

Řízení inverzního kyvadla

Diplomová práce

Studijní program:

N2612 Elektrotechnika a informatika

Studijní obor:

Automatické řízení a inženýrská informatika

Autor práce:

Bc. Martin Frydrych

Vedoucí práce:

Ing. Lukáš Hubka, Ph.D.

Ústav mechatroniky a technické informatiky





Zadání diplomové práce

Řízení inverzního kyvadla

Jméno a příjmení: **Bc. Martin Frydrych**
Osobní číslo: M17000129
Studijní program: N2612 Elektrotechnika a informatika
Studijní obor: Automatické řízení a inženýrská informatika
Zadávací katedra: Ústav mechatroniky a technické informatiky
Akademický rok: **2019/2020**

Zásady pro vypracování:

1. Sestavte simulační model, který bude reprezentovat systém inverzního kyvadla.
2. Popište, parametrizujte a ověřte simulační model na základě měření na reálném systému.
3. Navrhněte řízení inverzního kyvadla tak, aby se kyvadlo bylo schopné dostat z dolní stabilní polohy do horního stacionárního bodu a setrvat v něm. Porovnejte několik (minimálně 2) způsobů řízení v horní poloze.
4. Řídicí algoritmus implementujte a ověřte na reálném zařízení.
5. Upravte simulační model tak, aby reprezentoval inverzní kyvadlo se dvěma články. Navrhněte potřebný hardware pro realizaci druhého článku kyvadla. Zrealizujte a ověřte funkčnost.
6. Prozkoumejte způsoby identifikace, cíle a způsoby řízení dvoučlankového kyvadla.

Rozsah grafických prací:
Rozsah pracovní zprávy:
Forma zpracování práce:
Jazyk práce:

dle potřeby dokumentace
40–50 stran
tištěná/elektronická
Čeština



Seznam odborné literatury:

- [1] LJUNG, Lennart: System Identification: Theory for the User (2nd Edition). Prentice Hall, 1999. ISBN: 0136566952.
- [2] BOUBAKER, O.: The inverted pendulum: A fundamental benchmark in control theory and robotics, International Conference on Education and e-Learning Innovations, Sousse, 2012, pp. 1-6.
- [3] ASTROM, K., J., FURUTA, K.: Swinging up a pendulum by energy control, Automatica, Vol. 36, Is. 2, 2000, s. 287-295, ISSN 0005-1098.

Vedoucí práce:

Ing. Lukáš Hubka, Ph.D.
Ústav mechatroniky a technické informatiky

Datum zadání práce:

10. října 2019

Předpokládaný termín odevzdání:

18. května 2020

prof. Ing. Zdeněk Plíva, Ph.D.
děkan

L.S.

doc. Ing. Milan Kolář, CSc.
vedoucí ústavu

Prohlášení

Prohlašuji, že svou diplomovou práci jsem vypracoval samostatně jako původní dílo s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím mé diplomové práce a konzultantem.

Jsem si vědom toho, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci nezasahuje do mých autorských práv užitím mé diplomové práce pro vnitřní potřebu Technické univerzity v Liberci.

Užiji-li diplomovou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinnosti informovat o této skutečnosti Technickou univerzitu v Liberci; v tomto případě má Technická univerzita v Liberci právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Současně čestně prohlašuji, že text elektronické podoby práce vložený do IS/STAG se shoduje s textem tištěné podoby práce.

Beru na vědomí, že má diplomová práce bude zveřejněna Technickou univerzitou v Liberci v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů.

Jsem si vědom následků, které podle zákona o vysokých školách mohou vyplývat z porušení tohoto prohlášení.

5. května 2020

Bc. Martin Frydrych

Poděkování

Tímto bych rád poděkoval těm, kteří mě podporovali jak při psaní závěrečné tak při samotném studiu. Především bych rád poděkoval vedoucímu práce Ing. Lukáši Hubkovi, Ph.D. za vstřícnost, rady a ochotu během tvorby této práce, dále bych rád poděkoval Ing. Danielu Kajzrovi za úvodní seznámení s přípravkem a vývojovým softwarem, a v neposlední řadě bych rád poděkoval výrobcí PLC systémů B&R, která studentům univerzit zdarma poskytuje školení k jejich produktům.



Abstrakt

Tato diplomová práce se zabývá řízením jednoduchého inverzního kyvadla na vozíku a vytvořením konstrukce pro dvojité inverzní kyvadlo na vozíku. Cílem první části práce je vytvořit model inverzní kyvadla, navrhnout a otestovat dva různé způsoby řízení kyvadla v horním rovnovážném bodě včetně algoritmu pro vyšvihnutí. Pohybové rovnice jsou sestaveny pomocí Lagrangeových rovnic druhého druhu, z nich je následně stanoven nelineární a lineární stavový model, a simulační schéma, popsány jsou zde i různé modely tření. Hodnoty parametrů modelu jsou hledány pomocí numerické optimalizační úlohy. Udržení inverzního kyvadla v horním rovnovážném bodě je řešeno stavovým regulátorem a kaskádním řízením s dvěma PID regulátory. Parametry PID regulátorů jsou vyhledány pomocí nástroje PID Tuner v prostředí MATLAB a numerickou optimalizační úlohou. Parametry stavového regulátoru jsou stanoveny metodou umístění pólů, LQR a numerickou optimalizační úlohou, součástí je i nelineární pozorovatel úhlové rychlosti kyvadla. Algoritmus vyšvihnutí je založen na výpočtu energie kyvadla. Cílem druhé části práce je vytvoření simulačního modelu dvojitého inverzního kyvadla, a fyzické konstrukce dvojitého kyvadla, včetně bezdrátového měřicího modulu úhlu natočení druhého článku kyvadla. Dále jsou zde prozkoumány cíle a způsoby identifikace a řízení.

Klíčová slova

inverzní kyvadlo, kaskádní řízení, stavové řízení, dvojité inverzní kyvadlo, měření úhlu natočení



Abstract

This diploma thesis deals with the control of a single inverted pendulum on a cart and with the creation of a structure for a double inverted pendulum on a cart. The aim of the first part of the work is to create a model of the inverse pendulum, to design and test two different control methods of pendulum at the upper equilibrium point, including the algorithm for swing-up. The equations of motion are compiled using Lagrange equations of the second kind, from which a nonlinear and linear state space model and a simulation scheme are subsequently determined, various friction models are also described here. The values of the model parameters are found using a numerical optimization method. Maintaining the inverse pendulum at the upper equilibrium point is solved by a state space controller and cascade control with two PID regulators. The parameters of PID controllers are found using the PID Tuner tool in the MATLAB environment and using a numerical optimization method. The parameters of the state space controller are determined by the method of pole placement, LQR and numerical optimization method, a non-linear observer of the angular velocity of the pendulum is also a part of it. Swing-up algorithm is based on the calculation of the pendulum energy. The aim of the second part of the work is to create a simulation model of a double inverse pendulum, and the physical construction of a double pendulum, including a wireless measuring module of the angle of rotation for the second part of the pendulum. There are also researched targets and methods of identifying and controlling.

Keywords

inverted pendulum, cascade control, state space control, double inverted pendulum, measuring the angle of rotation



Obsah

ÚVOD	11
1 JEDNODUCHÉ INVERZNÍ KYVADLO	13
1.1 CÍLE ŘÍZENÍ	13
1.2 POPIS PŘÍPRAVKU	13
1.2.1 Konstrukce	13
1.2.2 Elektronika	14
1.2.3 Převod jednotek	16
1.3 MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ MODEL	17
1.3.1 Pohybové rovnice	18
1.3.2 Modely tření	20
1.3.3 Stavový model	22
1.3.4 Simulační schéma	23
1.3.5 Linearizace stavového modelu	24
1.3.6 Parametrizace modelu	26
1.4 ŘÍZENÍ V HORNÍ POLOZE	29
1.4.1 PID regulace	30
1.4.2 Pozorovatel úhlové rychlosti	35
1.4.3 Stavová regulace	37
1.4.4 Porovnání výsledků	40
1.5 VYŠVIHNUTÍ KYVADLA DO HORNÍ POLOHY	41
1.6 SOFTWAREOVÁ REALIZACE	44
2 DVOJITÉ INVERZNÍ KYVADLO	46
2.1 CÍLE ŘÍZENÍ	46
2.2 KONSTRUKCE KYVADLA	47
2.3 MĚŘENÍ ÚHLU NATOČENÍ DRUHÉHO ČLÁNKU KYVADLA	48
2.3.1 Schémata zapojení	48
2.3.2 Konfigurace bezdrátových Bluetooth modulů	50
2.3.3 Program pro vysílání dat z bezdrátového modulu	51
2.3.4 Program pro příjem dat v PLC	52
2.3.5 Ověření funkčnosti zařízení	52
2.4 MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ MODEL	54
2.4.1 Pohybové rovnice	54
2.4.2 Simulační model	56
2.4.3 Parametrizace modelu	57
2.5 ZPŮSOBY ŘÍZENÍ	58



3 ZÁVĚR	60
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY	62
PŘÍLOHY	66
A OBSAH PŘILOŽENÉHO CD	66
B GRAFY VALIDACE PARAMETRIZOVANÝCH MODELŮ	67
C MATICE ŘIDITELNOSTI A POZOROVATELNOSTI JEDNODUCHÉHO INVERZNÍHO KYVADLA	68
D VYJÁDŘENÍ ČLENŮ MATICOVÝCH ROVNIC PRO SYSTÉM DVOJITÉHO KYVADLA .	69

Seznam obrázků

OBR. 1 FOTOGRAFIE PŘÍPRAVKU	14
OBR. 2 SCHÉMA ZAPOJENÍ PŘÍPRAVKU.....	16
OBR. 3 NÁČRT JEDNODUCHÉHO KYVADLA	17
OBR. 4 PRŮBĚHY TŘECÍCH SIL V ZÁVISLOSTI NA RYCHLOSTI POHYBU	21
OBR. 5 SCHÉMA NELINEÁRNÍHO STAVOVÉHO MODELU INVERZNÍHO KYVADLA	23
OBR. 6 SCHÉMATA MODELŮ TŘENÍ	23
OBR. 7 SCHÉMA MODELU TŘENÍ LUĞRE	24
OBR. 8 SIMULAČNÍ SCHÉMA PARAMETRIZACE	27
OBR. 9 POROVNÁNÍ NAMĚŘENÝCH DAT SE SIMULACEMI MODELŮ	29
OBR. 10 SCHÉMA VNITŘNÍHO ZAPOJENÍ PID REGULÁTORU.....	30
OBR. 11 SCHÉMA KASKÁDNÍHO ZAPOJENÍ PID REGULÁTORŮ	32
OBR. 12 VÝSLEDKY PID REGULACE	34
OBR. 13 SCHÉMA NELINEÁRNÍHO STAVOVÉHO POZOROVATELE ÚHLOVÉ RYCHLOSTI	36
OBR. 14 POROVNÁNÍ ODHADNUTÉ ÚHLOVÉ RYCHLOSTI POZOROVATELŮ S ROZDÍLNÝMI PARAMETRY	36
OBR. 15 DETAILNÍ POROVNÁNÍ ODHADOVANÉ ÚHLOVÉ RYCHLOSTI SE SIMULACÍ	39
OBR. 16 VÝSLEDKY STAVOVÉ REGULACE	40
OBR. 17 POROVNÁNÍ VÝSLEDKŮ PID REGULACE A STAVOVÉHO ŘÍZENÍ	41
OBR. 18 VÝSLEDEK VÝŠVIHNUTÍ	43
OBR. 19 ROZVRŽENÍ DÍLČÍCH PROGRAMŮ V CYKLICKÝCH TŘÍDÁCH	45
OBR. 20 RŮZNÉ VARIANTY CÍLŮ ŘÍZENÍ DVOJITÉHO KYVADLA.....	46
OBR. 21 FOTOGRAFIE DVOJITÉHO KYVADLA.....	47
OBR. 22 SCHÉMA BEZDRÁTOVÉHO PŘIJÍMAČE S PŘEVODNÍKEM	49
OBR. 23 SCHÉMA BEZDRÁTOVÉHO MODULU S GYROSKOPEM	50
OBR. 24 POROVNÁNÍ DAT Z INKREMENTÁLNÍHO SNÍMAČE A BEZDRÁTOVÉHO SNÍMAČE.....	53
OBR. 25 DETAIL DAT Z INKREMENTÁLNÍHO A BEZDRÁTOVÉHO SNÍMAČE	53
OBR. 26 NÁČRT DVOJITÉHO INVERZNÍHO KYVADLA	54
OBR. 27 POROVNÁNÍ NAMĚŘENÝCH DAT SE SIMULACEMI DVOJITÉHO KYVADLA	58



Seznam použitých zkratk a termínů

ASCII	Standardizovaná kódová tabulka znaků
Automation Studio	Vývojové prostředí PLC systémů
B&R	Výrobce PLC systémů
Control System Designer	Nástroj prostředí MATLAB k vytváření regulátorů
float	32-bitový datový typ s plovoucí desetinou čárkou
GY-521	Název elektronického gyroskopu
HC-05	Název Bluetooth modulu
I2C	Datová sériová sběrnice
LQR	Linear–quadratic regulator, metoda pro určení parametrů stavového regulátoru
LuGre	Dynamický model tření
MATLAB	Interaktivní programové prostředí pro vědeckotechnické výpočty
MEMS	Mikroelektromechanický systém
PID Tuner	Nástroj prostředí MATLAB k hledání parametrů PID regulátoru
PLC	Programovatelný logický automat
Quantizer	Diskretizační blok nástroje Simulink
Re-Linearize Closed Loop	Nástroj pro vytvoření lineárního modelu v PID Tuneru
RX	Přijímající pin sériového rozhraní
Simulink	Simulační nástroj prostředí MATLAB
ST	Strukturovaný text, programovací jazyk PLC
TX	Vysílací pin sériového rozhraní
Unit	Základní jednotka jakékoliv veličiny PLC
USART	Univerzální synchronní/asynchronní sériové rozhraní



Úvod

Inverzní kyvadlo je slovní spojení, u kterého si spousta lidí bude klást otázky „Co to je?“, „Jak to vypadá?“, „K čemu je to dobré?“ a podobně. Kyvadlo, bez přívlastku inverzní, si umí představit kdokoliv. Je to těleso volně otočné kolem pevné osy, která neprochází jeho těžištěm, definice, jež je dostupná z webových stránek [1]. Kyvadlo bylo v minulosti poměrně užitečným nástrojem. Například v druhé polovině sedmnáctého století vznikly první kyvadlové hodiny. V roce 1851 posloužilo kyvadlo jako přímý důkaz o tom, že se Země otáčí kolem své osy [2]. Lze s ním měřit gravitační zrychlení. Dodnes ho také používají proutkaři a senzibilové [3], avšak z pohledu vědy a techniky je takovéto využití přinejmenším nezajímavé.

Z definice vyplývá, že kyvadlo v gravitačním poli Země visí za pevnou osu tak, že jeho těžiště se nachází pod touto osou. Pokud kyvadlo nevykonává žádný pohyb, což znamená, že střídavě nemění tíhovou potenciální energii na kinetickou a naopak [1], tak se kyvadlo nachází v rovnovážném stavu. V případě, že by na kyvadlo zapůsobila nějaká vnější síla, která by ho vychýlila z tohoto stavu, tak se po určitém čase do tohoto stavu opět vrátí. Tato tvrzení jsou naprosto přirozená, avšak rovnovážné stavy lze nalézt dva, a to za předpokladu, že kyvadlo je tuhé těleso. Poté je možné najít rovnovážný stav takový, při kterém se těžiště kyvadla nachází nad otáčející osou, což lze nazývat jako inverzní kyvadlo. Prakticky je náročné takovýto stav udržet delší dobu, protože i nepatrně velká vnější síla, jako je například vánek větru nebo otřes, může způsobit vychýlení kyvadla a následný pád do dolní rovnovážné polohy.

K tomu, aby inverzní kyvadlo nespadlo, lze zabránit tím, že se aktivně mění poloha pevné osy, vůči které se kyvadlo otáčí. Tento způsob udržení kyvadla si může vyzkoušet kdokoliv. Pokus, při kterém je pevnou osou ruka člověka a kyvadlem je předmět tvaru tyče, například koště, je vhodnou demonstrací inverzního kyvadla. Nutno podotknout, že člověk při troše cviku, umí udržet předmět vzhůru takřka dokonale. Je otázkou, zda je možné tuto schopnost naučit nějaký stroj, který by byl řízen výpočetní technikou. Pokud ano, je zde další otázka, zda by bylo možné tuto znalost smysluplně využít v praxi. Například v článku [4] jsou zmínky o možném využití při vzletu vesmírné rakety nebo pro její balancování během přemísťování na odpalovací rampu, dále pak je zde uvedeno využití pro



různé chodící humanoidní roboty. V článku [5] je, kromě robotů, navíc zmíněn osobní přepravní prostředek segway.

Inverzní kyvadlo je však především populárním příkladem nestabilního systému, jenž se využívá ve výukových předmětech zabývajících se automatickým řízením. Dalšími nestabilními systémy jsou například balistická raketa, některé vojenské stíhací letouny, určité druhy chemických reakcí v reaktorech a magnetická levitace ocelové kuličky [6]. Oproti zmíněným nestabilním systémům lze inverzní kyvadlo poměrně snadno a levně zkonstruovat. Způsoby řízení inverzního kyvadla jsou řešeny v mnoha akademických pracích, jejich částečný výčet lze nalézt v člancích [7] a [5].

Z praktického pohledu je nalezení funkčního způsobu řízení inverzního kyvadla poměrně složitým úkolem, neboť pro tento typ systému nelze použít zcela běžné metody návrhu regulátorů. Důvodem je jednak výše zmíněná nestabilita, a také problematická říditelnost více cílů pomocí jednoho ovládacího prvku. Nalezení použitelných regulátorů pro řízení inverzního kyvadla a jeho vyšvihnutí je hlavním cílem první části této diplomové práce. Myšlenku tohoto systému lze dále rozvíjet a zesložitovat, a to například tím, že na volný konec kyvadla se umístí další otočné kyvadlo. Touto variantou se zabývá druhá část práce, která se zaměřuje především na jeho konstrukci, dále na problematické měření úhlu natočení druhého článku kyvadla a na cíle a způsoby řízení.



1 Jednoduché inverzní kyvadlo

Pojem „jednoduché“ je zde použit zcela záměrně, protože jak je naznačeno v úvodu práce, tak lze tento příklad nestabilního systému dále rozšiřovat a zesložitovat, a to například tím, že se buď na vozík anebo kyvadlo přidá další volně otočné kyvadlo. Úvahy o řízení kyvadla s dvěma články jsou uvedeny v další části práci, k tomu je však nutné mít znalosti i o jednoduché variantě inverzního kyvadla. To poskytuje právě tato kapitola, v které je cílem navrhnout a otestovat řízení jednoduchého inverzního kyvadla dvěma způsoby včetně algoritmů pro vyšvihnutí kyvadla do horní rovnovážné polohy. Součástí je také nalezení matematicko-fyzikálního modelu. Snahou je, aby uvedená řešení byla, co nejvíce obecná, a to z důvodu aplikovatelnosti i na inverzní kyvadla s jinými parametry.

1.1 Cíle řízení

Před návrhem řízení je vhodné definovat cíle, kterých by mělo být dosaženo. Primárním úkolem navrhovaného řešení je především udržení kyvadla ve vzpřímené poloze. Další požadavky na regulaci lze postupně přidávat, jak je naznačeno v literatuře [4]. Reálný přípravek má omezenou dráhu, vozík by tedy při regulaci ve vzpřímené poloze neměl vyjet mimo toto omezení. Dalším stupněm vývoje je udržení vozíku v blízkosti konkrétní polohy, která se může na základě příkazu od uživatele měnit. Algoritmy řízení by dále měly umět vyšvihnout kyvadlo z dolní polohy do horní, a to včetně respektování veškerých omezení, což je pomyslný vrchol v rámci regulace inverzního kyvadla.

1.2 Popis přípravku

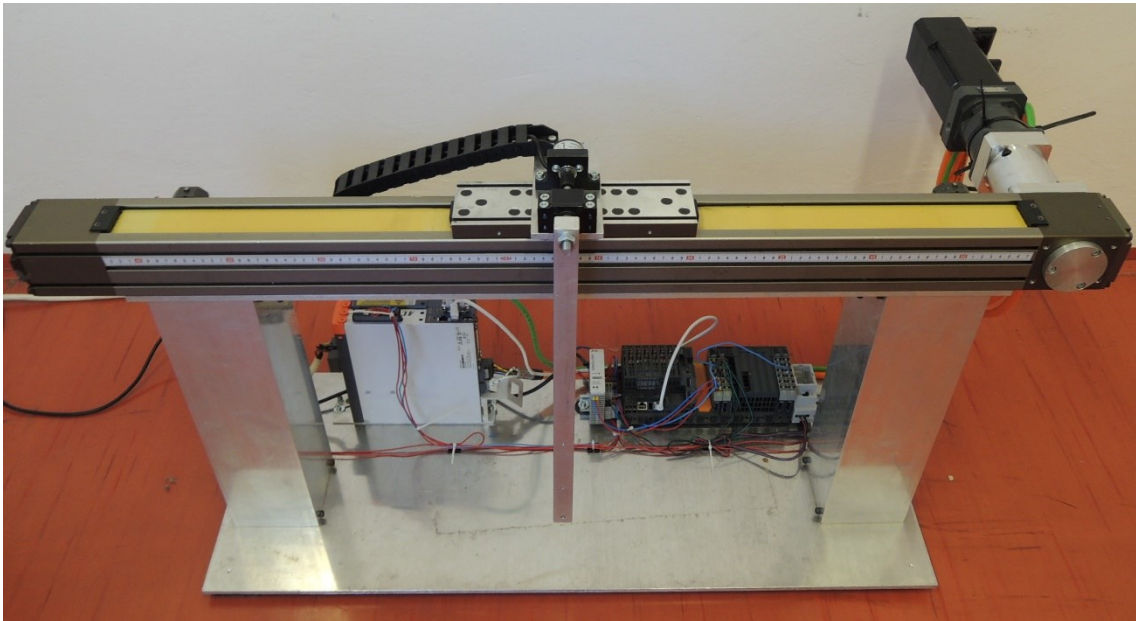
Pro návrh funkční regulace je nutné brát v úvahu parametry a omezení reálného přípravku. Dále z jakých částí se přípravek skládá, jak je zapojená elektronika, nebo jaké jsou nároky na napájení přípravku.

1.2.1 Konstrukce

Velice pevná a tuhá konstrukce se skládá ze silných hliníkových plátů a dutých čtvercových hranolů, na které je upevněn hliníkový profil s integrovaným lineárním vedením. Pohyb vozíku v lineárním vedení zajišťuje ozubený řemen. Profil s lineárním vedením má na obou koncích kryté řemenice, kde na jedné z nich je dále připevněn synchronní motor s planetovou převodovkou o převodovém poměru 5. Motor s produktovým číslem 8LSA35.EA030D000 0 má jmenovitý moment $2,1 \text{ Nm}$, jmenovité otáčky 3000 ot/min a jmenovitý proud $1,44 \text{ A}$.



Zásadním limitem pro regulaci je omezená délka dráhy, po které se může vozík pohybovat, ta činí 70 cm. Celkové rozměry přípravku jsou 122 cm na šířku, 63 cm na výšku a 62 cm do hloubky, přičemž osa otáčení kyvadla je ve výšce 58,4 cm od spodní konstrukce přípravku. Tělo kyvadla tvoří hliníkový hranol o délce 49,4 cm čtvercové postavy s šířkou hrany 20 mm a váze 663 g, v něm jsou dále vytvořeny díry se závity pro připevnění závaží, jenž poslouží k testování robustnosti řízení. Fotografie přípravku zobrazuje obrázek 1.



Obr. 1 Fotografie přípravku

1.2.2 Elektronika

Hlavním řídicím členem elektroniky je PLC *X20 System 1585* s procesorem *Intel Atom* s taktem 1 GHz od výrobce *B&R*. PLC má několik rozhraní pro komunikaci, těmi důležitými pro tento projekt je ethernetový port pro připojení do běžné počítačové sítě, dále průmyslová sběrnice *POWERLINK*, *X2X Link* pro připojení rozšiřujících modulů a sériový port *RS 232*. Důležitým parametrem číslicového řízení je perioda vzorkování, ta závisí na době cyklu automatu, která je nastavitelná. Nicméně v případě připojeného frekvenčního měniče *ACOPOS* závisí doba cyklu na rychlosti komunikace po sběrnici *POWERLINK*, ta je pro toto zařízení pevně dána a činí 400 μ s. Jakýkoliv celý násobek této hodnoty lze zvolit jako vzorkovací periodu systému, pro tento systém byla zvolena vzorkovací perioda 4 ms.



