Univerzita Palackého v Olomouci
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Historie dokazování Velké Fermatovy věty

Vypracovala:	**Bc. Adriana Kolářová**
Studijní program:	Učitelství matematiky pro 2. stupeň základních škol
Studijní obor:	Učitelství matematiky pro 2. stupeň základních škol/ Učitelství fyziky pro střední školy (UMma-Fmi)
Forma studia:	Prezenční
Vedoucí diplomové práce:	doc. RNDr. Tomáš Zdráhal, CSc.
Termín odevzdání práce:	Listopad 2022

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou diplomovou práci vypracovala samostatně pod vedením doc. RNDr. Tomáše Zdráhala, CSc., a že jsem použila zdrojů, které cituji a uvádím v seznamu použitých pramenů.

V Olomouci dne 1. prosince 2022

. . . .

Bc. Adriana Kolářová

Poděkování

Tímto bych chtěla poděkovat vedoucímu své diplomové práce doc. RNDr. Tomáši Zdráhalovi, CSc. za odborné vedení této práce a mnoho užitečných odkazů, které jsem mohla v rámci psaní využít. Dále bych chtěla poděkovat Ing. Nikolovi Ciprichovi za pomoc při sestavení programu pro hledání domnělých řešení Velké Fermatovy věty, Barboře Ivaničové za kontrolu překladů do anglického jazyka a Bc. Janě Končítkové za kontrolu pravopisu. Velké díky patří mému partnerovi Mgr. Jakubovi Ivaničovi za velkou podporu i pomoc při hledání důkazu k množství domnělých řešení Velké Fermatovy věty a také mým rodičům za podporu a ochotu si tuto práci přečíst.

Bibliografická identifikace

Jméno a příjmení autora	Bc. Adriana Kolářová
Název práce	Historie dokazování Velké Fermatovy věty
Typ práce	Diplomová
Pracoviště	Katedra matematiky
Vedoucí práce	doc. RNDr. Tomáš Zdráhal, CSc.
Rok obhajoby práce	2022
Abstrakt	Práce pojednává o historii dokazování Velké Fermatovy věty, seznamuje čtenáře s tím, co to Velká Fermatova věta je, jsou v ní nalezena domnělá řešení Velké Fermatovy věty a obsahuje důkaz toho, že domnělých řešení Velké Fermatovy věty je nekonečně mnoho.
Klíčová slova	Velká Fermatova věta, domnělá řešení Velké Fermatovy věty, Fermat, Euler, Germain, Galois, Wolfshekl, Šimura/Shimura, Tanijama, Frey, Ribet, Taylor, Mazur, Coates, Mijaoka, eliptické křivky, modulární formy
Počet stran	76
Počet příloh	3
Jazyk	český

Bibliographical identification

Autor's first name and surname	Bc. Adriana Kolářová
Title	History of proving Fermat's Last Theorem
Type of thesis	Master
Department	Department of Mathematics
Supervisor	doc. RNDr. Tomáš Zdráhal, CSc.
The year of presentation	2022
Abstract	This work discusses the history of proving Fermat's Last Theorem, introduces the reader to what Fermat's Last Theorem is, the supposed solutions of Fermat's Last Theorem are found in it, and contains a proof that there are infinite number of supposed solutions of Fermat's Last Theorem.
Keywords	Fermat's Last Theorem, supposed solution of Fermat's Last Theorem, Fermat, Euler, Germain, Galois, Wolfshekl, Shimura, Tanijama, Frey, Ribet, Taylor, Mazur, Coates, Mijaoka, elliptic curves, modular forms
Number of pages	76
Number of appendices	3
Language	czech

Obsah

Úvod

Téma této diplomové práce jsem si vybrala proto, že mne velmi baví spojení matematiky a historie a právě problém důkazu Velké Fermatovy věty krásně propojuje oba dva tyto obory. Zároveň je Velká Fermatova věta něčím, co mne zaujalo svou zdánlivou jednoduchostí, která po tři a půl staletí pokořovala i největší světové matematiky.

Historie důkazu je propletena zajímavými příběhy těch, kteří nějakým způsobem přispěli k důkazu této velkolepé věty.

Taktéž se s tímto problémem můžeme setkat i v různých známých seriálech, jako jsou Simpsonovi či Star Trek nebo třeba v obměněném díle Johanna Wolfganga von Goetha *Faust*, nazvaném *Deals with the Devil* od Arthura Porgese.

Cílem teoretické části této diplomové práce bylo, jak již název sám napovídá, seznámení čtenáře s historií dokazování Velké Fermatovy věty a též tím, co to Velká Fermatova věta je. Nicméně historii dokazování bych chtěla představit spíše z toho historického hlediska, kde se budeme zabývat životem matematiků, kteří s důkazem měli co dočinění. U některých osob uvádím též odkazy na jejich důkazy či na videa o jejich životě.

Právě ve výše zmíněném seriálu Simpsonovi se objevila tzv. domnělá řešení Velké Fermatovy věty, jejichž hledání je cílem mé praktické části. Původním cílem praktické části bylo nalézt nějaké domnělé řešení této věty a z „nějakého" řešení bylo nalezeno „o něco více" řešení, než bylo mým původním cílem.

Práce je psána se záměrem seznámit s Velkou Fermatovou větou čtenáře, kteří o tomto problému nikdy neslyšeli a kteří nemusí mít matematiku na vysokoškolské úrovni. Snaha byla taková, aby této práci rozuměl i ten, kdo studuje například základní či střední školu anebo obor, nesouvisející s matematikou. Teoretická část je psána hlavně formou příběhů matematiků. Kapitola pojednávající o životě a práci Andrewa Wilese a Richarda Taylora je o něco odbornější a objevují se v ní pojmy z teorie čísel, jako jediná může být pro čtenáře složitější.

Přeji vám příjemné čtení a doufám, že vás tato práce alespoň z části zaujme.

Kapitola 1

Teoretická část diplomové práce

1.1 Seznámení se s Velkou Fermatovou větou

Když napíši, že Velká Fermatova věta je věta, kterou prohlásil nějaký Fermat, asi to nikoho nepřekvapí, stejně tak, jako nikoho nepřekvapí, že Pythagorova věta je věta, s níž přišel Pythagoras (přesněji řečeno, je to vztah, který platí mezi délkami stran pravoúhlého trojúhelníka). Takto bych mohla ukončit a shrnout celé seznámení, ale to bych nerada, proto se pojďme na Velkou Fermatovu větu podívat, seznámit se s ní a ukázat si, co je na ní výjimečného.

Počátky Velké Fermatovy věty, či v angličtině Fermat's Last Theorem, sahají již do antického Řecka, tedy 2 000 let před tím, než Pierre de Fermat zformuloval problém v té podobě, v jaké vám jej za chvíli představím [1].

V roce 1640 publikoval Samuel de Fermat, syn Pierra de Fermata, Diofantovu Aritmetiku rozšířenou o poznámky, které jeho otec připisoval na okraje Bachetova vydání Aritmetiky z roku 1621. V jedné z těchto poznámek Fermat bez důkazu napsal větu, která se dnes všeobecně nazývá Velká Fermatova věta [2].

Věta 1.1 *Neexistují přirozená čísla $n \geq 3$, x, y a z tak, že*

$$x^n + y^n = z^n. \tag{1.1}$$

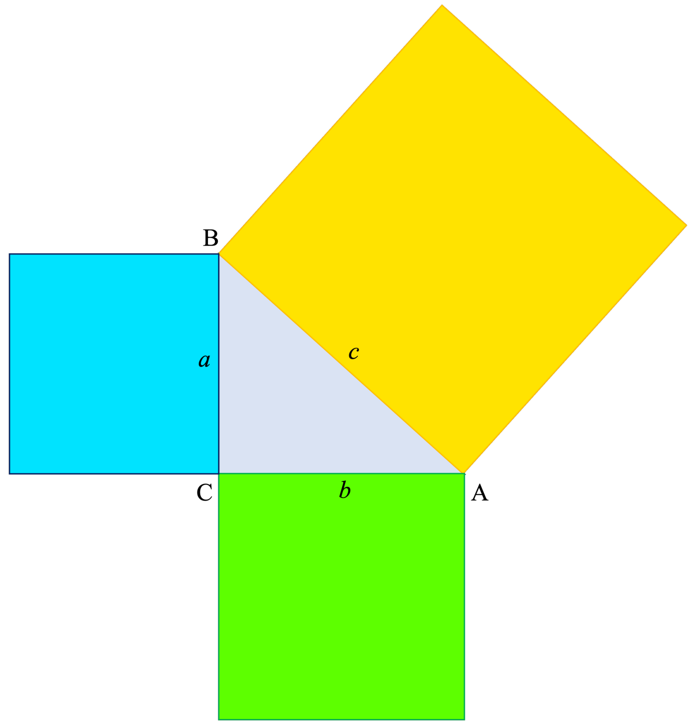
K této větě připsal Pierre de Fermat ještě dvě poznámky. První zněla takto: „*Cubem autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est devidere.*“ Což je přeloženo jako: „*Je nemožné napsat třetí mocninu jako součet dvou třetích mocnin nebo čtvrtou mocninu jako součet dvou čtvrtých mocnin, či, obecně, žádné číslo, které samo je mocninou větší než druhou, nelze napsat jako součet dvou stejných mocnin.*“ Druhá, která se stala noční můrou mnohých matematiků pro tři a půl staletí, pak takto: „*Cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi hanc marginis exiguitas non caparet.*“ Tedy v překladu: „*Mám skutečně nádherný důkaz tohoto tvrzení, avšak tento okraj je příliš úzký na to, abych jej zde uvedl [1].*“

Vzhledem k náročnosti důkazu Velké Fermatovy věty, a tedy neexistence řešení rovnice (1.1), můžeme dnes pouze hádat, zda měl Fermat chybný důkaz, či zda žádný důkaz neměl a snažil se pouze „napálit“ své matematické kolegy.

Zavzpomínejme nyní společně na 8. ročník základní školy, kde jsme se učili následující větu.

Věta 1.2 *Součet obsahu čtverců sestrojených nad oběma odvěsnami je roven součtu obsahu čtverce, sestrojeného nad přeponou.*

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{1.2}$$



Obrázek 1.1: Pythagorova věta v grafickém znázornění. Vytvořeno autorkou v programu MS Word.

Mnozí z vás jistě správně poznali, že (1.2) je Pythagorova věta, kterou můžete vidět v grafickém znázornění na obrázku (1.1). Když se podíváme na rovnice (1.1) a (1.2), vidíme dva velmi podobné zápisy, z nichž jeden má nekonečně mnoho řešení a je pro něj asi 300 důkazů (ano, Pythagorova věta) a druhý nemá řešení a existuje pouze jeden, velice složitý důkaz (Fermatova věta) [3]. Pro lepší názornost můžeme čísla a,b,c nahradit čísly x,y,z, čímž dostaneme rovnici (1.3).

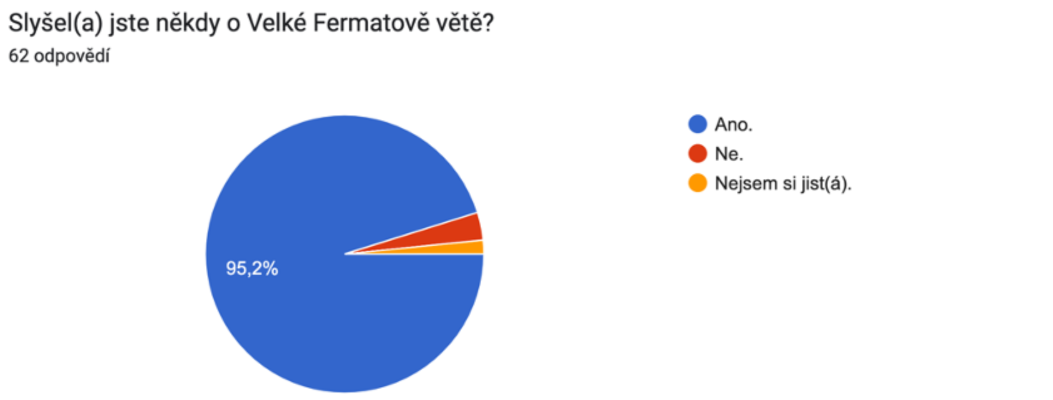
$$x^2 + y^2 = z^2. \tag{1.3}$$

U naší Velké Fermatovy věty bychom neměli najít žádné řešení pro rovnici (1.1), ale Pythagorova věta ve tvaru (1.2) má nejen nekonečně mnoho řešení, ale též pravidla pro to, jak tato řešení v oboru přirozených čísel $\mathbb{N}$ vypadají, vzhledem k tomu, že hledáme hodnoty tří členů, nazýváme soubor těchto členů Pythagorejskou trojicí a v oboru přirozených čísel $\mathbb{N}$ pro členy a, b a c, kde $a < b < c$ platí tato pravidla:

1. a nebo b je násobkem čísla 3,
2. a, b nebo c je násobkem čísla 5,
3. c nikdy není násobkem čísla 7 [4].

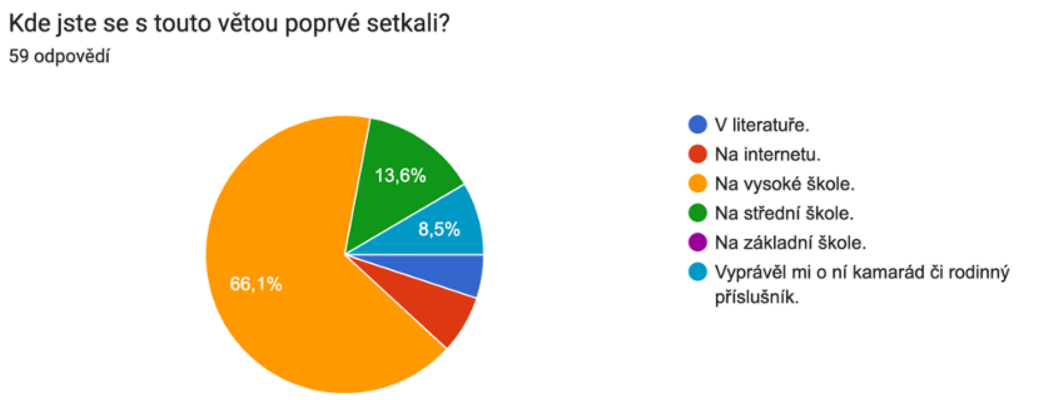
1.2 Mé okolí a jejich povědomí o Velké Fermatově větě

Když jsem se s touto větou poprvé setkala v knize [5], nenapadlo mne, že by něco, co vypadá tak jednoduše a podobně jako Pythagorova věta, kterou jsou svým způsobem schopni pochopit žáci základní školy, mohlo trápit velké matematiky po 350 let. Proto jsem se ještě před začátkem psaní této práce rozhodla oslovit lidi v mém okolí, kteří studují či studovali matematiku a zjišťovala jsem jejich povědomí o Velké Fermatově větě (dále jen VFV). Z oslovených 62 respondentů má povědomí o této větě 95,2 % z nich, což je 59 respondentů. Graf můžete vidět na (1.2).



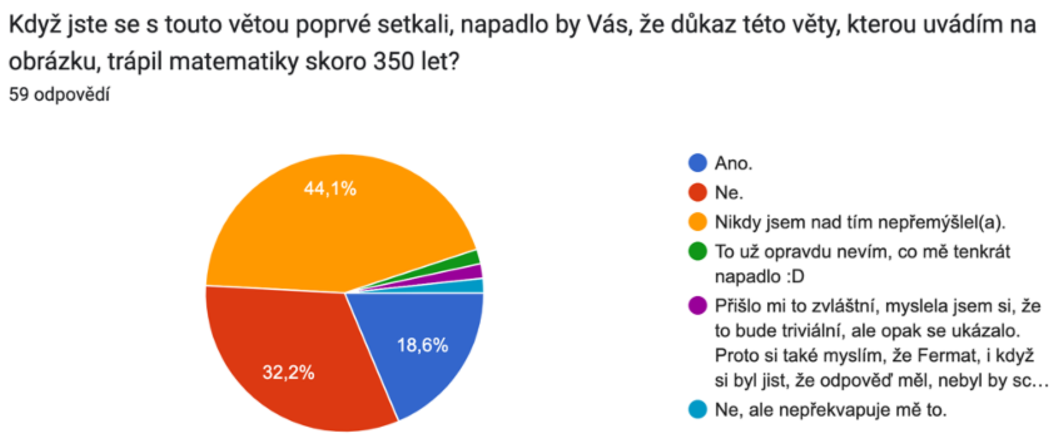
Obrázek 1.2: Povědomí respondentů o VFV.

Z 59 respondentů, kteří VFV znají, se s ní většina setkala při studiu na vysoké škole, konkrétně 66,1 %, což je 39 lidí, 8 respondentů se s ní setkalo již na střední škole, 5 osob o VFV slyšelo od kamaráda či rodinného příslušníka, 4 lidé na internetu a 3 lidé, včetně mě, v knize. Graf můžete vidět na (1.3).



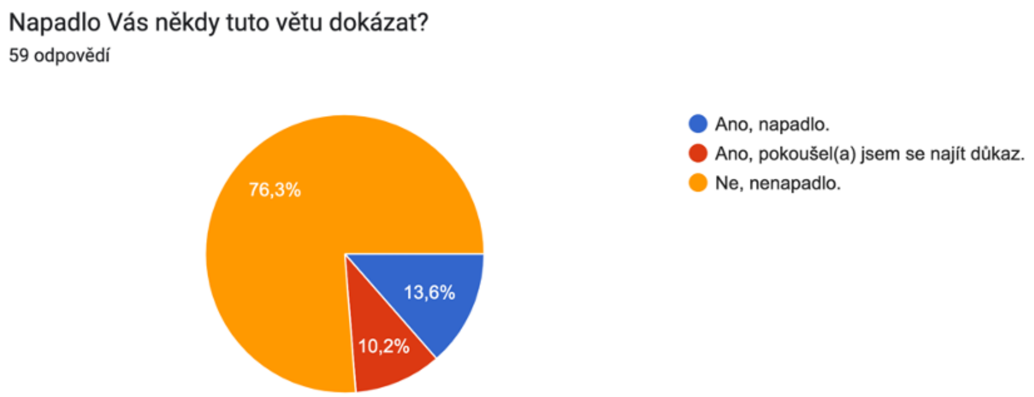
Obrázek 1.3: Kde se respondenti s VFV setkali.

Dále mě zajímalo, zda někoho z dotazovaných, kteří o VFV mají nějaké povědomí, napadlo, že by Fermatovo tvrzení mohlo být složité dokázat i pro velké matematiky, jako je například Carl Friedrich Gauss či Leonhard Euler. Většina dotazovaných nad tím nepřemýšlela, přesně 26 osob,19 lidí by nenapadlo, že to bude takový problém a 11 lidí si bylo vědomo, že s tím bude problém, zbylí 3 respondenti uváděli ještě jiné odpovědi. Graf můžete vidět na (1.4).



Obrázek 1.4: Odpověď na otázku, zda respondenty napadlo, že by dokazování VFV mohlo být tak náročné.

A poslední věc, která mne zajímala a kterou zde chci zmínit je otázka, zda se k této větě někdo z dotazovaných snažil nalézt důkaz. Většina, přesně 45 osob, odpovídala, že se důkaz nepokoušela hledat, 8 lidí napadlo důkaz nalézt a 6 osob se dokonce pokoušelo důkaz nalézt. Graf můžete vidět na (1.5).



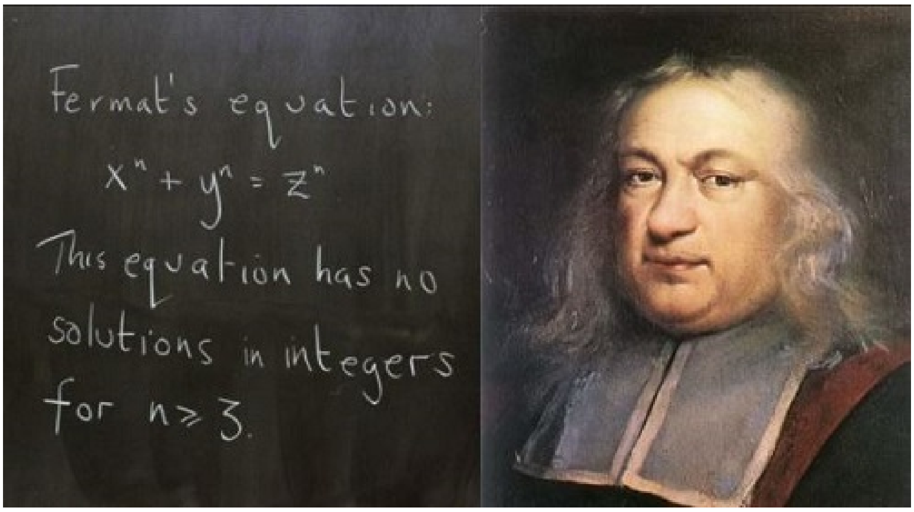
Obrázek 1.5: Odpověď na otázku, zda se někdy respondenti snažili VFV dokázat.

Z výše uvedených grafů můžete vidět, že část respondentů, kteří se při svém studiu na vysoké škole setkali s matematikou, se také ve velké míře setkali s Velkou Fermatovou větou a pár z těch, kteří se s VFV setkali, se nad důkazem nějak zamýšleli či se dokonce pokusili nějaký důkaz vymyslet.

1.3 Lidé spojeni s dokazováním Velké Fermatovy věty

V úvodu této kapitoly je potřeba zmínit, že se zde zabývám pouze některými matematiky, kteří byli s dokazováním Velké Fermatovy věty spojeni.

1.3.1 Pierre de Fermat



Obrázek 1.6: Pierre de Fermat. Obrázek stažen z [a].

Pierre se narodil 17. srpna 1601 v Beaumont-de-Lomagne ve Francii do bohaté měšťanské rodiny, díky tomu se Pierrovi dostalo velmi dobrého vzdělání v klášteře v Grandselve a po té následoval pobyt na univerzitě v Toulouse.

Po studiích se stal toulouským parlamentním radou, k jeho povinnostem patřila i služba u soudu. I přesto, že byl Fermat státním úředníkem, dopisoval si o nejrůznějších matematických problémech s matematiky Johnem Wallisem a Kenelmem Digbym, ale též se slavnějšími matematiky, jako jsou Blais Pascal a Marin Mersenne, ovšem korespondence ze strany Fermata nebyla nikterak přátelská. Avšak korespondence s Digbym nám dnes poskytuje důležitá svědectví o Fermatově každodenním životě a jeho vědecké práci.

Dle [1] byl prý Mersenne jediným člověkem, jehož prostřednictvím Fermat udržoval spojení s ostatními matematiky. Vliv Mersenna na Fermata ovšem nebyl tak důležitý, jako *Aritmetika* od Diofanta. Ani přes naléhání Mersenna Fermat nikdy nezpřístupnil světu své důkazy.

Fermat je na jednu stranu popisován jako plachý a skromný, ale též škodolibý k jiným matematikům, v korespondenci s nimi je často škádlil tím, že formuloval své nejnovější objevy bez důkazu a vyzval adresáta, aby důkaz nalezl sám.

Když byl Fermat nucen Pascalem, aby alespoň něco ze své práce zveřejnil, dostalo se mu od Fermata této odpovědi: „I kdyby cokoli z mé práce bylo hodno publikování, nechci, aby se v souvislosti s tím objevilo mé jméno.“

Pascal byl mimo Mersenna jediným, s nímž si Fermat vyměňoval názory. V jejich společné konverzaci lze nalézt základy nové vědní disciplíny - teorie pravděpodobnosti - disciplíny, jejímž hlavním rysem je neurčitost.

Fermat je též považován za jednoho z otců kalkulu, čili základů diferenciálního a integrálního počtu. Právě Fermatovy matematické výsledky umožnily vědcům lépe pochopit pojem rychlosti a jejího vztahu k ostatním základním veličinám, jako je zrychlení a, které v základní fyzice definujeme jako změnu rychlosti $\triangle v$ za určitou dobu $\triangle t$.

Fermat je jedním z předních matematiků první poloviny 17. století, zajímavostí je, že nejsou dochovány žádné informace o tom, že by Fermat vynikal v matematice, či že by se mu dostalo nějakého speciálního matematického vzdělání nebo že by měl kdy nějakého učitele matematiky. Sám E. T. Bell nazval Fermata „knížetem amatérů“. Naopak když Julian Coolidge psal knihu *Matematika velkých amatérů*, nezařadil do ní Fermata s odůvodněním, že byl tak dobrý, že by se měl počítat mezi profesionály.

Během morové epidemie prodělal mor i sám Fermat, byl tak vážně nemocen (rok 1652), že jeho přítel Bernard Medon oznámil několika kolegům, že Fermat moru podlehl, brzy po té se však opravil a prohlásil, že je Fermat stále živ a že se jeho zdravotní stav zlepšil natolik, že není potřeba se o jeho zdraví obávat. O třináct let později, přesně 9. ledna 1665 v Cartres Fermat zemřel.

Pro tuto práci je nejdůležitější z Fermatových tvrzení právě Velká Fermatova věta. Pro matematiky je důležité, aby každé tvrzení bylo dokázáno, teprve poté je možné, nazývat tvrzení větou. Například taková Riemannova hypotéza doteď nebyla dokázána, proto je „jen“ hypotézou, ovšem u Velké Fermatovy věty jsme až do devadesátých let 20. století žádný všeobecný důkaz neměli, mnoho matematiků tvrzení dokázalo pro určité exponenty, ale až Wiles s Taylorem přišli s důkazem pro celou větu. Kdyby se matematikové rozhodli vzít za platné jakékoli z Fermatových tvrzení bez důkazu a stavěli na těchto tvrzeních tvrzení nová, pak by se i nová tvrzení mohla stát podkladem pro další, složitější tvrzení, a pokud by někdo vyvrátil Fermatovo tvrzení, o nějž se opíralo mnoho dalších, pak by to znamenalo, že musí být vyvrácena i ta další tvrzení.

Fermat tvrdil, že má důkaz pro každé ze svých tvrzení, ovšem důkazy těchto tvrzení nikde nedokládal. Jak plynuly dny, byla všechna Fermatova tvrzení dokázána, tedy až na jedno, které si na svůj důkaz muselo počkat 350 let, tímto tvrzením je právě naše Velká Fermatova věta, která je v anglicky mluvících zemích nazývána jako *Fermat's Last Theorem*, tedy v překladu *Poslední Fermatova věta* či dle [1] *Poslední z Fermatových vět*. Tento název nese proto, že tato věta byla nakonec jediným Fermatovým tvrzením, které nebylo dokázáno. Po tři staletí úsilí velkých matematiků nevedla k nalezení úplného důkazu, což z této věty udělalo nejznámější a nejnáročnější matematický problém. Sláva Velké Fermatovy věty pramení z toho, jak obtížné je nalézt její důkaz, o němž Fermat tvrdil, že jej nalezl. Tímto tvrzením zesměšnil celé generace matematiků. Fermatovy poznámky na okrajích *Aritmetiky* byly výzvou pro celý svět.

Sám Fermat ale dle [2] nalezl důkaz neexistence řešení pro $n = 4$ a to s využitím metody nekonečného sestupu.

Ne všichni velcí matematikové se však pokoušeli nalézt důkaz, pan Carl Friedrich Gauss ve své korespondenci s německým astronomem Heinrichem Olbersem napsal toto: „(...) Přiznávám se však, že Velká Fermatova věta mě jako izolovaný problém bez dalšího využití příliš nezajímá. Sám bych mohl velmi snadno formulovat celou řadu podobných hypotéz, které nelze ani dokázat, ani vyvrátit.“ A například německý matematik David Hilbert, který byl známý svým sebevědomím tvrdil, že důkaz by samozřejmě našel, ale „nechce zaříznout slepici, která snáší zlatá vejce“.

E. T. Bell ve své knize *The Last Problem* píše: „Je pravděpodobné, že civilizace dospěje ke svému konci dříve, než bude Velká Fermatova věta vyřešena.“

Pověst Velké Fermatovy věty přerostla dokonce hranice matematiky a v roce 1958 si našla cestu do faustovsky laděného literárního díla s názvem *Deals with the Devil*, tedy Dohody s Ďáblem, v českém překladu *Ďábel a Simon Flagg*, což je povídka Arthura Porgese, v níž vyzve ďábel muže jménem Simon Flagg, aby mu položil otázku, pokud ji do 24 hodin zvládne zodpovědět, může si vzít Simonovu duši, jestliže se mu to nepodaří, vyplatí Simonovi 100 000 dolarů. Simon položí otázku, zda je VFV pravdivá, ďábel cestuje celým světem a snaží se načerpat veškeré možné matematické vědomosti. Druhý den se vrací a je nucen přiznat porážku:

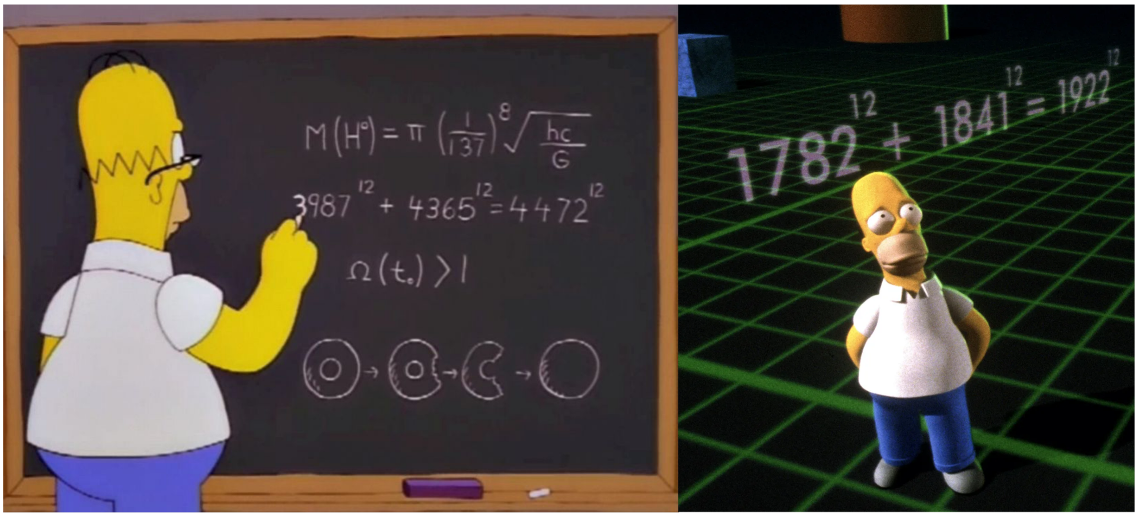
„Vyhrál jsi Simone,“ řekl téměř šeptem a měřil si jej s nepředstíraným respektem. „Dokonce ani já nejsem schopen vstřebat tolik matematických znalostí za tak krátký čas. Čím víc o problému vím, tím těžší se mi zdá. Nejednoznačný rozklad, ideály - fuj! Věřil bys,“ přiznal pokorně Ďábel „že dokonce ani nejlepší matematici ostatních planet - všichni mnohem lepší, než ti vaši - ten problém nevyřešili? No a to znám jednoho borce na Saturnu - vypadá tak trochu jako hřib na chůdách - který řeší parciální diferenciální rovnice zpaměti, a ani ten si s tím nevěděl rady.“

Pokud vás povídka zaujala, tak zde ji můžete nalézt v anglickém jazyce.[1]

Nejen v literárním díle se s Velkou Fermatovou větou setkáme. Pokud znáte seriál Simpsonovi, tak zde se setkáme ve dvou dílech s domnělými řešeními Velké Fermatovy věty. Poprvé se s řešením setkáme ve Speciálním Čarodějnickém díle 7. série, konkrétně část Homer[3], díl 6. z roku 1995 a po druhé v díle „Kouzelník z Evergreen Terrace,“ tedy v 10. sérii, 2. díl z roku 1998.

Také například v seriálu Star Trek: Nová generace v epizodě „HotelRoyale“ popisuje Velkou Fermatovu větu kapitán Jean-Luc Picard jako: „hádanku, kterou možná nikdy nevyřešíme“. Ten se však plete, jelikož se epizoda odehrává ve 24. století a věta byla dokázána ve století 20.

Na tomto lze pěkně vidět, že Fermat se se svým tvrzením proslavil nejen mezi matematiky, ale též mezi spisovateli a scénáristy [A, 1, 5, 6, 7, 8, 18].



Obrázek 1.7: Homer Simpson a domnělá řešení Velké Fermatovy věty. Obrázky staženy z [b, c].

[1]Pro tištěnou verzi přikládám odkaz v celém znění: `https://simonsingh.net/books/fermats-last-theorem/wacky-fermat-stuff/devilish-short-story/`.

1.3.2 Leonhard Euler

Obrázek 1.8: Leonhard Euler. Obrázek stažen z [d].

Jméno Leonharda Eulera[2] je spojováno s takzvaným Eulerovým číslem e (někdy je Eulerovo číslo pojmenováno též jako Napierova konstanta po objeviteli logaritmu Johna Napiera), jehož hodnota je přibližně 2,72, a setkáme se s ním při výpočtu přirozených logaritmů i při výpočtu limit, derivací a integrálů[3]. Eulerovo číslo je považováno za jednu z nejdůležitějších konstant v matematice. Euler vypočítal hodnotu této konstanty na 23 desetinných míst. Hodnotu Eulerova čísla nalezneme i na chytrých kalkulačkách.

Leonhard Euler se narodil 15. 4. 1707 ve Švýcarské Basileji jako syn pastora. Rodiče jej předurčili k dráze duchovního. Ve svých šestnácti letech vystudoval filosofii a následně studoval teologii, řečtinu a hebrejštinu v Basileji. Časem však zjistil, že matematika jej láká mnohem více, své zásluhy na tom má rodina Bernoulliů, s níž se rodina Eulerů přátelila. Otec Eulera byl naštěstí rozumný a přestup z teologie na matematiku mu schválil.

