



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV AUTOMOBILNÍHO A DOPRAVNÍHO INŽENÝRSTVÍ

INSTITUTE OF AUTOMOTIVE ENGINEERING

**OPTIMALIZACE KONSTRUKCE KOREČKOVÝCH
DOPRAVNÍKŮ**

DESIGN OPTIMIZATION OF BUCKET CONVEYORS

DIZERTAČNÍ PRÁCE

DOCTORAL THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Ing. Martin Jonák

ŠKOLITEL

SUPERVISOR

doc. Ing. Jiří Malášek, Ph.D.

BRNO 2018

ABSTRAKT

Tato práce se zabývá studiem metod vhodných pro popis chování (ne)homogenních materiálů během jejich přepravy korečkovými dopravníky v aplikaci na optimalizaci geometrie korečku i na optimalizaci provozního režimu celého zařízení. Konkrétně se jedná o studii dostupných a tvorbu vlastních analytických i numerických výpočtových modelů a jejich následné použití pro popis toků a deformací zejména partikulárních materiálů. V případě tvorby a použití analytických modelů je pozornost věnována především procesu vyprazdňování korečku – vztah tvaru povrchu přepravovaného materiálu vůči tvaru, poloze a pohybu korečku včetně stanovení počátku a způsobu vyprazdňování. V případě výpočtového modelování s použitím metody diskrétních prvků práce obsahuje také základní výpočtový model korečkového dopravníku, který je prezentován a použit v rámci ukázkového optimalizačního příkladu. Cílem práce je také stanovení mezí platnosti některých klasických matematicko-fyzikálních popisů.

KLÍČOVÁ SLOVA

Korečkový dopravník, koreček, nehomogenní materiál, partikulární materiál, metoda diskrétních prvků, úhel vnitřního tření, optimalizace.

ABSTRACT

This thesis deals with a study of methods sufficient to describe the behavior of bulk materials (homogeneous and non-homogeneous) during their transport by bucket elevators in the application focused on the optimization of the bucket shape and also on the optimization of operating parameters of whole elevator. More specifically, this thesis is based on the studying and creating analytical and numerical computational models which are used for description of flows and deformations especially of particulate materials. Firstly, the thesis is focused on the process of discharging the bucket – the relationship among the shape of the surface of a particulate material and geometry, position and movement of the bucket. The beginning and way of discharge of the bucket will be determined. Secondly, the thesis includes the overall computational model of a bucket elevator which is based on discrete element method and presented in the case study. The goal is to determine the limits of some classical physical and mathematical descriptions.

KEYWORDS

Bucket conveyor, bucket, non-homogeneous material, particulate material, discrete element method, internal friction angle, optimization.

JONÁK, M. *Optimalizace konstrukce korečkových dopravníků*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2018. 137 s. Vedoucí dizertační práce doc. Ing. Jiří Malášek, Ph.D.

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že svou doktorskou práci na téma „Optimalizace konstrukce korečkových dopravníků“ jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího doktorské práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Brno

.....

(podpis autora)

PODĚKOVÁNÍ

Rád bych poděkoval vedoucímu doktorské práce panu doc. Ing. Jiřímu Maláškovi, Ph.D. za odborné vedení, konzultace, trpělivost a podnětné návrhy k práci.

Brno

.....

(podpis autora)

OBSAH

Úvod	19
1 Současný stav poznání	21
1.1 Mechanismy toků během vyprazdňování korečků	22
1.2 Mechanismy toků během plnění korečků	23
1.3 Úhel vnitřního tření	26
2 Cíl disertační práce	27
3 Teorie	29
3.1 Spojitý přístup	29
3.1.1 Tvar hladinové plochy pro ideální kapalinu	30
3.1.2 Tvar povrchu materiálu v korečku pro ideálně sypký a ne- soudržný partikulární materiál s konstantním úhlem vnitřního tření	33
3.1.3 Tvar povrchu materiálu v korečku pro ideálně sypký a ne- soudržný partikulární materiál s proměnným úhlem vnitřního tření a s případnou kohezí	38
3.2 Diskrétní přístup	41
3.2.1 Metoda diskrétních prvků	41
4 Implementace	51
4.1 Výpočetní nástroj	51
4.1.1 Popis	51
4.1.2 Vstupní parametry	52
4.1.3 Výpočet	53
4.1.4 Výstupy	56
4.2 Výpočtové modely využívající metody diskrétních prvků	56
4.2.1 Vyprazdňování korečku	56
4.2.2 Virtuální modely použité v DEM simulaci pohybu partikulár- ního materiálu korečkovým dopravníkem	64
5 Experiment	69
5.1 Popis	71
5.2 Výsledky	72
6 Validace	77
6.1 Popis	77

6.2	Výsledky	77
7	Optimalizační metoda	
	a metamodeling	91
7.1	Genetický algoritmus	91
7.2	Metamodeling	99
7.2.1	Plánování a analýza experimentu	100
7.2.2	Aproximační model	101
7.2.3	Hodnocení kvality metamodelů	102
8	Ukázkové příklady optimalizace	
	konstrukce korečkových	
	dopravníků	105
8.1	Optimalizace s použitím genetického algoritmu	105
8.1.1	Popis	105
8.1.2	Výsledky	106
8.2	Optimalizace s použitím metamodelů	108
8.2.1	Popis	108
8.2.2	Výsledky	111
9	Diskuze dosažených výsledků	115
9.1	Teoretické výsledky	115
9.2	Praktické výsledky	115
10	Závěr	117
	Literatura	119
	Seznam symbolů, veličin a zkratek	127
	Publikace autora disertační práce	133

SEZNAM OBRÁZKŮ

1.1	Schematické znázornění silových a geometrických poměrů k rovnici (1.1).	23
1.2	Schematické znázornění problematiky plnění korečků. [12]	24
3.1	Nákres k odvození tvaru hladinové plochy pro případ ideální kapaliny v korečku rotujícím kolem vodorovné osy O .	32
3.2	Schematické znázornění tvaru povrchu partikulárního materiálu odpovídajícího logaritmické spirále [59].	37
3.3	Příklady mezní čáry získané interpolací hodnot mezního smykového a mezního normálového napětí pro dva druhy písku s různou vlhkostí a jílu [6] pomocí kubického splajnu.	39
3.4	Schematické znázornění tvaru povrchu partikulárního materiálu odpovídajícího obecné spirále.	40
3.5	Vývojový diagram znázorňující průběh výpočetního cyklu v metodě diskretních prvků. Bloky ohraničené červeným obdélníkem představují části vytvořené při řešení cíle této práce.	42
3.6	Znázornění fyzikálních náhrad pro tah-tlak a smyk při řešení kontaktní úlohy pro případ Kelvin-Voigtova modelu viskoelastického materiálu. Členy: A - pružina o tuhosti k , B - tlumič o viskozitě c , C - člen umožňující podmíněný zánik kontaktu, D - člen přenášející tření. V náhradách pro ohyb a krut je uvažováno použití torzních členů.	44
3.7	Znázornění situace vedoucí ke kolizi dvou kulových částic.	44
4.1	Grafické uživatelské rozhraní výpočetního nástroje. Zobrazen je ovládací panel, dvourozměrná reprezentace korečku spolu s křivkou popisující tvar povrchu materiálu a dva způsoby vyprazdňování korečku - odstředivý a gravitační.	52
4.2	Běh výpočetního nástroje znázorněný prostřednictvím vývojového diagramu.	55
4.3	Experimentální zařízení, které se sestává z černé zadní stěny (1), upevňovacích segmentů (2), korečku (3) a válce (4) pro zamezení vysypání materiálu mimo zařízení. Čelní skleněná tabule byla odmontována.	57
4.4	Modely experimentálního zařízení.	58
4.5	Airsoftové kuličky jako experimentální materiál a jejich model.	59
4.6	Schematické znázornění způsobu měření třecích úhlů.	60
4.7	Znázornění změřených hodnot vybraných mechanicko-fyzikálních parametrů bílých plastových kuliček použitých pro nastavení parametrů materiálového modelu. Průměr je znázorněn zelenou čárkovanou čarou.	61
4.8	Experimentální materiál v podobě čtyřech typů hracích kostek a jeho modely.	62

4.9	Znázornění změřených hodnot vybraných mechanicko-fyzikálních parametrů hracích kostek použitých pro nastavení parametrů materiálového modelu. Průměr je znázorněn zelenou čárkovanou čarou.	63
4.10	Modely korečkového dopravníku pro DEM simulaci použité v ukázkovém příkladu optimalizace. Fialové kvádry znázorňují oblasti, ve kterých dochází k vytváření částic, resp. k jejich odstranění. Funkční plochy přední a zadní stěny dopravníku nejsou zobrazeny.	65
5.1	Schematické znázornění umístění vysokorychlostní kamery vůči experimentálnímu zařízení. Kamera (K) je zvýrazněna fialovou, experimentální zařízení (Z) šedou a pohon zařízení (M) červenou barvou. Součástí experimentálního zařízení je modře zvýrazněná čelní skleněná tabule a zeleně vybarvený přípravek s korečkem. h_1 je výška vnitřní stěny korečku, h_2 je výška vnější stěny korečku, a je vyložení korečku, d je průměr válce, b je velikost mezery mezi zadní stěnou a čelní skleněnou tabulí a l je vzdálenost konce objektivu kamery od vnější plochy čelní skleněné tabule.	70
5.2	Barevné měřítko velikosti okamžité rychlosti v m/s.	72
5.3	Dvojice snímků z experimentu vyprazdňování korečku při úhlové rychlosti 0,549 rad/s. Materiál: bílé plastové kuličky.	73
5.4	Dvojice snímků z experimentu vyprazdňování korečku při úhlové rychlosti 4,280 rad/s. Materiál: bílé plastové kuličky.	74
5.5	Dvojice snímků z experimentu vyprazdňování korečku při úhlové rychlosti 0,516 rad/s. Materiál: hrací kostky.	75
5.6	Dvojice snímků z experimentu vyprazdňování korečku při úhlové rychlosti 0,953 rad/s. Materiál: hrací kostky.	76
6.1	Dvojice snímků z experimentu, výpočetního nástroje a DEM simulace. Úhlová rychlost: 0,549 rad/s. Materiál: bílé plastové kuličky.	81
6.2	Dvojice snímků z experimentu, výpočetního nástroje a DEM simulace. Úhlová rychlost: 4,280 rad/s. Materiál: bílé plastové kuličky.	82
6.3	Dvojice snímků z experimentu a DEM simulací. Úhlová rychlost: 0,516 rad/s. Materiál: hrací kostky.	84
6.4	Dvojice snímků z experimentu a DEM simulací. Úhlová rychlost: 0,953 rad/s. Materiál: hrací kostky.	86
6.5	Barevné měřítko velikosti okamžité rychlosti v m/s.	87
6.6	Časové charakteristiky průběhu vyprazdňování korečku. V_0 a V jsou množství materiálu na začátku a v průběhu vyprazdňování. Materiál: bílé plastové kuličky.	87

6.7	Časové charakteristiky průběhu vyprazdňování korečku. V_0 a V jsou množství materiálu na začátku a v průběhu vyprazdňování. Materiál: hrací kostky.	88
7.1	Vývojový diagram principiálně znázorňující průběh výpočtu generačního modelu genetického algoritmu [32].	93
7.2	Vývojový diagram principiálně znázorňující průběh výpočtu generačního modelu genetického algoritmu v kombinaci s ostrovním modelem.	95
7.3	Schematické znázornění vztahu mezi modelem a metamodelem [63].	100
7.4	Schematické znázornění příkladů technik metamodelování [62]. Červeně jsou vyznačeny ty metody, které byly použity při řešení ukázkové optimalizační úlohy.	100
7.5	Schematické znázornění vybraných experimentálních plánů.	101
8.1	Grafická reprezentace šesti nejlepších nalezených řešení pro odstředivý ((a) - (f)) a gravitační ((g) - (l)) způsob vyprazdňování.	107
8.2	Experimentální plány 2D úlohy (vlevo) a 3D úlohy (vpravo).	110
8.3	Metamodely Q_{OUT}/Q_{IN} 2D úlohy.	111
8.4	Řezy metamodely Q_{OUT}/Q_{IN} 3D úlohy pro $h_1 = 0,17$	112

SEZNAM TABULEK

4.1	Průměrné hodnoty vybraných mechanicko-fyzikálních parametrů bílých plastových kuliček.	60
4.2	Průměrné hodnoty vybraných mechanicko-fyzikálních parametrů hracích kostek.	64
4.3	Hlavní rozměry a provozní parametry virtuálních modelů korečkového dopravníku.	66
4.4	Intervaly optimalizovaných rozměrů.	67
5.1	Vybrané rozměry přípravku s korečkem.	70
5.2	Parametry obou vybraných dvojic experimentů prováděných na experimentálním zařízení.	71
5.3	Výsledky experimentů v podobě dvou úhlů natočení a jim odpovídajícím časovým okamžikům pro začátek a konec vyprazdňování korečku.	72
6.1	Výsledky v podobě dvou úhlů natočení s odpovídajícími časy. Úhlová rychlost: 0,549 rad/s a 4,280 rad/s. Materiál: bílé plastové kuličky.	79
6.2	Změřené a identifikované hodnoty vybraných mechanicko-fyzikálních parametrů bílých plastových kuliček a jejich modelů.	79
6.3	Výsledky v podobě dvou úhlů natočení s odpovídajícími časy. Úhlová rychlost: 0,516 rad/s a 0,953 rad/s. Materiál: hrací kostky.	80
6.4	Změřené a identifikované hodnoty vybraných mechanicko-fyzikálních parametrů použitých pro nastavení materiálových modelů hracích kostek. Hodnoty pro „Youngův modul“ a „Poissonovo číslo“ byly získány s přihlédnutím k [76].	80
6.5	Koeficient korelace R a koeficient determinace R^2 mezi časovými charakteristikami průběhů vyprazdňování korečku získanými použitím výpočetního nástroje a DEM simulace a charakteristikami získanými experimentálně. Materiál: bílé plastové kuličky.	89
6.6	Koeficient korelace R a koeficient determinace R^2 mezi časovými charakteristikami průběhů vyprazdňování korečku získanými z výsledků DEM simulací a charakteristikami získanými experimentálně. Materiál: hrací kostky.	89
8.1	Hodnoty výšky vnitřní stěny h_1 , výšky vnější stěny h_2 a vyložení korečku a šesti nejlepších nalezených řešení.	106
8.2	Vybrané časy optimalizace pro Intel® Core™ i7 CPU 960 (4 jádra).	108
8.3	Vybrané parametry a experimentální plány použité při tvorbě meta-modelů.	109

8.4	Optimalizované hodnoty návrhových proměnných 2D úlohy. Výška vnitřní stěny $h_1 = 0,1$ m = konst.	111
8.5	Optimalizované hodnoty návrhových proměnných 3D úlohy.	112
8.6	Hodnocení kvality metamodelů: koeficient determinace R^2 , upravený koeficient determinace R_{adj}^2 , průměrná absolutní chyba MAE a ma- ximální absolutní chyba MAX	113
8.7	Vybrané časy metamodelování pro Intel® Core™ i7 CPU 960 (4 jádra).	114

SEZNAM ALGORITMŮ

1	Generační model genetického algoritmu - základní verze.	94
2	Generační model genetického algoritmu - paralelizovaná verze.	94
3	Implementace ostrovního a generačního modelu genetického algoritmu - paralelizovaná verze.	96

ÚVOD

Manipulace s materiálem, ať už sypkým, nebo kusovým, je nedílnou součástí většiny dopravních a procesních linek. Tok materiálu, může být zajištěn širokou škálou různých zařízení, jejichž volba bude záviset jednak na požadovaném směru dopravy a jednak na druhu a množství přepravovaného materiálu, jeho fyzikálních (rozměry, tvar, vlhkost, zrnitost, abrazivnost [12]) a chemických vlastnostech a rovněž na ekonomických činitelích (pořizovací a provozní náklady apod.). Konkurenční prostředí zároveň vytváří přirozený tlak na redukci všech nákladů spojených s vývojem, výrobou a provozem transportních zařízení. Jedním z možných způsobů redukce provozních nákladů je zvyšování efektivity provozu těchto zařízení. Toho je možno dosáhnout návrhem vhodné geometrie funkčních prvků a vhodným nastavením parametrů provozního režimu a to již ve fázi vývoje. Optimalizace je tedy dlouhodobě v popředí zájmu jak výrobců, tak i jejich provozovatelů. Je tedy zcela opodstatněná snaha o použití nových přístupů a metod, které umožní nalezení vyhovujícího řešení v řádově kratším čase, než v jakém by bylo nutno toto řešení hledat pomocí konvenčních postupů.

Často používaným transportním zařízením pro dopravu sypkých materiálů ve vswislém, popř. strmém, směru je korečkový dopravník [19]. Přestože se jedná o jedno z nejstarších zařízení určených k manipulaci s materiálem, které bylo ve své jednoduché podobě známo téměř ve všech zemědělsky založených starověkých civilizacích [54, 66], je korečkový dopravník i v současnosti stále předmětem výzkumů mnoha vědeckých pracovišť, např. [54, 52, 20].

Tato skutečnost je dána především problematikou popisu chování jak homogenních, tak také nehomogenních, materiálů během jejich průchodu korečkovým dopravníkem a je považována za extrémně komplikovaný fenomén [59], který je analyticky velmi těžko řešitelný. Tyto materiály zpravidla nevykazují vlastnosti kontinua, přičemž v některých případech mohou být popisovány jako po částech spojitá kontinua, kdy velikost, tvar i další vlastnosti těchto částí jsou v čase i v prostoru nestabilní [49]. Analytická aproximace řešení této problematiky může být provedena pro jednoduchý případ, kdy fyzikální i konstitutivní vlastnosti dopravovaného materiálu lze matematicky popsat. Fyzikální i konstitutivní charakteristiky těchto materiálů jsou závislé také na nehomogenitě vektorového pole výsledného zrychlení, ve kterém se koreček včetně dopravovaného materiálu při průchodu hlavou a patou dopravníku nachází.

Problematika přesného popisu chování těchto materiálů nebyla doposud úspěšně vyřešena a při analytickém nebo numerickém řešení dané úlohy je ve výpočtech zkoumaná látka nahrazována vhodným výpočtovým modelem, nebo je úloha řešena experimentálně, popř. i heuristicky, tedy s využitím zkušeností získaných řešením podobných úloh v minulosti.

Hlavním přínosem práce je výzkum s cílem identifikace vhodných teoretických popisů, implementace těchto popisů do analytických a výpočtových modelů, jejich experimentální validace a použití v ukázkové optimalizační úloze, jejíž účelem je demonstrovat vybrané způsoby optimalizace konstrukce korečkových dopravníků s využitím moderních optimalizačních metod.

Konkrétně je pozornost věnována analýze vybraných popisů vhodných pro řešení problematiky toků a deformací materiálů během jejich transportu korečkovými dopravníky a jsou prezentovány dva možné přístupy - spojitý a diskrétní. Spojitý přístup je založen na předpokladu, že studované vlastnosti daného materiálu mohou být popsány spojitou funkcí polohy [8]. Diskrétní přístup je pak charakteristický tím, že studovaný materiál je popisován jako soustava konečného počtu částic [8], které mají konkrétní rozměry, tvary a materiálové vlastnosti. Zde je prezentována metoda diskrétních prvků, přičemž z dříve publikovaných článků, z tuzemských lze uvést např. [20, 60], jsou zřejmé možnosti použití této metody pro modelování toků a deformací homogenních i nehomogenních materiálů.

Na základě teoretických popisů jsou vytvořeny modely, které jsou následně použity pro řešení úloh souvisejících s danou problematikou. Jednotlivé úlohy jsou pak záměrně sestaveny tak, aby je bylo možné experimentálně ověřit na „Zařízení pro kreativní systém tvorby matematických popisů obecných procesů“ [51], které se nachází v Laboratoři partikulárních látek na Fakultě strojního inženýrství VUT v Brně. Konkrétně se jedná o úlohy, které jsou zaměřené na proces vyprazdňování korečku a jsou zde postupně použity oba výše uvedené přístupy.

Získané výsledky jsou dále experimentálně ověřeny metodou PIV pro sypké materiály, popsanou v [71, 86], kdy je na výše zmíněném zařízení vysokorychlostní kamerou snímáno reálné vyprazdňování korečku a získaný záznam je dále zpracováván metodami pro zpracování obrazu dostupnými v knihovněch OpenCV [77].

Dále je v práci provedena rešerše dvou optimalizačních metod, jež jsou spolu s validovaným modelem použity v ukázkové optimalizační úloze, ve které je provedena optimalizace geometrie korečku pro odstředivý i gravitační způsob vyprazdňování. Optimalizační úloha je řešena jednak přímo, s použitím genetického algoritmu, a jednak nepřímo, pomocí metamodelu. Přestože v obou případech je dosaženo prakticky stejných výsledků, tj. téměř shodné výšky vnější a vnitřní hrany korečku a délky jeho vyložení, a zároveň tyto výsledky korespondují s hodnotami doporučenými v dostupné literatuře [13, 19, 88], tak časová náročnost vytvoření a použití metamodelu je řádově nižší, než v případě použití genetického algoritmu.

Závěr práce je věnován zhodnocení a diskuzi dosažených výsledků.

1 SOUČASNÝ STAV POZNÁNÍ

Význam manipulace s materiálem, jakožto jednoho z nejdůležitějších faktorů ovlivňujících moderní produkci, byl rozpoznáván na začátku a v průběhu 1. poloviny 20. století, tedy v období první a druhé světové války, kdy použití efektivnějších metod přepravy materiálu umožnilo významné zvýšení produkce v oblasti jak zbrojního, tak i civilního průmyslu [27, 3]. S ohledem na počty vydaných publikací je problematika manipulace s materiálem detailně studována v 2. polovině 20. století. Příkladem mohou být tuzemské publikace [11, 13, 14] a také odkazy jejich autorů na použitou literaturu.

Autoři se ve svých textech zpravidla věnují i tématu korečkových dopravníků. Z počátku 20. století lze uvést publikaci Hetzel (1922) [23]. Přestože je v této publikaci pozornost mimo jiné věnována i podrobnému popisu konstrukcí korečkových dopravníků, tvarů korečků, způsobů vyprazdňování a jejich vhodnosti pro různé materiály, není zde zatím uveden popis samotných vlastností přepravovaných materiálů v takové míře, v jaké je možno se s ním setkat v později vydané literatuře.

V kontextu této práce lze do později vydané literatury zařadit dnes stále běžně dostupné publikace [7, 12, 13, 19], popř. vědecké články [59] a oborové normy [88, 89]. Zde je pozornost autorů věnována jak popisu konstrukce korečkových dopravníků, tak jsou zde uvedeny i postupy výpočtů a také je zde podrobněji řešena i problematika vyprazdňování korečku, včetně zohlednění vlastností přepravovaných materiálů. Mezi nejnovější publikace pak patří např. [4, 55].

Vedle těchto publikací vznikají v poslední dekádě především články ve vědeckých časopisech, popř. příspěvky ve sbornících, ve kterých je problematika přepravy materiálu korečkovými dopravníky řešena pomocí výpočtových metod. Zde se zpravidla jedná o metodu diskretních prvků a jako příklad lze uvést [20, 46, 52]. Kromě vědeckých článků je rovněž nutno uvést i vysokoškolské kvalifikační práce bakalářské, magisterské a zejména pak disertační, ve kterých se jejich autoři věnují jak konstrukčnímu návrhu a funkčnímu výpočtu korečkového dopravníku [22, 29], tak i studiu problematiky popisu toků materiálů zařízením na hranici současného stavu poznání [21].

Přestože s nárůstem možností použití výpočtových metod, jenž obecně koreponduje s rozvojem výpočetní techniky jako takové, dochází i k nárůstu počtu vědeckých publikací věnujících se problematice toků a deformací (ne)homogenních materiálů (např. partikulární materiály řešené pomocí DEM, nebo suspenze řešené pomocí CFD-DEM), lze na poli česky a slovensky psaných publikací dostupných široké veřejnosti, tedy především monografií, pozorovat spíše stagnaci.

S ohledem na téma práce je následující text věnován základním popisům procesu vyprazdňování a plnění korečků, tak jak jsou uvedeny v běžně dostupné literatuře.

tuře [12, 13, 19]. Tyto dva procesy mají největší vliv na efektivitu chodu korečkového dopravníku, neboť u nich dochází k přetváření a změně toku materiálu.

Závěr této kapitoly je věnován úhlu vnitřního tření, neboť se jedná o jeden z nejvýznamnějších parametrů používaných k popisu chování sypkých materiálů.

1.1 Mechanismy toků během vyprazdňování korečků

Procesem vyprazdňování korečků se v této práci rozumí stav, kdy koreček prochází hlavou korečkového elevátoru a kdy na něj i na přepravovaný materiál působí krom tíhové síly také odstředivá síla. Koreček se zpravidla otočí o 180° a v určité fázi jeho pohybu dojde i k vyprazdňování materiálu.

Během tohoto procesu dochází působením nehomogenního vektorového pole výsledné síly \mathbf{F}_v k přetváření původního tvaru přepravovaného materiálu. Samotná míra přetvoření pak závisí na řadě faktorů, z nichž nejvýznamnější jsou velikost výsledné síly, úhel vnitřního a vnějšího tření a tvar korečku. K vyprazdňování přepravovaného materiálu začne docházet poté, co koreček dosáhne určitého úhlu natočení.

Přepravovaný materiál koreček zpravidla opouští buď gravitačním, nebo odstředivým způsobem. Kritériem tohoto rozdělení je poloha pólu P , který je průsečíkem nositelky výslednice vnějších sil působících na obsah korečku (tj. tíhové síly $G = mg$ a síly odstředivé $F = mr\omega^2$) s vertikální osou y .

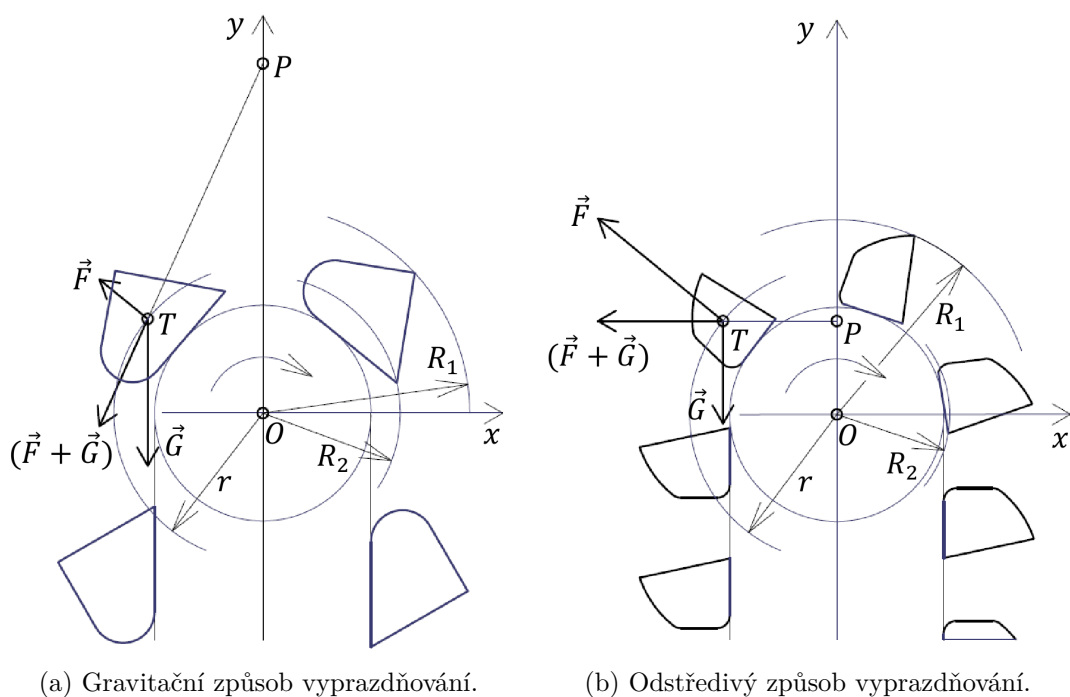
Jestliže pól P leží uvnitř kružnice R_2 , pak je materiál vysypáván vlivem odstředivé síly z korečku přes jeho vnější hranu – jedná se tedy o elevátor s odstředivým vyprazdňováním [19].

Jestliže vzdálenost \overline{OP} pólu P od středu O je větší než poloměr R_1 , potom hovoříme o gravitačním vyprazdňování, neboť materiál vypadává přes vnitřní hranu korečku [19].

