito k nalezení jistých pravděpodobností spojených s experimentem, protože jeho výsledky jsou známy z matematické statistiky. Používají se k tomu vlastnosti rozdělení výběrových průměrů.

Rozdělení výběrových průměrů má následující vlastnosti:

1. $\mu_{\bar{y}} = \mu_y$, tj. střední hodnota rozdělení výběrového průměru (viz definice 2.4.3) je stejná jako střední hodnota základního souboru,

   Důkaz. Viz [19, str. 138] □

2. $\sigma^2_{\bar{y}} = \frac{\sigma^2_y}{n}$, tj. rozptyl rozdělení výběrového průměru je stejný jako rozptyl základního souboru dat rozděleného podle rozsahu souboru n,

   Důkaz. Viz [19, str.138] □

3. pokud je n dostatečně velké, je rozložení výběrového průměru téměř symetrické a jednovrcholové.

Třetí vlastnost můžeme specifikovat. Pokud je soubor normálně rozdělen, pak rozdělení výběrového průměru je také normálně rozděleno. Pokud není normálně rozdělen, pak je rozdělení výběrového průměru přibližně normálně rozděleno pro velká n. Tato poslední vlastnost je známa jako centrální limitní věta.

Věta 4.0.4. *(Lindbergova-Levyho) Nechť $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin, které mají stejné rozdělení pravděpodobnosti se střední hodnotou $E(X)$ a konečným rozptylem $D(X) = \sigma^2$, kde $\sigma^2 > 0$. Pak distribuční funkce transformované náhodné veličiny*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - nE(X)}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) = \Phi(x),$$

limitně konverguje k distribuční funkci $N(0,1)$.

Důkaz. Viz [22, str. 156] □

Věta 4.0.5. *(Moivreova-Laplaceova integrální věta) Nechť náhodná veličina Y_n má $\forall n \in \mathbb{N}$ binomické rozdělení $Bi(n, \theta)$. Označme $F(x)$ distribuční funkci náhodné veličiny*

$$Z_n = \frac{Y_n - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}.$$

Potom platí

$$\lim_{n\to\infty} F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = \Phi(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

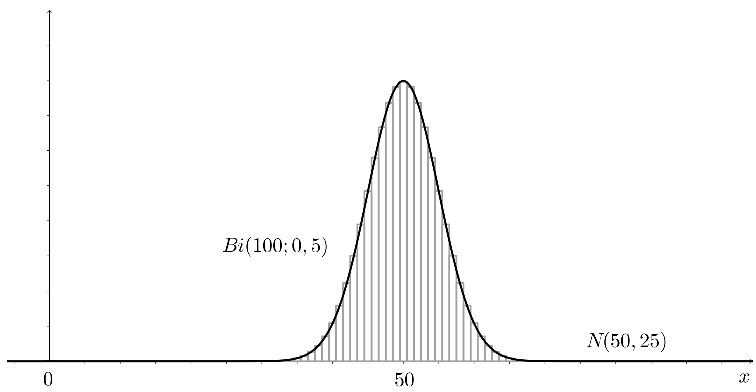
Důkaz. $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, kde $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny se stejným alternativním rozdělením. $\mu = E(X) = \theta, \sigma^2 = D(X) = \theta(1-\theta) \in \left(0, \frac{1}{4}\right\rangle$. Normované součty Z_n odpovídají normovaným součtům ve větě 4.0.4. □

Poznámka 4.0.1. Pro dostatečně velká n má náhodná veličina

$$Z_n = \frac{Y_n - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}$$

přibližně normální rozdělení $N(0,1)$, nebo jinak formulováno pro velká n má binomická náhodná veličina Y_n přibližně normální rozdělení $N(n\theta, n\theta(1-\theta))$.

Aproximace jsou vyhovující, jsou-li splněny podmínky $n\theta(1-\theta) > 9$ a $\frac{1}{n+1} < \theta < \frac{n}{n+1}$.



Obrázek 4.1: Zobrazení pravděpodobnostní funkce binomického rozdělení $Bi(100; 0,5)$ proložené normální křivkou $N(50, 25)$

Věta 4.0.6. *Nechť náhodná veličina X_n má $\chi^2(n)$ rozdělení pravděpodobnosti. Pak pro $n \to \infty$ má náhodná veličina*

$$Y = \frac{X_n - n}{\sqrt{2n}}$$

normální rozdělení pravděpodobnosti $N(0,1)$.

Důkaz. Viz [11, str. 337] □

Kapitola 5

Studentovo t-rozdělení

Studentovo rozdělení je odvozené od normálního, než se jím však budeme podrobněji zabývat, musíme si připomenout několik základních poznatků ze dvou speciálních funkcí, se kterými budeme dále pracovat.

5.1 Gama a beta funkce

Zpracováno dle [22] a [25].

Definice 5.1.1. Nechť $s \in \mathbb{R}^+$. Funkce Γ $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definovanou vztahem

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x$$

nazýváme gama funkcí nebo Eulerovým integrálem 2. druhu.

Gama funkce je zobecněním faktoriálu reálných čísel.
Platí pro ni:

1. $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$,
2. $\Gamma(1) = 1$,
3. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$,
4. $\Gamma(s) = (s-1)!$ pro přirozené s.

Definice 5.1.2. Nechť $p, q \in \mathbb{R}^+$. Funkci B $f : \mathbb{R}^2_{++} \to \mathbb{R}$ definovanou vztahem

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} \mathrm{d}x$$

nazýváme beta funkcí nebo Eulerovým integrálem 1. druhu.

Pro beta funkci platí:

1. $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$,
2. $B(p,q) = B(q,p)$.

5.2 t-rozdělení

Zpracováno dle [11], [13], [20], [25] a [28].

William Sealy Gosset v roce 1908 publikoval pojednání, ve kterém poznamenal, že jestliže náhodné výběry velikostně menší než 30 jsou brány z normálního rozdělení a tyto výběry použity pro odhad rozptylu, pak statistika

$$\frac{\bar{y}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

není normálně rozdělena. Pravděpodobnosti chvostů tohoto rozdělení jsou větší než pravděpodobnosti standardizovaného normálního rozdělení.

Gosset také poznamenal, že pokud se n zvyšuje, toto nové rozložení se přibližuje ke standardizovanému normálnímu rozdělení. Jak už víme, protože Gosset nemohl publikovat pod svým jménem, používal pseudonym *Student*. Proto se toto rozdělení nazývá Studentovo rozdělení.