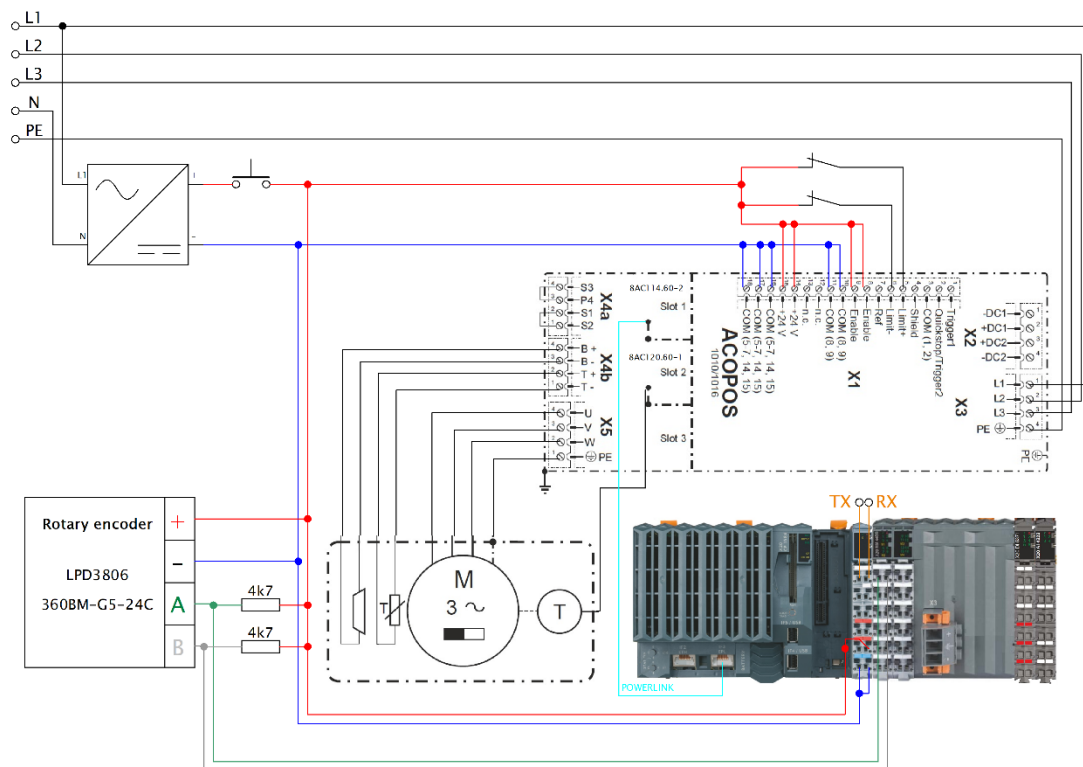
Pro měření úhlu natočení kyvadla je použit inkrementální rotační snímač *LPD3806 360BM G5 24C*, jenž generuje na svých výstupech celkem 1440 náběžných a sestupných hran na jednu otáčku, proto minimální rozlišovací schopnost činí 0,25°. Čidlo je vhodné zapojit do speciálních rozšiřujících modulu, které v sobě mají zabudovaný čítač. V tomto případě je užit modul *X20MM4456*, který je primárně určen k napájení krokových motorů, nicméně i tento rozšiřovací modul obsahuje potřebný čítač. Výstupy čidla lze zapojit i do klasických digitálních vstupů, ale čítač by musel být řešen softwarově.

Frekvenční měnič *ACOPOS 1016* je napájen z běžné třífázové napájecí soustavy s efektivním napětím 400 V a jeho maximální odebíraný zdánlivý výkon je 2,1 kVA. Celkové schéma zapojení včetně koncových dorazů, které jsou tvořeny rozpínacími kontakty, je na obrázku 2. Seznam použitých elektrických zařízení je v tabulce 1, kde jsou uvedeny navíc rozšiřující moduly, které jsou zde připraveny pro případné připojení dalších měřících zařízení.

Tabulka 1 Seznam použité elektroniky

Obecný název	Označení výrobce
Programovatelný logický automat X20 System	X20CP1585
Rozšiřující I/O modul – řadič pro 4 krokové motory s měřícími vstupy pro inkrementální čidla	X20MM4456
Rozšiřující I/O modul – 6 digitálních vstupů	X20DI6371
Rozšiřující I/O modul – 4 analogové vstupy	X20AI4222
Frekvenční měnič ACOPOS pro servopohony	8V1016.00-2
Rozšiřující ACOPOS modul – Komunikační sběrnice POWERLINK	8AC114.60-2
Rozšiřující ACOPOS modul – Enkodér rotačního snímače EnDat	8AC120.60-1
Inkrementální rotační snímač	LPD3806-360BM-G5-24C
Napájecí zdroj 24 V Phoenix Contact	UNO-PS/1AC/24DC/30W





Obr. 2 Schéma zapojení přípravku

1.2.3 Převod jednotek

Frekvenční měnič společně s PLC mají své vlastní jednotky pro polohu a rychlost označované jako *Unit* případně *Unit/s*, kde převodní konstanty jsou různé pro veličiny spojené s kyvadlem a s vozíkem. Existují dvě možnosti, jak tuto vlastnost řešit, buď se návrh řízení včetně parametrů modelu převede do odpovídajících jednotek, nebo se na začátku každého cyklu automatu převedou hodnoty měření veličin do jednotek soustavy *SI* a opačný převod se uskuteční pro výstupní veličiny na konci cyklu automatu. Pokud by se použila první varianta, tak by se všechny parametry modelu musely připočítat a výsledné hodnoty by vůbec neodpovídaly realitě. Proto se užije druhá varianta, pro kterou je nutné nalézt převodní konstanty.

Převodní poměr pro veličiny úhlu kyvadla a úhlové rychlosti, případně zrychlení, je naznačen v předchozím článku. Pokud se veličina úhlu kyvadla v jednotkách *Unit* změní o 1, pak se hodnota ve stupních změní o 0,25, v radiánech o $(1/720)\pi$, převodní vztahy jsou uvedeny v rovnicích (1.1). V simulaci lze tuto vlastnost simulovat pomocí bloku *Quantizer*, který je použit, na výstupu úhlu natočení z modelu. Uvedené rovnice jsou



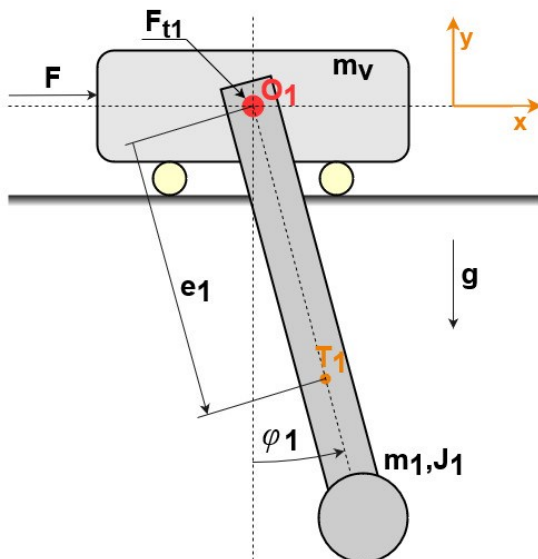
totožné pro úhlovou rychlost a zrychlení, ve vztazích lze tedy symbol φ zaměnit za symbol ω , případně ε .

$$\begin{aligned} \varphi_{Deg} &= \varphi_{Unit} \cdot 0,25 & \varphi_{Unit} &= \varphi_{Deg} \cdot 4 \\ \varphi_{Rad} &= \varphi_{Unit} \cdot (\pi/720) & \varphi_{Unit} &= \varphi_{Rad} \cdot (720/\pi) \\ \varphi_{Rad} &= \varphi_{Deg} \cdot (180/\pi) & \varphi_{Deg} &= \varphi_{Rad} \cdot (\pi/180) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Podobnou tabulku převodních hodnot lze sestavit i pro polohu, rychlost a zrychlení vozíku, nicméně převodní konstanty jsou dosti odlišné. Pro jejich získání je vhodné vytvořit jednoduchý měřicí experiment, při kterém se za pomoci vývojového prostředí PLC změní poloha vozíku. Z hlediska přesnosti měření, je žádoucí využít celou dráhu přípravku, tedy 70 cm. Z vývojového prostředí se následně vyčte hodnota v *Unitech*, která byla potřeba pro ujetí takovéto vzdálenosti, ta činí 17089 *Unit*. Prostou trojčlenkou lze získat převodní konstanty pro převod mezi metry a *Unity*, vztahy se zaokrouhlením jsou uvedeny v rovnicích (1.2). Obdobně jako v případě úhlu kyvadla, lze zaměnit dráhu x za rychlost v nebo zrychlení a .

$$x_{Metr} \doteq x_{Unit} \cdot (1/24412,86) \quad x_{Unit} \doteq x_{Metr} \cdot 24412,86 \quad (1.2)$$

1.3 Matematicko-fyzikální model



Obr. 3 Náčrt jednoduchého kyvadla

Tato kapitola se zabývá matematickým popisem systému inverzního kyvadla, jehož náčrt je zobrazen na obrázku 3. Na ilustraci jsou vyobrazeny důležité parametry a veličiny, jako je hmotnost vozíku m_V , hmotnost kyvadla m_1 , moment setrvačnosti J_1 , vzdálenost těžiště (T_1) od osy otáčení (O_1) e_1 , tíhové zrychlení g a třecí síla zde obecně označená jako $F_{t1}(t)$. Časové proměnnými veličinami popisující stav systému jsou úhel natočení kyvadla $\varphi_1(t)$, jeho úhlová rychlost $\omega_1(t)$ a úhlové zrychlení $\varepsilon_1(t)$, dále poloha,



rychlost a zrychlení vozíku vůči vodorovné ose $x_0(t)$ a $v_0(t)$ a $a_0(t)$. Veličinou zajišťující pohyb vozíku je síla $F(t)$.

Souřadný systém je převzat z knihy [8], kde nulový úhel natočení kyvadla se nachází v dolní rovnovážné poloze. Ve spoustě publikací, které se zabývají tématem inverzního kyvadla, je nulový úhel natočení kyvadla volen v horní rovnovážné poloze. V případě, že se kyvadlo pohybuje vpravo od nulového úhlu, jak naznačuje obrázek 3, tak úhel a úhlová rychlost mají kladnou hodnotu. Stejně určení kladného směru platí i polohu a rychlost vozíku, pohybuje-li se vozík vpravo, narůstá poloha do kladných hodnot.

1.3.1 Pohybové rovnice

Pohybové rovnice jsou obvykle diferenciální rovnice druhého řádu, díky kterým lze popsat pohyby zkoumaných těles včetně působení různých silových účinků a respektování mechanických vazeb mezi tělesy. Možností, jak sestavit pohybové rovnice, je více. Základní metodou je použití zákonů klasické mechaniky, což má však řadu nevýhod. Často užívaným způsobem, jak získat pohybové rovnice inverzního kyvadla, jsou tzv. Lagrangeovy rovnice druhého druhu (1.3), kde N je počet zobecněných souřadnic, $q_1(t)$ až $q_N(t)$ jsou zobecněné souřadnice, $E_k(t)$ kinetická energie systému, $E_p(t)$ potenciální energie a $Q_1(t)$ až $Q_N(t)$ jsou zobecněné síly [8]. Tečka nad zobecněnou souřadnicí v prvním členu říká, že se jedná o časovou derivaci této souřadnice, příkladem může být například rychlost $v_0(t)$, kterou lze psát jako časovou derivaci polohy $\dot{x}_0(t)$.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k(t)}{\partial \dot{q}_n(t)} \right) - \frac{\partial E_k(t)}{\partial q_n(t)} + \frac{\partial E_p(t)}{\partial q_n(t)} = Q_n(t), \quad n = 1, \dots, N \quad (1.3)$$

Zobecněné souřadnice jsou vhodně zvolené libovolné parametry, které jednoznačně popisují všechny možné konfigurace systému [9]. V případě systému inverzního kyvadla jsou jednoznačnými parametry úhel natočení kyvadla a poloha vozíku. Postup, který se nachází v literatuře [9], se ve zjednodušené formě užije následovně. Vyjádří se kartézské souřadnice zájmových těles pomocí zobecněných souřadnic, následně se derivací dle času vypočítají kartézské rychlosti. V případě vozíku je vyjádření jednoduché, protože jeho poloha se rovná zobecněné souřadnici. Pro těžiště kyvadla jsou kartézské souřadnice a rychlosti uvedeny v rovnicích (1.4) a (1.5).



$$x_{T1}(t) = x_0(t) + e_1 \cdot \sin \varphi_1(t), \quad y_{T1}(t) = -e_1 \cdot \cos \varphi_1(t) \quad (1.4)$$

$$\dot{x}_{T1}(t) = \dot{x}_0(t) + e_1 \cdot \dot{\varphi}_1(t) \cdot \cos \varphi_1(t), \quad \dot{y}_{T1}(t) = e_1 \cdot \dot{\varphi}_1(t) \cdot \sin \varphi_1(t) \quad (1.5)$$

Dále se určí kinetická energie celého systému, ta se skládá z dílčích energií jednotlivých těles. Velikost kinetické energie posuvného pohybu závisí na hmotnosti tělesa a rychlosti, kterou se těleso pohybuje, viz rovnice (1.6). V případě rotačního pohybu se velikost energie určí z momentu setrvačnosti a úhlové rychlosti, rovnice (1.7).

$$E_{kPosuvný}(t) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2(t) \quad (1.6) \quad \left| \quad E_{kRotační}(t) = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2(t) \quad (1.7)$$

V rovnici (1.8) je celková kinetická energie dána součtem třech složek, kde první složka představuje kinetickou energii vozíku, druhá kinetickou energii kyvadla při posuvném pohybu těžiště vůči kartézským souřadnicím. Na základě tzv. Königovy věty je k celkové energii připočtena složka rotačního pohybu kyvadla.

$$E_{k1}(t) = \frac{1}{2} \cdot m_V \cdot \dot{x}_0^2(t) + \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot [\dot{x}_{T1}^2(t) + \dot{y}_{T1}^2(t)] + \frac{1}{2} \cdot J_1 \cdot \omega_1^2(t) \quad (1.8)$$

Další částí Lagrangeových rovnic je parciální derivace potenciální energie dle zobecněné souřadnice. Tato energie zohledňuje působení zemské gravitace a závisí na gravitačním zrychlení, hmotnosti tělesa a jeho relativní vzdálenosti od Země. Jedinou částí systému, která přispívá k potenciální energii, je kyvadlo, a to za předpokladu, že vozík se pohybuje kolmo vzhledem ke směru působení gravitačního zrychlení. Jediným proměnou veličinou, jenž vstupuje do výpočtu této energie, je dle rovnice (1.9) úhel natočení kyvadla. Ten společně s parametrem e_1 reflektuje výše zmíněnou relativní vzdálenost.

$$E_{p1}(t) = -m_1 \cdot e_1 \cdot g \cdot \cos \varphi_1(t) \quad (1.9)$$

Nyní se dosadí kartézské rychlosti (1.5) do rovnice (1.8), a ta společně s rovnicí (1.9) do rovnice (1.3). Po výpočtu parciálních a časových derivací a úpravě výsledků, při kterých se některé členy vyruší, vzniknou pohybové rovnice. Za zobecněné síly se v případě pohybové rovnice vozíku (1.10) dosadí vnější síla F a do pohybové rovnice kyvadla (1.11) obecná třecí síla F_{t1} se záporným znaménkem, protože tato síla vždy působí proti směru pohybu kyvadla.



$$(m_V + m_1) \cdot \ddot{x}_0(t) + m_1 e_1 \cdot [\ddot{\varphi}_1(t) \cdot \cos \varphi_1(t) - \dot{\varphi}_1^2(t) \cdot \sin \varphi_1(t)] = F(t) \quad (1.10)$$

$$(m_1 e_1^2 + J_1) \cdot \ddot{\varphi}_1(t) + m_1 e_1 \cdot [\ddot{x}_0(t) \cdot \cos \varphi_1(t) + g \cdot \sin \varphi_1(t)] = -F_{t1}(t) \quad (1.11)$$

Pokud by tyto pohybové rovnice vznikaly za použití klasických zákonů mechaniky, tak zvýrazněná část v rovnici (1.10) by vznikla mimo jiné například aplikací třetího Newtonova zákona, známého též jako zákon akce a reakce. V případě, že se vozík může volně pohybovat po své dráze, tak pohyb kyvadla zapříčiní i pohyb vozíku, jeho reakci pohybu matematicky popisuje zvýrazněná část. Většina reálných přípravků je však postavená tak, že vozík je mechanicky pevně spjat s elektrickým pohonem. Ten je standardně ovládán tak, aby sledoval buď žádanou polohu nebo rychlost. To obecně významným způsobem zjednodušuje práci s pohonem jako takovým, a zároveň v tomto případě z rovnice (1.10) odstraňuje zvýrazněnou část. Zbylou část lze přepsat do rovnice (1.12), kde vstupní síla $F(t)$ je nahrazena vstupním zrychlením $u(t)$. Tato úprava odstraní z popisu systému parametr m_V , jenž je nadbytečný.

$$\ddot{x}_0(t) = u(t) \quad (1.12)$$

1.3.2 Modely tření

Tato část práce vznikla především na základě významných nepřesností mezi měřeními daty a simulacemi získaných modelů, kdy na reálném systému dochází k rychlejšímu ustálení úhlu natočení kyvadla. Zároveň toto téma není dostatečně zmíněno ani řešeno v jiných zdrojích, které se zabývají inverzním kyvadlem. Obvykle se tření modeluje jako lineární závislost na úhlové rychlosti kyvadla, avšak tato aproximace není dostatečná. Cílem je na tuto skutečnost poukázat, a zároveň navrhnout jiné možnosti, jak věrohodně napodobit tlumení, které vzniká v důsledku tření.

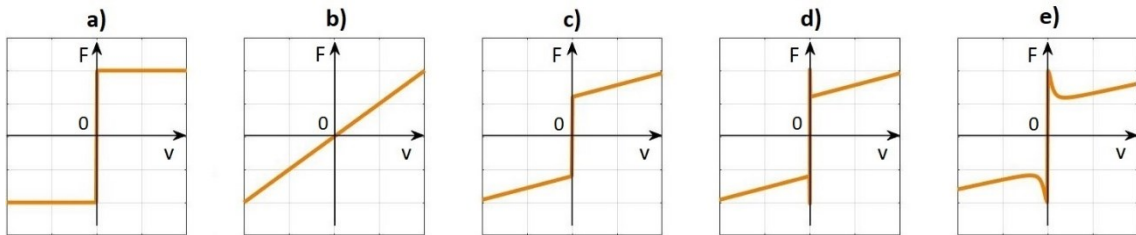
Velice vhodným zdrojem informací k tomuto tématu jsou elektronická skripta [10], ze kterých se v této práci vychází. Nejjednodušším modelem je smykové tření označovaného také jako Coulombovské tření, kde velikost třecí síly je konstantní a nezávisí na velikosti rychlosti, ale jen na jeho směru, graficky znázorněno na obrázku 4a. Lineární závislost zobrazuje viskózní tření obrázek 4b, tento způsob modelování je nejčastěji používán při popisu inverzního kyvadla. Součet těchto třecích sil zobrazuje graf na obrázku 4c a matematický zápis je uveden v rovnici (1.13), kde konstanta F_C je velikostí Coulombovské třecí síly a F_V je parametr lineární závislosti viskózního tření.



$$F_t(t) = F_C \cdot \operatorname{sgn} v(t) + F_V \cdot v(t) \quad (1.13)$$

Dalším rozšířením může být přidání statické třecí síly, která se projevuje při nulové rychlosti, viz obrázek 4d. Statická třecí síla vkládá do matematického vztahu další nespojitost, která je, v případě měnící se orientace rychlosti, obtížně modelovatelná. Důvod je viditelný na grafu, kdy pro rychlost nula by funkce měla mít dvě hodnoty, zápornou a kladnou. Výhodiskem z této nejednoznačnosti je Stribeckova křivka na obrázku 4e, která daleko věrohodněji simuluje závislost tření na rychlosti. V literatuře [10] jsou k dispozici až tři varianty, jak se může tento model matematicky vyjádřit. V této práci je užívána pouze první varianta viz rovnice (1.14), ta je navíc upravena, kde druhý sčítanec se násobí funkcí signum, což zajistí platnost a použitelnost zápisu i pro záporné hodnoty rychlosti. Parametr F_S je hodnota statické třecí síly a v_s je charakteristická rychlost Stribeckovy křivky [10].

$$F_t(t) = F_C \cdot \operatorname{sgn} v(t) + \frac{(F_S - F_C)}{1 + (v(t)/v_s)^2} \cdot \operatorname{sgn} v(t) + F_V \cdot v(t) \quad (1.14)$$



Obr. 4 Průběhy třecích sil v závislosti na rychlosti pohybu

Stribeckova křivka se řadí mezi komplexní modely tření platící pro ustálený stav. Pro popis tření neustáleného systému existují dynamické modely, ty jsou však poměrně velice složité. Jedním z jednodušších modelů, je takzvaný LuGre model, který oproti výše zmíněným modelům navíc zahrnuje například třecí paměť nebo zvyšující se statické tření. Nevýhodou modelu je větší počet parametrů a přidání jedné stavové proměnné χ . Tření dle LuGre modelu popisuje rovnice (1.15) společně se stavovou rovnicí (1.16), kde σ_0 popisuje tuhost a σ_1 mikro posun [11].

$$F_t = \sigma_0 \cdot \chi(t) + \sigma_1 \cdot \dot{\chi}(t) + F_V \cdot v(t) \quad (1.15)$$



$$\dot{\chi}(t) = v(t) - \frac{\sigma_0}{F_C + (F_S - F_C) \cdot e^{-(v(t)/v_s)^2}} \cdot \chi(t) \cdot |v(t)| \quad (1.16)$$

1.3.3 Stavový model

Hlavní myšlenkou stavového modelu je převést systém, který je popsán pomocí diferenciálních rovnic libovolného řádu, do soustavy diferenciálních rovnic prvního řádu. Obecný zápis stavové rovnice včetně výstupní rovnice je v (1.17), kde $\mathbf{u}(t)$ je vstupní vektor, $\chi(t)$ je vektor stavových veličin a $\mathbf{y}(t)$ je výstupní vektor, v případě, že se jedná časově invariantní neboli v čase neměnný systém, tak se rovnice zapíše bez zvýrazněné časové proměnné.

$$\begin{aligned} \dot{\chi}(t) &= \mathbf{f}(\chi(t), \mathbf{u}(t), t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}(\chi(t), \mathbf{u}(t), t) \end{aligned} \quad (1.17)$$

Pro systém inverzního kyvadla odpovídá počet stavových veličin součtu řádů jednotlivých pohybových rovnic. Korespondence mezi proměnnými v pohybových rovnicích a stavovými veličinami je zapsán v rovnici (1.18).

$$\begin{aligned} \chi_1(t) &= x_0(t) & \chi_3(t) &= \varphi_1(t) \\ \dot{\chi}_1(t) &= \chi_2(t) = \dot{x}_0(t) = v_0(t) & \dot{\chi}_3(t) &= \chi_4(t) = \dot{\varphi}_1(t) = \omega_1(t) \\ \dot{\chi}_2(t) &= \ddot{x}_0(t) = a_0(t) & \dot{\chi}_4(t) &= \ddot{\varphi}_1(t) = \varepsilon_1(t) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Nyní je možné vyjádřit pohybové rovnice pomocí stavových veličin a v tomto případě jediné vstupní veličiny, kterou je zrychlení $u(t)$, výsledek je v rovnicích (1.19) a (1.20). Za třetí sílu se mohou dosadit výrazy uvedené v kapitole 1.3.2, kde za rychlost $v(t)$ se dosadí stavová veličina odpovídající úhlové rychlosti kyvadla. Pro model LuGre se navíc zavede další stavová veličina a stavová rovnice.