Leží-li pól P mezi kružnicemi R_1 a R_2 , jsou podmínky vyprazdňování neurčitě [13].

Polohu pólu P lze určit graficky vytvořením výše zmíněného průsečíku, nebo početně na základě podobnosti trojúhelníku TPO a $TG(F + G)$ (viz obr. 1.1) [19], kdy platí:

$$\frac{\overline{OP}}{r} = \frac{G}{F} = \frac{mg}{mr\omega^2} \Rightarrow \overline{OP} = \frac{g}{\omega^2} \quad (1.1)$$



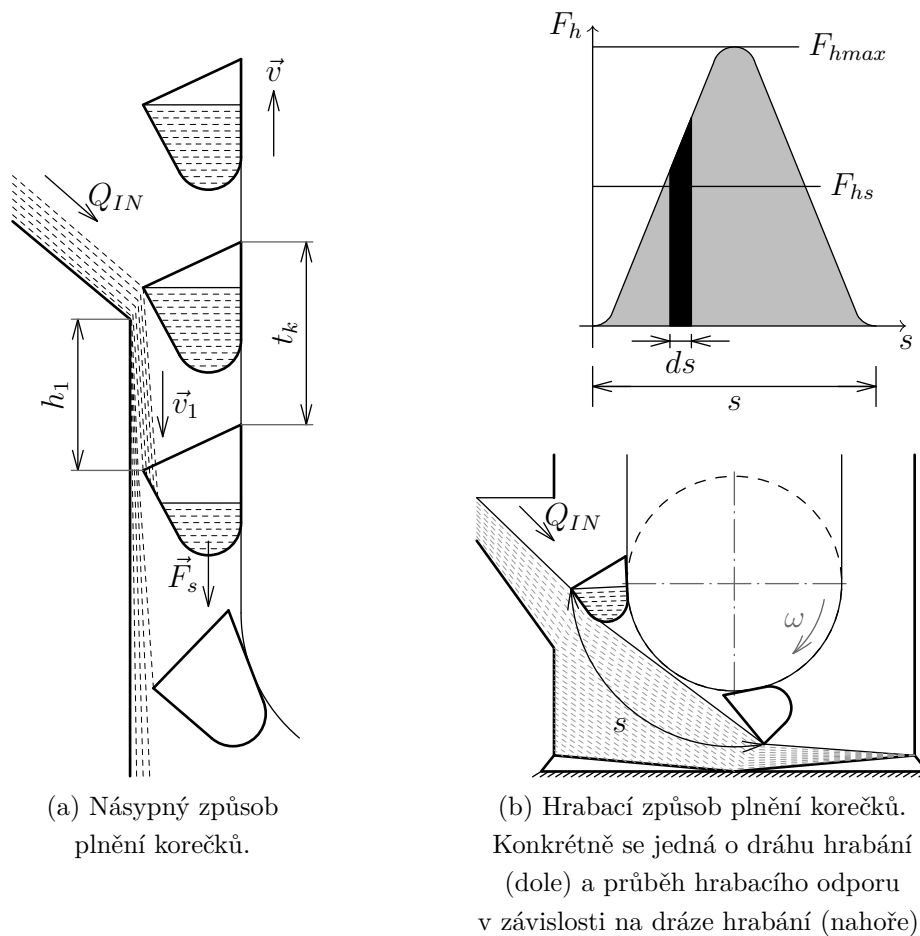
Obr. 1.1: Schematické znázornění silových a geometrických poměrů k rovnici (1.1).

Na obr. 1.1 je zakreslena tíhová i odstředivá síla působící na materiál v korečku, včetně jejich výslednice, vybrané rozměry a pól P , přičemž je patrný rozdíl v poloze pólu při odstředivém, resp. gravitačním vyprazdňování. Výše zmíněnou problematiku lze nalézt v [13, 12, 19]. Autoři se zde rovněž věnují teoretickému popisu přetváření materiálu v korečku i způsobům, jakými může přepravovaný materiál koreček opouštět.

Obecná použitelnost dostupných popisů přetváření materiálu v korečku během jeho vyprazdňování je však omezená [59] a tyto popisy přibližně platí pouze pro materiály o konkrétních vlastnostech. Např. je-li tvar povrchu materiálu v korečku popisován jako část logaritmické spirály [12, 19], viz obr. 3.2, je tato úloha řešená jako statická, úhel vnitřního tření je nenulový a konstantní a materiál lze označit za dobře tekoucí. Podrobněji bude tato problematika popsána v kapitole 3, neboť se jedná o jeden z možných popisů použitých při řešení cíle této práce.

1.2 Mechanismy toků během plnění korečků

Plnění korečků je proces, ve kterém korečky prochází patou elevátoru a jsou násypným, hrabacím, nebo kombinovaným (smíšeným) způsobem postupně naplňovány materiálem [12, 19]. Tento proces je schematicky znázorněn na obr. 1.2.



(a) Násypný způsob plnění korečků.

(b) Hrabací způsob plnění korečků. Konkrétně se jedná o dráhu hrabání (dole) a průběh hrabacího odporu v závislosti na dráze hrabání (nahore).

Obr. 1.2: Schematické znázornění problematiky plnění korečků. [12]

Odpor vznikající při násypném způsobu plnění korečků bude [12]:

$$F_s = V_o \psi \gamma_v (v_1 + v) \frac{v}{t_k} \quad (1.2)$$

kde:

- F_s je velikost odporu vznikajícího při násypném způsobu plnění korečků [N],
- V_o je objem korečku [m³],
- ψ je součinitel plnění [-],
- γ_v je objemová hmotnost [kg·m⁻³],
- t_k je rozteč korečků [m],
- v je dopravní rychlost [m·s⁻¹],
- $v_1 \doteq \sqrt{2gh_1}$, je dopadová rychlost materiálu [m·s⁻¹],
- h_1 je padací výška materiálu [m],
- g je tíhové zrychlení [m·s⁻²].

Násypný způsob plnění bývá preferovaným způsobem. Odpor vznikající při tomto způsobu plnění i opotřebením koreček je oproti hrabacímu způsobu nižší [12, 20]. Násypný otvor by měl být umístěn v dostatečné výšce tak, aby přiváděný materiál byl postupně zachytáván korečky a nedocházelo k jeho propadávání na dno dopravníku [45].

Hrabací způsob plnění je vhodný jen pro neabrazivní a lehké materiály, je při něm větší spotřeba energie a dochází k většímu opotřebením koreček [12]. V případě dopravy obilovin vyššími dopravními rychlostmi je vhodné dle [45] přivádět materiál k sestupné větvi dopravníku.

Pro vyjádření odporu a potřebného příkonu pro hrabací způsob plnění je dle [12] možno vycházet z:

$$A_h = \frac{A}{V_o \bar{\psi} \gamma_v z_k} \quad (1.3)$$

$$A = \int F_h ds = F_{hs} s \quad (1.4)$$

$$F_{hs} = \frac{A}{s} = A_h \frac{V_o \bar{\psi} \gamma_v z_k}{s} \quad (1.5)$$

$$P_h = c_k A_h \frac{V_o \gamma_v \psi v}{t_k} \quad (1.6)$$

kde:

A_h	je měrná hrabací práce	$[\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}]$,
A	je hrabací práce	$[\text{J}]$,
F_{hs}	je střední hodnota hrabacího odporu	$[\text{N}]$,
P_h	je příkon pro hrabání	$[\text{W}]$,
$\bar{\psi}$	je střední součinitel plnění respektující nerovnoměrné naplnění současně hrabajících koreček	$[-]$,
z_k	je počet současně hrabajících koreček	$[-]$,
F_h	je hrabací odpor	$[\text{N}]$,
s	je dráha hrany korečku	$[\text{m}]$,
c_k	je součinitel rozteče koreček, který je funkcí relativního taktu korečku $t_r = 0,224 \frac{t_k}{c_v}$	$[-]$,
c	je vyložení korečku	$[\text{m}]$.

Dle [13, 12], zavedení měrné hrabací práce umožňuje použití výsledků získaných měřením, přičemž hrabací práce je dána plochou pod křivkou průběhu hrabacího odporu F_h v závislosti na dráze hrany korečku s [12]. Pro idealizovaný průběh plnění (viz 1.2b) lze hrabací práci vyjádřit vztahem (1.4). Pro výpočet příkonu pro hrabání lze hodnoty součinitele rozteče koreček c_k nalézt v [12] na straně 161 (obr. 10.8.).

Kombinovaný způsob plnění nastává při nedokonalém násypném způsobu, kdy část materiálu propadá kolem korečků na dno šachty, kde je korečky nabírána [12].

Výše uvedený popis problematiky plnění korečků bude dále použit v kapitole 4.

1.3 Úhel vnitřního tření

Vlastnosti partikulárních materiálů bývají popisovány řadou mechanicko-fyzikálních parametrů. Často mezi ně patří také úhel vnitřního tření, přičemž znalost hodnoty tohoto úhlu se pro většinu aplikací jeví jako klíčová.

Dle [1] lze úhel vnitřního tření definovat jako schopnost materiálu odolat smykovému napětí. Obecně se jedná o úhel mezi výslednou silou a její normálovou složkou. Jeho velikost se stanovuje experimentálně a tangenta tohoto úhlu je označována jako součinitel vnitřního tření.

V odborné literatuře se lze setkat s dalšími definicemi úhlu vnitřního tření. V této práci je úhel vnitřního tření roven $\arctan \frac{\tau}{\sigma}$, kde τ je mezní smykové napětí a σ je mezní normálové napětí. Vzájemná funkční závislost $\tau = f(\sigma)$ je stanovena z experimentálně získaných hodnot.

2 CÍL DISERTAČNÍ PRÁCE

Cílem disertační práce je identifikace vhodných matematických popisů, které mohou být použity pro popis toků a deformací materiálů od ideální kapaliny až po sypkou (partikulární) látku, a dále vyhodnocení možností jejich aplikace pro popis chování nehomogenních materiálů obecně.

Autor si rovněž dává za cíl implementaci vybraných popisů do úloh souvisejících s řešenou problematikou, včetně jejich následné validace s použitím „Zařízení pro kreativní systém tvorby matematických popisů obecných procesů“.

Je předpokládáno, že pomocí poznatků získaných vhodným použitím těchto matematických popisů bude možno optimalizovat tvar korečku a provozní parametry dopravníku tak, aby k vyprazdňování materiálu docházelo požadovaným způsobem.

Doktorské studium bylo členěno do etap uvedených níže.

1. Studium mechanismů toků materiálů v průběhu vyprazdňování korečků a zhodnocení současného stavu poznání.
2. Vytvoření vybraných matematických popisů tvaru povrchu materiálu v korečku.
3. Implementace těchto matematických popisů do výpočetního nástroje.
4. Vytvoření výpočtových diskrétně-prvkových modelů korespondujících s experimenty, které lze provádět na „Zařízení pro kreativní systém tvorby matematických popisů obecných procesů“.
5. Vytvoření výpočtového modelu celého korečkového dopravníku včetně identifikace vhodných materiálových modelů.
6. Validace vytvořených výpočtových modelů i výpočetního nástroje.
7. Nalezení a sestavení algoritmu vhodného pro řešení ukázkové optimalizační úlohy.
8. Vytvoření ukázkové optimalizační úlohy zaměřené na optimalizaci konstrukce korečkového dopravníku.
9. V souvislosti s danou problematikou, diskuze použitelnosti jednotlivých matematických popisů, shrnutí a zhodnocení získaných poznatků.
10. Publikování dosažených výsledků ve vědeckých časopisech a na mezinárodních konferencích.

3 TEORIE

Jak bylo uvedeno výše, pozornost je v této práci věnována vybraným popisům toků a deformací materiálu během procesu vyprazdňování korečku a jejich následné implementaci do konkrétních výpočtových modelů použitých při řešení optimalizačních úloh. Nejedná se tedy o vyčerpávající výčet všech možných způsobů řešení této problematiky a informace zde uvedené korespondují s publikační činností vykonávanou autorem práce během studia.

Pro přesné stanovení úhlu, po jehož dosažení začne materiál opouštět koreček, resp. pro stanovení vhodného tvaru korečku tak, aby jej materiál opouštěl předem určeným způsobem, je nutné vědět, jakým způsobem se bude materiál během vyprazdňování v korečku přetvářet. Dle [8] jsou způsoby řešení problematiky toků a deformací nejen sypkých materiálů zpravidla rozdělovány do dvou přístupů. Jedná se o tzv. spojitý a diskrétní přístup. Rovněž zde prezentované popisy je možné zařadit do těchto dvou přístupů blíže popsanych v následujících podkapitolách.

3.1 Spojitý přístup

Spojité přístup (z angl. the continuum approach) je založen na předpokladu, že studované vlastnosti daného materiálu mohou být popsány spojitou funkcí polohy. Materiál je tedy popisován jako kontinuum a vliv orientace, tvaru a velikosti jednotlivých částic zde není uvažován.

Předmětem následujícího textu je popis křivky, která vznikne řezem přepravovaného materiálu kolmým na osu otáčení O . Tato křivka je dále též nazývána jako tvar hladinové plochy, nebo tvar povrchu materiálu v korečku.

V podkapitolách 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3 jsou uvedeny některé možné způsoby popisů pro určení tvaru povrchu materiálu v korečku. Tyto popisy jsou odvozeny z tíhové a odstředivé síly působící na materiál při průchodu korečku hlavou elevátoru a tvar povrchu materiálu v korečku je zde obecně závislý na funkční závislosti mezního smykového napětí na mezním normálovém napětí, která bývá označována jako mezní čára.

Podkapitola 3.1.1 se věnuje odvození tvaru hladinové plochy pro ideální kapalinu charakterizovanou úhlem vnitřního tření $\varphi = 0^\circ$ [69]. V podkapitole 3.1.2 je odvození provedeno pro ideálně sypký a nesoudržný partikulární materiál s konstantním úhlem vnitřního tření φ , kdy platí $\tau = \sigma \operatorname{tg} \varphi$ [49]. V podkapitole 3.1.3 je uvedena možnost použití modelu vhodného pro popis partikulární látky s úhlem vnitřního tření φ , jehož hodnota je dána funkční závislostí $\tau = f(\sigma)$, kde f je obecná funkce. Problematika je blíže popsána v rámci jednotlivých podkapitol.

Zde je nutné poznamenat, že níže uvedené popisy vychází z předpokladu, že tvar povrchu materiálu v korečku lze stanovit pouze v okamžiku počátku jeho vyprazdňování. Do té chvíle křivka popisující tento tvar může odpovídat pouze určitému meznímu přetvoření, neboť je dále předpokládáno, že z počátečních podmínek je známo pouze množství materiálu v korečku, resp. jeho objem a součinitel plnění. Rovněž se předpokládá, že hodnota úhlu vnějšího tření nemá vliv na přetváření materiálu v korečku a dále, že pro kohezivní materiály bude tento popis nevhodný, např. z důvodu nalepení materiálu na stěny korečku.

Dále je také nutné uvést, že ve všech popisech uvedených v následujících podkapitolách je úloha řešena jako statická.

Provedená odvození jsou v jednotlivých podkapitolách doplněná o náčrty pro případ gravitačního a odstředivého vyprazdňování.

3.1.1 Tvar hladinové plochy pro ideální kapalinu

Bude-li se jednat o ideální kapalinu charakterizovanou úhlem vnitřního tření $\varphi = 0^\circ$ ¹, což lze považovat za základní popis přepravovaného materiálu, a bude-li úloha řešena jako statická, lze odvodit (viz rovnice (3.1) a (3.2) až (3.9)), že hladinové plochy, tedy i povrch materiálu (pro $\varphi = 0^\circ$), zaujmou v korečku tvary válcových ploch s osou rovnoběžnou k ose rotace korečku a procházející bodem P (viz obr. 3.1).

Pro případ řezu se tedy jedná o tvar kružnice, jejíž poloměr je závislý na vzdálenosti hladiny od pólu P , resp. na poloměru r (velikost polohového vektoru \mathbf{r} mezi osou otáčení O a zkoumaným místem, např. bod B na obr. 3.1), úhlové rychlosti ω a velikosti tíhového zrychlení g .

Níže provedené odvození tvaru hladinové plochy ideální kapaliny je provedeno v řezu jako statická a dvourozměrná úloha a je schematicky znázorněno na obr. 3.1. Polohu pólu P lze určit buď z podobnosti trojúhelníků (3.1), nebo z integrace rovnice směrnice tečny hladinové plochy (3.5), (3.7), pomocí které je provedeno také odvození jejího tvaru.

$$\frac{\overline{OP} - y}{x} = \frac{g - y\omega^2}{x\omega^2} \Rightarrow \overline{OP} = y + \frac{g - y\omega^2}{\omega^2} = \frac{g}{\omega^2} \quad (3.1)$$

kde:

$$y = r \sin \alpha,$$

$$x = r \cos \alpha,$$

$$g = |\mathbf{g}| = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

¹Popisy pro vztah mezi skupenstvími hmoty a úhlem vnitřního tření lze nalézt např. v [69].

V následujícím popisu jsou všechny uvedené síly považovány za objemové. Na materiál působí tíhová síla $\mathbf{F}_g = (F_{gx}, F_{gy})$, která má složky:

$$F_{gx} = \rho_\gamma g_x, \quad F_{gy} = \rho_\gamma g_y \quad (3.2)$$

kde tíhové zrychlení \mathbf{g} má složky $g_x = 0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, $g_y = -9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Dále na materiál působí odstředivá síla $\mathbf{F}_o = (F_{ox}, F_{oy})$. Její složky jsou:

$$F_{ox} = \rho_\gamma x\omega^2, \quad F_{oy} = \rho_\gamma y\omega^2 \quad (3.3)$$

Na materiál tedy působí výsledná síla $\mathbf{F}_v = (F_{vx}, F_{vy})$, přičemž $\mathbf{F}_v = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_o$. Složky výsledné síly jsou:

$$F_{vx} = \rho_\gamma x\omega^2, \quad F_{vy} = \rho_\gamma(y\omega^2 + g_y) \quad (3.4)$$

Směrnice tečny je pak ve tvaru:

$$k_t = -\frac{1}{k_n} = -\frac{\rho_\gamma x\omega^2}{\rho_\gamma(y\omega^2 + g_y)} = -\frac{x\omega^2}{y\omega^2 + g_y} = \frac{dy}{dx} \quad (3.5)$$

Vztah (3.5) upravíme:

$$-x\omega^2 dx = (y\omega^2 + g_y) dy \Rightarrow x\omega^2 dx + (y\omega^2 + g_y) dy = 0 \quad (3.6)$$

a po integraci je získána rovnice:

$$\frac{\omega^2}{2}x^2 + \frac{\omega^2}{2}y^2 + g_y y = C_1 \quad (3.7)$$

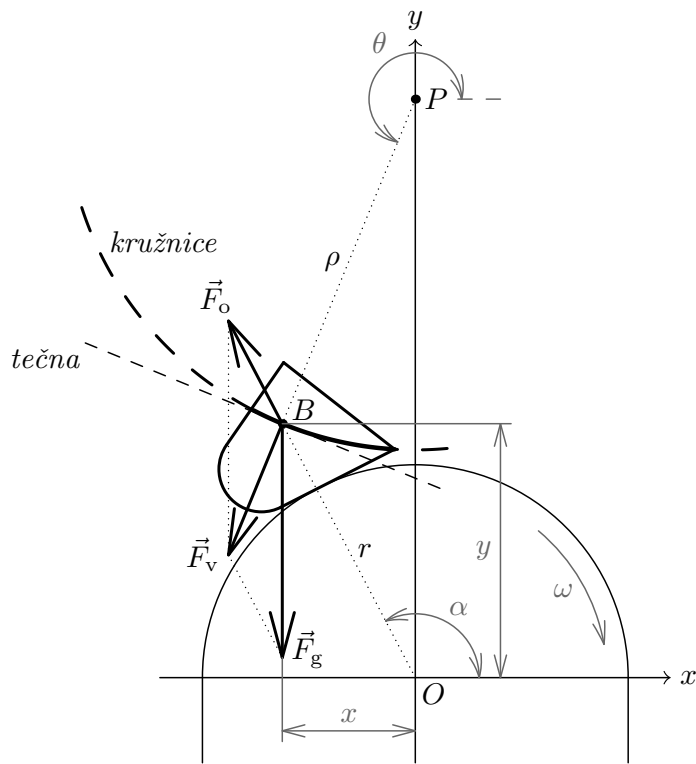
Po úpravě vztahu (3.7):

$$y^2 + x^2 + \frac{2g_y}{\omega^2}y = C_2 \quad (3.8)$$

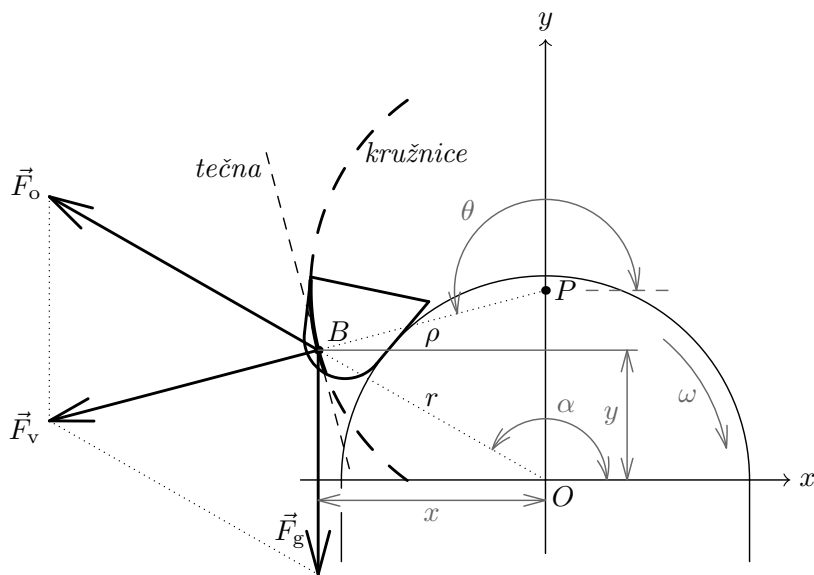
Vztah (3.8) je vhodné dále upravit na tvar obecné rovnice kružnice s použitím pomocného členu $\frac{g_y^2}{\omega^4}$:

$$\left(y^2 + \frac{2g_y}{\omega^2}y + \frac{g_y^2}{\omega^4}\right) - \frac{g_y^2}{\omega^4} + x^2 = C_2 \Rightarrow \left(y + \frac{g_y}{\omega^2}\right)^2 + x^2 = C_2 + \frac{g_y^2}{\omega^4} \Rightarrow \left(y - \left(-\frac{g_y}{\omega^2}\right)\right)^2 + x^2 = \rho^2 \quad (3.9)$$

kde ρ je poloměr kružnice (vzdálenost \overline{BP}), viz obr. 3.1. Jedná se o rovnici kružnice se středem v bodě $P [0; -\frac{g_y}{\omega^2}]$, tedy \overline{OP} je $\frac{|g_y|}{\omega^2}$, což je ve shodě s rovnicí (3.1).



(a) Gravitační vyprazdňování.



(b) Odstředivé vyprazdňování.

Obr. 3.1: Nákres k odvození tvaru hladinové plochy pro případ ideální kapaliny v korečku rotujícím kolem vodorovné osy O .

3.1.2 Tvar povrchu materiálu v korečku pro ideálně sypký a nesoudržný partikulární materiál s konstantním úhlem vnitřního tření

Základní popis tvaru povrchu materiálu v korečku uvedený v předchozí podkapitole je vzhledem ke schopnosti partikulárních materiálů přenášet do určité míry i smyková napětí velmi zjednodušený. Schopnost přenášet smyková napětí lze charakterizovat úhlem vnitřního tření φ , který je pro způsob popisu uvedený v této podkapitole považován za nenulový a konstantní.

Křivka, vzniklá svislým řezem povrchu materiálu v korečku kolmým na osu otáčení O , pak není kružnice, ale dle [12, 19, 59] se jedná o logaritmickou spirálu. Tato skutečnost vyplývá z předpokladu, že vlivem tření, jež je tedy charakterizováno nenulovým, ale konstantním úhlem vnitřního tření φ , se elementy partikulárního materiálu nepřesouvají do takové polohy, která by odpovídala případu uvedenému v podkapitole 3.1.1, nýbrž se za touto polohou „opoždují“. Tečna křivky, vzniklé svislým řezem povrchu materiálu, pak nebude svírat s úsečkou ρ úhel $\pi/2$, ale úhel $\varphi + \pi/2$.

Intuitivně lze tuto situaci přirovnat k poměrům na šikmé rovině, kdy na element hmoty působí i třecí síla, která je právě v rovnováze s tečnou složkou výsledné síly. Tohoto je využito např. v [19] při odvozování vztahu mezi sypným úhlem a úhlem vnitřního tření u ideálně sypkého materiálu.

Pokud $\omega = 0$, potom $\mathbf{F}_v = \mathbf{F}_g$. Vektorové pole výsledné síly \mathbf{F}_v lze považovat za homogenní a tvar povrchu materiálu v korečku bude odpovídat přímo šikmé rovině. Obecně se však materiál v korečku nachází v nehomogenním (radiálním) vektorovém poli výsledné síly, tudíž i sklon povrchu materiálu ve zkoumaném místě bude záviset na směru nositelky vektoru této síly v tomto místě.

Byly provedeny dva způsoby odvození křivky popisující tvar povrchu materiálu v korečku. První vychází z výše uvedeného popisu a postupně jsou získány parametrické rovnice logaritmické spirály (3.18) a (3.19) a druhý je proveden v polárním souřadném systému, viz (3.24).

Odvození jsou provedena pro případ gravitačního způsobu vyprazdňování korečku a jeho pohybu ve směru chodu hodinových ručiček. Je-li vyprazdňování odstředivé, nebo pokud se koreček pohybuje proti směru chodu hodinových ručiček, bude se výsledná spirála stáčet opačným směrem. Problematika je schematicky znázorněna na obr. 3.2.

Vzhledem ke skutečnosti, že hledané parametrické rovnice logaritmické spirály jsou definovány v souřadném systému (x_P, y_P) se středem v pólu $P [0; -\frac{g_y}{\omega^2}]$, je zde jako první krok provedena transformace do tohoto souřadného systému. Konkrétně se jedná o translaci ve směru osy y o $\frac{g_y}{\omega^2}$.

Tedy:

$$F_{v_x} = \rho_\gamma x \omega^2 = \rho_\gamma x_P \omega^2 \quad (3.10)$$

$$F_{v_y} = \rho_\gamma (y \omega^2 + g_y) = \rho_\gamma \left(\left(y_P - \frac{g_y}{\omega^2} \right) \omega^2 + g_y \right) \quad (3.11)$$

kde:

$x_P = x$ je transformovaná složka polohového vektoru \mathbf{r} ve směru osy x ,

$y_P = y + \frac{g_y}{\omega^2}$ je transformovaná složka polohového vektoru \mathbf{r} ve směru osy y .

Za účelem získání tečné a normálové složky vektoru výsledné síly \mathbf{F}_v je ve zkoumaném bodě hledané křivky provedena transformace do souřadného systému normály a tečny (n, t) . Tedy:

$$\begin{bmatrix} F_{v_n} \\ F_{v_t} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{\text{rot}} \begin{bmatrix} F_{v_x} \\ F_{v_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta - \varphi) & \sin(\theta - \varphi) \\ -\sin(\theta - \varphi) & \cos(\theta - \varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{v_x} \\ F_{v_y} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

kde:

F_{v_x} a F_{v_y} jsou složky vektoru výsledné síly \mathbf{F}_v v souřadném systému (x_P, y_P) ,

F_{v_n} a F_{v_t} jsou složky vektoru výsledné síly \mathbf{F}_v v souřadném systému (n, t) ,

\mathbf{T}_{rot} je transformační matice rotace obecně o úhel $\theta \pm \varphi$, přičemž volba znaménka závisí na zvolené znaménkové konvenci a ovlivní výslednou pravotočivost, či levotočivost spirály, která pak koresponduje se způsobem vyprazdňování a směrem pohybu korečku.

Jelikož:

$$k_t = -\frac{1}{k_n} \quad (3.13)$$

kde:

k_t je směrnice tečny a

k_n je směrnice normály,

může být pro následující integraci vybrána tečná, nebo normálová složka vektoru

\mathbf{F}_v , a je provedena transformace zpět do souřadného systému (x_P, y_P) . Je-li tedy zvolena normálová složka F_{v_n} , lze provést následující transformaci:

$$\begin{bmatrix} F_{v_{nx}} \\ F_{v_{ny}} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{\text{rot}}^{-1} \begin{bmatrix} F_{v_n} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta - \varphi) & -\sin(\theta - \varphi) \\ \sin(\theta - \varphi) & \cos(\theta - \varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{v_n} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

kde:

$F_{v_{nx}}$ a $F_{v_{ny}}$ jsou složky vektoru \mathbf{F}_{v_n} v souřadném systému (x_P, y_P) .