Věta 5.2.1. *Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny, přičemž $X \sim N(0,1)$ a $Y \sim \chi^2(\nu)$. Pak má náhodná veličina*

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{\nu}}}$$

Studentovo t-rozdělení o ν stupních volnosti, které se značí $t(\nu)$ a má hustotu

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

nebo se také uvádí

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\nu}\,B\left(\frac{1}{2},\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}.$$

Důkaz. Pro důkaz této věty ještě budeme potřebovat následující větu.

Věta 5.2.2. *Nechť X, Y jsou nezávislé náhodné veličiny s hustotami pravděpodobností f_X a f_Y a nechť $f_Y(y) = 0$ pro $y \leq 0$. Potom má náhodná veličina $Z = \frac{X}{Y}$ hustotu*

$$g(z) = \int_0^\infty y f_X(zy) f_Y(y)\, dy \qquad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Náhodná veličina $T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{\nu}}} = \frac{X\sqrt{\nu}}{\sqrt{Y}}$ je vyjádřena podílem náhodných veličin $X \sim N(0,1)$ a $Y \sim \chi^2(\nu)$.

Hustota náhodné veličiny X je pro $x > 0$ dána funkcí $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ a hustota náhodné veličiny Y je pro $y > 0$ $f_Y(y) = \frac{1}{\Gamma(\frac{\nu}{2})2^{\frac{\nu}{2}}} y^{\frac{\nu}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}$, pro $y \leq 0$ je hustota $f_Y(y) = 0$.

Provedeme transformaci $Z = \sqrt{Y}$, takže $T = \frac{X\sqrt{\nu}}{Z}$. Náhodná veličina Z bude nabývat stejně jako Y pouze kladných hodnot. Distribuční funkce F_Z je pro $z > 0$ rovná

$$F_Z(z) = P(\sqrt{Y} < z) = P(Y < z^2) = \int_0^{z^2} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) 2^{\frac{2}{\nu}}} y^{\frac{\nu}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{y}{2}} \mathrm{d}y = \left| \begin{array}{c} y = t^2 \\ \\ \mathrm{d}y = 2t\mathrm{d}t \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^z \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) 2^{\frac{2}{\nu}}} (t^2)^{\frac{\nu}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} 2t\mathrm{d}t = \int_0^z \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) 2^{\frac{2}{\nu}-1}} t^{\nu-1} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$$

Takže $F_Z(z) = \int_0^z \frac{1}{\Gamma(\frac{\nu}{2})2^{\frac{2}{\nu}-1}} t^{\nu-1}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$ a hledaná hustota náhodné veličiny Z je

$$f_Z(z) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}-1}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} z^{\nu-1}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}} \text{ pro } y > 0.$$

Náhodná veličina $S = X\sqrt{\nu}$ má podle věty 3.0.1 rozdělení $N(0, \nu)$. Po dosazení jeho střední hodnoty a rozptylu do vzorce hustoty normálního rozdělení $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ pro $x \in \mathbb{R}$ dostáváme hustoty náhodné veličiny S

$$f_S(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}}\mathrm{e}^{-\frac{s^2}{2\nu}}.$$

Teď, když známe obě dílčí hustoty, můžeme podle věty 5.2.2 odvodit hustotu náhodné veličiny $T = \frac{X\sqrt{\nu}}{\sqrt{Y}}$

$$f(t) = \int_0^\infty x f_S(tx) f_Z(x)\mathrm{d}x = \int_0^\infty x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2x^2}{2\nu}} \cdot \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}-1}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} x^{\nu-1}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}-1}2^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi\nu}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^\infty x^{\nu-1}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}\left(\frac{t^2}{\nu}+1\right)} x\mathrm{d}x = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi\nu}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^\infty x^{\nu-1}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}\left(\frac{t^2}{\nu}+1\right)} x\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{c} z = \frac{x^2}{2}\left(\frac{t^2}{\nu}+1\right) \\ \\ \mathrm{d}z = x\left(\frac{t^2}{\nu}+1\right)\mathrm{d}x \end{array} \right| = \frac{1}{2^{\frac{\nu-1}{2}}\sqrt{\pi\nu}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^\infty 2^{\frac{\nu-1}{2}} z^{\frac{\nu-1}{2}} \left(\frac{t^2}{\nu}+1\right)^{-\frac{\nu-1}{2}} \mathrm{e}^{-z} \left(\frac{t^2}{\nu}+1\right)^{-1} \mathrm{d}z =$$

$$= \frac{\left(\frac{t^2}{\nu}+1\right)^{-\frac{\nu-1}{2}-1}}{\sqrt{\pi\nu}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^\infty z^{\frac{\nu-1}{2}}\mathrm{e}^{-z}\mathrm{d}z = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(\frac{t^2}{\nu}+1\right)^{-\frac{\nu-1}{2}-1}$$

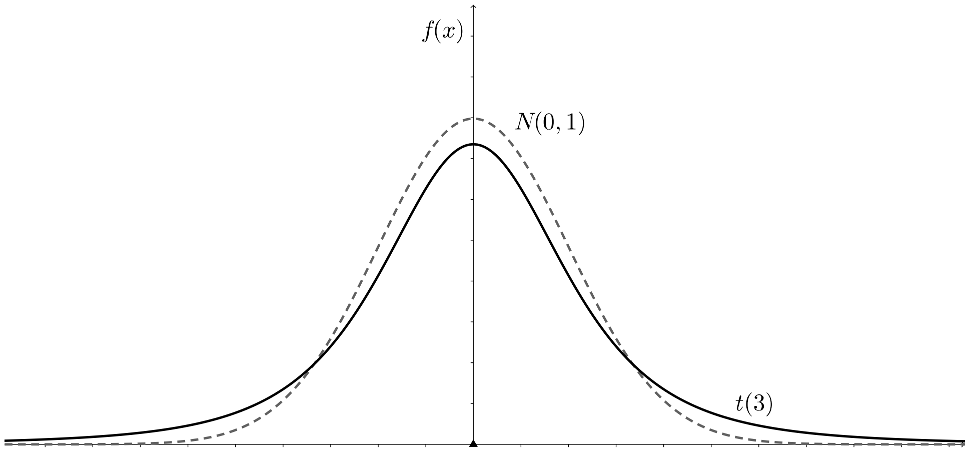
$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu}\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(\frac{t^2}{\nu}+1\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \sim t(\nu)$$

□

Studentovo rozdělení je:

1. jednovrcholové,

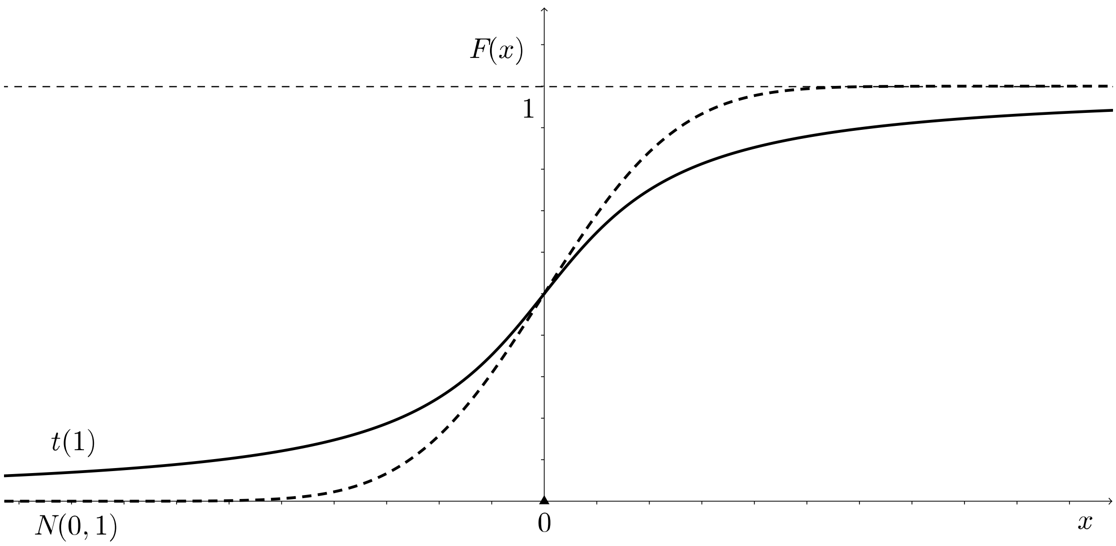
2. symetrické kolem nuly, tzn. $F(-x) = 1 - F(x),$ resp. $f(-x) = f(x)$,
3. závisí na ν tzv. stupních volnosti, kde $\nu \in \mathbb{N}$,
4. pro $\nu \to \infty$ konverguje k $N(0,1)$.



Obrázek 5.1: Křivka hustoty Studentova rozdělení v porovnání s Gaussovou křivkou

Distribuční funkce je dána vztahem

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \mathrm{d}x.$$



Obrázek 5.2: Křivka distribuční funkce Studentova rozdělení $t(1)$ a normálního standardizovaného rozdělení $N(0,1)$

Střední hodnota $E(X) = 0$ pro $\nu > 1$ a rozptyl $D(X) = \frac{\nu}{\nu-2}$, pokud $\nu > 2$.

Důkaz. $f(x) = a \cdot \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}$, kde $\quad a = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$,

$E(X) = a \int_{-\infty}^{\infty} x \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \mathrm{d}x = 0$ podle integrálu z liché funkce.

Poznámka 5.2.1. Proč se $\nu \neq 1$?

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{0} xf(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x$

$$\int\limits_{0}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int\limits_{0}^{t} a \cdot x \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \mathrm{d}x = a \lim_{t\to\infty} \int\limits_{0}^{t} x \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \mathrm{d}x =$$

$$= a \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{\nu}{\nu-1} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu-1}{2}} \right]_0^t = a \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{\nu}{\nu-1} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu-1}{2}} + \frac{\nu}{\nu-1} 1^{-\frac{\nu-1}{2}} \right) =$$

$$= a \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{\nu}{\nu-1} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu-1}{2}} + \frac{\nu}{\nu-1} \right) = -\frac{a\nu}{\nu-1} \left\{ \lim_{t\to\infty} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu-1}{2}} - 1 \right\};$$

podmínky $\nu \neq 0$ a $\nu \neq 1$.

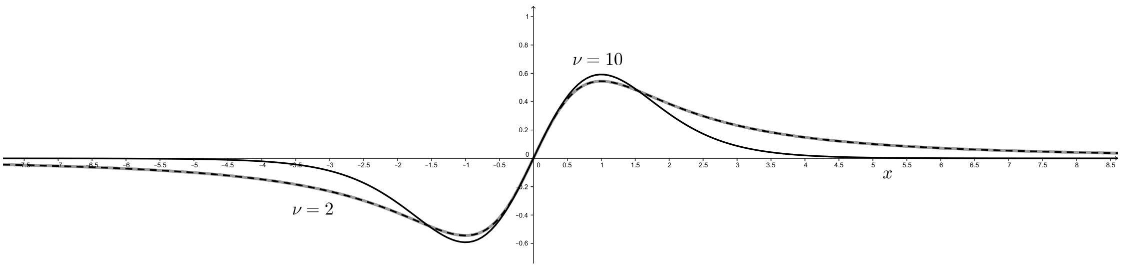
Poznámka 5.2.2. Pokud je funkce lichá, splňuje podmínku

$$\forall x \in D(f) : f(-x) = -f(x)$$

takže

$$-x \left(1 + \frac{(-x)^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} = -\left(x \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

a graf liché funkce je souměrný podle počátku.



Obrázek 5.3: Grafy funkce $x\left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$ pro různá ν

$$D(X)=a\int_{-\infty}^{\infty}x^2\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}\mathrm{d}x=2a\int_{0}^{\infty}x^2\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}\mathrm{d}x=$$

$$=\left|\begin{array}{c} x=\sqrt{\frac{\nu y}{1-y}} \\ \\ \mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\nu}}{2}\frac{\sqrt{1-y}}{(1-y)^2\sqrt{y}}\mathrm{d}y \end{array}\right|=2a\int_0^1\frac{\nu y}{1-y}\left(1+\frac{\frac{\nu y}{1-y}}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}\frac{\sqrt{\nu}}{2}\frac{\sqrt{1-y}}{(1-y)^2\sqrt{y}}\mathrm{d}y=$$

$$=a\nu^{\frac{3}{2}}\int_0^1\frac{y}{1-y}\left(1+\frac{y}{1-y}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}\frac{\sqrt{1-y}}{(1-y)^2\sqrt{y}}\mathrm{d}y=$$

$$=a\nu^{\frac{3}{2}}\int_0^1\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1-y}(1-y)^2}\left((1-y)^{-1}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}\mathrm{d}y=a\nu^{\frac{3}{2}}\int_0^1\sqrt{y}(1-y)^{-\frac{5}{2}}(1-y)^{\frac{\nu+1}{2}}=$$

$$=a\nu^{\frac{3}{2}}\int_0^1 y^{\frac{1}{2}}(1-y)^{\frac{\nu}{2}-2}\mathrm{d}y=a\nu^{\frac{3}{2}}\,B\left(\frac{3}{2};\frac{\nu}{2}-1\right)=a\nu^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})\nu^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma(\frac{\nu}{2})}\cdot\frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}=\frac{\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{\nu}{2})}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-1\right)=\frac{\nu}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\nu}{2}\frac{\left(\frac{\nu}{2}-2\right)!}{\left(\frac{\nu}{2}-1\right)!}=\frac{\nu}{\nu-2}\quad\text{pro } \nu>2,$$

podle integrálu ze sudé funkce.