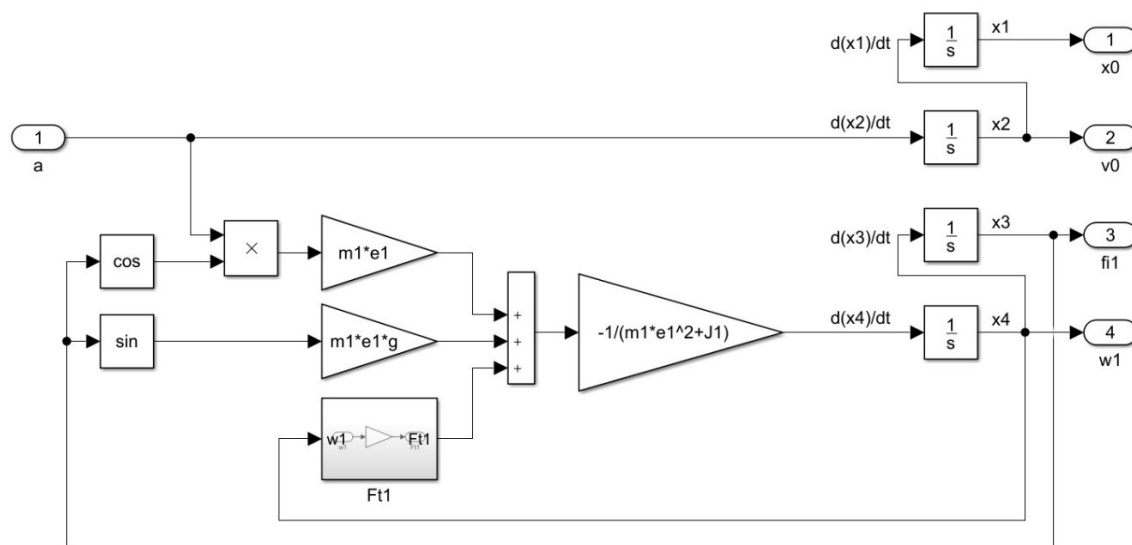
$$\dot{\chi}_2(t) = u(t) \quad (1.19)$$

$$\dot{\chi}_4(t) = \frac{-1}{m_1 e_1^2 + J_1} [m_1 e_1 u(t) \cos \chi_3(t) + m_1 e_1 g \sin \chi_3(t) + F_{t1}(t)] \quad (1.20)$$

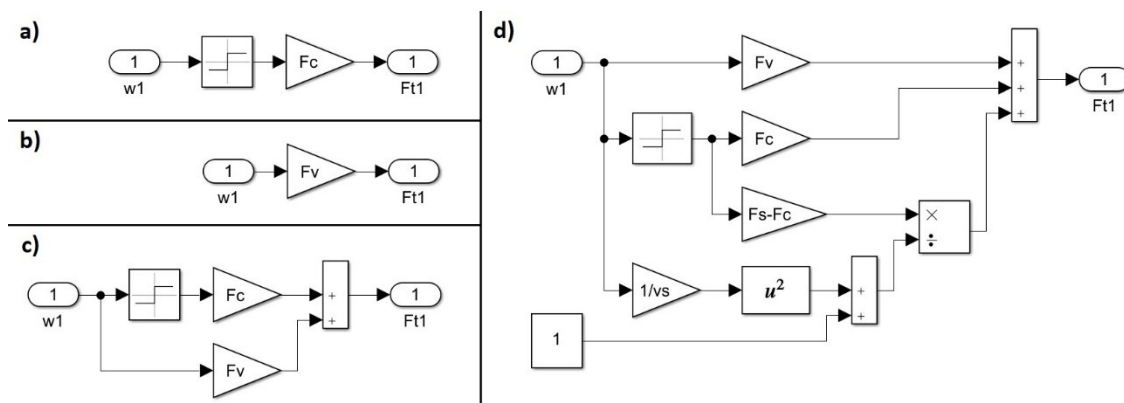


1.3.4 Simulační schéma

Nakreslené simulační schéma nelineárního stavového modelu na obrázku 5 odpovídá stavovým rovnicím (1.18), (1.19) a (1.20). Vzhledem k různým způsobům reprezentace tření, je tato část simulačního modelu vytvořena za pomoci subsystemů. Vnitřní uspořádání tohoto bloku závisí na zvoleném modelu tření. Na obrázku 6 jsou ukázány schémata modelů Coulombovského tření, viskózního tření, jejich součtu a model Stribeckovy křivky. Model LuGre je samostatně na obrázku 7.

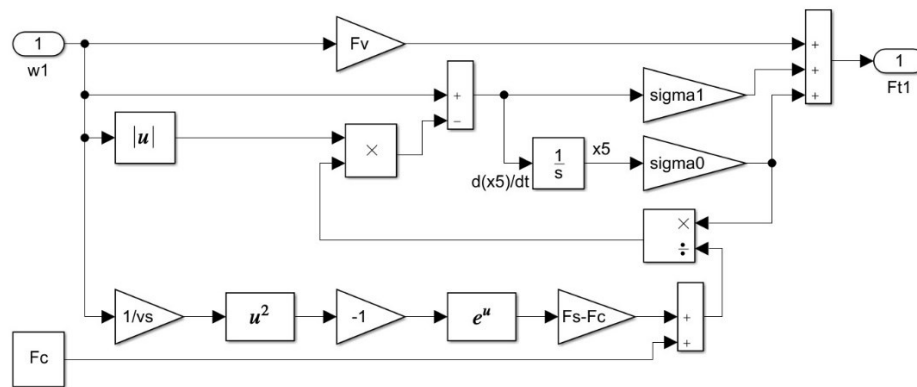


Obr. 5 Schéma nelineárního stavového modelu inverzního kyvadla



Obr. 6 Schémata modelů tření





Obr. 7 Schéma modelu tření LuGre

1.3.5 Linearizace stavového modelu

Mnoho metod pro získání parametrů lineárních regulátorů vyžaduje, aby popisovaný systém nebo model byl lineární neboli, aby matematický popis systému měl nějaký standardizovaný tvar. V případě lineárního stavového popisu se jedná o rovnice (1.21), kde \mathbf{A} je matice systému, \mathbf{B} matice buzení, \mathbf{C} výstupní matice a \mathbf{D} převodní matice.

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}(t) = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\chi}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t) \quad (1.21)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\chi}(t) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}(t)$$

Linearizace stavového modelu je možnost, jak lze pro nějaký konkrétní rovnovážný bod tento popis systému získat. Pojem rovnovážný bod byl v rámci této práce užit již vícekrát a lze ho definovat jako stav, ve kterém systém setrvává neboli, stavová rovnice (1.22) se musí rovnat nule.

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}(t) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (1.22)$$

Pro model inverzního kyvadla existují dva rovnovážné body, při kterém se všechny stavové veličiny a hodnota vstupu rovná nule kromě úhlu natočení kyvadla. Ten může nabývat hodnotami 0 nebo π , přičemž celé násobky této hodnoty vyjadřují tytéž stavy systému. Značení vektoru stavových veličin a vstupu včetně dosazených hodnot rovnovážného bodu pro horní polohu kyvadla je v rovnicích (1.23), dále značeno jako nulový bod $\vec{\mathbf{0}}$.

$$\boldsymbol{\chi}_E = [0, 0, \pi, 0]^T \quad \mathbf{u}_E = [0] \quad (1.23)$$



Linearizace spočívá v zápisu funkce pomocí Taylorova rozvoje, kde se využijí pouze jeho konstanty a lineární členy, které vytváří dynamiku modelu. Teorie a postup výpočtu včetně obecných zápisů rovnic je uveden v literatuře [12]. V rámci této práce se využije výsledný vztah o tom, jak sestavit a vypočítat matice \mathbf{A} a \mathbf{B} . Lineární stavové rovnice se rovnají součtu třech členů, kde prvním členem jsou konstanty, které vzniknou při dosazení nulového bodu do funkce. Druhým členem je součin matice \mathbf{A} a stavového vektoru, kde se tato matice skládá z parciálních derivací stavových rovnic podle stavových veličin. Do výsledku parciálních derivací se následně dosazuje nulový bod. Součástí třetího součinu je vstupní veličina a matice buzení \mathbf{B} s jedním sloupcem, ta je také sestavena z parciálních derivací, viz rovnice (1.24).

$$\begin{bmatrix} \dot{\chi}_1(t) \\ \dot{\chi}_2(t) \\ \dot{\chi}_3(t) \\ \dot{\chi}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\chi}_1(\vec{\mathbf{0}}) \\ \dot{\chi}_2(\vec{\mathbf{0}}) \\ \dot{\chi}_3(\vec{\mathbf{0}}) \\ \dot{\chi}_4(\vec{\mathbf{0}}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial \dot{\chi}_1}{\partial \chi_1} \right|_{\vec{\mathbf{0}}} & \left. \frac{\partial \dot{\chi}_1}{\partial \chi_2} \right|_{\vec{\mathbf{0}}} & \left. \frac{\partial \dot{\chi}_1}{\partial \chi_3} \right|_{\vec{\mathbf{0}}} & \left. \frac{\partial \dot{\chi}_1}{\partial \chi_4} \right|_{\vec{\mathbf{0}}} \\ \left. \frac{\partial \dot{\chi}_2}{\partial \chi_1} \right|_{\vec{\mathbf{0}}} & \left. \frac{\partial \dot{\chi}_2}{\partial \chi_2} \right|_{\vec{\mathbf{0}}} & \left. \frac{\partial \dot{\chi}_2}{\partial \chi_3} \right|_{\vec{\mathbf{0}}} & \left. \frac{\partial \dot{\chi}_2}{\partial \chi_4} \right|_{\vec{\mathbf{0}}} \\ \left. \frac{\partial \dot{\chi}_3}{\partial \chi_1} \right|_{\vec{\mathbf{0}}} & \left. \frac{\partial \dot{\chi}_3}{\partial \chi_2} \right|_{\vec{\mathbf{0}}} & \left. \frac{\partial \dot{\chi}_3}{\partial \chi_3} \right|_{\vec{\mathbf{0}}} & \left. \frac{\partial \dot{\chi}_3}{\partial \chi_4} \right|_{\vec{\mathbf{0}}} \\ \left. \frac{\partial \dot{\chi}_4}{\partial \chi_1} \right|_{\vec{\mathbf{0}}} & \left. \frac{\partial \dot{\chi}_4}{\partial \chi_2} \right|_{\vec{\mathbf{0}}} & \left. \frac{\partial \dot{\chi}_4}{\partial \chi_3} \right|_{\vec{\mathbf{0}}} & \left. \frac{\partial \dot{\chi}_4}{\partial \chi_4} \right|_{\vec{\mathbf{0}}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \chi_1(t) \\ \chi_2(t) \\ \chi_3(t) \\ \chi_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial \dot{\chi}_1}{\partial u} \right|_{\vec{\mathbf{0}}} \\ \left. \frac{\partial \dot{\chi}_2}{\partial u} \right|_{\vec{\mathbf{0}}} \\ \left. \frac{\partial \dot{\chi}_3}{\partial u} \right|_{\vec{\mathbf{0}}} \\ \left. \frac{\partial \dot{\chi}_4}{\partial u} \right|_{\vec{\mathbf{0}}} \end{bmatrix} \cdot u(t) \quad (1.24)$$

Výsledky jednotlivých členů matic jsou trojího typu, může to být buď nula nebo jedna nebo matematický výraz s parametry inverzního kyvadla. V rovnici (1.25) jsou uvedeny výsledky výpočtu jednoho členu matice \mathbf{A} po derivování rovnice (1.20), a po dosazení nulového bodu. Otázkou je, jak pracovat s modelem tření, kde se vyskytuje nespojitá funkce signum? Derivace této funkce z matematického hlediska existuje, funkci signum lze vyjádřit jako dvojnásobek Heavisideovy funkce, známou též jako jednotkový skok, s odečtením jedničky. Výsledek derivace tohoto výrazu je dvojnásobek Diracova jednotkového impulsu, funkce, jež má hodnotu nula pro všechny vstupní argumenty kromě nuly, kde dosahuje hodnoty kladné nekonečno. To je problém, protože pokud by se do tohoto výrazu dosadil nulový bod, tak by jeden člen matice \mathbf{A} byl nekonečno. Takový model není pro simulace a hledání parametrů regulátorů použitelný. Jediný model, který lze smysluplně linearizovat, je tudíž jen ten s viskózním třením. Podobný problém nastává i pro model tření LuGre s absolutní hodnotou, jejíž linearizace by popřela vnitřní zpětnou vazbu.



$$\left. \frac{\partial \dot{\chi}_4}{\partial \chi_3} \right|_{\vec{0}} = \frac{1}{m_1 e_1^2 + J_1} [m_1 e_1 u(t) \sin \chi_3(t) - m_1 e_1 g \cos \chi_3(t)] \Big|_{\vec{0}} = \frac{m_1 e_1 g}{m_1 e_1^2 + J_1} \quad (1.25)$$

Výsledný tvar matic **A**, **B**, **C** a **D** je v . Z důvodu přehlednosti matic jsou složité výrazy vyjmuty a uvedeny zvlášť. V případě, že by čtenář potřeboval znát i lineární tvar modelu pro dolní rovnovážný stav, tak jediná změna by nastala u výrazu a_{43} a b_4 , které by byly záporné. Stavové veličiny jsou přímo měřitelné kromě úhlové rychlosti kyvadla, z toho důvodu má matice **C** pouze tři řádky. Vzhledem k tomu, že systém je fyzikálně realizovatelný, tak vektor **D** obsahuje pouze nuly.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ b_4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a_{43} = \frac{m_1 e_1 g}{m_1 e_1^2 + J_1} \quad a_{44} = \frac{-F_{V1}}{m_1 e_1^2 + J_1} \quad b_4 = \frac{m_1 e_1}{(m_1 e_1^2 + J_1)} \quad (1.26)$$

1.3.6 Parametrizace modelu

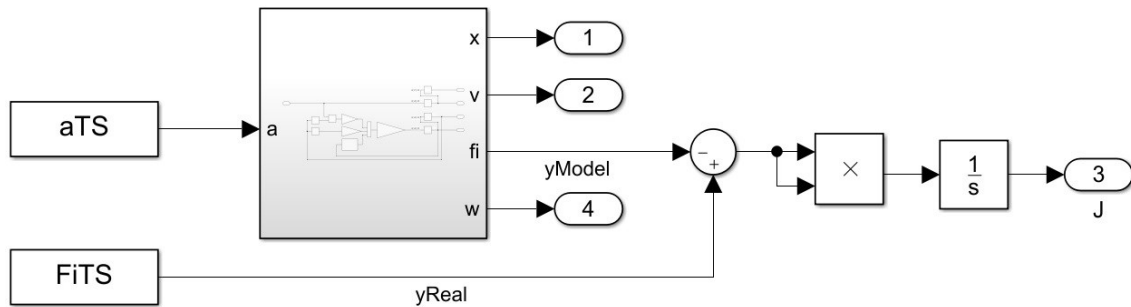
Součástí procesu identifikace systému je, kromě zvolení struktury modelu, také vyčíslení jeho parametrů. Ne všechny parametry lze jednoduše změřit nebo získat jiným snadným způsobem, proto je vhodné tento problém převést na numerickou optimalizační úlohu a k jejímu řešení využít výpočetní techniku. V prostředí MATLAB lze k tomuto účelu využít funkci `fminsearch()` případně `fminsearchbnd()`, která navíc umožňuje hledání parametrů omezit do určitého intervalu. Hlavním vstupním argumentem těchto funkcí je odkaz na kritériální funkci, jejímž úkolem je přiřadit vstupní vektor parametrům modelu a provést simulaci. Součástí simulačního schématu viz obrázek 8 je výpočet kritéria dle rovnice (1.27), jehož výsledek je výstupem kritériální funkce.

$$J = \int_0^{T_{max}} [y_{real}(t) - y_{model}(t)]^2 dt \quad (1.27)$$

Takto zvolené kritérium vypočítává shodu měřeného výstupu reálného systému a výstupu simulovaného modelu, a platí, že čím menší je vypočtená hodnota kritéria, tím větší shodu mají porovnávané průběhy výstupů. Data z reálného systému inverzního kyvadla je možné získat dvěma experimenty. Buď se ručně rozhoupe kyvadlo a změřený průběh se



ořízne v čase, kdy se úhel natočení kyvadla nachází v lokálním minimu nebo maximu, a to z důvodu známé úhlové rychlosti v tomto čase, nebo se vygeneruje vhodný průběh zrychlení, po jehož odeznění bude rychlost vozíku nulová. U obou experimentů se měří do doby, než dojde k ustálení pohybu kyvadla. Obě dvě varianty lze využít, jedna sada naměřených dat se může využít k samotné parametrizaci, druhá sada k případné validaci.



Obr. 8 Simulační schéma parametrizace

Pro všechny varianty modelů platí, že gravitační zrychlení g je konstantou s hodnotou $9,81 \frac{m}{s^2}$, společně hledanými parametry jsou hmotnost kyvadla m_1 , moment setrvačnosti J_1 a vzdálenost těžiště od osy otáčení e_1 , zbylé parametry závisí na použitém modelu tření. Vyhledávací algoritmus je vhodné omezit minimálně tak, aby negeneroval záporné hodnoty parametrů. U parametrů, kde jsou hodnoty známi z jejich měření, jako je například $m_1 = 0,663 \text{ kg}$ nebo $e_1 = 0,247 \text{ m}$, lze omezení zpřísnit například na $\pm 10\%$ od změřené hodnoty. Určitě není vhodné tyto parametry z procesu parametrizace vyřadit, neboť jejich skutečnou hodnotu ovlivňuje kromě jiného například nosná hřídel uložená v ložiskovém pouzdru a její propojení s rotorem inkrementálního čidla. Zároveň určitá volnost těchto parametrů vede k rychlejšímu dosažení hledaných parametrů a k lepší shodě výstupu simulovaného modelu.

Výsledné hodnoty nalezených parametrů jsou uvedeny v tabulce 2. Shodu modelu s naměřenými daty lze posoudit na obrázku 9. Naměřená data byla oříznuta v lokálním maximu, kdy úhel natočení dosahuje přibližně 65° , ustálení nastává přibližně za 32 s. Během této doby proběhne více než 25 zámkitů, přičemž většina testovaných modelů dokáže velice přesně replikovat průběh úhlu natočení kyvadla. Největší nepřesnosti nastávají až v době ustálení, proto zobrazené grafy neukazují celý průběh, ale zaměřují se právě na tento detail. Jedinou výjimkou je model s viskózním třením, který dosahuje



nejhorší shody, pro porovnání je v grafu navíc zobrazen výsledek simulace jeho lineární varianty z předchozí kapitoly. V porovnání s nelineární variantou má větší frekvenci vlastních kmitů, z toho důvodu lze v detailu pozorovat průběh v protifázi.

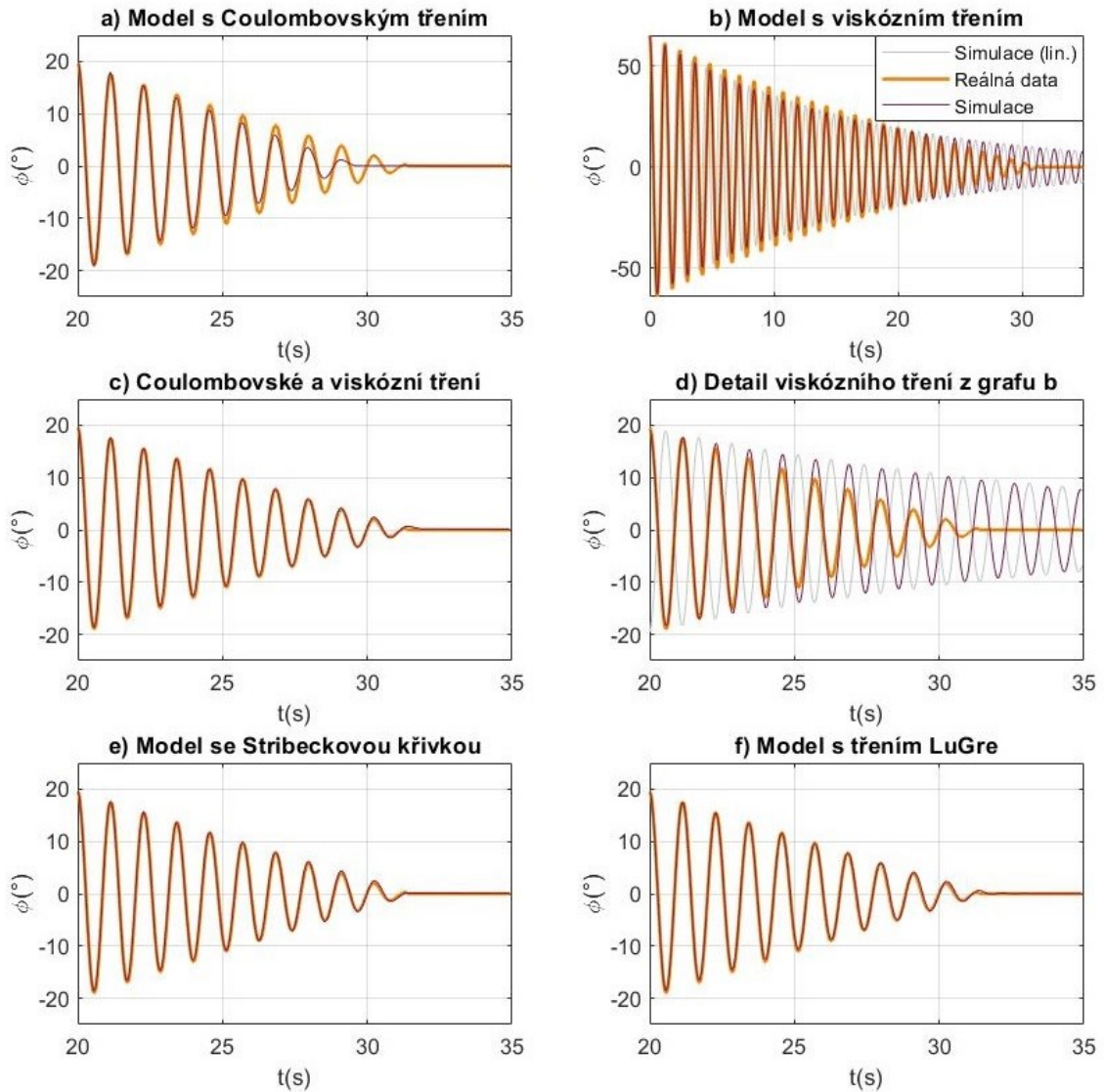
Tabulka 2 Nalezené parametry jednotlivých modelů

Hledané parametry včetně jednotek	Hodnoty nalezených parametrů				
	Coulombovský model tření	Viskózní model tření	Model součtu Coulombovského a viskózního tření	Model Stribeckovy křivky	Model LuGre
m_1 (kg)	0,6156	0,6983	0,7215	0,6914	0,7086
J_1 (kg · m ²)	0,01018	0,01018	0,01015	0,01128	0,009009
e_1 (m)	0,2533	0,2657	0,2674	0,2568	0,2717
F_{c1} (mN)	15,85	-	14,18	12,17	19,79
F_{v1} (mN)	-	7,212	1,925	2,076	1,020
F_{s1} (mN)	-	-	-	21,71	13,55
v_{s1} (m/s)	-	-	-	0,1044	3,760
σ_{01} (-)	-	-	-	-	2,550
σ_{11} (-)	-	-	-	-	0,2066
$J_{Parametrizace}$ (rad · s)	$230,0 \cdot 10^{-4}$	$1310 \cdot 10^{-4}$	$55,20 \cdot 10^{-4}$	$47,63 \cdot 10^{-4}$	$32,46 \cdot 10^{-4}$
$J_{Validace}$ (rad · s)	$92,31 \cdot 10^{-4}$	$829,8 \cdot 10^{-4}$	$6,763 \cdot 10^{-4}$	$5,772 \cdot 10^{-4}$	$4,056 \cdot 10^{-4}$

Lepší shody dosahuje model s Coulombovským třením, nicméně jeho doba ustálení nastává dříve než u reálného systému. Ostatní testované modely takřka dokonale kopírují naměřený průběh úhlu natočení. Pro objektivní posouzení lze využít výpočet kritéria dle rovnice (1.27), výsledky jak pro parametrizaci, tak validaci, jejíž grafické zobrazení průběhů nabízí příloha B, jsou uvedeny na posledních dvou řádcích tabulky 2. Pro návrh a testování regulátorů je dle možností primárně využít model se součtem Coulombovského a viskózního tření. Ten nabízí kompromis mezi přesností modelu, a jednoduchostí z hlediska počtu parametrů.

Numerické řešení optimalizační úlohy lze dále využít nejen k hledání parametrů modelu, ale také k vhodnému seřízení regulátorů a pozorovatelů. Detailnější informace k této metodě lze nalézt například v literatuře [13], konkrétní použití této metody je k dispozici v elektronických datech této práce, viz příloha A.





Obr. 9 Porovnání naměřených dat se simulacemi modelů

1.4 Řízení v horní poloze

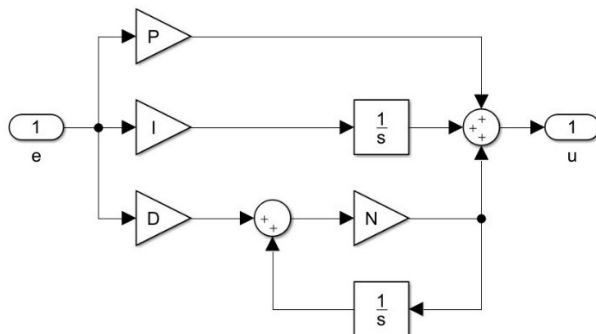
Z pohledu teorie řízení se jedná o vícerozměrový systém, jenž má jeden vstup a dva výstupy. Pro takovou konfiguraci systému nelze navrhnout řízení, které by umožňovalo nezávislé řízení obou výstupů najednou, i přesto lze pro systém inverzního kyvadla nalézt takové způsoby řízení, které umožňují současně udržet kyvadlo v horní rovnovážné poloze a zároveň řízeně měnit polohu vozíku. V rámci této práce je využita stavová regulace a PID regulátory. Velice dobrých výsledků by podle literatury [4] mělo dosahovat prediktivní řízení, toto řešení je však velmi náročné na výpočetní výkon řídicího členu.