Směrnice tečny je pak ve tvaru:

$$k_t = -\frac{1}{k_n} = -\frac{F_{v_{nx}}}{F_{v_{ny}}} = -\frac{\cos(\theta - \varphi)F_{v_n}}{\sin(\theta - \varphi)F_{v_n}} = \frac{dy}{dx} \quad (3.15)$$

Vztah (3.15) je upraven:

$$-\frac{(\cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi)F_{v_n}}{(\sin \theta \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi)F_{v_n}} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} \quad (3.16)$$

a zlomek je rozšířen o $\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi}$ a upraven:

$$\frac{\sin \theta \operatorname{tg} \varphi + \cos \theta}{\cos \theta \operatorname{tg} \varphi - \sin \theta} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} \quad (3.17)$$

Po integraci jsou získány rovnice:

$$y = ae^{(\operatorname{tg} \varphi)\theta} \sin \theta + C_2 \quad (3.18)$$

$$x = ae^{(\operatorname{tg} \varphi)\theta} \cos \theta + C_1 \quad (3.19)$$

S ohledem na řešenou problematiku jsou konstanty C_1 a C_2 rovny nule² a $a = \rho_D$. Po transformaci do polárního souřadného systému (θ, ρ) je získána obecná rovnice logaritmické spirály (3.20), která je vůči spirále definované parametrickými rovnicemi (3.18), (3.19) pootočená o úhel θ_D .

$$\rho = \rho_D e^{\operatorname{tg} \varphi (\theta - \theta_D)} \quad (3.20)$$

kde:

ρ_D a θ_D jsou souřadnice bodu D , viz obr. 3.2.

²V případě použití původního souřadného systému (x, y) se $C_1 = 0$ a $C_2 = -\frac{g_y}{\omega^2}$.

Druhý způsob odvození je proveden v souladu s obr. 3.2 přímo v polárním souřadném systému (θ, ρ) . Úsečky ρ a $\rho + d\rho$, které svírají s osou x_P úhly θ a $\theta + d\theta$, jsou vzdálenosti zkoumaných bodů na povrchu materiálu A a B od pólu P a zároveň nositelky směrů výsledné síly \mathbf{F}_v v bodech A a B . Úhel mezi normálou k předpokládanému tvaru povrchu přepravovaného materiálu v bodě A , resp. B , a úsečkou ρ je úhel vnitřního tření φ . Jestliže body A a B leží na téže křivce, potom platí:

$$\rho + d\rho = \rho + \operatorname{tg}\varphi \rho d\theta \quad (3.21)$$

Po úpravě:

$$\int_{\rho}^{\rho_D} \frac{d\rho}{\rho} = \int_{\theta}^{\theta_D} \operatorname{tg}\varphi d\theta \quad (3.22)$$

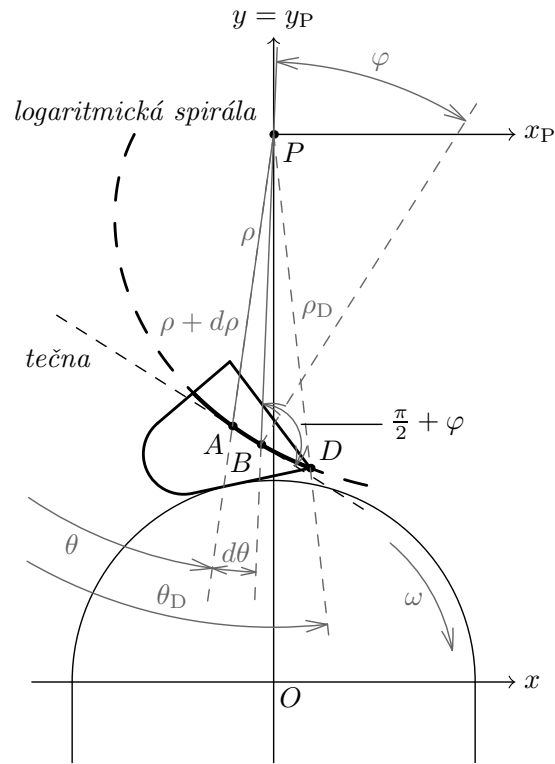
Po integraci (3.22) je získána rovnice:

$$\ln \rho_D - \ln \rho = \operatorname{tg}\varphi(\theta_D - \theta) \Rightarrow \ln \frac{\rho_D}{\rho} = \operatorname{tg}\varphi(\theta_D - \theta) \quad (3.23)$$

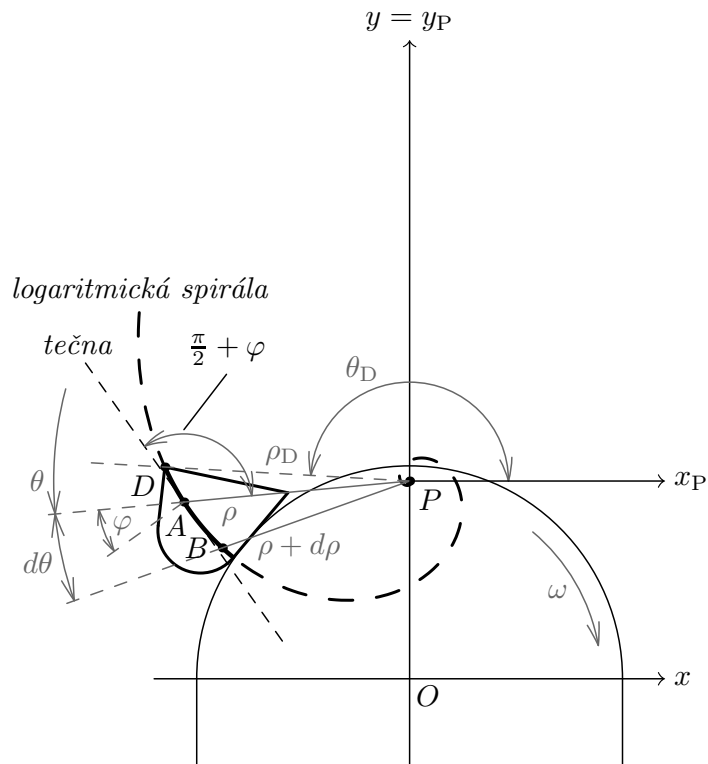
a po úpravě:

$$\rho = \rho_D e^{-\operatorname{tg}\varphi(\theta_D - \theta)} = \rho_D e^{\operatorname{tg}\varphi(\theta - \theta_D)} \quad (3.24)$$

Rovnice (3.20) a (3.24) jsou obecné rovnice logaritmické spirály, kde ρ_D a θ_D určují polohu bodu D , ve kterém logaritmická spirála s pólem v bodě P protíná stěnu korečku. Pro případ $\varphi = 0^\circ$ se jedná o rovnici kružnice v polárních souřadnicích se středem v bodě P a o poloměru ρ_D .



(a) Gravitační vyprazdňování.



(b) Odstředivé vyprazdňování.

Obr. 3.2: Schematické znázornění tvaru povrchu partikulárního materiálu odpovídajícího logaritmické spirále [59].

3.1.3 Tvar povrchu materiálu v korečku pro ideálně sypký a nesoudržný partikulární materiál s proměnným úhlem vnitřního tření a s případnou kohezí

Popis tvaru povrchu materiálu v korečku provedený v podkapitole 3.1.2 je v dnes dostupné literatuře [59, 19, 12] považován za teoreticky přesný. Je však rovněž známo [49, 19], že závislost mezního smykového napětí na mezním normálovém napětí je obecně nelineární, tudíž vztah $\tau = \sigma \operatorname{tg}\varphi$ je potřeba nahradit vztahem $\tau = f(\sigma)$, kde f (dále též mezní čára) může být obecná funkce, pro jejíž analytické vyjádření není doposud jednoznačná teorie [19].

Přestože funkce f obecně není známa, tak z experimentálního měření jsou známy některé body ležící na této funkci a je-li k dispozici dostatečný soubor těchto bodů, tj. hodnot mezních smykových a mezních normálových napětí, je možno proložit tyto body například interpolačním splajnem, se kterým lze již analyticky pracovat. Příklad takového proložení je znázorněn na obr. 3.3.

Důsledek obecně nelineární závislosti mezi mezním smykovým a mezním normálovým napětím při odvozování tvaru povrchu materiálu v korečku je, že tento tvar nebude obecně odpovídat logaritmické spirále, nýbrž se bude jednat o obecnou funkci, pravděpodobně obecnou spirálu, jejíž tvar bude záviset na charakteristice $\tau = f(\sigma)$. Úhel vnitřního tření φ , tak jak byl popsán v kapitole 1, lze definovat jako:

$$\varphi = \arctan \frac{f(\sigma)}{\sigma} \quad (3.25)$$

kde σ je normálové napětí.

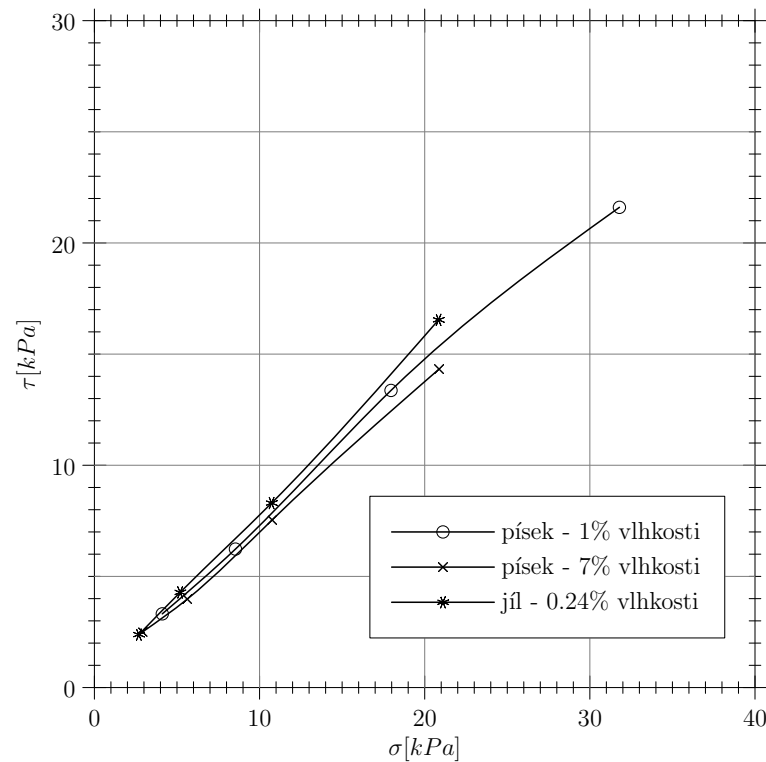
S přihlédnutím k popisu uvedenému v podkapitole 3.1.2 může obecná rovnice křivky popisující tvar povrchu materiálu v korečku vypadat následovně:

$$\rho = \rho_D e^{\frac{f(\sigma)}{\sigma}(\theta - \theta_D)} \quad (3.26)$$

Dle tvaru rovnice (3.26) lze usuzovat, že hledaná křivka popisující tvar povrchu materiálu v korečku je obecná spirála, jejíž tvar bude záviset na charakteristice materiálu a na velikosti normálového napětí ve zkoumaném bodě, přičemž poloha tohoto bodu je vzhledem k pólu P určena vzdáleností ρ a úhlem θ . Nicméně uvedení vztahu (3.26) má spíše informativní význam, neboť jeho řádné odvození nebylo doposud provedeno.

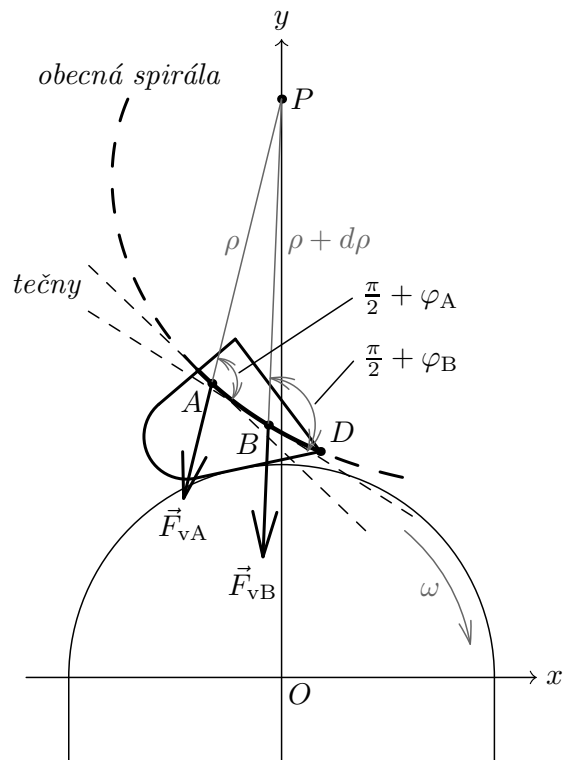
Přítomnost případné koheze je v tomto případě zohledněna již v charakteristice materiálu $\tau = f(\sigma)$, kdy nulové (popř. i záporné) hodnotě mezního normálového napětí odpovídá nenulová hodnota mezního smykového napětí. Toto zohlednění je

však pouze teoretické a jeho vliv na chování matematického modelu nebyl doposud řádně prostudován.

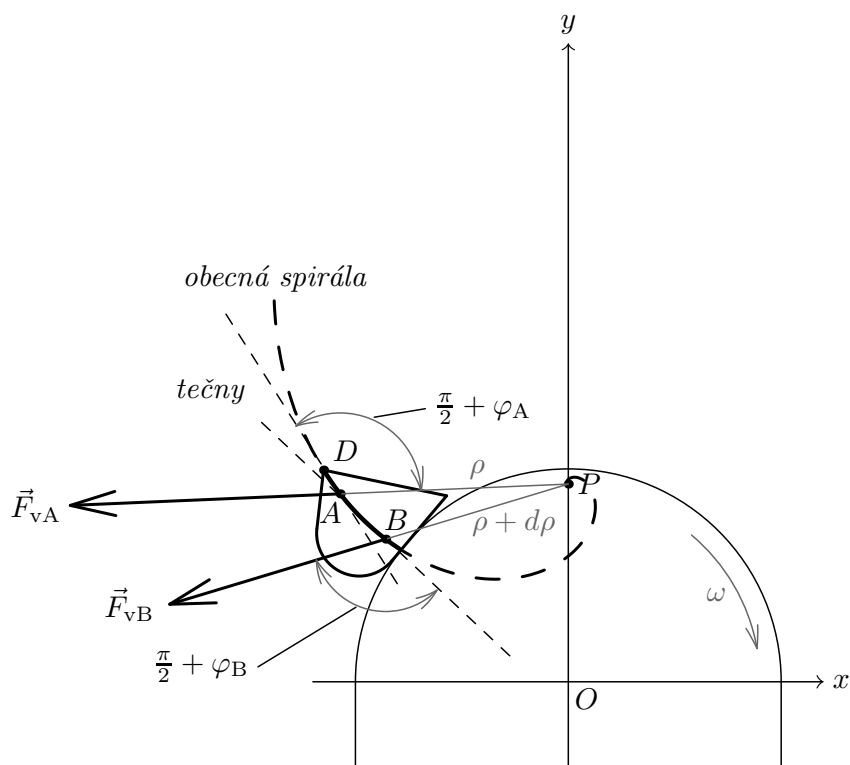


Obr. 3.3: Příklady mezní čáry získané interpolací hodnot mezního smykového a mezního normálového napětí pro dva druhy písku s různou vlhkostí a jíl [6] pomocí kubického splajnu.

Na obr. 3.4 je schematicky znázorněná problematika nelineární závislosti mezi mezním smykovým a mezním normálovým napětím ve vztahu k úhlu, který svírá nositelka vektoru výsledné síly \mathbf{F}_v s tečnou křivky popisující tvar povrchu materiálu v korečku. Je zřejmé, že tento úhel obecně nebude pro dva různé body A a B ležící na této křivce stejný. Je-li tedy známa charakteristika materiálu $\tau = f(\sigma)$, mělo by být možné odvodit i tvar křivky popisující tvar povrchu materiálu v korečku.



(a) Gravitační vyprazdňování.



(b) Odstředivé vyprazdňování.

Obr. 3.4: Schematické znázornění tvaru povrchu partikulárního materiálu odpovídajícího obecné spirále.

3.2 Diskrétní přístup

V rámci diskrétního přístupu (z angl. the particulate approach) je studovaný materiál popisován jako soustava konečného počtu částic, které mají konkrétní rozměry, tvary a materiálové vlastnosti. Chování soustavy je pak dáno pohybem a vzájemnou interakcí na úrovni jednotlivých částic a jsou zde aplikovány fyzikální principy adekvátní studované problematice. Při řešení problematiky chování sypkých látek se bude jednat např. o Newtonovy pohybové zákony.

V následujícím textu je prezentována metoda diskrétních prvků, tzv. DEM, což je výpočtová metoda vhodná pro popis chování jak homogenních, tak také nehomogenních materiálů.

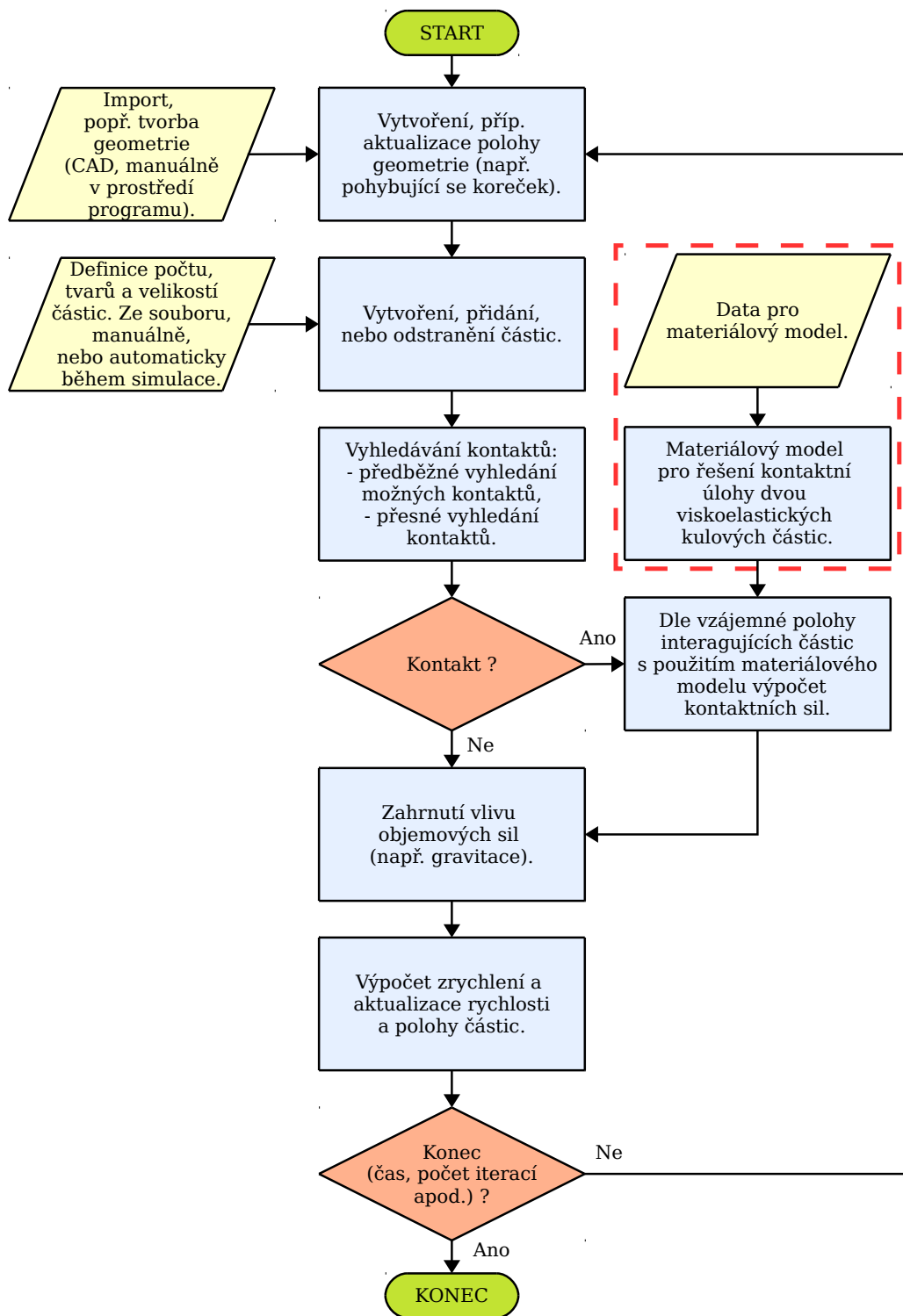
3.2.1 Metoda diskrétních prvků

Metoda diskrétních prvků patří do rodiny numerických metod, které umožňují výpočet pohybů a vzájemného působení velkého množství „diskrétních“ částic [80]. Obecně jsou tyto metody použitelné od simulací pohybu planet, přes simulace sypkých látek, roztoků apod. až po simulace na molekulární úrovni. Rovněž mohou být tyto metody použity i pro simulace chování tuhých těles s heterogenní strukturou (beton, horniny) [56], nebo tekutin [2]. Další příklady možností použití této metody lze nalézt v [80].

V oblasti problematiky toků a deformací partikulárních materiálů v současnosti existuje celá řada softwarových produktů, popř. „open-source“ knihoven, v nichž lze úlohu řešit pomocí metody diskrétních prvků. Mezi „open-source“ a nekomerční software patří např. LIGGGHTS [74], Yade [79] a mezi komerční software patří např. EDEM [72].

Práce, ve kterých byly popsány základní principy metody diskrétních prvků v aplikaci na řešení problematiky chování partikulárních látek jsou [9, 10]. Zde je metoda nazývána „distinct element method“ a autoři popsali přístupy k výpočtům pohybů a interakcí částic ve tvaru disku - dvourozměrná úloha, přičemž závěry jsou aplikovatelné i pro kulové částice - trojrozměrná úloha. Vhodnost použití této metody v její základní podobě je založena na předpokladu, že deformace jednotlivých částic skutečného materiálu jsou zanedbatelné vzhledem k deformaci studované soustavy jako celku.

Během výpočetního cyklu je v každé iteraci, tj. pro časový krok Δt , řešena pohybová a kontaktní úloha, přičemž pro řešení těchto úloh existuje více přístupů. S ohledem na [10, 79] a na způsob použití metody v této práci může být výpočetní cyklus zjednodušeně popsán prostřednictvím vývojového diagramu znázorněného na obr. 3.5.



Obr. 3.5: Vývojový diagram znázorňující průběh výpočetního cyklu v metodě diskretních prvků. Bloky ohraničené červeným obdélníkem představují části vytvořené při řešení cíle této práce.

Z diagramu na obr. 3.5 je patrné, že prvními kroky jsou import geometrie do prostředí simulace a vytvoření částic, včetně inicializace materiálových modelů. Importovaná geometrie může být vytvořena buď pomocí externího CAD softwaru, nebo přímo v prostředí simulačního programu. Zde však tvorba komplexnější geometrie bývá zpravidla časově náročnější. Částice rovněž mohou být definovány přímo v prostředí simulačního programu, nebo mohou být „načteny“ ze souboru. Je nutno poznamenat, že import geometrie a vytvoření částic lze obecně provést kdykoli během simulace.

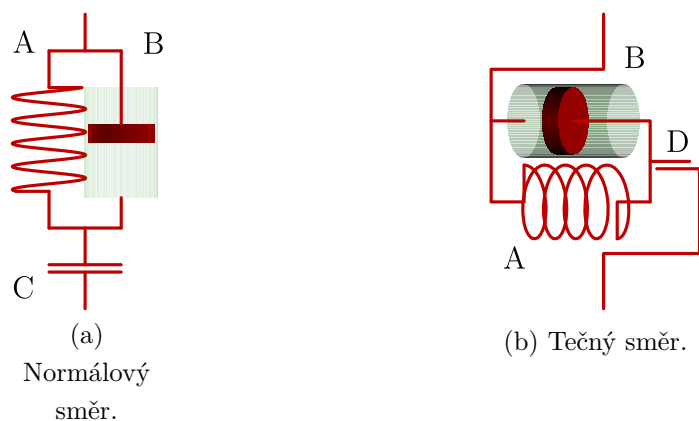
Poté je spuštěn hlavní výpočetní cyklus, během kterého jsou vyhledávány vzájemné kontakty mezi částicemi a kontakty mezi částicemi a geometrií. Pro každý nalezený kontakt je následovně řešena kontaktní úloha, jejíž cílem je stanovit kontaktní síly a momenty, přičemž jejich velikosti jsou funkcí materiálového modelu a kolizní geometrie daného kontaktu, jež popisuje způsob a velikost deformace částic při kolizi. Dle [10, 41, 79] může být řešení kontaktní úlohy pro případ kontaktu dvou viskoelastických kulových částic (Kelvin-Voigtův model pro lineární isotropní materiál, viz obr. 3.6) popsáno následovně:

Nechť t_{i-1} je čas na začátku iterace $i - 1$ a částice A_1 a A_2 se středy S_1 a S_2 a o poloměrech R_1 a R_2 se pohybují rychlostmi \mathbf{v}_1 a \mathbf{v}_2 a nejsou ve vzájemném kontaktu. Vzdálenost středů částic je $\overline{S_1S_2}$. V tomto okamžiku kontaktní síla \mathbf{F} neexistuje. Situace je znázorněna na obr. 3.7a.

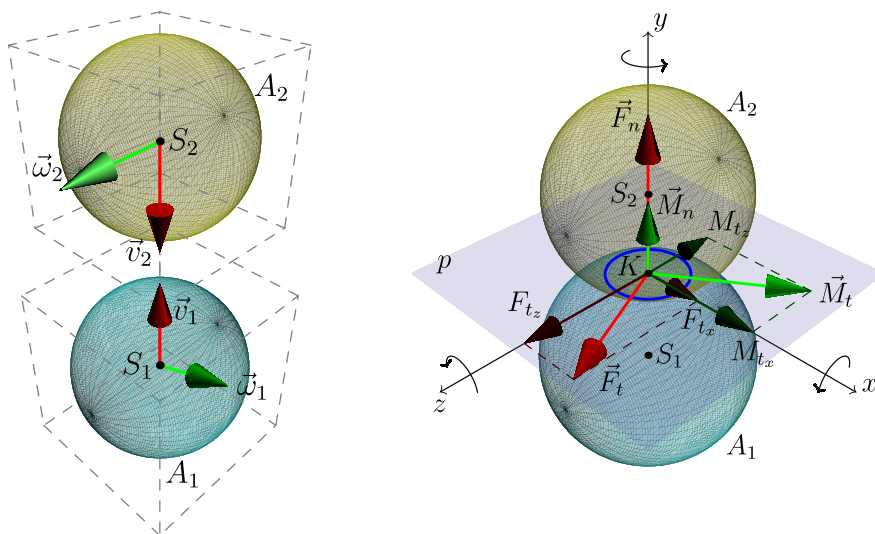
Vzhledem k pohybu částic jsou na konci této iterace obě částice posunuty o $\mathbf{v}_1\Delta t$ a $\mathbf{v}_2\Delta t$. Za předpokladu, že vzájemný pohyb částic vede ke kolizi a dále, že časový krok Δt je dostatečně malý, tak aby se částice „nemínuly“, tzn. že posuny částic jsou výrazně menší než jejich poloměry, existuje v i -té iteraci i kolizní geometrie, tj. vzájemný průnik obou částic vůči sobě. Pro případ kulových částic je kolizní geometrií průnik dvou kulových ploch. Tento průnik je charakterizován kontaktním bodem K , rovinou p a penetrací definovanou vektorem \mathbf{x}_n , jehož nositelka je vždy shodná s nositelkou normálového vektoru \mathbf{n}^0 . Samotný kontaktní bod K lze pak definovat jako průsečík nositelky normálového vektoru \mathbf{n}^0 s rovinou p .

Způsob popisu kolizní geometrie výše uvedenou penetrací a její přímé použití ve vztahu (3.34) bez zohlednění např. objemu průniku dvou kulových ploch lze považovat za základní.

Situace je znázorněna na obr. 3.7b, ve kterém jsou již zakresleny i reakční síly a momenty.