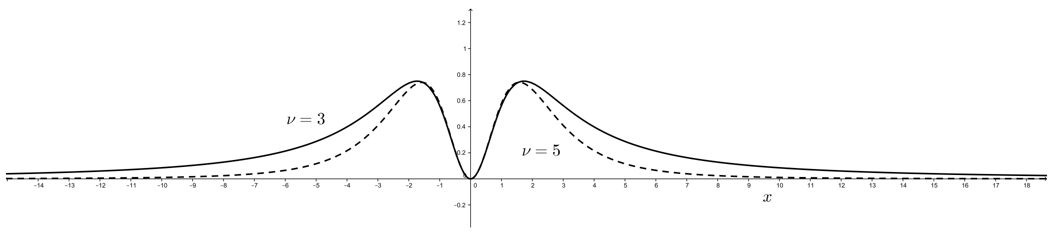
Poznámka 5.2.3. Pokud je fukce sudá, pak musí splňovat

$$\forall x\in D(f): f(x)=f(-x)$$

takže

$$(-x)^2\left(1+\frac{(-x)^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}=x^2\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

a graf sudé funkce je souměrný podle osy y.



Obrázek 5.4: Grafy funkce $x^2\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$ pro různá ν

□

Věta 5.2.3. *Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, potom náhodná proměnná t definovaná vztahem*

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S}\sqrt{n}, \qquad \text{kde } S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

má t-rozdělení s $n - 1$ stupněm volnosti.

Věta 5.2.4. *Máme dané dva nezávislé náhodné výběry, jeden o rozsahu n_1 z rozdělení $N(\mu_1, \sigma^2)$ a druhý o rozsahu n_2 z rozdělení $N(\mu_2, \sigma^2)$. Nechť $\bar{X}_1, \bar{X}_2, S_1^2$ a S_2^2 jsou výběrové průměry a rozptyly. Potom náhodná proměnná t definovaná vztahem*

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

má Studentovo rozdělení s $(n_1 + n_2 - 2)$ stupněmi volnosti, kde

$$S = \sqrt{\frac{1}{n_1 + n_2 - 2}(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}.$$

Důkaz. [25, str. 161] □

5.3 Cauchyovo rozdělení

Zpracováno dle [11], [21], [22] a [25].

Cauchyovo rozdělení má dva parametry a a b, kde $a \in (-\infty, \infty)$ a $b \in (0, \infty)$. Jeho hustota pravděpodobnosti je dána vztahem

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{b}{b^2 + (x-a)^2}\ , \qquad x \in (-\infty, \infty)$$

a distribuční funkce má tvar

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right).$$

Standardizované Cauchyovo rozdělení má parametry $a = 0$ a $b = 1$ a dostáváme jej jako podíl dvou náhodných nezávislých veličin majících $N(0, 1)$ rozdělení pravděpodobnosti. Jeho hustota je

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + x^2}$$

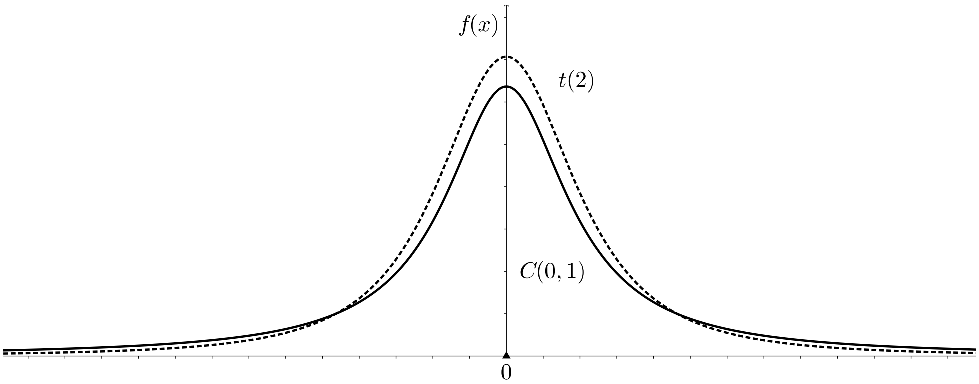
a jeho distribuční funkce je

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan x\,.$$

Jedná se o speciální typ Studentova rozdělení s jedním stupněm volnosti.

Toto rozdělení nemá ani střední hodnotu ani rozptyl, jelikož

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{b^2 + (x-a)^2}\,\mathrm{d}x = \infty\,.$$



Obrázek 5.5: Cauchyovo rozdělení $C(0,1)$ v porovnání s t-rozdělením $t(2)$

Kapitola 6

Výběrové rozdělení výběrových průměrů

Ne vždy dokážeme rozpoznat rozdělení pravděpodobnosti statistického souboru ani jeho parametry. Proto, jak už jsme dříve zmínili, se musíme spokojit s tím, že uděláme ze statistického souboru náhodný výběr, který tvoří nový výběrový statistický soubor, podle něhož získáme povědomí o rozdělení původního statistického souboru. Použijeme výběrový průměr, který je definován vztahem

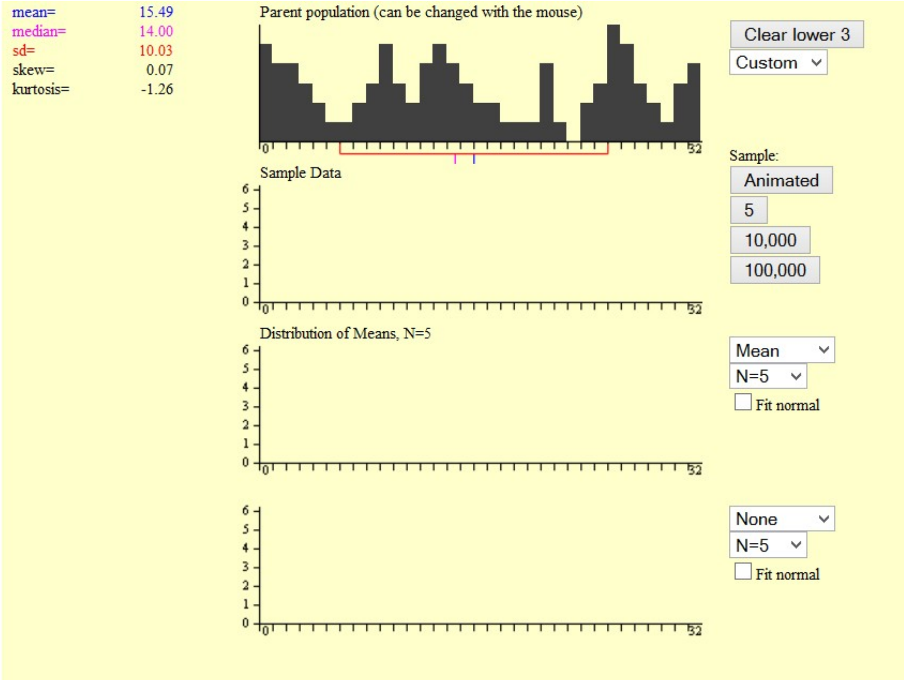
$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j.$$