Díky své matematické vyzrálosti neušel pozornosti mocností tohoto světa a brzy se mu dvořily obce napříč Evropou. V devatenácti letech mu vyšla první vědecká práce o izochronách v odporujícím prostředí a chvíli na to výpočet optimálního rozmístění stožárů na plachetních lodích. Mohl přijmout místo na Pařížské akademii, která v té době byla centrem veškerých matematických aktivit, místo toho však přijal nabídku Petrohradské akademie věd, mohl se tak připojit ke svým přátelům z Basileje, kteří jej podporovali už v dobách, kdy byl ještě chlapec. Před plánovaným příjezdem do Petrohradu mu tito přátelé napsali dopis, v něm jej požádali o 8 kg kávy, 0,5 kg nejlepšího zeleného čaje, 6 láhví brandy, 12 tuctů nejjemnějších dýmek a pár tuctů balíčků hracích karet. Mladému Eulerovi, který byl po zuby ověšený dárky pro své přátele, trvalo 7 týdnů, než úmornou pouť lodí, pěšky a v poštovním voze zdolal.

Euler působil v Petrohradě na Akademii od roku 1727 do roku 1741. Před tím, než

[2] Čtěte [ojlera].

[3] Eulerovo číslo je definováno jako limitní roční návratnost jednotkové částky při ročním stoprocentním úroku, pokud se frekvence splácení zvyšuje nade všechny meze či jako jediné reálné číslo a takové, že funkce a^x má hodnotu směrnice tečny v bodě nula rovnu jedné. Vypočítat toto číslo můžeme následovně $\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$[E].

na Akademii vedl přednášky, se dokonce na krátkou dobu živil jako lékař v carském námořnictvu.

V Rusku si zvykl a oženil se zde s dcerou švýcarského malíře Katharinou Gsellovou, s níž měl 13 dětí. Žil velmi skromně v malém dřevěném domku, vyhýbal se společenským zábavám a věnoval se vědeckým problémům, rodině a úzkému kruhu přátel.

V důsledku politických a společenských změn v Rusku se situace na Akademii začala komplikovat, Euler byl pověřován stále novými povinnostmi, byl inspektorem geografického oddělení a zasloužil se o zpracování prvního rozsáhlého atlasu celé ruské říše. Tato práce, které se věnoval s plným nasazením, mu způsobila vážné nervové onemocnění, v důsledku něhož Euler přestal vidět na jedno oko. Kvůli oslepnutí na jedno oko si vysloužil přezdívku Kyklop. Sám Euler ztrátu jednoho oka nebral nikterak tragicky a dokonce prohlásil: „Budu teď alespoň méně rozptylován.“ Rozhodl se přijmout nabídku pruského krále Fridricha II. Velikého a stal se ředitelem matematického oddělení na Akademii v Berlíně. V Berlíně působil od roku 1741 do roku 1766, během této doby se poměry v Rusku zlepšily a na trůn usedla Kateřina II. Veliká.

Euler považoval Rusko za svůj druhý domov a k nelibosti Fridricha II. Velikého se vrátil do Petrohradu, kde zůstal až do své smrti.

Po návratu do Ruska Euler opět onemocněl a přišel o zrak téměř úplně[4].

Během požáru roku 1771 málem přišel o život, shořela mu knihovna i část jeho rukopisů. V roce 1776 přišel o svou manželku a vzal si její nevlastní sestru Salome Abigail Gsellovou.

Než přišel o zrak úplně, začal trénovat psaní se zavřenýma očima, aby si zdokonalil techniku ještě před tím, než se mu svět ponoří do tmy úplně. Během několika týdnů oslepl. Trénink z počátku přinášel ovoce, po několika měsících však začal být rukopis nečitelný, a tak se jeho písařem stal syn Albert a někteří z jeho oddaných žáků, kterým své poznámky diktoval a díky nimž mohl dále publikovat svá pozoruhodná díla. Zároveň za to vděčil i své velmi dobré paměti, v hlavě nosil své rozpracované poznámky a dál na nich pracoval. Údajně učil své vnuky matematiku a psal při tom na tabuli.

Eulerovy matematické počiny, které vytvořil během svého pobytu v Petrohradu, byly tak rozsáhlé, že Petrohradská akademie měla co publikovat ještě padesát let po Eulerově smrti.

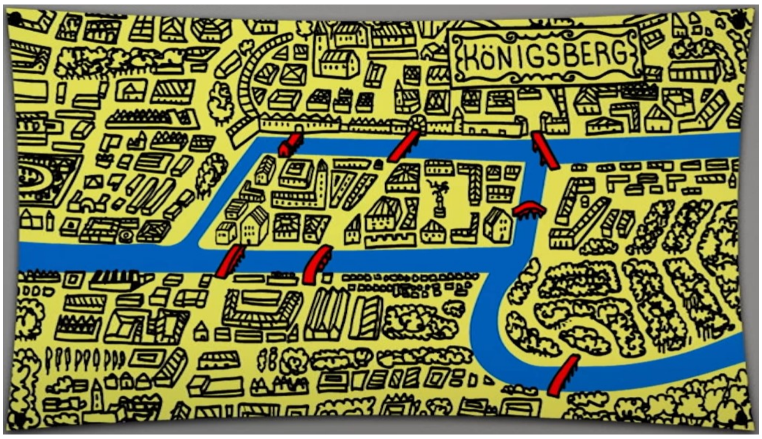
Úlohu dvorního matematika údajně ilustruje historka, která se tradovala během Eulerova pobytu v Petrohradu, kde Kateřina Veliká hostila na svém dvoře francouzského filosofa a ateistu Denise Diderota. Diderot vždy matematikou okázale pohrdal a tvrdil, že matematika nepřináší nic nového a slouží leda k tomu, aby vytvořila bariéru mezi lidskými bytostmi a přírodou. Brzy měla Kateřina Veliká svého hosta plné zuby, a to hlavně kvůli jeho pokusům otřást náboženskou vírou jejích dvořanů. Euler měl pomoci, aby Diderota umlčel, a tak z vděčnosti Kateřině Veliké Diderota oslovil: „Pane, $((a + b^n)/n = x)$, a tedy Bůh existuje. Odpovězte, prosím.“ Diderot se prý před takovým náporem abstrakce dal na ústup. Tato historka, kterou zpopularizoval anglický matematik Augustus de Morgan, byla pravděpodobně lidovou tvořivostí přikrášlena a spíše dokládá fakt, že mnoho matematiků to vždy rádo natře filosofům.

Euler psal i pojednání z hudební teorie, jeho dílo bylo však chápáno jako příliš matematické pro hudebníky a příliš hudební pro matematiky.

Jeden ze známějších vyřešených matematických problémů Eulera bylo řešení královeckých mostů. Řeka Pregel, dnes Pregolia, protéká městem Královec (někdy Königsberg a dnes Kalinigrad), který v Eulerově době náležel Prusku. Řeka se v jednom

[4] Po operaci šedého zákalu se mu zrak na krátkou dobu mírně zlepšil.

místě rozdvojuje a vytváří uprostřed města dva ostrovy. Obyvatelé přes řeku postavili 7 mostů. Situaci můžete vidět na obrázku (1.9).



Obrázek 1.9: Problém královeckých mostů. Obrázek stažen z [e].

Mezi obyvateli města se rozšířila otázka, zda je možné projít městem tak, abyste přešli právě jednou přes každý ze sedmi mostů a vrátili se zpět k výchozímu bodu procházky. Euler v roce 1735 dokázal, že tato úloha nemá řešení a jeho důkaz bývá někdy označován za okamžik vzniku topologie.

Eulerův zájem o teorii čísel podnítila též korespondence s německým amatérských matematikem Christianem Goldbachem[5]. Euler často posílal Goldbachovi ke kontrole mnohé ze svých důkazů, které vytvořil za účelem potvrzení domněnek z Fermatova záhadného katalogu objevů. Oproti Fermata Euler s radostí prezentoval Goldbachovi svůj důkaz Fermatova tvrzení, že se jistá speciální prvočísla dají napsat ve formě součtu dvou kvadrátů.

Euler byl natolik dobrým matematikem, že pro hodnotu $n = 3$ dokázal Velkou Fermatovu větu. Různí matematici se snažili přizpůsobit Fermatovu metodu nekonečného sestupu pro jiné případy, než je $n = 4$, došli však vždy k nějaké logické mezeře. Euler ukázal, že použitím imaginárního čísla i může tyto mezery zacelit a dosáhnout toho, aby důkaz metodou nekonečného sestupu fungoval i pro případ $n = 3$. V dokazování Velké Fermatovy věty to byl velký úspěch, nicméně však všechny jeho pokusy přizpůsobit důkaz tak, aby fungoval i pro jiné hodnoty n skončily neúspěchem. Jak píše Simon Singh ve své knize [1]: „Matematik, který měl více matematických výsledků, než kdokoli jiný v dějinách byl pokořen Fermatovým problémem.“ Dle [G] byl Eulerův důkaz chybný. Jiný důkaz pro $n = 3$ naleznete na webu [G].

Neúspěch při důkazu Velké Fermatovy věty jej však neodradil od toho pokračovat dále v brilantních matematických objevech. Francouzský učenec François Arago o Eulerovi napsal toto: „Euler počítal bez námahy, jako když jiní lidé dýchají nebo jako když orli plachtí ve větru.“

Miloval počítání s prvočísly, a tak vytvořil tabulku všech prvočísel do 100 000. V roce 1732 byl prvním, kdo dokázal, že se Fermatova domněnka o prvočíslech ve tvaru $2^{2^N} + 1$ zhroutí už pro $N = 5$. Toto desetimístné číslo dokázal rozložit na součin dvou menších čísel. Dnes si již s využitím programu WolframAlpha můžeme rychle zjistit, že $2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297$ a že lze rozložit na součin čísel 641 a 6 700 417.

[5]Stejně jako pátera Mersenna fascinovaly i Goldbacha hry s čísly a numerické experimenty. Právě Eulerovi se Goldbach svěřil se svou domněnkou, že se každé sudé číslo dá zapsat jako součet dvou prvočísel. Této doměnce říkáme Goldbachova hypotéza.

Jeden z jeho dalších pozoruhodných objevů byl vzorec ve tvaru $x^2 + x + 41$, který produkoval velké množství prvočísel, pokud bychom za x dosadili celá čísla v intervalu od 0 do 39, dostaneme prvočíslo, čímž Euler získal tento výčet prvočísel:

41, 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151, 173, 197, 223, 251, 281, 313, 347, 383, 421, 461, 503, 547, 593, 641, 691, 743, 797, 853, 911, 971, 1033, 1097, 1163, 1231, 1301, 1373, 1447, 1523, 1601.

Eulerovi však bylo jasné, že takto to nepůjde do nekonečna a při jisté hodnotě x nám vyjde číslo složené. Již pro $x = 40$ a $x = 41$ dostaneme číslo složené. Nicméně nalézt vzorec, který by nám generoval všechna prvočísla, bylo i nad síly Eulera. V roce 1751 napsal: „Existují záhady, které lidstvo nerozluští nikdy. Abychom se o tom přesvědčili, stačí se letmo podívat na soupis prvočísel a ihned pochopíme, že nejsou řízena žádným řádem, ani pravidlem.“ Později se ukázalo, že Euler byl blízko nalezení rovnice, která mohla prvočíselný blok prorazit, ale chtělo to ještě dalších 100 let a jinou geniální mysl, která by dokázala to, na co Euler sám nestačil, tato mysl náležela Bernhardu Riemannovi, který se díky Gaussovi inspiroval a přinesl tak nový přístup k prvočíslům.

Během svého života přišel Euler s mnoha matematickými pracemi i s mnoha objevy na poli fyziky. V matematice našel vztahy mezi exponenciálními a goniometrickými funkcemi, vytvořil variační počet, jako první řešil diferenciální rovnice s parciálními derivacemi, našel řešení mnoha diferenciálních rovnic vyšších řádů. Je autorem učebnic algebry, diferenciálního a integrálního počtu, propojil Leibnizovu a Newtonovu matematiku.

Ve fyzice se zasloužil o napsání dvoudílné knihy o mechanice, Euler zde shrnuje poznatky o mechanice hmotného bodu pohybujícího se ve vakuu nebo v odporujícím prostředí vlivem gravitačních sil. Rozkládá zde zrychlení bodu do směru tečny a normály a řeší příslušné diferenciální rovnice pohybu, tedy to, co Newton naznačil či vyřešil geometrickými metodami, Euler rozvinul a zpracoval metodami matematické analýzy. Velkou pozornost věnoval též mechanice tekutin, v 50. letech 18. století publikoval mnoho prací týkajících se rovnováhy tekutin, plování těles, proudění a našel Eulerovu rovnici pohybu nestlačitelné kapaliny bez vnitřního tření. Zaměřil se i na inženýrské využití mechaniky tekutin v námořní vědě, při stavbě a řízení lodí, činnosti vodních kol, turbín, čerpadel a vrtulí.

Ve své práci Euler pokračoval až do své smrti, zemřel 18. září 1783 na mrtvici. Slovy matematika a filosofa markýze de Condorcet: „Euler přestal žít a počítat“.

Bylo vypočítáno, že během své dospělosti učinil Euler každý týden jeden vědecký objev. Od roku 1911 pracovala ve Švýcarsku skupina desítek odborníků na přípravě souborného vydání Eulerova díla, k roku 2009 dílo obnášelo 70 svazků vědeckých prací a 14 svazků vědecké korespondence, vydávání zatím není ukončeno. V petrohradských archivech leží tisíce stran Eulerových rukopisů, které dodnes nebyly prozkoumány a odhaduje se, že byla vydána asi jen polovina Eulerova díla [F, G, H, 1, 5, 6, 8, 10].

1.3.3 Sophie Germain

Obrázek 1.10: Marie Sophie Germain. Obrázek stažen z [f].

Marie Sophie Germain se narodila 1. března 1776 v Paříži do poměrně bohaté rodiny. Své volné chvíle si Sophie krátila čtením knih z otcovy knihovny, kde ji zaujal příběh o Archimedově předčasné smrti, který nalezla v knize Jeana Étienna Montucla *Historie des mathématiques* [6]. Po přečtení tohoto příběhu údajně začala hledat, co je to za vědu, když se kvůli ní nechal zabít slavný učenec.

Z počátku četla knihy ve francouzštině, například šestidílnou učebnici matematiky od Étienna Bézouta, z níž se připravovali uchazeči o přijetí na École Polytechnique. Jakmile ovládla latinu a řečtinu, mohla studovat díla Isaaca Newtona, Leonharda Eulera, Pierra Simona Laplaceho i texty antických klasiků.

Říká se, že aby rodiče studium matematiky Sophii překazili, odnesli z jejího pokoje všechny zdroje světla a později v něm dokonce přestali topit. Sophii to neodradilo, sehnala si svíce, zabalila se do peřin a studovala dál. (V období Sophiina života nebylo běžné, aby žena studovala na vysoké škole, pokud byly z bohaté rodiny, dostalo se jim přiměřeného vzdělání, nikoli však vzdělání v technických oborech a přírodních vědách. Žena zabývající se vědou byla v té době považována za směšně výstřední.) Rodina brala ze začátku Sophiinu lásku k matematice jako rozmar, jenž nebude mít dlouhé trvání, mýlili se. Časem začali dceřin zájem obdivovat a podporovat, zejména finančně, jelikož Sophie jako jediná ze tří dcer zůstala svobodná.

V jejích osmnácti letech byla založena École Polytechnique, na níž mohli studovat pouze muži. Sophie si však našla cestu, jak zde získat vzdělání. Studovala z poznámek, které si při přednáškách dělali její kolegové a následně látku konzultovala korespondenčně, své úlohy však podepisovala mužským pseudonymem M. Le Blanc, které bylo vypůjčené od Augusta Antoina LeBlanc, o němž se píše, že byl ne příliš schopným učencem J. L. Lagrange, a který se buď odstěhoval do Paříže, anebo zemřel (prameny se na jeho osudu neshodují).

Řadu let se Sophii dařilo předstírat, že je Monsieur Le Blanc. První, kdo Sophii odhalil, byl právě Lagrange, jemuž se zdálo podezřelé, že se jeho student z nenadání

[6]Příběh Archiméda můžete zhlédnout též v seriálu *Byl jednou jeden vynálezce,* který je volně přístupný v kanálu YouTube nebo pod tímto odkazem: `https://youtu.be/WCpas8x5uZE`.

tak lepšil. Když trval na osobním setkání, musela Sophie s pravdou ven, i přesto, že byla žena, ji Lagrange povzbuzoval, byl jejím rádcem i zastáncem.

Další, kdo o její identitě věděl velmi brzy, byl sám Carl Friedrich Gauss, jemuž se nechtěně vyzradila po dvou letech korespondence o teorii čísel sama. Během Napoleonova tažení do Pruska a obsazení Braunschweigu a Göttingenu dostala Sophie strach, aby Gauss, který v tam v té době působil, neskončil nešťastnou náhodou tak, jako Archimédés v Syrákúsách a požádala rodinného přítele, generála Pernettiho, ať Gaussovi zajistí ochranu či mu doporučí město opustit. Vzkaz však nepodal jménem Monsieur Le Blanc, ale jménem Mademoiselle Germain. Po této události Sophie Gaussovi váhavě odhalila svou identitu, Gauss jí na její dopis odpověděl následovně:

„Těžko však vyjádřit můj obdiv a úžas, když jsem viděl, jak se můj tolik mi drahý partner v dopisování, jakýsi Monsieur Le Blanc mění ve slavnou osobnost, která je tak nádherným příkladem toho, v co jsem se zdráhal uvěřit. Záliba v abstraktních vědách obecně a především v tajnosti teorie čísel je koníček zcela výjimečný: nejde zde o věci, kterými by bylo možno se okamžitě nadchnout - neskutečné krásy této vznešené vědy jsou přístupny pouze těm, kteří se nebojí hluboko se do ní ponořit. Když však osoba pohlaví ženského, která podle našich zkušeností a předsudků musí překonat mnohem více obtíží než muži, aby pronikla do tajů abstraktních věd, přesto uspěje při překonávání všech překážek a pronikne do nejskrytějších partií oněch věd, pak to musí být nepochybně osoba obdařená příkladnou odvahou, zcela výjimečným talentem a nadobyčejně kvalitním duchem. Skutečně nic mě nemůže přesvědčit lépe a jednoznačněji o tom, že půvaby této vědy, která obohatila můj život o tolik radosti, nejsou pouhou chimérou, jako pozornost, jakou jste jí věnovala vy.“

Některými matematiky byla považována za nedouka, mezi těmito byli Laplace a Poisson, jiní ji respektovali. Lagrange s Fourierem zařídili, aby jako první žena v historii (mimo manželek a dcer akademiků) mohla přihlížet jednání *Académie des sciences*, tedy jednání Akademie věd.

Do roku 1808 se Sophie zabývala především teorií čísel, kterou korespondenčně konzultovala s Gaussem, ten ji velmi ovlivnil. Během roku 1808 se Gauss stal profesorem astronomie na univerzitě v Göttingenu a jeho zájem se přesunul od teorie čísel k aplikovanější matematice. Od té doby přestal Sophii na dopisy odpovídat. Sophii začala odvaha k práci klesat a do roka teorii čísel opustila. Udává se, že v té době byla jen krůček od potvrzení Velké Fermatovy věty.

Příděl Sophie k dokázání Velké Fermatovy věty tkví v tom, že přišla s metodou, pomocí níž by se dokázala neplatnost rovnice (1.1) pro tzv. prvočísla Sophie Germain, což jsou prvočísla [7] ve tvaru:

$$2p + 1, \tag{1.4}$$

kde p je prvočíslo. Prvočíslem Sophie Germain je například číslo 7 anebo 11, jelikož $2 \cdot 3 + 1 = 7$ a $2 \cdot 5 + 1 = 11$, takto můžete nacházet další prvočísla anebo si je najít na internetu, například zde naleznete výčet Sophiiných prvočísel, je potřeba si číslo vždy rozkliknout [8]. Koho by zajímalo, jak vypadala část její metody, může se podívat zde [D].

Cílem Sophie nebylo dokázat Velkou Fermatovu větu pro jednu konkrétní hodnotu, nýbrž říci něco o více případech současně. Tvrdila, že je nepravděpodobné, aby řešení existovalo, jelikož kdyby tomu tak bylo, muselo by být jedno z čísel x, y, z násobkem

[7] Prvočísla jsou taková čísla, která mají právě dva dělitele v oboru přirozených čísel, a to jedničku a sebe samo. Samotné číslo 1 není prvočíslo, jelikož má pouze jednoho přirozeného dělitele.

[8] Pro tištěnou verzi přikládám odkaz v celém znění: `https://prime-numbers.info/list/sophie-germain-primes`.

čísla n, což je velmi silné omezení na možná řešení. Kolegové Sophie tak mohli prozkoumat prvočísla z jejího seznamu jedno po druhém a snažit se ukázat, že pro onu konkrétní hodnotu n nemůže řešení Velké Fermatovy věty existovat. Roku 1825 oslavila tato metoda velký úspěch díky Gustavu Lejeunu Dirichletovi a Adrienu-Marie Legendreovi, oba nezávisle na sobě dokázali, že pro případ $n = 5$ nemá rovnice (1.1) řešení. Čtrnáct let na to Gabriel Lamé vylepšil Sophiinu metodu a dokázal neexistenci řešení rovnice (1.1) pro $n = 7$. Podle knihy [1] byly výsledky Sophie Germain, které se týkaly Velké Fermatovy věty, jejím největším příspěvkem k rozvoji matematiky.

Zájem o Velkou Fermatovu větu vystřídala zájmem o experimenty Ernsta Chladniho a matematická teorie chvění elastických desek. Za vyřešení tohoto problému vypsal Francouzský institut zvláštní odměnu, jediný, kdo se do soutěže přihlásil, byla Sophie, která se přihlásila anonymně, komise znalců její výpočty dvakrát zpochybnila, a to v letech 1811 a 1813, avšak třetí pokus v roce 1815 byl úspěšný. Na ceremoniál o udělení ceny se raději nedostavila. V roce 1825 svůj článek o teorii elastických povrchů zaslala Akademii věd k publikaci, komise složená z matematiků Laplace, Poisson a Prony, kteří měli obsah posoudit, jí nikdy neodpověděla.

Uznání se Sophii dostalo až posmrtně. Ke konci života se Sofii znovu podařilo navázat vztah s Gaussem, který přesvědčil göttingenskou univerzitu, aby jí udělili čestný doktorát, bohužel než jí mohla univerzita titul udělit, zemřela a to 27. června 1831 v Paříži po boji s rakovinou prsu.

John Augustine Zahm, píšící pod pseudonymem H. J. Mozans, o Sophii napsal: „Byla to pravděpodobně jedna z nejinteligentnějších žen, jakou kdy Francie dala světu. Přesto, ať se to zdá sebepodivnější, když vystavoval státní úředník úmrtní oznámení této pozoruhodné ženy, spolupracovnice nejlepších členů francouzské Akademie věd, označil ji termínem *rentière-annuitant* (svobodná žena bez zaměstnání a nikoli *mathématicienne*). To však není všechno. Když byla postavena Eiffelova věž, při kteréžto stavbě byli konstruktéři povinni věnovat zvýšenou pozornost pružnosti použitých materiálů, byla na tuto stavbu vyryta jména sedmdesáti dvou vědců a učenců. Mezi nimi však není jméno té, která přispěla k rozvoji teorie pružnosti kovů – jméno Sophie Germain. Byla vyřazena ze seznamu ze stejných důvodů, z jakých nebylo žádoucí, aby Maria Gaetana Agnesi byla členkou francouzské Akademie – protože to byla žena? Zdá se, že je tomu tak. A pokud tomu tak skutečně je, padá velká ostuda na hlavy těch, kteří jsou zodpovědni za to, že se dostalo takového nevděku ženě, která se o vědu velmi zasloužila a která si svými výsledky zajistila důstojné místo v síni matematické slávy.“

Nicméně Sophii se dostalo alespoň nějakého uznání. Přesto, že jí chybělo formální vzdělání i akademické tituly, svým dílem vstoupila do dějin novověké matematiky a názvem kráteru i na Venuši a do vesmíru. S vděčností na ni vzpomínají laureáti ceny Grand prix Sophie Germain, kterou pařížská Akademie věd uděluje od roku 2003 za nejlepší práce z matematiky [B, C, D, 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9].

1.3.4 Évariste Galois

Obrázek 1.11: Évariste Galois. Obrázek stažen z [g].

Évariste Galois se narodil 25. října 1811 v Bourg la Reine. Jeho rodiče byli vzdělaní a vážení lidé, měli výtečné znalosti z filosofie, klasické literatury a teologie, otec Évarista byl amatérským, ale mezi přáteli oblíbeným skladatelem rytmických popěvků, a v roce 1815 se po zvolení stal starostou. Mladý Galois vyrůstal v období velkých politických zvratů a často se ocital v centru politických střetů, což jej odvádělo jak od akademické kariéry, ale též zapříčinilo jeho brzkou smrt. K zájmu o politiku jej inspiroval jeho otec.

Jak již bylo řečeno, otec Évarista byl starostou města Bourg la Reine, byl to vzdělaný a vlídný člověk, který si během prvních let na postu starosty získal respekt celé obce, takže si i po návratu krále Ludvíka XVIII. svůj post starosty udržel.

Ve svých 12 letech Evariste nastoupil do své první školy na Lyceum Ludvíka Velikého, což byla prestižní, ale velice autoritativní instituce. Zprvu byly jeho studijní výsledky slušné, vyhrával různé soutěže, bohužel jedna událost v průběhu prvního ročníku ovlivnila celý jeho další život. Lyceum bylo původně jezuitskou kolejí a začalo se proslýchat, že se má do rukou jezuitů vrátit. V té době probíhal boj mezi republikány a monarchisty, který zmítal poměrem sil mezi Ludvíkem XVIII. a představiteli lidu. Rostoucí vliv kněží byl vnímán jako znamení odklonu lidu směrem ke králi.

Studenti lycea, kteří sympatizovali s republikány, připravovali vzpouru. Ředitel školy, který měl poněkud omezené názory, však spiknutí brzy odhalil a vyloučil asi tucet vůdčích osobností vzpoury. Galois byl tenkrát příliš mladý, aby se do revolty zapojil, a tak v lyceu zůstal. Pokoření spolužáků však rozdmýchalo jeho republikánské cítění.

Během studia na Lyceu jej ředitel školy nechal dokonce propadnout, toto neoprávněné propadnutí však zapříčinilo, že se v šestnácti letech zapsal do svého prvního matematického kursu. Tento kurs Galoise v očích profesorů změnil ze svědomitého žáka na vzpurného studenta. V knize [1] se můžeme dočíst, že ve školní dokumentaci se o něm psalo následující: „Tento student se pohybuje pouze v nejvyšších sférách matematiky. Matematické bláznovství toho chlapce ovládá. Myslím, že by pro něj bylo nejlepší, kdyby mu rodiče dovolili, aby nestudoval nic jiného. Jinak tu jen ztrácí čas, trápí své učitele a utápí se v trestech.“.

Brzy předčil svého učitele, a tak se učil z nejnovějších knih napsaných mistry té doby. Rychle vstřebal ty nejsložitější pojmy a v sedmnácti letech publikoval svůj první článek o řetězových zlomcích v časopise *Annales de Gergonne*. Zdálo se, že má cestu vpřed otevřenou. Hlavní překážkou v postupu se mu však stala jeho brilantnost. I když ovládal více matematiky, než byla potřeba k úspěšnému absolvování zkoušek na lyceu, jeho způsoby řešení byly často tak novátorské a rafinované, že se zkoušejícím nelíbily. Mnoho výpočtů prováděl zpaměti, aniž by své úvahy jasně vyložil na papíře, a tím zkoušející rozčiloval a uváděl je ještě do větších zmatků.

Zároveň měl Évariste ukvapenou a prudkou povahu, kvůli níž ztratil přízeň nejen učitelů, ale všech, kteří mu zkřížili cestu. Během přijímacích zkoušek na École Polytechnique jeho strohost a nedostatek trpělivosti k vysvětlování při ústních zkouškách způsobily, že nebyl přijat.

Mladý Galois si však přál studovat na této škole, a to nejen pro její vynikající akademickou kvalitu, ale též proto, že byla centrem republikánských aktivit. O rok později se na školu hlásil znova a při ústní zkoušce opět mátl svého examinátora svými logickými skoky. Také údajně zkoušejícímu sdělil, že jeho otázky jsou příliš triviální na to, aby je zodpověděl. Cítil, že podruhé neuspěje. Zklamán tím, že jeho vynikající matematické schopnosti opět nebudou rozpoznány, ztratil zábrany a hodil po zkoušejícím houbu, kterou jej zasáhl. Tím si znemožnil svou šanci studovat na tak prestižní škole, jakou byla École Polytechnique.

Odmítnutí jej přeci jen nezlomilo, dále věřil ve své nadání pro matematiku a pokračoval ve svých výzkumech sám. Nejvíce jej zajímalo hledání řešení rovnic, jakými jsou například rovnice kvadratické. Ty mají následující tvar:

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1.5}$$

kde členy a, b a c mohou nabývat libovolné hodnoty. Úkolem je najít takové hodnoty x pro které rovnost platí. Rovnici je možno vypočítat s využitím vztahu:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{1.6}$$

Kvadratická rovnice je jedna z mnoha rovnic, které řadíme mezi takzvané algebraické rovnice. Dále zde patří třeba rovnice kubická či rovnice 4., 5. až n-tého stupně.

Například kubická rovnice má tento tvar:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{1.7}$$

a, b, c a d mohou opět nabývat libovolných hodnot.

Rovnice 4. stupně pak vypadá takto:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \tag{1.8}$$

Takto bych zde mohla vypisovat rovnice do nekonečna, ale je to zbytečné. Uvedu už jen poslední 2 typy rovnic, a to rovnici 5. stupně:

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0, \tag{1.9}$$

a rovnici n-tého stupně, kterou můžeme modifikovat pro jakékoli přirozené hodnoty stupně n. Rovnice n-tého stupně má tvar:

$$a_1x^n + a_2x^{n-1} + a_3x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0, \tag{1.10}$$

kde za hodnoty a_1,a_2,...,a_n můžeme dosadit libovolnou číselnou hodnotu.

V devatenáctém století matematici znali návody, jak nalézt řešení rovnic třetího stupně, tedy 1.7 a čtvrtého stupně 1.8, ale nebyla známá metoda, jak řešit rovnice 5. stupně 1.9 a rovnice vyšších stupňů.

Mladý Galois byl posedlý právě hledáním návodu na řešení rovnic 5. stupně. Již ve svých 17 letech dosáhl takových úspěchů, že mohl Akademii věd předložit dva vědecké články. Recenzentem článků byl Augustin Cauchy, na něhož práce zapůsobila[9], usoudil, že je dost dobrá k udělení Velké ceny Akademie v matematice a vrátil je Galoisovi k přepracování do jednoho souhrnného pojednání a očekával, že se Évariste do soutěže přihlásí. Než se však přihlásil do soutěže uběhly tři roky, během nichž se mu do života vmísily osobní i profesionální problémy, které jeho ambice zničily.

V roce 1829 začal v Bourg-la-Reine působit nový jezuitský kněz, kterému se příčilo politické přesvědčení Évaristova otce (ten byl v té době stále starostou), začal o něm tedy šířit pomluvy, aby jej vypudil z úřadu. Zneužil jeho pověst skladatele vtipných veršů a napsal sérii vulgárních rýmovaček, jež měly zesměšňovat členy obce, toto dílo podepsal starostovým jménem. Otec Évarista se nedokázal přes ostudu, kterou mu dílo přineslo, přenést a rozhodl se, že jedinou možností je sprovodit se ze světa. Během pohřbu se strhla šarvátka mezi jezuitou, který vedl obřad, a stoupenci starosty. Potyčka přerostla v takovou bouři, že rakev zcela neobřadně spadla do hrobu. Když to mladý Galois viděl, posílilo to jeho republikánské cítění.

Teprve po návratu zpět do Paříže přepracoval dílo vrácené Cauchym a před uzávěrkou soutěže jej předal sekretáři Akademie Josephu Fourierovi, který měl článek předat komisi. Článek sice nenabízel přímo řešení rovnic pátého stupně, ale obsahoval skvělý vhled do problému. Mnoho matematiků, včetně Cauchyho, očekávalo, že zvítězí. K velkému překvapení práce nejen nezvítězila, ale do soutěže ani nebyla oficiálně zařazena. Fourier totiž zemřel několik týdnů před vyhodnocením, komisi byl předán stoh přihlášených prací, ale ta Galoisova mezi nimi nebyla, jeho pojednání se nikdy nenašlo a o této nespravedlnosti napsaly i francouzské noviny.

Galois se domníval, že politicky předpojatá Akademie jeho pojednání schválně ztratila. Ve svém přesvědčení se utvrdil o rok později, když Akademie odmítla jeho další rukopis s odůvodněním, že „důkazy nejsou dost jasné ani dostatečně podrobné, aby bylo možno posoudit jejich správnost“. Usoudil proto, že jde o spiknutí, které jej má vyloučit z matematické obce a rozhodl se věnovat boji za republiku.

4. prosince 1830 nepoddajný génius nastoupil k dělostřelectvu Národní gardy. Ještě před koncem měsíce král Ludvík Filip dělostřelectvo rozpustil a Évariste se octl bez domova i bez finančních prostředků.