Obr. 3.6: Znázornění fyzikálních náhrad pro tah-tlak a smyk při řešení kontaktní úlohy pro případ Kelvin-Voigtova modelu viskoelastického materiálu. Členy: A - pružina o tuhosti k , B - tlumič o viskozitě c , C - člen umožňující podmíněný zánik kontaktu, D - člen přenášející tření. V náhradách pro ohyb a krut je uvažováno použití torzních členů.



(a) Situace před kolizí dvou kulových částic - znázornění vektorů rychlostí spolu s ohraničující krychlí, v rámci které jsou vyhledávány případné kolize.

(b) Kolize dvou kulových částic - znázornění kontaktních sil a momentů.

Obr. 3.7: Znázornění situace vedoucí ke kolizi dvou kulových částic.

Výše popsanou kontaktní úlohu s uvažováním rotací lze pro kontaktní bod K zapsat následovně (znaménková konvence odpovídá implementaci v použitém pro-

gramu prezentovaném v kapitole 4):

$$\mathbf{v}_{\text{rel}} = (\mathbf{v}_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \times (K - S_1)) - (\mathbf{v}_2 + \boldsymbol{\omega}_2 \times (K - S_2)) \quad (3.27)$$

$$\mathbf{v}_n = (\mathbf{v}_{\text{rel}} \cdot \mathbf{n}^0) \times \mathbf{n}^0 \quad (3.28)$$

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{v}_{\text{rel}} - \mathbf{v}_n \quad (3.29)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{rel}} = \boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2 \quad (3.30)$$

$$\boldsymbol{\omega}_n = (\boldsymbol{\omega}_{\text{rel}} \cdot \mathbf{n}^0) \times \mathbf{n}^0 \quad (3.31)$$

$$\boldsymbol{\omega}_t = \boldsymbol{\omega}_{\text{rel}} - \boldsymbol{\omega}_n \quad (3.32)$$

kde:

- \mathbf{n}^0 je jednotkový normálový vektor roviny průniku částic p ,
tedy na jeho nositelce leží středy S_1 a S_2 ,
- \mathbf{v}_{rel} je relativní rychlost kolize v bodě K ,
- \mathbf{v}_n je normálová složka \mathbf{v}_{rel} , tj. ve směru \mathbf{n}^0 ,
- \mathbf{v}_t je tečná složka \mathbf{v}_{rel} ,
- \mathbf{v}_1 je rychlost částice A_1 ,
- \mathbf{v}_2 je rychlost částice A_2 ,
- $\boldsymbol{\omega}_{\text{rel}}$ je relativní úhlová rychlost interagujících částic,
- $\boldsymbol{\omega}_n$ je složka $\boldsymbol{\omega}_{\text{rel}}$ kolmá na rovinu p ,
- $\boldsymbol{\omega}_t$ je složka $\boldsymbol{\omega}_{\text{rel}}$ ležící v rovině p ,
- $\boldsymbol{\omega}_1$ je úhlová rychlost částice A_1 ,
- $\boldsymbol{\omega}_2$ je úhlová rychlost částice A_2 ,
- K je kontaktní bod,
- S_1 je poloha středu částice A_1 ,
- S_2 je poloha středu částice A_2 .

Kontaktní sílu \mathbf{F} a její normálovou a tečnou složku lze vypočítat jako:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_n + \mathbf{F}_t \quad (3.33)$$

$$\mathbf{F}_n = \begin{cases} k_n^+ \mathbf{x}_n + c_n^+ \mathbf{v}_n & \text{je-li } (R_1 + R_2) \geq \overline{S_1 S_2} \\ k_n^- \mathbf{x}_n + c_n^- \mathbf{v}_n & \text{je-li } (R_1 + R_2) < \overline{S_1 S_2} \end{cases} \quad (3.34)$$

$$\mathbf{F}_t = \begin{cases} k_t^+ \mathbf{x}_t + c_t^+ \mathbf{v}_t & \text{je-li } (R_1 + R_2) \geq \overline{S_1 S_2} \\ k_t^- \mathbf{x}_t + c_t^- \mathbf{v}_t & \text{je-li } (R_1 + R_2) < \overline{S_1 S_2} \end{cases} \quad (3.35)$$

kde:

- \mathbf{F} je kontaktní síla,
- \mathbf{F}_n je normálová složka \mathbf{F} ,
- \mathbf{F}_t je tečná (smyková) složka \mathbf{F} ,
- \mathbf{x}_n je vektor charakterizující vzájemný průnik částic, tzv. penetraci, jehož velikost lze také vypočítat jako $(R_1 + R_2) - \overline{S_1 S_2}$. Je-li tato hodnota ≥ 0 , dochází ke kolizi.
- \mathbf{x}_t je celková tečná deformace, která se mění inkrementálně, viz [79],
- k_n je koeficient tuhosti v normálovém směru,
- k_t je koeficient tuhosti v tečném směru,
- c_n je koeficient tlumení v normálovém směru,
- c_t je koeficient tlumení v tečném směru.

Znaménka v horním indexu odlišují koeficienty pro dva způsoby interakce částic - tlak (+), resp. tah (-), např. pro popis kohezivního chování.

Dvě podmínky v rovnicích (3.34) a (3.35) přibližně popisují skutečnost, že v případě kontaktu dvou částic, kdy $(R_1 + R_2) \geq \overline{S_1 S_2}$, je podstata jejich vzájemné interakce jiná (jedná se o deformaci částic jako takových), než v případě jejich kohezivního, popř. jiného chování, jehož následkem je schopnost přenášet jistá tahová zatížení, tedy pro $(R_1 + R_2) < \overline{S_1 S_2}$, přičemž nevykazuje-li materiál toto chování, kontakt zaniká. V opačném případě zaniká až po dosažení určité mezní hodnoty.

Výše uvedené koeficienty tuhostí a tlumení lze vypočítat jako:

$$\frac{1}{k_n} = \frac{1}{k_{n_1}} + \frac{1}{k_{n_2}} \Rightarrow k_n = \frac{k_{n_1} k_{n_2}}{k_{n_1} + k_{n_2}} \quad (3.36)$$

$$\frac{1}{k_t} = \frac{1}{k_{t_1}} + \frac{1}{k_{t_2}} \Rightarrow k_t = \frac{k_{t_1} k_{t_2}}{k_{t_1} + k_{t_2}} \quad (3.37)$$

$$\frac{1}{c_n} = \frac{1}{c_{n_1}} + \frac{1}{c_{n_2}} \Rightarrow c_n = \frac{c_{n_1} c_{n_2}}{c_{n_1} + c_{n_2}} \quad (3.38)$$

$$\frac{1}{c_t} = \frac{1}{c_{t_1}} + \frac{1}{c_{t_2}} \Rightarrow c_t = \frac{c_{t_1} c_{t_2}}{c_{t_1} + c_{t_2}} \quad (3.39)$$

kde:

- k_{n_1}, k_{n_2} a k_{t_1}, k_{t_2} jsou koeficienty tuhosti částice A_1 , resp. A_2 , v normálovém a tečném směru,
- c_{n_1}, c_{n_2} a c_{t_1}, c_{t_2} jsou koeficienty tlumení částice A_1 , resp. A_2 , v normálovém a tečném směru.

Hodnoty koeficientů pro konkrétní částici je možno stanovit několika způsoby. Bud použitím modulu pružnosti v tahu E a Poissonova čísla ν . Tento způsob je však

velice přibližný, neboť obě hodnoty jsou určeny pro popis elastického kontinua a po identifikaci hodnot parametrů materiálového modelu se mohou výrazně lišit od původních hodnot pro materiál reálných částic. Nebo použitím koeficientů restituce pro normálový a tečný směr, z nichž lze dle [57] získat koeficienty tuhosti a tlumení, což je v praxi častější případ. Anebo ryze experimentálně.

Konečná velikost síly \mathbf{F}_t je ovlivněna třením mezi interagujícími částicemi. Výše uvedený způsob popisu rozšíříme o podmínku:

$$\mathbf{F}_t = \begin{cases} \mathbf{F}_t, & \text{jestliže } \mathbf{F}_t \leq f \mathbf{F}_n, \\ f \mathbf{F}_n, & \text{jestliže } \mathbf{F}_t > f \mathbf{F}_n, \end{cases} \quad (3.40)$$

kde:

f je součinitel tření a
 $f \mathbf{F}_n$ je třecí síla, tedy maximální velikost síly \mathbf{F}_t .

Součinitel tření f je definovaný jako tangenta třecího úhlu pro daný materiál, přičemž v případě kontaktu dvou, nebo více částic s různou hodnotou tohoto součinitele, lze jeho konečnou velikost upravit tak, aby korespondovala s experimentálně změřenými hodnotami.

Tečná složka síly vytváří momenty kolmé na \mathbf{n}^0 :

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{F}_t \times (\mathbf{K} - \mathbf{S}_1) \quad (3.41)$$

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{F}_t \times (\mathbf{K} - \mathbf{S}_2) \quad (3.42)$$

kde:

\mathbf{M}_1 je moment působící na částici A_1 ,
 \mathbf{M}_2 je moment působící na částici A_2 .

V případě nenulové relativní úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}_{\text{rel}}$ zde může být zohledněn vliv momentu \mathbf{M}_r způsobeného valivým odporem a odporem při krutu. Jeho velikost může být závislá jak na velikosti síly \mathbf{F}_n , tak např. i na velikosti $\boldsymbol{\omega}_{\text{rel}}$ [70].

Obdobně, jako v případě výpočtu kontaktní síly, je dále vypočten moment vzniklý změnou a rychlostí změny natočení interagujících částic vůči sobě. Výpočet tohoto momentu je však relevantní pouze v případech, kdy nahrazovaný materiál vykazuje kohezivní chování, nebo je-li snaha zohlednit určitý vliv viskoelastického chování na úrovni vzájemné rotace dvou interagujících částic (maximální velikost tohoto momentu bude rovna velikosti \mathbf{M}_r), anebo je tímto materiálovým modelem obecně popisován systém, jehož elementy jsou schopné přenášet zatížení ve všech šesti stup-

ních volnosti [41]. Na dvě interagující částice tedy působí moment:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_o + \mathbf{M}_k \quad (3.43)$$

$$\mathbf{M}_o = k_o \boldsymbol{\varphi}_t + c_o \boldsymbol{\omega}_t \quad (3.44)$$

$$\mathbf{M}_k = k_k \boldsymbol{\varphi}_n + c_k \boldsymbol{\omega}_n \quad (3.45)$$

kde:

\mathbf{M} je celkový moment vzniklý změnou a rychlostí změny natočení interagujících částic vůči sobě,

\mathbf{M}_o je složka momentu \mathbf{M} pro ohyb,

\mathbf{M}_k je složka momentu \mathbf{M} pro kroucení,

$\boldsymbol{\varphi}_t$ je složka vzájemného natočení interagujících částic ve směru rovnoběžném s rovinou p , přičemž $\boldsymbol{\varphi}_t = \boldsymbol{\varphi}_t + \boldsymbol{\omega}_t \Delta t$,

$\boldsymbol{\varphi}_n$ je složka vzájemného natočení interagujících částic ve směru kolmém na rovinu p , přičemž $\boldsymbol{\varphi}_n = \boldsymbol{\varphi}_n + \boldsymbol{\omega}_n \Delta t$,

k_o, k_k jsou koeficienty tuhosti v ohybu a krutu a

c_o, c_k jsou koeficienty tlumení v ohybu a krutu.

Koeficienty k_o, k_k a c_o, c_k nelze považovat za nezávislé, nýbrž jejich velikost závisí na k_n, k_t a c_n, c_t [30].

Jelikož daná částice zpravidla interaguje s více než jednou další částicí, jsou síly a momenty pro každou interakci dané částice postupně sčítány. Poté jsou aplikovány další, např. objemové síly (zejména gravitace). Výsledkem je celková síla a celkový moment působící na danou částici, ze kterých je následně s použitím Druhého Newtonova zákona vypočteno dráhové a úhlové zrychlení částice, viz (3.46) a (3.47).

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_{\text{celk}}}{m} \quad (3.46)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{M}_{\text{celk}}}{\mathbf{I}_{11}} \quad (3.47)$$

kde:

- \mathbf{a} je vektor dráhového zrychlení,
- $\boldsymbol{\alpha}$ je vektor úhlového zrychlení,
- \mathbf{F}_{celk} je celková síla působící na částici,
- \mathbf{M}_{celk} je celkový moment působící na částici,
- m je hmotnost částice,
- \mathbf{I}_{11} je první prvek tenzoru momentu setrvačnosti. Pro kulové částice je tento tenzor diagonální, přičemž: $\mathbf{I}_{11} = \mathbf{I}_{22} = \mathbf{I}_{33}$).

Následně s použitím varianty Verletovy metody pro integraci Newtonových pohybových rovnic, tzv. leapfrog integrace [85], je vypočtena změna dráhové a úhlové rychlosti, která je přičtena k jejich okamžitým hodnotám známým z předchozí iterace, jež jsou dále použity při výpočtu polohy a orientace částice, viz (3.48) až (3.51). V této metodě jsou sudé derivace známé v časech $t_{i-1} = t_i - \Delta t$, t_i a $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ a liché v časech $t_{i-\frac{1}{2}} = t_i - \frac{\Delta t}{2}$ a $t_{i+\frac{1}{2}} = t_i + \frac{\Delta t}{2}$.

$$\mathbf{v}_{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{v}_{i-\frac{1}{2}} + \mathbf{a}\Delta t \quad (3.48)$$

$$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_{i+\frac{1}{2}}\Delta t \quad (3.49)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{i+\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\omega}_{i-\frac{1}{2}} + \boldsymbol{\alpha}\Delta t \quad (3.50)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{i+1} = \boldsymbol{\varphi}_i + \boldsymbol{\omega}_{i+\frac{1}{2}}\Delta t \quad (3.51)$$

kde:

- \mathbf{v} je okamžitá rychlost částice,
- \mathbf{r} je polohový vektor částice,
- $\boldsymbol{\omega}$ je okamžitá úhlová rychlost částice,
- $\boldsymbol{\varphi}$ je orientace částice.

Poté co jsou takto aktualizovány polohy a rychlosti všech částic, je aktuální čas navýšen o Δt a celý výpočet se opakuje dokud není splněna ukončovací podmínka. Před začátkem nové iterace bývají volány funkce pro vizualizaci a pro zápis dat na disk.

Podle výše uvedeného popisu řešení kontaktní úlohy, který byl vytvořen v rámci plnění cíle disertační práce, byl vytvořen materiálový model. Tento byl dále implementován do prostředí frameworku Yade. Přestože se jedná o známou problematiku kontaktu viskoelastických částic, byla implementace materiálového modelu vytvořena obecně tak, aby umožnila např. zahrnutí vlivu koheze a zohlednění rozdílných mechanismů uplatňujících se jak při kontaktu, tak také při jeho rozpojování.

4 IMPLEMENTACE

V této kapitole jsou provedeny implementace teoretických popisů.

Popisy uvedené v podkapitole 3.1 byly implementovány do výpočetního nástroje prezentovaného v [32, 33] a na základě teorie uvedené v podkapitole 3.2 byl vytvořen materiálový model a s jeho použitím byly sestaveny výpočtové modely využívající metody diskrétních prvků implementované v softwaru Yade [79].

4.1 Výpočetní nástroj

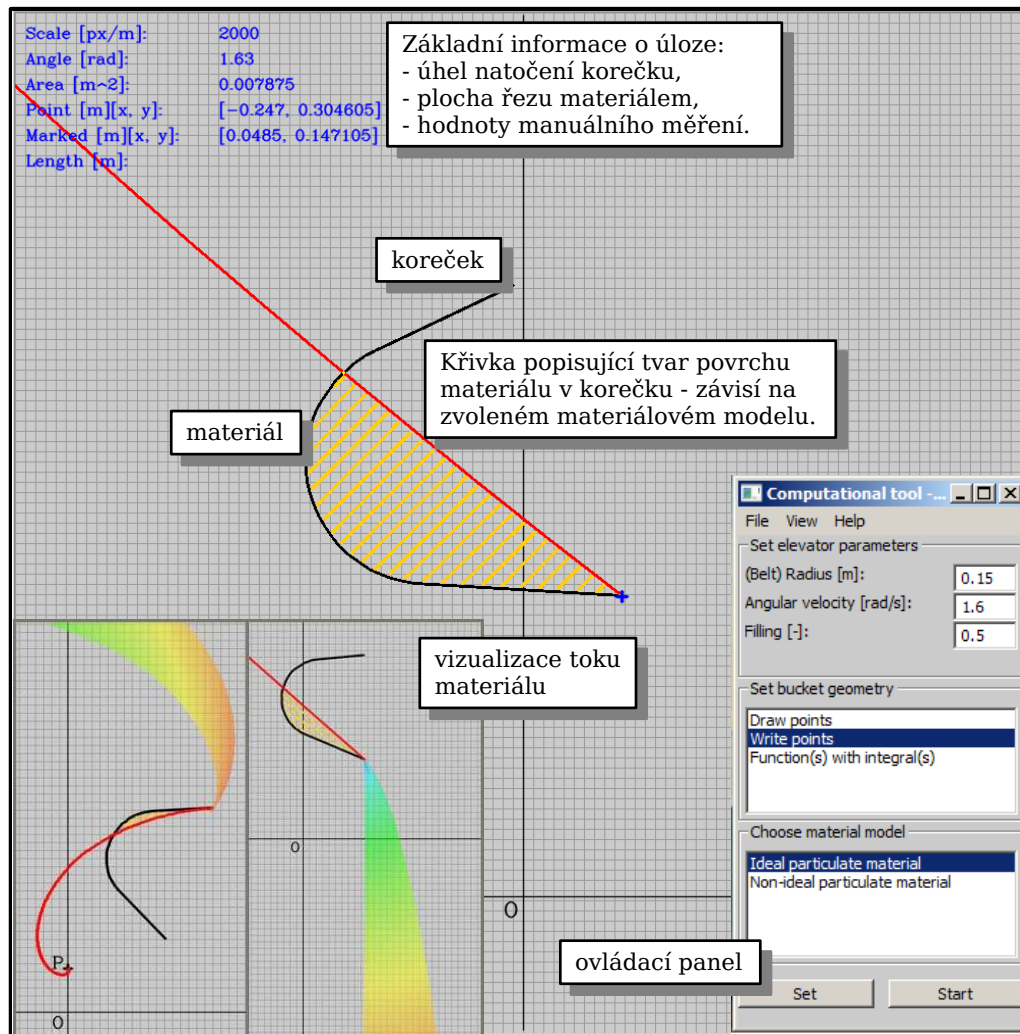
Za účelem ověření analytických popisů uvedených v rámci podkapitoly 3.1 byl vytvořen výpočetní nástroj, který umožňuje stanovení začátku vyprazdňování korečku, resp. stanovení úhlu, po jehož dosažení začne materiál koreček opouštět, spolu se znázorněním způsobu a průběhu vyprazdňování. Úloha je zde vždy dvourozměrná a pro stanovení tvaru povrchu materiálu v korečku je řešena jako statická. Pro odhad trajektorií, po kterých může materiál koreček opouštět, je využito teorie pro pohyb hmotného bodu po parabolických drahách.

Výpočetní nástroj byl napsán tak, aby umožňoval spuštění i v optimalizačním režimu, kdy za účelem nalezení vhodné geometrie korečku vytváří optimalizační algoritmus instance výpočetního jádra nástroje, provádí výpočet a vyhodnocuje výsledky.

4.1.1 Popis

Výpočetní nástroj je napsán v jazyce C++ s využitím STL a běžně dostupných „open-source“ knihoven, především OpenCV [77] a wxWidgets [87].

V rámci jedné instance programu lze řešit i větší počet úloh, které se mohou vzájemně lišit ve vstupních parametrech. Výsledky jednotlivých výpočtů obsahující informace o vstupních parametrech, křivce popisující tvar povrchu materiálu v korečku, jeho natočení, velikosti průřezu materiálu a o křivkách předpokládaného pohybu materiálu během vyprazdňování je možno zapsat na disk v podobě textových dat, nebo je přímo porovnávat prostřednictvím grafického uživatelského rozhraní, viz obr. 4.1, které zároveň slouží i pro komunikaci mezi uživatelem a výpočetním nástrojem.



Obr. 4.1: Grafické uživatelské rozhraní výpočetního nástroje. Zobrazen je ovládací panel, dvourozměrná reprezentace korečku spolu s křivkou popisující tvar povrchu materiálu a dva způsoby vyprazdňování korečku - odstředivý a gravitační.

4.1.2 Vstupní parametry

Při použití výpočetního nástroje je nutné zadat sérii vstupních parametrů. Jmenovitě se jedná se o velikost úhlu vnitřního tření φ , velikost úhlové rychlosti ω , geometrii korečku včetně jeho polohy vůči ose otáčení, plnění korečků, rozteč korečků a příp. jejich počet. V případě, že se jedná o optimalizační režim výpočtu je dále nutné zvolit optimalizované parametry a jejich intervaly.

Úhel vnitřního tření φ lze zadat buď jako konstantu, nebo je dopočítáván z funkční závislosti mezního smykového napětí na mezním normálovém napětí [49]. Velikost úhlové rychlosti ω je zadávána jako konstanta v rad/s. Geometrie korečku včetně jeho polohy je zadávána přímo v prostředí nástroje, nebo prostřednictvím předpřipraveného textového souboru. Plnění je zadáváno prostřednictvím součinitele plnění ψ v rozsahu $\langle 0; 1 \rangle$ a může se jednat o jeho průměrnou hodnotu, přičemž lze zadat i směrodatnou odchylku. Tyto parametry mohou být známy např. z experimentálních

měření. Rozteč korečku je pak zadávána v metrech a je v rámci jedné úlohy shodná pro všechny korečky.

Kritériem optimalizace může být geometrické omezení, nebo omezení hodnoty provozního, popř. materiálového parametru. V současné době je implementována jedna optimalizační metoda - genetický algoritmus, který je popsán v kapitole 7.

4.1.3 Výpočet

Výpočet pracuje se třemi souřadnými systémy. Jedná se o globální kartézský souřadný systém (x, y) s počátkem v ose otáčení korečku O , jehož osa x je vždy kolmá na směr nositelky vektoru tíhového zrychlení, kartézský souřadný systém (x_k, y_k) , ve kterém je definována geometrie korečku a při nulovém natočení korečku, kterému dle podkapitoly 3.1.2 odpovídá $\alpha = 180^\circ$, je shodný se systémem (x, y) , a polární souřadný systém (ρ, θ) s počátkem v pólu P .

Transformace mezi souřadnými systémy jsou popsány transformačními maticemi \mathbf{T}_1 a \mathbf{T}_2 .

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha - \pi) & -\sin(\alpha - \pi) \\ \sin(\alpha - \pi) & \cos(\alpha - \pi) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & t_x \\ \sin \theta & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

\mathbf{T}_1 je transformační matice mezi souřadným systémem (x_k, y_k) a (x, y) . Tato transformace popisuje otočení korečku o úhel α , tedy:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{T}_1 \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

a \mathbf{T}_2 je transformační matice mezi souřadným systémem (ρ, θ) a (x, y) :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_2 \begin{bmatrix} \rho \\ \theta \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Touto transformací je přepočítáván bod ležící na křivce popisující tvar povrchu materiálu v korečku, přičemž pro definici této křivky jsou použity teorie popsané v podkapitole 3.1.

Po zadání požadovaných vstupních parametrů a spuštění výpočtu algoritmus nalezne takový úhel natočení korečku α , pro který jsou splněny následující podmínky.

Zaprvé, velikost plochy, která je z jedné strany ohraničená křivkou popisující tvar povrchu materiálu v korečku a ze strany druhé sérií bodů popisujících geometrii korečku, právě odpovídá teoretické velikosti plochy průřezu materiálu v korečku, jež je definována součinitelem plnění ψ .

Zadruhé, křivka popisující tvar povrchu materiálu v korečku protíná jeho stěnu (vnitřní, nebo vnější, v závislosti na způsobu vyprazdňování) v jejím nejzazším bodě. Jak bylo uvedeno v podkapitole 3.1, vychází tato podmínka z předpokladu, že tvar povrchu materiálu v korečku lze stanovit pouze v okamžiku počátku jeho vyprazdňování.

Pro obecné použití je výpočet nastaven tak, aby probíhal iteračním způsobem, kdy algoritmus hledá nejvhodnější řešení, které splňuje výše uvedené podmínky.

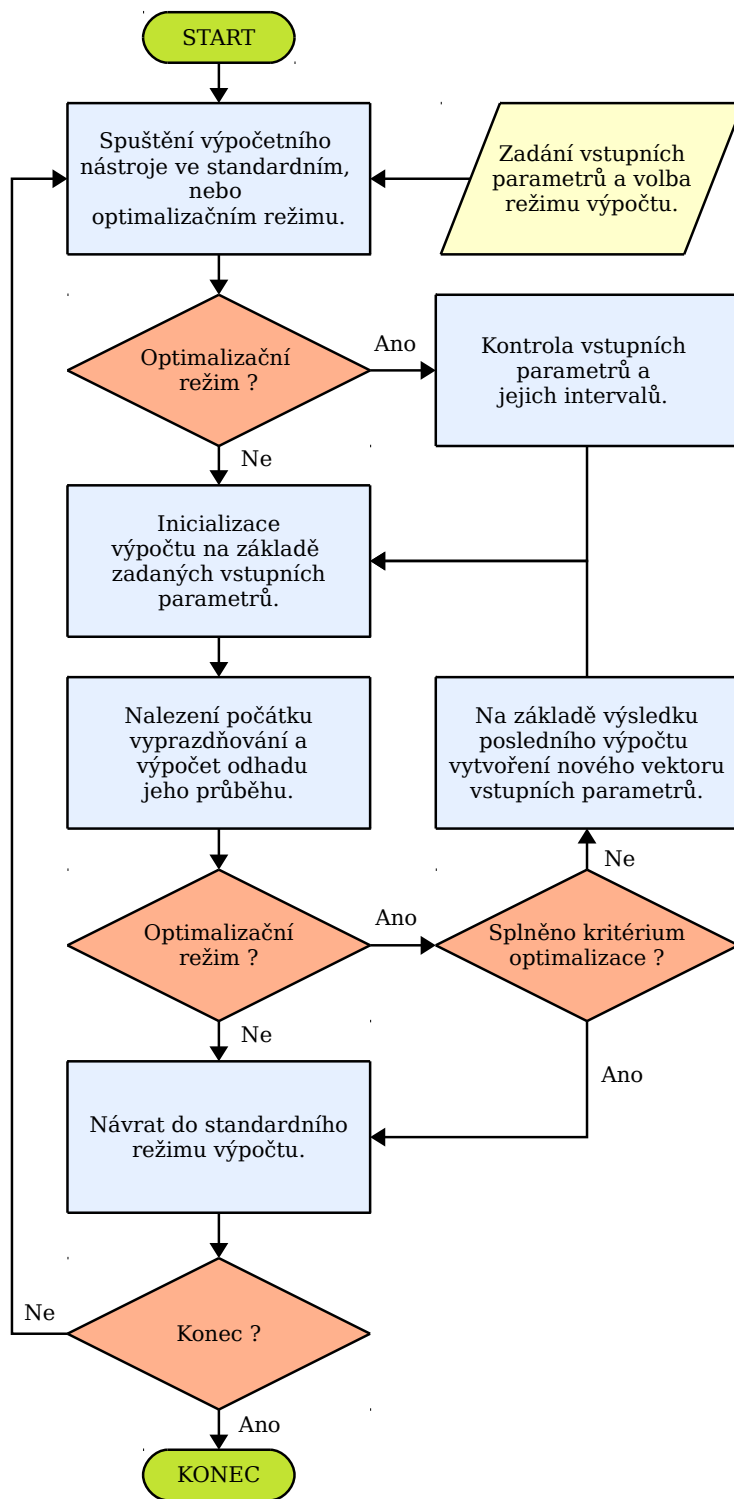
Optimalizační režim výpočtu umožňuje z předem definovaných intervalů vyhledávání takových hodnot vstupních parametrů, které nejlépe vyhoví dané podmínce. Konkrétně lze optimalizační úlohu popsat následovně:

Najdi takovou geometrii korečku, nebo velikost úhlové rychlosti, rozteč apod., pro které bude vyprazdňování probíhat požadovaným způsobem.

Požadovaný způsob může být stav, kdy vyprazdňování materiálu začne v předem stanoveném okamžiku, nebo předpokládaná výpadová křivka materiálu nebude v kolizi s geometrií hlavy elevátoru, nebo s jiným korečkem.