A podle výše zmíněných vlastností výběrových průměrů (viz kapitola 4) je $\mu_{\bar{X}} = \mu_X$ a $\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2_X}{n}$ a pro dostatečně velká n je rozdělení výběrového průměru téměř symetrické a jednovrcholové, je tedy přibližně normálně rozděleno.

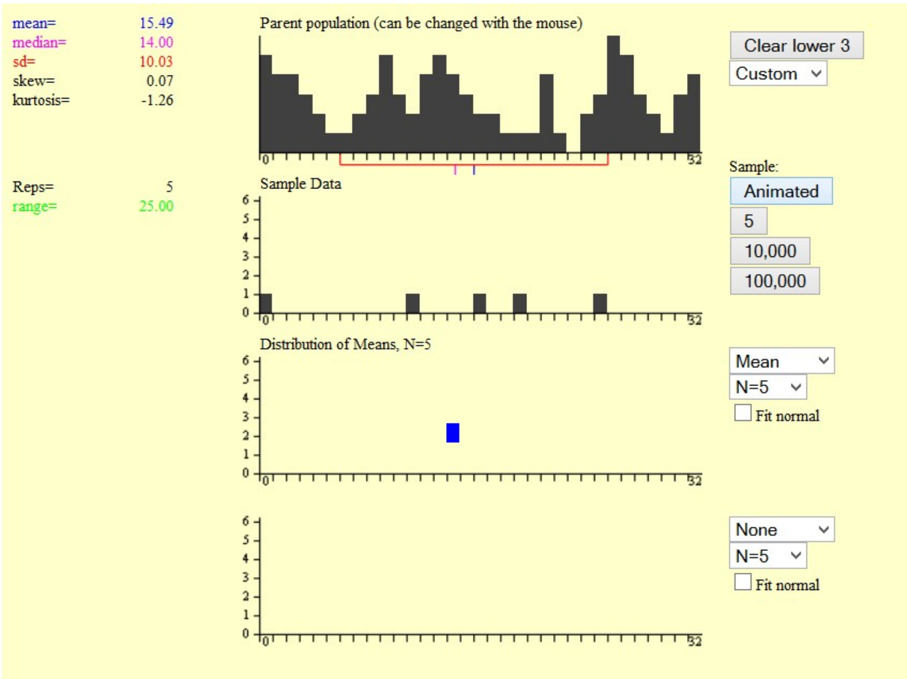
My uděláme výběrový průměr pro níže uvedený statistický soubor, nejprve o 5 výběrech, jehož výběrový průměr budeme značit $\bar{X}$, a pak o 20 výběrech, jehož výběrový průměr budeme značit $\bar{Y}$. Potom můžeme porovnat, jestli se μ a σ^2 řídí podle vlastností výběrového průměru.

Pracuji s programem, který je dostupný na http://onlinestatbook.com/.

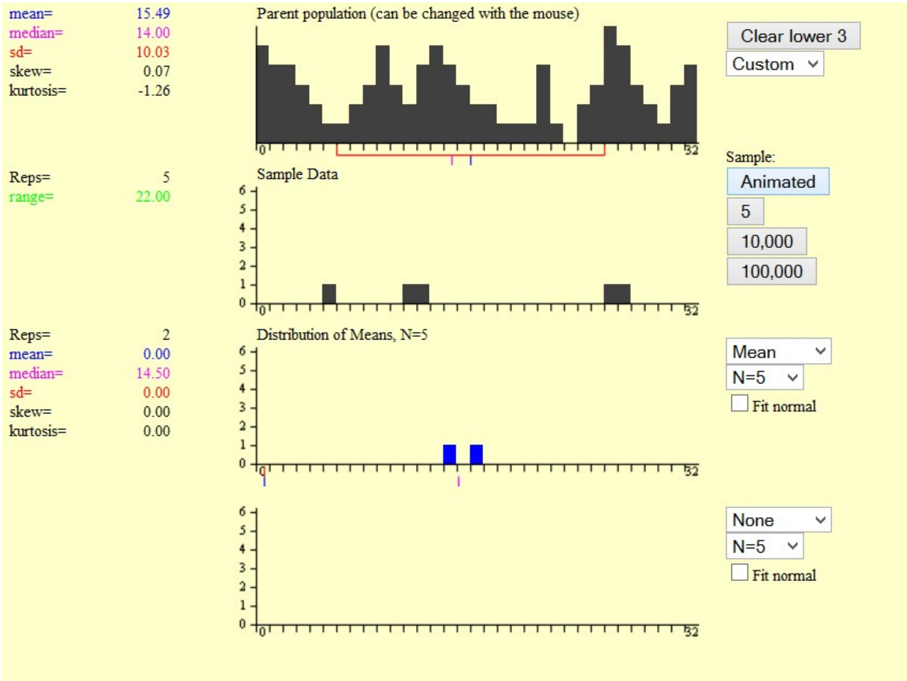
Vytvořili jsme si vlastní rozdělení, které ani zdaleka nepřipomíná normální či jiné rozdělení a které může nabývat jedné ze 32 hodnot s různou pravděpodobností. Jeho střední hodnota je v tomto případě 15,49 a směrodatná odchylka je 10,03.