Před návrhem regulátorů je vhodné zkontrolovat, zda je systém říditelný a pozorovatelný. Pro říditelný systém platí, že hodnota matice říditelnosti se rovná řádu systému. Stejně tvrzení platí i pro matici pozorovatelnosti. Testy lze provést pouze pro lineární systém, který je popsán v kapitole 1.3.5. Vyčíslené matice jsou k dispozici v příloze C a vyplývá z nich, že systém je plně říditelný a plně pozorovatelný.

1.4.1 PID regulace

Jedná se o nejvíce rozšířený a používaný způsob regulace systémů. PID regulátor lze obecně vyjádřit více možnými matematickými zápisy, přičemž záleží na implementaci v samotném zařízení. Výčet těchto variant včetně dalších informací je k dispozici v literatuře [14]. Zde je použita paralelní struktura PID regulátoru, jehož obrazový přenos odpovídá rovnici (1.28), a lze ho vyjádřit také pomocí schématu na obrázku 10. Tento tvar, včetně značení nastavitelných parametrů P , I , D a N , se shoduje s realizací regulátoru v simulačním softwaru Simulink, což umožňuje snadnou přenositelnost těchto parametrů. Rovnice (1.28) nepopisuje ideální tvar přenosu PID regulátoru ale jeho realizovatelnou variantu, kde derivační složka je nahrazena jednodukapacitním filtrem [14], který nemá tolik vysokou citlivost na šum a jiné rušivé vlivy.



$$R(s) = P + I \cdot \frac{1}{s} + D \cdot \frac{N}{1 + N \frac{1}{s}} \quad (1.28)$$

Obr. 10 Schéma vnitřního zapojení PID regulátoru

Pro implementaci regulátoru do řídicího členu je potřeba převést vztah (1.28) do diskrétního tvaru, k tomu je potřeba zvolit vhodnou numerickou aproximaci integrálu a derivace [14]. Tou je například Tustinova aproximace, respektive bilineární transformace. Z hlediska praktického výpočtu stačí za komplexní proměnnou s dosadit výraz v rovnici (1.29), kde T_s je perioda vzorkování.

$$s \cong \frac{2}{T_s} \cdot \frac{z - 1}{z + 1} \quad (1.29)$$



Nyní lze jednotlivé členy rovnice (1.28) přepsat do podoby diferenčních rovnic, které lze snadno implementovat do řídicího jednotky, integrační člen je v rovnici (1.30) a derivační v (1.31), kde $e(k)$ je regulační odchylka. Implementace číslicového bloku navíc obsahuje ochranu proti wind-up efektu, který vzniká v důsledku omezení maximální velikosti akčního zásahu.

$$r_i(k) = r_i(k-1) + 0,5 \cdot I \cdot T_s \cdot [e(k) + e(k-1)] \quad (1.30)$$

$$r_d(k) = \frac{2 - N \cdot T_s}{2 + N \cdot T_s} \cdot r_d(k-1) + \frac{2 \cdot N \cdot D}{2 + N \cdot T_s} \cdot [e(k) - e(k-1)] \quad (1.31)$$

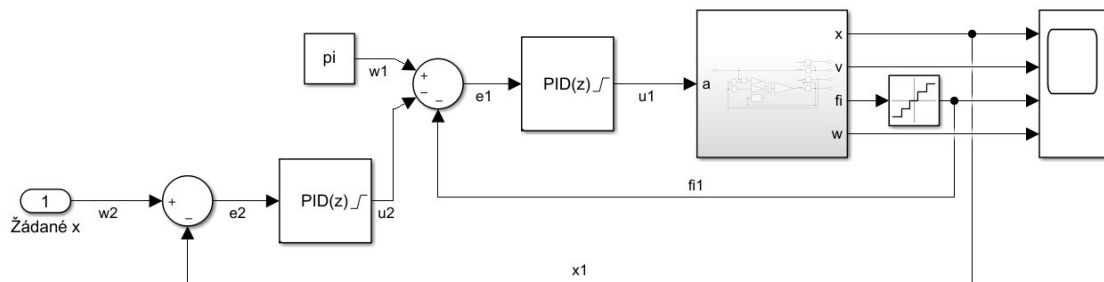
Primárním úkolem je udržet kyvadlo ve vzpřímené poloze, proto se za pomoci PID regulátoru vytvoří zcela běžné zpětnovazební zapojení. Do regulátoru vstupuje regulační odchylka $e_1(k)$, která je tvořena rozdílem žádané hodnoty úhlu natočení $w_1(k)$ a měřeným výstupem $\varphi_1(k)$. Žádaná hodnota může nabývat hodnot $-\pi$ nebo π a jejich lichých násobků, při regulaci záleží, k jaké hodnotě je úhel natočení blíže. Tím lze splnit hlavní cíl regulace, dalším krokem je přidání zpětné vazby od polohy vozíku a tím vytvořit možnost ovládat tuto veličinu.

Ve spoustě literatur se tato vazba vytváří paralelně s vazbou na úhel natočení a součet výstupů obou regulátorů se přivádí na vstup soustavy. Sériové, respektive kaskádní zapojení PID regulátorů je využito v rámci této práce, kde se vnitřní zpětná vazba stará o regulaci úhlu natočení kyvadla a vnější smyčka o polohu vozíku, jak ukazuje schéma zapojení na obrázku 11. Výhodou kaskádního zapojení je ve stanovení maximálního akčního zásahu vnější smyčky, jenž lze vztáhnout k úhlu natočení, kde se osvědčila hodnota $\pm 2^\circ$. Toto cílené omezení má za následek mírnou reakci na skokovou změnu žádané veličiny polohy vozíku, čehož lze dosáhnout také filtrací zmíněného vstupního signálu pomocí nějakého dolnopropustního filtru, tím může být například průměrovací filtr. Kaskádní zapojení regulátorů lze zároveň chápat jako záměrné přidání poruchy do regulační odchylky e_1 .

Zásadním tématem je seřízení obou regulátorů, což může být problematické z důvodu nestability systému, proto není možné některé metody návrhu regulátorů použít. Příkladem nevhodné metody návrhu je například ruční nastavení dle pravidel v literatuře [13], dále jakékoliv metody dle Zieglera-Nicholse, atp. Naopak vhodnými způsoby



nalezení parametrů regulátoru jsou různé nástroje v prostředí MATLAB, tím může být například *Control System Designer* pro syntézu dle geometrického místa kořenů. Dále pak nástroj *PID Tuner*, který umožňuje seřídit regulátor podle rychlosti odezvy systému na skokovou změnu poruchy nebo žádané veličiny, a dále v možnosti vytvoření buď robustnějšího nebo agresivnějšího chování regulátoru. Seřídit regulátory lze také pomocí numerické optimalizační úlohy.



Obr. 11 Schéma kaskádního zapojení PID regulátorů

Poslední dvě zmíněné možnosti jsou použity v této práci. Pokud se numerická optimalizační úloha pro hledání parametrů regulátoru porovná s hledáním parametrů modelu z kapitoly 1.3.6, tak zásadní rozdíl je ve výpočtu kritéria. To může být tvořeno váženým součtem několika dílčích kritérií, kde každé kritérium bude porovnávat jiný výstup modelu, akční veličinu nebo regulační odchylku s konstantní hodnotou nula. To neplatí pro výstup úhlu natočení kyvadla. Ten se porovnává s číslem π a jeho celých lichých násobků v závislosti na počáteční podmínce modelu. Pro úspěšné nalezení vhodných parametrů by schéma dále mělo obsahovat působení poruchy na úhel a úhlovou rychlost kyvadla, dále změnu žádané hodnoty polohy, a rozdílné nastavení počátečních podmínek modelu od požadovaných hodnot.

Na začátku procesu hledání je vhodné nejprve vyhledat parametry pouze pro vnitřní regulátor, následně pro vnější regulátor a až potom pro oba najednou. Počáteční odhad parametrů může být libovolný například $P = I = D = N = 1$. Nicméně ze znalosti účinků a vlastností jednotlivých složek lze tvrdit, že integrační složka pro regulaci úhlu kyvadla by měla být velice malá případně žádná, protože pro aktuální hodnotu akční veličiny určitým způsobem zohledňuje historii vývoje regulační odchylky. Nalezené hodnoty touto metodou jsou uvedeny v tabulce 3.



PID Tuner v bloku *PID controller* pracuje tak, že si řízený model zlinearizuje a pomocí vnitřních algoritmů vypočítá nastavení regulátoru. Výsledek lze porovnat s již nastavenými parametry například v grafu přechodové charakteristiky. Z důvodu linearizace modelu je možné použít pouze model s viskózním třením, který jako jediný lze takto upravit. U ostatních modelů aplikace skončí chybou, což je možné v některých případech vyřešit dalšími implementovanými nástroji jako je například *Re Linearize Closed Loop*, ale pravděpodobnost úspěchu je malá. Výsledek seřízení je k dispozici v tabulce 3.

Tabulka 3 Parametry PID regulátorů

Metoda seřízení	Řízený výstup	P	I	D	N
Optimalizační úloha	φ_1	123,28	$821,71 \cdot 10^{-6}$	2,4002	110,02
	x_0	$32,146 \cdot 10^{-3}$	$1,7204 \cdot 10^{-3}$	$526,62 \cdot 10^{-3}$	1,8275
PID Tuner	φ_1	105,01	107,88	6,2948	16,213
	x_0	$25,966 \cdot 10^{-3}$	$1,7599 \cdot 10^{-3}$	$89,520 \cdot 10^{-3}$	4,3191

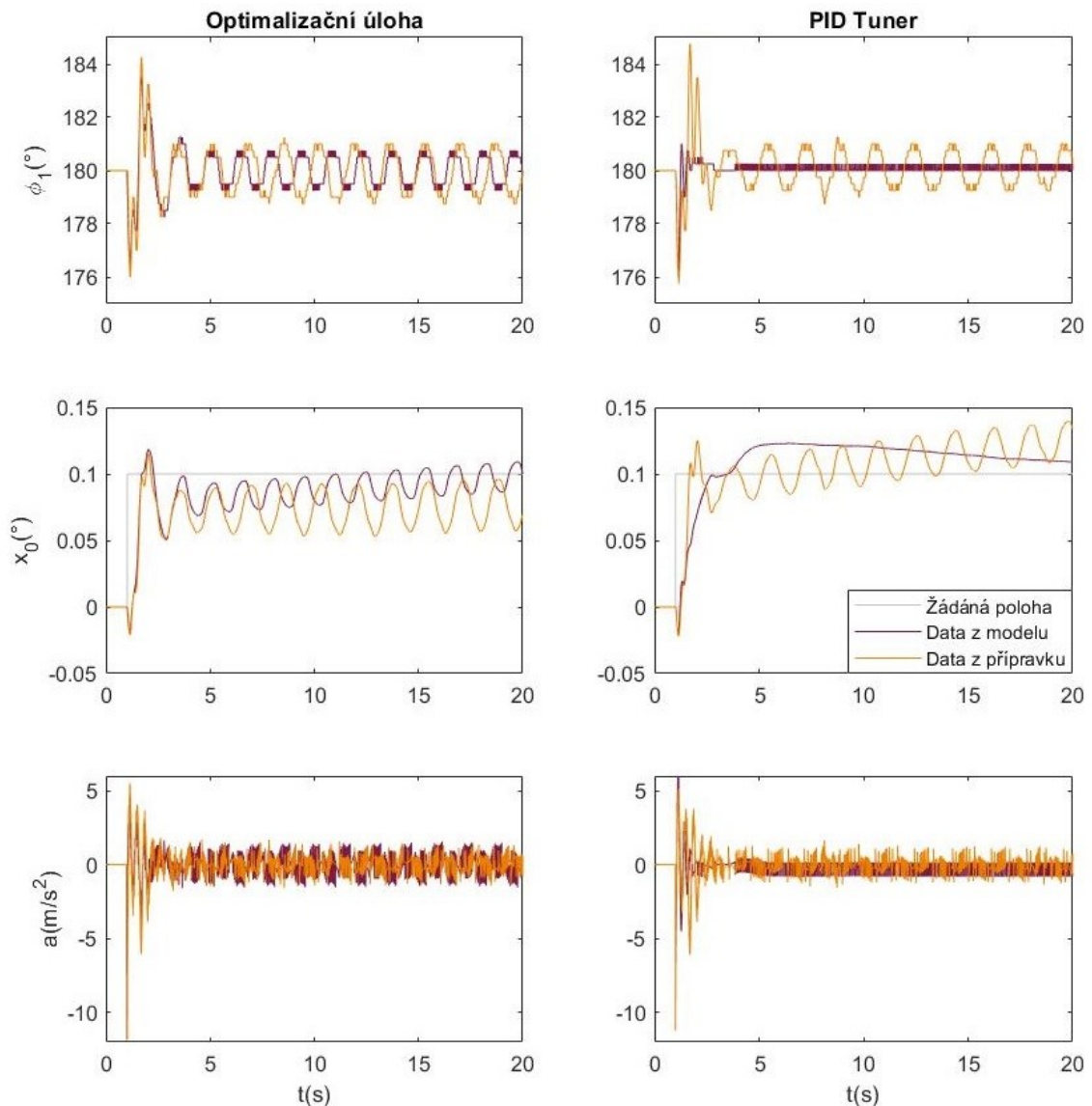
Některé nalezené hodnoty regulátorů se od sebe výrazně liší, což je patrné nejvíce u integrační složky vnitřního PID regulátoru, kde je hodnota z *PID Tuneru* více než sto tisíc krát větší. To vyvrací předpoklad, že by integrační složka měla být malá. Důkazem funkčnosti obou řešení jsou grafy na obrázku 12, které zachycují průběh měření úhlu natočení kyvadla, polohu vozíku a zrychlení vozíku jako akční veličinu. Měřicí experiment na reálném zařízení probíhal tak, že se kyvadlo ručně nastavilo do horní rovnovážné polohy. Následně se zapnula regulace a po uplynutí jedné sekundy se skokově změnila žádaná hodnota polohy na 0,1 m. Pro porovnání jsou navíc zobrazena data ze simulace modelu se stejnými podmínkami.

Porovná-li se simulovaná data s měřenými, tak je zde vždy patrnější dokonalejší průběh výstupů. Toto chování je očekávatelné, neboť regulátory jsou navrženy pro regulaci modelů, které však nemohou systém dokonale popsat. Průběhy úhlu natočení regulátorů dle optimalizační úlohy jsou velmi podobné, v ustálení se liší pouze ve frekvenci a amplitudě kmitání, kdy model má větší frekvenci a se vychyluje průměrně v rozmezí od $180,75^\circ$ do $179,75^\circ$, zatímco přípravek od úhlu $178,75^\circ$ do 181° .

Z uvedených čísel je patrná jistá nesymetrie, která je způsobena trvalou poruchou na úhlu natočení. Porucha je v tomto případě menší než rozlišovací schopnost inkrementálního



rotačního čidla, nicméně může být i větší, což se při stejném pokusu projevuje tak, že poloha vozíku se výrazně vzdálí od žádané hodnoty, ke které se následně velmi pomalu přibližuje. To je částečně patrné i na obou zobrazených měřených experimentech, kdy průběh vlevo kmitá přibližně kolem hodnoty $0,075\text{ m}$, vpravo kolem $0,125\text{ m}$. V obou případech se oscilace přiblíží k hodnotě $0,1\text{ m}$ zhruba po 60 s .



Obr. 12 Výsledky PID regulace

Vliv seřízení regulátorů dle *PID Tuneru* je na simulovaný model značný, z průběhu polohy vozíku vymizely oscilace, vylepšil se i průběh úhlu natočení, ale bohužel se tento efekt nepřenesl na reálný přípravek. Průběhy jsou takřka obdobné těm, které vznikly za použití regulátorů z optimalizační úlohy. K určitému zlepšení však došlo, kmity kyvadla



se pohybují v rozmezí od $179,25^\circ$ do 181° a průměrný rozdíl dvou sousedních lokálních extrémů polohy vozíku klesl z $0,042\text{ m}$ na $0,035\text{ m}$.

1.4.2 Pozorovatel úhlové rychlosti

Úhlová rychlost je jedinou stavovou veličinou, která není měřená nebo vypočítávaná z jiných měřených veličin jako třeba rychlost vozíku, kterou poskytuje frekvenční měnič výpočtem na základě jeho polohy. Znalost hodnoty úhlové rychlosti v reálném čase je však klíčová pro návrh stavového regulátoru, a také regulátorů pro vyšvihnutí kyvadla do horní polohy. Proto je nutné vytvořit pozorovatele úhlové rychlosti, který ji umí odhadnout podobně, jako to dělá řídicí jednotka frekvenčního měniče u rychlosti vozíku.

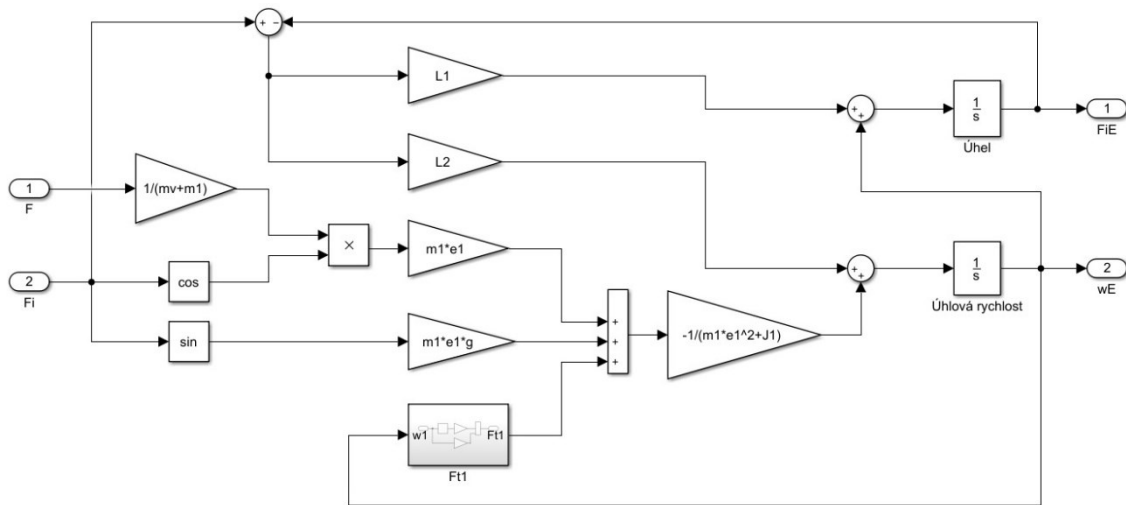
Běžně užívaný je Luenbergerův pozorovatel [15], jedná se o lineární stavový model regulované soustavy, který v sobě navíc obsahuje váženou zpětnou vazbu od rozdílu měřených výstupů s jeho odhadovanými výstupy. Tento pozorovatel je však pro tuto aplikaci nevhodný, protože čím více je měřený úhel kyvadla vzdálen od rovnovážného stavu, tím více dochází k nepřesnému odhadu jeho rychlosti. Přesnost odhadu rychlosti při jakémkoliv úhlu natočení kyvadla je podstatná především pro algoritmy zajišťující vyšvihnutí kyvadla do horní polohy.

Východiskem je nelineární pozorovatel určený pro inverzní kyvadlo z literatury [16], který tuto nevýhodu odstraňuje. Vznikl z Luenbergerova pozorovatele a to tak, že se lineární stavový model nahradil nelineárním, schéma na obrázku 13. Zpětná vazba od výstupů zůstává zachována, neboť ta stejně jako v lineárním případě kompenzuje rozdílné počáteční podmínky, malé rozdíly v parametrech modelu vůči reálnému systému a případné působení poruchy. Zároveň se pro zjednodušení výpočtu odstranila část modelu, která vypočítávala rychlost a polohu vozíku, tyto veličiny modelu nemají vnitřně žádný vliv na úhel natočení ani úhlovou rychlost.

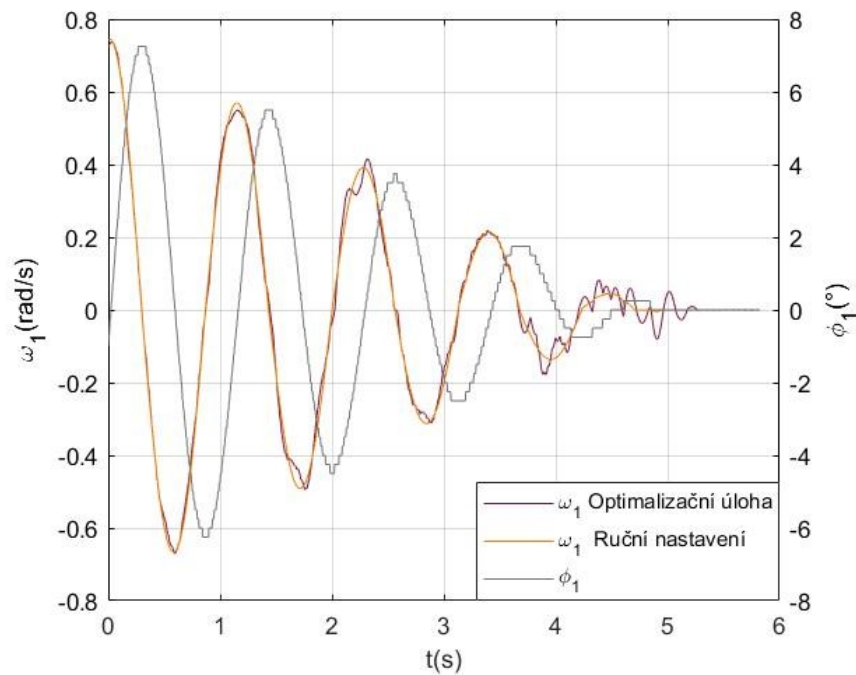
Ke zjištění parametrů $L1$ a $L2$ lze vytvořit numerickou optimalizační úlohu podobné té, která se použila v kapitole 1.3.5. Referenční data vytváří nelineární stavový model systému s počátečními podmínkami, které jsou blízké nulovému bodu horní polohy. Počáteční podmínky pozorovatele se s nulovým bodem shodují. To vytváří odlišnost, kterou musí parametry $L1$ a $L2$ kompenzovat, odlišnost lze dále podpořit přidáním poruchy



na vstup referenčního systému nebo na jeho výstup úhlu natočení a úhlové rychlosti. Nalezené parametry pozorovatele jsou $L1 = 6,7728$ a $L2 = 776,2922$.



Obr. 13 Schéma nelineárního stavového pozorovatele úhlové rychlosti



Obr. 14 Porovnání odhaduté úhlové rychlosti pozorovatelů s rozdílnými parametry

V simulacích toto nastavení pozorovatele velice rychle kompenzuje rozdíl jak počátečních podmínek tak i vznik poruchy na měřené soustavě. Na reálném přípravku však při pomalém pohybu kyvadla generuje velice nepřesný odhad úhlové rychlosti, který je navíc zatížen šumem. Daleko vhodnější nastavení vzniklo ručním testováním různých hodnot



parametrů přímo na reálném zařízení. Pro parametry $L1 = 10$ a $L2 = 90$, již odhad úhlové rychlosti není zatížen šumem, což ukazuje obrázek 14, kde lze porovnat výsledek odhadů obou variant nastavení. Naměřená data vznikla pouhým rozhoupáním kyvadla, zobrazena je ta část, kdy kyvadlo vlivem třecích sil ztrácí energii až do úplného zastavení. Horší vlastností ručně nalezených parametrů pozorovatele je pomalejší reakce při vzniku poruchy na měřeném úhlu natočení. I přes tuto negativní vlastnosti je však toto seřízení pro udržení kyvadla v horní rovnovážné poloze vhodnější, neboť při malých úhlových rychlostech negeneruje tak veliký šum jako předchozí varianta.