Někteří z jeho dřívějších matematických kolegů o něj měli strach, například Sophie Germain, jíž byla věnována jedna z předchozích kapitol, napsala svému příteli hraběti Libri-Carruccimu:

„Všechno, co se týká matematiky, provází neštěstí. Ten student Galois je sice drzý, ale prokázal svou inteligenci. Smrt pana Fouriera jej dorazila. Byl vyloučen z École Normale, je bez peněz, jeho matka také nemá skoro nic a on neustále všechny napadá. Říká se, že se docela zblázní. Bojím se, že je to pravda.“

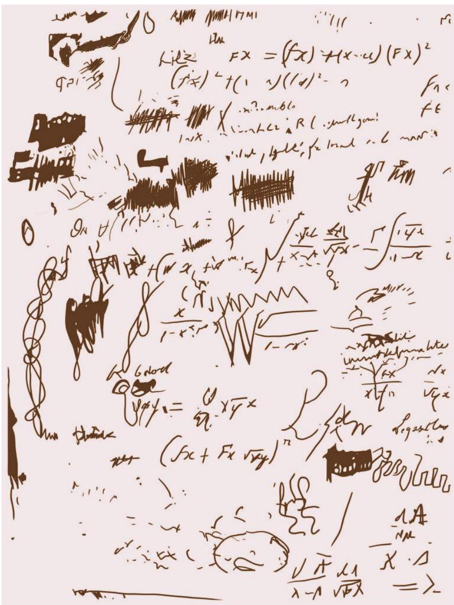
Galois byl obviněn, že usiloval o králův život (během přípitku měl pronést výhrůžku králi) a byl postaven před soud, jelikož však nikdo nemohl stvrdit, že by jej slyšel vyslovit přímou výhrůžku ke králi, byl osvobozen. Do měsíce byl však znovu ve vězení, a to za nelegální nošení uniformy dělostřelectva a nezákonné ozbrojování. V březnu

[9]Některé prameny tvrdí, že Cauchy Évaristův spis záměrně ztratil, či hodil do koše. V Archívu Akademie se však našel dopis, který tyto spekulace vyvrací.

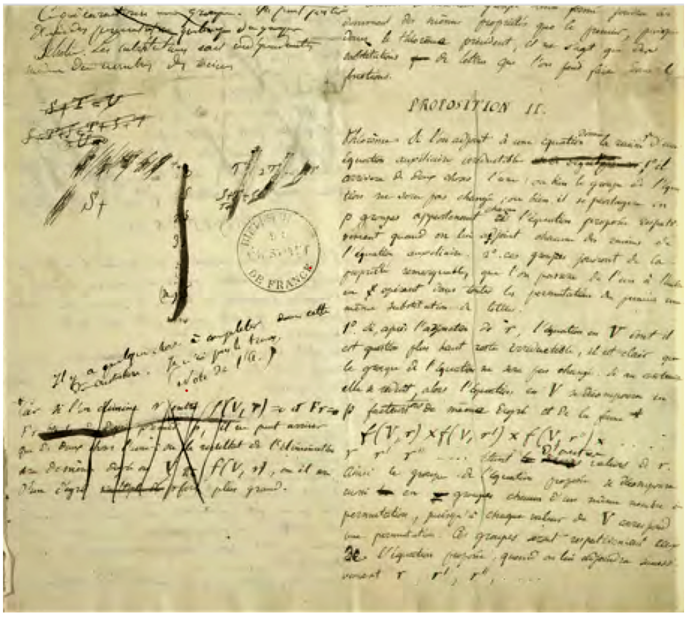
1832, měsíc před vypršením Galoisova trestu, Paříž zachvátila cholera. Vězni, včetně Galoise, byli propuštěni. Co se dělo s Galoisem po propuštění je předmětem dohadů, je však jisté, že události tohoto období souvisely s jeho románkem se ženou jménem Stéphanie-Félice Poterine du Motel, dcerou vážené pařížského lékaře. O začátku tohoto vztahu nejsou žádná svědectví, nicméně detaily jeho tragického konce jsou dobře zdokumentovány.

Stéphanie již byla zasnoubena s mužem jménem Pescheux d'Herbinville, který se o její nevěře dozvěděl. Byl rozzuřen a jelikož byl jednám z nejlepších střelců ve Francii, vyzval Galoise na souboj za svítání. Galois si byl velmi dobře vědom pověsti tohoto muže a byl přesvědčen, že zemře. Večer před svým soubojem napsal svým přátelům dopisy, aby se omluvil.

Ani při svém republikánském zápalu nezapomínal na matematiku a jednou z jeho největších obav bylo, že jeho výzkum, který byl již jednou odmítnut Akademií, bude ztracen navždy. V zoufalé snaze o uznání pracoval celou noc a zapisoval věty, které dle jeho přesvědčení plně řešily otázku rovnic pátého stupně.



Obrázek 1.12: Poznámky Galoise napsané den před soubojem. Obrázek stažen z [i].



Obrázek 1.13: Další poznámky Galoise napsané den před soubojem. Obrázek stažen z [h].

Na obrázku 1.11 a obrázku 1.13 můžete vidět poslední dvě stránky, které napsal. Povětšinou tyto stránky obsahovaly zápisy myšlenek, které již kdysi předložil Cauchymu a Fourierovi, mezi složitými výpočty se zde dle [1] objevují i odkazy na Stéphanii a výkřiky zoufalství, které lze vidět ve slovech „Je n'ai pas le temps.“, tedy v překladu „Nemám čas.“, které můžete vidět na obrázku 1.13 v levé dolní části.

Jakmile dokončil své výpočty, napsal svému příteli Augustovi Chevalierovi dopis s žádostí o zaslání zápisků největším evropským matematikům.

V dopise stálo:

„Můj drahý příteli,

učinil jsem jisté objevy v analýze. První se týká teorie rovnic pátého stupně, další pak mnohočlenů.

V teorii rovnic jsem zkoumal podmínky řešitelnosti rovnic pomocí odmocnin; to mi umožnilo prohloubit tuto teorii a popsat všechny možné transformace i takových rovnic, které nejsou řešitelné pomocí odmocnin. To vše lze nalézt v těchto třech pojednáních.

Ve svém životě jsem si často dovolil šířit tvrzení, o nichž jsem si nebyl jist. Všechno to, co jsem zde napsal, jsem měl v hlavě ujasněno déle než rok, a nechtěl bych zavdat příčinu podezření, že bych ohlásil věty, které jsem beze zbytku nedokázal.

Veřejně požádejte Jacobiho nebo Gausse, aby posoudili ne snad pravdivost těchto vět, ale jejich význam. Věřím, že se pak najdou lidé, kteří uznají za užitečné ten zmatek uspořádat.

Horoucně vás objímám.

E. Galois"

Dalšího rána, ve středu 30. května 1832, stanul proti d'Herbinvillovi, který měl s sebou sekundanta, Galois přišel sám. O souboji nikomu neřekl. Posel, kterého poslal za svým bratrem Alfredem, doručil zprávu o souboji, až když bylo po všem. Dopisy, které poslal svým přátelům, je dostihl až po několika dnech.

Během souboje byl Galois zasažen do žaludku, nablízku nebyl žádný lékař, který by mu pomohl a vítěz klidně odešel a nechal zraněného protivníka umírat. Až po několika hodinách přispěchal jeho bratr a odvezl jej do nemocnice, bylo však příliš pozdě, Galois podlehl ve svých 20 letech na následky zranění v souboji.

Dodnes se někteří historikové přou, zda měl souboj milostný podtext anebo podtext politický, ať tak či onak, zemřel mlád po souboji s Pescheuxem d'Herbinvillem.

Ještě než byly Galoisovy zápisky rozeslány, přepsali je Alfred s Augustem tak, aby obsažené výklady vyjasnili a rozšířili. Jakmile skončili, rozeslali kopie rukopisu Gaussovi, Jakobimu a dalším dvaceti matematikům. Galoisova práce neměla žádný ohlas po více než deset let, dokud se jedna z kopií nedostala k Josephu Liouvilleovi, ten ve výpočtech rozpoznal, že se jedná o dílo génia. Strávil nad poznámkami několik měsíců, aby se pokusil pochopit jejich smysl, pojednání zredukoval a otiskl ve svém prestižním časopise *Journal de mathématiques pures et appliquées.* Ostatní matematici ihned reagovali, bylo totiž zřejmé, že Galois opravdu podal úplné vysvětlení toho, jak postupovat při hledání rovnic pátého stupně. Navíc studoval též rovnice vyššího, než pátého stupně, a dokázal mezi nimi rozpoznat ty řešitelné.

Proč Évarista v této práci zmiňuji..? Není to proto, že jeho život byl jako z knihy Viktora Huga Bídníci, nebo že by působil jako postava z Puškinových knih, či že se o něm zmiňoval i Alexandre Dumas ve svém díle *Paměti*, ale proto, že i část jeho práce přispěla k dokázání Velké Fermatovy věty.

Když Andrew Wiles hledal důkaz Velké Fermatovy věty, musel přijít s induktivní úvahou, která by dokázala Tanijamovu-Šimurovu domněnku, tedy že každá z nekonečného množství eliptických rovnic může být přiřazena některé z nekonečného množství modulárních forem. Bylo potřeba nějakým způsobem rozložit důkaz na nekonečné množství jednotlivých případů a dokázat případ první. Následně potřeboval ukázat, že po dokázání prvního případu padnou i všechny ostatní. Nakonec objevil, že první krok k induktivnímu důkazu se skrývá právě v práci Évarista Galoise.

Jádrem Galoisových výpočtů byl pojem, který je dnes znám jako teorie grup a Évariste tuto teorii rozvinul v silný nástroj umožňující rozlousknout do té doby neřešitelné úlohy. Právě grupy vytvořené z řešení rovnic pátého stupně umožnily Wilesovi odvodit výsledky o řešitelnosti těchto rovnic a vytvořit tak základ svého důkazu Tanijamovy-Šimurovy domněnky, o které si povíme blíže v dalších kapitolách [1, 6, 7, 11].

1.3.5 Paul Wolfshekl

Obrázek 1.14: Paul Wolfshekl. Obrázek stažen z [j].

Paul Friedrich Wolfshekl se narodil 30. června 1856 v německém Darmstadtu do velice zámožné židovské rodiny (otec Paula byl bankéř), která byla proslulá svou podporou umění a vědy.

Paul studoval mezi lety 1875-1880 medicínu na univerzitě v Lipsku, Tübingenu a Heidelbergu, kde získal doktorský titul. Od roku 1880 se u něj pravděpodobně začala objevovat roztroušená skleróza a Paulovi bylo jasné, že nebude moci vykonávat lékařskou praxi. Proto se rozhodl vybrat si obor, který bude moci vykonávat i na invalidním vozíku a začal studovat matematiku na univerzitě v Bonnu. Po roce přešel na Univerzitu v Bernu, kde navštěvoval přednášky Ernsta Eduarda Kummera.

Pod vlivem Ernsta Kummera se Paul zaměřil na teorii čísel, kde narazil právě na Velkou Fermatovu větu.

Právě Ernst Kummer se v jednom ze svých děl snažil ukázat, že v důkazu Velké Fermatovy věty, s nímž přišel Augustin Cauchy, je chyba.

Bohužel o tom, zda se sám Paul pokusil najít důkaz velké Fermatovy věty, můžeme jen spekulovat, v mnoha pramenech se však uvádí, že právě snaha o nalezení důkazu mu zachránila život, jelikož i u Wolfshekla se potýkáme s romantickou zápletkou, která naštěstí neskončila tak tragicky, jako ta od mladého Galoise.

Wolfshekla posedla milostná vášeň k jedné krásné dámě, jejíž identita nebyla nikdy objasněna. Tato záhadná žena jej odmítla, čímž byl Paul uvrhnut do takového zoufalství, že se rozhodl ukončit svůj život. Sice byl vášnivým mužem, ale ne zbrklým, a tak si svou smrt naplánoval s úzkostlivou pečlivostí do nejmenších detailů. Stanovil si datum své smrti a úderem půlnoci tohoto dne si hodlal prostřelit hlavu. Během zbývajících dní dal do pořádku všechny obchodní záležitosti a ve stanovený den napsal závěť i dopisy všem blízkým přátelům a rodině.

Jelikož mu šlo vše od ruky, byl hotov krátce před půlnoční lhůtou. Aby zbývající čas nějak zaplnil, odebral se do knihovny, kde začal listovat matematickými publikacemi. Chvilku na to byl již ponořen do Kummerova článku, v němž je popsána Cauchyova a Lamého chyba. Wolfshekl prošel řádek po řádku a zarazil se nad jedním detailem, jenž se mu jevil jako logická chyba. Kummer zde předpokládal něco, co opomněl odůvodnit. Wolfshekl zaváhal, zda skutečně odhalil závažnou chybu či zda byl Kummerův postup v pořádku. V prvním případě se naskytla naděje, že by důkaz Velké Fermatovy věty nemusel být až tak nedosažitelný, jak se mnozí domnívali.

Sedl si a začal kritické místo zkoumat. Zcela se ponořil do tvorby jakéhosi minidůkazu, který měl buď Kummerův postup potvrdit anebo naopak vyvrátit. Kummerův důkaz se mu podařilo opravit, takže Velká Fermatova věta i nadále setrvala nevyřešena.

Ovšem okamžik naplánované sebevraždy uplynul, Wolfshekl byl tak pyšný na to, že objevil a opravil chybu v důkazu Kummera, že se mu vrátila chuť do života a dopisy na rozloučenou roztrhal.

V tomto okamžiku se dostáváme do bodu, který je zahalen spekulacemi, a to k závěti Paula. Některé prameny uvádějí, že závěť upravil právě po této události a jiné, že závěť přepsal až před svou smrtí na základě jiné události. Ať tak či onak, ve své závěti odkázal 100 000 marek tomu, kdo jednou dokáže Velkou Fermatovu větu.

Peníze byly svěřeny Královské společnosti věd v Göttingenu, která ještě týž rok vyhlásila soutěž o cenu Paula Wolfshekla.

Z moci nám svěřené doktorem Paulem Wolfsheklem zesnulým v Darmstadtu vyhlašujeme soutěž o cenu jednoho sta tisíc německých marek, jež bude vyplacena tomu, kdo jako první dokáže Velkou Fermatovu větu.

Soutěž se řídí následujícími pravidly:

1. Královská společnost věd v Göttingenu si ponechá absolutní svobodu rozhodovat o tom, komu bude cena udělena. Odmítne každý rukopis, jehož jediným cílem by byla účast v soutěži a zisk prémie. Vezme v úvahu pouze takové matematické dílo, které se již objevilo ve formě pojednání v časopise nebo je volně k dostání v knihkupectvích. Společnost žádá autory takových prací, aby zaslali alespoň pět kopií.

2. Práce napsané jazykem nesrozumitelným učeným specialistům zvoleným do poroty budou ze soutěže vyřazeny. Autorům takových prací budiž dovoleno, aby dodali ověřené překlady svých děl.

3. Společnost nenese odpovědnost za posuzování prací, které jí nebyly předloženy, jakož ani za omyly vzniklé tím, že by některý autor práce nebo její části nebyl Společnosti znám.

4. Společnost si ponechává právo rozhodnout v případě, kdy důkaz předloží několik různých osob, a také v případě, kdy řešení bude výsledkem spojeného úsilí několika učenců, a to zejména, pokud jde o rozdělení ceny.

5. Cena bude udělena nejdříve dva roky po publikování oceněného díla. Tato lhůta má umožnit německým a zahraničním matematikům, aby vyjádřili svá stanoviska a hodnocení publikovaného řešení.

6. Rozhodnutí o udělení ceny oznámí laureátovi jménem Společnosti její tajemník. Výsledek bude zveřejněn všude, kde byla vypsaná cena předcházejícího roku oznámena. Poté již nebude udělení ceny předmětem dalších diskusí.

7. Prémie bude vítězi vyplacena královským pokladníkem univerzity, a to do tří měsíců od udělení ceny buď v Göttingenu, nebo na jiném místě, které laureát určí na své vlastní riziko.

8. Obnos bude vyplacen proti stvrzence na základě rozhodnutí Společnosti buď v hotovosti nebo ve formě finančních listin. Po převodu finančních listin bude cena považována za vyplacenou, i kdyby její výše k danému datu nedosahovala 100 000 německých marek.

9. Jestliže nedojde k vyplacení prémie do 13. září 2007, nebudou se po tomto datu již žádné další přihlášky do soutěže přijímat. Soutěž o Wolfsheklovu cenu se otevírá k dnešnímu dní za shora uvedených podmínek.

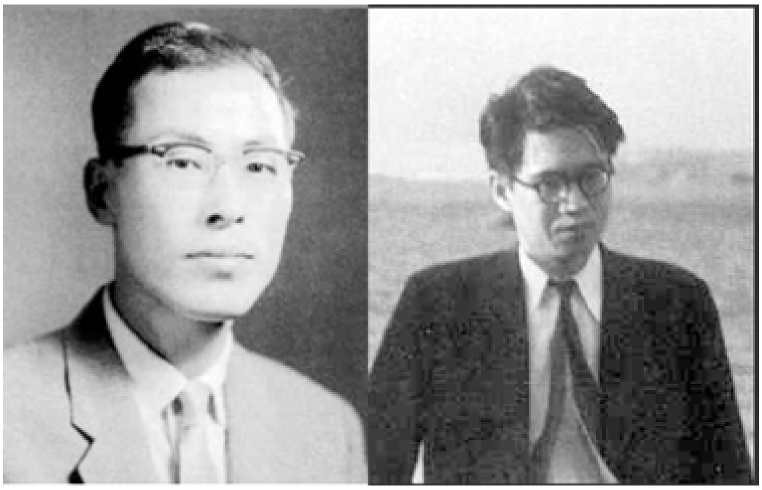
Göttingen, 27. června 1908
Královská společnost věd

Je potřeba dodat, že Královská společnost věd měla vyplatit 100 000 německých marek tomu, kdo Velkou Fermatovu větu dokáže, ovšem ten, kdo vyvrátil její platnost by nedostal nic.

Tato cena byla vyhlášena ve všech matematických časopisech a zpráva o ní se rychle šířila Evropou. Ani přes mediální kampaň a velkou finanční odměnu se nepodařilo vzbudit příliš velký zájem mezi odborníky, jelikož mnoho profesionálních matematiků vidělo v dokazování této věty ztracený případ a nechtěli obětovat svou kariéru práci na problému, který by s velkou pravděpodobností nevyřešili. Vypsaná cena vzbudila naopak zájem nové skupiny lidí, byli to dychtiví amatéři, ochotní pustit se do neřešitelného hlavolamu z pozice naprosté bezelstnosti.

Dnes existují dvě teorie toho, proč Wolfshekl odkázal tak velkou část svého jmění tomu, kdo dokáže Velkou Fermatovu větu. Ta první teorie, kterou popisuje ve své knize [1] Simon Singh, tvrdí, že po oné noci, během níž chtěl spáchat sebevraždu, roztrhal dopisy na rozloučenou a přepsal svou závěť, ve které věnoval 100 000 marek tomu, kdo dokáže Velkou Fermatovu větu. Po jeho smrti v roce 1908 čekal na rodinu po otevření závěti šok. Druhá teorie, kterou Simon Singh zmiňuje na svých webových stránkách [J] a s níž přišel ve svém článku [I] Klaus Barner, hovoří o tom, že motivací pro přepsání závěti nebyla vděčnost této větě za svůj život, ale naopak zášť. Jelikož byl Paul těžce invalidní, byl svou rodinou donucen oženit se. Jediná žena, která si jej vzala byla Marie Frölichová a to 12. října 1903. V té době měla Marie 53 let a bohužel se z ní nevyklubala zrovna ukázková manželka. Aby tedy Paulovo jmění nepřipadlo právě Marii, rozhodl se své peníze investovat jinak. Ať už je pravdivá kterákoli verze, víme, že peníze, které Paul věnoval tomu, kdo dokáže Velkou Fermatovu větu, nakonec získal Sir Andrew Wiles, o němž se dočtete o pár kapitol později [1, 6, 8, I, J].

1.3.6 Góro Shimura a Jutaka Tanijama



Obrázek 1.15: Góro Shimura (vlevo) a Jutaka Tanijama (vpravo). Obrázek stažen z [k].

Jutaka[10] Tanijama se narodil 12. listopadu 1927 v malém městečku Kazo, ležícího blízko Tokia. Jeho vzdělání bylo v dětství často přerušováno, jelikož prodělal několik vážných chorob. Během dospívání měl tuberkulózu, kvůli níž musel vynechat dva roky střední školy. Další přestávku ve studiu způsobil počátek války.

Góro Šimura se narodil 23. února 1930[11] ve městě Hamamatsu, které je vzdáleno 135 mil od Tokia. Během války bylo jeho vzdělání přerušeno úplně, školu zavřeli a místo studia musel Góro přispět k válečnému úsilí v továrně na letadla. Přesto vše se mladý Šimura nevzdával a večer co večer se snažil dohnat ztracené školní hodiny. Nejvíce jej přitahovala matematika a sám to zdůvodňoval následujícími slovy: „Samozřejmě, že existuje mnoho předmětů, které bylo třeba se učit, ale matematika byla nejjednodušší, protože stačilo číst matematické učebnice. Kalkulus jsem se naučil z knížek. Kdybych se chtěl vzdělávat ve fyzice či chemii, potřeboval bych k tomu vědeckou laboratoř, a nic takového jsem neměl. Nikdy mne nenapadlo, že mám talent, byl jsem jen zvědavý.“

Několik let po válce, v lednu roku 1954, se mladý Šimura, který tou dobou studoval na univerzitě v Tokiu, vydal do knihovny hledat výtisk časopisu *Mathematische Annalen* (ročník 24), v němž měl naleznout Deuteringův článek o algebraické teorii komplexního násobení, který mu měl pomoci s jistým složitým výpočtem. K jeho zklamání měl tento časopis zapůjčen jiný student, kterým byl Jutaka Tanijama. Šimura se proto rozhodl napsat Tanijamovi dopis, v němž mu napsal, že časopis potřebuje k vyřešení nepříjemného výpočtu a prosil jej o vrácení do knihovny. Pár dní na to mu Tanijama psal, že pracuje na stejném výpočtu a zarazil se tam, kde Šimura, proto navrhl, aby se spolu sešli a pokusili se na problému pracovat společně. Toto setkání se stalo počátkem přátelství, které změnilo směr vývoje matematiky.

Šimura vstával za úsvitu a okamžitě se pouštěl do práce, byl náročný a precizní. Tanijama byl naopak za úsvitu ještě vzhůru po celonoční práci a spával většinou odpoledne, byl prý spíše nedbalý a lenivý, což na něm Šimura obdivoval: „Měl zvláštní dar dopouštět se chyb, a vždy správným směrem. Já jsem mu to záviděl a marně jsem se to snažil dělat po něm. Prostě to nebyly ty správné chyby.“

[10] Japonský znak, který symbolizuje jeho jméno by se měl číst jako Tojo, ovšem mnoho lidí, s výjimkou rodiny jej četla jako Jutaka, časem Tanijama přijal toto jméno za své.

[11] V knize [1] je uvedeno, že byl Góro o rok mladší, než Jutaka, ale byl o 2 roky a 3 měsíce mladší. Své narození Šimura uvádí i ve své autobiografické knize [13].

Tanijama byl prototypem roztržitého génia, například zavázat si uzel na tkaničce mu činilo problémy. Než aby si desetkrát denně zavazoval tkaničky, raději si je nezavazoval vůbec. Neustále prý nosil tentýž zelený oblek neobvykle kovového lesku.

V době, kdy se Tanijama se Šimurou poprvé potkali, bylo zvykem, že každého výzkumníka vzal pod svá křísla nějaký profesor, to ale oba odmítli. Během války se totiž výzkum zcela zastavil a profesoři matematiky z toho byli vyčerpaní, rozčarovaní a znavení, oproti tomu mladí studenti byli plní energie, chtiví studia a brzy poznali, že jedinou možností, jak postoupit kupředu, je učit se sami.

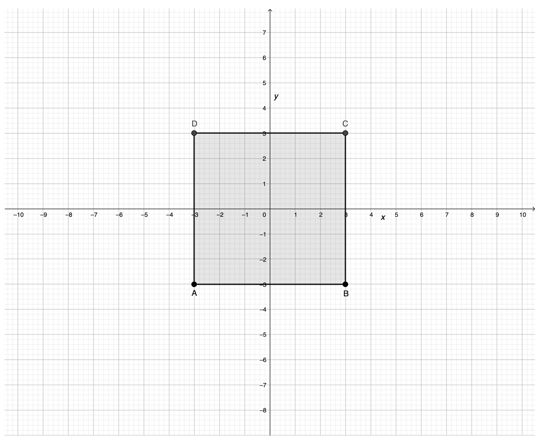
Mladí studenti pořádali pravidelné semináře, na nichž se vzájemně informovali o nejnovějších objevech a metodách. Tanijama bych na seminářích jakousi hnací silou, která přiměla starší studenty k tomu, aby se nebáli pronikat do nových oblastí a být vzorem pro mladší.

V důsledku izolace Japonska se na seminářích často probírala témata, kterými se v Evropě ani v Americe dlouhou dobu nikdo nezabýval. Studovali rovnice, které matematici na západě dávno opustili.

Jedním z nemoderních okruhů matematiky, jímž byli fascinováni Tanijama se Šimurou, byly modulární formy. Patří k nejméně srozumitelným matematickým pojmům, a přesto je odborník na teorii čísel Martin Eichler zařadil mezi pět základních operací spolu se sčítáním, odčítáním, násobením a dělením. Mnoho matematiků má právě s modulárními formami problém.

Hlavním rysem modulárních forem je jejich míra symetrie. Matematická formulace symetrie by se dala definovat nějak takto: objekt je symetrický, jestliže po určité transformaci vypadá stejně. Ukažme si to na čtverci. Jednou z forem symetrie je symetrie rotační, bude-li střed otáčení v průsečíků os, tak můžeme čtvercem na obrázku 1.16 otočit o celočíselné násobky 90° a bude vypadat stejně. Stejně tak oplývá čtverec symetrií zrcadlovou, s níž se setkáváme na základní škole - středová a osová souměrnost. Středová souměrnost bude mít střed v průsečíku os x a y se souřadnicemi $[0;0]$. Druhým typem je souměrnost osová, ať už by byla naší osou souměrnosti osa x nebo osa y či jedna z úhlopříček čtverce, vždy dostaneme totéž (jen body budou jinde, například bod A se zobrazí na bod B a opačně).

Čtverec je poměrně hodně symetrický, ale nemá žádnou translační symetrii, jakmile čtverec posuneme v libovolném směru, vidíme, že již není na svém místě (změnily by se nám souřadnice všech bodů).



Obrázek 1.16: Čtverec proložený osami x a y. Obrázek vytvořen v programu *Geogebra.*

Modulární formy představují v matematice kapitolu samu o sobě a určitě nevypadají, že by mohly mít něco společného s eliptickými rovnicemi, které vám představím v další kapitole.

V září roku 1955 na matematickém sympóziu nechali organizátoři kolovat sbírku šesti otevřených matematických problémů, čtyři z šesti problémů pocházely od Tanijamy a právě tyto problémy upozornily na možnost existence překvapujícího vztahu mezi modulárními formami a eliptickými rovnicemi. Jutaka vyslovil tvrzení, že každá eliptická křivka, velmi volně řečeno, nemá příliš mnoho výjimečných vlastností, což se matematicky lépe vyjadřuje slovy, že každá eliptická křivka je zároveň modulární.

Jednalo se o výjimečný objev, neboť bez jediného viditelného důvodu mohla být eliptická rovnice svázána s modulární formou skrze odpovídající E-řadu a M-řadu, které splývaly.

Jednalo se o objev dvojí hloubky, jednak naznačoval, že kdesi hluboko leží zákonitosti, které spojují modulární formy s eliptickými křivkami, tedy pojmy pocházející z opačných konců matematiky, ale též kdyby matematici znali M-řadu z modulární formy, nemuseli by již počítat E-řadu příslušné eliptické rovnice, neboť by obě byly zcela identické.

Tanijama prozkoumal několik modulárních forem a u všech souhlasila výsledná M-řada s E-řadou. Tím jej napadlo, že by každá z modulárních forem mohla mít svou odpovídající eliptickou rovnici. Tato myšlenka byla natolik neobvyklá, že ti, kdo si Tanijamovy otázky přečetli, je považovali pouze za jakési kuriózní pozorování. Dle skeptiků byla Tanijamova domněnka neopodstatněná, jelikož byla podložena pouhou intuicí, nikoli opravdovými důkazy. Jediný, kdo této myšlence důvěřoval, byl právě Šimura.

Po skončení symposia se společně pokusili rozvinout domněnku na takovou úroveň, aby ji svět již nemohl ignorovat. Šimura hledal další důkazy o vztahu mezi eliptickými rovnicemi a modulárními formami. Spolupráce byla na chvíli zastavena, jelikož v roce 1957 byl Šimura pozván, aby navštívil Institute for Advanced Study v Princetonu. Po dvouletém působení jako hostující profesor se měl v plánu ke spolupráci s Jutakou vrátit, k tomu však bohužel nedošlo, jelikož Jutaka 17.11.1958 spáchal sebevraždu.

Ještě v devadesátých letech dvacátého století, kdy s Šimurou dělal rozhovor Simon Singh, měl Šimura schovaný jak první dopis od Tanijamy, tak ten poslední, který mu napsal do Princetonu. Tento poslední dopis však neobsahoval žádné známky toho, že by měl Tanijama v plánu ukončit svůj život. Šimura nikdy nepochopil, proč to Tanijama udělal. Těsně před tím, než Jutaaka ukončil svůj život, byl šťastně zamilován do dívky jménem Misako Suzuki, s níž chystal svatbu. Ve své osobní vzpomínce Šimura připomíná Jutakovo zasnoubení a popisuje poslední týdny, které předcházely sebevraždě.

„Když jsem se o jejich zasnoubení dozvěděl, byl jsem trochu překvapený, jelikož jsem měl určitý pocit, že ona není jeho typ, neměl jsem však žádné obavy. Později jsem slyšel, že pronajali byt, nejspíš nějaký lepší, jako svůj nový domov, že si tam společně nanosili nádobí a že plánovali svatbu.

Ráno 17.listopadu 1958 jen našel správce bytu mrtvého v jeho pokoji. Na stole ležel dopis. Byly to tři stránky z bloku, který používal ke své práci. První odstavec zněl takto:

„Až do včerejška jsem neměl žádný úmysl se zabít. Dost lidí si však nepochybně povšimlo, jak jsem fyzicky i duševně unaven. Své sebevraždě nerozumím úplně ani já sám, jejím důvodem však není nějaká konkrétní událost či určitá věc. Mohu pouze říci, že jsem se dostal do stavu, kdy jsem pozbyl sebedůvěry ve svou vlastní budoucnost. Možná, že někomu má smrt způsobí trápení nebo jej do určité míry raní. Upřímně věřím, že nezastíní budoucí život oné osoby. V každém případě musím přiznat, že jde z mé strany tak trochu o zradu, prosím však, aby mi byla odpuštěna. Bude to poslední čin, který provedu po svém, tak jak jsem to dělal po celý svůj život.“

Pak dosti systematicky popsal, jak má být naloženo s jeho věcmi, které knihy a časopisy se mají vrátit do knihovny a přátelům a tak dále. Konkrétně napsal: „Rád bych ponechal desky a gramofon Misako Suzuki, pakliže ji to příliš nerozruší.“ Dále vyložil, jak daleko se dostal ve svých přednáškách z diferenciálního a integrálního počtu a z lineární algebry, a závěrem připojil omluvu svým kolegům za nepříjemnosti, které jim jeho sebevraždou vzniknou.

Tak tedy jeden z nejbrilantnějších tvůrčích lidí ukončil dobrovolně svůj život. Pět dní před tím dovršil svůj třicátý první rok.“

Několik týdnů po jeho sebevraždě si vzala život též Tanijamova snoubenka. Zanechala prý dopis s těmito slovy: „Slíbili jsme jeden druhému, že nás žádná událost nerozdělí. Nyní, když odešel, musím jít za ním.“

Po smrti Jutaky soustředil Šimura všechny své síly na to, aby porozuměl vztahu mezi modulárními formami a eliptickými křivkami. Shromažďoval další důkazy pro podporu domněnky. Stále více a více byl přesvědčen, že každá eliptická rovnice odpovídá nějaké modulární formě.

Šimura si při rozhovoru se Simonem Singhem vzpomínal na rozhovor s jedním kolegou, který se jej zeptal: „Vy se prý domníváte, že by některé eliptické rovnice mohly odpovídat nějakým modulárním formám?“ Šimura mu odpověděl slovy: „Ne, ne, to jste pochopil špatně. Ne jenom některé, ale všechny eliptické rovnice.“

Bohužel Šimurovi scházel důkaz, ale kdykoli hypotézu testoval, zdála se být pravdivá a vše zapadalo do jeho široké matematické filosofie.

Jedním z prvních, kdo Tanijamově-Šimurově domněnce uvěřil, byl André Weil, jeden z kmotrů teorie čísel. Nejen, že Weil komunikoval s Šimurou, ale též nalezl nové poznatky na její podporu, z toho důvodu je tato domněnka též označována jako Tanijamova-Šimurova-Weikova domněnka či někdy jen Tanijamova-Weilova domněnka.

Když tato domněnka pronikla na západ, školitel Andrewa Wilese John Coates byl sám pouhým studentem. K této události se vyjadřuje následovně: „V roce 1966, kdy Tanijamova-Šimurova domněnka obletěla svět, jsem začal vědecky pracovat. Celý svět užasl a všichni se začali myšlenkou vážně zabývat. Byla to vzrušující doba. Potíž byla pouze v tom, že se zdálo nemožné dosáhnout nějakého pokroku. Myslím, že to nebude nespravedlivé, když řeknu, že ačkoli to byl krásný nápad, vypadalo to, že dokázat jej bude strašně těžké. A to nás matematiky zajímá v první řadě.“

Koncem šedesátých let byla domněnka testována spoustou matematiků, velký potenciál tohoto tvrzení spočíval v tom, že by propojila dva ostrůvky a umožnila by jejich obyvatelům vzájemnou komunikaci, a to vůbec poprvé. Barry Mazur ji chápal jako nástroj podobný Rosettské desce, která obsahuje stejný text zapsaný egyptským démotickým písmem, starověkou řečtinou a hieroglyfy.

Obrázek 1.17: Na obrázku vidíte část Rosettské desky. Převzato z [l].