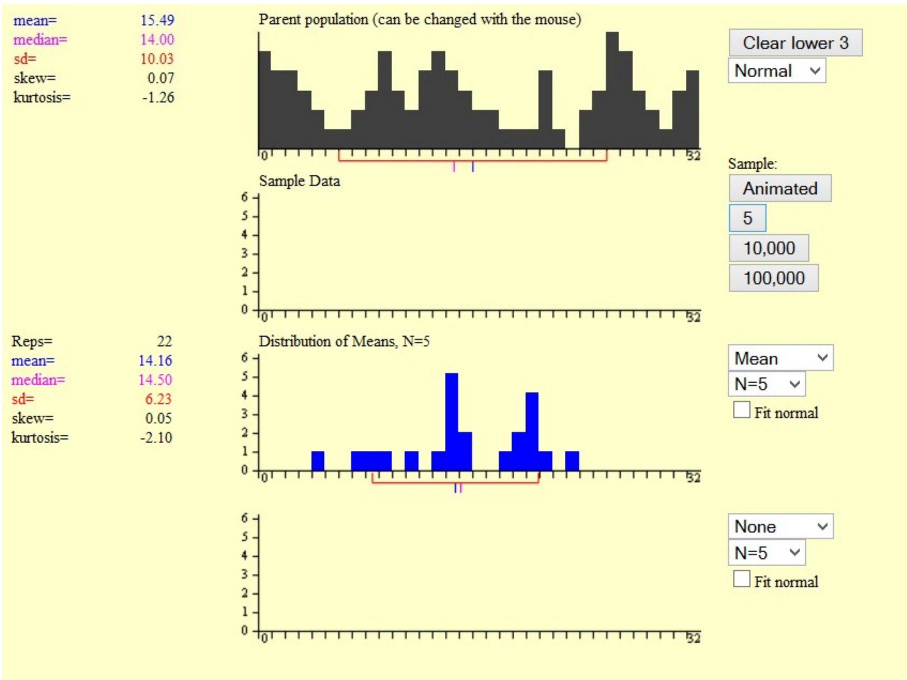
Začneme s výběrem o velikosti 5, takže se nám vybere 5 hodnot z našeho pravděpodobnostního rozdělení a po spuštění animace se nám těchto 5 hodnot zprůměruje a vykreslí se nám velikost prvního průměru.



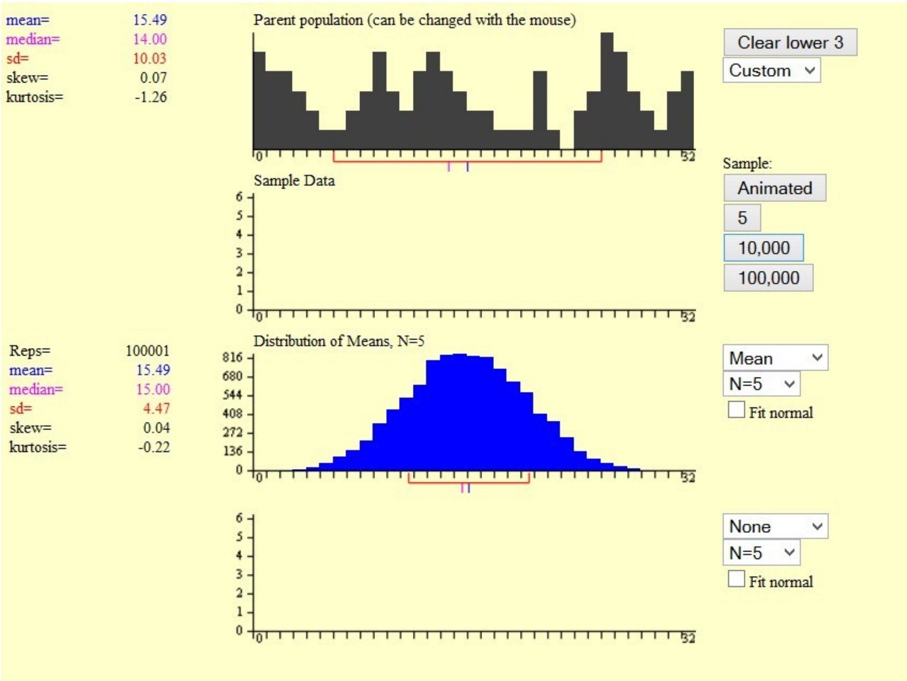
Znovu to zopakuji a vykreslí se nám další průměr.



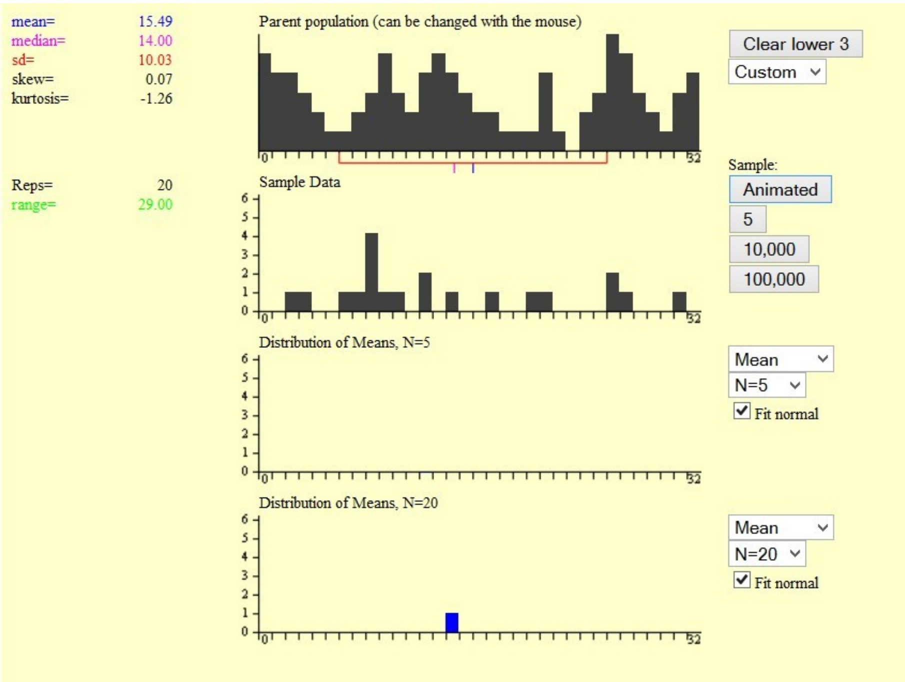
A tento výběr můžeme zopakovat třeba ještě 20 krát.