1.4.3 Stavová regulace

Alternativou k řízení inverzního kyvadla pomocí PID regulátorů může být stavový regulátor. Princip tohoto řízení je velmi jednoduchý, na vstup systému se přivádí signál, který je generován součtem vážených stavových veličin. To matematicky popisuje zákon řízení v rovnici (1.32), kde stavový regulátor \mathbf{K} je řádkový vektor vhodných konstant.

$$u(t) = -\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\chi}(t) \quad (1.32)$$

Úkolem stavového regulátoru je dostat systém do takového stavu, kdy stavové veličiny, které vstupují do výpočtu akční veličiny dle zákona řízení, měly nulovou hodnotu. Z toho důvodu se u stavové veličiny odpovídající úhlu natočení musí odečítat konstanta π nebo $-\pi$, podobně jako je tomu u PID regulace. Změnu žádané polohy vozíku lze v rovnici (1.32) udělat stejným způsobem. To se obvykle řeší rozšířením stavového regulátoru o integrální vazbu, do které vstupuje rozdíl ovládané stavové veličiny a žádané veličiny, nicméně toto řešení se na přípravku neosvědčilo. Rozepsaný tvar zákona řízení, jenž je vhodný pro implementaci do PLC, uvádí rovnice (1.33), kde $w_x(t)$ je žádaná hodnota polohy vozíku a $w_\varphi(t)$ dosahuje hodnot π nebo $-\pi$ v závislosti na úhlu natočení kyvadla.

$$u(t) = -\{k_1 \cdot [\chi_1(t) - w_x(t)] + k_2 \cdot \chi_2(t) + k_3 \cdot [\chi_3(t) - w_\varphi(t)] + k_4 \cdot \chi_4(t)\} \quad (1.33)$$

Zásadním tématem stavového řízení je nalezení správných hodnot k_1 až k_4 . K tomu lze použít metodu umístění pólů, metodu LQR nebo numerickou optimalizační úlohu. Pro první dvě zmíněné možnosti existují v prostředí MATLAB funkce, které výsledné parametry regulátoru vypočítají, na základě matic \mathbf{A} a \mathbf{B} lineárního stavového popisu systému a dalších číselných parametrů ovlivňující konečné hodnoty stavového regulátoru. Pro



metodu umístění pólu to je vektor \mathbf{p} požadovaných pólů uzavřené regulační smyčky, pro LQR jsou to matice \mathbf{Q} a \mathbf{R} určující význam jednotlivých stavových veličin a vstupů do systému. Vektor \mathbf{p} a matice \mathbf{Q} a \mathbf{R} se navrhují metodou pokus-omyl, přičemž prvky matic ležících mimo diagonálu jsou obvykle nulové.

Z praktického hlediska je nalezení vhodných parametrů stavového regulátoru pro systém inverzního kyvadla těmito metodami poměrně obtížnou úlohou a vyžaduje značné množství pokusů, než se najde funkční řešení. Výsledné parametry, které v simulacích vedly k úspěšnému řešení, se nachází v tabulce 4, hodnoty vstupních argumentů \mathbf{p} , \mathbf{Q} a \mathbf{R} jsou k dispozici v rovnici (1.34). Třetí metoda hledá parametry pomocí numerické optimalizační úlohy podobně jako parametrizace modelu v kapitole 1.3.6, a svým principem odpovídá metodě LQR. Zásadním rozdílem je možnost použití nelineárního modelu, a zároveň přidání poruchových a žádaných veličin. Jako počáteční odhad je vhodné použít parametry nalezené předchozími metodami.

$$\mathbf{p} = [-1 \quad -2 \quad -20 \quad -35] \quad \mathbf{Q} = \text{diag}(100, 300, 1500, 200) \quad \mathbf{R} = 0,1 \quad (1.34)$$

Tabulka 4 Parametry stavového regulátoru

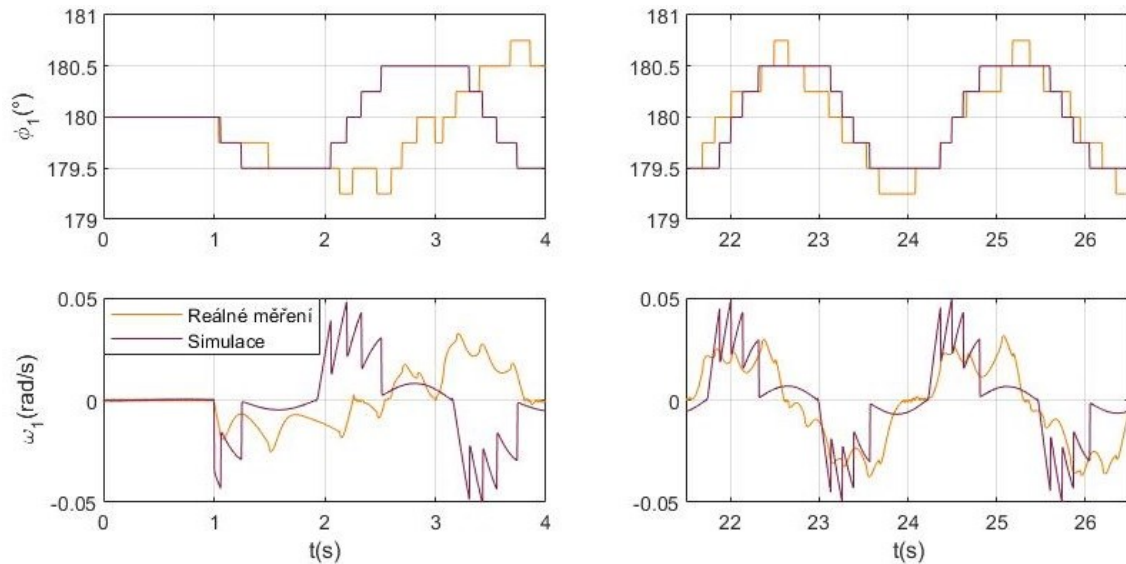
Metoda určení parametrů	k_1	k_2	k_3	k_4
Umístění pólů	-46,226	-73,153	308,46	42,443
LQR	-31,623	-71,920	346,79	73,565
Optimalizační úloha	-27,912	-157,60	502,22	126,96

Účinky nalezených parametrů stavového regulátoru je vhodné mezi sebou porovnat jak simulováním modelu, tak měřeními reálných experimentů, zde však nastává problém. Generovaný signál $u(t)$ je ve všech případech vždy několikanásobně větší než v simulacích, což vede k nestabilnímu chování. Vynásobí-li se akční zásah konstantou v rozmezí od 0,05 až 0,1, tak výsledná reakce systému již je stabilní a v určitých vlastnostech podobná datům ze simulací. Přidání takového nelogického zesílení vede k hledání chyb případně důvodů, proč tomu tak je.

První možnou příčinou mohou být chybně definované převodní konstanty, které jsou uvedeny v kapitole 1.2.3. Kontrola tuto chybu vyloučila, což potvrzují i naměřená data z PID regulace, které v zesílení odpovídají simulovaným datům. Stavové řízení ke stanovení akčního zásahu využívá navíc rychlost vozíku a odhadovanou úhlovou rychlost kyvadla,



díky které pravděpodobně vzniká příčina výše popsaného problému. Pokud se detailněji porovná odhadnutá úhlová rychlost na reálném zařízení s totožnou veličinou v simulaci, tak jejich průběh má naprosto odlišný charakter, viz obrázek 15. To pravděpodobně vede i k celkovému odlišnému chování stavové regulace.



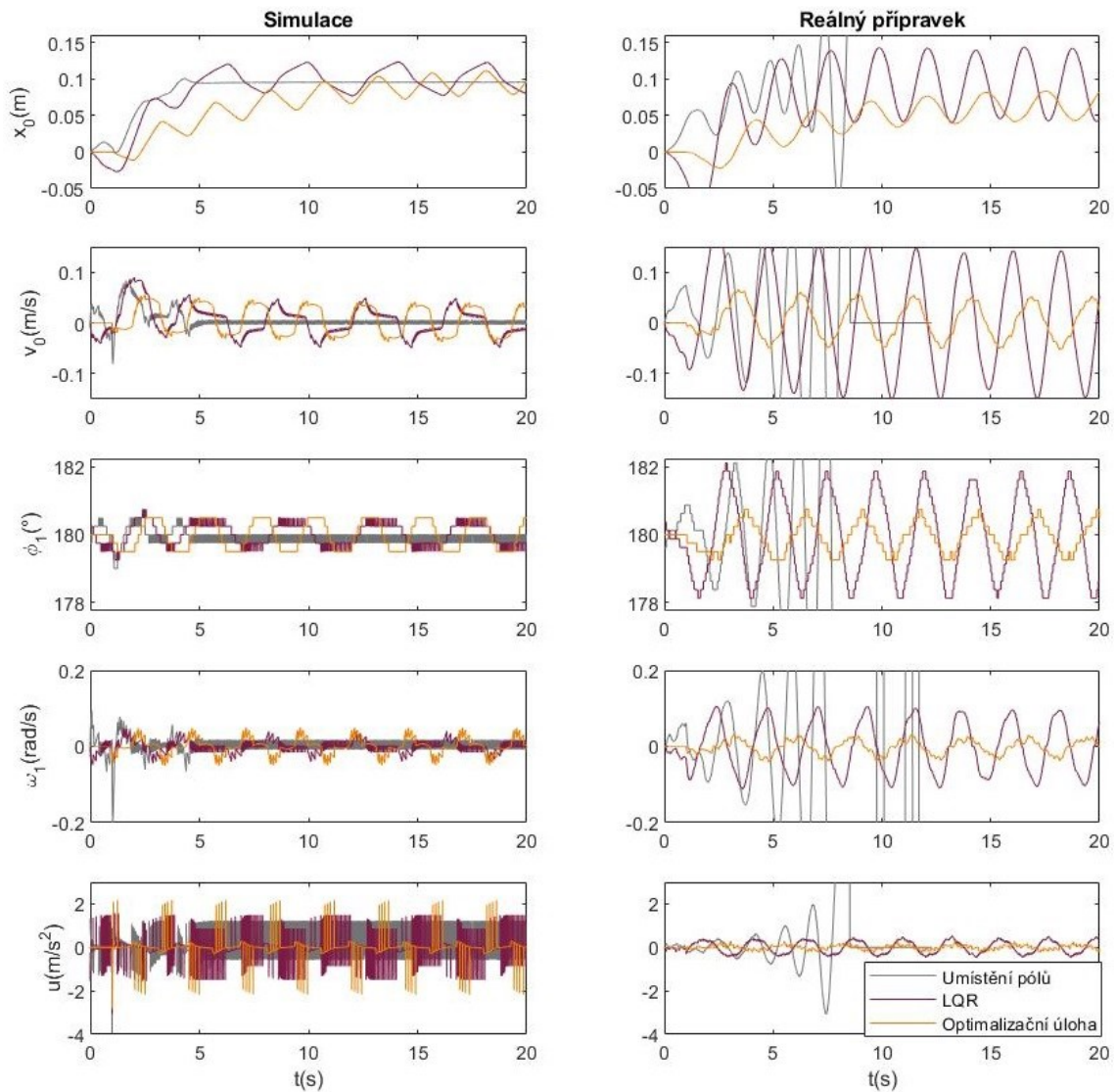
Obr. 15 Detailní porovnání odhadované úhlové rychlosti se simulací

Použitá konstanta zesílení na reálném přípravku odpovídá zaokrouhleně číslu 0,0617. Toto číslo vzniklo z matematického výrazu $(m_1 e_1^2 + J_1)$, který je v modelu použit. V úvahu možné příčiny tohoto problému byla testována také možnost chyby modelu, což mimo jiné vedlo i k použití právě této konstanty, nicméně je to pouhá shoda okolností. Z důvodu odlišného chování, není vhodné porovnávat simulovaná data s naměřenými, proto jsou výsledky na obrázku 16 uvedeny zvlášť pro simulaci a reálný přípravek. Experimentální měření probíhalo obdobně jako v případě PID regulace, kdy ručně byl nalezen horní rovnovážný stav, a po zapnutí regulace byla řízeně po jedné sekundě změněna žádaná hodnota polohy vozíku na konstantu 0,1.

Metoda umístění pólů v simulacích dopadla nejlépe, protože po ustálení přechodového děje není pozorováno žádné kmitání na poloze vozíku, avšak byla zde patrná trvalá regulační odchylka. Zcela opačné chování bylo pozorováno na reálném zařízení, kde toto nastavení regulátoru vedlo k nestabilitě systému. Při porovnání LQR a numerické optimalizační úlohy má lepší výsledky druhá v pořadí, neboť toto nastavení vede k menší



amplitudě kmitů ve všech zobrazených veličinách. Nevýhodou je ale pomalejší reakce na změnu žádané hodnoty polohy vozíku.

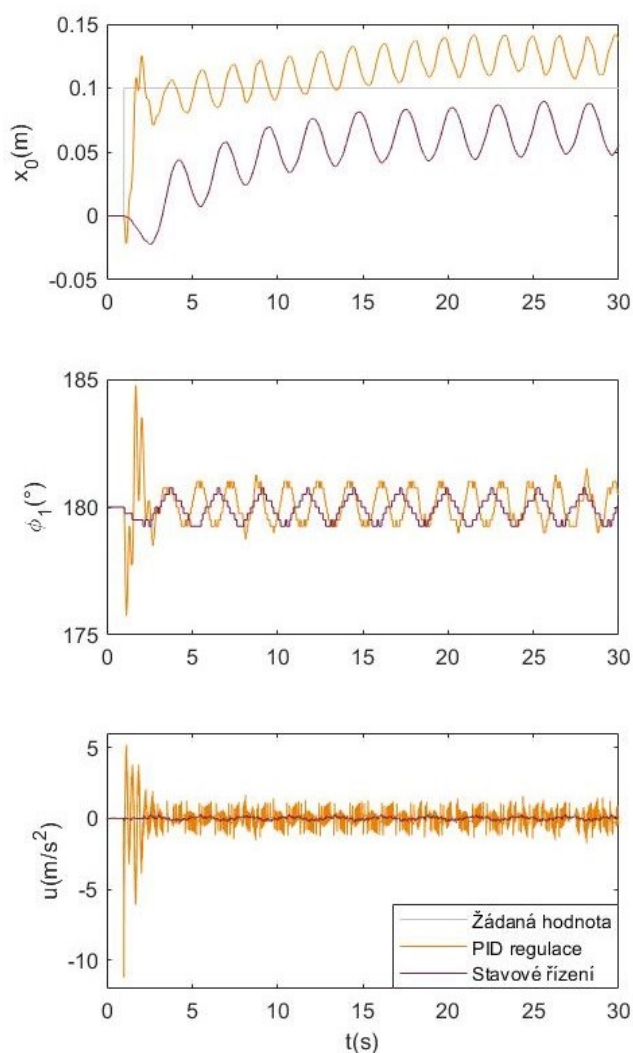


Obr. 16 Výsledky stavové regulace

1.4.4 Porovnání výsledků

Jak PID regulace, tak stavové řízení má odlišné chování při snaze odstranit regulační odchylku, a to bez ohledu jestli vznikla poruchou nebo změnou žádané veličiny. Pro obě dvě varianty je pravděpodobně možné nalézt vhodnější seřízení, které by vedlo ještě k lepším výsledkům. Pro oba způsoby řízení dále platí, že konečné ustálení polohy vozíku velmi závisí na působení trvalé poruchy na úhlu natočení. Stavové řízení z optimalizační úlohy je k tomuto nežádoucímu chování citlivější než obě varianty PID regulace. Díky této poruše vznikne na tomto výstupu odchylka, kterou regulátor není schopen odstranit.





Obr. 17 Porovnání výsledků PID regulace a stavového řízení

Na obrázku 17 jsou porovnány reprezentativní výsledky obou způsobů řízení. Pro PID regulaci se jedná o seřízení pomocí *PID Tuneru*, v případě stavové regulace jsou to parametry vzniklé pomocí numerické optimalizační úlohy. Výhodou PID regulace je určitě rychlá reakce na změnu žádané veličiny polohy vozíku, ovšem za cenu poměrně velkého vychýlení kyvadla s velmi rychlým kmitáním. Dále při ustáleném kmitání využívá k regulaci daleko menší dráhu vozíku. Průměrná velikost této dráhy pro PID regulátory činí $0,035\text{ m}$, pro stavové řízení to je $0,040\text{ m}$. Z posledního grafu je také patrná vyšší energetická náročnost, a to i po odeznění přechodového děje.

1.5 Vyšvihnutí kyvadla do horní polohy

Pro tuto schopnost systému existuje více přístupů. Určitě lze uspět s nelineárním prediktivním řízením dle článku [4] nebo s nelineárním stavovým regulátorem podle [17]. V této práci se použila metoda dle článku [18], jejíž řízené vyšvihnutí spočívá ve výpočtu energie kyvadla. V článku je přímo použit výraz pumpování energie do kyvadla. Akční zásah včetně zmíněné energie kyvadla se vypočítává na základě úhlové rychlosti a úhlu natočení kyvadla. Níže popsané řešení je oproti článku upravené, a to z důvodu jednak odlišné volby systému souřadnic, a dále z důvodu použitého přesnějšího matematického popisu systému. Aktuální energie kyvadla se vypočítává podle rovnice (1.35) a jedná se o součet kinetické a potenciální energie.



$$E(t) = \frac{1}{2}(m_1 \cdot e_1^2 + J_1) \cdot \omega_1^2(t) - m_1 \cdot e_1 \cdot g \cdot [\cos \varphi_1(t) - 1] \quad (1.35)$$

Výpočet požadovaného zrychlení vozíku lze popsat pomocí rovnice (1.36), kde k je nastavitelný parametr zesílení. To však ke spolehlivému vyšvihnutí nestačí, a do řešení se musí dodat omezení, která zabrání vyjetí vozíku mimo dráhu. Prvním krokem je přidání nastavitelné saturace $\pm a_{Max}$ na generované zrychlení vozíku, to zabrání algoritmu ve vytváření příliš velkých rychlostí. Další omezení je spojeno s veličinou polohy vozíku, jenž v momentě, kdy se dostane mimo povolenou dráhu, která je reprezentována parametrem x_{Max} , tento vozík řízeně zastaví do doby, než rovnice (1.36) vygeneruje takové zrychlení, které vrátí vozík zpět do povolené dráhy.

$$u(t) = k \cdot E(t) \cdot \text{sign}[-\cos \varphi_1(t) \cdot \omega_1(w)] \quad (1.36)$$

Řízené zastavení lze rozdělit do dvou fází, v první se na výstup systému přivádí maximální zrychlení dle parametru $a_{Zpomaleni}$ s opačným znaménkem než má rychlost vozíku, a to do doby než by toto zrychlení vedlo k zpětnému pohybu. Následně se řízené zastavení přepne do druhé fáze, při které je akční veličina vytvářena pomocí záporné zpětné vazby od rychlosti vozíku s proporcionálním zesílením p_V . Použité hodnoty zmíněných parametrů jsou uvedeny v rovnicích (1.37).

$$\begin{aligned} k &= 8 & a_{Max} &= 0,75 \text{ m/s}^2 & x_{Max} &= 0,2 \text{ m} \\ p_V &= 50 & a_{Zpomaleni} &= 10 \text{ m/s}^2 & & \end{aligned} \quad (1.37)$$

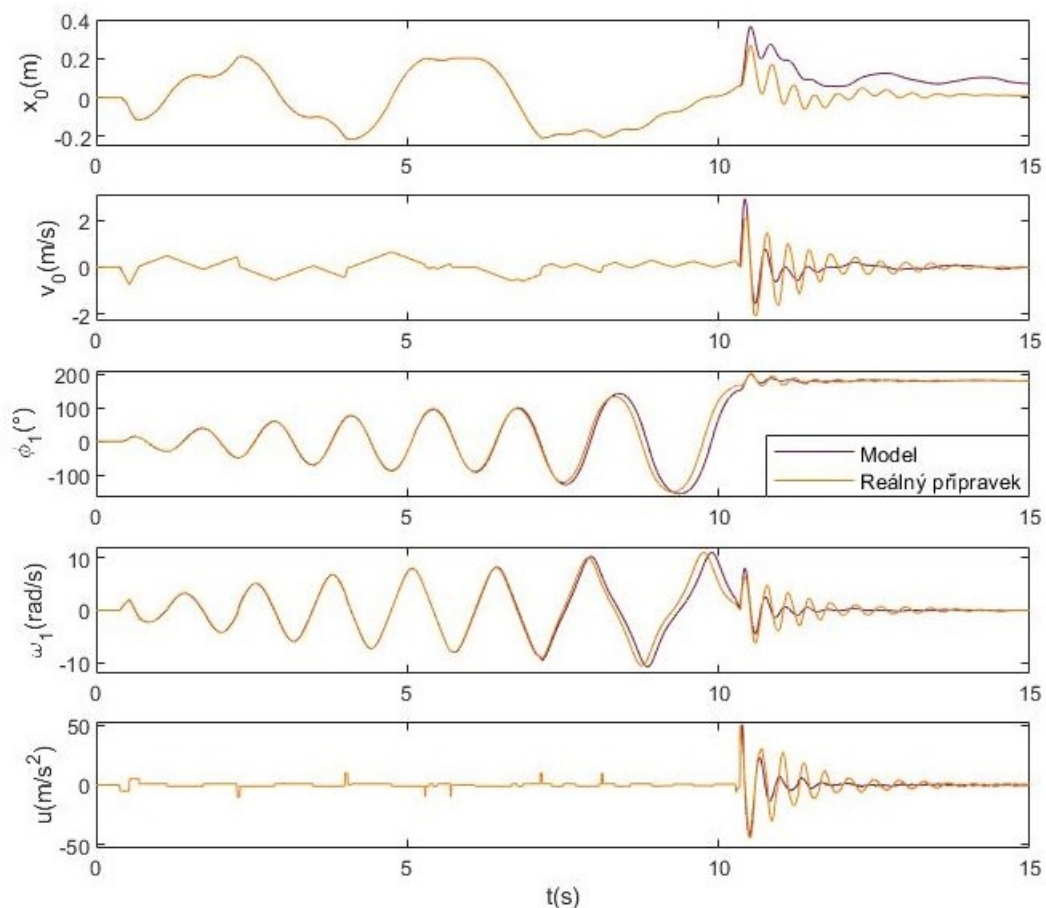
Při procesu vyšvihnutí kyvadla je dále vhodné zmenšit rozsah povolené dráhy, například na $0,1 \text{ m}$, a to v momentě kdy úhel kyvadla v absolutní hodnotě poprvé překročí, v tomto případě, číslo 135° . Tím se ještě více eliminuje možnost selhání vyšvihnutí, a to především v momentě přepnutí na některý regulátor z kapitoly 1.4. Vhodnou dobu pro přepnutí kyvadla lze spojit s velikostí energie kyvadla v horní rovnovážné poloze. Ta se vypočítá dosazením čísla π nebo $-\pi$ za úhel a úhlovou rychlost do rovnice (1.35) [18], její hodnota při dosazení parametrů modelu se součtem Coulombovského a viskózního tření je $4,09 \text{ J}$.

Kyvadlo nemusí k přepnutí regulátorů této energie dosáhnout, postačuje když dosáhne například 98%. Této mezní hodnoty však může dosáhnout i v momentě, kdy se kyvadlo nachází v dolní části, proto je nutné toto dodatečně kontrolovat a regulátor přepnout, až



když úhlová rychlost klesne pod nějakou úroveň, a zároveň když je úhel kyvadla blízko žadoucího cíle. Výsledky toto algoritmu jsou k dispozici na obrázku 18, kde je zachycen průběh pokusu na reálném zařízení. Po vyšvihnutí je kyvadlo řízeno kaskádními PID regulátory s parametry získanými pomocí optimalizační úlohy.

K porovnání je zobrazena simulace modelu, pro jeho vyšvihnutí se použil signál, který vygenerovalo PLC na reálném zařízení, následnou regulaci v horní poloze zajišťuje simulovaný regulátor. Měřené veličiny x_0 a v_0 jsou po dobu vyšvihnutí shodné s modelem, což nelze tvrdit o φ_1 a ω_1 . Po prvním překročení úhlu $\pm 90^\circ$ se, při změně směru úhlové rychlosti, kyvadlo rychleji zpomaluje než v simulaci. To má za následek rozdílné chování při řízení v horní poloze, neboť v době přepnutí je stav systémů rozdílný. V úvodní části akční veličiny jsou viditelné dvě skokové změny, které slouží k vybuzení systému. Algoritmus pro vyšvihnutí nemůže začínat při nulové úhlové rychlosti a nulovém úhlu natočení, v takovém případě by generoval nulovou akční veličinu [18].



Obr. 18 Výsledek vyšvihnutí



1.6 Softwarová realizace

Řídicí jednotky výrobce *B&R* lze ovládat a programovat z vývojového prostředí *Automation Studio*. Vývoj softwaru pro konkrétní zařízení lze rozdělit na dvě části, v první se jedná o konfiguraci fyzických zařízení a komponentů, které umožňují nastavit například komunikaci, zabezpečení a jiné služby a podsystémy operačního systému. Mezi nimi jsou i moduly ovládající elektrické pohony, zde je možnost výběru ze dvou možností mezi starší *ACP10 ARNO* a novější *mappMotion*. Rozdíl je především v přístupu ke konfiguraci pohonu a jeho programování, kde druhá varianta by měla být z pohledu vývojáře jednodušší. K jejímu použití je potřeba vlastnit licenci, bez které není možné pohon ovládat. Z toho důvodu je v tomto projektu použita starší varianta.