Hodnoticím kritériem, které slouží k porovnání úspěšnosti daného řešení, je výsledek výpočtu průběhu vyprazdňování korečku běžící na pozadí aplikace, který je roven součtu uživatelem bodově ohodnocených jevů, např. kolize výpadové křivky s korečkem, pokud tyto nastaly. Avšak vzhledem k omezené platnosti analytických popisů, na kterých je nástroj založen (viz kapitola 6), není v této práci použit pro řešení optimalizační úlohy.

Průběh výpočtu nástroje je znázorněn prostřednictvím vývojového diagramu na obr. 4.2. Z obrázku je patrný běh programu ve standardním i optimalizačním režimu.



Obr. 4.2: Běh výpočetního nástroje znázorněný prostřednictvím vývojového diagramu.

4.1.4 Výstupy

Výstupy mohou mít jak textovou, tak grafickou podobu. Příklad grafického výstupu výpočetního nástroje je uveden na obr. 4.1 vlevo dole, na kterém je znázorněn průběh odstředivého a gravitačního způsobu vyprazdňování. Tvar povrchu materiálu v korečku je vyznačen červenou křivkou a plocha znázorňující předpokládaný způsob pohybu partikulárního materiálu poté co opustí koreček je znázorněna v barevném spektru, které odpovídá předpokládanému rozložení rychlostí pohybujícího se materiálu.

4.2 Výpočtové modely využívající metody diskretních prvků

V této podkapitole jsou popsány výpočtové modely, které byly vytvořeny s použitím knihoven Yade [79], což je open-source softwarová struktura, tzv. *framework*, pro vytváření výpočtových modelů využívajících metodu diskretních prvků. Výpočetní části jsou napsány v jazyce C++ a pro tvorbu samotné simulace, její odladění a řízení a případné další zpracování vstupních a výstupních dat je použit jazyk Python.

Na základě teorie prezentované v podkapitole 3.2.1, byl v rámci frameworku Yade vytvořen viskoelastický materiálový model vhodný pro popis chování jak homogenních, tak nehomogenních materiálů. Poté co byl model verifikován, byly s jeho použitím vytvořeny dvě úlohy:

1. Vyprazdňování korečku.
2. Simulace pohybu partikulárního materiálu korečkovým dopravníkem.

První úloha má za úkol ověřit nastavení parametrů materiálového modelu, včetně ověření chování tohoto modelu v ději, který přímo souvisí s řešenou problematikou. Tato úloha je vytvořena tak, aby odpovídala experimentům prováděným v Laboratoři partikulárních látek. Měření, způsob validace a výsledky jsou blíže popsány v kapitolách 5 a 6.

Druhá úloha bude použita v ukázkovém příkladu, v němž bude provedena optimalizace geometrie korečku.

4.2.1 Vyprazdňování korečku

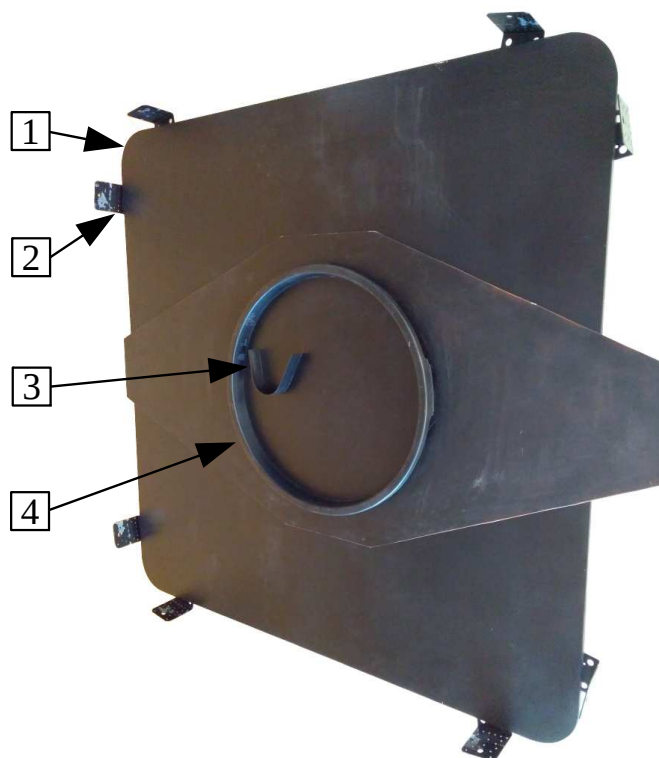
Úloha vyprazdňování korečku byla vytvořena tak, aby geometrie modelu zařízení odpovídala geometrii „Zařízení pro kreativní systém tvorby matematických popisů obecných procesů“, na kterém byly prováděny experimenty. Zároveň materiály použité v simulacích odpovídají bílým plastovým kuličkám pro airsoft o jmenovitém

průměru $d_k = 6 \cdot 10^{-3}$ m a jmenovité hmotnosti $m_k = 2 \cdot 10^{-4}$ kg a hracím kostkám, tedy pravidelným konvexním mnohostěnům (Platónským tělesům) - čtyřstěnu, šestistěnu, osmistěnu a dvanáctistěnu.

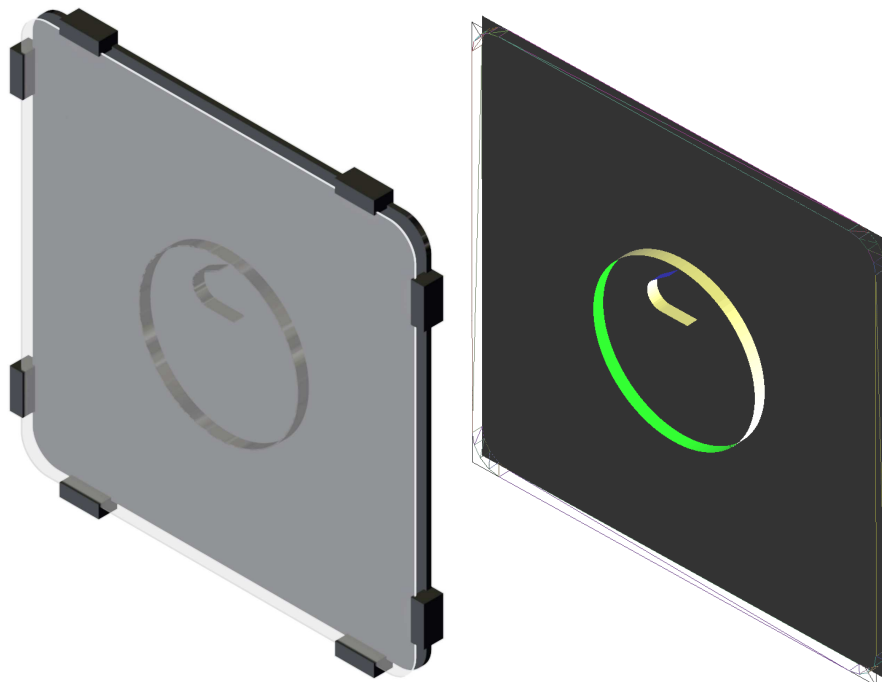
Bílé plastové kuličky byly vybrány jako zástupce homogenního materiálu, kdy mechanicko-fyzikální vlastnosti na úrovni jednotlivých kuliček jsou považovány za shodné. Dále kuličky odpovídají základnímu tvaru částic v DEM simulacích - kulové částice.

Hrací kostky byly vybrány jako zástupce nehomogenního materiálu. Nehomogenita je v tomto případě způsobena rozdílným tvarem částic, který je v simulacích nutno zohlednit. Hrací kostky lze aproximovat kulovými částicemi (nejjednodušší způsob), shluky kulových částic, nebo konvexními mnohostěny, pro něž jsou způsoby řešení kontaktní úlohy známé a dobře zdokumentované [5, 15]. Zároveň, použitím konvexních mnohostěnů jsou řešeny i soustavy tvořené konkávními objekty.

Na obr. 4.3 je fotografie experimentálního zařízení spolu s popisem jeho hlavních částí. Na obr. 4.4a je pak znázorněn 3D model tohoto zařízení a na obr. 4.4b je tentýž model, avšak v podobě, ve které byl dále použit v simulacích, tzn. že model obsahuje pouze funkční plochy, které přímo interagují se simulovaným materiálem.



Obr. 4.3: Experimentální zařízení, které se sestává z černé zadní stěny (1), upevňovacích segmentů (2), korečku (3) a válce (4) pro zamezení vysypání materiálu mimo zařízení. Čelní skleněná tabule byla odmontována.



(a) 3D model použitý jako předloha pro tvorbu modelu pro DEM simulaci.

(b) Zjednodušený model pro DEM simulaci, který se setává pouze z funkčních ploch - vnitřní plocha černé zadní stěny, vnitřní plocha korečku, vnitřní plocha čelního skla a vnitřní válcová plocha.

Obr. 4.4: Modely experimentálního zařízení.

Na obr. 4.5 je zobrazen jeden model materiálu pro případ bílých plastových kuliček spolu s jeho reálnou předlohou a na obr. 4.8 jsou zobrazeny čtyři modely materiálu pro případ hracích kostek. Postupně se jedná o kulové částice, které mají se svou reálnou předlohou shodné objemy, shluky kulových částic a mnohostěny, jejichž hrany jsou buď ostré, nebo zkosené [34, 39]. V případě prvních dvou byl použit výše prezentovaný viskoelastický materiálový model. Pro řešení kontaktní úlohy mezi mnohostěny, popř. mezi mnohostěnem a geometrií zařízení, byl použit model pro konvexní mnohostěny [15] implementovaný v Yade.

Mechanicko-fyzikální vlastnosti bílých plastových kuliček, které byly použity pro nastavení parametrů materiálového modelu jsou uvedeny v tab. 4.1 a na obr. 4.7. Kromě hmotnosti a průměru, které byly měřeny s použitím laboratorních vah a mikrometru, byl s použitím šikmé roviny měřen také třecí úhel¹ mezi kuličkami a

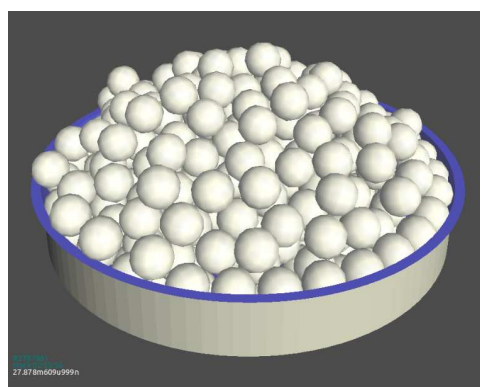
¹S ohledem na způsob měření součinitele tření, který je definován jako tangenta třecího úhlu, a názvy argumentů metod ve frameworku Yade [79] volaných pro nastavení parametrů materiálových modelů je v této práci termín třecí úhel používán přednostně.

třemi materiály, které v modelu tvořily funkční plochy, tzn. že mohly být v kontaktu s materiálem během vyprazdňování korečku. Postupně se jedná o černou zadní stěnu, koreček a čelní sklo. Kuličky byly navzájem vhodně spojeny tak, aby při skluzu nedocházelo k jejich rotaci. Třecí úhel mezi jednotlivými kuličkami byl rovněž měřen užitím šikmé roviny, avšak jeho konečná hodnota byla dopočítána z předpokládané vzájemné počáteční polohy dvou vrstev, viz obr. 4.6b. Koeficienty restituce byly vypočteny jako druhá odmocnina podílu výšky prvního odrazu k výšce prvního dopadu kuličky na podložku. Tyto výšky byly získány z videozáznamu odrazu kuličky. Konkrétně se tedy jedná o koeficienty restituce v normálovém směru. Pro koeficienty restituce v tečném směru byly použity stejné hodnoty jako pro normálový směr, přičemž se předpokládalo, že budou později upraveny. Obdobně tomu bylo i v případě doby trvání kontaktu, jejíž hodnota byla přibližně nastavena dle videozáznamu a upravena podle průběhu simulace odrazu částice od pevné podložky tak, aby tento průběh korespondoval s průběhem experimentu.

Mechanicko-fyzikální vlastnosti hracích kostek byly získány obdobným způsobem jako v případě bílých plastových kuliček a jsou uvedeny v tab. 4.2 a na obr. 4.9. V případě vytvořeného materiálového modelu pro kulové částice nebyl, na rozdíl od kuliček, koeficient restituce měřen přímo, nýbrž jeho hodnota byla iterativně nastavena až při identifikaci hodnot parametrů tohoto modelu. A v případě materiálového modelu pro konvexní mnohostěny, který koeficienty restituce a čas kolize nepoužívá, byly hodnoty odpovídajících parametrů (Youngův modul a Poissonovo číslo) získány z [76]. Vzhledem ke skutečnosti, že hodnoty třecích úhlů jsou v Yade běžným způsobem zadávány na úrovni jednotlivých materiálu a nikoli kontaktu, byla v této práci pro nastavení hodnoty třecího úhlu mezi mnohostěny použita průměrná hodnota.

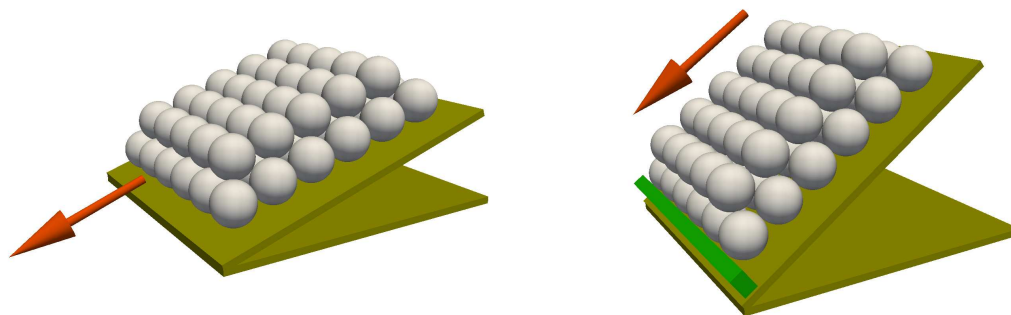


(a) Airsoftové kuličky.



(b) Model - kulové částice.

Obr. 4.5: Airsoftové kuličky jako experimentální materiál a jejich model.



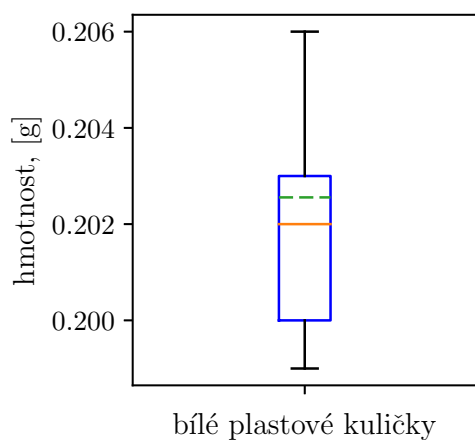
(a) Znárodnění způsobu měření třecího úhlu mezi blokem sestaveným ze dvou vrstev kuliček a daným povrchem experimentálního zařízení.

(b) Znárodnění způsobu měření třecího úhlu mezi kuličkami. Jedná se o dvě vrstvy, kdy se spodní vrstva opírá o hranol pevně spojený se šikmou rovinou a horní vrstva se může volně pohybovat. Po dosažení úhlu přibližně $35,264^\circ$, který odpovídá takové poloze, kdy tečny mezi kuličkami horní a spodní vrstvy ve směru sklonu šikmé roviny jsou orientovány vodorovně, již může dojít k pohybu horní vrstvy. Od tohoto okamžiku pak probíhá samotné měření třecího úhlu.

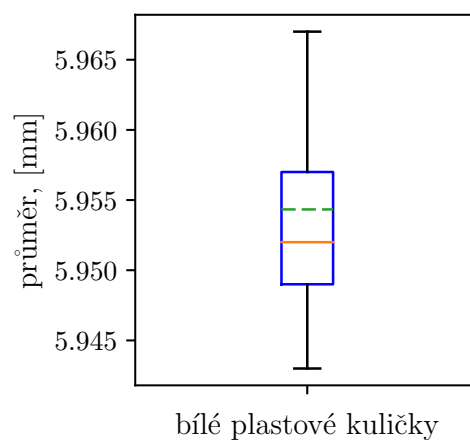
Obr. 4.6: Schematické znárodnění způsobu měření třecích úhlů.

Tab. 4.1: Průměrné hodnoty vybraných mechanicko-fyzikálních parametrů bílých plastových kuliček.

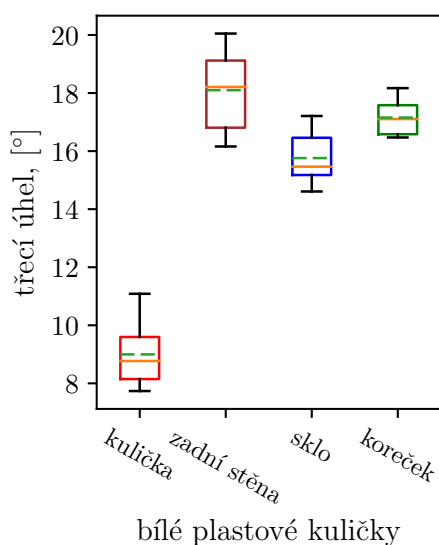
Hmotnost, [g]	0,203
Průměr, [mm]	5,95
Objemová hmotnost, [kg/m ³]	1840
Třecí úhel, [°]	
Kulička - kulička	9,00
Kulička - sklo	15,76
Kulička - zadní stěna	18,10
Kulička - koreček	17,16
Koefficient restituce, [-]	
Kulička - zadní stěna	0,59
Kulička - sklo	0,72
Kulička - koreček	0,56



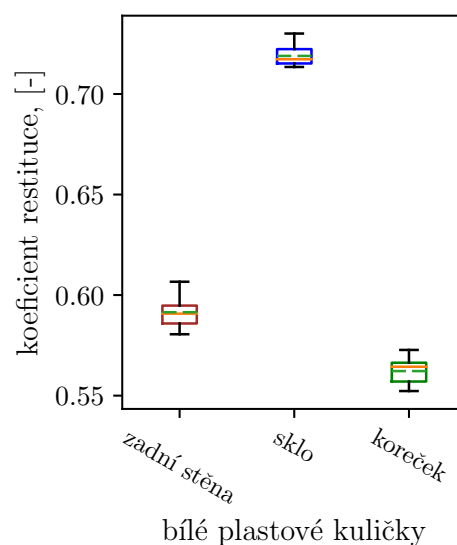
(a) Hmotnost.



(b) Průměr.



(c) Třecí úhel měřený mezi dvěma vzorky sestavenými z bílých plastových kuliček, resp. mezi jedním vzorkem a materiálem experimentálního zařízení.

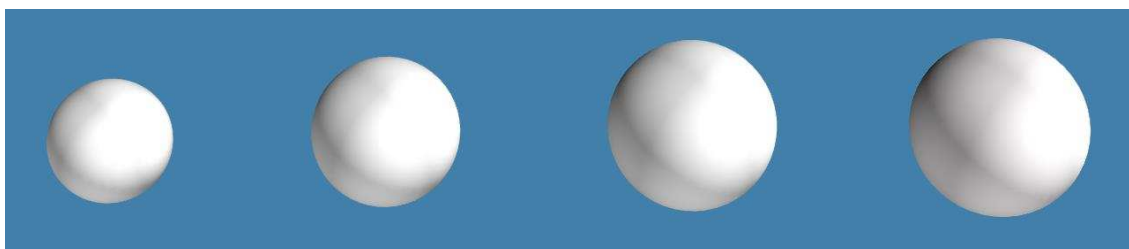


(d) Koeficient restituce vypočtený jako druhá odmocnina podílu výšky prvního odrazu bílé plastové kuličky od daného materiálu experimentálního zařízení k celkové výšce jejího pádu.

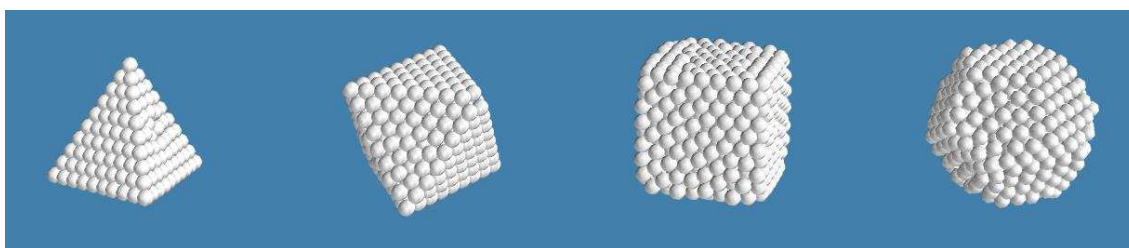
Obr. 4.7: Znázornění změřených hodnot vybraných mechanicko-fyzikálních parametrů bílých plastových kuliček použitých pro nastavení parametrů materiálového modelu. Průměr je znázorněn zelenou čárkovanou čarou.



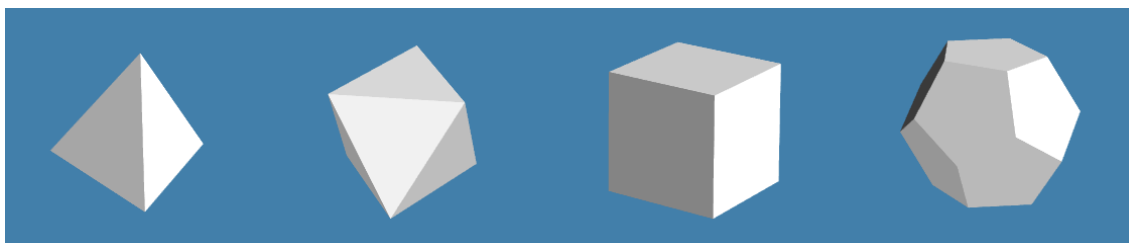
(a) Hrací kostky [34].



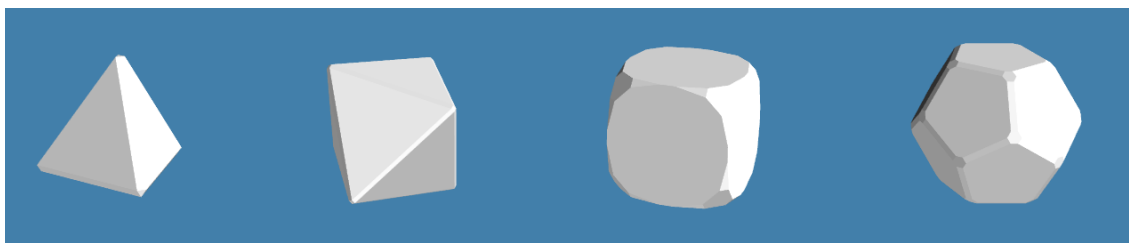
(b) Model - kulové částice [34].



(c) Model - shluky kulových částic [34].

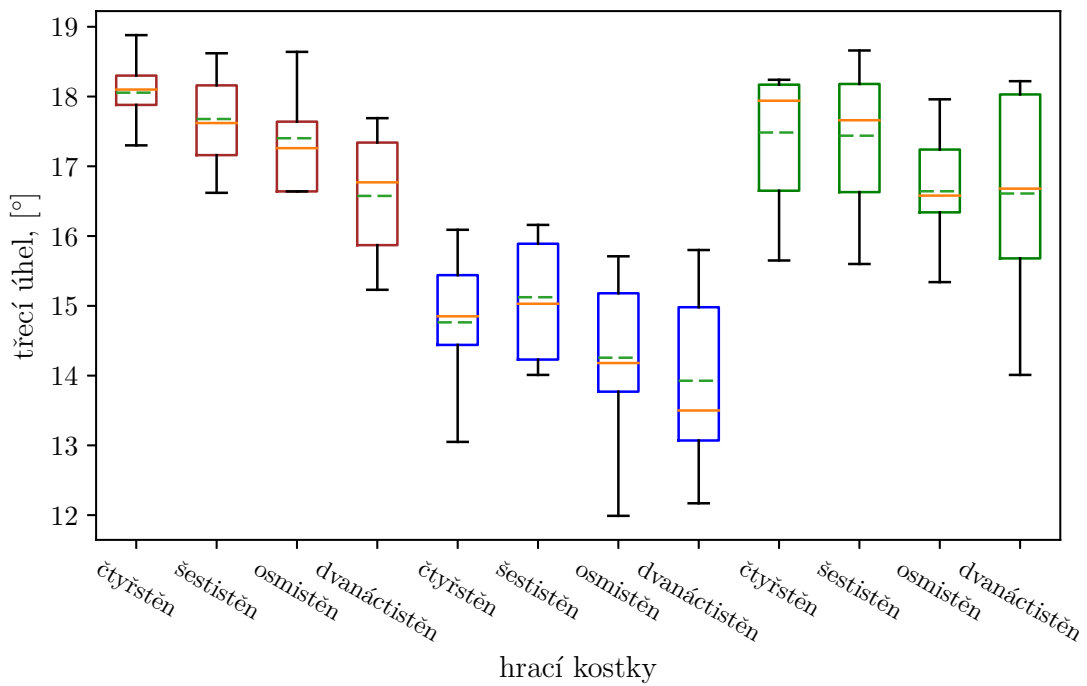
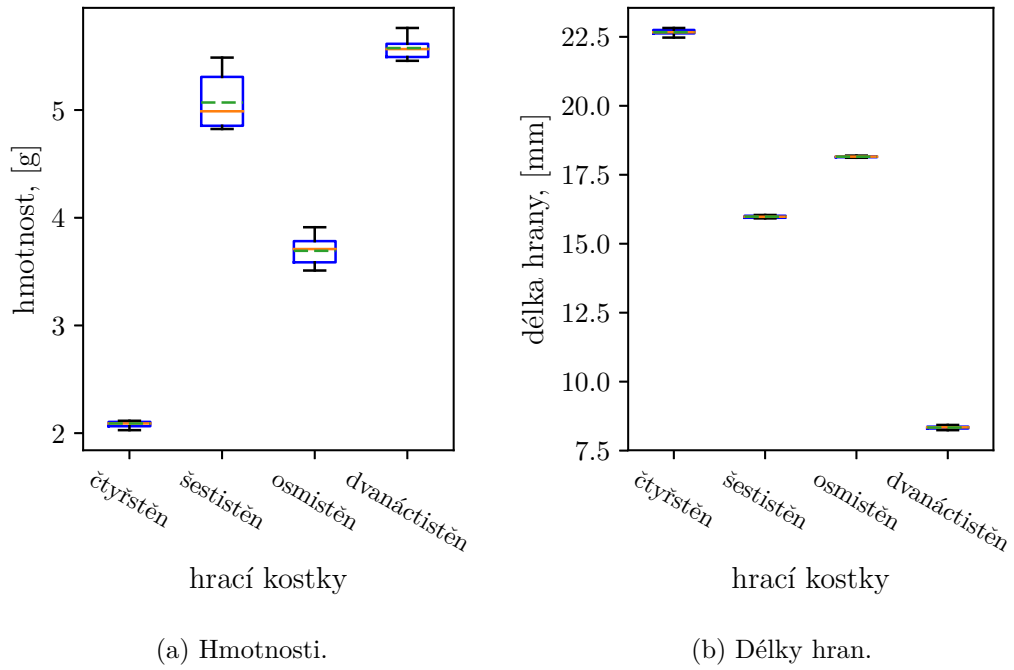


(d) Model - mnohostěny s ostrými hranami [34].



(e) Model - mnohostěny se zkosenými hranami [39].

Obr. 4.8: Experimentální materiál v podobě čtyřech typů hracích kostek a jeho modely.



(c) Třecí úhel mezi jednotlivými hracími kostkami a materiály experimentálního zařízení: černá zadní stěna (hnědá), sklo (modrá) a materiál korečku (zelená).

Obr. 4.9: Znázornění změřených hodnot vybraných mechanicko-fyzikálních parametrů hracích kostek použitých pro nastavení parametrů materiálového modelu. Průměr je znázorněn zelenou čárkovanou čarou.

Tab. 4.2: Průměrné hodnoty vybraných mechanicko-fyzikálních parametrů hracích kostek.

Parametr / mnohostěn	čtyřstěn	šestistěn	osmistěn	dvanáctistěn
Hmotnost, [g]	2,09	5,07	3,69	5,58
Délka hrany, [mm]	22,67	15,98	18,15	8,34
Objem (přibližně), [10^{-6} m^3]	1,4	3,4	2,5	4,2
Objemová hm. (přibližně), [kg/m^3]	1493	1491	1476	1328
Třecí úhel, [$^\circ$]				
Mnohostěn - zadní stěna	18,06	17,68	17,40	16,58
Mnohostěn - sklo	14,77	15,13	14,26	13,93
Mnohostěn - koreček	17,48	17,44	16,64	16,61
Mnohostěn - mnohostěn	14,69	16,39	15,12	14,91

Z krabicových grafů uvedených na obr. 4.7 a 4.9 jsou patrné rozdíly ve variabilitě hodnot měřených mechanicko-fyzikálních parametrů, což je způsobeno jednak druhem daného parametru a dále také způsobem jeho měření. Nejpatrnější je tato situace na obr. 4.9c. Jak však bude ukázáno dále, pro potřeby numerické simulace je použití průměrných hodnot i v tomto případě dostačující.