Jelikož řečtině v té době rozuměli, archeologové mohli odhalit tajemství hieroglyfů. Dle Mazura: „Je to jako když ovládáte jeden jazyk a Rosettská deska vám umožní porozumět do hloubky jazyku jinému. Ale Tanijamova-Šimurova domněnka je Rosettskou deskou, která v sobě navíc ukrývá jakousi magickou sílu. Její krása spočívá v myšlence, že bychom mohli překládat jednoduché intuice z modulárního světa do hlubokých tvrzení světa eliptického a naopak. A co více, velmi hluboké problémy světa eliptického bychom mohli řešit pomocí jejich překladu Rosettskou deskou do modulárního světa s využitím nářadí a pomůcek, které jsou tam k mání. V původním eliptickém světě bychom pohořeli."

Právě pravdivost Tanijamovy-Šimurovy domněnky by matematikům umožnila pustit se s využitím nástrojů modulárního světa do eliptických problémů, které setrvávaly nevyřešené po staletí. Domněnka přinesla také naději existence mostů mezi dalšími matematickými ostrůvky.

Po smrti Tanijamy Šimura dále pracoval na vylepšení domněnky a své poznámky přepsal do angličtiny, nikdy nepřestal doufat, že měl jeho přítel s tímto tvrzením pravdu.

V roce 1995 byla tato domněnka dokázána právě Andrewem Wilesem, Důkazem Tanijamovy-Šimurovy domněnky byla dokázána i Velká Fermatova věta.

Sám Šimura se k důkazu a medializaci jeho nalezení vyjádřil slovy: „Je velmi kuriózní, že lidé píší o Tanijamově-Šimurově domněnce, ale nikdo nepíše o Tanijamovi ani o Šimurovi." Netrápil se kvůli malé pozornosti, kterou věnovali jeho úloze v důkazu Velké Fermatovy věty, ale dotýkalo se jej, že jeho a Tanijamovo jméno degradovali na přídavná jména.

Góro Šimura zemřel 3. května 2019 ve věku 89 let v Ósace [1, 12, 13, 15, L, N].

1.3.7 Gerhard Frey

Obrázek 1.18: Gerhard Frey. Obrázek stažen z [m].

Gerhard Frey se narodil 1. června 1944 v Bensheimu. Vystudoval matematiku a fyziku v německém Tübingenu, kde roku 1967 promoval. Doktorát vystudoval na univerzitě v Heidelbergu, zde získal v roce 1970 doktorát a v roce 1973 habilitoval a získal tak svou první profesuru, další profesury jej dovedly na univerzitu v Erlangenu (Norinberg) a v Saarbückenu. Od roku 1990 působil v Institutu pro experimentální matematiku na bývalé univerzitě v Essenu, kde vedl pracovní skupinu pracující na teorii čísel.

Jako hostující vědec působil na různých univerzitách, například na univerzitě v Ohiu, Harvardské univerzitě, Kalifornské univerzitě v Berkeley či v Matematickém Vědeckém Výzkumném institutu (MSRI) v Kalifornii.

Oborem profesora Freye je teorie čísel zaměřená na eliptické křivky.

V roce 1996 získal Gaussovu medaili za přínos k důkazu Velké Fermatovy věty, o dva roky později, tedy roku 1998, se stal členem Göttingenské akademie věd a v roce 2006 získal cenu *Certicom ECC Visionary Award* za svou příspěvek ke kryptografii s eliptickými křivkami.

Jeho přínos k důkazu velké Fermatovy věty tkví v tvrzení, že bude-li dokázána Tanijamova-Šimurova[12] domněnka, bude tím zároveň dokázána Velká Fermatova věta. S tímto tvrzením přišel roku 1984 na symposiu v Oberwolfachu, jehož cílem byla diskuse o nových poznatcích ve studiu eliptických rovnic.

Abychom nebyli úplně ztracení, bylo by vhodné si říci, co se pojmem eliptická křivka myslí. Eliptickou křivkou označujeme všechny rovnice ve tvaru

$$y^2 = x^3 + Ax + B, \tag{1.11}$$

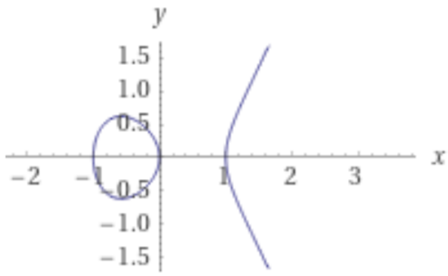
kde parametry A, B jsou libovolná celá čísla.

Pokud bychom například za parametr A dosadili číslo -1 a za B dosadili číslo nula, dostáváme rovnici:

$$y^2 = x^3 - x, \tag{1.12}$$

Což můžete vidět na obrázku 1.19.

[12]Někdy se setkáte s názvem Tanijamova-Shimurova-Wilova domněnka či Tanijamova-Šimurova-Weilova.

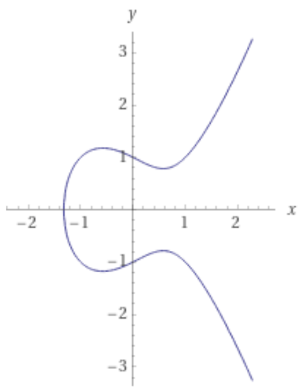


Obrázek 1.19: První znázornění eliptické rovnice podle (1.12). Obrázek byl vykreslen přes *WolframAlpha.*

Dalším příkladem eliptické křivky může být třeba případ, kdy za A dosadíme číslo -1 a za B číslo jedna.

$$y^2 = x^3 - x + 1, \tag{1.13}$$

V tomto případě by znázornění vypadalo tak, jak je zobrazeno na obrázku 1.20

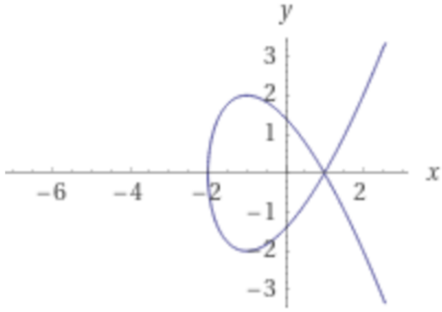


Obrázek 1.20: První znázornění eliptické rovnice podle (1.13). Obrázek byl vykreslen přes *WolframAlpha.*

Poslední, příkladem, jehož znázornění se mi líbilo byl případ, kdy jsme za parametr A dosadili číslo -3 a za parametr B pak číslo 2.

$$y^2 = x^3 - 3x + 2, \tag{1.14}$$

Zde by zobrazení vypadalo jako na obrázku 1.21.



Obrázek 1.21: První znázornění eliptické rovnice podle (1.14). Obrázek byl vykreslen přes *WolframAlpha.*

Jak můžete vidět z obrázků 1.19, 1.20 a 1.21, ačkoli název těchto rovnic jsou eliptické křivky, jejich znázornění s elipsou či jinými kuželosečkami nemají mnoho společného. Své jméno dostaly eliptické křivky již v minulosti, kdy byly používány pro výpočet obvodů elips a délek oběžných drah planet.

Eliptické rovnice byly studovány již matematiky ve starověkém Řecku. Například takový Diofantos jim věnoval velkou část své knihy Aritmetika, o níž víme, že byla předmětem studia Pierra Fermata.

Vzácná vlastnost eliptické křivky spočívá v tom, že pro body na křivce lze definovat takovou operaci, že jsou splněny vlastnosti grupy[13] a operaci na křivce lze reprezentovat geometrickou konstrukcí.

Eliptické křivky jsou využívány v různých oblastech matematiky a informatiky od teorie čísel ke komplexní analýze či od kryptografie k matematické fyzice.

Jak u Velké Fermatovy věty, tak i u eliptických rovnic je cílem určit, jestli mají nějaká celočíselná řešení, a pokud ano, tak kolik.

Vraťme se teď zpět od eliptických rovnic k profesoru Gerhardu Freyovi.

Když Frey na symposiu v Oberwolfachu přistoupil k tabuli, aby zahájil svůj referát, nejprve na tabuli zapsal Fermatovu rovnici ve tvaru

$$x^n + y^n \neq z^n, \tag{1.15}$$

kde n je větší než 2.

Jak již víme, Velká Fermatova věta tvrdí, že neexistují žádná kladná celočíselná řešení této rovnice, Frey ovšem začal zkoumat, co by se stalo, kdyby byla Fermatova věta ve tvaru 1.15 nepravdivá. Tedy kdyby přeci jen alespoň jedno kladné celočíselné řešení existovalo.

Neměl ponětí, jak by takové hypotetické řešení mělo vypadat, proto neznámá čísla označil jako A,B,C a rovnici zapsal takto:

$$A^N + B^N = C^N. \tag{1.16}$$

Následně začal tuto rovnici upravovat. Při tomto postupu se sice mění vzhled rovnice, nikoli však její integrita. Po několika úpravách rovnice dostal:

$$y^2 = x^3 + (A^N - B^N)x^2 - A^N B^N. \tag{1.17}$$

Ačkoli se tato forma jeví jako velmi odlišná od té původní, je to pouze přímý důsledek existence domnělého řešení. Tedy jestliže existuje řešení Fermatovy rovnice 1.1, a tedy Velká Fermatova věta neplatí, pak takto upravená rovnice 1.17 musí existovat.

Tímto Frey nijak publikum neoslnil. Následně posluchače upozornil na to, že tato rovnice je ve skutečnosti rovnicí eliptickou, i když trošku upravenou.

Pokud bychom v rovnici 1.11 položili
$a = (A^N - B^N)$, $b = 0$, $c = -A^N B^N$,
pak můžeme vidět eliptickou povahu této rovnice.

Tímto Frey propojil Velkou Fermatovu větu s Tanijamovou-Šimurovou domněnkou. Poté posluchače upozornil na to, že rovnice vzešlá z řešení rovnice Fermatovy je opravdu bizarní. Pokud by řešení Freyovy rovnice 1.17 existovalo, mělo by to ničivý účinek na Tanijamovu-Šimurovou domněnku, ta nám říká, že každá eliptická rovnice má svou odpovídající modulární formu.

[13]Grupa je algebraická struktura tvořená množinou spolu s binární operací, jež je asociativní, má neutrální prvek a každý prvek má svou inverzi.

Frey argumentoval takto:

1. Freyova eliptická rovnice existuje tehdy (a jen tehdy), jestliže Fermatova věta neplatí.

2. Freyova eliptická rovnice je tak podivná, že nemůže být modulární.

3. Tanijamova-Šimurova domněnka tvrdí, že každá eliptická rovnice je modulární.

4. Tanijamova-Šimurova domněnka tedy neplatí.

Ještě důležitější je obrácená úvaha:

1. Prokáže-li se, že Tanijamova-Šimurova domněnka platí, pak každá eliptická rovnice je modulární.

2. Je-li každá eliptická rovnice modulární, pak Freyova rovnice nemá nárok na existenci.

3. Jestliže Freyova rovnice neexistuje, pak Fermatova rovnice nemá řešení.

4. Velká Fermatova věta platí.

Gerhard Frey vyvodil závěr, že platnost Velké Fermatovy věty by okamžitě vyplynula z platnosti Tanijamovy-Šimurovy domněnky. Tvrdil, že pokud by byla dokázána Tanijaamova-Šimurova domněnka, byla by dokázána i velká Fermatova věta. Konečně za posledních sto let vypadal nejtěžší matematický oříšek všech dob jako řešitelný. V cestě mu ovšem stála právě Tanijamova-Šimurova domněnka.

Tato úvaha udělala na publikum velký dojem. Zároveň si lidé v sále všimli, že v úvaze se nachází elementární chyba, ne ovšem nějak závažná. Byla potřeba, aby tuto chybu někdo odstranil a propojení Velké Fermatovy věty a Tanijamovy-Šimurovy domněnky ověřil.

Freyovi posluchači vyrazili z posluchárny přímo ke kopírovací místnosti. Dle [1] lze hodnota přednášky odhadnout dle délky fronty u kopírky. S kompletní osnovou Freyových myšlenek v ruce se posluchači vrátili do svých pracoven a začali pracovat na odstranění mezery.

Mezera či chyba, kterou Frey udělal, spočívala v tom, že neprokázal, že jeho rovnice je dostatečně podivná, pouze kdyby někdo prokázal absolutní podivnost Freyovy rovnice, dalo by se říci, že Tanijamova-Šimurova domněnka implikuje Velkou Fermatovu větu.

Zpočátku matematici věřili, že důkaz podivnosti Freyovy rovnice bude pouze jednoduchou rutinní záležitostí, jelikož Freyova chyba vypadala na první pohled jako snadno odstranitelná, a ti, kdo tehdy v Oberwolfachu byli, očekávali závody o to, kdo se s algebraickými triky vypořádá nejrychleji.

Frey načrtl vábivou strategii důkazu Velké Fermatovy věty, ale již první elementární krok, tedy důkaz podivnosti Freyovy hypotetické rovnice, zamotal hlavu matematiků po celém světě.

Gerhard Frey byl tedy dalším člověkem, který svou úvahou přispěl k pokusům o důkaz Velké Fermatovy věty.

Další z jeho prohlášení je to, které je uvedeno v knize [8]: „Vsaďme se: Pokud bude dokázána Riemannova hypotéza, stane se tak bez použití počítačů.“ Na ověření tohoto prohlášení si ovšem budeme muset ještě nějakou dobu počkat, jelikož Riemannova hypotéza je jeden z dalších nevyřešených a náročných problémů matematiky. A uvidíme, zda se důkazu Riemannovy hypotézy dožije sám Gerhard Frey, který je ke dni 26. 11. 2022 stále žijícím matematikem.

[1, 3, 8, 14, K]

1.3.8 Kenneth Ribet

Obrázek 1.22: Ken Ribet. Obrázek stažen z [n].

Narodil se 28. června 1948 do židovské rodiny.

V současnosti je profesorem matematiky na Kalifornské univerzitě v Berkeley a prezidentem Americké matematické společnosti.

Vystudoval na Brown Univerzitě a Harvardské univerzitě, na Harwardu získal roku 1973 doktorát. Vyučoval mimo jiné na Princetonu. Od roku 1978 působí na univerzitě v Berkeley.

Jeho oborem je teorie čísel a algebraická geometrie.

Ribet je držitelem některých ocenění za přínos v matematice, mezi které patří například Fermatova cena, kterou získal v roce 1989, či Brouwerova medaile, kterou dostal v roce 2017.

Ken Ribet byl jedním z těch lidí, kteří se po Freyově přednášce v Oberwolfachu snažili dokázat podivnost Freyovy rovnice. Právě Ribetovi se to nakonec přeci jen povedlo.

Po Freyově přednášce byl Ribet posedlý touhou dokázat, že Freyova rovnice není modulární. Po celých 18 měsíců se nepohnul ani o krůček blíže k cíli. V létě roku 1986 navštívil univerzitu v Berkeley Ribetův kolega, profesor Barry Mazur, který zde přicestoval na matematický kongres.

Společně si vyrazili na cappuccino, u něhož debatovali nad svými matematickými výzkumy. Po čase se dostali v konverzaci ke svým snahám dokázat podivnost Freyovy rovnice a Mazur Ribetovi nastínil svou strategii, kterou zkoušel. Tento přístup vypadal velmi slibně, nemohl se však dostat přes jeden detail.

K této konverzaci se Ribet vyjádřil slovy: „Seděl jsem naproti Barrymu a povídal jsem mu, na čem pracuji. Řekl jsem mu, že jsem dokázal jistý, velice speciální případ, ale že nevím, jak jej zobecnit, aby byl důkaz úplný.“ Profesor Mazur naslouchal Ribetovým úvahám, pak se zarazil a podíval se na něj s nedůvěrou. „Vždyť už to máš! Copak to nevidíš? Stačí, abys tady přičetl gama-nula struktury (M) a projel důkaz ještě jednou. Z toho už ti to vypadne.“

Dle [1] to byl nejdůležitější okamžik Ribetovy kariéry, proto si jej pamatuje do detailů. Odpověděl profesoru Mazurovi: „Máš pravdu, jak je možné, že mě to nenapadlo?“ Byl nadšený, jelikož jej nenapadlo přičíst gama-nula struktury (M), i když je to dle něj jednoduché. Ovšem co je jednoduché pro Ribeta, nemusí být jednoduché pro nás, ba dokonce ani pro mnoho matematiků. Jedná se o hluboký a komplikovaný proces, který by si nad šálkem kávy dokázala srovnat jen hrstka matematiků.

Na kongresu tou dobou bylo tisíce matematiků a Ribet se několika lidem zmínil, že dokázal, že Tanijamova-Šimurova domněnka implikuje Velkou Fermatovu větu. Tato zpráva se rozšířila rychlostí blesku a brzy o tom věděli všichni.

Tímto byla Velká Fermatova věta komplikovaně propojena s Tanijamovou-Šimurovou domněnkou a kdyby dokázal, že každá eliptická rovnice je zároveň modulární, dokázal by platnost Velké Fermatovy věty. Nejvýznamnější problém 17. století byl svázán s nejvýznamnějším problémem 20. století.

I přes to, že Ken Ribet, inspirovaný Gerhardem Freyem, položil rozhodující krok k důkazu Velké Fermatovy věty, patřil k těm, kteří věřili, že je nemožné najít nějaký přístup k Tanijamově-Šimurově domněnce. Sám se o tento důkaz nepokusil.

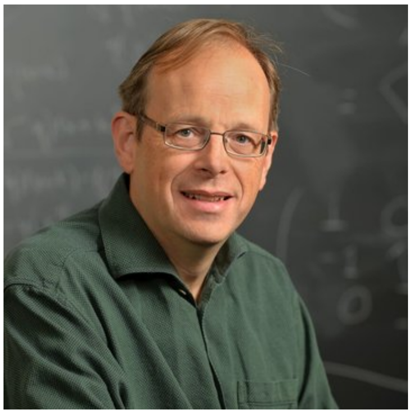
Dle Ribeta byl Andrew Wiles jedním z mála lidí na Zemi, kteří uvěřili, že je možné domněnku dokázat.

Stejně jako Gerhard Frey i Kenneth Ribet je ke dni 26. 11. 2022 stále žijícím matematikem.

[1, M]

1.3.9 Andrew Wiles a Richard Taylor

Obrázek 1.23: Andrew Wiles. Obrázek převzat z [o].



Obrázek 1.24: Richard Taylor. Obrázek převzat z [p].

Konečně se dostáváme k poslední kapitole teoretické části, tato kapitola bude o něco rozsáhlejší, než ta předchozí, a bude se týkat Andrewa Wilese, který je znám díky nalezení částečného důkazu Tanijamovy-Šimurovy domněnky a hlavně Velké Fermatovy věty, a též Richarda Taylora, studenta Wilese, který byl jedním z recenzentů zodpovědných za prověření Wilesova důkazu.

Andrew Wiles se narodil 11. dubna 1953 v Cambridge (Anglie). Otec Andrewa byl profesorem teologie na Oxfordské univerzitě. Roku 1971 nastoupil na Merton College v Oxfordu, kde o 3 roky později promoval, dále pokračoval na Clare College v Cambridge, kde studoval doktorát a kde byl jeho školitelem John Coates.

Mezi lety 1977 až 1989 byl výzkumným pracovníkem na Cambridge a též asistentem profesora Benjamina Peirce na Harwardově univerzitě. Roku 1980 získal doktorát a následně strávil nějaký čas v Centru pro kolaborativní výzkum teoretické matematiky v Bonnu (v originálním znění Sonderforschungsbereich Theoretische Mathematik in Bonn). Koncem roku 1981 se vrátil zpět do Spojených států, aby přijal místo v Institutu pro pokročilé studium matematiky na Princetonu, o rok později byl jmenován profesorem na Princetonu a roku 1982 chvíli působil jako hostující profesor v Paříži.

Získal Guggenheimovo stipendium, které mu umožnilo navštívit Institut pokročilých vědeckých studií v Paříži (Institut des Hautes Études Scientifique à Paris) a také École Normale Supérieure v Paříži (s touto školou jsme se setkali již v kapitole věnované mladému Galoisovi).

V roce 1988 odešel na Oxfordskou univerzitu, kde strávil 2 roky jako profesor výzkumu Královské společnosti, zde byl roku 1989 zvolen členem Královské společnosti.

Za důkaz Velké Fermatovy věty, který se objevil v *Annals of Mathematics* v roce 1995, získal řadu ocenění, mimo jiné též Wolfsheklovu peněžní cenu, která po všech inflacích činila asi 50 000 dolarů, což v přepočtu v dnešním kurzu činí asi 1 223 185 Kč. Dále získal například Schockovu cenu za matematiku od Švédské Královské akademie věd a Fermatovu cenu Univerzity Paul Sabatier, dostal také stříbrnou plaketu na Mezinárodním kongresu matematiků v Berlíně, roku 1999 po něm byl pojmenován asteroid s názvem: „Asteroid 9999 Wiles“ a v roce 2000 se stal sirem Andrewem Wilesem.

V matematice je však udělována ještě jedna velká cena a tou je Fieldsova medaile, ta se ovšem uděluje matematikům do věku 40 let, v době, kdy Wiles dokázal Velkou Fermatovu větu, mu bylo 42 let, kdyby v důkazu vydaném v roce 1993 nebyla nalezena chyba, ještě by mohl mít na tuto cenu nárok.

Richard Lawrence Taylor se narodil 19. května 1962 v Cambridge (Anglie) do rodiny učitelů, matka byla učitelkou klavíru a otec matematický fyzik, který byl emeritním profesorem matematické fyziky na univerzitě v Cambridge. Ve dvou letech se s rodinou přestěhovali do Oxfordu. V Oxfordu navštěvoval Magdalen College School, kde jej matematiku učil Tony Middleton, jenž se později stal lektorem matematiky pro fyziku na Brasenose College Oxfordské univerzity.

Ke své lásce k matematice se Taylor vyjádřil těmito slovy: „Mám podezření, že jsem se o matematiku začal zajímat velmi brzy. Můj otec je teoretický fyzik. V rodině vždy existovala kultura matematických věd. Už si to přesně nepamatuji, ale určitě jsem se jako teenager zajímal o matematiku. Bavilo mě číst knihy o matematice pro zábavu a snažit se hledat matematické problémy a zjišťovat informace o pokročilejší matematice. Nebyla tam žádná věc, která by mne nějak zvlášť zaujala. Myslím, že už na střední škole bylo jasné, že jsem v matematice lepší než většina ostatních dětí. Největší vliv na můj raný vědecký vývoj měl nepochybně můj otec, který mě naučil, abych nikdy nebyl spokojený, dokud něčemu skutečně plně nerozumím. Také jsem se od něj naučil nebát se klást jednoduché otázky.“

Po ukončení studií na Magdalen College School se vrátil do Cambrige na Clare College. V letech 1981 a 1982 byl prezidentem „The Archimedeans“, což je Cambridská matematická společnost, jejímž cílem je podporovat spolupráci mezi všemi Cambridgeskými matematickými společnostmi.

Také rád cestoval tam, kde se mohl věnovat horolezectví, za tímto účelem navštívil například Alpy, Himaláje i sopky Ekvádoru.

V roce 1984 vystudoval Cambridskou univerzitu a i přes své pochyby, zda je dostatečně dobrý na to, aby se pustil do výzkumu v teorii čísel, se rozhodl jít na postgraduální studium na Princetonu ve Spojených státech, kde pracoval s Andrewem Wilesem. V roce 1988 získal doktorát za svou práci o kongruencích mezi modulárními formami.

Po studiích na Princetonu se stal členem Clare College na Cambridgi a též členem královské společnosti.

V roce 2002 byl Taylor jmenován profesorem matematiky na Harwardu. V letech 2010 až 2011 navštívil Institut pro pokročilé studium v Princetonu a v lednu roku 2012 opustil své místo na Harwardu a stal se profesorem matematiky Roberta a Luisy Fernholzových na Institutu pokročilých studií na Princetonu. V roce 2018 nastoupil na katedru matematiky na Fakultě humanitních a přírodních věd na Stanfordské univerzitě, kde byl jmenován novým profesorem Barbary Kimball Browning, což je místo dotované nejvyšší poctou, kterou může Stanfordská univerzita členovi fakulty udělit.

Stejně jako Wiles, i Taylor je držitelem mnoha ocenění, mezi která patří například Whiteheadova cena Londýnské matematické společnosti z roku 1990, Fermatova cena a Cena Ostrowski získané v roce 2001, Cena Franka Nelsona Colea v teorii čísel z roku 2002 či zvolení členem Americké matematické společnosti z roku 2012.

Už ve svých deseti letech byl Andrew Wiles fascinovaný matematikou. Bavilo jej řešit rozličné obtížné úlohy, které řešili ve škole. Avšak na problém, který provázel velkou část jeho života, narazil v knihovně na Milton Road. V této knihovně bylo mnoho knih, obsahujících různé logické úlohy a matematické hádanky.

Wilese nejvíce zaujala kniha Erica Teple Bella, pojmenovaná *The Last Problem*, tedy kniha, která pojednávala o Velké Fermatově větě. Popisovala problém, který měl své kořeny již ve starověkém Řecku a který byl plně rozvinut v 17. století Pierrem Fermatem. Jeden velký matematik za druhým si na tomto Fermatově odkazu vylámal zuby a po celá tři staletí nikdo nedokázal problém vyřešit... Výjimečnost tohoto problému spočívá právě ve zdánlivé jednoduchosti.

Wilesova slova o tom, jak se cítil, když se s Velkou Fermatovou větou zněla nějak takto: „Vypadala velmi snadně, a přitom ji žádný z velkých matematiků neuměl dokázat. Zároveň byla její formulace tak jednoduchá, že jsem ji i já ve svých 10 letech dokázal pochopit. Od toho okamžiku jsem věděl, že tento problém nikdy neopustím. Musel jsem ho prostě vyřešit.“ A jak již víme, tento problém Wiles skutečně nakonec vyřešil.

Důkaz Wilese spočíval v tom, že pomocí Mazurovy deformační teorie Galoisových reprezentací, výsledků Serreho domněnky o modularitě Galoisových reprezentací a aritmetických vlastností Heckeho algebry, a též díky Taylorovi bylo možno dokázat, že všechny semistabilní eliptické křivky definované přes racionální čísla jsou modulární. Je to sice ne úplná Tanijamova-Šimurova domněnka, ale právě tento výsledek naznačuje, že Freyova eliptická křivka je modulární, což potvrzuje Velkou Fermatovu větu.

Cesta k nalezení důkazu nebyla vůbec jednoduchá, Wiles svému snu, dokázat Velkou Fermatovu větu, věnoval velkou část svého života.

Jak jsem již psala, tak na Clare College v Cambridge byl jeho školitelem John Coates, právě ten přivedl Wilese ke studiu eliptických rovnic. Právě díky Coatesovi věděl o eliptických rovnicích víc, než kdokoli jiný, byl si však vědom toho, že s těmito vědomostmi a matematickými schopnostmi čelí obrovskému problému, jelikož většina matematiků, včetně Coatse, byla přesvědčena, že pouštět se do důkazu Tanijamovy-Šimurovvy domněnky je zbytečné. Sám Coates prohlásil: „Byl jsem velmi skeptický k tomu, že by nás ta úžasná souvislost mezi Fermatovou větou a Tanijamovou-Šimurovou domněnkou mohla opravdu k něčemu dovést. Myslel jsem si, že domněnku nepůjde dokázat. Jakkoli krásný to byl problém, zdálo se nemožné jej skutečně vyřešit. Přiznám se, že jsem si myslel, že se nejspíš důkazu nedožiji.“ Důkazu se nakonec dožil, Coates zemřel teprve nedávno, a to 9. května 2022 ve věku 77 let.

V létě 1986, kdy u svého přítele popíjel čaj, se dozvěděl, že Ken Ribet dokázal souvislost mezi Velkou Fermatovou větou a Tanijamovou-Šimurovou domněnkou. Bylo to více jak 20 let od chvíle, kdy se s Velkou Fermatovou větou poprvé setkal v knihovně. Znamenalo to pro něj, že jeho dětský sen se změnil v konkrétní problém, kterým bylo dokázat Tanijamovu-Šimurovu domněnku. K tomu se vyjádřil těmito slovy: „Samozřejmě, Tanijamova-Šimurova domněnka zůstala otevřená po řadu let. Nikdo nenašel žádný nápad, jak k ní přistoupit, byla však pořád součástí hlavního proudu matematiky. Mohl jsem to zkusit a dokázat výsledky, které – i kdyby nevyřešily celý problém – by představovaly hodnotnou matematiku. Neměl jsem pocit, že budu marnit čas. A tak se romantický zájem o Velkou Fermatovu větu, který mne provázel po celý život, najednou spojil s problémem, který byl profesionálně přijatelný.“

Wiles prostudoval poslední čísla odborných časopisů a pak znovu a znovu zkoušel nejnovější postupy, až se mu staly druhou přirozeností. Tato přípravná fáze, během níž si osvojil každou část matematiky, kterou kdo kdy odvodil či použil pro eliptické rovnice a modulární formy, mu zabrala 18 měsíců.

Rozhodl se, že bude pracovat v naprosté izolaci a tajnosti. Zanechal veškeré práce, která se přímo nevztahovala k dokazování Velké Fermatovy věty, přestal se zúčastňovat konferencí a kolokvií. Pokud to bylo možné, vyhýbal se pobytu na fakultě a pracoval doma, kde se mohl uchýlit do své podkrovní pracovny, kde se snažil rozšířit účinnost zavedených postupů a doufal, že se mu podaří nalézt strategii vhodnou k důkazu Tanijamovy-Šimurovy domněnky.

Wiles se bál situace, kdy by měl pohromadě podstatnou část důkazu a chyběly by mu poslední výpočty, kdyby v tuto chvíli pronikla jeho práce mezi ostatní, jeho rivalům by nic nebránilo tomu stavět na této práci, dokončit důkaz a připravit jej o cenu.

V následujících letech učinil Wiles řadu pozoruhodných objevů, ale s nikým o nich nemluvil a ani je nepublikoval, dokud nedokončil celý důkaz. Dokonce ani nejbližší kolegové Wilese nic nevěděli, jediným člověkem, který o Wilesově práci věděl, byla jeho žena Nada, kterou si vzal brzy poté, co na důkazu začal pracovat.

Použil svůj obvyklý přístup k řešení obtížných úloh - používání pouze tužky a papíru, nikoli počítače. V tomto případě, stejně jako v řadě jiných problémů teorie čísel, by počítač ničemu nepomohl.

Po roce přemýšlení se rozhodl založit důkaz na důkazu matematickou indukcí, kdy je potřeba dokázat, že platí-li tvrzení pro nějaké číslo n, pak musí platit i pro číslo $n+1$. Jiný způsob, jak uvažovat o důkazu indukcí je představit si nekonečné množství případů jako nekonečnou řadu stojících kousků domina a důkaz jednotlivého případu jako povalení určitého kousku. Abychom dokázali všechny případy, je potřeba najít způsob, jak postupně povalit všechny kousky domina. To by však vyžadovalo velké úsilí, důkaz indukcí umožňuje povalit všechny kousky tím, že porazí jen první z nich.

Úkolem bylo sestrojit induktivní úvahu, která by ukázala, že každá z nekonečného množství eliptických rovnic může být přiřazena k některé z nekonečného množství modulárních forem. Musel rozložit důkaz na nekonečné množství jednotlivých případů a dokázat případ první. Následně bylo potřeba ukázat, že po důkazu prvního případu padnou i všechny ostatní. Tento první krok k induktivnímu důkazu nalezl v práci Évarista Galoise. Grupy vytvořené z řešení rovnic pátého stupně umožnili Galoisovi odvodit výsledek o řešitelnosti těchto rovnic, tuto práci pak Wiles použil a vytvořil zní základ svého důkazu Tanijamovy-Šimurovy domněnky.

Místo toho, aby se Wiles snažil spárovat všechny prvky z jedné E-řady a M-řady a pak přešel k další E-řadě a M-řadě, zkusil spárovat první prvky všech E-řad a M-řad a následně přejít k dalším prvkům. Každá E-řada je tvořená nekonečným seznamem prvků – jednotlivých genů tvořících její DNA – a Wiles chtěl ukázat, že první gen každé E-řady lze spárovat s druhým genem každé M-řady a tak dále.

Šlo o nekonečnou úlohu, která nekonečnou zůstane, i kdybyste uměli dokázat, že všechny prvky jedné E-řady odpovídají všem prvkům jedné M-řady, stále by tu ještě zůstávalo dalších nekonečně mnoho E-řad a M-řad ke spárování. Wilesův přístup vyžadoval zdolávání nekonečna, měl ovšem jednu výhodu.

Pokud bylo v první metodě dokázáno, že určitá E-řada odpovídá určité M-řadě, byla potřeba položit si otázku: „Kterou E-řadu a M-řadu vezmu jako další?“ Nekonečné množství E-řad a M-řad nemá žádné přirozené uspořádání, je tedy zcela náhodné, kterou z nich si vybereme jako další. Klíčový význam ve Wilesově metodě má to, že geny E-řad jsou přirozeně uspořádány, takže po důkazu vzájemného přiřazení všech prvních genů ($E_1 = M_1$) by mělo být zřejmé, že další krokem bude dokázat přiřazení druhých genů ($E_2 = M_2$) atd.

Toto přirozené uspořádání bylo potřeba k tomu, aby sestrojil induktivní důkaz.

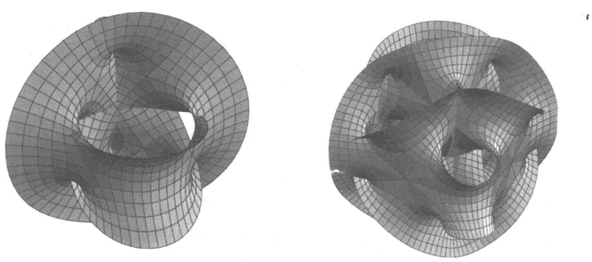
Prvního kroku dosáhl, když si uvědomil sílu Galoisových grup. Ze skupinky řešení každé eliptické rovnice lze vytvořit grupu. Po měsících analýzy Wiles dokázal, že studium této grupy vede k nevyvratitelnému závěru, tedy že první člen každé E-řady lze skutečně přiřadit prvnímu členu M-řady. Další krok vyžadoval, aby nalezl způsob, jak ukázat, že když každý prvek na určitém místě E-řady odpovídá prvku na příslušném místě M-řady, musí totéž platit i pro prvky na následujícím místě.