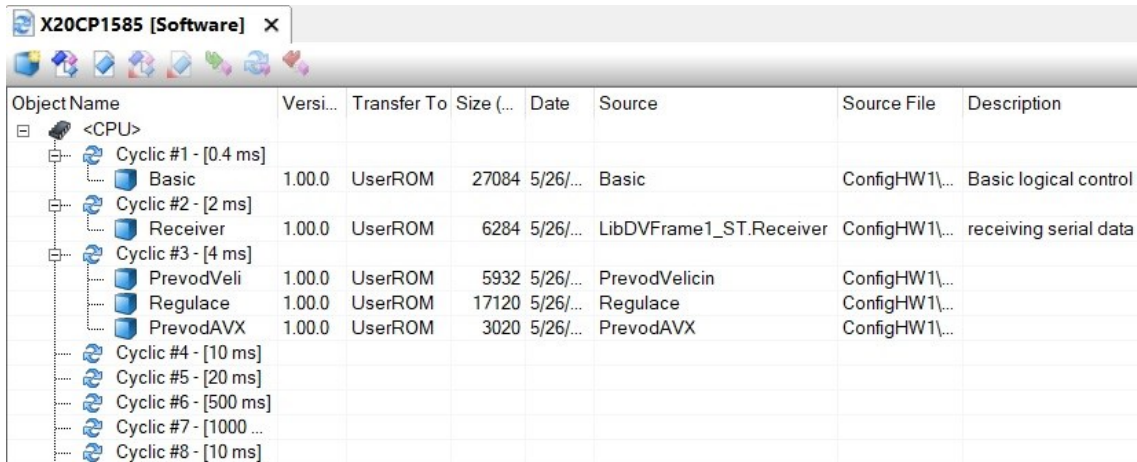
Druhá část vývoje je zaměřena na programování samotné funkcionality zařízení. Na výběr je zde několik textových a grafických programovacích jazyků, přičemž v této diplomové práci je použit jazyk *ST*. Výhodou tohoto prostředí je možnost přidání doplňku do softwaru *MATLAB*, což následně umožňuje ze schématu v *Simulinku* vygenerovat kód v jazyce *C*, jenž lze k vývoji softwaru také použít, tato možnost v projektu není využita.

V PLC může běžet více programů najednou, a to až v osmi cyklických třídách s různou periodou vzorkování, která je volitelná. To umožňuje řešený problém rozdělit na více částí, a ty řešit samostatně. Pro inverzní kyvadlo lze softwarovou část rozdělit do čtyř programů, viz obrázek 19. Jsou to *Basic*, *PrevodVelicin*, *Regulace* a *PrevodAVX*. První v pořadí se stará o obsluhu a komunikaci pohonu, je v první cyklické třídě s periodou $400 \mu\text{s}$, a do projektu byl přidán z knihovny příkladů pro řízení jednoosého pohonu. Stavový automat tohoto příkladu však nemá implementované ovládací funkce, které umožňují měnit rychlost případně polohu motoru v každé periodě vzorkování. Proto se tento program musí doplnit funkční blok *MC_BR_MoveCyclicVelocity* případně *MC_BR_MoveCyclicPosition*, které toto dokáží.

Program *PrevodVelicin* má za úkol upravit data z měřících zařízení pro potřeby regulace. Úprava spočívá hlavně v převodu jednotek dle kapitoly 1.2.3, dále jsou zde řešeny stavy například v momentě, kdy dojde k přetočení kyvadla o více jak 360° pro oba směry, případně jsou zde části programů, kterými uživatel může odstranit odchylku na úhlu natočení kyvadla. Všechny výše popsané regulátory a pozorovatelé jsou řešeny pomocí funkčních bloků, které jsou volány a ovládány ze stavového automatu programu



Regulace. Z pohledu uživatele je toto hlavní program, který ovládá celý systém, součástí je například také sekvence pro inicializaci pohonu.



Object Name	Versi...	Transfer To	Size (...)	Date	Source	Source File	Description
<CPU>							
Cyclic #1 - [0.4 ms]							
Basic	1.00.0	UserROM	27084	5/26/...	Basic	ConfigHW1\...	Basic logical control
Cyclic #2 - [2 ms]							
Receiver	1.00.0	UserROM	6284	5/26/...	LibDVFrame1_ST.Receiver	ConfigHW1\...	receiving serial data
Cyclic #3 - [4 ms]							
PrevodVeli	1.00.0	UserROM	5932	5/26/...	PrevodVelicin	ConfigHW1\...	
Regulace	1.00.0	UserROM	17120	5/26/...	Regulace	ConfigHW1\...	
PrevodAVX	1.00.0	UserROM	3020	5/26/...	PrevodAVX	ConfigHW1\...	
Cyclic #4 - [10 ms]							
Cyclic #5 - [20 ms]							
Cyclic #6 - [500 ms]							
Cyclic #7 - [1000 ...]							
Cyclic #8 - [10 ms]							

Obr. 19 Rozvržení dílčích programů v cyklických třídách

Posledním programem je *PrevodAVX*, který se stará o převod generované akční veličiny zrychlení na rychlost případně polohu vozíku. Toho lze dosáhnout jednou případně dvěma integracemi, které jsou realizovány stejně jako integrální složka PID regulátoru pomocí rovnice (1.30), kde místo regulační odchylky je pro první integraci dosazena akční veličina a pro druhou integraci výstup z první integrace. Převádět zrychlení až na polohu vozíku není v tomto případě nutné, tato varianta je zde zmíněna pro případ, že by jiný řídicí systém pohonu neumožňoval měnit jeho stav na základě převedené rychlosti. Vypočítané akční veličiny je posléze nutné převést z jednotek SI do jednotek *Unit*. Na obrázku 19 je uveden ještě jeden dílčí program s názvem *Receiver*, který je popsán v následujících kapitolách.

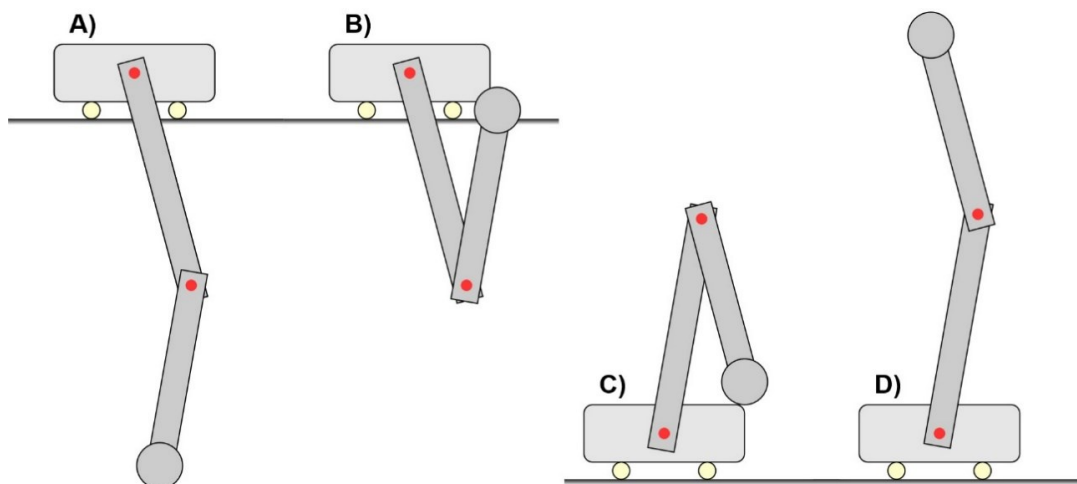


2 Dvojité inverzní kyvadlo

Rozšířením jednoduchého inverzního kyvadla o další článek vznikne mnohem náročnější a hůře ovladatelný systém. Určitou motivací může být video [19], kde je ovládán systém inverzního kyvadla se třemi články. Cílem této části práce je zkonstruování dvojitého kyvadla a navrhnout a zrealizovat měření úhlu natočení druhého článku kyvadla. Dále prozkoumat cíle, způsoby identifikace a řízení.

2.1 Cíle řízení

V první části práce je řešena pouze náročnější varianta řízení, při které je snahou systému udržet kyvadlo vzpřímeně v horní poloze. Zadání lze upravit a řídit systém tak, aby udržoval kyvadlo v dolní rovnovážné poloze. V momentě, kdy se ke kyvadlu přidá další článek, tak adekvátně naroste i počet možných cílů řízení, které jsou naznačeny na obrázku 20. Dvojité kyvadlo lze ovládat tak, aby systém udržoval obě kyvadla v dolní rovnovážné poloze, nebo aby jeden z článků byl v dolní a druhý v horní rovnovážné poloze, nebo aby se oba články nacházely v horní nestabilní poloze, přičemž tuto variantu lze označit jako dvojité inverzní kyvadlo.

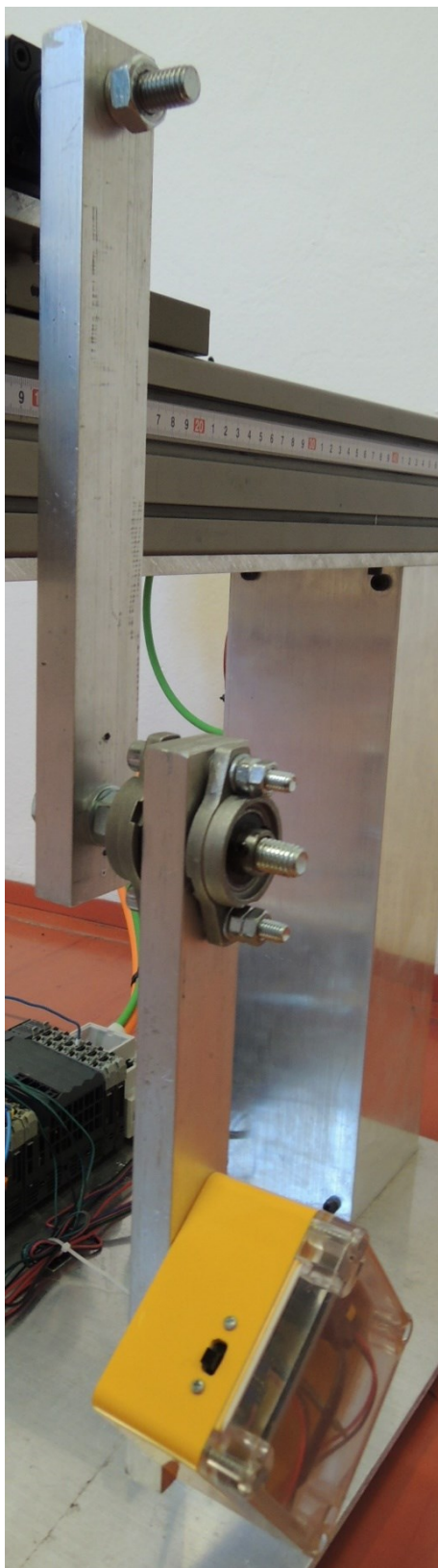


Obr. 20 Různé varianty cílů řízení dvojitého kyvadla

První varianta je nezajímavá, protože oba články se nachází ve stabilním stavu. Varianty B) a C) jsou z pohledu náročnosti složitější než jednoduché inverzní kyvadlo, a poslední je nejvíce náročná. Ve všech třech případech lze při hledání funkčního řízení postupovat podobně jako v první části práce, tudíž nejprve je vhodné hledat regulátory, které udrží články v žádaném stavu, a zároveň zamezí vozíku vyjetí mimo povolený rozsah dráhy. Dalším stupněm vývoje je řízené vyšvihnutí do požadovaného stavu.



2.2 Konstrukce kyvadla



Kyvadlo je tvořeno dvěma hliníkovými hranoly s obdélníkovou podstavou o rozměrech 10 a 33 mm s délkou 250 mm. První článek kyvadla, který je uchycen na otáčející se hřídeli vozíku, má na svém konci otvor pro připevnění šroubu M10, jenž slouží jako nosný prvek druhého článku kyvadla. To je osazeno dvěma přírubovými ložisky s označením KFL000, jak ukazuje fotografie na obrázku 21. Nepřesnost vrtaných děr má za následek špatnou souosost ložiskových otvorů, což v případě velkého utažení ložisek k hranolu způsobuje velkou třecí sílu, jejíž velikost je navíc závislá na úhlu natočení.

Z hlediska rozložení váhy obou článků by bylo vhodnější, aby tato ložiska byla umístěna na prvním článku kyvadla. Toto řešení však dovoluje dodatečně umístit inkrementální rotační snímač na vnější stranu přípravku. V případě, že by ložisková pouzdra byla umístěna na prvním článku, tak by takovýto snímač musel být umístěn na vnitřní straně, což by vzhledem k rozměrům snímače vedlo ke kolizi s konstrukcí přípravku.

Měření úhlu natočení je řešeno jiným způsobem než za použití inkrementálního rotačního čidla, což popisuje následující kapitola. Na konci druhého článku kyvadla je umístěn měřicí modul, který zároveň slouží jako závaží. Celková hmotnost druhého článku kyvadla včetně ložisek a měřicího modulu je 653 g, hmotnost prvního článku kyvadla včetně nosného šroubu činí 409 g.

Obr. 21 Fotografie dvojitého kyvadla



2.3 Měření úhlu natočení druhého článku kyvadla

Měření této veličiny je velmi problematické z hlediska konstrukce kyvadla, protože naměřený signál se nějakým způsobem musí přivést do PLC. Tělo snímače, ať už funguje na jakémkoliv principu, musí být ze své podstaty součástí jednoho článku kyvadla, z toho důvodu je drátové propojení s PLC velmi komplikované především z pohledu zabránění překrucování vodičů. K odstranění tohoto problému lze použít tzv. kroužkové sběrače, které jsou však velmi drahé. Z toho důvodu byl v rámci práce vytvořen modul, který informaci o úhlu natočení přenáší bezdrátově.

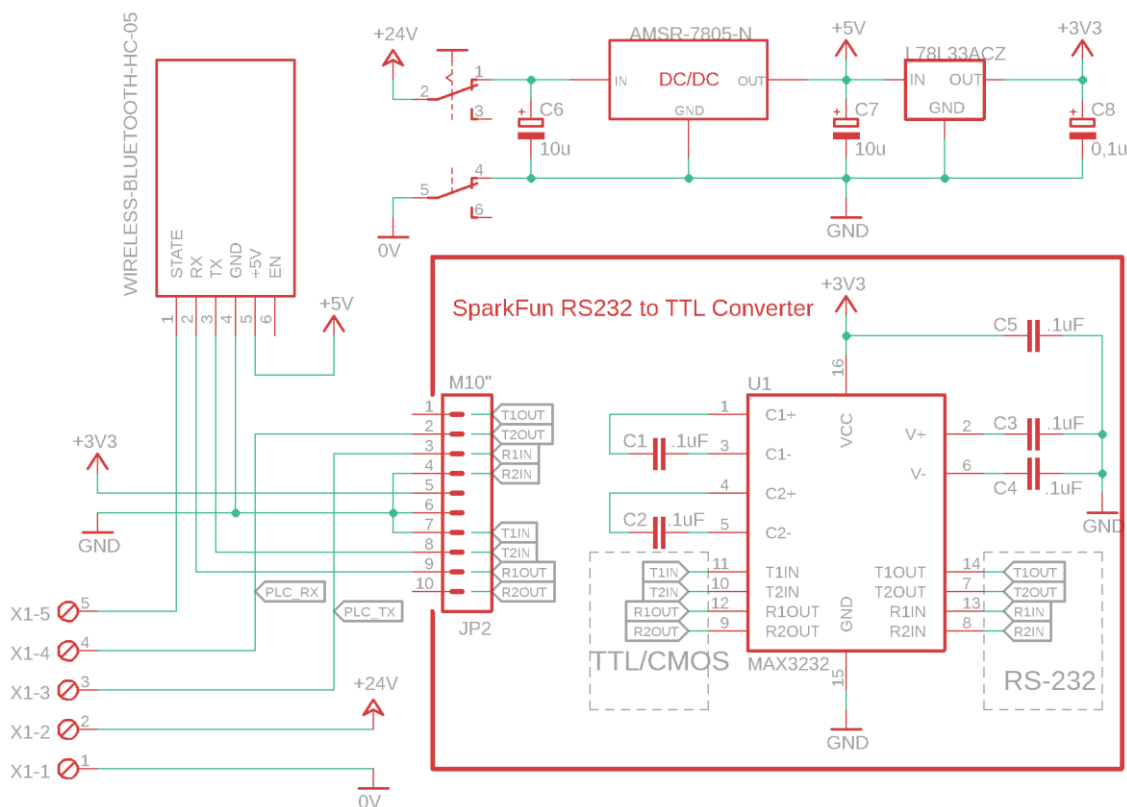
Modul je napájen devíti voltovou baterií, proto by princip měření úhlu natočení měl být co nejvíce úsporný z hlediska spotřeby elektrické energie. Z tohoto pohledu je pravděpodobně nejvýhodnější technologie MEMS. Jedná se o miniaturní elektromechanický systém, který je integrován v křemíkové struktuře procesoru, díky tomu je tato technologie součástí například mobilních telefonů a jiných zařízení. Technologie MEMS těmito zařízeními dává informaci o zrychlení ve všech třech osách, z čehož lze mimo jiné získat data o úhlu natočení.

Bezdrátový přípravek je navržen na elektronické platformě Arduino. Jedná se o otevřený projekt pro tvorbu malých počítačových desek a rozšiřujících modulu. Těmi v tomto případě jsou bezdrátové Bluetooth moduly *HC 05* a elektronický gyroskop *GY 521* s technologií MEMS. Vysílací část umístěná na druhém článku kyvadla má jako řídicí počítačovou desku *Leonardo Pro Micro* s procesorem *ATmega32u4* pracující na frekvenci *16 MHz*.

2.3.1 Schémata zapojení

Pro realizaci bezdrátového přenosu dat se musí sestavit jak vysílací část na kyvadle, tak přijímající část jako rozšiřující modul pro PLC, jehož schéma zapojení je k dispozici na obrázku 22. Bluetooth modul komunikuje s ostatními zařízeními pomocí sériového rozhraní na napěťové úrovni *3,3 V*, sériové rozhraní na PLC odpovídá standardu *RS-232*, jehož napěťové úrovně logických hodnot se pohybují v rozsahu $\pm 15 V$. Rozšiřující modul pro PLC tedy kromě Bluetooth modulu obsahuje také převodník mezi těmito napěťovými úrovněmi. Napájení obou zařízení zajišťuje měnič a stabilizátor napětí.

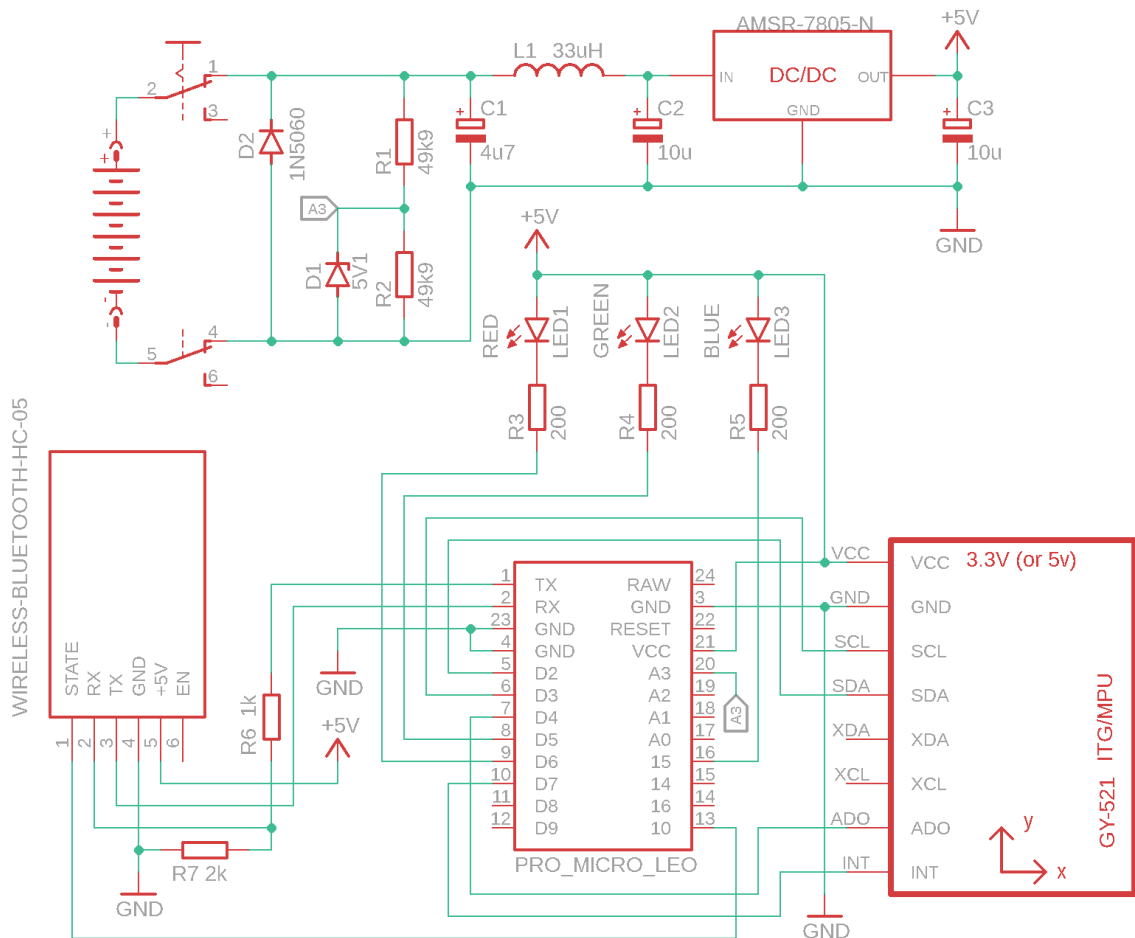




Obr. 22 Schéma bezdrátového přijímače s převodníkem

Měřicí a vysílací modul je z hlediska počtu součástek složitějším zařízením, jehož schéma zapojení zobrazuje obrázek 23. Bluetooth modul je spojen s počítačovou deskou pomocí sériového rozhraní *USART*, přičemž obě zařízení používají rozdílné napětové úrovně, proto je výstup *TX* počítačové desky veden přes dělič napětí. Sběrnice *I²C* zajišťuje komunikaci elektronického gyroskopu s Arduinem. Od Bluetooth modulu a gyroskopu vedou do řídicí desky další vodiče, které poskytují informaci o stavu připojení, nebo vyžadují pozornost na vygenerované přerušení, případně jim počítačová deska může měnit *I²C* adresu gyroskopu. Zapojení dále obsahuje tři LED diody, které informují uživatele o stavu zařízení, měnič napětí s filtračními součástkami, dělič napětí pro kontrolu stavu baterie, usměrňovací diodu jako ochranu proti přepólování a Zenerovu diodu jako ochranu proti přepětí na analogovém pinu měřící stavu baterie.





Obr. 23 Schéma bezdrátového modulu s gyroskopem

2.3.2 Konfigurace bezdrátových Bluetooth modulů

Nastavení modulů *HC 05* lze provést na nepájivém poli s počítačovou deskou *Leonardo Pro Micro*. Zapojení je velmi jednoduché, kromě napájení postačuje propojit piny *RX* a *TX* Bluetooth modulu s piny 1 a 2 počítačové desky, a to včetně děliče napětí jako tomu je obrázku 23. Modul *HC 05* pracuje ve dvou režimech, v normálním a v AT módu, v kterém lze nastavit parametry normálního režimu. Do tohoto režimu se zařízení dostane pokud je během zapnutí napájení stisknuté tlačítko u pinu *EN*.

Konfiguraci lze provést za pomoci vývojového prostředí Arduino a její funkce s názvem *Seriový monitor*. Ten pracuje jako obousměrný textový terminál, text nebo znaky, které jsou zadány na příkazovém řádku se odešlou přes USB a sériový převodník do počítačové desky, a naopak příchozí text nebo znaky se zde zobrazí. *Leonardo Pro Micro* v tomto případě funguje jako sprostředkovatel datového spojení mezi počítačem a Bluetooth modulem, jeho firmware je součástí elektronických dat, viz příloha A. Příkazů k nastavení



modulu je přibližně 30, a jejich podoba vypadá následovně `AT+<Příkaz>`, za řetězec s příkazem se přidává symbol otazníku pro případ, že chceme zjistit daný parametr, nebo `symbol = a hodnota`, díky kterému se daný parametr nastaví.

Před konfigurací je vhodné vrátit zařízení do továrního nastavení příkazem `AT+DEFAULT`. Následně se příkazem `AT+UART=115200,0,0` nastaví rychlost sériového přenosu, počet stop bitů, přičemž číslo nula znamená jeden stop bit, a parita, nula znamená bez parity. Dále příkazem `AT+ROLE=1` nastavíme jedno zařízení jako *Master*, druhé změnou parametru na 0 jako *Slave*. Příkaz `AT+CMODE=0` dovolí, aby se zařízení propojilo pouze s fyzickou adresou, která se nastaví příkazem `AT+BIND=<adresa druhého zařízení>`. Fyzickou adresu zařízení lze zjistit příkazem `AT+ADDR?`. Tyto příkazy k základní komunikaci postačují, zařízení však má mnohem více příkazů, kterými lze určit například zabezpečení, testováno to nebylo. Uvedená posloupnost příkazů se nemusí dodržet.