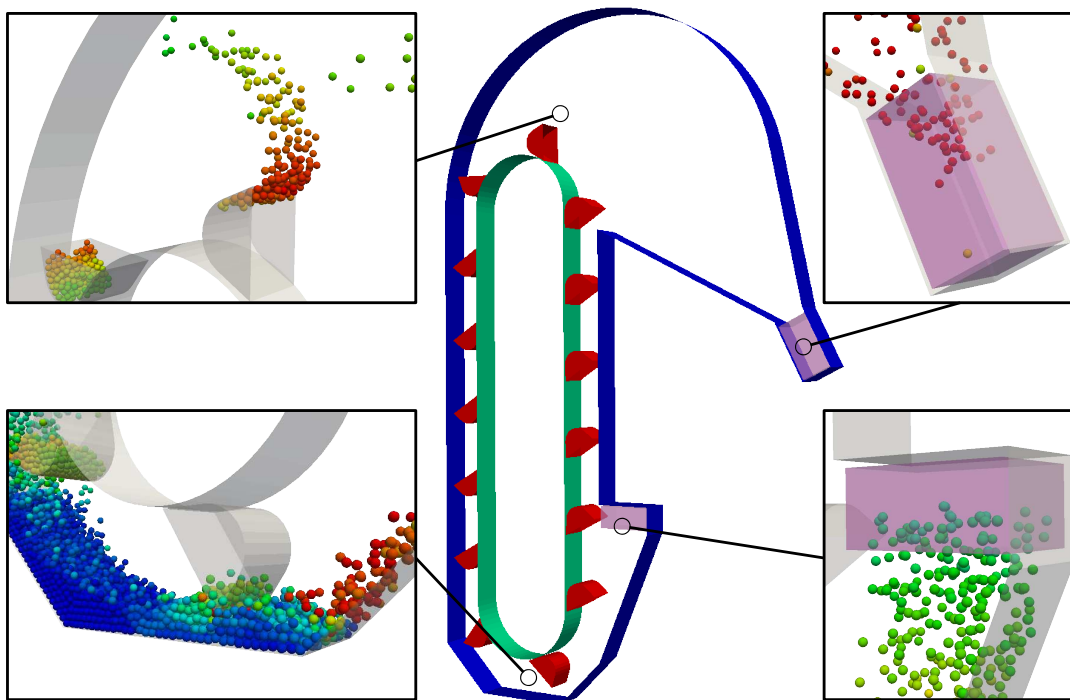
Modely prezentované na obr. 4.8d a 4.8e byly použity výhradně za účelem porovnání s kulovými částicemi a se shluky kulových částic, neboť kontaktní úloha je řešena jiným způsobem než tím, který je uveden v podkapitole 3.2.1.

Průběhy simulací byly řízeny tak, aby se co možná nejvíce shodovaly s experimenty. Konkrétně se jednalo o počáteční natočení korečku, množství materiálu v korečku a jeho úhlovou rychlost, jejíž hodnota byla získána ze záznamu vyprazdňování korečku pořízeného s použitím vysokorychlostní kamery. Konkrétní hodnoty a výsledky jsou uvedeny v kapitole 6.

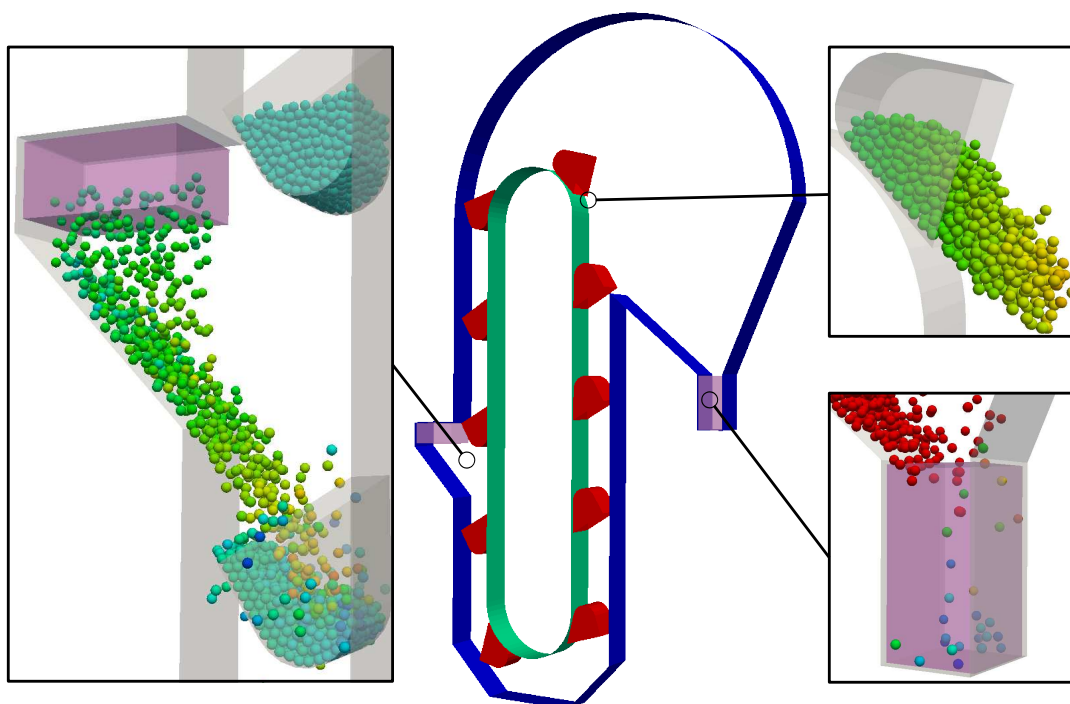
4.2.2 Virtuální modely použité v DEM simulaci pohybu partikulárního materiálu korečkovým dopravníkem

Za účelem provedení ukázkového příkladu optimalizace geometrie korečku korečkového dopravníku byly autorem práce vytvořeny dva zjednodušené virtuální modely tohoto zařízení, které se sestávají pouze z funkčních ploch.

Na obr. 4.10 jsou znázorněny modely pro odstředivý, resp. gravitační způsob vyprazdňování, spolu s detaily míst, ve kterých dochází jednak ke změnám materiálového toku a jednak ke generování nových částic a k odstranění částic, které již prošly dopravníkem.



(a) Virtuální model pro hrabací způsob plnění a odstředivý způsob vyprazdňování korečku.



(b) Virtuální model pro nasypávací způsob plnění a gravitační způsob vyprazdňování korečku.

Obr. 4.10: Modely korečkového dopravníku pro DEM simulaci použité v ukázkovém příkladu optimalizace. Fialové kvádry znázorňují oblasti, ve kterých dochází k vytváření částic, resp. k jejich odstranění. Funkční plochy přední a zadní stěny dopravníku nejsou zobrazeny.

Pohyblivé prvky jsou korečky, které jsou rovněž tvořeny pouze funkčními plochami. Celý pohyb korečků je rozdělen na čtyři části - dvě rotace a dvě translace. Korečky jsou generovány na počátku simulace v čase $t = 0$ s a jejich rozměry jsou definovány v souladu s normou ČSN 26 2008 [88]. Jedná se o pět parametrů - výška vnitřní stěny h_1 , výška vnější stěny h_2 , vyložení korečku a , poloměr zaoblení dna r_{kor} a šířka korečku b_{kor} , přičemž nalezení vhodných hodnot pro první tři uvedené, bude cílem optimalizace provedené v ukázkovém příkladu v kapitole 8. Základní rozměry obou modelů, které budou při řešení optimalizační úlohy považovány za konstantní, jsou uvedeny v tab. 4.3. Intervalů rozměrů, jež budou předmětem optimalizace, jsou uvedeny v tab. 4.4. Tyto intervaly byly voleny především s ohledem na šířku šachty modelů korečkového dopravníku.

Jako materiál jsou použity kulové částice o průměru 10 mm. Ostatními parametry tento materiál odpovídá změřeným parametrům výše uvedených bílých plastových kuliček. Průměr částic byl zvětšen z důvodu snížení vysoké časové náročnosti pro případ, pokud by byly použity částice o jmenovitém průměru 6 mm. Z tohoto důvodu se jedná o fiktivní materiál, který by se však měl svými vlastnostmi podobat tvrdým plastovým kuličkám.

Materiál je vytvářen v násypce (fialový kvádr vpravo dole, resp. vlevo) a automaticky odstraňován poté co opustí výsypku (fialový kvádr vpravo nahoře, resp. vpravo dole). Předpokládaný způsob plnění je násypný pro gravitační způsob vyprazdňování a hrabací pro odstředivý způsob vyprazdňování.

Tyto dva zjednodušené modely korečkového dopravníku včetně celé funkcionality (zadávání pohybu korečků, generování materiálu a jeho odstraňování, zápis dat na disk apod.) byly vytvořeny s použitím frameworku Yade [79] a nově vytvořeného materiálového modelu prezentovaného v podkapitole 3.2.1.

Tab. 4.3: Hlavní rozměry a provozní parametry virtuálních modelů korečkového dopravníku.

Parametr / typ dopravníku	odstředivý	gravitační
Osová vzdálenost bubnů, [m]	1,5	1,5
Průměr bubnů, [m]	0,4	0,4
Rozteč korečků, [m]	0,284	0,425
Počet korečků, [—]	15	10
Hmotnostní tok, [kg/s]	1,0	1,0
Rychlost korečků, [m/s]	1,6	0,8
Poloměr zaoblení dna, [m]	0,05	0,05
Šířka korečku, [m]	0,1	0,1

Tab. 4.4: Intervaly optimalizovaných rozměrů.

Parametr / typ dopravníku	odstředivý (2D úloha)		gravitační (3D úloha)	
	min	max	min	max
Meze intervalu				
Výška vnitřní stěny h_1 , [m]	0,1 (konstantní)		0,05	0,17
Výška vnější stěny h_2 , [m]	0	0,12	0	0,15
Vyložení korečku a , [m]	0,1	0,13	0,1	0,13

Závěrem je nutno uvést, že ačkoli je zde použitý materiálový model vhodný i pro simulace chování nehomogenních materiálů, tak v této práci není této vlastnosti využito. Nicméně, vlastnosti tohoto modelu byly plně využity pro simulaci chování nehomogenního deformovatelného tělesa - terénní pneumatiky a získané výsledky byly publikovány v [35, 41, 42].

Na rozdíl od výpočetního nástroje, není optimalizační algoritmus součástí vytvořených modelů. Simulace, ve kterých budou tyto modely použity, budou spouštěny jako externí aplikace a komunikace s optimalizačním algoritmem bude probíhat prostřednictvím textových souborů.

5 EXPERIMENT

Za účelem validace analytických popisů implementovaných ve výpočetním nástroji a materiálového modelu pro DEM simulace byly provedeny experimenty na „Zařízení pro kreativní systém tvorby matematických popisů obecných procesů“ [51] (dále jen experimentální zařízení). Konkrétně se jednalo o sérii experimentů vyprazdňování korečku gravitačním způsobem¹ při úhlových rychlostech od 0,516 do 4,28 rad/s. Použitým materiálem byly bílé plastové kuličky a hrací kostky prezentované v předchozí kapitole.

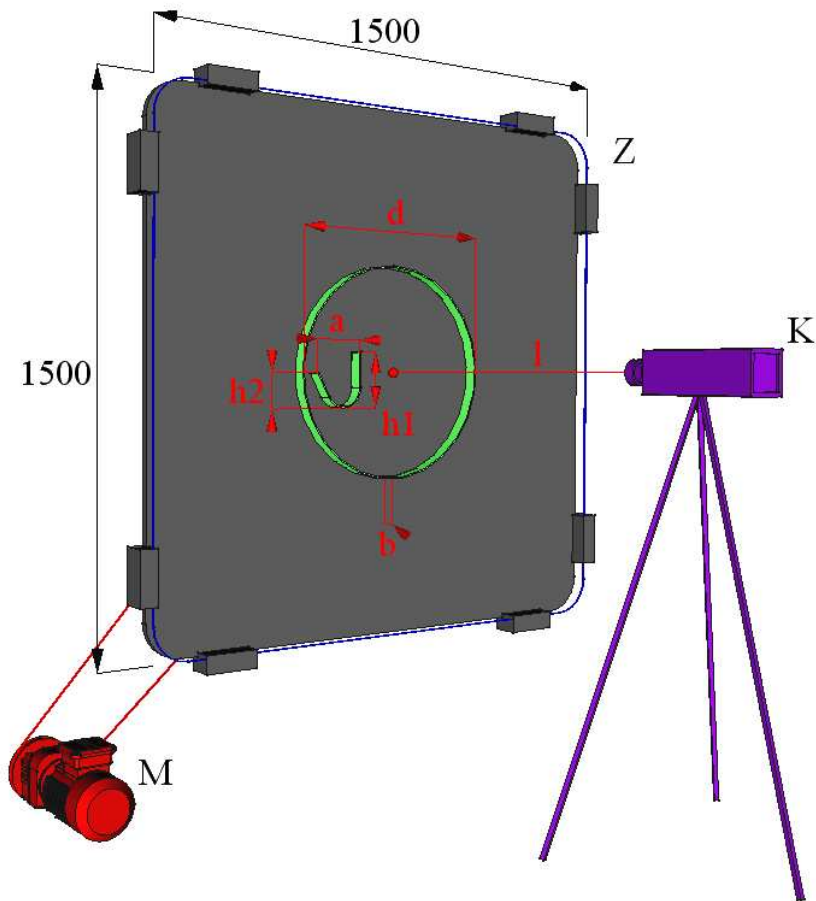
V případě bílých plastových kuliček byly průběhy experimentů snímány vysokorychlostní kamerou Photron FASTCAM SA5 model 775K-M2, přičemž snímkovací frekvence byla nastavena na 1000 snímků za sekundu a rozlišení 1024 x 1024. Tento způsob záznamu byl zvolen proto, neboť umožňuje získání potřebného množství informací o průběhu experimentu, které lze dále zpracovávat a vyhodnocovat metodami zpracování obrazu. Možnosti využití vysokorychlostní kamery pro záznam těchto dějů byly publikovány v [36].

V případě hracích kostek byly průběhy experimentů snímány vysokorychlostní kamerou Olympus iSpeed II. Snímkovací frekvence byla nastavena na 1000 snímků za sekundu a rozlišení 800 x 600. I když bylo použito nižší rozlišení, tak se po zpracování dat ukázalo, že za účelem identifikace okamžitých rychlostí jednotlivých hracích kostek je i toto relativně nízké rozlišení dostačující. Výsledky těchto experimentů byly publikovány v [34, 39].

Umístění vysokorychlostní kamery vůči experimentálnímu zařízení je schematicky znázorněno na obr. 5.1. Na obrázku jsou také znázorněny základní rozměry zařízení a rozměry přípravku s korečkem, jejichž konkrétní hodnoty jsou uvedeny v tab. 5.1. Způsob popisu rozměrů korečku je v souladu s popisem uvedeným v normě ČSN 26 2008.

Vysokorychlostní kamera byla umístěna tak, aby osa objektivu byla kolmá na plochu čelní skleněné tabule a zároveň procházela středem experimentálního zařízení i středem přípravku s korečkem. Vzdálenost kamery od zařízení byla v závislosti na typu objektivu volena tak, aby na pořízeném záznamu byl zachycen právě celý tento přípravek, jehož nejdůležitější části - koreček a válec jsou na obr. 5.1 zvýrazněny zelenou barvou. Během provádění experimentů bylo zařízení roztáčeno asynchronním motorem o jmenovitém výkonu 0,75 kW, jehož okamžité otáčky byly řízeny pomocí frekvenčního měniče. Hodnoty úhlové rychlosti rotace experimentálního zařízení byly získávány přímo z pořízeného videozáznamu.

¹Konstrukce přípravku s korečkem pro „Zařízení pro kreativní systém tvorby matematických popisů obecných procesů“ neumožňuje provádět experimenty vyprazdňování korečku odstředivým způsobem.



Obr. 5.1: Schematické znázornění umístění vysokorychlostní kamery vůči experimentálnímu zařízení. Kamera (K) je zvýrazněna fialovou, experimentální zařízení (Z) šedou a pohon zařízení (M) červenou barvou. Součástí experimentálního zařízení je modře zvýrazněná čelní skleněná tabule a zeleně vybarvený přípravek s korečkem. h_1 je výška vnitřní stěny korečku, h_2 je výška vnější stěny korečku, a je vyložení korečku, d je průměr válce, b je velikost mezery mezi zadní stěnou a čelní skleněnou tabulí a l je vzdálenost konce objektivu kamery od vnější plochy čelní skleněné tabule.

Tab. 5.1: Vybrané rozměry přípravku s korečkem.

Název	označení	hodnota, [mm]
Výška vnitřní stěny korečku	h_1	155
Výška vnější stěny korečku	h_2	85
Vyložení korečku	a	140
Průměr válce	d	600
Velikost mezery	b	40

5.1 Popis

Byly provedeny dvě série experimentů vyprazdňování korečku. V první sérii, s použitím bílých plastových kuliček, bylo provedeno šest experimentů a v druhé sérii, s použitím hracích kostek, byly provedeny čtyři experimenty. V obou těchto sériích se jednotlivé experimenty lišily ve velikosti úhlové rychlosti rotace experimentálního zařízení.

Tedy z celkového počtu deseti experimentů lišících se materiálem a úhlovými rychlostmi byly vybrány čtyři. V prvních dvou byly použity bílé plastové kuličky a v následujících dvou hrací kostky. Obě dvojice byly sestaveny z experimentů s minimální a maximální hodnotou úhlové rychlosti rotace experimentálního zařízení.

Za účelem získání vektorových polí rychlostí byly pořízené záznamy zpracovány metodou pro identifikaci optického toku [16]. Dále byla z každého záznamu odečtena velikost úhlové rychlosti a dva úhly natočení korečku α_1 a α_2 , včetně odpovídajících časů t_{α_1} , ve kterém materiál začal opouštět koreček, a t_{α_2} , ve kterém bylo vyprazdňování právě dokončeno. Tyto dva úhly a jim odpovídající časové okamžiky byly zvoleny především z důvodu jejich určité jednoznačnosti a s ní spojené porovnatelnosti. Úhel $\alpha_0 = 0^\circ$ odpovídá výchozímu natočení korečku - jeho vnitřní stěna je ve svislé poloze a bude teprve jakoby procházet hlavou elevátoru. Tomuto natočení odpovídá čas $t_{\alpha_0} = 0$ s.

Parametry jednotlivých experimentů jsou uvedeny v tab. 5.2. Hmotnosti bílých plastových kuliček v korečku jsou uvedeny pouze přibližně, neboť během experimentu docházelo k cyklickému vyprazdňování a plnění korečku. Během provádění experimentů s hracími kostkami byla situace odlišná, neboť přípravek s korečkem byl vhodně upraven tak, aby koreček byl vždy naplněn všemi kostkami v zařízení.

Tab. 5.2: Parametry obou vybraných dvojic experimentů prováděných na experimentálním zařízení.

Parametr / materiál	Bílé plastové kuličky		Hrací kostky	
Úhlová rychlost, [rad/s]	0,549	4,280	0,516	0,953
Hmotnost materiálu v korečku, [g]	243,6	385,7	317,25	
Hmotnost materiálu v zařízení, [g]	1015,0		317,25	
Hrací kostka	čtyřstěn	šestistěn	osmistěn	dvanáctistěn
Množství hracích kostek, [–]	30	10	25	20

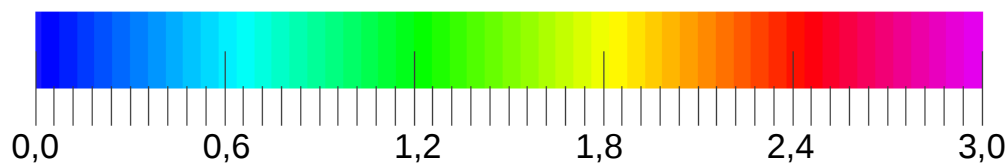
5.2 Výsledky

Výsledkem experimentů jsou výhradně obrazová data, ze kterých byly získány jednak velikosti úhlové rychlosti rotace experimentálního zařízení a dále pro oba zkoumané materiály byla získána vektorová pole okamžitých rychlostí jejich přetváření v daných časových okamžicích. Na obr. 5.3 - 5.6 jsou ze čtyř experimentů znázorněna původní a zpracovaná data ve dvou časových okamžicích. Použité barvy odpovídají velikostem okamžitých rychlostí v jednotlivých pixelech pořízeného snímku. Barevné měřítko, znázorněné na obr. 5.2, je společné jak pro všechny obrázky zpracovaných dat z experimentů, tak i pro výsledky simulací prezentované v kapitole 6. V číselné podobě jsou výsledky uvedeny v tab. 5.3.

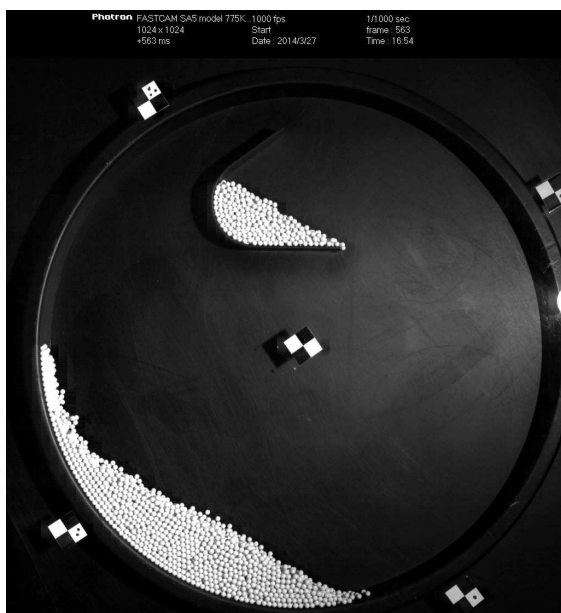
Dalším výsledkem experimentů jsou časové charakteristiky průběhu vyprazdňování korečku, které jsou použity k vyhodnocení validace výpočetního nástroje a vytvořených modelů, viz tab. 6.5 a 6.6.

Tab. 5.3: Výsledky experimentů v podobě dvou úhlů natočení a jim odpovídajícím časovým okamžikům pro začátek a konec vyprazdňování korečku.

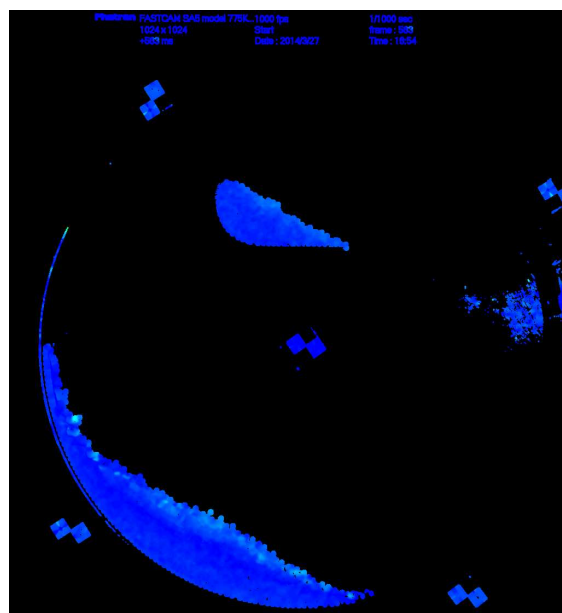
Parametr / materiál	Bílé plastové kuličky		Hrací kostky	
Úhlová rychlost, [rad/s]	0,549	4,280	0,516	0,953
α_1 , [°]	90,0	104,9	84,4	80,8
α_2 , [°]	125,3	181,7	117,6	125,5
t_{α_1} , [s]	2,861	0,428	2,855	1,480
t_{α_2} , [s]	3,983	0,740	3,976	2,299



Obr. 5.2: Barevné měřítko velikosti okamžité rychlosti v m/s.



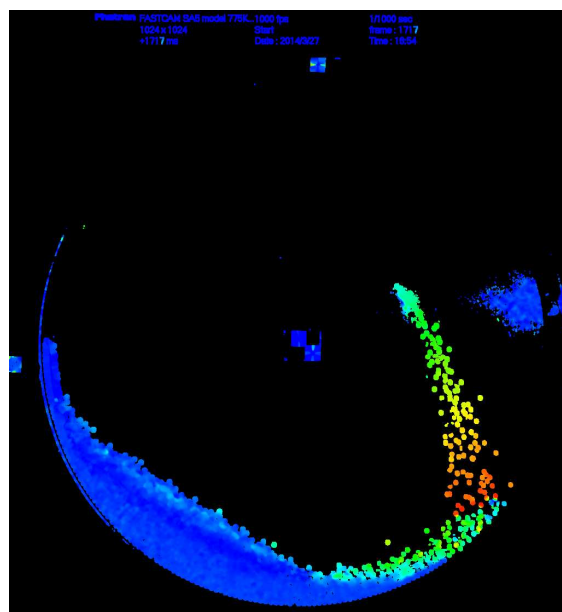
(a) Čas $t_{\alpha_1} = 2,861$ s, úhel $\alpha_1 = 90,0^\circ$.
Původní obrazová data.



(b) Čas $t_{\alpha_1} = 2,861$ s, úhel $\alpha_1 = 90,0^\circ$.
Zpracovaná obrazová data.



(c) Čas $t_{\alpha_2} = 3,983$ s, úhel $\alpha_2 = 125,3^\circ$.
Původní obrazová data.

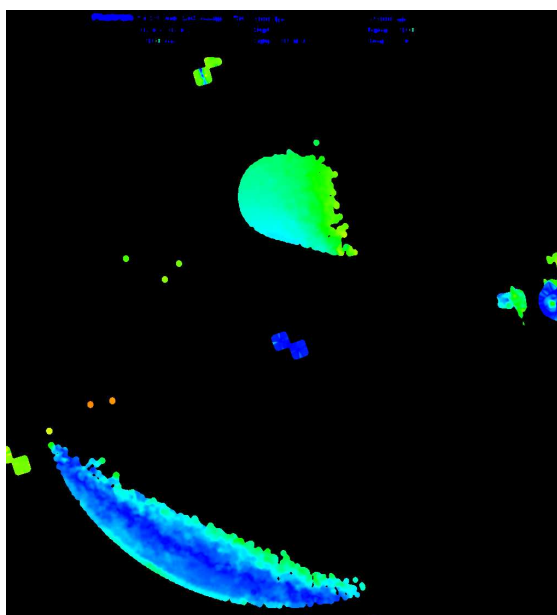


(d) Čas $t_{\alpha_2} = 3,983$ s, úhel $\alpha_2 = 125,3^\circ$.
Zpracovaná obrazová data.

Obr. 5.3: Dvojice snímků z experimentu vyprazdňování korečku při úhlové rychlosti 0,549 rad/s. Materiál: bílé plastové kuličky.



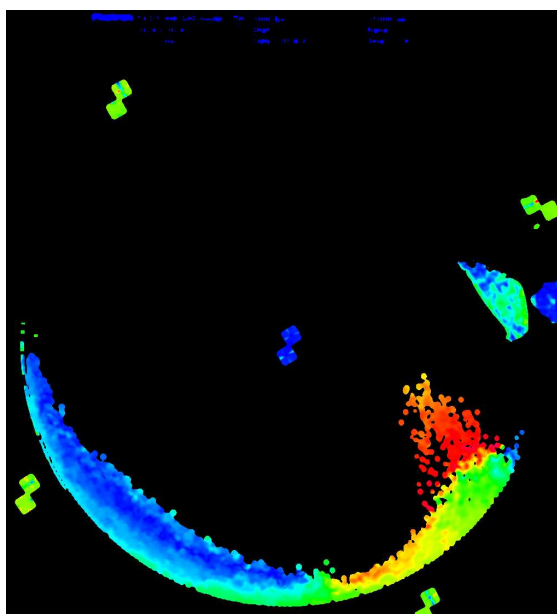
(a) Čas $t_{\alpha_1} = 0,428$ s, úhel $\alpha_1 = 104,9^\circ$.
Původní obrazová data.