První krok si vyžádal dva roky a nedalo se tušit, kolik času zabere, než Wiles najde pokračování důkazu.

Velká Fermatova věta byla dokázána? Wiles to nebyl.

8. března 1988 čekal Wilese šok v novinách, titulky hlásily, že Velká Fermatova věta byla dokázána. Joiči Mijaoka, osmatřicetiletý muž z Metropolitní univerzity v Tokiu, prý objevil důkaz Velké Fermatovy věty. Důkaz sice nebyl publikován, ale své kroky popsal Joiči na semináři v Matematickém ústavu Maxe Plancka v Bonnu.

K problému přistoupil z jiného směru než Wiles, a to přes diferenciální geometrii. Diferenciálním geometrům, kteří se zabývali úlohami z teorie čísel, se začalo říkat „aritmetičtí algebraičtí geometři“. V roce 1983 dosáhli svého prvního velkého úspěchu, když Gerd Faltings v Institutu pokročilých studií na Princetonu učinil důležitý krok k pochopení Velké Fermatovy věty tím, že se rozhodl studovat geometrické útvary přiřazené určitým hodnotám n. Útvary odpovídající každé z těchto rovnic jsou odlišné, avšak mají jednu společnou vlastnost, jsou děravé. Jsou čtyřrozměrné, stejně jako modulární formy, dvojrozměrné zobrazení dvou z nich můžete vidět na obrázku 1.25. Tyto útvary vypadají jako vícerozměrné preclíky mající více děr. Čím vyšší je hodnota n, tím více děr odpovídající útvar obsahuje. Obrázek nalevo lze ve 3D provedení nalézt zde a obrázek napravo naopak zde.



Obrázek 1.25: Plochy na obrázku představují geometrickou reprezentaci rovnice $x^n + y^n = 1$, kde $n = 3$ pro obrázek vlevo a $n = 5$ pro obrázek vpravo. V obou případech jsou x a y brány, jako komplexní proměnné. Obrázek byl převzat z [1].

Pro tištěnou verzi přikládám QR kódy k jednotlivým obrázkům pro vizualizaci ve 3D.

Obrázek 1.26: QR kód k obrázku nalevo.

Obrázek 1.27: QR kód k obrázku napravo.

Z toho, že tyto tvary mají vždy více než jednu díru, dokázal Faltings odvodit, že odpovídající Fermatova rovnice může mít jen konečný počet celočíselných řešení, což by mohlo být cokoli, počínaje nulou. Nedokázal sice Velkou Fermatovu větu, ale vyloučil možnost, že by řešení bylo nekonečně mnoho.

O pět let později Mijaoka tvrdil, že umí o krok víc. Když mu bylo něco přes dvacet let, zformuloval domněnku týkající Mijaokovi nerovnosti. Důkaz jeho vlastní geometrické domněnky by zaručil, že počet řešení Velké Fermatovy věty je nejen konečný, ale dokonce nulový.

Mijaokův přístup byl podobný Wilesovu v tom, že oba zkoušeli dokázat Velkou Fermatovu větu tím, že ji spojili se základní hypotézou z jiného oboru matematiky - Mijaoka s diferenciální geometrií a Wiles s eliptickými rovnicemi a modulárními formami.

Pro Wilese bylo nepříjemné, že zatímco on sám se stále ještě potýkal s důkazem Tanijamovi-Šimurovy domněnky, Mijaoka již ohlásil úplný důkaz své hypotézy, a tedy i důkaz Velké Fermatovy věty.

Dva týdny po vystoupení v Bonnu Joiči zveřejnil 5 stránek algebraických výpočtů popisujících detaily jeho důkazu. Začalo jejich prověřování. Po několika dnech upozornili někteří matematici na cosi, co vypadalo jako znepokojující spor v důkazu. Část Joičiho práce vedla k určitému závěru v teorii čísel, který se po zpětném převedení do diferenciální geometrie dostal do sporu s výsledkem dokázaným o několik let dříve. Ačkoli to nutně nevyvracelo Mijaokův důkaz, bylo to v rozporu s filosofií paralelismu mezi teorií čísel a diferenciální geometrií. Po dvou týdnech Gerd Faltings oznámil, že nalezl příčinu zdánlivého porušení paralelismu. Odborníci na teorii čísel se pokoušeli Mijaokovi chybu v důkazu opravit, ale jejich snaha byla neúspěšná, po dvou měsících od ohlášení nalezení důkazu se všichni shodovali v názoru, že původní důkaz opravit nelze.

Rozruch brzy utichl a noviny zveřejnily opravy s vysvětlením, že 300 let starý problém zůstává i nadále nevyřešen.

Na stanici metra na Osmé ulici v New Yorku se objevilo zajímavé graffiti se zněním:

„$x^n + y^n = z^n$: žádné řešení
Objevil jsem skutečně pozoruhodný důkaz, nemohu jej však zapsat, jede mi vlak.“

Vraťme se ale zpět k Wilesovi, který si oddechl nad tím, že má stále ještě naději být tím, kdo důkaz skutečně objeví.

Po třech letech nepřetržitého úsilí učinil Wiles řadu objevů. Použil Galoisovy grupy na eliptické rovnice, rozložil eliptické rovnice na nekonečně mnoho částí a následně dokázal, že první kousek každé eliptické rovnice musí být modulární. Povalil tím první kousek domina a nyní zkoumal postupy, které by mohly vést k povalení těch ostatních kousků domina.

Svou zkušenost s matematických výzkumem popisuje těmito slovy jako cestu temným neprozkoumaným zámkem: „Vstoupíte do první komnaty a tam je tma. Naprostá tma. Klopýtáte kolem, vrážíte do nábytku, postupně však poznáváte, kde se jednotlivé kusy nábytku nacházejí. Nakonec, po nějakých 6 měsících najdete vypínač, stisknete jen a náhle je vše osvětleno. Víte jasně, kde se nacházíte. Pak přejdete do další místnosti a strávíte těch 6 měsíců v temnotě. Tak každý z těch objevů - někdy se zdají být dílem okamžiku, někdy jde o jeden či dva dny - je ve skutečnosti vyvrcholením mnoha měsíců tápání ve tmě a bez tohoto tápání by nemohl vzniknout.“

V roce 1990 se Wiles dostal do „místnosti,“ která mu připadala vůbec nejtemnější. Prozkoumával ji téměř 2 roky. Stále se mu nepodařilo najít způsob, jak dokázat, že je-li určitý prvek eliptické rovnice modulární, bude modulární i ten následující. Vydržel další rok a začal pracovat na postupech, zvaných jako Ivasavova teorie, což je metoda analyzování eliptických rovnic, kterou se naučil jako student na Cambridgi pod vedením

Johna Coatese. Samotná metoda nestačila, on však doufal, že ji zvládne upravit a posílit natolik, aby vyvolala dominový efekt.

Po pěti letech pátrání, během nichž se stal dvakrát otcem, se rozhodl přestat žít v ústraní a začal se opět pohybovat mezi lidmi, aby zjistil, o čem se mluví v domnění, že by se třeba mohl dozvědět o nějakých nových matematických postupech a technikách.

Roku 1991 se zúčastnil konference o eliptických rovnicích v Bostonu, kde jej uvítali kolegové z celého světa a byli rádi, že jej po tak dlouhém období opět vidí. Coates se zde zmínil, že jeho student Matheus Flach píše zajímavý článek, v němž analyzuje eliptické rovnice, přičemž vychází z metody vyvinuté Kolyvaginem[14]. Wilesovi se zdálo, že tohle by mohlo být to, co potřebuje k dokončení svého důkazu, i když věděl, že tuto Kolyvaginovu-Flachovu metodu bude muset ještě více rozvinout. Tato metoda by mohla rozšířit Wilesův postup z první části důkazu na zbylou část a byla zde naděje, že tato metoda bude opravdu fungovat. Profesor Viktor Aleksandrovič Kolyvagin vyvinul silnou matematickou metodu, kterou Matheus Flach zdokonalil.

Po návratu zpět do Princetonu se Wiles několik měsíců seznamoval s novou technikou, následně se pustil do přizpůsobení a zapojení této metody do svého důkazu. Brzy se mu podařilo zajistit, že pro určitou eliptickou rovnici induktivní důkaz fungoval - uměl povalit všechny kousky domina. Ovšem Kolyvaginova-Flachova metoda fungující pro jednu eliptickou rovnici nemusela nutně fungovat pro jinou eliptickou rovnici. Wiles zjistil, že všechny eliptické rovnice lze roztřídit do skupin, jakmile se podařilo Kolyvaginovu-Flachovu metodu upravit tak, že fungovala pro jednu eliptickou rovnici z dané skupiny, fungovala již i pro všechny rovnice z téže skupiny. Bylo potřeba metodu upravit tak, aby fungovala pro všechny skupiny. I když některé skupiny bylo obtížnější zvládnout, Wiles byl přesvědčen, že po 6 letech usilovné práce, má konec na dohled.

Na začátku ledna 1993 si uvědomil, že se musí svěřit někomu, kdo je expertem druhu geometrických postupů, které ve svém důkaze uplatňoval. Zároveň potřeboval člověka, který by jeho práci uchoval v tajnosti, rozhodl se tedy pro profesora Nicka Katze, který pracoval na katedře matematiky na Princetonu.

Wiles měl obavy o tu část důkazu, v níž uplatňoval Kolyvaginovu-Flachovu metodu a chtěl ji s někým projít, aby si ověřil její správnost. Jelikož na něco tak velkého potřebovali Katz s Wilesem formální strukturu pravidelných týdenních přednášek, rozhodli se uspořádat přednáškový kurs.

Vyhlásili sérii přednášek, které byly přístupné postgraduálním studentům na katedře matematiky. Wiles zde přednášel a Katz byl mezi posluchači. Tento kurs byl nazvaný *Počítání s eliptickými křivkami*. Tento název mohl znamenat cokoli, nebyl zde zmíněn Fermat a ani Tanijama s Šimurou.

Pokud člověk nevěděl, k čemu to slouží, zdály se výpočty neuvěřitelně suchopárné a bylo vyloučeno takovou přednášku sledovat. Týden po týdnu se studenti z přednášek vytráceli, až zůstal Katz jediným posluchačem.

Po sérii přednášek Katz konstatoval, že se zdá, že použitá metoda funguje. Wiles se proto soustředil na dokončení důkazu. Metodu postupně aplikoval na jednu skupina eliptických křivek za druhou. V té chvíli se postupu bránila už jen jedna skupina.

Wiles popisuje, jak se pokoušel doplnit poslední článek svého důkazu slovy: „Jed-

[14]Pokud by vás zajímala metoda Kolyvagina, můžete nahlédnout třeba do práce Barryho Mazura a Karla Rubina, kteří o píší o Kolyvaginových systémech zde: `https://webusers.imj-prg.fr/~christophe.cornut/ES/Ref/KolySys.pdf`. Článek Matheuse Flache s názvem *A finiteness theorem for the symmetric square of an elliptic curve* je možné najít pod tímto odkazem: `https://link.springer.com/article/10.1007/BF01232029`, bohužel je potřeba si jej zakoupit.

noho rána koncem května byla Nada venku s dětmi a já seděl za svým stolem a přemýšlel o zbývající skupině eliptických křivek. Pročítal jsem si článek Barryho Mazura a jedna věta mne tam upoutala. Zmiňovala se o jisté konstrukci z 19. století a já si najednou uvědomil, že bych měl být schopen ji použít a dosáhnout toho, že Kolyvaginova-Flachova metoda bude fungovat i u poslední skupiny eliptických rovnic. Pokračoval jsem až do odpoledne a úplně jsem zapomněl na oběd. Asi ve tři nebo ve čtyři hodiny jsem byl pevně přesvědčen, že to vyřeší poslední problém. Byl čas odpoledního čaje, já jsem sešel dolů a Nada se podivila, že jdu tak pozdě. Řekl jsem jí - dokázal jsem Velkou Fermatovu větu.“

Po sedmi letech usilovného bádání a zaměření na jeden jediný cíl Wiles dokončil důkaz Tanijamovy-Šimurovy domněnky a jako důsledek dokázal i Velkou Fermatovu větu. Uskutečnil si tak svůj třicetiletý sen.

Koncem června 1993 se v Cambridgi konala konference, na níž chtěl svůj důkaz oznámit. Jedním z organizátorů byl i John Coates, bývalý školitel Wilese. Wiles měl na konferenci mít dva bloky přednášek, ovšem potřeboval ještě třetí blok, a tak se Coates, ve prospěch Wilese, vzdal své vlastní přednášky.

Když přijel na Cambridge, měl dva a půl týdne do začátku přednášek, a tak chtěl s někým zkontrolovat svůj důkaz, hlavně tedy tu část zaměřenou na Kolyvaginovu-Flachovu metodu. Oslovil Barryho Mazura, který poté, co si uvědomil o jaký důkaz se jedná, vypadal ohromeně.

Na konferenci přijel též Ken Ribet, jehož úvahy v roce 1986 inspirovaly Wilese. Lidé na konferenci si začali šeptat, že Wiles snad dokázal Velkou Fermatovu větu, ten však nechtěl nikomu na nic odpovídat a když se jej ostatní ptali, o čem jeho přednášky budou, Wiles všem odpovídal, že se mají přijít sami podívat a uvidí.

David Hilbert v roce 1920, kdy měl pětaosmdesát let, vedl v Göttingenu přednášku o Velké Fermatově větě a tehdy prohlásil, že on se již důkazu nedožije, ale někdo z mladších posluchačů v sále se může stát svědkem nalezení řešení.

Wilesova série přednášek nesla název *Modulární formy, eliptické křivky a Galoisova reprezentace*, tedy opět název, který nikterak nenapovídal o jejich skutečném cíli.

Ihned po první přednášce se do světa rozletěly elektronické zprávy. Profesor Karl Rubin, bývalý Wilesův student, oznamoval svým americkým kolegům, zda zaznělo anebo nezaznělo potvrzení, že Velká Fermatova věta byla dokázána.

23. června 1993 zahájil Wiles svou třetí přednášku, prakticky každý, kdo přispěl k myšlenkám, o něž se důkaz opíral, byl na přednášce přítomen - Mazur, Ribet, Kolyvagin a mnoho dalších. Přednáška byla plná posluchačů, ti šťastnější se nacpali do posluchárny, ostatní čekali na chodbě, kde si stoupali a nahlíželi oknem.

Po sedmi letech úsilí se Wiles chystal oznámit světu svůj důkaz. Přednášku sám hodnotí nějak takto: „Novináři se naštěstí nedostavili, přestože o přednášce věděli. Mezi posluchači však byla spousta lidí, kteří ke konci přednášky fotografovali, a ředitel ústavu byl prozíravě vybaven lahví šampaňského. Když jsem dokončoval důkaz, rozhostilo se ticho. Nakonec jsem napsal tvrzení Velké Fermatovy věty. ‚Myslím, že v této chvíli bych přednášku ukončil,’ řekl jsem, a pak vypukl neutuchající potlesk.“

Matematici si tu úžasnou zprávu sdělovali mailem, zbytek světa si musel počkat na večerní zpravodajství nebo noviny, které vyšly dalšího rána.

Profesor Šimura se o důkazu své vlastní domněnky dozvěděl, když si přečetl titulní stranu *New York Times*. Novináři, kteří o události psali, měli snahu soustředit se na Fermatovu větu a o Tanijamově-Šimurově domněnce se zmiňovali jen okrajově, pokud vůbec.

Poprvé od doby, kdy Joiči Mijaoka oznámil svůj domnělý důkaz, se matematika dostala do palcových titulků.


"All the News That's Fit to Print"

The New York Times

Late Edition

VOL. CXLII . . . No. 49,372

NEW YORK, THURSDAY, JUNE 24, 1993

50 CENTS

At Last, Shout of 'Eureka!' In Age-Old Math Mystery

By GINA KOLATA

Pierre de Fermat, whose theorem may have been proved.

SENATORS TAKE UP CLINTON'S BUDGET WITH ACID DEBATE

G.O.P. ALTERNATIVE BEATEN

Two Parties Relish the Stage, Trading Vitriolic Speeches on How to Trim Deficit

By MICHAEL WINES

Split in Japan's Ruling Party Is Rearranging Political Map

By JAMES STERNGOLD

House Retains Space Station In a Close Vote

By CLIFFORD KRAUSS

Cutback in U.S. Funds to Reduce Summer Jobs for New York Youths

By THOMAS J. LUECK

S.& L. Woes Impinge on Privileged Haven

By JEANNE B. PINDER

Budget Debate: A Primer

Cutting Through Claims and Counterclaims As Senate Ponders Ways to Curb the Deficit

By DAVID E. ROSENBAUM

U.S. Reports Setback On Russian Aid Plan

INSIDE

Economic Rumblings

Obrázek 1.28: Titulní strana časopisu *New York Times* s oznámením o důkazu Velké Fermatovy věty. Obrázek byl převzat z [1].

Tentokrát nikdo nepochyboval o správnosti důkazu. Wiles se přes noc stal nejslavnějším matematikem na světě. Časopis *People* jej zařadil mezi 25 nejúchvatnějších lidí roku, spolu s princeznou Dianou a Oprah Winfreyovou, mezinárodní řetězec oděvních obchodů Wilese dokonce požádal, aby své jméno propůjčil nejnovější kolekci pánského oblečení.

Wiles svůj důkaz zaslal do časopisu *Inventiones Mathematicae*, jehož redaktorem byl Barry Mazur.

Zatímco mediální cirkus pokračoval, probíhala práce na prověřování důkazu. Akademický protokol vyžaduje, aby každý matematik poskytl kompletní rukopis své práce uznávanému odbornému časopisu, jehož redaktor jej pak rozešle několika recenzentům, kteří důkaz musí ověřit řádek po řádku. Wiles musel strávil léto v úzkostném čekání na posudky recenzentů a doufat, že mu nakonec dají své požehnání.

Barry Mazur ihned po obdržení důkazu začal vybírat recenzenty. Aby důkaz zjednodušil, rozdělil tento dvousetstránkový rukopis na šest částí a každý z šesti posuzovatelů měl jednu kapitolu.

Kapitola třetí byla přidělena Nicku Katzovi, jelikož ale tato část měla 70 stran, vzal si Katz na pomoc dalšího recenzenta, kterým byl Luc Illusie. Tito dva procházeli důkaz řádek po řádku, občas je něco zmátlo a tak průběžně psali Wilesovi maily s dotazy, obvykle dostávali odpovědi ještě týž den či den následující a tak mohli pokračovat dále.

Důkaz byl velmi obsáhlý a pokud by, byť jen jediný z výpočtů, byl chybný, pak by celý důkaz byl k ničemu. Ovšem v srpnu narazil Katz na něco, co vypadalo jako menší problém, 23. srpna napsal mail Wilesovi, bylo to o něco složitější, a tak mu Wiles poslal fax, zdálo se, že tento fax nedával odpověď na jeho otázku, a tak jej znovu oslovil, opět dostal odpověď, která nebyla příliš uspokojivá.

Wiles doufal, že i tato chyba je stejně nepodstatná jako všechny předchozí, bohužel nebyla. Někdy v září si začal uvědomovat, že se nejedná jen o drobnou potíž, ale o zásadní vadu. Byla to chyba v rozhodující části úvah zahrnujících Kolyvaginovu-Flachovu metodu.

Problém spočíval v tom, že metoda nemusela fungovat tak, jak Wiles zamýšlel. Předpokládal, že důkaz rozšíří z prvního členu všech eliptických rovnic a modulárních forem, a pokryje tak všechny členy pomocí mechanismu porážení jednoho kousku domina za druhým. Wiles byl přesvědčen, že metodu přizpůsobil tak, aby pracovala ve všech případech, které potřeboval, dle Katze to tak nebylo.

Wiles se rozhodl, že než se k chybě přizná, pokusí se ji opravit. Doufal, že chybu opraví dříve, než se matematická obec dozví, že nějaká chyba existuje.

V říjnu začalo mít okolí tušení, že s důkazem něco není v pořádku, důkaz měl být totiž zveřejněn několik týdnů po ohlášení nalezení, ale uplynuly měsíce a mimo recenzenty a Wilese nikdo důkaz neviděl. Během toho, co se rozruch okolo zpochybňovaného důkazu zvětšoval, snažil se Wiles tyto spory a spekulace ignorovat.

Nakonec si Wiles uvědomil, že je čas ukončit spekulace a poslal redakci matematické obce následující e-mail.

„Datum: 4. prosince 1993 01:33:50

Předmět: Stav Fermatova problému

Vzhledem ke spekulacím o Tanijamově-Šimurově domněnce a o Velké Fermatově větě podávám stručný přehled o situaci. Během recenzního řízení se objevila řada problémů, z nichž většina byla vyřešena, ale jeden speciální problém jsem neodstranil. Klíčová redukce (většiny případů) Tanijamovy-Šimurovy domněnky na výpočet Selmerovy grupy je správná. Avšak závěrečný výpočet přesné horní hranice Selmerovy grupy v semistabilním případě (symetrické kvadratické reprezentace přiřazené modulární formě) ještě není v současném stavu úplný. Věřím, že to budu schopen v blízké budoucnosti dokončit s použitím myšlenek, které jsem vyložil ve svých přednáškách v Cambridgi. Protože je třeba udělat na rukopisu ještě spoustu práce, není zatím vhodné jej vydat jako preprint. V přednáškovém kursu, který budu mít od února v Princetonu, svou práci podrobně vyložím.

Andrew Wiles“

Tento optimismus přesvědčil jen málokoho. Chybu se nepodařilo opravit v uplynulých šesti měsících a nebyl důvod myslet si, že by se podařilo chybu opravit v dalších šesti měsících.

Během svých únorových přednášek, které zmiňoval v e-mailu, žádnou ze slíbených podrobností nevysvětlil, a tak jej matematická komunita podezřívala, že se jen snaží získat čas.

Noviny opět připomínaly matematikům Mijaokův chybný důkaz z roku 1988. Číselní teoretici čekali na mail, který by vyložil, proč se důkaz nedá zachránit.

Wiles vzpomíná, jak se jeho dětský sen, proměnil v noční můru: „Těch prvních sedm let mi přinášelo potěšení ze soustředěné práce v soukromí. Nezáleželo na tom, jak těžké to bylo, jak nepřekonatelné se věci zdály, byl jsem zaujatý svým oblíbeným problémem. Byla to má dětská touha, nemohl jsem ji prostě odložit, nechtěl jsem ji opustit ani na chvíli. Pak jsem o tom promluvil na veřejnosti a při tom se mi zdálo, jako bych něco ztrácel. Měl jsem velmi smíšené pocity. Bylo skvělé pozorovat ostatní, jak reagují na důkaz, vidět jak ty úvahy mohly úplně změnit celou jednu oblast matematiky. Zároveň jsem však všechno ztrácel. Pustil jsem to do světa (důkaz) a přišel tak o svůj soukromý sen, který jsem naplnil. A pak, když se v tom objevil problém, najednou tu byly desítky, stovky, tisíce lidí, kteří mne chtěli vyrušovat. Dělat matematiku pod takovým dohledem a tlakem není můj styl. Tento velmi veřejný způsob práce se mi ani trochu nezamlouval.“

Kdyby se dala 3. kapitola důkazu, v níž se nacházela chyba, jen tak odstranit, byl by jeho zbytek úžasný, bohužel bez této kapitoly by to nebyl důkaz Tanijamovy-Šimurovy domněnky, tedy ani důkaz Velké Fermatovy věty.

Někteří matematici prohlašovali, že důkaz je příliš cenný na to, aby byl ponechán v rukou jediného člověka a sílilo volání po větší otevřenosti, aby se každý mohl podívat na podrobnosti oné chyby, či měl možnost ji opravit.

Wiles tlaku okolí odolával a odmítal rukopis zveřejnit. Bál se, že mu někdo jiný sebere slávu, jelikož člověkem, který dokáže Velkou Fermatovu větu není ten, kdo do ní vložil nejvíce času a úsilí, ale ten, kdo předloží konečný a úplný důkaz. Vrátil se zpět do izolace a začal intenzivně studovat ve své podkrovní pracovně. Občas chodil kolem jezera na Princetonu, jak to dělával dříve.

Jak postupovala zima, vytrácely se naděje na úspěch a více a více matematiků tvrdilo, že je Wilesovou povinností zveřejnit rukopis s důkazem, ten se svěřil Peterovi Sarnakovi, že situace začíná být zoufalá a bude si zřejmě muset přiznat porážku. Sarnak navrhl, aby někoho do svého tajemství zasvětil, někoho, kdo by jej mohl inspirovat k objevování širších postupů. Wiles potřeboval někoho, kdo je odborníkem na Kolyvaginovu-Flachovu metodu a kdo by udržel podrobnosti v tajnosti. Nakonec se rozhodl pozvat do Princetonu Richarda Taylora, který v té době působil na Cambridge. Taylor byl nejen jedním z recenzentů zodpovědných za prověření důkazu, ale též Wilesovým bývalým studentem, proto se jevil dvojnásobně důvěryhodný.

V lednu již s Taylorovou pomocí neúnavně zkoumal Kolyvaginovu-Flachovu metodu hledaje východisko z problému. Po několika dnech společného úsilí obvykle zabrousili do nové oblasti, vždy se ale nevyhnutelně dostali tam, odkud vyšli a neuspěli. Nacházeli se uprostřed obrovitého bludiště a jejich obavou bylo, že budou odsouzeni k nekonečnému bezcílnému bloumání.

Když už se zdálo, že to horší být nemůže, dorazila další zpráva o nalezení důkazu Velké Fermatovy věty.

Fermatova věta byla vyvrácena?!

„Datum: 3. dubna 1994

Předmět: Znovu Fermat!

Dnes došlo k ohromně překvapivému vývoji u Velké Fermatovy věty. Noam Elkies ohlásil protipříklad, takže Velká Fermatova věta nakonec neplatí! Referoval o tom dnes v ústavu. Řešení problému Velké Fermatovy věty, které zkonstruoval, zahrnuje neuvěřitelně velké prvočíselné exponenty (vetší, než 10^{20}), ale je konstruktivní. Hlavní myšlenka vypadá jako jistý druh Heegnerovy bodové konstrukce kombinované s opravdu geniální redukcí pro přechod od modulárních křivek k Fermatově křivce. Zdá se, že ta skutečně obtížná část úvah spočívá v tom, ukázat, že definiční obor řešení (které, a priori, je nějaké těleso tříd okruhů“ se redukuje na Q. Nepochopil jsem všechny detaily, které byly dost složité...

Takže se nakonec zdá, že Tanijamova-Šimurova domněnka neplatí. Odborníci tvrdí, že stále může být zachráněna rozšířením pojmu amorfní reprezentace a zavedením pojmu *anomálních křivek*, který by ještě vedl na *kvazi-automorfní reprezentaci.*

Henri Darmon

Univerzita v Princetonu

Noam Elkies byl profesorem na Harwardu, který roku 1988 našel protipříklad na Eulerovu domněnku a dokázal, že neplatí právě na následující rovnici:

$$2\,682\,440^4 + 15\,365\,639^4 + 18\,796\,760^4 = 20\,615\,673^4.$$

Což je pravda, jelikož zadáme-li pravou a levou stranu této rovnice do *WolframAlpha,* dostaneme následující rovnost:

$$51\,774\,995\,082\,902\,409\,832\,960\,000 + 55\,744\,561\,387\,133\,523\,724\,209\,779\,041 +$$
$$+ 124\,833\,740\,909\,952\,854\,954\,805\,760\,000 = 180\,630\,077\,292\,169\,281\,088\,848\,499\,041,$$

$$180\,630\,077\,292\,169\,281\,088\,848\,499\,041 = 180\,630\,077\,292\,169\,281\,088\,848\,499\,041.$$

Eulerova domněnka měla následující znění:

Pro přirozené číslo n větší než 2 není součet $n-1$ mocnin n-té mocninou n-té.

Tedy:

$$\forall n > 2, \forall (a_1, \cdots, a_{n-1}, b) \in (\mathbb{N}^*)^n, \sum_{k=1}^{n-1} {a_k}^n \neq b^n.$$

Jinými slovy máme-li na levé straně $n-1$ členů na n, kde n položíme rovno třeba číslu 4, pak nenajdeme takové číslo, které, když umocníme na n bude rovno naší levé straně. Pro $n = 4$ máme na levé straně 4 členy umocněné na čtvrtou a na pravé straně jeden člen umocněný na čtvrtou.

Můžete vidět, že pravá i levá strana se rovnají.

Právě tato Eulerova domněnka je jistým zobecněním Velké Fermatovy věty, kterou on sám definoval slovy: „Součet méně než n n-tých mocnin čísel nemůže být pro $n \geq 3$ n-tou mocninou.“

Již v roce 1966 však s využitím počítače byla dokázána L. J. Landerem a T. R. Parkinem rovnost:

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$$

Platnost Eulerovy domněnky pro šesté mocniny není doposud známa.

Tím, že Elkies našel protipříklad Eulerovy domněnky, mohlo být možné, že se mu povedlo najít též protipříklad Velké Fermatovy věty.

Toto oznámení bylo velkou ránou. Příčina toho, že Wiles nemohl opravit důkaz, spočívala v tom, že domnělá chyba byla přímým důsledkem neplatnosti Velké Fermatovy věty. Ještě větší rána to byla pro matematickou obec, jelikož kdyby neplatila Velká Fermatova věta, vedlo by to na Freyovu eliptickou rovnici, která nebyla modulární, což by bylo v přímém rozporu s Tanijamovou-Šimurovou domněnkou.

Původní e-mail však pocházel ze dne 1. dubna 1994, během přeposílání se však datum měnilo. V tomto případě se naštěstí jednalo o pouhý aprílový žert, tento žert měl na svědomí kanadský číselný teoretik Henri Darmon, který tak uštědřil lekci všem šiřitelům klepů o Fermatově problému a Wiles s Taylorem byli na chvíli ponecháni v relativním klidu.

Bohužel ani během léta Wiles s Taylorem nepokročili, a tak byl Wiles po osmi letech nepřetržitého úsilí připraven přiznat porážku. Taylor navrhl, že budou pokračovat ještě měsíc a pokud se jim do září nepodaří důkaz opravit, vzdají své snahy a veřejně oznámí svůj neúspěch a zveřejní neúplný důkaz, čímž poskytnou příležitost ostatním.

Během září chtěl Wiles pochopit, proč neuspěl. Zatímco se Taylor pokoušel znovu a znovu použít alternativní metody, on sám se podíval znovu na Kolyvaginovu-Flachovu metodu, aby přesně určil, proč nefungovala.

19. září 1994 seděl za svým stolem a zkoumal onu metodu, náhle zcela nečekaně, dle svých slov, učinil neuvěřitelný objev. Zjistil, že ačkoli metoda nefunguje bezezbytku, postačuje k tomu, aby mohl zajistit, že původní Ivasavova metoda bude fungovat. Tím se zdálo, že je zde naděje na správně řešení. Kolyvaginova-Flachova a Ivasavova metoda samy o sobě nefungovaly, ovšem společně se velmi dobře doplňovaly.

Čtrnáct měsíců trápení bylo ukončeno brilantním nápadem. Svůj objev zakomponoval do důkazu. Poté se vyspal a další den ráno opravu znovu zkontroloval a byl spokojen.

Další měsíc mohl splnit narozeninový slib, který dal své manželce, tedy že opraví důkaz Velké Fermatovy věty. V den jejích narozenin jí předal kompletní rukopis důkazu a dle Wilese měla jeho manželka z tohoto dárku větší radost, než ze všech ostatních.

Dne 25. října 1994 poslal Carl Rubin e-mail matematické obci.

„Datum: 25. října 1994 11:04:11

Předmět: Poslední informace o Velké Fermatově větě.

K dnešnímu ránu byly zveřejněny 2 rukopisy: Modulární eliptické křivky a Velká Fermatova věta od Andrewa Wilese

a

Okruhově teoretické vlastnosti jistých Heckeho algeber od Richarda Taylora a Andrewa Wilese.

První z nich (dlouhý) obsahuje mimo jiné důkaz Velké Fermatovy věty, jehož nejdůležitější krok je založen na druhém (krátkém) rukopisu. Jak většina z vás ví, v úvahách, které Wiles popsal ve svých přednáškách v Cambridgi, byla objevena vážná mezera, konkrétně v konstrukci Eulerova systému, Po neúspěšných pokusech opravit konstrukci se Wiles vrátil k jinému přístupu, který zkoušel již dříve, ale tehdy jej opustil ve prospěch myšlenky Eulerova systému. Dokončil svůj důkaz za předpokladu, že jisté Heckeho algebry jsou lokálními úplnými průniky. To a ostatní myšlenky popsané ve Wilesových přednáškách v Cambridgi je obsaženo v prvním rukopisu. Ve druhé, společné práci určují Taylor s Wilesem nutné vlastnosti Heckeho algeber. Celková kostra úvah je podobná té, kterou Wiles popsal v Cambridgi. Ukazuje se, že nový přístup je výrazně jednodušší a kratší, než původní, jelikož byl odstraněn Eulerův systém. (Na další významné zjednodušení této části úvah zřejmě přišel Faltings po přečtení rukopisů.) Několik lidí rukopisy už četlo (někteří z nich po několik týdnů). I když bude moudré zachovat ještě chvíli opatrnost, je tu jistě důvod k optimismu.

Karl Rubin

Státní univerzita v Ohiu“

V květnu 1995 byly články Wilese a Taylora otištěny v časopise *Annals of Mathematics*[15]. Tyto články dohromady čítaly 130 stran a staly se nejdůkladněji kontrolovatelnými rukopisy v historii. Tentokrát již o důkazu nikdo nepochyboval.

Wiles se znovu ocitl na přední straně *NewYork Times*.

Během osmi let tvrdé práce Wiles shromáždil všechny objevy teorie čísel 20. století a zařadil je do svého důkazu. Vytvořil nové matematické metody, které propo-

[15]Důkaz Andrewa Wilese naleznete zde, pod tímto odkazem, který uvádím v plném znění pro tištěnou verzi: `http://www.scienzamedia.uniroma2.it/~eal/Wiles-Fermat.pdf`. A společný článek Wilese a Taylora pak můžete najít zde, pro tištěnou verzi uvádím odkaz v celém znění: `https://staff.fnwi.uva.nl/a.l.kret/Galoistheorie/taylor-wiles.pdf`

jil s tradičními postupy takovým způsobem, jaký nebyl nikdy předtím považován za možný. Otevřel tak nové cesty k řešení celé spousty problémů.