2.3.3 Program pro vysílání dat z bezdrátového modulu

Software přípravku se dělí na dvě části, inicializační a cyklickou. V inicializační části se postupně nastavují například módy pinů, komunikace jak na sériové lince, tak na I^2C sběrnici. Pro možnost pohodlného ovládání gyroskopu se použije knihovna, jenž je dostupná z webových stránek [20]. Díky knihovně lze v inicializační části zvolit citlivost akcelerometru, a maximální rychlost otáčení senzoru ve stupních za sekundu, správné použití je částečně vysvětleno přímo v knihovně. Dále se v senzoru mohou nastavit ofsety, které ovlivňují polohu nul měřených veličin, program pro zjištění ofsetů se musí spustit samostatně.

V cyklické části je vložena smyčka, jejíž vnitřní část se vykonává dokud nepřijde přerušení od gyroskopu. Po příchozím přerušení program vyzvedne přijatá data, upraví je, přiřadí do připravených proměnných. Následně se program zase dostane do smyčky, kde čeká na další přerušení. Uvnitř smyčky jsou přítomny tři hlavní větvení, první z nich zapíná a vypíná vybrané LED diody jako informaci pro obsluhu, že zařízení pracuje správně. Druhé větvení každé dvě milisekundy pošle data o úhlu natočení do Bluetooth modulu. Poslední část bliká modrou LED diodou v závislosti na stavu baterie.



Formát odesílaných dat se skládá z patnácti bajtů, kde první, šestý a jedenáctý bajt jsou konstantní hodnoty znaku z ASCII tabulky, jedná se symboly x , y a z . Za každý symbol jsou vložena čísla z proměnných typu `float`, které představují úhel natočení v dané ose. Otázkou je, za jakou dobu se data skutečně přenesou do bezdrátového modulu. Bajt včetně režijních dat obsahuje 10 bitů, 8 pro data, 1 start bit a 1 stop bit. Rychlost přenosu dat je 115200 baud/s , počet baudů, neboli bitů včetně režijních, je 150. Tudiž jedna kompletní zpráva se odešle za $1,30208\bar{3} \text{ ms}$, z čehož lze soudit, že zde ještě existuje rezerva pro případné kontrolní bajty nebo informaci o stavu baterie.

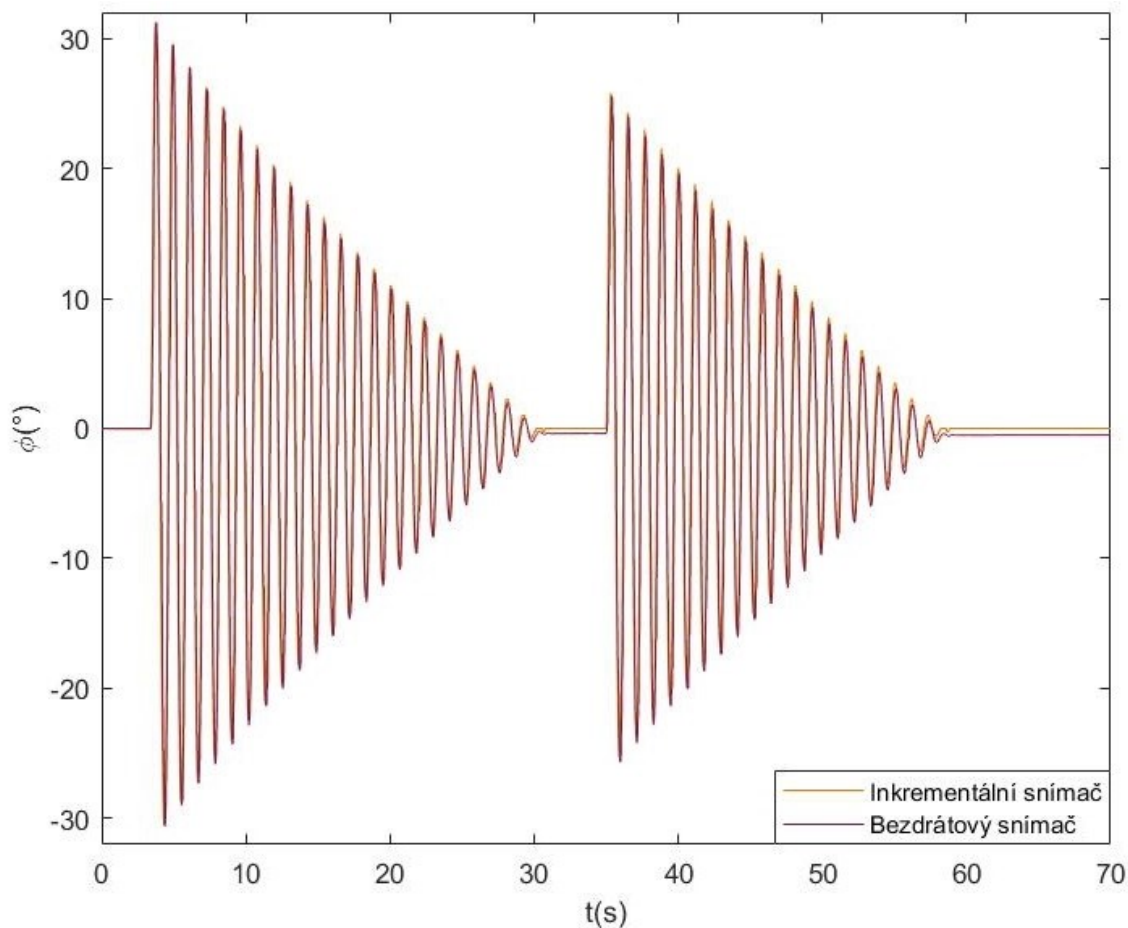
2.3.4 Program pro příjem dat v PLC

Program *Receiver* v programové struktuře PLC se nachází v druhé cyklické třídě s periodou vzorkování 2 ms . Důvodem této pozice je střídavé čtení dat s uvolňováním bufferu, v jednom cyklu automatu je totiž možné najednou vyčíst data ze sériového rozhraní s uvolňovat buffer. Tělo programu je převzato z příkladu vývojového prostředí pro práci se sériovým portem a knihovnou *DVFrame*. Program je přeměněn v konfigurační části, kde se nastavuje jméno zařízení, které obsahuje sériové rozhraní, dále se zde nastavuje typ zařízení, přenosová rychlost, počet datových bitů, stop bitu, a parita. Toto nastavení musí být shodné s fyzickou konfigurací. V části, kde se kopírují přijatá data do proměnných je navíc přidán program, který analyzuje přijatá data a případně je přiřadí do globálních proměnných, pro využití v jiných programech.

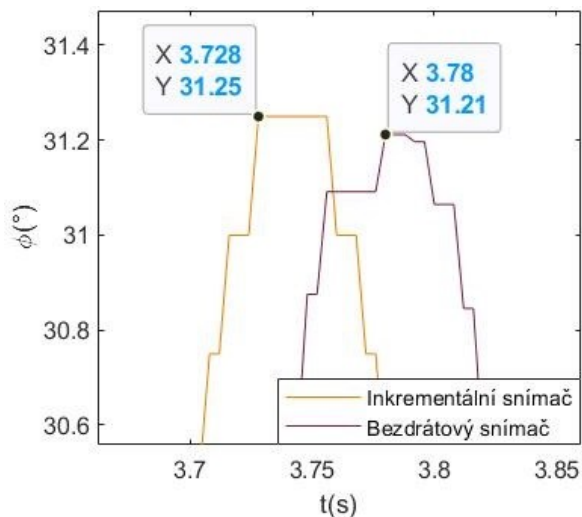
2.3.5 Ověření funkčnosti zařízení

Funkčnost řešení se může ověřit tak, že toto zařízení se připevní na jednoduché kyvadlo, díky tomu lze porovnat data z bezdrátového modulu s daty z inkrementálního rotačního čidla, které je referenční. Prvním dobrým poznatkem je, že z údajů o úhlu natočení ze třech os lze k určení úhlu natočení použít pouze jeden, v tomto případě se jedná o rotaci, která je v datech označena jako x . Průběh experimentálního měření je na obrázku 24, na první pohled je shoda dat poměrně slušná, avšak jsou zde patrné časem se zvětšující odchylky od ustálených hodnot, což je vlastnost známá pod pojmem drift. Ten je nejvíce patrný při zapnutí zařízení, kdy je vhodné počkat alespoň minutu než se gyroskop ustálí. Nicméně z obrázku lze usoudit, že tento jev bude zaznamenatelný i po poměrně dlouhé době od zapnutí.





Obr. 24 Porovnání dat z inkrementálního snímače a bezdrátového snímače

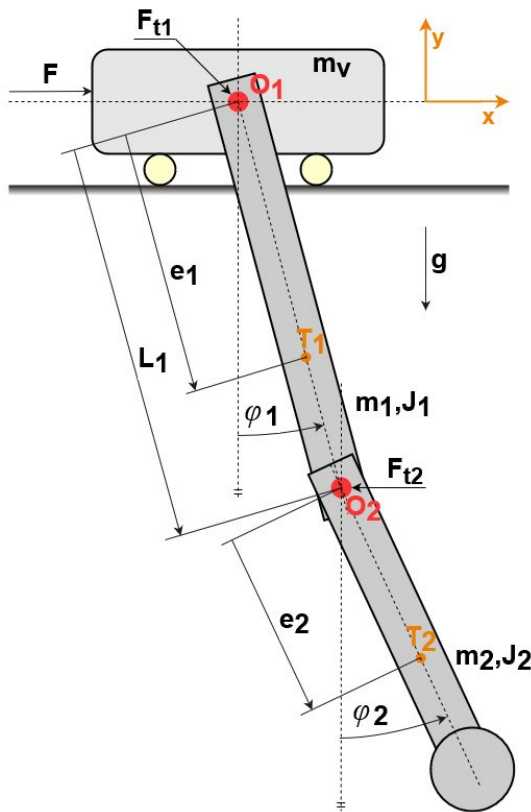


Obr. 25 Detail dat z inkrementálního a bezdrátového snímače

Mnohem větším problémem je dopravní zpoždění, jak ukazuje obrázek 25. Jedná se detailní přiblížení grafu z obrázku 24. Velikost dopravního zpoždění zvýrazněných bodů je 52 ms, což představuje třinácti násobek vzorkovací periody. Křížová korelace dat odhalila, že jejich nejlepší shoda je při posunutí o 14 period vzorkování. S tímto poznatkem se musí pracovat, jak při hledání parametrů modelu, tak při návrhu regulátorů.



2.4 Matematicko-fyzikální model



Obr. 26 Náčrt dvojitého inverzního kyvadla

Definice parametrů pro vozík a první článek kyvadla zůstává zachována z definice pro jednoduché inverzní kyvadlo, jak ukazuje náčrt na obrázku 26. K nim se navíc přidává parametr L_1 , který představuje vzdálenost mezi otočnými osami O_1 a O_2 , dále je to hmotnost druhého článku kyvadla m_2 , moment setrvačnosti J_2 , vzdálenost těžiště e_2 od osy O_2 a na čase závislý parametr třecí síla $F_{t2}(t)$. Novými proměnnými veličinami jsou úhel natočení kyvadla $\varphi_2(t)$, úhlová rychlost $\omega_2(t)$ a úhlové zrychlení $\varepsilon_2(t)$. Nulový úhel φ_2 nastává v momentě, kdy druhý článek kyvadla směřuje dolů bez ohledu na natočení prvního článku.

2.4.1 Pohybové rovnice

Pohybové rovnice lze sestavit pomocí Lagrangeových rovnic druhého druhu dle rovnice (1.3) stejným způsobem jako v kapitole 1.3.1. Tudíž stanoví se kartézské souřadnice zájmových těles pomocí zobecněných souřadnic, které jsou totožné s veličinami $x_0(t)$, $\varphi_1(t)$ a $\varphi_2(t)$. Kartézské souřadnice a rychlosti pro těžiště T_1 jsou shodné s rovnicemi (1.4) a (1.5), pro těžiště T_2 jsou uvedeny v rovnicích (2.1) a (2.2).

$$\begin{aligned} x_{T_2}(t) &= x_0(t) + L_1 \cdot \sin \varphi_1(t) + e_2 \cdot \sin \varphi_2(t) \\ y_{T_2}(t) &= -L_1 \cdot \cos \varphi_1(t) - e_2 \cdot \cos \varphi_2(t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{T_2}(t) &= \dot{x}_0(t) + L_1 \cdot \dot{\varphi}_1(t) \cdot \cos \varphi_1(t) + e_2 \cdot \dot{\varphi}_2(t) \cdot \cos \varphi_2(t) \\ \dot{y}_{T_2}(t) &= L_1 \cdot \dot{\varphi}_1(t) \cdot \sin \varphi_1(t) + e_2 \cdot \dot{\varphi}_2(t) \cdot \sin \varphi_2(t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Kinetická a potenciální energie systému dvojitého inverzního kyvadla vznikne rozšířením rovnic (1.8) a (1.9) o další členy, jak je uvedeno v rovnicích (2.3) a (2.4).



$$E_{k2}(t) = E_{k1}(t) + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot [\dot{x}_{T2}^2(t) + \dot{y}_{T2}^2(t)] + \frac{1}{2} \cdot J_2 \cdot \omega_2^2(t) \quad (2.3)$$

$$E_{p2}(t) = E_{p1}(t) - m_2 \cdot L_1 \cdot g \cdot \cos \varphi_1(t) - m_2 \cdot e_2 \cdot g \cdot \cos \varphi_2(t) \quad (2.4)$$

Výsledné pohybové rovnice jsou pro zápis již velmi komplikované, nicméně pro rovnici popisující vozík se po odstranění členů s úhly, úhlovými rychlostmi a zrychleními oproti jednoduchému inverznímu kyvadlu nic nemění. Stále zůstává v platnosti, že zrychlení vozíku se rovná vstupnímu signálu. Ve výsledných rovnicích pro kyvadla lze však vypořizovat určitá pravidla, která dovolují zápis zobecnit do podoby maticové rovnice, a to i pro n-článkový systém kyvadel, jak uvádí literatura [21]. Trochu odlišný způsob sestavení maticové rovnice pro systém se třemi kyvadly uvádí literatura [8], na což může mít vliv jinak definovaný souřadný systém. Vlastní výpočet pohybových rovnic podle vztahu (1.3) odpovídal variantě z literatury [8] kromě členů obsahující zrychlení vozíku, neboť pohyb kyvadel je zprostředkován přímým napojením na hřídel motoru. Členy rovnic, kde se vyskytuje zrychlení, jsou dodány z [21]. Proto zde uvedená maticová rovnice (2.5) je kombinací obou variant. Třecí síly jsou zde uvažovány pouze ve variantě viskózního tření. Vyjádření jednotlivých členů poskytuje příloha D.

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\varphi}) \cdot \ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{N}(\boldsymbol{\varphi}) \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}}^2 + \mathbf{F}_t \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{P}(\boldsymbol{\varphi}) = -\mathbf{Q}(\boldsymbol{\varphi}, \ddot{x}_0) \quad (2.5)$$

Rozepsané pohybové rovnice pro kyvadla jsou uvedeny v rovnicích (2.6) a (2.7), z důvodu přehlednosti zápisu jsou odstraněny časové závislosti veličin.

$$(J_1 + m_1 e_1^2 + m_2 L_1^2) \ddot{\varphi}_1 + m_2 e_2 L_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{\varphi}_2 + m_2 e_2 L_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_2^2 + (F_{v1} + F_{v2}) \dot{\varphi}_1 - F_{v2} \dot{\varphi}_2 + (m_1 e_1 + m_2 L_1) g \sin \varphi_1 = -m_1 e_1 \ddot{x}_0 \cos \varphi_1 \quad (2.6)$$

$$(J_2 + m_2 e_2^2) \ddot{\varphi}_2 + m_2 e_2 L_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{\varphi}_1 - m_2 e_2 L_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1^2 - F_{v2} \dot{\varphi}_1 + F_{v2} \dot{\varphi}_2 + m_2 e_2 g \sin \varphi_2 = -m_2 e_2 \ddot{x}_0 \cos \varphi_2 \quad (2.7)$$



2.4.2 Simulační model

Pro jednoduché inverzní kyvadlo se z pohybových rovnic určil stavový model a z něho pak simulační schéma. Vytvoření stavového modelu lze chápat jako přeznačení některých veličin, pro zjednodušení a přehlednost simulačního modelu není potřeba toho přeznačení provádět. Důležité je z rovnic (2.6) a (2.7) vyjádřit $\ddot{\varphi}_1$ a $\ddot{\varphi}_2$ tak, aby na pravé straně rovnice tyto veličiny nebyly. K tomu lze elegantně využít maticového zápisu rovnic [8], kde stačí najít inverzi matice $\mathbf{M}(\boldsymbol{\varphi})$, a tou pak maticovou rovnici (2.5) násobit zleva. Po úpravě lze vektor $\ddot{\boldsymbol{\varphi}}$ osamostatnit, viz rovnice (2.8).

$$\ddot{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{\varphi}) \cdot [-\mathbf{Q}(\boldsymbol{\varphi}, \ddot{\boldsymbol{x}}_0) - \mathbf{N}(\boldsymbol{\varphi}) \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}}^2 - \mathbf{F}_t \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}} - \mathbf{P}(\boldsymbol{\varphi})] \quad (2.8)$$

Inverzní matice $\mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{\varphi})$ je uvedena v příloze D, rozepsané tvary rovnic jsou uvedeny v rovnicích (2.9) a (2.10). Výrazy jsou velmi složité, což zvyšuje pravděpodobnost vytvoření chyby ať už v zápisu samotného výrazu tak následně při přenesení do simulačního schématu. Spousta menších výrazů je použita vícekrát, proto je vhodné i z důvodu přehlednosti vytvářet podsystémy a opakující se výrazy vytvořit pouze jednou a jejich výstupní signál rozvětvit do všech potřebných částí.

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 = & \frac{-J_2 - m_2 e_2^2}{m_2^2 e_2^2 L_1^2 \cos^2(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) - (J_1 + m_1 e_1^2 + m_2 L_1^2) \cdot (J_2 + m_2 e_2^2)} \cdot \\ & \cdot [-m_1 e_1 \ddot{x}_0 \cos \varphi_1 - m_2 e_2 L_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_2^2 - (F_{v1} + F_{v2}) \dot{\varphi}_1 + F_{v2} \dot{\varphi}_2 - (m_1 e_1 + m_2 L_1) g \sin \varphi_1] + \\ & + \frac{m_2 e_2 L_1 \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t))}{m_2^2 e_2^2 L_1^2 \cos^2(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) - (J_1 + m_1 e_1^2 + m_2 L_1^2) \cdot (J_2 + m_2 e_2^2)} \cdot \\ & \cdot [-m_2 e_2 \ddot{x}_0 \cos \varphi_2 + m_2 e_2 L_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1^2 + F_{v2} \dot{\varphi}_1 - F_{v2} \dot{\varphi}_2 - m_2 e_2 g \sin \varphi_2] \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_2 = & \frac{m_2 e_2 L_1 \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t))}{m_2^2 e_2^2 L_1^2 \cos^2(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) - (J_1 + m_1 e_1^2 + m_2 L_1^2) \cdot (J_2 + m_2 e_2^2)} \cdot \\ & \cdot [-m_1 e_1 \ddot{x}_0 \cos \varphi_1 - m_2 e_2 L_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_2^2 - (F_{v1} + F_{v2}) \dot{\varphi}_1 + F_{v2} \dot{\varphi}_2 - (m_1 e_1 + m_2 L_1) g \sin \varphi_1] + \\ & + \frac{-J_1 - m_1 e_1^2 - m_2 L_1^2}{m_2^2 e_2^2 L_1^2 \cos^2(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) - (J_1 + m_1 e_1^2 + m_2 L_1^2) \cdot (J_2 + m_2 e_2^2)} \cdot \\ & \cdot [-m_2 e_2 \ddot{x}_0 \cos \varphi_2 + m_2 e_2 L_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1^2 + F_{v2} \dot{\varphi}_1 - F_{v2} \dot{\varphi}_2 - m_2 e_2 g \sin \varphi_2] \end{aligned} \quad (2.10)$$



2.4.3 Parametrizace modelu

Pro nalezení parametrů modelu byl použit stejný postup jako pro jednoduché inverzní kyvadlo. Funkce `fminsearch()` v Matlabu generuje parametry a na základě porovnání výstupu ze simulace a reálného přípravku dokáže hledat optimálnější hodnoty parametrů. K naměření reálných dat byl použit regulátor pro vyšvihnutí z první části práce, který během několika sekund vygeneroval sekvenci zrychlení, která z klidového stavu dokázala rozpohybovat obě kyvadla.

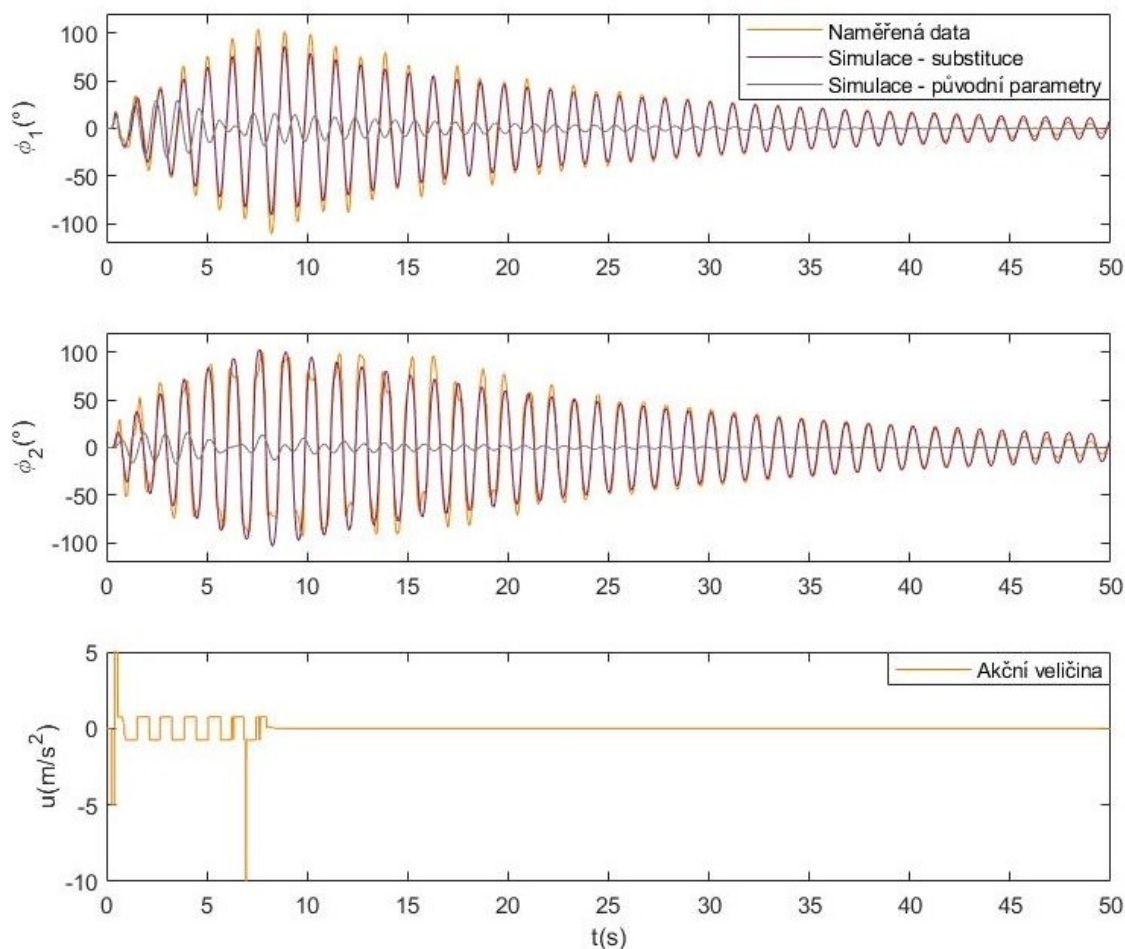
Model systému s dvěma kyvadly má celkem 9 parametrů. Tato metoda však nebyla schopna nalézt jejich odpovídající hodnoty, které by v simulacích vedly k uspokojivé shodě s reálnými daty. Důvodem může být vzájemná závislost některých parametrů, což je zároveň řešeno i v literatuře [8] a [21]. Dvojitě inverzní kyvadlo by mělo mít pouze 5 nezávislých parametrů, které lze dle [21] určit výpočtem z reálných parametrů. Problematický je však zpětný přepočítání, který v literatuře uveden není, bez toho však není možné model simulovat a získat tak jeho výstupy k porovnání.