(b) Čas $t_{\alpha_1} = 0,428$ s, úhel $\alpha_1 = 104,9^\circ$.
Zpracovaná obrazová data.

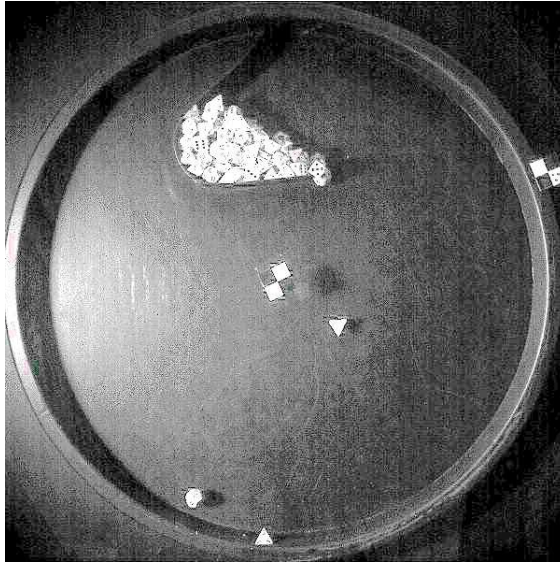


(c) Čas $t_{\alpha_2} = 0,740$ s, úhel $\alpha_2 = 181,7^\circ$.
Původní obrazová data.

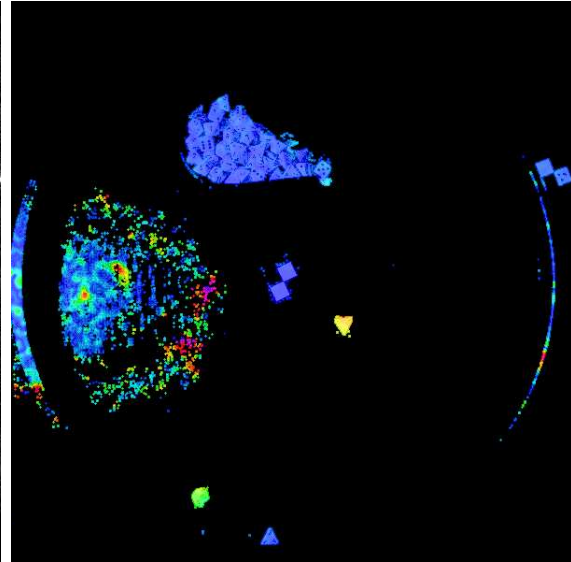


(d) Čas $t_{\alpha_2} = 0,740$ s, úhel $\alpha_2 = 181,7^\circ$.
Zpracovaná obrazová data.

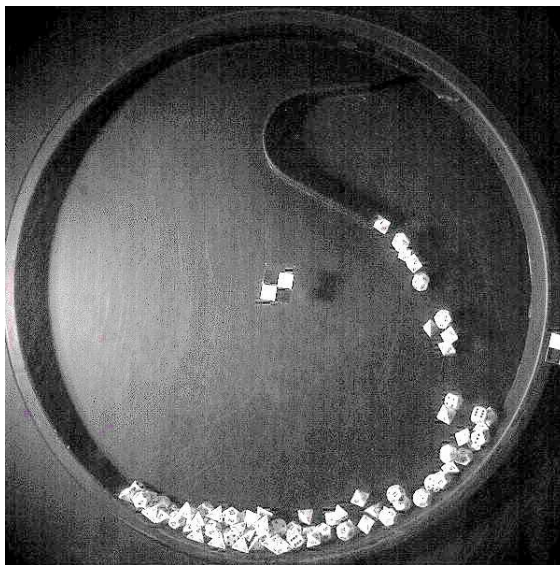
Obr. 5.4: Dvojice snímků z experimentu vyprazdňování korečku při úhlové rychlosti 4,280 rad/s. Materiál: bílé plastové kuličky.



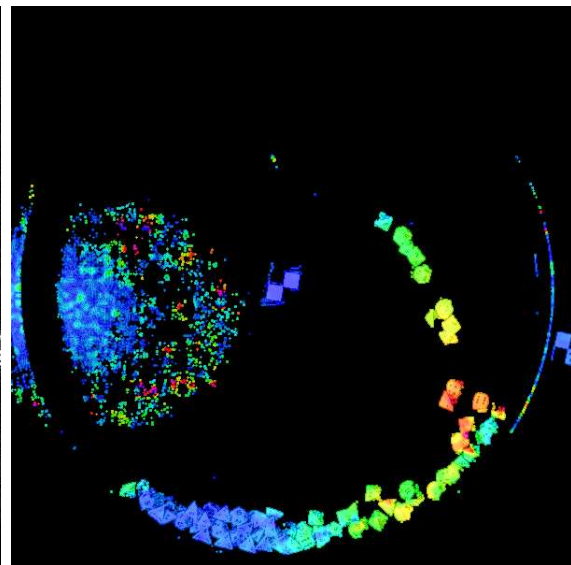
(a) Čas $t_{\alpha_1} = 2,855$ s, úhel $\alpha_1 = 84,4^\circ$.
Původní obrazová data.



(b) Čas $t_{\alpha_1} = 2,855$ s, úhel $\alpha_1 = 84,4^\circ$.
Zpracovaná obrazová data.

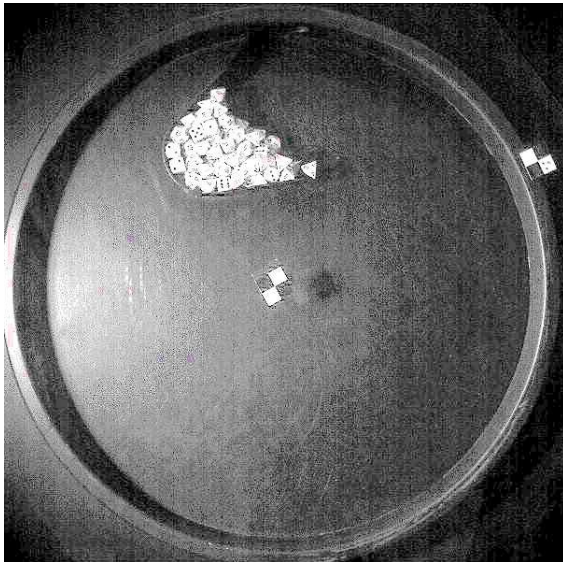


(c) Čas $t_{\alpha_2} = 3,976$ s, úhel $\alpha_2 = 117,6^\circ$.
Původní obrazová data.

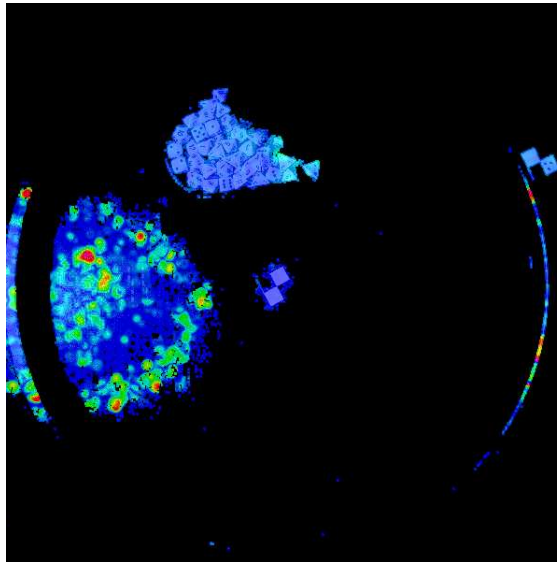


(d) Čas $t_{\alpha_2} = 3,976$ s, úhel $\alpha_2 = 117,6^\circ$.
Zpracovaná obrazová data.

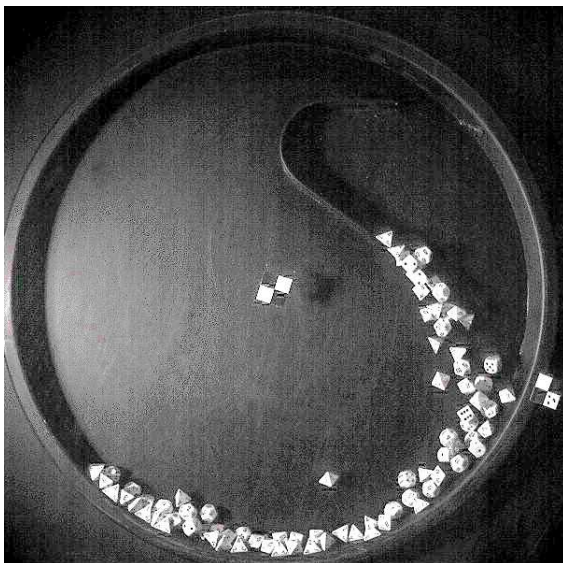
Obr. 5.5: Dvojice snímků z experimentu vyprazdňování korečku při úhlové rychlosti 0,516 rad/s. Materiál: hrací kostky.



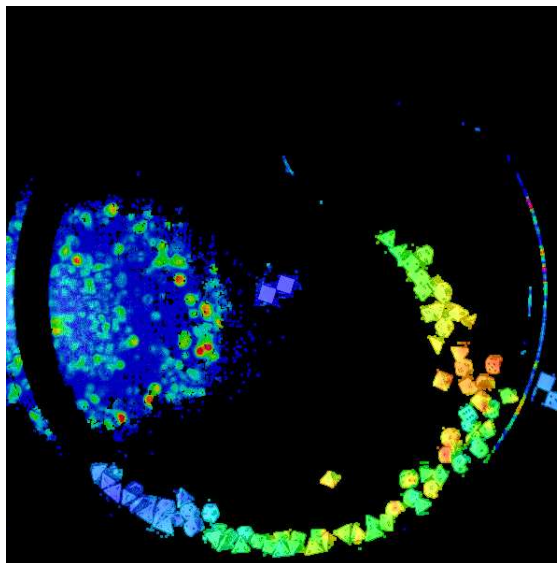
(a) Čas $t_{\alpha_1} = 1,480$ s, úhel $\alpha_1 = 80,8^\circ$.
Původní obrazová data.



(b) Čas $t_{\alpha_1} = 1,480$ s, úhel $\alpha_1 = 80,8^\circ$.
Zpracovaná obrazová data.



(c) Čas $t_{\alpha_2} = 2,299$ s, úhel $\alpha_2 = 125,5^\circ$.
Původní obrazová data.



(d) Čas $t_{\alpha_2} = 2,299$ s, úhel $\alpha_2 = 125,5^\circ$.
Zpracovaná obrazová data.

Obr. 5.6: Dvojice snímků z experimentu vyprazdňování korečku při úhlové rychlosti $0,953$ rad/s. Materiál: hrací kostky.

6 VALIDACE

Za účelem ověření správného nastavení hodnot parametrů materiálových modelů, včetně jejich případných úprav¹, byly s použitím naměřených dat získaných na experimentálním zařízení provedeny validace výpočetního nástroje i diskrétně-prvkových modelů popsaných v kapitole 4.

6.1 Popis

V souladu s experimenty byly validace provedeny pro dvě úhlové rychlosti rotace experimentálního zařízení. Množství materiálu, geometrie zařízení a velikosti úhlové rychlosti byly nastaveny podle experimentů a dále byly považovány za konstantní.

Vektor hodnot parametrů materiálových modelů byl nastaven dle naměřených hodnot mechanicko-fyzikálních parametrů prezentovaných v kapitole 4. V případě, že zkoumaný model nekorespondoval s experimentálně získanými daty, následovala úprava hodnot těchto parametrů. Za účelem průběžného hodnocení těchto úprav byly využívány zejména časy začátku a konce procesu vyprazdňování korečku. Hodnoty byly vhodně upravovány tak, aby součet druhých mocnin rozdílů těchto časů začátků, resp. konců, vyprazdňování mezi experimentem a simulací byl minimální. Zároveň bylo porovnáváno i rozložení velikostí okamžitých rychlostí. Z důvodu časové náročnosti byly tyto hodnoty hledány z celočíselných intervalů.

Na závěr byly vytvořeny časové charakteristiky průběhů vyprazdňování. Pro vzájemné posouzení charakteristik získaných ze simulovaných průběhů vyprazdňování s charakteristikami získanými experimentálně byly použity koeficienty korelace a determinace.

6.2 Výsledky

Výsledky v podobě dvou úhlů natočení s odpovídajícími časy pro začátek a konec vyprazdňování korečku získané s použitím identifikovaných hodnot parametrů materiálových modelů jsou uvedeny v tab. 6.1 a 6.3. Výsledky experimentů jsou pro srovnání uvedeny v pravém sloupci. V tab. 6.2 a 6.4 jsou pak uvedeny validované (konečné) hodnoty těchto parametrů pro případ výpočetního nástroje a diskrétně-prvkových modelů s kulovými částicemi a s mnohostěny. V případě mnohostěnu se během validací ukázalo, že lze použít stejnou hodnotu třetího úhlu pro všechny

¹Vytvořené popisy a výpočtové modely vždy pouze aproximují zkoumaný materiál a jeho vlastnosti. Hodnoty mechanicko-fyzikálních parametrů reálného materiálu tedy nemusí vždy korespondovat s hodnotami parametrů materiálových modelů.

jejich druhy, tzn. bez ohledu na počet stěn. Přestože tímto zjednodušením pravděpodobně dochází ke vzniku další nepřesnosti, tak s ohledem na výpočetní náročnost těchto simulací došlo k výraznému urychlení procesu identifikace a validací. Zároveň jsou si změřené hodnoty třecích úhlů pro jednotlivé mnohostěny a daný materiál experimentálního zařízení velmi podobné.

Je-li v tabulkách namísto čísla uvedena pomlčka, znamená to, že daná hodnota buď nebyla změřena, nebo není v modelu použita.

Z tab. 6.4 je patrné, že na rozdíl od tab. 6.2 se hodnoty třecích úhlů během validací výrazně změnilo. Obecně je tato skutečnost způsobena vlastnostmi použitého modelu pro popis chování reálného materiálu - hracích kostek.

Konkrétně při použití kulových částic (obr. 4.8b) bylo nutné upravit hodnoty třecích úhlů pro zadní stěnu a sklo experimentálního zařízení z důvodu vzájemného se zakliňování jednotlivých částic, přičemž tento jev při experimentech nikdy nenastal.

V případě shluků (obr. 4.8c) bylo nutné upravit hodnoty třecích úhlů, neboť jejich interakční plocha je také tvořena kulovými částicemi, což v tomto případě ovlivňuje způsob vzájemné interakce. Možným řešením by bylo použití shluků s větším počtem vzájemně se překrývajících částic, což by však vedlo k nárůstu výpočetní náročnosti.

Co se týče mnohostěnů (obr. 4.8d a 4.8e), je jejich geometrická reprezentace nejbližší své reálné předloze. Nicméně i zde jsou u obou modelů identifikované hodnoty třecích úhlů výrazně nižší. Předpokládaným² důvodem je použitý materiálový model pro elastický materiál se třením, v němž je tlumení řešeno numericky a nikoli jako funkce rychlosti.

Na obr. 6.1 až 6.4 jsou znázorněny výsledky v podobě snímků ze simulací a experimentů, přičemž použité barvy odpovídají velikostem okamžitých rychlostí. Dále na obr. 6.6 a 6.7 jsou znázorněny časové charakteristiky průběhů vyprazdňování. Koeficienty korelace a determinace jsou uvedeny v tab. 6.5 a 6.6.

²V době řešení cíle této práce nebyl dostupný jiný vhodný materiálový model, např. pro viskoelastický materiál se třením, s jehož použitím by bylo možné daný předpoklad ověřit.

Tab. 6.1: Výsledky v podobě dvou úhlů natočení s odpovídajícími časy. Úhlová rychlost: 0,549 rad/s a 4,280 rad/s. Materiál: bílé plastové kuličky.

Parametr	Výpočetní nástroj	Kulové částice	Experiment
Úhlová rychlost: 0,549 rad/s			
α_1 , [°]	86,6	89,8	90,0
α_2 , [°]	114,1	126,9	125,3
t_{α_1} , [s]	2,754	2,856	2,861
t_{α_2} , [s]	3,628	4,033	3,983
Úhlová rychlost: 4,280 rad/s			
α_1 , [°]	74,6	99,9	104,9
α_2 , [°]	133,7	178,2	181,7
t_{α_1} , [s]	0,304	0,407	0,428
t_{α_2} , [s]	0,545	0,727	0,740

Tab. 6.2: Změřené a identifikované hodnoty vybraných mechanicko-fyzikálních parametrů bílých plastových kuliček a jejich modelů.

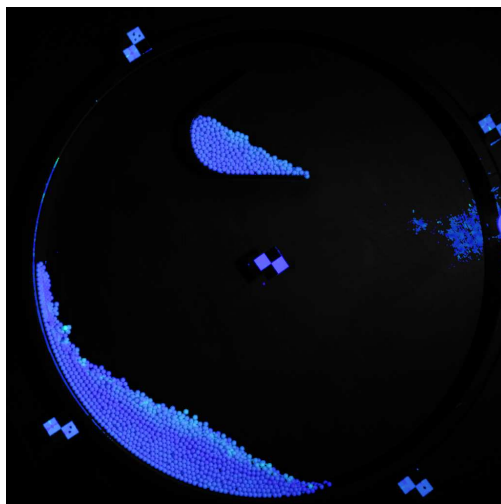
Parametr	Změřená hodnota	Výpočetní nástroj	Kulové částice
Úhel vnitřního tření, [°]	19,7 [21]	19,7	-
Třecí úhel, [°]			
Kulička - kulička	9,00	-	9,00
Kulička - sklo	15,76	-	15,76
Kulička - zadní stěna	18,10	-	18,10
Kulička - koreček	17,16	-	17,16
Koeficient restituce, [-]			
Kulička - zadní stěna	0,59	-	0,59
Kulička - sklo	0,72	-	0,72
Kulička - koreček	0,56	-	0,56
Kulička - kulička	-	-	0,80

Tab. 6.3: Výsledky v podobě dvou úhlů natočení s odpovídajícími časy. Úhlová rychlost: 0,516 rad/s a 0,953 rad/s. Materiál: hrací kostky.

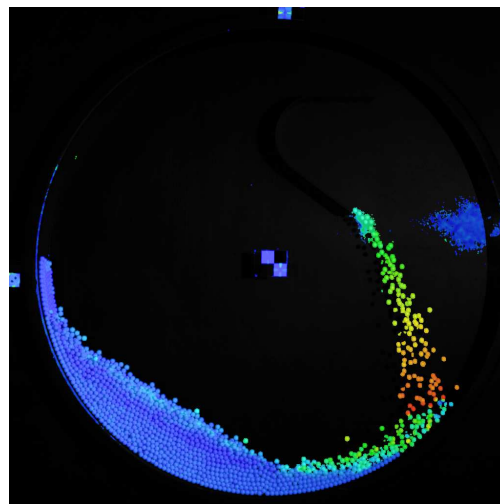
Parametr	Kulové částice	Shluky	Mnohostěny	Zkosené mnohostěny	Experiment
Úhlová rychlost: 0,516 rad/s					
α_1 , [°]	82,4	87,1	84,3	82,6	84,4
α_2 , [°]	116,5	116,1	115,9	116,5	117,6
t_{α_1} , [s]	2,788	2,945	2,851	2,794	2,855
t_{α_2} , [s]	3,941	3,928	3,919	3,942	3,976
Úhlová rychlost: 0,953 rad/s					
α_1 , [°]	87,7	79,8	86,8	86,2	80,8
α_2 , [°]	129,5	126,7	125,9	127,7	125,5
t_{α_1} , [s]	1,606	1,461	1,589	1,578	1,480
t_{α_2} , [s]	2,372	2,321	2,306	2,339	2,299

Tab. 6.4: Změřené a identifikované hodnoty vybraných mechanicko-fyzikálních parametrů použitých pro nastavení materiálových modelů hracích kostek. Hodnoty pro „Youngův modul“ a „Poissonovo číslo“ byly získány s přihlédnutím k [76].

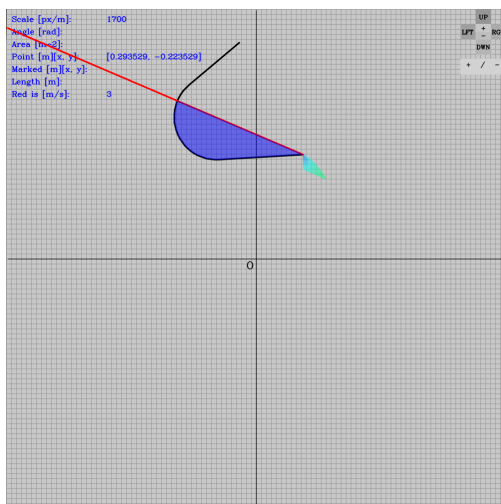
Parametr	Změřená hodnota (průměr)	Kulové částice	Shluky	Mnohostěny	Zkosené mnohostěny
„Youngův modul“, [GPa]	-	2,4	2,4	2,4	2,4
„Poisson“, [-]	-	0,35	0,35	0,35	0,35
Třecí úhel, [°]					
Zadní stěna	17,4	5,0	10,0	5,0	5,0
Sklo	14,5	5,0	6,0	5,0	5,0
Koreček	17,0	17,0	15,0	10,0	10,0
Mnohostěny	15,3	15,3	10,0	6,0	6,0



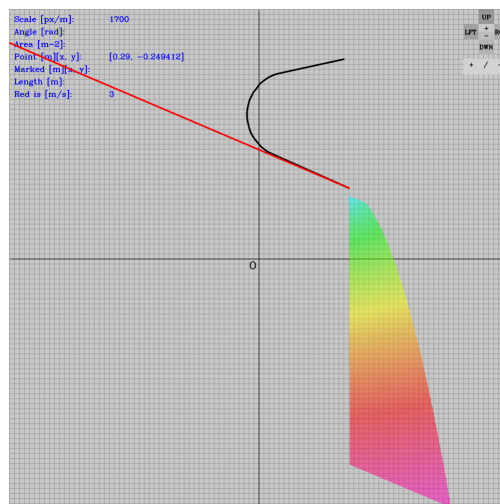
(a) Čas $t_{\alpha_1} = 2,861$ s, úhel $\alpha_1 = 90,0^\circ$.



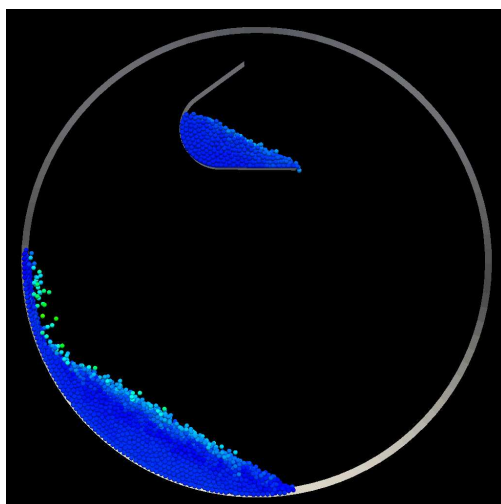
(b) Čas $t_{\alpha_2} = 3,983$ s, úhel $\alpha_2 = 125,3^\circ$.



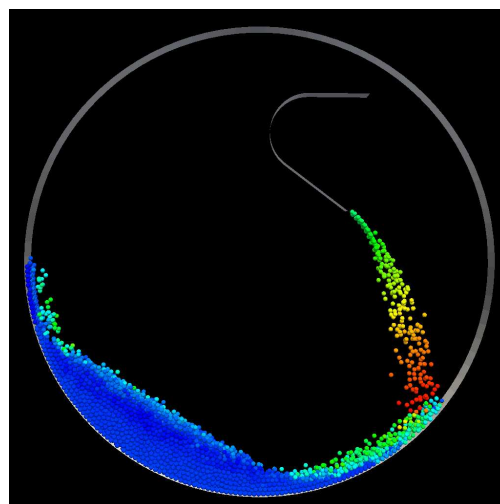
(c) Čas $t_{\alpha_1} = 2,754$ s, úhel $\alpha_1 = 86,6^\circ$.



(d) Čas $t_{\alpha_2} = 3,628$ s, úhel $\alpha_2 = 114,1^\circ$.

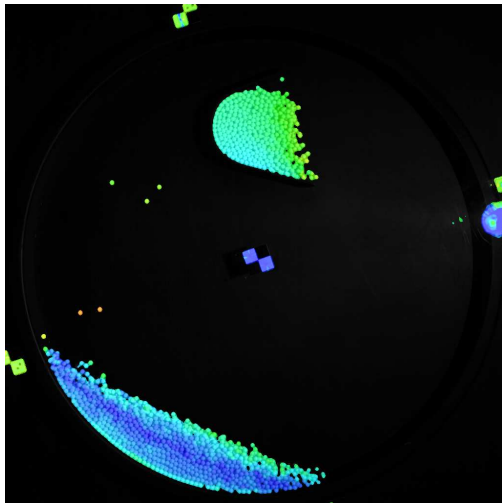


(e) Čas $t_{\alpha_1} = 2,856$ s, úhel $\alpha_1 = 89,8^\circ$.

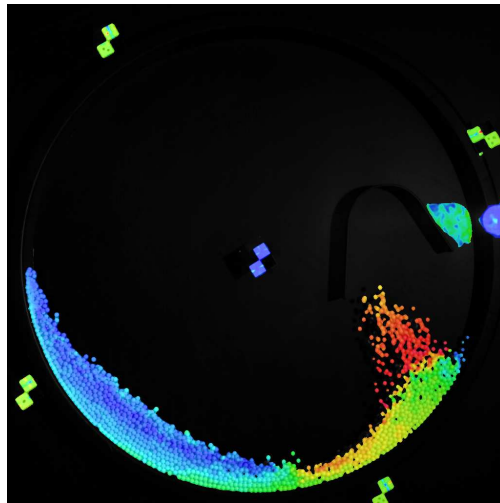


(f) Čas $t_{\alpha_2} = 4,033$ s, úhel $\alpha_2 = 126,9^\circ$.

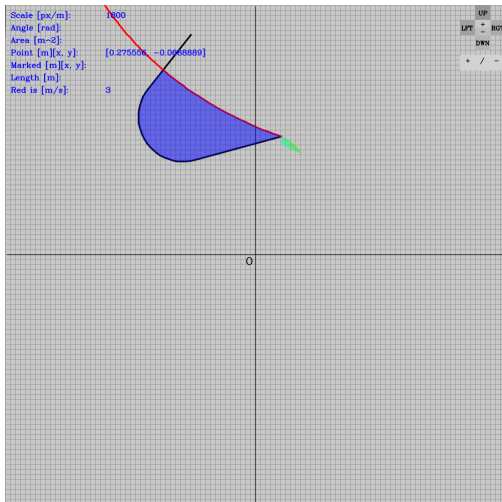
Obr. 6.1: Dvojice snímků z experimentu, výpočetního nástroje a DEM simulace. Úhlová rychlost: 0,549 rad/s. Materiál: bílé plastové kuličky.



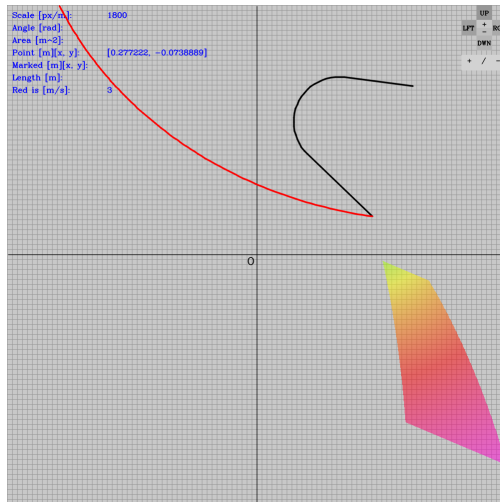
(a) Čas $t_{\alpha_1} = 0,428$ s, úhel $\alpha_1 = 104,9^\circ$.



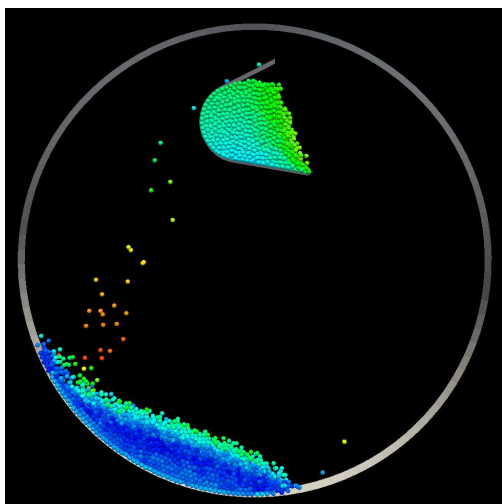
(b) Čas $t_{\alpha_2} = 0,740$ s, úhel $\alpha_2 = 181,7^\circ$.