Zatímco vědečtí novináři pěli chválu Wilesovi za důkaz Velké Fermatovy věty, pouze někteří z nich psali o důkazu Tanijamovy-Šimurovy domněnky, který byl s tímto problémem neoddělitelně spjat. Ovšem Wiles dokázal Tanijamovu-Šimurovu domněnku pouze v omezeném rozsahu pro tzv. semistabilní eliptické křivky, což bylo dostačující k důkazu Velké Fermatovy věty. Až v roce 1999 Christophe Breuil, Brian Conrad, Fred Diamond a Richard Taylor oznámili, že se jim podařilo dokázat Tanijamovu-Šimurovu domněnku v celém rozsahu pro všechny eliptické křivky[16].

Dne 27. června 1997 se shromáždili významní členové Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen ve velké hale Göttingenskéuniverzity, aby udělili cenu vypsanou Paulem Wolfsheklem na začátku 20. století, kterou převzal Andrew Wiles. Wolfsheklova komise tak završila své poslání a Velká Fermatova věta byla oficiálně vyřešena.

Tímto jsem vyčerpala vše, co jsem k historii dokazování Velké Fermatovy věty chtěla uvést, jeden z velkých problémů matematiky byl konečně vyřešen, ale nemusíte zoufat. Matematika má spoustu problémů, které čekají na své vyřešení. Pořád je tu například Riemannova hypotéza anebo třeba potvrzení Eulerovy domněnky pro $n = 6$, když budete hledat, najdete jistě mnoho problémů, které můžete zkusit vyřešit a proslavit se alespoň částečně tak, jako Andrew Wiles [1, 6, 8, 16, 17, 18, O, P].

[16] O tomto počinu napsal Henri Darmon, který byl autorem aprílového e-mailu. Jeho článek naleznete zde a pro tištěnou verzi pak pod tímto odkazem `https://www.ams.org/notices/199911/comm-darmon.pdf`. Důkaz Tanijamovy-Šimurovy-Weilovy domněnky najdete zde a pro tištěnou verzi pak pod tímto odkazem `https://dash.harvard.edu/bitstream/handle/1/3579185/taylor_modularitycertain.pdf?sequence=2`.

Kapitola 2

Praktická část diplomové práce

2.1 Úvod k praktické části

Cílem praktické části bylo hledat domnělá řešení Velké Fermatovy věty, o které jsem psala v teoretické části. Původně bylo mým záměrem nalézt alespoň jedno domnělé řešení, pak deset, sedmdesát tři a nakonec jsem skončila nalezením 114 domnělých řešení.

Domnělým řešením mám namysli takové řešení, které když zadáme například do Excelu a nechali bychom zde vypočítat pravou a levou stranu rovnice (1.1), kterou by nám Excel vypočítal, ukázal by nám totožné zápisy pro případ obrazení 9 po sobě jdoucích číslic zleva, a to proto, že pracuje jen s určitou přesností. V případě velkých čísel, pokud se nám čísla shodují na devět míst zleva (tedy v číslicích, které zastupují nejvyšší řády daného čísla), pak jsou pro Excel zápisy těchto čísel stejné.

S domnělým řešením Velké Fermatovy věty jsem se poprvé setkala po maturitě v knize Simona Singha, která se jmenuje *Simpsonovi a jejich matematické problémy,* která nám ukazuje, v jakých pasážích Simpsonových se matematika objevila. A abych pravdu řekla, před přečtením této knihy jsem si to sama nikdy neuvědomila. Kde v Simpsonových jsme se s Velkou Fermatovou větou mohli setkat, jsem uvedla v kapitole věnované Pierru Fermatovi.

Prvním takovým domnělým řešením, které se v Simpsonových objevilo, bylo toto:

$$3\,987^{12} + 4\,365^{12} = 4\,472^{12}. \tag{2.1}$$

Druhé domnělé řešení bylo pak tohle:

$$1\,782^{12} + 1\,841^{12} = 1\,922^{12}. \tag{2.2}$$

Proč rovnice (2.1) a (2.2) nemohou být řešením Velké Fermatovy věty, je hezky rozebráno v tomto videu[1].

Chcete-li, pokuste se pravou a levou stranu domnělých řešení (2.1) a (2.2) vložit do Excelu a nechat jej obě strany rovnice vypočítat. Pokud máte *Excel* nastaven tak, že vám ze začátku vypočítá dané strany naší „rovnice“ s předností na 6 míst zleva, pak uvidíte, že vám opravdu „vyplivne“ stejné zápisy pro (2.2) i pro (2.1). V případě, že byste si zobrazily další číslice, tak uvidíte, že příklad (2.1) se shoduje v 9 místech zleva a příklad (2.2) pak v prvních 10 číslicích zleva. Když ovšem tato řešení necháte vypočítat v programu *WolframAlpha*, uvidíte celý výsledek obou stran příkladů a ačkoli nám Excel vydá číslo, v němž již od patnácté číslice zleva vidíme samé nuly, například

[1]Pro tištěnou verzi zde přikládám odkaz: `https://youtu.be/AO-W5aEJ3Wg?t=459`.

program *WolframAlpha* nám vydá opravdové řešení pravé i levé strany uvedených domnělých řešení.

Pokud by se nám podařilo nalézt taková domnělá řešení, u nichž se pravá i levá strana nerovnice shoduje alespoň ve 14 po sobě jdoucích místech zleva, byly by zápisy v *Excelu* opravdu shodné i po odkrytí libovolně velkého počtu míst.

Já se pokusila hledat i takové domnělé řešení, pro které by nám *Excel* vydal stejné zápisy pro pravou i levou stranu rovnice, ale bohužel bez úspěchu. Zvolila jsem mocninu čísla 120, aby byla větší pravděpodobnost nalezení řešení, ovšem mnou nastavený rozsah byl zřejmě nevyhovující. Ani po týdnu hledání řešení při nepřetržité práci 2 počítačů jsem neuspěla. Je možné, že uspěje někdo další. Motivací je pokořit *Excel.* Jen pozor na to, hledáme domnělé řešení, které se shoduje alespoň na 14 po sobě jdoucích míst zleva, ale pokud by na 15. pozici byly číslice 5, 6, 7, 8 nebo 9, číslo se nám zaokrouhlí, ideální je tedy najít domnělé řešení, které má shodu v 15 po sobě jdoucích číslicích zleva.

Pro účely praktické části diplomové práce jsem se rozhodla uvést 73 domnělých řešení i s ověřením a zbylých 37+4 uvádím v rámci této části bez ověření, které nechám na čtenáři a které si můžete zkontrolovat v příloze diplomové práce, kde je uvedeno i ověření.

Sedmdesát tři řešení s ověřením jsem se rozhodla uvést proto, že dle Sheldona Coopera ze seriálu Teorie Velkého třesku je číslo 73 údajně nejlepším číslem na světě. Jak prohlásil: „Nejlepší číslo je 73. (...) 73 je 21. prvočíslo, obráceně 37 je 12. a to obráceně je 21, čili součin, držte si klobouky, sedmičky a trojky. (...) V binárce je sedmdesát trojka palindrom 1001001, pozpátku pak 1001001, což je přesně totéž[2].“

Nalezená domnělá řešení, která v této práci uvádím, byla nalezena programovacím jazykem *Python.* V tomto jazyce jsme s Ing. Nikolou Ciprichem sepsali kód, který na základě námi zvolených parametrů hledá naše domnělá řešení a který naleznete zde[3], případně jeho podobu uvádím v příloze této práce.

Všechna nalezená domnělá řešení operují s exponentem 12 a to proto, že i domnělá řešení (2.1) a (2.2) obsahují právě exponent 12 a já chtěla pokračovat v hledání dalších obdobných domnělých řešení.

[2]Tuto pasáž můžete naleznout pod tímto odkazem: `https://youtu.be/_ahESCSWKDQ`.

[3]Pro tištěnou verzi zde přikládám odkaz: `https://drive.google.com/file/d/1ih3Mklg1kSzatmGtyW0kgY2nIbi6F6nd/view?usp=sharing`.

2.2 Využité programy

Jak jsem již zmínila v úvodu k praktické části, při hledání domnělých řešení jsem používala programovací jazyk *Python*. Kód v programovacím jazyce *Phyton* naleznete ve druhé příloze této diplomové práce na obrázku 2.1.

V tomto jazyce byl napsán poměrně jednoduchý kód, který nám počítal a srovnával pravou a levou stranu rovnice (1.1), za exponent n jsme zvolili 12. mocninu, v níž již byla nějaká řešení nalezena. Za členy x, y jsme pak volili čísla v rozmezí od 3 500 do 27 500 a za z od 3 800 do 30 000. V jazyce byly členy x, y a z nahrazeny písmeny a, b a c. S rostoucími čísly bylo potřeba měnit i rozmezí, v nichž se pohybovaly členy a a b, jelikož jak čísla rostla, rostl též rozdíl mezi základy mocnit (čísly a a b). Podíváme-li se na (2.3), můžeme vidět, že rozdíl základů mocnin a a b je 118, u (2.4) je to 23, podíváme-li se ale například na (2.64), tady je již rozdíl členů 934.

Mimo pravou a levou stranu rovnice byla potřeba zadat, na kolik po sobě jdoucích míst zleva se mají řešení shodovat (jak již víme z teoretické části, k úplné rovnosti by nemělo dojít, pokud je Wilesův důkaz bez chyby, protože dle něj rovnice nemá řešení), zvolili jsme proto, že se řešení mají shodovat alespoň na 9 míst zleva.

Pokud jsme měli toto, mohl si Python vesele počítat. Jakmile zachytil řešení, které odpovídalo našim vstupním parametrům, zahlásil nám „HIT!“ Tedy něco ve smyslu: „Nalezl jsem!“.

Vždy když *Python* dopočítal mnou zvolené rozmezí, tak jsem s využitím klávesové zkratky Ctrl+F hledala „HIT!“. S nalezením tohoto domnělého řešení jsem ovšem nebyla u konce, jelikož byla potřeba vždy ověřit, zda Python našel opravdu správně a na kolik míst zleva se nám pravá a levá strana rovnice shodují.

K ověření jsem využívala online verzi programu *WolframAlpha*, do níž jsem postupně vkládala pravou a levou stranu rovnice a zjišťovala výsledky, které uvádím pod rovnicemi (2.3) až (2.75) v praktické části a pod rovnicemi (2.76) až (2.116) v příloze.

Aby si čtenář dokázal udělat představu, jakým způsobem může nalézt řešení, které si i ověří, přidávám zde video[4], v němž vám ukážu, jak na to.

[4]Video naleznete pod tímto odkazem (pro tištěnou verzi): `https://youtu.be/7rS2fxKoYmA`.

2.3 Nalezená domnělá řešení s ověřením

$$3\,564^{12} + 3\,682^{12} = 3\,844^{12} \tag{2.3}$$

Ověření domnělého řešení (2.3)

$$\begin{aligned} 3\,564^{12} + 3\,682^{12} &= 10\,408\,797\,2\,19\,285\,357\,266\,078\,392\,148\,551\,387\,245\,187\,072 \\ 3\,844^{12} &= 10\,408\,797\,2\,22\,153\,426\,578\,715\,765\,348\,940\,396\,820\,955\,136 \end{aligned}$$

$$4\,602^{12} + 4\,625^{12} = 4\,888^{12} \tag{2.4}$$

Ověření domnělého řešení (2.4)

$$\begin{aligned} 4\,602^{12} + 4\,625^{12} &= 186\,026\,307\ 799\,533\,917\,973\,717\,716\,634\,773\,389\,318\,384\,321 \\ 4\,888^{12} &= 186\,026\,307\ 980\,589\,150\,803\,547\,743\,844\,070\,188\,547\,833\,856 \end{aligned}$$

$$16\,038^{12} + 16\,569^{12} = 17\,298^{12} \tag{2.5}$$

Ověření domnělého řešení (2.5)

$$\begin{aligned} 16\,038^{12} + 16\,569^{12} &= 717\,712\,835\ 441\,280\,558\,283\,448\,652\,130\,155\,760\,563\,408\,262 \\ &\quad 474\,017 \\ 17\,298^{12} &= 717\,712\,835\ 639\,041\,175\,120\,253727\,477\,636\,108\,066\,055\,910 \\ &\quad 199\,296 \end{aligned}$$

$$16\,326^{12} + 17\,176^{12} = 17\,809^{12} \tag{2.6}$$

Ověření domnělého řešení (2.6)

$$\begin{aligned} 16\,326^{12} + 17\,176^{12} &= 1\,017\,828\,03\,6\,802\,247\,300\,110\,198\,469\,005\,034232\,906\,103 \\ &\quad 368\,650\,752 \\ 17\,809^{12} &= 1\,017\,828\,03\,0\,438\,326\,072\,592\,923\,415\,220\,161\,045\,574\,743 \\ &\quad 369\,458\,881 \end{aligned}$$

$$16\,370^{12} + 16\,556^{12} = 17\,445^{12} \tag{2.7}$$

Ověření domnělého řešení (2.7)

$$\begin{aligned} 16\,370^{12} + 16\,556^{12} &= 794\,422\,773\ 068\,751\,277\,341\,370\,246\,565\,902\,533\,047\,770 \\ &\quad 853\,543\,936 \\ 17\,445^{12} &= 794\,422\,773\ 395\,461\,647\,205\,662\,907\,889\,018\,108\,206\,718 \\ &\quad 994\,140\,625 \end{aligned}$$

$$16\,566^{12} + 17\,096^{12} = 17\,856^{12} \tag{2.8}$$

Ověření domnělého řešení (2.8)

$$\begin{aligned} 16\,566^{12} + 17\,096^{12} &= 1\,050\,534\,03\,7\,213\,631\,125\,105\,524\,797\,001\,815\,376\,600\,565 \\ &\quad 687\,324\,672 \\ 17\,856^{12} &= 1\,050\,534\,03\,4\,832\,278\,795\,876\,722\,733\,810\,284\,980\,469\,095 \\ &\quad 555\,137\,536 \end{aligned}$$

$$16\,574^{12} + 17\,561^{12} = 18\,164^{12} \tag{2.9}$$

Ověření domnělého řešení (2.9)

$$\begin{aligned} 16\,574^{12} + 17\,561^{12} &= 1\,289\,846\,17\,4\,939\,299\,241\,391\,511\,827\,329\,801\,463\,783\,933 \\ &\quad 171\,131\,297 \\ 18\,164^{12} &= 1\,289\,846\,17\,0\,924\,589\,156\,331\,597\,584\,394\,692\,274\,417\,567 \\ &\quad 054\,954\,496 \end{aligned}$$

$$16\,588^{12} + 17\,395^{12} = 18\,057^{12} \tag{2.10}$$

Ověření domnělého řešení (2.10)

$$\begin{aligned} 16\,588^{12} + 17\,395^{12} &= 1\,201\,564\,74\,4\,564\,117\,221\,033\,893\,494\,489\,363\,635\,459\,711 \\ &\quad 920\,079\,281 \\ 18\,057^{12} &= 1\,201\,564\,74\,3\,009\,650\,058\,058\,698\,190\,592\,126\,068\,966\,897 \\ &\quad 113\,356\,001 \end{aligned}$$

$$16\,625^{12} + 16\,693^{12} = 17\,650^{12} \tag{2.11}$$

Ověření domnělého řešení (2.11)

$$\begin{aligned} 16\,625^{12} + 16\,693^{12} &= 913\,979\,630\,437\,481\,717\,482\,258\,330\,546\,583\,468\,912\,099 \\ &\quad 158\,140\,626 \\ 17\,650^{12} &= 913\,979\,630\,063\,431\,068\,960\,851\,309\,531\,494\,140\,625\,000 \\ &\quad 000\,000\,000 \end{aligned}$$

$$16\,674^{12} + 17\,030^{12} = 17\,865^{12} \tag{2.12}$$

Ověření domnělého řešení (2.12)

$$\begin{aligned} 16\,674^{12} + 17\,030^{12} &= 1\,056\,905\,71\,2\,233\,228\,328\,535\,804\,865\,196\,064\,502\,748\,963 \\ &\quad 105\,611\,776 \\ 17\,865^{12} &= 1\,056\,905\,71\,5\,477\,661\,231\,601\,954\,888\,785\,221\,490\,977\,910 \\ &\quad 400\,390\,625 \end{aligned}$$

$$16\,751^{12} + 16\,831^{12} = 17\,790^{12} \tag{2.13}$$

Ověření domnělého řešení (2.13)

$$\begin{aligned} 16\,751^{12} + 16\,831^{12} &= 1\,004\,873\,462\ 117\,882\,313\,781\,205\,312\,436\,655\,378\,535\,260\\ &\quad 865\,895\,362\\ 17\,790^{12} &= 1\,004\,873\,462\ 096\,515\,768\,719\,958\,636\,580\,061\,253\,041\,000\\ &\quad 000\,000\,000 \end{aligned}$$

$$16\,761^{12} + 17\,600^{12} = 18\,261^{12} \tag{2.14}$$

Ověření domnělého řešení (2.14)

$$\begin{aligned} 16\,761^{12} + 17\,600^{12} &= 1\,374\,974\,60\ 9\,342\,927\,915\,019\,089\,961\,089\,168\,975\,330\,158\\ &\quad 544\,562\,721\\ 18\,261^{12} &= 1\,374\,974\,60\ 6\,912\,603\,231\,858\,621\,444\,775\,301\,508\,498\,777\\ &\quad 955\,560\,721 \end{aligned}$$

$$16\,795^{12} + 17\,127^{12} = 17\,979^{12} \tag{2.15}$$

Ověření domnělého řešení (2.15)

$$\begin{aligned} 16\,795^{12} + 17\,127^{12} &= 1\,140\,739\,26\ 4\,243\,062\,106\,010\,971\,843\,623\,303\,844\,463\,531\\ &\quad 754\,399\,346\\ 17\,979^{12} &= 1\,140\,739\,26\ 1\,023\,015\,285\,095\,443\,829\,993\,042\,627\,287\,320\\ &\quad 575\,650\,641 \end{aligned}$$

$$16\,898^{12} + 16\,995^{12} = 17\,955^{12} \tag{2.16}$$

Ověření domnělého řešení (2.16)

$$\begin{aligned} 16\,898^{12} + 16\,995^{12} &= 1\,122\,599\,67\ 7\,159\,065\,446\,082\,947\,991\,556\,286\,384\,944\,879\\ &\quad 047\,550\,321\\ 17\,955^{12} &= 1\,122\,599\,67\ 8\,599\,561\,383\,812\,041\,666\,384\,185\,892\,038\,008\\ &\quad 056\,640\,625 \end{aligned}$$

$$16\,899^{12} + 17\,174^{12} = 18\,056^{12} \tag{2.17}$$

Ověření domnělého řešení (2.17)

$$\begin{aligned} 16\,899^{12} + 17\,174^{12} &= 1\,200\,766\,47\ 9\,939\,382\,936\,182\,542\,913\,320\,462\,028\,713\,824\\ &\quad 080\,212\,977\\ 18\,056^{12} &= 1\,200\,766\,47\ 1\,652\,457\,849\,556\,984\,511\,206\,134\,126\,709\,782\\ &\quad 070\,951\,936 \end{aligned}$$

$$16\,926^{12} + 17\,541^{12} = 18\,290^{12} \tag{2.18}$$

Ověření domnělého řešení (2.18)

$$\begin{aligned} 16\,926^{12} + 17\,541^{12} &= 1\,401\,407\,59\,3\,078\,447\,585\,889\,036\,151\,001\,869\,021\,315\,643 \\ &\ 491\,711\,057 \\ 18\,290^{12} &= 1\,401\,407\,59\,1\,359\,950\,999\,322\,640\,104\,471\,193\,215\,441\,000 \\ &\ 000\,000\,000 \end{aligned}$$

$$17\,005^{12} + 17\,724^{12} = 18\,440^{12} \tag{2.19}$$

Ověření domnělého řešení (2.19)

$$\begin{aligned} 17\,005^{12} + 17\,724^{12} &= 1\,545\,720\,62\,4\,299\,754\,018\,756\,827\,440\,869\,304\,463\,490\,197 \\ &\ 913\,034\,801 \\ 18\,440^{12} &= 1\,545\,720\,62\,0\,478\,144\,210\,818\,726\,135\,236\,327\,899\,136\,000 \\ &\ 000\,000\,000 \end{aligned}$$

$$17\,078^{12} + 17\,390^{12} = 18\,267^{12} \tag{2.20}$$

Ověření domnělého řešení (2.20)

$$\begin{aligned} 17\,078^{12} + 17\,390^{12} &= 1\,380\,405\,70\,8\,723\,447\,877\,600\,223\,325\,594\,307\,054\,899\,339 \\ &\ 647\,983\,616 \\ 18\,267^{12} &= 1\,380\,405\,70\,4\,352\,125\,529\,763\,101\,652\,349\,713\,275\,662\,173 \\ &\ 114\,231\,761 \end{aligned}$$

$$17\,185^{12} + 17\,827^{12} = 18\,581^{12} \tag{2.21}$$

Ověření domnělého řešení (2.21)

$$\begin{aligned} 17\,185^{12} + 17\,827^{12} &= 1\,693\,670\,79\,5\,988\,527\,478\,223\,812\,953\,002\,598\,550\,358\,061 \\ &\ 684\,162\,546 \\ 18\,581^{12} &= 1\,693\,670\,79\,9\,477\,914\,268\,071\,483\,562\,403\,779\,625\,271\,082 \\ &\ 597\,945\,361 \end{aligned}$$

$$17\,392^{12} + 18\,004^{12} = 18\,781^{12} \tag{2.22}$$

Ověření domnělého řešení (2.22)

$$\begin{aligned} 17\,392^{12} + 18\,004^{12} &= 1\,925\,859\,28\,0\,747\,239\,109\,832\,771\,236\,034\,617\,716\,313\,979 \\ &\ 566\,948\,352 \\ 18\,781^{12} &= 1\,925\,859\,28\,7\,148\,711\,263\,864\,308\,503\,050\,676\,160\,331\,986 \\ &\ 359\,899\,761 \end{aligned}$$

$$17\,536^{12} + 17\,635^{12} = 18\,632^{12} \tag{2.23}$$

Ověření domnělého řešení (2.23)

$$\begin{aligned} 17\,536^{12} + 17\,635^{12} &= 1\,750\,304\,89\,3\,785\,545\,613\,136\,911\,454\,547\,654\,664\,308\,812\\ &\quad 376\,817\,521\\ 18\,632^{12} &= 1\,750\,304\,89\,0\,798\,606\,535\,427\,127\,831\,077\,049\,025\,223\,988\\ &\quad 741\,144\,576 \end{aligned}$$

$$17\,593^{12} + 18\,038^{12} = 18\,891^{12} \tag{2.24}$$

Ověření domnělého řešení (2.24)

$$\begin{aligned} 17\,593^{12} + 18\,038^{12} &= 2\,065\,662\,55\,2\,085\,658\,245\,069\,255\,228\,622\,186\,491\,957\,111\\ &\quad 842\,593\,057\\ 18\,891^{12} &= 2\,065\,662\,55\,1\,602\,569\,668\,290\,137\,339\,834\,787\,977\,456\,676\\ &\quad 750\,075\,281 \end{aligned}$$

$$17\,670^{12} + 18\,403^{12} = 19\,152^{12} \tag{2.25}$$

Ověření domnělého řešení (2.25)

$$\begin{aligned} 17\,670^{12} + 18\,403^{12} &= 2\,435\,396\,04\,4\,201\,359\,569\,124\,778\,183\,441\,036\,202\,465\,789\\ &\quad 697\,629\,041\\ 19\,152^{12} &= 2\,435\,396\,04\,6\,827\,717\,742\,104\,233\,719\,285\,931\,416\,837\,026\\ &\quad 004\,074\,496 \end{aligned}$$

$$17\,759^{12} + 18\,337^{12} = 19\,148^{12} \tag{2.26}$$

Ověření domnělého řešení (2.26)

$$\begin{aligned} 17\,759^{12} + 18\,337^{12} &= 2\,429\,299\,30\,9\,689\,107\,913\,998\,533\,295\,300\,279\,293\,901\,240\\ &\quad 659\,618\,562\\ 19\,148^{12} &= 2\,429\,299\,30\,3\,866\,123\,213\,182\,702\,962\,860\,544\,684\,574\,607\\ &\quad 142\,813\,696 \end{aligned}$$

$$17\,820^{12} + 18\,410^{12} = 19\,220^{12} \tag{2.27}$$

Ověření domnělého řešení (2.27)

$$\begin{aligned} 17\,820^{12} + 18\,410^{12} &= 2\,541\,210\,25\,8\,614\,589\,176\,288\,669\,958\,142\,428v526\,657\,000\\ &\quad 000\,000\,000\\ 19\,220^{12} &= 2\,541\,210\,25\,9\,314\,801\,410\,819\,278\,649\,643\,651\,567\,616\,000\\ &\quad 000\,000\,000 \end{aligned}$$

$$18\,029^{12} + 18\,593^{12} = 19\,425^{12} \tag{2.28}$$

Ověření domnělého řešení (2.28)

$$\begin{aligned}
18\,029^{12} + 18\,593^{12} &= 2\,886\,239\,25\,9\,373\,068\,741\,069\,608\,322\,658\,924\,090\,645\,761 \\
&\quad 627\,422\,642 \\
19\,425^{12} &= 2\,886\,239\,25\,8\,688\,450\,058\,202\,768\,127\,446\,241\,438\,388\,824 \\
&\quad 462\,890\,625
\end{aligned}$$

$$18\,654^{12} + 19\,245^{12} = 20\,103^{12} \tag{2.29}$$

Ověření domnělého řešení (2.29)

$$\begin{aligned}
18\,654^{12} + 19\,245^{12} &= 4\,356\,427\,30\,4\,973\,461\,224\,785\,659\,054\,852\,779\,716\,807\,553 \\
&\quad 453\,813\,041 \\
20\,103^{12} &= 4\,356\,427\,30\,9\,397\,225\,069\,045\,528\,748\,412\,740\,773\,465\,659 \\
&\quad 996\,727\,841
\end{aligned}$$

$$18\,719^{12} + 19\,199^{12} = 20\,104^{12} \tag{2.30}$$

Ověření domnělého řešení (2.30)

$$\begin{aligned}
18\,719^{12} + 19\,199^{12} &= 4\,359\,028\,48\,0\,983\,546\,660\,509\,385\,533\,543\,901\,640\,718\,620 \\
&\quad 780\,959\,362 \\
20\,104^{12} &= 4\,359\,028\,48\,4\,974\,828\,197\,013\,777\,239\,331\,055\,800\,158\,125 \\
&\quad 887\,062\,016
\end{aligned}$$

$$18\,821^{12} + 19\,311^{12} = 20\,218^{12} \tag{2.31}$$

Ověření domnělého řešení (2.31)

$$\begin{aligned}
18\,821^{12} + 19\,311^{12} &= 4\,665\,071\,522\,3\,42\,619\,165\,860\,058\,421714\,366\,245\,641\,042 \\
&\quad 061\,708\,562 \\
20\,218^{12} &= 4\,665\,071\,522\,3\,33\,509\,269\,777\,599\,185\,710\,945\,184\,494\,267 \\
&\quad 626\,622\,976
\end{aligned}$$

$$19\,325^{12} + 19\,764^{12} = 20\,721^{12} \tag{2.32}$$

Ověření domnělého řešení (2.32)

$$\begin{aligned}
19\,325^{12} + 19\,764^{12} &= 6\,265\,107\,52\,6\,417\,385\,359\,195\,377\,643\,801\,465\,273\,135\,754 \\
&\quad 945\,383\,921 \\
20\,721^{12} &= 6\,265\,107\,52\,1\,107\,183\,067\,210\,790\,250\,491\,203\,962\,100\,738 \\
&\quad 827\,423\,041
\end{aligned}$$

$$19\,510^{12} + 19\,674^{12} = 20\,759^{12} \tag{2.33}$$

Ověření domnělého řešení (2.33)

$$\begin{aligned} 19\,510^{12} + 19\,674^{12} &= 6\,404\,380\,79\,3\,027\,692\,128\,875\,289\,345\,465\,056\,488\,778\,727 \\ &\quad 852\,875\,776 \\ 20\,759^{12} &= 6\,404\,380\,79\,9\,070\,420\,596\,926\,560\,091\,984\,720\,829\,139\,356 \\ &\quad 445\,552\,481 \end{aligned}$$

$$19\,532^{12} + 19\,942^{12} = 20\,923^{12} \tag{2.34}$$

Ověření domnělého řešení (2.34)

$$\begin{aligned} 19\,532^{12} + 19\,942^{12} &= 7\,038\,619\,05\,1\,664\,541\,301\,333\,951\,082\,259\,125\,356\,164\,609 \\ &\quad 522\,470\,912 \\ 20\,923^{12} &= 7\,038\,619\,05\,0\,820\,841\,736\,132\,858\,753\,073\,654\,584\,937\,875 \\ &\quad 984\,451\,921 \end{aligned}$$

$$19\,602^{12} + 20\,251^{12} = 21\,142^{12} \tag{2.35}$$

Ověření domnělého řešení (2.35)

$$\begin{aligned} 19\,602^{12} + 20\,251^{12} &= 7\,975\,406\,38\,6\,850\,537\,714\,907\,946\,960\,037\,060\,977\,432\,892 \\ &\quad 186\,751\,697 \\ 21\,142^{12} &= 7\,975\,406\,38\,9\,048\,103\,661\,486\,029\,339\,093\,298\,274\,456\,009 \\ &\quad 851\,867\,136 \end{aligned}$$

$$19\,608^{12} + 20\,051^{12} = 21\,023^{12} \tag{2.36}$$

Ověření domnělého řešení (2.36)

$$\begin{aligned} 19\,608^{12} + 20\,051^{12} &= 7\,453\,088\,59\,6\,685\,558\,317\,571\,340\,376\,307\,530\,709\,923\,225 \\ &\quad 366\,610\,737 \\ 21\,023^{12} &= 7\,453\,088\,59\,4\,230\,403\,192\,291\,667\,827\,917\,959\,016\,998\,546 \\ &\quad 535\,624\,321 \end{aligned}$$

$$19\,695^{12} + 20\,689^{12} = 21\,463^{12} \tag{2.37}$$

Ověření domnělého řešení (2.37)

$$\begin{aligned} 19\,695^{12} + 20\,689^{12} &= 9\,556\,197\,28\,6\,971\,060\,736\,501\,315\,465\,525\,231\,675\,061\,768 \\ &\quad 820\,834\,946 \\ 21\,463^{12} &= 9\,556\,197\,28\,0\,114\,682\,062\,722\,751\,414\,202\,194\,551\,855\,216 \\ &\quad 269\,981\,281 \end{aligned}$$

$$20\,021^{12} + 20\,998^{12} = 21\,796^{12} \tag{2.38}$$

Ověření domnělého řešení (2.38)

$$\begin{aligned} 20\,021^{12} + 20\,998^{12} &= \colorbox{yellow}{11 495 333 9}\,44\,532\,221\,177\,148\,629\,811\,367\,382\,727\,531\,228 \\ &\quad 072\,334\,737 \\ 21\,796^{12} &= \colorbox{yellow}{11 495 333 9}\,06\,142\,445\,178\,172\,577\,178\,052\,136\,689\,315\,132 \\ &\quad 070\,690\,816 \end{aligned}$$

$$20\,173^{12} + 21\,067^{12} = 21\,902^{12} \tag{2.39}$$

Ověření domnělého řešení (2.39)

$$\begin{aligned} 20\,173^{12} + 21\,067^{12} &= \colorbox{yellow}{12 184 432 1}\,14\,876\,593\,836\,311\,281\,297\,750\,870\,713\,672\,907 \\ &\quad 019\,644\,482 \\ 21\,902^{12} &= \colorbox{yellow}{12 184 432 1}\,95\,336\,494\,811\,157\,073\,931\,343\,418\,026\,746\,388 \\ &\quad 260\,458\,496 \end{aligned}$$

$$20\,245^{12} + 20\,822^{12} = 21\,778^{12} \tag{2.40}$$

Ověření domnělého řešení (2.40)

$$\begin{aligned} 20\,245^{12} + 20\,822^{12} &= \colorbox{yellow}{11 381 930 2}\,05\,349\,447\,963\,549\,777\,365\,834\,383\,231\,704\,669 \\ &\quad 235\,418\,641 \\ 21\,778^{12} &= \colorbox{yellow}{11 381 930 2}\,96\,786\,394\,748\,783\,084\,377\,911\,387\,566\,754\,160 \\ &\quad 303\,804\,416 \end{aligned}$$

$$20\,259^{12} + 20\,545^{12} = 21\,621^{12} \tag{2.41}$$

Ověření domnělého řešení (2.41)

$$\begin{aligned} 20\,259^{12} + 20\,545^{12} &= \colorbox{yellow}{10 435 405 3}\,36\,840\,181\,394\,791\,558\,781\,368\,697\,064\,049\,214 \\ &\quad 372\,789\,106 \\ 21\,621^{12} &= \colorbox{yellow}{10 435 405 3}\,02\,072\,065\,306\,820\,681\,577\,417\,259\,732\,008\,967 \\ &\quad 040\,029\,841 \end{aligned}$$

$$20\,364^{12} + 20\,885^{12} = 21\,870^{12} \tag{2.42}$$

Ověření domnělého řešení (2.42)

$$\begin{aligned} 20\,364^{12} + 20\,885^{12} &= \colorbox{yellow}{11 972 515 1}\,17\,580\,684\,845\,983\,829\,362\,835\,673\,897\,949\,907 \\ &\quad 748\,424\,721 \\ 21\,870^{12} &= \colorbox{yellow}{11 972 515 1}\,82\,562\,019\,788\,602\,740\,026\,717\,047\,105\,681\,000 \\ &\quad 000\,000\,000 \end{aligned}$$