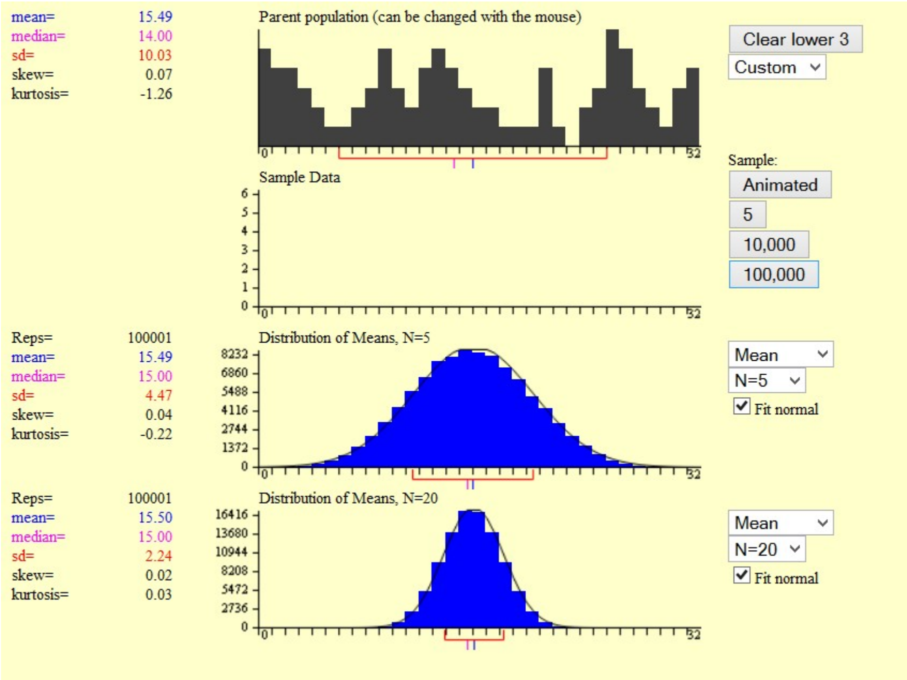


Řekněme, že bychom toto chtěli udělat třeba 10 000 krát. Takže se nám vygeneruje pět náhodných čísel v souladu s naším pravděpodobnostním rozdělením, vykreslí jejich průměr a to udělá 10 000 krát. Všimněte si, že už to dost připomíná křivku normálního rozdělení. Střední hodnota se po 10 000 výběrech změnila na 15,49, takže se rovná původní střední hodnotě a směrodatná odchylka se zmenšila.



Můžeme to samé zopakovat pro větší výběr třeba o velikosti 20. Tentokrát se nám vybere 20 hodnot a zakreslí se nám jejich průměr a opět to můžeme udělat třeba 10 000 krát.





U výběru o rozsahu 20 máme střední hodnotu 15,50 a směrodatnou odchylku pouhých 2,24, takže hodnoty se více blíží střední hodnotě, což je logické, protože čím větší máme výběr, tím je menší pravděpodobnost, že se nám všechny hodnoty vyberou buď z jednoho konce rozdělení nebo naopak z toho druhého. Navíc jsme obě výběrová rozložení proložili křivkami normálního rozložení, takže se můžete přesvědčit, že se tato výběrová rozložení normálnímu rozložení blíží. Ještě si porovnáme střední hodnoty souborů:

$$
\begin{aligned}
& \mu_X = 15,49 \\
\text{pro } n = 5 \quad & \mu_{\bar{X}} = 15,49 = \mu_X \\
\text{pro } n = 20 \quad & \mu_{\bar{Y}} = 15,50 \approx \mu_X
\end{aligned}
$$

a jejich rozptyly

$$
\begin{aligned}
& \sigma_X^2 = 10,03^2 = 100,6009 \\
\text{pro } n = 5 \quad & \sigma_{\bar{X}}^2 = 4,47^2 = 19,9809 \\
& \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{100,6009}{5} = 20,12018 \\
& \sigma_{\bar{X}}^2 \approx \frac{\sigma_X^2}{5} \\
\text{pro } n = 20 \quad & \sigma_{\bar{Y}}^2 = 2,24^2 = 5,076 \\
& \sigma_{\bar{Y}}^2 = \frac{100,6009}{20} = 5,03045 \\
& \sigma_{\bar{Y}}^2 \approx \frac{\sigma_X^2}{20} \; .
\end{aligned}
$$

Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo přiblížení historie normálního a Studentova rozdělení. Normální rozdělení popsalo nezávisle na sobě hned několik vědců. Abraham de Moivre pomocí normální křivky popsal limitní chování binomického rozdělení, když se snažil aproximovat výpočty jednotlivých pravděpodobností binomického rozdělení po velká n. Pierre Simon de Laplace odvodil toto rozdělení jako zákon chyb stejně jako Carl Friedrich Gauss a oba ho používali pro interpretaci astronomických a geodetických měření, výsledků hazardních her a přesnosti dělostřelecké střelby. William Sealy Gosset popsal, díky své práci pivovarníka, t-rozdělení, které z normálního rozdělení vychází, ale pravděpodobnosti jeho chvostů jsou větší než u standardizovaného normálního rozdělení.

Zpočátku byl velký problém sehnat nějaké podrobnější informace jak k samotným vědcům, tak především ke Studentovu rozdělení. V českém jazyce jsem objevila pouze biografii Carla Friedricha Gausse a Pierra Simona de Laplace. Proto jsem hodně čerpala převážně z anglické literatury a anglicky psaných textů. Ve většině českých učebnic statistiky se zas nacházely pouze kusé informace ke Studentovu rozdělení, dlouho jsem proto sháněla učebnice s nějakými podrobnějšími informacemi. Díky psaní práce jsem si rozšířila své znalosti normálního i Studentova rozdělení.

Do budoucna by šla práce určitě ještě rozšířit o detailnější popis a historii χ^2 a Fisherova-Snedeckorova rozdělení, případně i o využití všech těchto rozdělení.

Seznam obrázků

Literatura

[1] *100 nejslavnějších vědců: nejvýznamnější osobnosti vědy od starověkého Řecka po současnost.* Vyd. 1. Brno: Jota, 2009, 304 s. ISBN 978-80-7217-658-8.

[2] Abraham de Moivre: French mathematician. 2015. *Encyclopedia Britannica* [online]. [cit. 2015-05-08]. Dostupné z: http://www.britannica.com/EBchecked/topic/387796/Abraham-de-Moivre

[3] Abraham de Moivre. 2004. *MacTutor History of Mathematics archive* [online]. [cit. 2015-05-08]. Dostupné z: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/De_Moivre.html

[4] *Ilustrovaný encyklopedický slovník.* Vyd. 1. Praha: Academia, 1980-1982, 3 sv. (970, 957, 975 s.).