V literatuře [8] jsou nezávislými parametry některé substituce v maticové rovnici modelu, které jsou uvedeny v příloze D, nicméně ani zde není uvedeno, jakým způsobem lze zpětně získat původní parametry modelu. Z toho důvodu byla testována možnost, kdy funkce `fminsearch()` generuje nezávisle hodnoty substitucí z přílohy D. Výsledek je mnohem lepší než v předchozí variantě, což dokazuje obrázek 27, kde lze obě varianty porovnat s naměřenými daty. Hodnoty nalezených původních parametrů i substitucí jsou v tabulce 5 a to včetně hodnoty kritéria, jenž ukazuje míru shody s naměřenými daty.

Tabulka 5 Nalezené parametry modelu dvojitěho kyvadla

Původní parametry		Substituce	
m_1 (kg)	1,612	M_1	0,02528
J_1 (kg · m ²)	0,001373	M_2	0,01785
e_1 (m)	0,1651	N_{12}	0,01129
L_1 (m)	0,385	P_1	1,316
m_2 (kg)	0,3774	P_2	0,8505
J_2 (kg · m ²)	0,000227	Q_1	0,1219
e_2 (m)	0,000525	Q_2	0,08529
F_{V1} (mN)	018,84	F_{V1} (mN)	8,409
F_{V2} (mN)	0,218	F_{V2} (mN)	0,03048
J_{krit} (rad · s)	47,41	J_{krit} (rad · s)	2,311





Obr. 27 Porovnání naměřených dat se simulacemi dvojitého kyvadla

Simulovaný model se substitučními parametry lze použít pro hledání regulátorů, nicméně se musí brát na vědomí, že tento model není dokonalý. Například odezva druhého článku kyvadla neobsahuje náhlé změny při změně směru rychlosti prvního článku kyvadla, což lze na naměřených datech pozorovat jako nedokončené oblouky. Určité zlepšení by mohlo nastat při změně modelace tření. Viskózní tření má v tomto případě stejnou vlastnost jako u jednoduché varianty kyvadla, dochází zde totiž k pomalejšímu ustalování stavových veličin.

2.5 Způsoby řízení

Výše popsaný reálný systém dvojitého inverzního kyvadla má spoustu vlastností, které obecně znesnadňují řízení jakéhokoliv systému. Tím je hlavně dopravní zpoždění, jež je přítomno na měřeném signálu úhlu natočení druhého článku kyvadla. Kvalitu případné regulace určitě nevylepší ani občasný výpadek této informace v důsledku rušení



bezdrátové komunikace. Spousta vědeckých článků, které řeší řízení dvojitého inverzního kyvadla, nepředpokládá přítomnost dopravního zpoždění na jakékoliv měřené veličině. Další vývoj tohoto přípravku by měl vést k odstranění této vlastnosti, neboť tento signál by byl také použit například k odhadu stavu úhlové rychlosti, ta by v důsledku byla stanovována také velice nepřesně.

Způsobů řízení na základě dostupných akademických prací se nabízí velice mnoho. Klasické lineární PID regulátory jsou k tomuto účelu používány spíše výjimečně, a obvykle se k nim přidávají další rozšíření, které aktivně mění parametry regulátoru v závislosti na stavu systému. Změna parametrů může být řízena fuzzy logikou dle článku [22] a [23]. Mnohem častější variantou řízení je stavový regulátor, jehož parametry jsou získány pomocí metody LQR, viz [24], ten může být dále doplněn optimalizačním faktorem dle literatury [25]. Autor videa [19] v diskuzi zmiňuje, že používá časově proměnný stavový LQR regulátor. Dále lze uspět například s nelineárním prediktivním řízením [26], případně s robustním regulátorem [27].



3 Závěr

Hlavním cílem první části práce je nalezení dvou variant řízení systému inverzního kyvadla. Tomu předchází matematicko-fyzikální analýza systému, díky které lze postupně sestavit pohybové rovnice, nelineární stavový model a simulační schéma. Část práce zkoumá účinky různých modelů tření, které jsou součástí modelu inverzní kyvadla. Při hledání parametrů jednotlivých modelů se ukázalo, že běžně uvažované viskózní tření vede k nejhorší shodě v porovnání s naměřenými daty z reálného přípravku. Lepších výsledků dosahuje například součet smykového a viskózního tření, tento model tření je také určitým kompromisem mezi počtem parametrů a dosažené přesnosti.

Pro udržení kyvadla v horním rovnovážném stavu jsou použity dva principy, a to kaskádní řízení s dvěma PID regulátory a stavová regulace. Parametry PID regulátorů první zmíněné možnosti se hledají dvěma metodami, a to za použití nástroje PID Tuner v prostředí MATLAB, a pomocí numerické optimalizační úlohy. Výsledné hodnoty parametrů jsou poměrně rozdílné, nejvíce však u integrační složky vnitřní smyčky, která byla v případě PID tuneru až sto tisíc krát větší. Výsledky regulace obou nastavení, jak v případě simulací, tak na reálném přípravku, jsou podobné a stabilní.

Velmi špatné výsledky měla v počátcích stavová regulace, kde reálný přípravek generoval několikanásobně větší akční veličinu než simulace. Ta musí být dodatečně násobena konstantou v rozmezí od 0,05 až 0,1. Důvod je s největší pravděpodobností spojen s odhadováním úhlové rychlosti pomocí nelineárního pozorovatele. Průběhy této veličiny jsou v porovnání se simulacemi velmi rozdílné. Výsledek stavové regulace je proto závislý jak na parametrech pozorovatele, tak na parametrech regulátoru.

Porovnájí-li se oba principy řízení, tak ani jedno řešení nedokázalo ustálit stavové veličiny tak, aby nedocházelo k jejich kmitání. Zároveň obě řešení jsou citlivé na působení trvalé poruchy na úhlu natočení, díky tomu regulátory nedokáží udržet vozík v blízkosti požadované polohy. PID regulace má výhodu v rychlejší a agresivnější reakci na změnu žádané polohy vozíku, a také má větší odolnost vůči záměrnému vychýlení kyvadla. Naopak výhodou stavové regulace je menší spotřeba energie, neboť ta v ustálení kmitá pomaleji. Její reakce na náhlou poruchu případně změnu polohy vozíku je velmi klidná.



Algoritmus založený na výpočtu energie kyvadla se stará o vyšvihnutí kyvadla do horní rovnovážné polohy. Řešení však obsahuje řadu omezení, které nedovolí vozíku, aby vyjel mimo dráhu, ty však samotný proces zpomalují. Důraz byl kladen hlavně na spolehlivost vyšvihnutí, ta se však ztrácí v případě benevolentnějších omezení.

Druhá část práce se zabývá dvojitým inverzním kyvadlem. Je zde řešeno problematické měření úhlu natočení druhého článku kyvadla. K tomuto účelu byl vytvořen bezdrátový měřicí přípravek. Posloupnost přenosu změřené informace přes několik zařízení a komunikačních cest do řídicího členu vede ke vzniku nezanedbatelného dopravního zpoždění, které je asi čtrnáctkrát větší než perioda vzorkování.

Způsob sestavení pohybových rovnic a simulačního modelu byl stejný v porovnání se systémem jednoduchého inverzního kyvadla, parametrizace však nikoliv. Problém totiž je ve vzájemné závislosti hledaných parametrů, nezávislost částečně zajišťují substituce, které zpřehledňují simulační model. Ani tak simulační model nedokáže vytvořit stejnou odezvu jako reálný systém, nicméně je hodně podobná.

Rozvíjení této práce by mělo vést, v případě jednoduchého kyvadla, k otestování dalších variant regulátorů, které udrží kyvadlo v horní poloze. Velice nadějná je jakákoliv varianta prediktivního řízení. V případě dvojitého kyvadla, by snaha měla vést k odstranění dopravního zpoždění na měřeném úhlu druhého článku kyvadla. Dále k zpřesnění simulačního modelu, které by mělo vést k lepší shodě s naměřenými daty. Následně se nabízí možnost vyzkoušet některé navrhované způsoby řízení.



Seznam použité literatury

- [1] VOJTÍŠKOVÁ, Lenka. Kyvadlo. In: *FyzWeb* [online]. Praha: Katedra didaktiky fyziky MFF UK, 2007 [cit. 2020-01-23]. ISSN 1803-4179. Dostupné z: http://fyzweb.cz/materialy/aplety_hwang/Kyvadlo/Pendulum_cz.html
- [2] MAREŠ, Vlastimil. *Nelineární řízení modelu kyvadla*. Praha, 2000. Dostupné z: http://iat.fs.cvut.cz/109/files/DP/Mares_Vlastimil_DP2000_kyvadlo/diplomova_prace_kyvadlo.htm. Diplomová práce. České vysoké učení technické, Fakulta strojní, Ústav přístrojové a řídicí techniky. Vedoucí práce Ing. Marie Martinásková.
- [3] Slovník: Kyvadlo. *Bombastus* [online]. Koloděje nad Lužnicí: NATIVUS [cit. 2020-01-30]. Dostupné z: <https://www.bombastus.cz/slovník/kyvadlo/>
- [4] BALAN, R., V. MATIES, O. HANCU a S. STAN. A predictive control approach for the inverse pendulum on a cart problem. In: *IEEE International Conference Mechatronics and Automation, 2005* [online]. IEEE, 2005, s. 2026-2031 [cit. 2020-01-03]. DOI: 10.1109/ICMA.2005.1626874. ISBN 0-7803-9044-X. Dostupné z: <http://ieeexplore.ieee.org/document/1626874/>
- [5] BOUBAKER, Ofa. The inverted pendulum: A fundamental benchmark in control theory and robotics. In: *International Conference on Education and e-Learning Innovations* [online]. IEEE, 2012, s. 1-6 [cit. 2020-01-03]. DOI: 10.1109/ICEELI.2012.6360606. ISBN 978-1-4673-2226-3. Dostupné z: <http://ieeexplore.ieee.org/document/6360606/>
- [6] KOLAŘÍK, Jaroslav. Nestabilní systémy. *Databáze nestabilních systémů* [online]. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2012 [cit. 2020-01-04]. Dostupné z: <http://www.unstable-systems.cz/index.php/cs/nestabilni-systemy>
- [7] LUNDBERG, Kent a Taylor BARTON. History of Inverted-Pendulum Systems. *IFAC Proceedings Volumes* [online]. 2010, **42**(24), 131-135 [cit. 2020-01-04]. DOI: 10.3182/20091021-3-JP-2009.00025. ISSN 14746670. Dostupné z: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1474667015316049>
- [8] AWREJCEWICZ, J. *Classical mechanics: dynamics*. London: Springer, 2012. Advances in mechanics and mathematics, v. 29. ISBN 978-1-4614-3739-0.
- [9] LANGER, Jiří a Jiří PODOLSKÝ. *Teoretická mechanika* [online]. Praha, 2013 [cit. 2020-03-17]. Dostupné z: <http://utf.mff.cuni.cz/vyuka/OFY003/TEXTY/lagrange.pdf>. Studijní text k



přednášce NOFY003. Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, Ústav teoretické fyziky.

- [10] KORONDI, Péter, János HALAS, Krisztián SAMU, Attila BOJTOS a Péter TAMÁS. *Robot Applications: Models of Friction* [online]. Budapešť: BME MOGI, 2014 [cit. 2020-02-24]. ISBN 978-963-313-136-7. Dostupné z: http://www.mogi.bme.hu/TAMOP/robot_applications/ch07.html
- [11] ÅSTRÖM, Karl Johan a Carlos CANUDAS DE WIT. Revisiting the LuGre friction model. In: *IEEE Control Systems Magazine* [online]. IEEE, 2008, s. 101-114 [cit. 2020-03-24]. DOI: 10.1109/MCS.2008.929425. ISSN 1941-000X. Dostupné z: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00394988/document>
- [12] HOW, Jonathan a Emilio FRAZZOLI. *16.30 Feedback Control Systems* [online]. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare, 2010 [cit. 2020-03-29]. Dostupné z: <https://ocw.mit.edu/courses/aeronautics-and-astronautics/16-30-feedback-control-systems-fall-2010>
- [13] MODRLÁK, Osvald a Lukáš HUBKA. *Automatické řízení: učební text*. Vyd. 1. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2012. ISBN 978-80-7372-850-2.
- [14] HLAVA, Jaroslav. *Prostředky automatického řízení II: Analogové a číslicové regulátory, elektrické pohony, průmyslové komunikační systémy*. Vyd. 1. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2000, 160 s. ISBN 80-01-02221-8.
- [15] VÍTEČKOVÁ, Miluše a Antonín VÍTEČEK. *Stavové řízení* [online]. 1st. Ostrava: VŠB – Technická univerzita Ostrava, 2016 [cit. 2020-04-22]. ISBN 978-80-248-3900-4. Dostupné z: <http://books.fs.vsb.cz/ZRMS/stavove-rizeni.pdf>
- [16] EKER, J. a K.J. ASTROM. A nonlinear observer for the inverted pendulum. In: *Proceeding of the 1996 IEEE International Conference on Control Applications IEEE International Conference on Control Applications held together with IEEE International Symposium on Intelligent Control IEEE International Symposium on Computer-Aided Control* [online]. IEEE, 1996, s. 332-337 [cit. 2020-01-03]. DOI: 10.1109/CCA.1996.558752. ISBN 0-7803-2975-9. Dostupné z: <http://ieeexplore.ieee.org/document/558752/>
- [17] PAPADOPOULOS, A. D. a A. T. ALEXANDRIDIS. Unified swing up and upright position stabilizing controllers for inverted-pendulum on a cart. In: *2016 IEEE International Conference on Simulation, Modeling, and Programming for Autonomous Robots (SIMPAN)*. 2016, s. 141-146. DOI: 10.1109/SIMPAN.2016.7862388.



- [18] ÅSTRÖM, K.J. a K. FURUTA. Swinging up a pendulum by energy control. *Automatica* [online]. 2000, **36**(2), 287-295 [cit. 2020-01-03]. DOI: 10.1016/S0005-1098(99)00140-5. ISSN 00051098. Dostupné z: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0005109899001405>
- [19] OŽANA, Štěpán. Swing-up a řízení lineárního trojitého inverzního kyvadla. In: *Laboratoř řídicích systémů* [online]. Ostrava: Katedra kybernetiky a biomedicínského inženýrství, Fakulta elektrotechniky a informatiky, Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, 2018 [cit. 2020-05-10]. Dostupné z: <http://cbe.vsb.cz/cs/laboratories/detail/?id=6>
- [20] ROWBERG, Jeff. I2C device library collection for AVR/Arduino or other C++-based MCUs. In: *GitHub* [online]. Roanoke, VA [cit. 2020-05-31]. Dostupné z: <https://github.com/jrowberg/i2cdevlib>
- [21] KÖNIGSMARKOVÁ, J. a M. SCHLEGEL. Identification of n-link inverted pendulum on a cart. In: *2017 21st International Conference on Process Control (PC)*. 2017, s. 42-47.
- [22] TINKIR, M., M. KALYONCU, U. ONEN a F. M. BOTSALI. Pid and interval type-2 fuzzy logic control of double inverted pendulum system. In: *2010 The 2nd International Conference on Computer and Automation Engineering (ICCAE)*. 2010, **1**, s. 117-121. DOI: 10.1109/ICCAE.2010.5451988.
- [23] LI, H., M. ZHANG a C. GUO. Cloud-model PID control of double inverted pendulum based on information fusion. In: *2016 35th Chinese Control Conference (CCC)*. 2016, s. 574-578. DOI: 10.1109/ChiCC.2016.7553146. ISSN 1934-1768.
- [24] BANERJEE, R., N. DEY, U. MONDAL a B. HAZRA. Stabilization of Double Link Inverted Pendulum Using LQR. In: *2018 International Conference on Current Trends towards Converging Technologies (ICCTCT)*. 2018, s. 1-6. DOI: 10.1109/ICCTCT.2018.8550915.
- [25] ZHANG, Jiao-long a Wei ZHANG. LQR self-adjusting based control for the planar double inverted pendulum. *Physics Procedia*. 2012, **24**, 1669-1676. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.phpro.2012.02.246>. ISSN 1875-3892. Dostupné také z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1875389212002891>
- [26] JAIWAT, Pathompong a Toshiyuki OHTSUKA. *Real-Time Swing-up of Double Inverted Pendulum by Nonlinear Model Predictive Control* [online]. In: . s. 290-295 [cit. 2020-05-31]. Dostupné z:



https://pdfs.semanticscholar.org/909e/edd1bd480fa196e6400055685d21d451dcb c.pdf?_ga=2.199685932.347429754.1590933603-470182460.1590933603

- [27] NIEMANN, Henrik a Jesper Kildegaard POULSEN. Design and analysis of controllers for a double inverted pendulum. *ISA Transactions*. 2005, **44**(1), 145-163. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0019-0578\(07\)60051-2](https://doi.org/10.1016/S0019-0578(07)60051-2). ISSN 0019-0578.
Dostupné také z:
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019057807600512>



A Obsah příloženého CD

❖ Arduino

- AplikaceGyroskop (mpuKyvadlo.ino)
- Knihovny (I2Cdev, MPU6050 [20])
- NastaveniBluetooth (APmod.ino)

❖ MATLAB

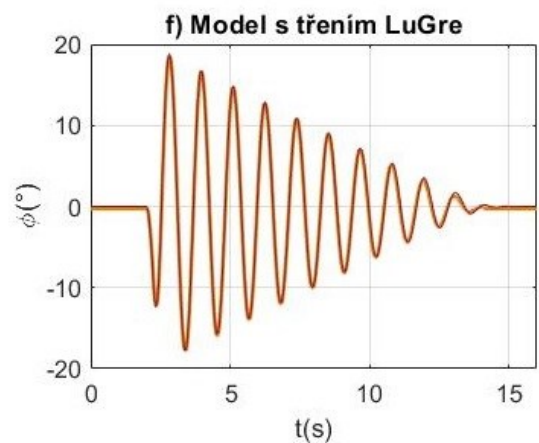
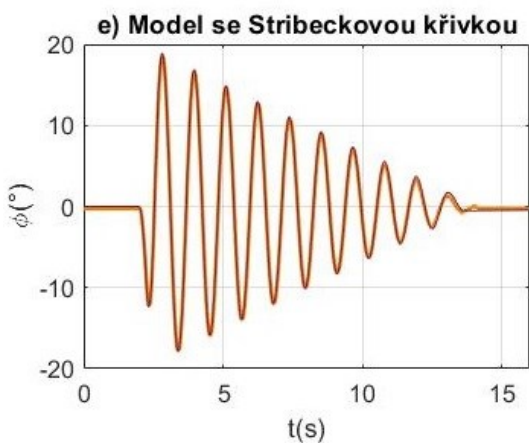
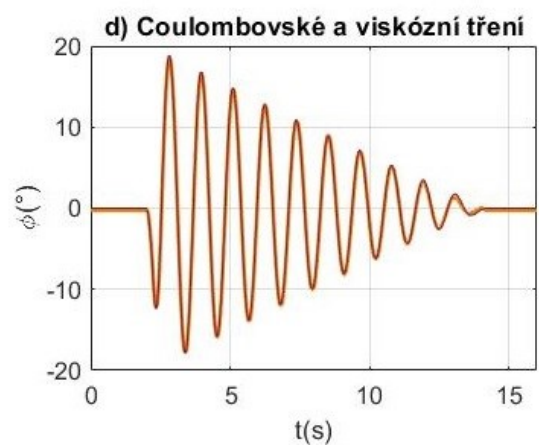
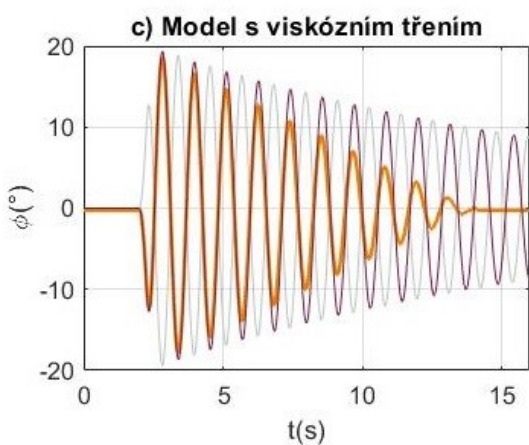
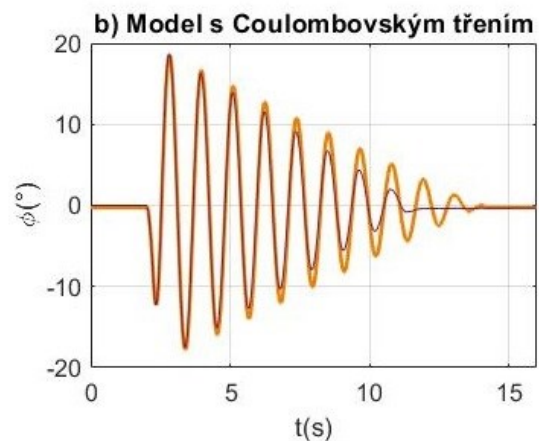
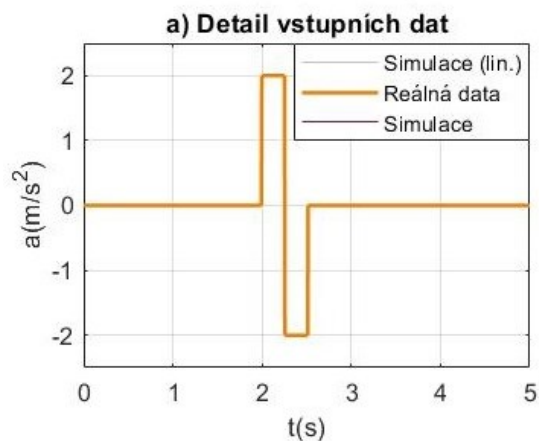
- 1clankoveKyvadlo (Parametrizace, PIDregulator, Pozorovatel, StavovyRegulator)
- 2clankoveKyvadlo (CrossKorelace, Mereni, Model, Parametrizace)

❖ PLC_BaR (Kyvadlo.zip)

❖ DP_RizeniInverznihoKyvadla_MartinFrydrych.pdf



B Grafy validace parametrizovaných modelů



C Matice říditelnosti a pozorovatelnosti jednoduchého inverzního kyvadla

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 30,29 & -0,12 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3,09 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Ob(A, C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30,27 & -0,12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 93,55 & -22,4 \end{bmatrix}$$

$$Co(A, B) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3,09 & -0,37 & 93,55 \\ 3,09 & -0,37 & 93,55 & -22,4 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(Ob) = 4$$

$$\text{rank}(Co) = 4$$



D Vyjádření členů maticových rovnic pro systém dvojitého kyvadla

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\varphi}) \cdot \ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{N}(\boldsymbol{\varphi}) \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}}^2 + \mathbf{F}_t \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{P}(\boldsymbol{\varphi}) = -\mathbf{Q}(\boldsymbol{\varphi}, \ddot{x}_0)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\varphi}} = \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1(t) \\ \ddot{\varphi}_2(t) \end{bmatrix} \quad \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1(t) \\ \dot{\varphi}_2(t) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{bmatrix} \quad \dot{\boldsymbol{\varphi}}^2 = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1^2(t) \\ \dot{\varphi}_2^2(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\varphi}) = \begin{bmatrix} M_1 & N_{12} \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \\ N_{12} \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) & M_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}(\boldsymbol{\varphi}) = \begin{bmatrix} 0 & N_{12} \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \\ -N_{12} \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_t = \begin{bmatrix} F_{v1} + F_{v2} & -F_{v2} \\ -F_{v2} & F_{v2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}(\boldsymbol{\varphi}) = \begin{bmatrix} P_1 \sin \varphi_1(t) \\ P_2 \sin \varphi_2(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}(\boldsymbol{\varphi}, \ddot{x}_0) = \begin{bmatrix} Q_1 \ddot{x}_0 \cos \varphi_1(t) \\ Q_2 \ddot{x}_0 \cos \varphi_2(t) \end{bmatrix}$$

$$M_1 = J_1 + m_1 e_1^2 + m_2 L_1^2$$

$$P_1 = (m_1 e_1 + m_2 L_1) g$$

$$M_2 = J_2 + m_2 e_2^2$$

$$P_2 = m_2 e_2 g$$

$$N_{12} = m_2 e_2 L_1$$

$$Q_1 = m_1 e_1$$

$$Q_2 = m_2 e_2$$

$$\mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{\varphi}) = \begin{bmatrix} \frac{-M_2}{N_{12}^2 \cos^2(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) - M_1 M_2} & \frac{N_{12} \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t))}{N_{12}^2 \cos^2(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) - M_1 M_2} \\ \frac{N_{12} \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t))}{N_{12}^2 \cos^2(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) - M_1 M_2} & \frac{-M_1}{N_{12}^2 \cos^2(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) - M_1 M_2} \end{bmatrix}$$