$$20\,511^{12} + 21\,258^{12} = 22\,165^{12} \tag{2.43}$$

Ověření domnělého řešení (2.43)

$$\begin{aligned} 20\,511^{12} + 21\,258^{12} &= 4\,060\,890\,560\,558\,492\,417\,415\,540\,232\,594\,769\,328\,979\,295 \\ &\quad 475\,619\,457 \\ 22\,165^{12} &= 14\,060\,890\,547\,420\,267\,847\,053\,144\,841\,625\,120\,000\,772\,109 \\ &\quad 619\,140\,625 \end{aligned}$$

$$20\,623^{12} + 21\,258^{12} = 22\,426^{12} \tag{2.44}$$

Ověření domnělého řešení (2.44)

$$\begin{aligned} 20\,623^{12} + 21\,591^{12} &= 16\,181\,613\,100\,643\,611\,306\,138\,619\,733\,318\,992\,786\,816\,777 \\ &\quad 146\,858\,402 \\ 22\,426^{12} &= 16\,181\,613\,128\,086\,168\,321\,220\,216\,689\,474\,432\,641\,418\,316 \\ &\quad 412\,030\,976 \end{aligned}$$

$$20\,719^{12} + 21\,415^{12} = 22\,353^{12} \tag{2.45}$$

Ověření domnělého řešení (2.45)

$$\begin{aligned} 20\,719^{12} + 21\,415^{12} &= 15\,560\,724\,684\,676\,989\,536\,317\,501\,078\,796\,804\,547\,471\,562 \\ &\quad 284\,396\,386 \\ 22\,353^{12} &= 15\,560\,724\,633\,865\,411\,892\,685\,056\,203\,432\,443\,039\,034\,588 \\ &\quad 173\,371\,841 \end{aligned}$$

$$20\,772^{12} + 21\,560^{12} = 22\,467^{12} \tag{2.46}$$

Ověření domnělého řešení (2.46)

$$\begin{aligned} 20\,772^{12} + 21\,560^{12} &= 16\,540\,210\,182\,762\,917\,613\,773\,223\,661\,359\,077\,216\,565\,218 \\ &\quad 787\,721\,216 \\ 22\,467^{12} &= 16\,540\,210\,170\,448\,461\,548\,791\,267\,979\,854\,664\,332\,019\,210 \\ &\quad 924\,894\,961 \end{aligned}$$

$$20\,854^{12} + 21\,058^{12} = 22\,205^{12} \tag{2.47}$$

Ověření domnělého řešení (2.47)

$$\begin{aligned} 20\,854^{12} + 21\,058^{12} &= 14\,368\,430\,407\,094\,999\,074\,430\,254\,427\,655\,770\,319\,420\,080 \\ &\quad 670\,973\,952 \\ 22\,205^{12} &= 14\,368\,430\,449\,576\,022\,508\,351\,139\,416\,186\,758\,658\,601\,289 \\ &\quad 306\,640\,625 \end{aligned}$$

$$20\,991^{12} + 21\,184^{12} = 22\,344^{12} \tag{2.48}$$

Ověření domnělého řešení (2.48)

$$\begin{aligned} 20\,991^{12} + 21\,184^{12} &= 15\,485\,708\,2\,62\,182\,063\,245\,992\,085\,657\,228\,622\,492\,065\,567\\ &\quad 030\,388\,737\\ 22\,344^{12} &= 15\,485\,708\,2\,28\,533\,919\,082\,586\,651\,873\,063\,062\,828\,542\,781\\ &\quad 749\,723\,136 \end{aligned}$$

$$21\,022^{12} + 21\,161^{12} = 22\,347^{12} \tag{2.49}$$

Ověření domnělého řešení (2.49)

$$\begin{aligned} 21\,022^{12} + 21\,161^{12} &= 15\,510\,676\,78\,9\,013\,447\,778\,351\,487\,726\,713\,984\,322\,052\,210\\ &\quad 504\,688\,737\\ 22\,347^{12} &= 15\,510\,676\,78\,1\,949\,552\,529\,060\,756\,271\,469\,821\,937\,854\,190\\ &\quad 156\,721\,041 \end{aligned}$$

$$21\,029^{12} + 21\,649^{12} = 22\,634^{12} \tag{2.50}$$

Ověření domnělého řešení (2.50)

$$\begin{aligned} 21\,029^{12} + 21\,649^{12} &= 18\,077\,390\,4\,49\,000\,443\,738\,600\,301\,630\,234\,036\,991\,343\,827\\ &\quad 642\,052\,242\\ 22\,634^{12} &= 18\,077\,390\,4\,60\,576\,468\,032\,155\,617\,481\,961\,257\,300\,291\,574\\ &\quad 679\,801\,856 \end{aligned}$$

$$21\,042^{12} + 21\,133^{12} = 22\,342^{12} \tag{2.51}$$

Ověření domnělého řešení (2.51)

$$\begin{aligned} 21\,042^{12} + 21\,133^{12} &= 15\,469\,083\,0\,66\,049\,599\,568\,876\,668\,812\,077\,361\,390\,890\,376\\ &\quad 009\,086\,897\\ 22\,342^{12} &= 15\,469\,083\,0\,00\,977\,825\,499\,241\,901\,648\,424\,548\,828\,878\,393\\ &\quad 718\,542\,336 \end{aligned}$$

$$21\,176^{12} + 21\,507^{12} = 22\,618^{12} \tag{2.52}$$

Ověření domnělého řešení (2.52)

$$\begin{aligned} 21\,176^{12} + 21\,507^{12} &= 17\,924\,638\,1\,96\,485\,542\,837\,543\,727\,366\,420\,820\,049\,783\,769\\ &\quad 556\,872\,177\\ 22\,618^{12} &= 17\,924\,638\,1\,33\,631\,761\,032\,877\,921\,456\,873\,630\,377\,056\,977\\ &\quad 128\,984\,576 \end{aligned}$$

$$21\,253^{12} + 21\,454^{12} = 22\,626^{12} \tag{2.53}$$

Ověření domnělého řešení (2.53)

$$\begin{aligned} 21\,253^{12} + 21\,454^{12} &= 18\,000\,865\,7\,99\,505\,436\,234\,101\,533\,215\,212\,840\,378\,690\,082 \\ &\ 604\,658\,257 \\ 22\,626^{12} &= 18\,000\,865\,7\,71\,220\,552\,487\,501\,028\,875\,807\,580\,284\,362\,579 \\ &\ 966\,693\,376 \end{aligned}$$

$$21\,384^{12} + 22\,092^{12} = 23\,064^{12} \tag{2.54}$$

Ověření domnělého řešení (2.54)

$$\begin{aligned} 21\,384^{12} + 22\,092^{12} &= 22\,657\,685\,9\,25\,946\,284\,240\,248\,696\,020\,247\,747\,743\,618\,919 \\ &\ 345\,160\,192 \\ 23\,064^{12} &= 22\,657\,685\,9\,32\,189\,446\,858\,421\,391\,576\,294\,332\,116\,685\,694 \\ &\ 693\,277\,696 \end{aligned}$$

$$21\,406^{12} + 22\,295^{12} = 23\,202^{12} \tag{2.55}$$

Ověření domnělého řešení (2.55)

$$\begin{aligned} 21\,406^{12} + 22\,295^{12} &= 24\,339\,131\,0\,43\,521\,075\,275\,330\,162\,969\,698\,114\,322\,674\,595 \\ &\ 314\,513\,761 \\ 23\,202^{12} &= 24\,339\,131\,0\,71\,876\,189\,626\,526\,139\,576\,027\,789\,206\,151\,172 \\ &\ 502\,327\,296 \end{aligned}$$

$$21\,434^{12} + 21\,775^{12} = 22\,897^{12} \tag{2.56}$$

Ověření domnělého řešení (2.56)

$$\begin{aligned} 21\,434^{12} + 21\,775^{12} &= 20\,765\,529\,5\,66\,112\,471\,645\,460\,514\,807\,629\,683\,281\,559\,465 \\ &\ 386\,562\,881 \\ 22\,897^{12} &= 20\,765\,529\,5\,00\,656\,497\,753\,488\,682\,535\,726\,670\,486\,045\,162 \\ &\ 162\,475\,841 \end{aligned}$$

$$21\,438^{12} + 22\,055^{12} = 23\,065^{12} \tag{2.57}$$

Ověření domnělého řešení (2.57)

$$\begin{aligned} 21\,438^{12} + 22\,055^{12} &= 22\,669\,477\,3\,60\,732\,935\,895\,197\,701\,161\,408\,646\,856\,179\,848 \\ &\ 856\,107\,681 \\ 23\,065^{12} &= 22\,669\,477\,3\,42\,085\,755\,841\,325\,480\,049\,484\,851\,717\,628\,144 \\ &\ 775\,390\,625 \end{aligned}$$

$$21\,453^{12} + 22\,132^{12} = 23\,119^{12} \tag{2.58}$$

Ověření domnělého řešení (2.58)

$$\begin{aligned} 21\,453^{12} + 22\,132^{12} &= 23\,314\,630\,6\,22\,338\,200\,350\,019\,436\,908\,409\,469\,557\,729\,462 \\ &\quad 179\,504\,817 \\ 23\,119^{12} &= 23\,314\,630\,6\,49\,312\,421\,591\,046\,180\,237\,886\,245\,398\,681\,223 \\ &\quad 231\,632\,961 \end{aligned}$$

$$21\,659^{12} + 22\,240^{12} = 23\,277^{12} \tag{2.59}$$

Ověření domnělého řešení (2.59)

$$\begin{aligned} 21\,659^{12} + 22\,240^{12} &= 25\,300\,207\,2\,38\,269\,012\,110\,950\,627\,662\,504\,346\,311\,312\,195 \\ &\quad 366\,889\,681 \\ 23\,277^{12} &= 25\,300\,207\,2\,66\,416\,041\,982\,429\,994\,623\,970\,336\,922\,718\,176 \\ &\quad 148\,291\,121 \end{aligned}$$

$$21\,709^{12} + 22\,247^{12} = 23\,304^{12} \tag{2.60}$$

Ověření domnělého řešení (2.60)

$$\begin{aligned} 21\,709^{12} + 22\,247^{12} &= 25\,654\,624\,3\,03\,918\,744\,448\,959\,063\,853\,209\,205\,186\,969\,677 \\ &\quad 5171\,17\,522 \\ 23\,304^{12} &= 25\,654\,624\,3\,25\,835\,840\,342\,544\,403\,917\,305\,976\,015\,707\,814 \\ &\quad 930\,415\,616 \end{aligned}$$

$$21\,944^{12} + 22\,926^{12} = 23\,831^{12} \tag{2.61}$$

Ověření domnělého řešení (2.61)

$$\begin{aligned} 21\,944^{12} + 22\,926^{12} &= 33\,551\,133\,7\,77\,604\,553\,046\,253\,296\,286\,258\,691\,944\,878\,758 \\ &\quad 501\,158\,912 \\ 23\,831^{12} &= 33\,551\,133\,7\,19\,495\,822\,982\,977\,218\,618\,389\,766\,330\,120\,566 \\ &\quad 265\,323\,361 \end{aligned}$$

$$21\,959^{12} + 22\,393^{12} = 23\,507^{12} \tag{2.62}$$

Ověření domnělého řešení (2.62)

$$\begin{aligned} 21\,959^{12} + 22\,393^{12} &= 28\,468\,624\,7\,36\,042\,863\,445\,634\,504\,191\,981\,853\,294\,706\,349 \\ &\quad 698\,370\,882 \\ 23\,507^{12} &= 28\,468\,624\,7\,44\,996\,823\,341\,023\,578\,915\,169\,623\,747\,075\,598 \\ &\quad 159\,313\,201 \end{aligned}$$

$$22\,002^{12} + 22\,760^{12} = 23\,749^{12} \tag{2.63}$$

Ověření domnělého řešení (2.63)

$$\begin{aligned} 22\,002^{12} + 22\,760^{12} &= 32\,191\,701\,3\,17\,050\,948\,895\,151\,936\,734\,168\,815\,385\,919\,431 \\ &\quad 196\,676\,096 \\ 23\,749^{12} &= 32\,191\,701\,3\,42\,826\,603\,330\,552\,732\,832\,537\,570\,795\,136\,306 \\ &\quad 759\,090\,001 \end{aligned}$$

$$22\,018^{12} + 22\,952^{12} = 23\,878^{12} \tag{2.64}$$

Ověření domnělého řešení (2.64)

$$\begin{aligned} 22\,018^{12} + 22\,952^{12} &= 34\,353\,846\,7\,68\,449\,218\,494\,989\,996\,118\,484\,405\,808\,919\,390 \\ &\quad 900\,457\,472 \\ 23\,878^{12} &= 34\,353\,846\,7\,79\,881\,538\,764\,098\,573\,469\,697\,310\,069\,623\,697 \\ &\quad 302\,818\,816 \end{aligned}$$

$$22\,220^{12} + 22\,667^{12} = 23\,791^{12} \tag{2.65}$$

Ověření domnělého řešení (2.65)

$$\begin{aligned} 22\,220^{12} + 22\,667^{12} &= 32\,881\,556\,2\,20\,561\,275\,626\,253\,401\,257\,496\,255\,362\,573\,406 \\ &\quad 551\,894\,161 \\ 23\,791^{12} &= 32\,881\,556\,2\,37\,292\,050\,455\,818\,900\,222\,234\,590\,809\,875\,944 \\ &\quad 806\,246\,081 \end{aligned}$$

$$22\,436^{12} + 23\,181^{12} = 24\,200^{12} \tag{2.66}$$

Ověření domnělého řešení (2.66)

$$\begin{aligned} 22\,436^{12} + 23\,181^{12} &= 40\,344\,505\,0\,29\,967\,146\,952\,891\,496\,230\,003\,538\,337\,213\,558 \\ &\quad 790\,670\,257 \\ 24\,200^{12} &= 40\,344\,505\,0\,40\,107\,975\,043\,939\,700\,736\,000\,000\,000\,000\,000 \\ &\quad 000\,000\,000 \end{aligned}$$

$$22\,762^{12} + 23\,060^{12} = 24\,279^{12} \tag{2.67}$$

Ověření domnělého řešení (2.67)

$$\begin{aligned} 22\,762^{12} + 23\,060^{12} &= 41\,953\,629\,7\,72\,131\,977\,401\,457\,796\,708\,954\,235\,417\,767\,559 \\ &\quad 442\,272\,256 \\ 24\,279^{12} &= 41\,953\,629\,7\,69\,868\,187\,983\,083\,798\,621\,456\,812\,850\,941\,728 \\ &\quad 120\,083\,041 \end{aligned}$$

$$22\,896^{12} + 23\,049^{12} = 24\,340^{12} \tag{2.68}$$

Ověření domnělého řešení (2.68)

$22\,896^{12} + 23\,049^{12}$ = 43 236 137 2 94 803 550 574 887 315 958 562 936 683 766 062 934 536 417

$24\,340^{12}$ = 43 236 137 2 42 001 391 440 933 539 673 129 389 920 256 000 000 000 000

$$22\,912^{12} + 23\,023^{12} = 24\,334^{12} \tag{2.69}$$

Ověření domnělého řešení (2.69)

$22\,912^{12} + 23\,023^{12}$ = 43 108 413 9 80 514 431 509 378 766 700 283 547 267 038 645 104 822 977

$24\,334^{12}$ = 43 108 413 9 56 809 389 501 961 160 094 122364 474 673 363 092 115 456

$$22\,957^{12} + 23\,369^{12} = 24\,551^{12} \tag{2.70}$$

Ověření domnělého řešení (2.70)

$22\,957^{12} + 23\,369^{12}$ = 47 954 595 8 75 346 470 699 087 475 712 981 668 000 164 694 320 409 362

$24\,551^{12}$ = 47 954 595 8 95 061 933 217 159 287 618 737 186 639 793 719 074 909 601

$$23\,010^{12} + 23\,125^{12} = 24\,440^{12} \tag{2.71}$$

Ověření domnělého řešení (2.71)

$23\,010^{12} + 23\,125^{12}$ = 45 416 579 0 52 620 585 442 802 176 912 786 472 001 558 672 119 140 625

$24\,440^{12}$ = 45 416 579 0 96 823 523 145 397 398 399 431 198 375 936 000 000 000 000

$$23\,166^{12} + 23\,933^{12} = 24\,986^{12} \tag{2.72}$$

Ověření domnělého řešení (2.72)

$23\,166^{12} + 23\,933^{12}$ = 59 205 332 9 19 324 654 554 626 914 122 761 327 063 722 340 218 476 017

$24\,986^{12}$ = 59 205 332 9 35 638 258 798 523 665 216 639 082 219 704 903 013 175 296

$$23\,917^{12} + 24\,281^{12} = 25\,540^{12} \tag{2.73}$$

Ověření domnělého řešení (2.73)

$$\begin{aligned}
23\,917^{12} + 24\,281^{12} &= 77\,028\,371\,2\,24\,350\,490\,035\,807\,051\,479\,872\,945\,284\,659\,613\\
&\quad 726\,259\,922\\
25\,540^{12} &= 77\,028\,371\,2\,93\,139\,333\,402\,432\,192\,735\,085\,441\,519\,616\,000\\
&\quad 000\,000\,000
\end{aligned}$$

$$23\,922^{12} + 24\,440^{12} = 25\,635^{12} \tag{2.74}$$

Ověření domnělého řešení (2.74)

$$\begin{aligned}
23\,922^{12} + 24\,440^{12} &= 80\,537\,818\,4\,27\,970\,627\,364\,503\,330\,438\,814\,413\,450\,262\,319\\
&\quad 960\,559\,616\\
25\,635^{12} &= 80\,537\,818\,4\,01\,811\,784\,166\,726\,142\,770\,037\,645\,577\,965\,508\\
&\quad 056\,640\,625
\end{aligned}$$

$$24\,123^{12} + 24\,592^{12} = 25\,819^{12} \tag{2.75}$$

Ověření domnělého řešení (2.75)

$$\begin{aligned}
24\,123^{12} + 24\,592^{12} &= 87\,755\,230\,2\,10\,271\,309\,381\,486\,475\,433\,756\,124\,372\,478\,925\\
&\quad 344\,607\,057\\
25\,819^{12} &= 87\,755\,230\,2\,98\,237\,877\,993\,665\,923\,930\,640\,123\,279\,733\,323\\
&\quad 771\,908\,561
\end{aligned}$$

2.4 Nalezená domnělá řešení bez ověření

$$24\,277^{12} + 25\,259^{12} = 26\,297^{12} \tag{2.76}$$

$$24\,308^{12} + 25\,572^{12} = 26\,515^{12} \tag{2.77}$$

$$24\,418^{12} + 25\,750^{12} = 26\,677^{12} \tag{2.78}$$

$$24\,454^{12} + 25\,836^{12} = 26\,749^{12} \tag{2.79}$$

$$24\,474^{12} + 25\,267^{12} = 26\,386^{12} \tag{2.80}$$

$$24\,490^{12} + 25\,822^{12} = 26\,753^{12} \tag{2.81}$$

$$24\,562^{12} + 25\,158^{12} = 26\,359^{12} \tag{2.82}$$

$$24\,808^{12} + 25\,647^{12} = 26\,768^{12} \tag{2.83}$$

$$24\,872^{12} + 25\,660^{12} = 26\,804^{12} \tag{2.84}$$

$$24\,948^{12} + 25\,774^{12} = 26\,908^{12} \tag{2.85}$$

$$25\,003^{12} + 25\,335^{12} = 26\,672^{12} \tag{2.86}$$

$$25\,014^{12} + 25\,730^{12} = 26\,910^{12} \tag{2.87}$$

$$25\,051^{12} + 25\,182^{12} = 26\,611^{12} \tag{2.88}$$

$$25\,061^{12} + 25\,271^{12} = 26\,665^{12} \tag{2.89}$$

$$25\,126^{12} + 25\,569^{12} = 26\,866^{12} \tag{2.90}$$

$$25\,129^{12} + 25\,196^{12} = 26\,659^{12} \tag{2.91}$$

$$25\,132^{12} + 25\,338^{12} = 26\,738^{12} \tag{2.92}$$

$$25\,206^{12} + 26\,104^{12} = 27\,226^{12} \tag{2.93}$$

$$25\,332^{12} + 25\,423^{12} = 26\,887^{12} \tag{2.94}$$

$$25\,497^{12} + 26\,540^{12} = 27\,626^{12} \tag{2.95}$$

$$25\,545^{12} + 26\,016^{12} = 27\,326^{12} \tag{2.96}$$

$$25\,588^{12} + 26\,182^{12} = 27\,444^{12} \tag{2.97}$$

$$26\,075^{12} + 27\,802^{12} = 28\,698^{12} \tag{2.98}$$

$$26\,163^{12} + 26\,428^{12} = 27\,863^{12} \tag{2.99}$$

$$26\,176^{12} + 27\,563^{12} = 28\,570^{12} \tag{2.100}$$

$$26\,181^{12} + 27\,040^{12} = 28\,233^{12} \tag{2.101}$$

$$26\,183^{12} + 26\,767^{12} = 28\,068^{12} \tag{2.102}$$

$$26\,330^{12} + 26\,514^{12} = 27\,995^{12} \tag{2.103}$$

$$26\,359^{12} + 26\,665^{12} = 28\,088^{12} \tag{2.104}$$

$$26\,384^{12} + 27\,062^{12} = 28\,337^{12} \tag{2.105}$$

$$26\,403^{12} + 27\,832^{12} = 28\,838^{12} \tag{2.106}$$

$$26\,519^{12} + 26\,782^{12} = 28\,239^{12} \tag{2.107}$$

$$26\,522^{12} + 27\,956^{12} = 28\,967^{12} \tag{2.108}$$

$$26\,596^{12} + 26\,813^{12} = 28\,295^{12} \tag{2.109}$$

$$26\,596^{12} + 27\,900^{12} = 28\,958^{12} \tag{2.110}$$

$$26\,626^{12} + 27\,646^{12} = 28\,805^{12} \tag{2.111}$$

$$26\,687^{12} + 27\,492^{12} = 28\,735^{12} \tag{2.112}$$

$$27\,178^{12} + 27\,394^{12} = 28\,911^{12} \tag{2.113}$$

$$27\,442^{12} + 28\,470^{12} = 29\,673^{12} \tag{2.114}$$

$$27\,447^{12} + 28\,484^{12} = 29\,684^{12} \tag{2.115}$$

$$27\,470^{12} + 28\,656^{12} = 29\,804^{12} \tag{2.116}$$

2.5 Závěr praktické části

V rámci praktické části jsem s pomocí Nikoly Cipricha napsala kód v programovacím jazyce *Python*, který nám hledal domnělá řešení Velké Fermatovy věty. Díky tomuto kódu jsem nalezla 114 řešení a všech 114 řešení také ověřila v programu *WolframAlpha* a zjistila, na kolik po sobě jsoucích míst zleva se nám shoduje pravá a levá strana nalezených domnělých řešení. Prvních 73 řešení je uvedeno v této části i s ověřením, zbylá řešení jsou uvedena bez ověření, avšak jejich ověření jsem uvedla alespoň v příloze této diplomové práce.

Z nalezených řešení se 1 řešení shoduje v 11 po sobě jdoucích číslicích zleva, konkrétně (2.31). Dále se jich devět shoduje v 10 po sobě jdoucích číslicích zleva, těmito domnělými řešeními jsou (2.13), (2.49), (2.78), (2.79),(2.85),(2.89),(2.98),(2.106) a (2.107). Zbylá řešení se shodují jen v 9 po sobě jdoucích číslicích zleva.

Při hledání domnělých řešení jsem si uvědomila, že těchto domnělých řešení by mohlo být nekonečně mnoho, a tak jsem společně s mým partnerem Jakubem Ivaničem sepsala důkaz, abychom si ověřili, že těchto domnělých řešení je opravdu nekonečně mnoho a zjistili jsme, že má hypotéza je pravdivá. Ovšem pro některé z vás je to jistě něco, co vás napadne intuitivně, i proto důkaz neuvádím přímo v rámci praktické části, ale můžete se na něj podívat v příloze této práce.

Závěr

Má diplomová práce je rozdělena na dvě části, teoretickou a praktickou část.

V teoretické části jsem měla za cíl obeznámit čtenáře s Velkou Fermatovou větou a historií jejího dokazování, tedy seznámit případné čtenáře též s lidmi, kteří se na důkazu podíleli či přispěli k tomu, aby byla tato věta dokázána. Teoretická část mimo jiné obsahuje odkazy na články matematiků a jejich důkazy či odkazy na videa o jejich životě. Taktéž v této části naleznete takový malý průzkum o tom, jaké povědomí o Velké Fermatově větě mají lidé v mém okolí, kteří se při svém studiu vysoké školy setkali s matematikou. Ačkoli se teoretická část této diplomové práce může jevit jako výňatek z jedné knihy, opak je pravdou. Primárně jsem samozřejmě vycházela z knihy Simona Singha *Velká Fermatova věta*, ale výňatky z této knihy jsem doplnila o informace z jiné české či cizojazyčné literatury, případně z internetových zdrojů.

V části praktické jsem měla najít nějaká domnělá řešení Velké Fermatovy věty, která se budou shodovat alespoň na devět po sobě jdoucích míst zleva (tedy v devíti po sobě jdoucích číslicích symbolizujících nejvyšší řády daných čísel). S pomocí Ing. Nikoly Cipricha byl sepsán kód v jazyce *Phyton*, který mi umožnil tato domnělá řešení najít a s jehož využitím jsem našla 114 domnělých řešení, která jsem ověřila v programu *WolframAlpha*. Postup hledání a ověřování těchto řešení jsem pak popsala ve videu, které je přiloženo k podkapitole praktické části nazvané „Využité programy."

Dále jsem se během hledání domnělých řešení rozhodla ověřit svou hypotézu, že domnělých řešení Velké Fermatovy věty je nekonečně mnoho. Tuto hypotézu jsem se s pomocí Mgr. Jakuba Ivaniče pokusila dokázat a došli jsme k závěru, že těchto domnělých řešení, která se shodují alespoň na devět míst zleva, je opravdu nekonečně mnoho. Důkaz uvádím v příloze této práce.

Tímto bych řekla, že cíle, které jsem si vytyčila v úvodu této práce, byly nejen splněny, ale místy i rozšířeny o další cíle, které jsem se pokusila splnit.

Pro napsání této práce byla potřeba projít několik knih, článků i webových stránek, abych dokázala napsat hlavně teoretickou část práce. Nejsou zde bohužel zmíněny úplně všechny osobnosti, které do dokazování kdy zabrouzdaly, ale věřím, že jsou zde zmíněny ty nejdůležitější osobnosti.

Vzhledem k tomu, že praktická část a místy i část teoretická obsahovaly mnoho rovnic či matematických vět, byla práce napsána v programovacím jazyce LaTeX.

Literatura

[1] SINGH, Simon. *Velká Fermatova věta: dramatická historie řešení největšího matematického problému.* V českém jazyce vyd. 4., V upr. a dopl. podobě 2. Praha: Argo, Dokořán, 2010. Aliter (Argo: Dokořán): Dokořán): Dokořán). ISBN 978-80-257-0291-6.

[2] KŘÍŽEK, Michal, Lawrence SOMER a Alena ŠOLCOVÁ. *Kouzlo čísel: od velkých objevů k aplikacím.* Vydání 3. Praha: Academia, 2018. Galileo. ISBN 978-80-200-2840-2.

[3] ŠOLCOVÁ, Alena. *Kapitoly z historie matematiky a informatiky.* V Praze: České vysoké učení technické, 2017. ISBN 978-80-01-06092-6.

[4] Lock, Paul Richard. „Some Aspects of Fermat's Last Theorem and Pythagorean Triples."„*Mathematics in School*", vol. 10, no. 3, 1981, pp. 35–35. JSTOR, http://www.jstor.org/stable/30214291. Accessed 13 Sep. 2022.

[5] SINGH, Simon. *Simpsonovi a jejich matematická tajemství.* Praha: Dokořán, 2015. Aliter (Argo: Dokořán): Dokořán): Dokořán). ISBN 978-80-7363-611-1.

[6] MAREŠ, Milan. *Příběhy matematiky: stručná historie královny věd.* 2., rev. vyd. Příbram: Pistorius a Olšanská, 2011. ISBN 978-80-87053-64-5.

[7] STEWART, Ian. *Krocení nekonečna: příběh matematiky od prvních čísel po teorii chaosu.* Brno: CPress, 2014. ISBN 978-80-264-0295-4.

[8] DU SAUTOY, Marcus. *Hudba prvočísel: dvě století Riemannovy hypotézy.* Praha: Argo, Dokořán, 2019. Zip (Argo: Dokořán): Dokořán): Dokořán). ISBN 978-80-7363-945-7.

[9] KRAUS, Ivo. *Ženy v dějinách matematiky, fyziky a astronomie.* Praha: České vysoké učení technické v Praze, 2015. ISBN 978-80-01-05770-4.

[10] ŠTOLL, Ivan. *Dějiny fyziky.* Praha: Prometheus, 2009. ISBN 978-80-7196-375-2.

[11] BILOVÁ, Štěpánka. *Mýty v matematice: Příběh Évarista Galoise (1811–1832).* Pokroky matematiky, fyziky a astronomie [online]. Jednota českých matematiků a fyziků, 2001, 46(1), 70-76 [cit. 2022-10-12]. Dostupné z: `https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/141065/PokrokyMFA_46-2001-1_8.pdf`

[12] SHIMURA, Goro. *Yutaka Taniyama and his time.* London: Bull. London Math. Soc. 21, 1989, 186-196.

[13] SHIMURA, Goro. *Map of My Life.* Princeton University: Springer Science+Business Media, 2008. ISBN 978-0-387-79714-4.

[14] ZÁPOTOČNÝ, Tomáš. *Velká Fermatova věta.* České Budějovice, 2008. Dostupné také z: https://theses.cz/id/eki551/downloadPraceContent_adipIdno_10579. Bakalářská. Jihočeská univerzita. Vedoucí práce Mgr. Petr Chládek, Ph.D.

[15] Darmon, Henri a Later, Six a Breuil, Christophe a Conrad, Brian a Diamond, Frederic. (2001). *A Proof of the Full Shimura-Taniyama-Weil Conjecture Is Announced.* Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/2390780_A_Proof_of_the_Full_Shimura-Taniyama-Weil_Conjecture_Is_Announced

[16] HALAŠ, Radomír. *Teorie čísel: Eulerova domněnka* (str. 130-131). 2. upravené. Olomouc: Univerzita Palackého, 2014. Dostupné také z: https://kag.upol.cz/data/upload/5/teorie_cisel.pdf

[17] HELLEGOUARCH, Yves. *Invitation to the Mathematics of Fermat-Wiles.* .: Academic Press, 2001. ISBN 978-0123392510.

[18] ŠOLCOVÁ, Alena. *D'Artagnan mezi matematiky: pocta Pierru Fermatovi k 400. výročí narození.* Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2001.