[5] Pierre-Simon Laplace. 1999. *MacTutor History of Mathematics archive* [online]. [cit. 2015-05-08]. Dostupné z: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Laplace.html

[6] William Sealy Gosset. 2003. *MacTutor History of Mathematics archive* [online]. [cit. 2015-05-08]. Dostupné z: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Gosset.html

[7] WILLIAM SEALY GOSSET "STUDENT"(1876-1937). *User Web Areas* [online]. [cit. 2015-05-08]. Dostupné z: www-users.york.ac.uk/ pml1/tex/maths/student.tex

[8] ACZEL, Amir D. *Náhoda: příručka pro hazardní hráče, zamilované, obchodníky s cennými papíry a pro všechny ostatní.* Přeložil Jan Švábenický. Praha: Dokořán, 2008, 165 s. ISBN 978-80-7363-191-8.

[9] ANDĚL, Jiří. *Matematická statistika.* 2. vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1985, 346 s.

[10] ANDĚL, Jiří. *Statistické metody.* Praha: Matfyzpress, 1993, 246 s.

[11] ANDĚL, Jiří. *Základy matematické statistiky.* 2., opr. vyd. Praha: Matfyzpress, 2007, 358 s. ISBN 978-80-7378-001-2.

[12] BOX, Joan Fisher. *Guinness, Gosset, Fisher, and Small Samples.* Statistical Science. 1987, vol. 2, issue 1, s. 45–52. DOI: 10.1214/ss/1177013437. Dostupné z: http://www.jstor.org/stable/2245613.

[13] DOWDY, Shirley a Stanley WEARDEN. *Statistics for research.* New York: John Wiley & Sons, 1983, 537 s. ISBN 0-471-08602-9.

[14] GILLISPIE, Charles Coulston, Robert FOX a I GRATTAN-GUINNESS. *Pierre-Simon Laplace, 1749-1827: a life in exact science* [online]. Princeton, N.J.: Princeton University Press, c1997, xii, 322 p. [cit. 2015-03-16]. ISBN 06-910-1185-0. Dostupné z: http://books.google.cz/books/p/princeton?id=iohJomX0IWgC&printsec=frontcover&hl=cs&source=gbs_ViewAPI&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false

[15] HAHN, Roger. *Pierre Simon Laplace, 1749-1827: a determined scientist* [online]. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 2005, x, 310 p. [cit. 2015-03-16]. ISBN 06-740-1892-3. Dostupné z: http://books.google.cz/books?id=ROu0P-pYQekC&printsec=frontcover&hl=cs&source=gbs_ViewAPI&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false

[16] HENDL, Jan.*Přehled statistických metod zpracování dat: analýza a metaanalýza dat.* Vyd. 2., opr. Praha: Portál, 2006, 583 s. ISBN 80-7367-123-9.

[17] JJUNGNICKEL, Christa a Russell MCCORMMACH. *Cavendish* [online]. Philadelphia, Pa.: American Philosophical Society, 1996, 414 p. [cit. 2015-03-13]. Memoirs of the American Philosophical Society, v. 220. ISBN 08-716-9220-1. Dostupné z: http://books.google.cz/books?id=eiDoN-rg8I8C&pg=PA52&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false

[18] KROPÁČ, Jiří.*Statistika A: náhodné jevy, náhodné veličiny, náhodné vektory, indexní analýza, rozhodování za rizika* . Vyd. 5., V CERM 1. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2013, vi, 134 s. ISBN 978-80-7204-835-9.

[19] KUNDEROVÁ, Pavla. *Úvod do teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky.* 1. vyd. Olomouc: Vydavatelství Univerzity Palackého, 1997, 193 s. ISBN 80-7067-710-4.

[20] LIKEŠ, Jiří a Josef MACHEK. *Matematická statistika.* 2. nezměn. vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1988, 178 s.

[21] LIKEŠ, Jiří a Josef MACHEK. *Počet pravděpodobnosti.* 2. nezm. vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1987, 159 s.

[22] LINDA, Bohdan. *Pravděpodobnost.* Vyd. 1. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2010, 167 s. ISBN 978-80-7395-303-4.

[23] MLODINOW, Leonard. *Život je jen náhoda: jak náhoda ovlivňuje naše životy.* Praha: Slovart, 2009, 246 s. ISBN 978-80-7391-259-8.

[24] PICKOVER, Clifford A. *Matematická kniha: od Pythagora po 57. dimenzi : 250 milníků v dějinách matematiky.* 1. vyd. v českém jazyce. Praha: Argo, 2012, 542 s. Zip (Argo: Dokořán). ISBN 978-80-257-0705-0.

[25] RIEČAN, Beloslav, František LAMOŠ a Cyril LENÁRT. *Pravdepodobnosť a matematická štatistika.* 2. vyd. Bratislava: Alfa, 1992, 317 s. ISBN 80-05-00654-3.

[26] SMITH, By David Eugene. *A source book in mathematics* [online]. Thid Dover ed., 1st publ. in 1959, is an unabridged republication of the 1st ed., originally publish. New York: Dover Publications, 1959 [cit. 2015-03-13]. ISBN 978-048-6646-909. Dostupné z: https://archive.org/details/sourcebookinmath00smit

[27] STUDNIČKA, František Josef: *Bohatýrové ducha: Mikuláš Koperník, Galileo Galilei, Marcus Marci, René Descartes, G.W. Liebnic a Isák Newton, Stanislav Vydra, Karel B. Gauss, Jan Ev. Purkyně.* Praha: F.J. Studnička, 1898, s. 262

[28] ŠIKULOVÁ, Marie a Zdeněk KARPÍŠEK. *Pravděpodobnost a matematická statistika.* Vyd. 5. Brno: PC-DIR, 1996, 204 s. ISBN 80-214-0830-8.

[29] WUSSING, Hans. *Carl Friedrich Gauss.* Leipzig: B.G. Teubner, 1974, 100 s.

[30] ZABELL, S. L. *On Student's 1908 Article "The Probable Error of a Mean".* Journal of the American Statistical Association [online]. 2008, vol. 103, issue 481, s. 1–7 [cit. 2015-02-26]. DOI: 10.1198/016214508000000030. Dostupné z: http://www.google.cz/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=7&ved=0CFwQFjAG&url=http%3A%2F%2Fqobweb.igc.gulbenkian.pt%2Fcourses%2Fsqb2010%2Fdocs%2FZabel-2008-JournalOfTheAmericanStatisticalAssociation.pdf&ei=7uxDVYT8C434aqv7gYAI&usg=AFQjCNE641dsSE5pD-wg6P5RvMlBSsVvAg&bvm=bv.92291466,d.d2s

[31] ZVÁRA, Karel a Josef ŠTĚPÁN. *Pravděpodobnost a matematická statistika.* Vyd. 3. Praha: MATFYZPRESS, 2002, 230 s. ISBN 80-85863-93-6.