Internetové zdroje

[A] *Pierre de Fermat* [online]. Velká Británie: Britannica, 2022 [cit. 2022-09-14]. Dostupné z: https://www.britannica.com/biography/Pierre-de-Fermat

[B] *Marie Sophie Germain* [online]. Georgia: Agnes Scott College, 1995 - 2022 [cit. 2022-09-17]. Dostupné z: https://mathwomen.agnesscott.org/women/germain.htm

[C] *Příspěvek Sophie k důkazu VFV* [online]. Georgia: Agnes Scott College, 1995 - 2022 [cit. 2022-09-17]. Dostupné z: https://mathwomen.agnesscott.org/women/germain-FLT/SGandFLT.htm

[D] KAGELE, Hanna. *Sophie Germain, The Princess of Mathematics and Fermat's Last Theorem* [online]. 2012, 1-9 [cit. 2022-09-21]. Dostupné z: https://www.gcsu.edu/sites/files/page-assets/node-808/attachments/kagele.pdf

[E] *Eulerovo číslo* [online]. Česká republika: voho.eu, 2022 [cit. 2022-09-28]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/E_(mathematical_constant) a z https://www.matweb.cz/eulerovo-cislo/

[F] *Leonhard Euler* [online]. Plzeň: Techmania, 2007 [cit. 2022-09-28]. Dostupné z: http://edu.techmania.cz/cs/encyklopedie/vedec/1134/euler

[G] *Eulerův důkaz* [online]. -: fermatslasttheorem.blogspot.com, 2005 [cit. 2022-10-03]. Dostupné z: http://fermatslasttheorem.blogspot.com/2005/05/fermats-last-theorem-proof-for-n3.html

[H] YUE, Zhang. *Důkaz pro n=3.* Journal of Mathematical Problems, Equations and Statistics [online]. 2020, 10. 3. 2020, 3-4 [cit. 2022-10-03]. ISSN 2709-9407. Dostupné z: https://www.mathematicaljournal.com/article/9/1-1-17-231.pdf

[I] *Paul Wolfskehl and the Wolfskehl Prize: Klaus Barner* [online]. Universität Gesamthochschule Kassel: NOTICES OF THE AMS, 1997 [cit. 2022-10-12]. Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/240169425_Paul_Wolfskehl_and_the_Wolfskehl_Prize

[J] *Wolfskehlova cena* [online]. Open University Anglie: simonsingh.net, 1997 [cit. 2022-10-12]. Dostupné z: https://simonsingh.net/media/articles/maths-and-science/the-wolfskehl-prize/

[K] *Gerhard Frey* [online]. Německo (Duisburg): Informationsdienst Wissenschaft, 2009 [cit. 2022-10-17]. Dostupné z: https://idw-online.de/de/news323205https://idw-online.de/de/news323205

[L] *Wilesův důkaz a Tanijamova–Šimurova domněnka* [online]. Česká republika: FyzMatik, 2008 [cit. 2022-10-18]. Dostupné z: https://fyzmatik.pise.cz/700-velka-veta-fermatova-a-jeji-dukaz.html

[M] *Kenneth Ribet* [online]. Berkeley: Simons Institute, 2020 [cit. 2022-10-18]. Dostupné z: https://simons.berkeley.edu/people/kenneth-ribet

[N] GRIFFITHS, Phillip A. *Matematika na přelomu tisíciletí.* Pokroky matematiky, fyziky a astronomie [online]. Jednota českých matematiků a fyziků, 2001, 46(3), 205-218 [cit. 2022-10-26]. Dostupné z: https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/141085/PokrokyMFA_46-2001-3_5.pdf

[O] *Bibliografie Wilese* [online]. Anglie: Maths History, 2009 [cit. 2022-10-26]. Dostupné z: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Wiles/

[P] *Richard Taylor Bibliografie* [online]. Anglie: Maths History, 2009 [cit. 2022-10-26]. Dostupné z: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Taylor_Richard/

Zdroje obrázků

[a] *Pierre de Fermat* [online]. Španělsko: Theorema, 2020 [cit. 2022-09-17]. Dostupné z: `https://www.teorema.top/wp-content/uploads/2020/01/El-teorema-de-Fermat.jpg`

[b] *Homer 1* [online]. Amerika: ABC News, 2015 [cit. 2022-09-17]. Dostupné z: `https://s.abcnews.com/images/Entertainment/ht_homer_simpson_higgs_boson_jc_150304_4x3_992.jpg`

[c] *Homer 2* [online]. Španělsko: Revistagq, 2021 [cit. 2022-09-17]. Dostupné z: `https://www.revistagq.com/noticias/articulo/los-simpson-homer-3-como-se-hizo`

[d] *Leonhard Euler* [online]. Španělsko: Citas.in, 2011 [cit. 2022-09-28]. Dostupné z: `https://citas.in/media/authors/leonhard-euler.jpghttps://citas.in/media/authors/leonhard-euler.jpg`

[e] *Královecké mosty* [online]. Česká republika: muzivcesku.cz, 2020 [cit. 2022-09-29]. Dostupné z: `https://www.muzivcesku.cz/wp-content/uploads/2020/11/mst2.jpg`

[f] *Sophie Germain* [online]. Španělsko: Mujeres Calculadoras, 2016 [cit. 2022-09-17]. Dostupné z: `https://mujerescalculadoras.files.wordpress.com/2016/05/sofia.jpeg`

[g] *Évariste Galois* [online]. Plzeň: Techmania, 2007 [cit. 2022-10-05]. Dostupné z: `http://edu.techmania.cz/sites/default/files/vedci/insert/galois_portret.jpg`

[h] *Galoisovy poznámky 1* [online]. Amerika: La Camerata, 2013 [cit. 2022-10-08]. Dostupné z: `https://lacamerata.files.wordpress.com/2013/01/galoisnotes-page-small3.jpg`

[i] *Galoisovy poznámky 2* [online]. Francie: acquescassabois.com, 2019 [cit. 2022-10-08]. Dostupné z: `https://www.jacquescassabois.com/je_nai_pas_le_temps.html`

[j] *Paul Wolfshekl* [online]. -: Wikipedia, 2021 [cit. 2022-10-12]. Dostupné z: `https://en.wikipedia.org/wiki/Paul_Wolfskehl`

[k] *Tanijama a Šimura* [online]. -: Konstanta, 2017 [cit. 2022-10-17]. Dostupné z: `http://www.konstanta.lt/wp-content/uploads/2017/02/Leonidas_Sakalauskas_3_2.png`

[l] *Rosettská deska* [online]. New York: ThoughtCo, 2018 [cit. 2022-10-26]. Dostupné z: https://www.thoughtco.com/thmb/2msa41Fbh6i1Q7kmTXF_CxYbyAo=/1993x1993/smart/filters:no_upscale()/rosetta-replica-56a025d65f9b58eba4af24eb.jpghttps://www.thoughtco.com/thmb/2msa41Fbh6i1Q7kmTXF_CxYbyAo=/1993x1993/smart/filters:no_upscale()/rosetta-replica-56a025d65f9b58eba4af24eb.jpg

[m] *Gerhard Frey* [online]. -: Wikipedia, 2022 [cit. 2022-10-17]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Gerhard_Frey

[n] *Kenneth Ribet* [online]. Berkeley: Simons Institute, 2020 [cit. 2022-10-18]. Dostupné z: https://simons.berkeley.edu/sites/default/files/kenribet.jpg

[o] *Andrew Wiles* [online]. Londýn: Royal Society, 2017 [cit. 2022-10-26]. Dostupné z: https://royalsociety.org/-/media/news/2017/andrew-wiles.jpg?h=667&w=871&la=en-GB&hash=9DB61BA3138A1FCA1419F039B094B55C

[p] *Richard Taylor* [online]. Stanford: 2020, Mathematics Stanford [cit. 2022-10-26]. Dostupné z: https://mathematics.stanford.edu/sites/mathematics/files/styles/hs_medium_square_360x360/public/media/Taylor-Richard.jpeg?itok=4jM78TIq

Příloha diplomové práce

Zbylá nalezená domnělá řešení s ověřením

$$24\,277^{12} + 25\,259^{12} = 26\,297^{12}$$

Ověření domnělého řešení (2.76)

$$\begin{aligned} 24\,277^{12} + 25\,259^{12} &= 109\,364\,022\,266\,597\,375\,717\,483\,351\,324\,161\,896\,173\,207 \\ &\quad 437\,681\,005\,602 \\ 26\,297^{12} &= 109\,364\,022\,718\,624\,715\,757\,262\,540\,664\,254\,323\,260\,280 \\ &\quad 305\,158\,398\,241 \end{aligned}$$

$$24\,308^{12} + 25\,572^{12} = 26\,515^{12}$$

Ověření domnělého řešení (2.77)

$$\begin{aligned} 24\,308^{12} + 25\,572^{12} &= 120\,753\,458\,687\,582\,413\,090\,122\,955\,445\,285\,406\,602\,927 \\ &\quad 852\,279\,037\,952 \\ 26\,515^{12} &= 120\,753\,458\,284\,331\,356\,499\,980\,420\,669\,314\,319\,357\,944 \\ &\quad 492\,431\,640\,625 \end{aligned}$$

$$24\,418^{12} + 25\,750^{12} = 26\,677^{12}$$

Ověření domnělého řešení (2.78)

$$\begin{aligned} 24\,418^{12} + 25\,750^{12} &= 129\,910\,383\,6\,20\,137\,847\,576\,357\,873\,402\,078\,102\,035\,676 \\ &\quad 876\,286\,795\,776 \\ 26\,677^{12} &= 129\,910\,383\,6\,82\,750\,856\,906\,236\,536\,005\,926\,889\,421\,257 \\ &\quad 538\,680\,069\,521 \end{aligned}$$

$$24\,454^{12} + 25\,836^{12} = 26\,749^{12}$$

Ověření domnělého řešení (2.79)

$$\begin{aligned} 24\,454^{12} + 25\,836^{12} &= 134\,180\,871\,787\,165\,461\,302\,237\,299\,536\,234\,191\,893\,277 \\ &\quad 057\,458\,573\,312 \\ 26\,749^{12} &= 134\,180\,871\,708\,930\,696\,141\,224\,802\,480\,052\,815\,254\,056 \\ &\quad 520\,508\,054\,001 \end{aligned}$$

$$24\,474^{12} + 25\,267^{12} = 26\,386^{12}$$

Ověření domnělého řešení (2.80)

$$\begin{aligned} 24\,474^{12} + 25\,267^{12} &= 113\,889\,240\,550\,118\,027\,514\,724\,311\,186\,361\,882\,998\,173 \\ &\quad 450\,317\,941\,937 \\ 26\,386^{12} &= 113\,889\,240\,622\,970\,365\,187\,474\,071\,543\,284\,789\,595\,988 \\ &\quad 071\,858\,180\,096 \end{aligned}$$

$$24\,490^{12} + 25\,822^{12} = 26\,753^{12}$$

Ověření domnělého řešení (2.81)

$$\begin{aligned} 24\,490^{12} + 25\,822^{12} &= 134\,421\,851\,650\,484\,994\,380\,836\,687\,125\,214\,231\,481\,924 \\ &\quad 391\,567\,958\,016 \\ 26\,753^{12} &= 134\,421\,851\,995\,698\,816\,415\,189\,873\,569\,998\,359\,656\,189 \\ &\quad 160\,900\,093\,441 \end{aligned}$$

$$24\,562^{12} + 25\,158^{12} = 26\,359^{12}$$

Ověření domnělého řešení (2.82)

$$\begin{aligned} 24\,562^{12} + 25\,158^{12} &= 112\,498\,611\,569\,527\,676\,829\,341\,263\,072\,069\,550\,349\,301 \\ &\quad 583\,106\,875\,392 \\ 26\,359^{12} &= 112\,498\,611\,220\,426\,240\,572\,575\,516\,700\,517\,569\,324\,075 \\ &\quad 576\,843\,437\,281 \end{aligned}$$

$$24\,808^{12} + 25\,647^{12} = 26\,768^{12}$$

Ověření domnělého řešení (2.83)

$$\begin{aligned} 24\,808^{12} + 25\,647^{12} &= 135\,329\,065\,049\,527\,494\,613\,120\,990\,190\,548\,039\,520\,462 \\ &\quad 576\,151\,715\,777 \\ 26\,768^{12} &= 135\,329\,065\,676\,043\,692\,986\,771\,116\,324\,080\,707\,554\,589 \\ &\quad 161\,790\,898\,176 \end{aligned}$$

$$24\,872^{12} + 25\,660^{12} = 26\,804^{12}$$

Ověření domnělého řešení (2.84)

$$\begin{aligned} 24\,872^{12} + 25\,660^{12} &= 137\,529\,324\ 767\,636\,733\,401\,927\,129\,569\,643\,541\,821\,762 \\ &\quad 255\,313\,698\,816 \\ 26\,804^{12} &= 137\,529\,324\ 907\,291\,825\,026\,657\,238\,802\,294\,533\,369\,537 \\ &\quad 627\,596\,783\,616 \end{aligned}$$

$$24\,948^{12} + 25\,774^{12} = 26\,908^{12}$$

Ověření domnělého řešení (2.85)

$$\begin{aligned} 24\,948^{12} + 25\,774^{12} &= 144\,071\,151\,7\,29\,098\,805\,893\,683\,200\,708\,403\,206\,967\,602 \\ &\quad 468\,524\,265\,472 \\ 26\,908^{12} &= 144\,071\,151\,7\,68\,796\,576\,962\,271\,741\,941\,208\,013\,429\,747 \\ &\quad 412\,512\,014\,336 \end{aligned}$$

$$25\,003^{12} + 25\,335^{12} = 26\,672^{12}$$

Ověření domnělého řešení (2.86)

$$\begin{aligned} 25\,003^{12} + 25\,335^{12} &= 129\,618\,499\ 334\,758\,960\,292\,393\,540\,628\,267\,381\,318\,052 \\ &\quad 172\,295\,022\,066 \\ 26\,672^{12} &= 129\,618\,499\ 552\,322\,281\,008\,171\,344\,863\,788\,297\,891\,523 \\ &\quad 882\,035\,183\,616 \end{aligned}$$

$$25\,014^{12} + 25\,730^{12} = 26\,910^{12}$$

Ověření domnělého řešení (2.87)

$$\begin{aligned} 25\,014^{12} + 25\,730^{12} &= 144\,199\,705\ 021\,751\,047\,093\,205\,307\,350\,370\,503\,810\,965 \\ &\quad 004\,811\,575\,296 \\ 26\,910^{12} &= 144\,199\,705\ 414\,732\,216\,115\,456\,345\,091\,495\,155\,344\,881 \\ &\quad 000\,000\,000\,000 \end{aligned}$$

$$25\,051^{12} + 25\,182^{12} = 26\,611^{12}$$

Ověření domnělého řešení (2.88)

$$\begin{aligned} 25\,051^{12} + 25\,182^{12} &= 126\,105\,590\ 180\,691\,159\,526\,794\,323\,328\,137\,774\,642\,993 \\ &\quad 743\,655\,744\,977 \\ 26\,611^{12} &= 126\,105\,590\ 364\,740\,879\,452\,027\,471\,312\,988\,044\,778\,039 \\ &\quad 734\,722\,367\,921 \end{aligned}$$

$$25\,061^{12} + 25\,271^{12} = 26\,665^{12}$$

Ověření domnělého řešení (2.89)

$$\begin{aligned} 25\,061^{12} + 25\,271^{12} &= 129\,210\,871\,6\,28\,623\,701\,010\,455\,976\,238\,414\,346\,082\,450 \\ &\ 761\,424\,182\,962 \\ 26\,665^{12} &= 129\,210\,871\,6\,51\,787\,550\,213\,888\,790\,103\,239\,907\,684\,962 \\ &\ 441\,650\,390\,625 \end{aligned}$$

$$25\,126^{12} + 25\,569^{12} = 26\,866^{12}$$

Ověření domnělého řešení (2.90)

$$\begin{aligned} 25\,126^{12} + 25\,569^{12} &= 141\,395\ \ 674\ 330\,635\,662\,787\,595\,061\,814\,676\,668\,674\,267 \\ &\ 774\,774\,199\,937 \\ 26\,866^{12} &= 141\,395\ \ 674\ 826\,332\,406\,481\,223\,100\,675\,936\,396\,365\,059 \\ &\ 629\,869\,305\,856 \end{aligned}$$

$$25\,129^{12} + 25\,196^{12} = 26\,659^{12}$$

Ověření domnělého řešení (2.91)

$$\begin{aligned} 25\,129^{12} + 25\,196^{12} &= 128\ \ 862\ \ 411\ 265\,018\,914\,401\,415\,252\,229\,431\,791\,361\,185 \\ &\ 683\,813\,711\,457 \\ 26\,659^{12} &= 128\ \ 862\ \ 411\ 948\,734\,786\,013\,372\,045\,400\,643\,199\,504\,719 \\ &\ 562\,232\,429\,681 \end{aligned}$$

$$25\,132^{12} + 25\,338^{12} = 26\,738^{12}$$

Ověření domnělého řešení (2.92)

$$\begin{aligned} 25\,132^{12} + 25\,338^{12} &= 133\ \ 520\ \ 216\ 148\,412\,605\,665\,707\,716\,215\,437\,249\,448\,395 \\ &\ 973\,614\,047\,232 \\ 26\,738^{12} &= 133\ \ 520\ \ 216\ 364\,916\,426\,693\,628\,684\,651\,292\,845\,019\,114 \\ &\ 826\,485\,600\,256 \end{aligned}$$

$$25\,206^{12} + 26\,104^{12} = 27\,226^{12}$$

Ověření domnělého řešení (2.93)

$$\begin{aligned} 25\,206^{12} + 26\,104^{12} &= 165\ \ 884\ \ 604\ 486\,266\,686\,155\,639\,906\,615\,890\,069\,172\,895 \\ &\ 497\,743\,306\,752 \\ 27\,226^{12} &= 165\ \ 884\ \ 604\ 6927\,43\,447\,655\,395\,374\,474\,655\,588\,407\,720 \\ &\ 184\,221\,208\,576 \end{aligned}$$

$$25\,332^{12} + 25\,423^{12} = 26\,887^{12}$$

Ověření domnělého řešení (2.94)

$$\begin{aligned}25\,332^{12} + 25\,423^{12} &= 142\ 727\ 666\ 875\,505\,234\,259\,172\,312\,395\,748\,563\,694\,243\\ &\quad 780\,794\,501\,697\\ 26\,887^{12} &= 142\ 727\ 666\ 737\,058\,166\,808\,033\,978\,515\,432\,887\,519\,258\\ &\quad 960\,272\,718\,881\end{aligned}$$

$$25\,497^{12} + 26\,540^{12} = 27\,626^{12}$$

Ověření domnělého řešení (2.95)

$$\begin{aligned}25\,497^{12} + 26\,540^{12} &= 197\ 613\ 263\ 548\,924\,263\,800\,600\,260\,782\,589\,599\,293\,391\\ &\quad 152\,202\,049\,441\\ 27\,626^{12} &= 197\ 613\ 263\ 180\,993\,290\,086\,218\,616\,010\,144\,252\,352\,878\\ &\quad 234\,049\,253\,376\end{aligned}$$

$$25\,545^{12} + 26\,016^{12} = 27\,326^{12}$$

Ověření domnělého řešení (2.96)

$$\begin{aligned}25\,545^{12} + 26\,016^{12} &= 173\ 345\ 578\ 497\,551\,499\,461\,357\,763\,971\,469\,066\,761\,074\\ &\quad 705\,250\,893\,281\\ 27\,326^{12} &= 173\ 345\ 578\ 236\,592\,935\,897\,263\,929\,977\,004\,043\,822\\ &\quad 421\,727\,633\,739\end{aligned}$$

$$25\,588^{12} + 26\,182^{12} = 27\,444^{12}$$

Ověření domnělého řešení (2.97)

$$\begin{aligned}25\,588^{12} + 26\,182^{12} &= 182\ 544\ 573\ 303\,577\,591\,276\,158\,609\,939\,594\,050\,281\,184\\ &\quad 312\,043\,180\,032\\ 27\,444^{12} &= 182\ 544\ 573\ 769\,375\,307\,944\,979\,928\,647\,149\,085\,992\,836\\ &\quad 425\,041\,575\,936\end{aligned}$$

$$26\,075^{12} + 27\,802^{12} = 28\,698^{12}$$

Ověření domnělého řešení (2.98)

$$\begin{aligned}26\,075^{12} + 27\,802^{12} &= 312\ 046\ 686\ 3\,57\,660\,581\,423\,602\,712\,230\,571\,822\,438\,682\\ &\quad 956\,575\,917\,521\\ 28\,698^{12} &= 312\ 046\ 686\ 3\,03\,673\,923\,716\,604\,616\,101\,768\,815\,875\,816\\ &\quad 865\,639\,632\,896\end{aligned}$$

$$26\,163^{12} + 26\,428^{12} = 27\,863^{12}$$

Ověření domnělého řešení (2.99)

$$\begin{aligned} 26\,163^{12} + 26\,428^{12} &= \colorbox{yellow}{218 944 731}\,018\,455\,886\,045\,227\,469\,072\,585\,850\,107\,913 \\ &\quad 261\,372\,050\,097 \\ 27\,863^{12} &= \colorbox{yellow}{218 944 731}\,613\,344\,091\,506\,712\,989\,209\,283\,911\,935\,890 \\ &\quad 684\,779\,702\,881 \end{aligned}$$

$$26\,176^{12} + 27\,563^{12} = 28\,570^{12}$$

Ověření domnělého řešení (2.100)

$$\begin{aligned} 26\,176^{12} + 27\,563^{12} &= \colorbox{yellow}{295 748 727}\,726\,396\,212\,021\,729\,746\,144\,361\,601\,498\,288 \\ &\quad 495\,841\,040\,657 \\ 28\,570^{12} &= \colorbox{yellow}{295 748 727}\,432\,779\,802\,701\,696\,655\,117\,739\,522\,312\,801 \\ &\quad 000\,000\,000\,000 \end{aligned}$$

$$26\,181^{12} + 27\,040^{12} = 28\,233^{12}$$

Ověření domnělého řešení (2.101)

$$\begin{aligned} 26\,181^{12} + 27\,040^{12} &= \colorbox{yellow}{256 498 209}\,463\,242\,541\,252\,515\,969\,498\,195\,500\,017\,080 \\ &\quad 589\,296\,052\,561 \\ 28\,233^{12} &= \colorbox{yellow}{256 498 209}\,383\,755\,712\,644\,122\,668\,621\,249\,572\,096\,530 \\ &\quad 738\,890\,017\,761 \end{aligned}$$

$$26\,183^{12} + 26\,767^{12} = 28\,068^{12}$$

Ověření domnělého řešení (2.102)

$$\begin{aligned} 26\,183^{12} + 26\,767^{12} &= \colorbox{yellow}{239 076 899}\,381\,067\,463\,851\,702\,366\,664\,221\,364\,842\,201 \\ &\quad 006\,933\,172\,322 \\ 28\,068^{12} &= \colorbox{yellow}{239 076 899}\,107\,985\,441\,104\,778\,195\,645\,003\,751\,328\,380 \\ &\quad 803\,535\,077\,376 \end{aligned}$$

$$26\,330^{12} + 26\,514^{12} = 27\,995^{12}$$

Ověření domnělého řešení (2.103)

$$\begin{aligned} 26\,330^{12} + 26\,514^{12} &= \colorbox{yellow}{231 721 142}\,518\,025\,032\,606\,913\,826\,659\,056\,576\,466\,768 \\ &\quad 693\,001\,527\,296 \\ 27\,995^{12} &= \colorbox{yellow}{231 721 142}\,955\,038\,461\,516\,073\,359\,291\,320\,068\,005\,296 \\ &\quad 093\,994\,140\,625 \end{aligned}$$

$$26\,359^{12} + 26\,665^{12} = 28\,088^{12}$$

Ověření domnělého řešení (2.104)

$$26\,359^{12} + 26\,665^{12} = 241\ 129\ 195\ 497\,208\,310\,565\,456\,245\,801\,229\,203\,499\,305\,401\,306\,327\,906$$

$$28\,088^{12} = 241\ 129\ 195\ 673\,470\,716\,035\,691\,836\,008\,418\,892\,266\,736\,314\,698\,694\,656$$

$$26\,384^{12} + 27\,062^{12} = 28\,337^{12}$$

Ověření domnělého řešení (2.105)

$$26\,384^{12} + 27\,062^{12} = 268\ 068\ 906\ 852\,230\,340\,113\,175\,788\,051\,222\,835\,136\,834\,387\,704\,614\,912$$

$$28\,337^{12} = 268\ 068\ 906\ 067\,810\,994\,926\,153\,281\,487\,452\,071\,770\,053\,539\,526\,550\,081$$

$$26\,403^{12} + 27\,832^{12} = 28\,838^{12}$$

Ověření domnělého řešení (2.106)

$$26\,403^{12} + 27\,832^{12} = 330\ 812\ 300\ 8\,03\,795\,416\,182\,958\,606\,237\,858\,746\,553\,963\,247\,958\,472\,817$$

$$28\,838^{12} = 330\ 812\ 300\ 8\,78\,911\,998\,476\,031\,743\,759\,510\,149\,939\,466\,506\,524\,102\,656$$

$$26\,519^{12} + 26\,782^{12} = 28\,239^{12}$$

Ověření domnělého řešení (2.107)

$$26\,519^{12} + 26\,782^{12} = 257\ 153\ 098\ 0\,03\,574\,902\,711\,245\,608\,914\,185\,999\,302\,571\,335\,217\,783\,137$$

$$28\,239^{12} = 257\ 153\ 098\,0\,76\,155\,185\,645\,732\,290\,400\,368\,980\,392\,125\,772\,319\,622\,721$$

$$26\,522^{12} + 27\,956^{12} = 28\,967^{12}$$

Ověření domnělého řešení (2.108)

$$26\,522^{12} + 27\,956^{12} = 349\ 013\ 504\ 762\,087\,376\,210\,728\,361\,936\,327\,637\,956\,241\,268\,104\,957\,952$$

$$28\,967^{12} = 349\ 013\ 504\ 847\,534\,810\,442\,027\,746\,482\,306\,046\,720\,828\,504\,214\,668\,961$$

$$26\,596^{12} + 26\,813^{12} = 28\,295^{12}$$

Ověření domnělého řešení (2.109)

$$\begin{aligned} 26\,596^{12} + 26\,813^{12} &= \text{263 339 725}\, 862\,916\,576\,613\,010\,498\,857\,778\,972\,100\,958\\ &\quad 098\,623\,482\,097\\ 28\,295^{12} &= \text{263 339 725}\, 940\,878\,155\,978\,479\,644\,891\,678\,143\,059\,853\\ &\quad 926\,025\,390\,625 \end{aligned}$$

$$26\,596^{12} + 27\,900^{12} = 28\,958^{12}$$

Ověření domnělého řešení (2.110)

$$\begin{aligned} 26\,596^{12} + 27\,900^{12} &= \text{347 714 471}\, 440\,953\,543\,969\,633\,228\,115\,871\,596\,006\,420\\ &\quad 180\,595\,900\,416\\ 28\,958^{12} &= \text{347 714 471}\, 014\,030\,042\,159\,952\,934\,837\,732\,144\,785\,118\\ &\quad 582\,508\,097\,536 \end{aligned}$$

$$26\,626^{12} + 27\,646^{12} = 28\,805^{12}$$

Ověření domnělého řešení (2.111)

$$\begin{aligned} 26\,626^{12} + 27\,646^{12} &= \text{326 298 107}\, 551\,394\,385\,025\,572\,171\,694\,670\,476\,825\,524\\ &\quad 686\,762\,811\,392\\ 28\,805^{12} &= \text{326 298 107}\, 368\,315\,824\,976\,597\,638\,248\,999\,551\,254\,616\\ &\quad 875\,244\,140\,625 \end{aligned}$$

$$26\,687^{12} + 27\,492^{12} = 28\,735^{12}$$

Ověření domnělého řešení (2.112)

$$\begin{aligned} 26\,687^{12} + 27\,492^{12} &= \text{316 908 886}\, 057\,020\,385\,870\,768\,172\,726\,553\,281\,400\,714\\ &\quad 761\,678\,044\,417\\ 28\,735^{12} &= \text{316 908 886}\, 605\,527\,843\,715\,867\,551\,717\,840\,561\,275\,088\\ &\quad 730\,712\,890\,625 \end{aligned}$$

$$27\,178^{12} + 27\,394^{12} = 28\,911^{12}$$

Ověření domnělého řešení (2.113)

$$\begin{aligned} 27\,178^{12} + 27\,394^{12} &= \text{341 002 344}\, 786\,440\,740\,466\,730\,691\,467\,521\,169\,207\,428\\ &\quad 608\,189\,079\,552\\ 28\,911^{12} &= \text{341 002 344}\, 128\,302\,327\,394\,455\,443\,281\,538\,502\,837\,628\\ &\quad 360\,756\,131\,521 \end{aligned}$$

$$27\,442^{12} + 28\,470^{12} = 29\,673^{12}$$

Ověření domnělého řešení (2.114)

$$\begin{aligned} 27\,442^{12} + 28\,470^{12} &= 465\ 948\ 029\ 350\,813\,661\,499\,033\,902\,165\,571\,203\,356\,291 \\ &\quad 572\,529\,831\,936 \\ 29\,673^{12} &= 465\ 948\ 029\ 020\,483\,747\,581\,122\,095\,020\,878\,606\,543\,276 \\ &\quad 902\,991\,661\,921 \end{aligned}$$

$$27\,447^{12} + 28\,484^{12} = 29\,684^{12}$$

Ověření domnělého řešení (2.115)

$$\begin{aligned} 27\,447^{12} + 28\,484^{12} &= 468\ 025\ 024\ 965\,701\,276\,953\,647\,669\,250\,195\,786\,813\,596 \\ &\quad 024\,194\,083\,297 \\ 29\,684^{12} &= 468\ 025\ 024\ 847\,273\,840\,981\,421\,704\,149\,894\,179\,468\,888 \\ &\quad 866\,088\,288\,256 \end{aligned}$$

$$27\,470^{12} + 28\,656^{12} = 29\,804^{12}$$

Ověření domnělého řešení (2.116)

$$\begin{aligned} 27\,470^{12} + 28\,656^{12} &= 491\,241\ 056\ 516\,139\,044\,087\,695\,512\,915\,163\,705\,056\,569 \\ &\quad 778\,168\,7951\,36 \\ 29\,804^{12} &= 491\ 241\ 056\ 483\,938\,819\,647\,987\,279\,673\,803\,937\,358\,201 \\ &\quad 036\,908\,527\,616 \end{aligned}$$

Kód v programu *Phyton*

Fermatovka 2. pokus.py - /Users/adriana.kolarova/Desktop/Diplomka/phyton/...

```
#!/usr/bin/python3

e=12

def cnt_dif(a, b):
	if len(a)!=len(b):
		return 0
	i=0
	for j in range(0, len(a)):
		if a[j]!=b[j]:
			return i
		i=i+1


for a in range(26359, 26666):
	for b in range(a,a+2000):
		print (a, b)
		for c in range(max(a, b), 40000):
			if (cnt_dif(str(a**e+b**e), str(c**e)))>=9:
				print (a, b, c, 'HIT!')
```

Ln: 23 Col: 0

Obrázek 2.1: Kód v programu *Phyton*.

Písmeno e nám v tomto kódu symbolizuje exponent, který při hledání domnělých řešení používáme. písmena a a b jsou členy levé strany. Příkaz range u členu a nám značí rozsah v němž se člen a bude nacházet, pro člen b pak volíme rozsah takový, že bude od hodnoty členu a až po, například, $a + 2\,000$, tedy pokud je hodnota členu $a = 26\,359$, pak pro člen b budeme mít hodnoty v rozmezí následujícího intervalu přirozených čísel $\langle 26\,359; 28\,359 \rangle$. Za hodnotu členu c, nacházející se na pravé straně naší nerovnice pak bereme rozmezí maximální hodnoty členu a nebo b (záleží, který člen je větší) až po námi zvolenou hodnotu, která je na 2.1 rovna 40 000, v předposledním řádku na obrázku můžeme vidět číslo 9, toto číslo můžeme libovolně měnit. Toto číslo nám totiž značí, na kolik míst zleva chceme, aby se nám shodovaly pravá a levá strana nerovnice, čím vyšší číslo zvolíme, tím menší šanci máme, že nalezneme řešení.

Kolik domnělých řešení lze vlastně nalézt?

Domnívám se, že domnělých řešení Velké Fermatovy věty můžeme nalézt nekonečně mnoho, což bych se Vám ráda pokusila dokázat.

Definice *(Definice domnělého řešení Velké Fermatovy věty)*

Nechť a,b,c jsou přirozená čísla a n je přirozené číslo takové, že $n \geq 3$. Označme $\overline{y_i y_{i-1} \cdots y_2 y_1}$ zápis čísla c^n v desítkové soustavě, kde $i \in \mathbb{N}$, $y_i, y_{i-1}, \cdots, y_2, y_1 \in \{0; 1; \cdots; 8; 9\}$ jsou číslice. Označme $\overline{x_j x_{j-1} \cdots x_2 x_1}$ zápis čísla $a^n + b^n$ v desítkové soustavě, kde $j \in \mathbb{N}$, $x_j, x_{j-1}, \cdots, x_2, x_1 \in \{0; 1; \cdots; 8; 9\}$ jsou číslice.

Platí-li, že

$$\begin{aligned} x_j &= y_i \\ x_{j-1} &= y_{i-1} \\ &\vdots \\ x_{j-7} &= y_{i-7} \\ x_{j-8} &= y_{i-8}, \end{aligned}$$

pak čísla a,b,c nazýváme *domnělé řešení Velké Fermatovy věty.*

Věta 1

Pokud jsou čísla a,b,c domnělým řešením Velké Fermatovy věty, pak také čísla a',b',c', pro která platí

$$a' = 10a, \tag{2.117}$$
$$b' = 10b, \tag{2.118}$$
$$c' = 10c, \tag{2.119}$$

jsou domnělým řešením Velké Fermatovy věty.

Důkaz 1

Označme po řadě $\overline{x_j x_{j-1} \cdots x_2 x_1}$ a $\overline{y_i y_{i-1} \cdots y_2 y_1}$ zápis čísel $a^n + b^n$ a c^n v desítkové soustavě, kde $n \in \mathbb{N}$ a zároveň $n \geq 3$, $a,b,c,i,j \in \mathbb{N}$, $x_j, x_{j-1}, \cdots, x_2, x_1, y_i, y_{i-1}, \cdots, y_2, y_1 \in \{0; 1; \cdots; 8; 9\}$ jsou číslice. Předpokládejme, že čísla a,b,c jsou domnělým řešením Velké Fermatovy věty. Chceme dokázat, že čísla a',b',c' definovaná dle vztahů (2.117) – (2.119) jsou také domnělým řešením Velké Fermatovy věty.

S využitím vztahů (2.117) a (2.118) platí, že

$$(a')^n + (b')^n = (10a)^n + (10b)^n = 10^n a^n + 10^n b^n = 10^n (a^n + b^n),$$

což lze v desítkové soustavě zapsat jako

$$\overline{x_j x_{j-1} \cdots x_2 x_1 \underbrace{00 \cdots 00}_{n \text{ nul}}}. \tag{2.120}$$

S využitím vztahu (2.119) platí, že

$$(c')^n = (10c)^n = 10^n c^n,$$

což lze v desítkové soustavě zapsat jako

$$\overline{y_i y_{i-1} \cdots y_2 y_1 \underbrace{00 \cdots 00}_{n \text{ nul}}}. \tag{2.121}$$

Jelikož dle předpokladu jsou čísla a,b,c domnělým řešením Velké Fermatovy věty, pak je definice domnělého řešení Velké Fermatovy věty splněna také pro čísla a',b',c', protože rovnosti v definici jsou splněny v zápisech čísel (2.120) a (2.121).

Tímto bychom považovali větu za dokázanou.

Věta 2

Domnělých řešení Velké Fermatovy věty je nekonečně mnoho.

Důkaz 2

V důkazu Věty 1 je možné zaměnit vztahy (2.117) – (2.119) za

$$\begin{aligned} a' &= 10^k \cdot a, \\ b' &= 10^k \cdot b, \\ c' &= 10^k \cdot c, \end{aligned}$$

kde $k \in \mathbb{N}$, a postupovat v důkazu obdobným způsobem, jako v důkazu prvním.

Pro $\forall k \in \mathbb{N}$ platí, že čísla a',b',c' jsou domnělým řešením Velké Fermatovy věty. Jelikož je k přirozené číslo, kterých je nekonečně mnoho, je nekonečně mnoho též domnělých řešení Velké Fermatovy věty.

Tímto je věta dokázána.

Poznámka

Platnost Věty 2 lze vidět na nalezeném domnělém řešení (2.27) a domnělém řešení (2.2) ze Simpsonových, námi nalezené řešení je desetinásobkem domnělého řešení ze Simpsonových. Kdybychom tato řešení vynásobili číslem 100, 1 000, 10 000 a dalšími přirozenými mocninami čísla 10, dostaneme další domnělá řešení, jelikož číslice na nejvyšších řádech se nám nemění a na nejnižší řády se nám připisuje příslušný počet nul.