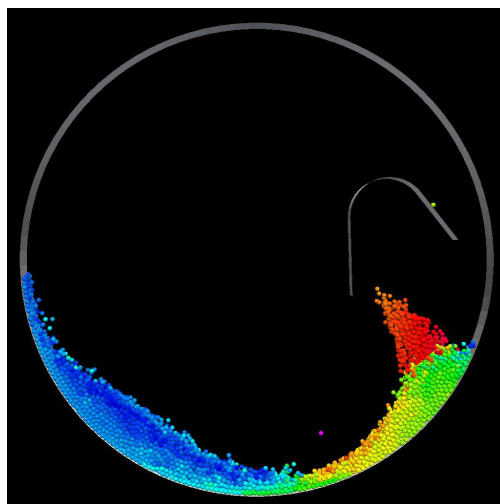
(c) Čas $t_{\alpha_1} = 0,304$ s, úhel $\alpha_1 = 74,6^\circ$.



(d) Čas $t_{\alpha_2} = 0,545$ s, úhel $\alpha_2 = 133,7^\circ$.

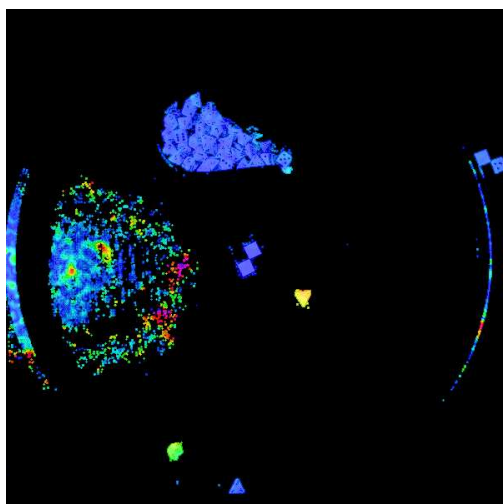


(e) Čas $t_{\alpha_1} = 0,407$ s, úhel $\alpha_1 = 99,9^\circ$.

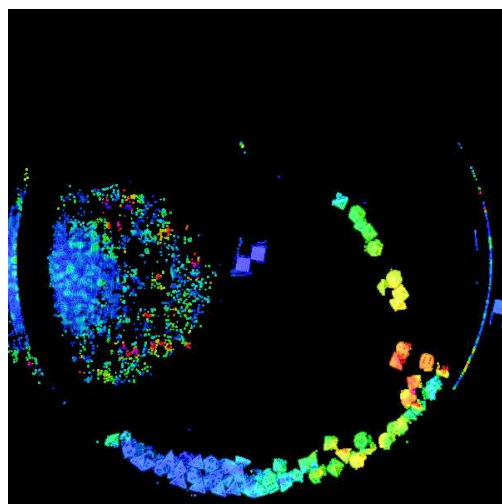


(f) Čas $t_{\alpha_2} = 0,727$ s, úhel $\alpha_2 = 178,2^\circ$.

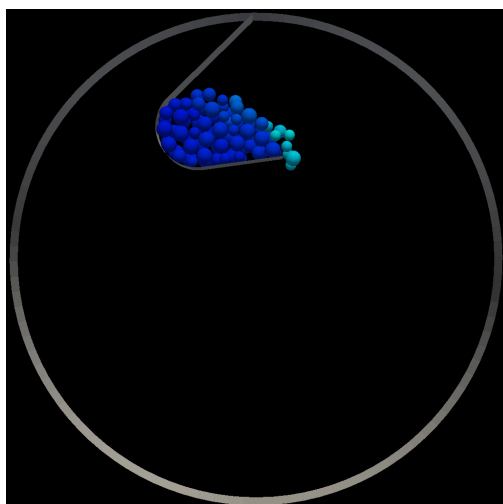
Obr. 6.2: Dvojice snímků z experimentu, výpočetního nástroje a DEM simulace.
Úhlová rychlost: 4,280 rad/s. Materiál: bílé plastové kuličky.



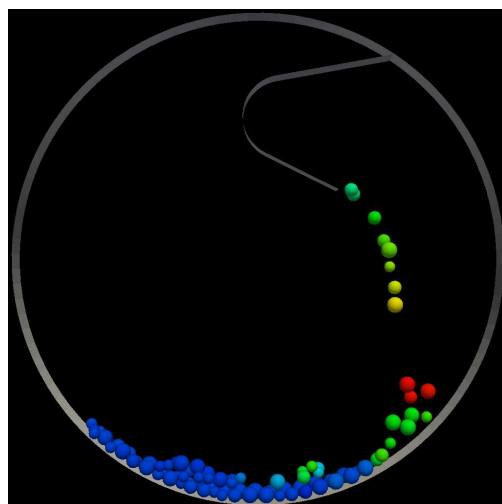
(a) Čas $t_{\alpha_1} = 2,855$ s, úhel $\alpha_1 = 84,4^\circ$.



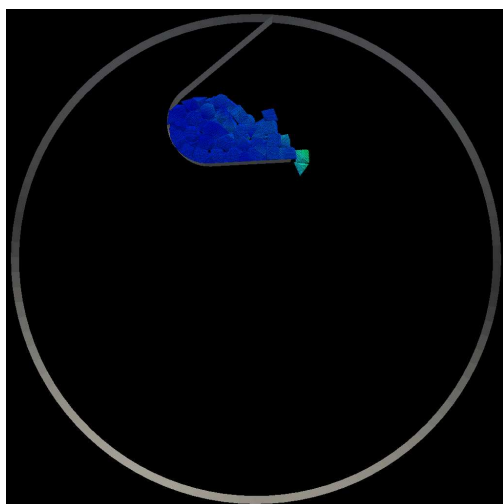
(b) Čas $t_{\alpha_2} = 3,976$ s, úhel $\alpha_2 = 117,6^\circ$.



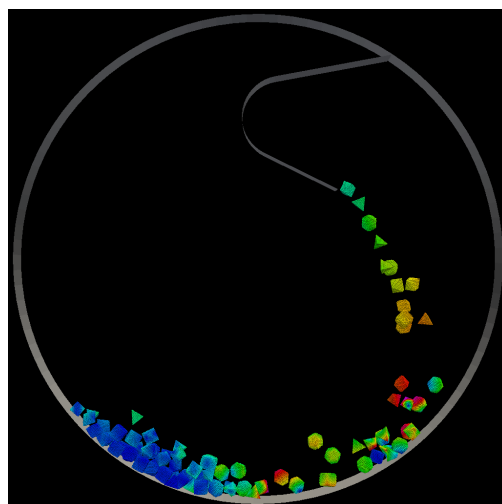
(c) Čas $t_{\alpha_1} = 2,788$ s, úhel $\alpha_1 = 82,4^\circ$.



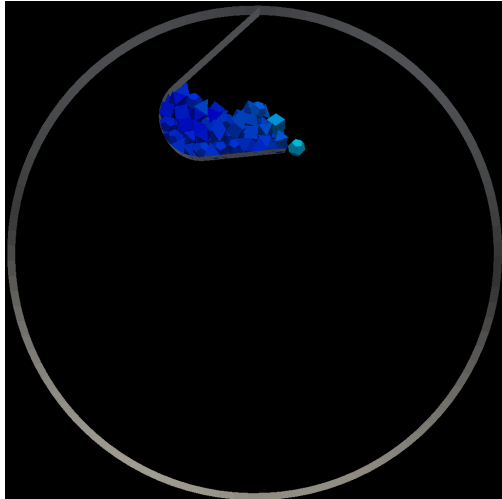
(d) Čas $t_{\alpha_2} = 3,941$ s, úhel $\alpha_2 = 116,5^\circ$.



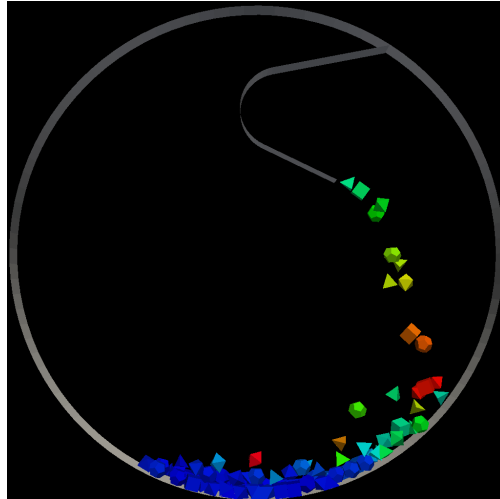
(e) Čas $t_{\alpha_1} = 2,945$ s, úhel $\alpha_1 = 87,1^\circ$.



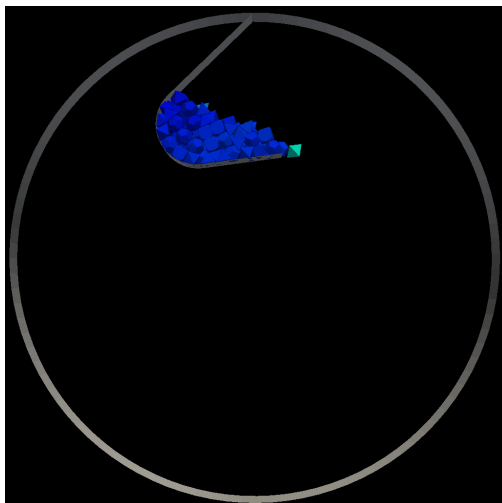
(f) Čas $t_{\alpha_2} = 3,928$ s, úhel $\alpha_2 = 116,1^\circ$.



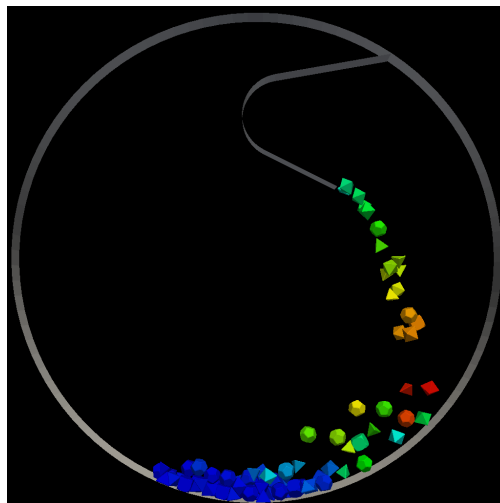
(g) Čas $t_{\alpha_1} = 2,851$ s, úhel $\alpha_1 = 84,3^\circ$.



(h) Čas $t_{\alpha_2} = 3,919$ s, úhel $\alpha_2 = 115,9^\circ$.



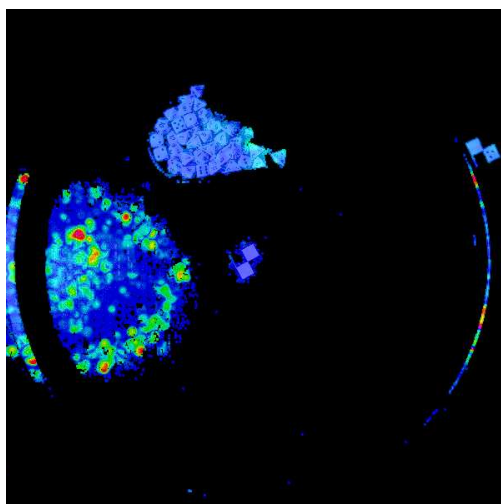
(i) Čas $t_{\alpha_1} = 2,794$ s, úhel $\alpha_1 = 82,6^\circ$.



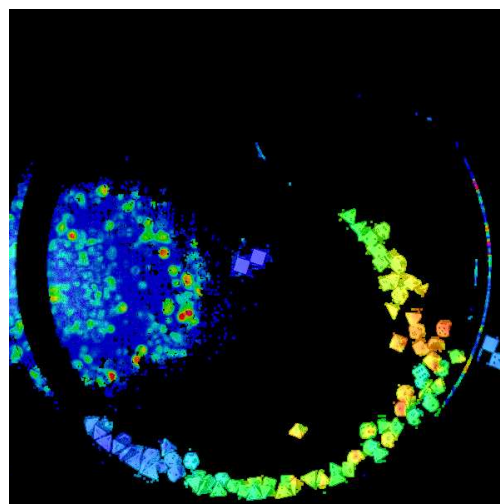
(j) Čas $t_{\alpha_2} = 3,942$ s, úhel $\alpha_2 = 116,5^\circ$.

Obr. 6.3: Dvojice snímků z experimentu a DEM simulací.

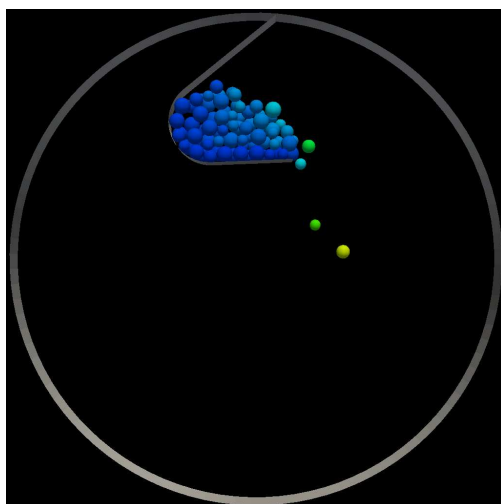
Úhlová rychlost: 0,516 rad/s. Materiál: hrací kostky.



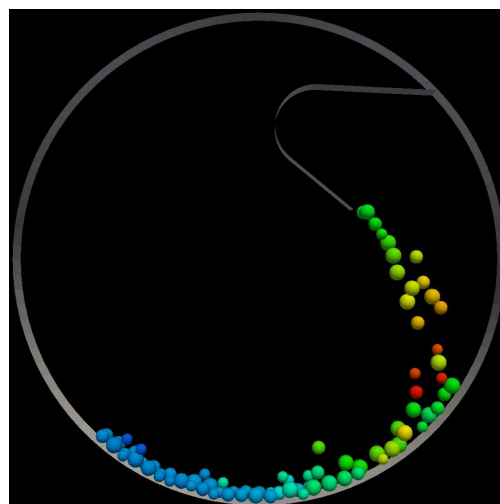
(a) Čas $t_{\alpha_1} = 1,480$ s, úhel $\alpha_1 = 80,8^\circ$.



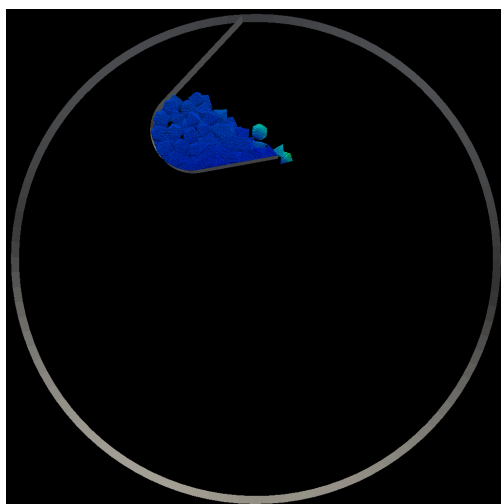
(b) Čas $t_{\alpha_2} = 2,299$ s, úhel $\alpha_2 = 125,5^\circ$.



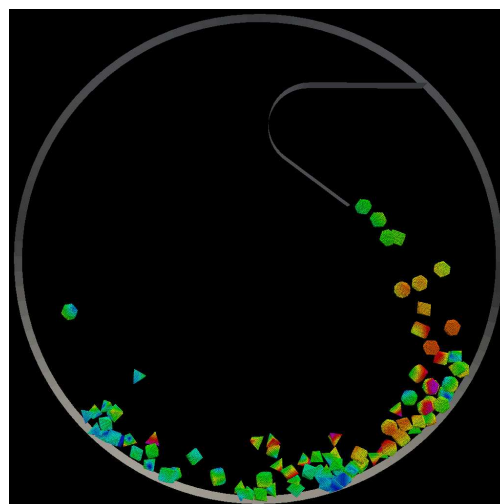
(c) Čas $t_{\alpha_1} = 1,606$ s, úhel $\alpha_1 = 87,7^\circ$.



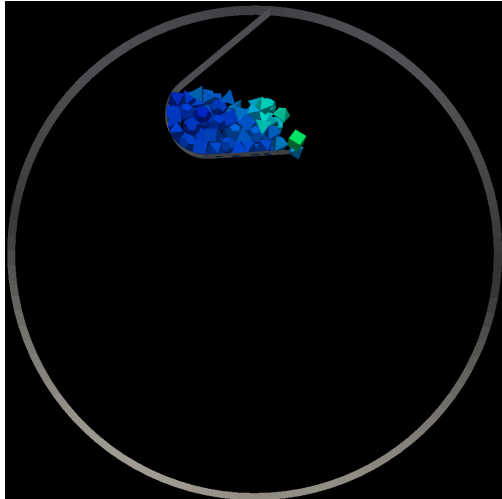
(d) Čas $t_{\alpha_2} = 2,372$ s, úhel $\alpha_2 = 129,5^\circ$.



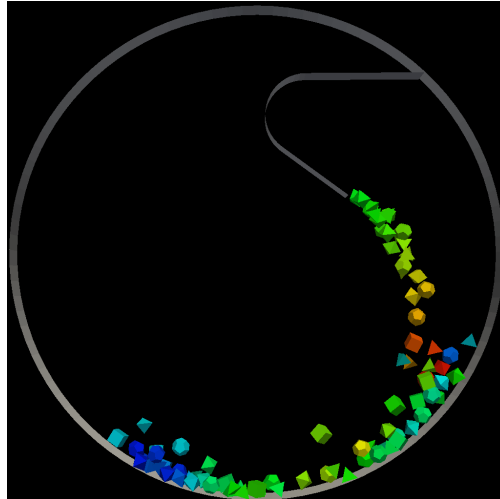
(e) Čas $t_{\alpha_1} = 1,461$ s, úhel $\alpha_1 = 79,8^\circ$.



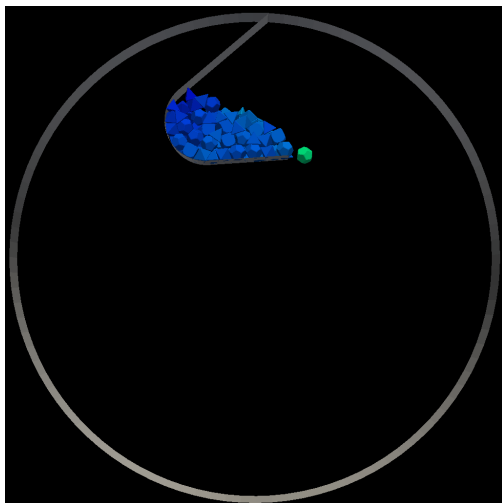
(f) Čas $t_{\alpha_2} = 2,321$ s, úhel $\alpha_2 = 126,7^\circ$.



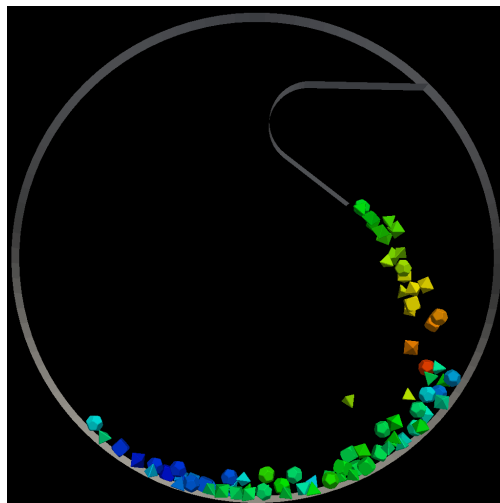
(g) Čas $t_{\alpha_1} = 1,589$ s, úhel $\alpha_1 = 86,8^\circ$.



(h) Čas $t_{\alpha_2} = 2,306$ s, úhel $\alpha_2 = 125,9^\circ$.



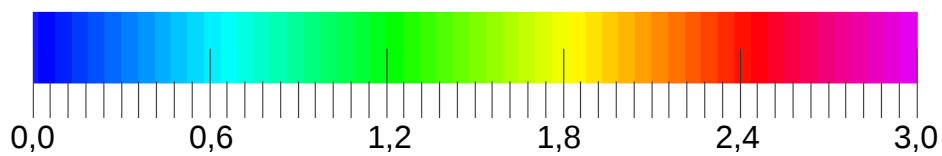
(i) Čas $t_{\alpha_1} = 1,578$ s, úhel $\alpha_1 = 86,2^\circ$.



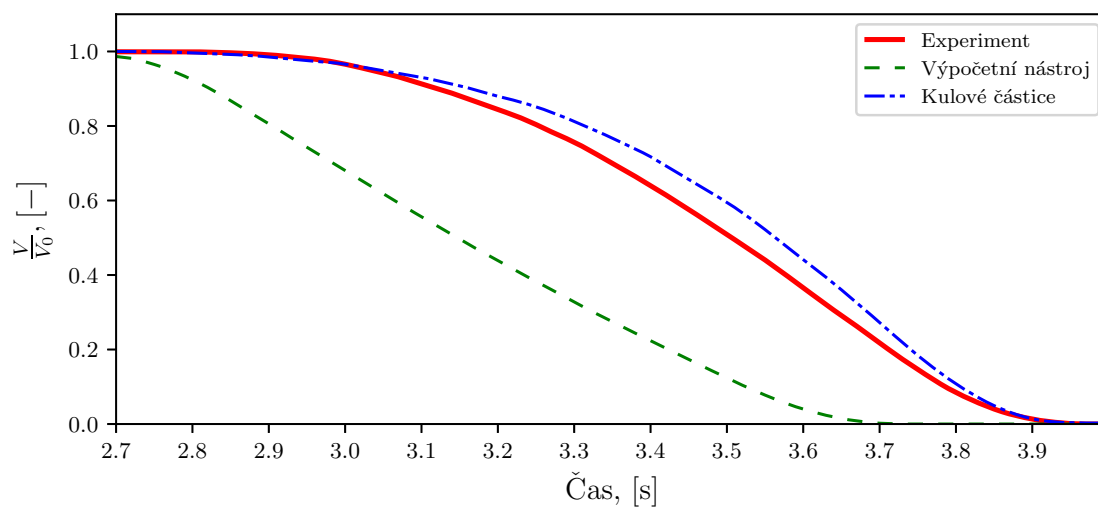
(j) Čas $t_{\alpha_2} = 2,339$ s, úhel $\alpha_2 = 127,7^\circ$.

Obr. 6.4: Dvojice snímků z experimentu a DEM simulací.

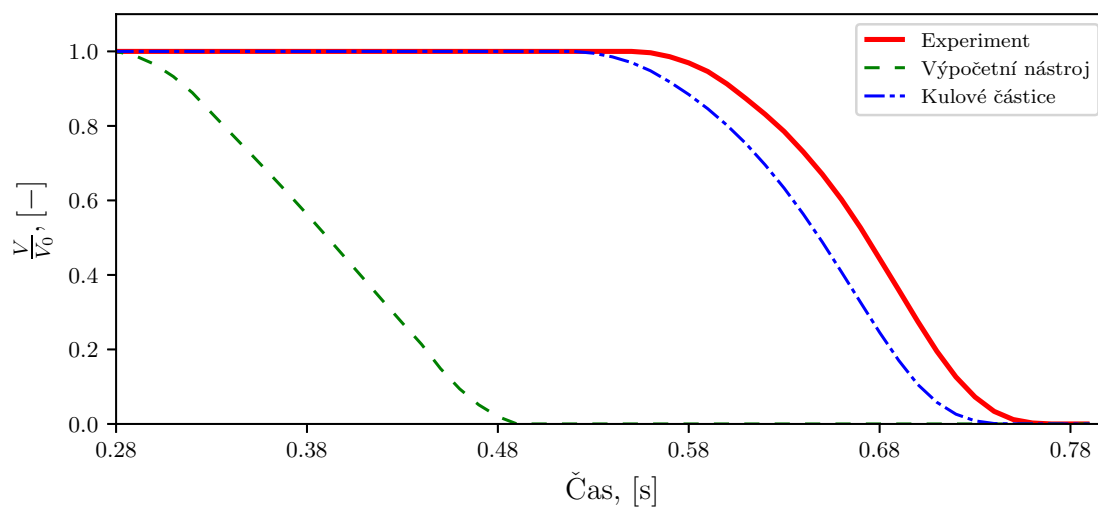
Úhlová rychlost: $0,953$ rad/s. Materiál: hrací kostky.



Obr. 6.5: Barevné měřítko velikosti okamžité rychlosti v m/s.

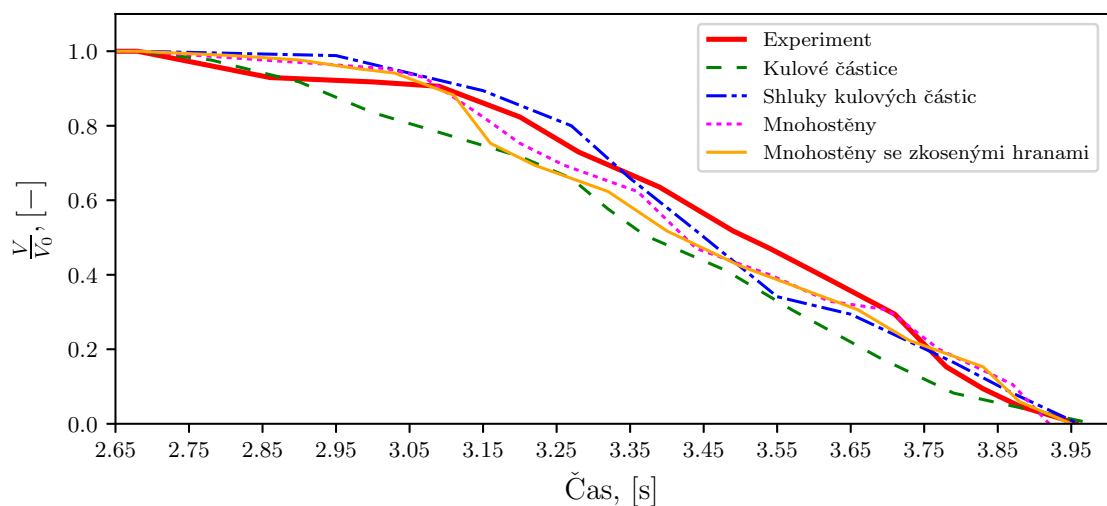


(a) Úhlová rychlost: 0,549 rad/s.

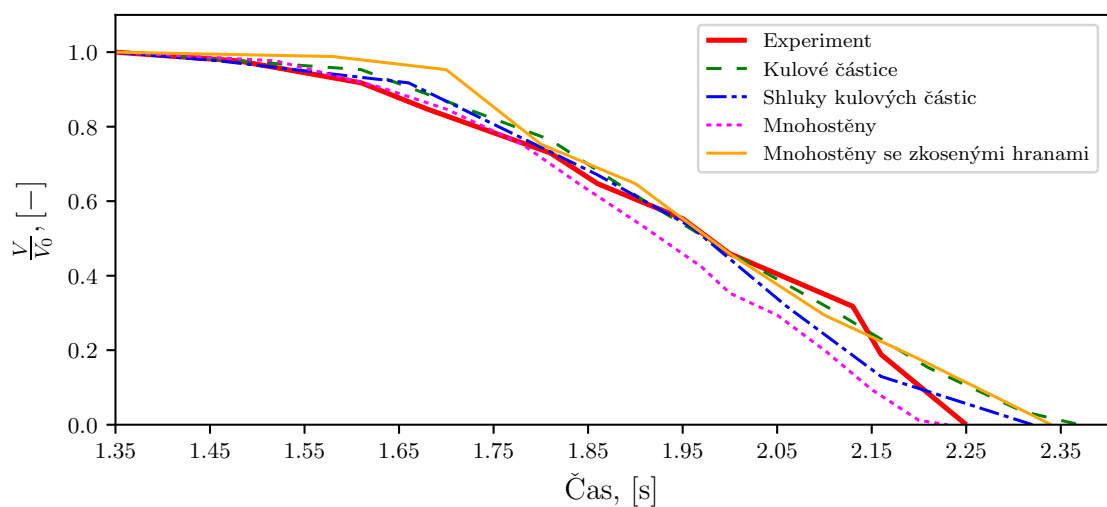


(b) Úhlová rychlost: 4,280 rad/s.

Obr. 6.6: Časové charakteristiky průběhu vyprazdňování korečku. V_0 a V jsou množství materiálu na začátku a v průběhu vyprazdňování. Materiál: bílé plastové kuličky.



(a) Úhlová rychlost: 0,516 rad/s.



(b) Úhlová rychlost: 0,953 rad/s.

Obr. 6.7: Časové charakteristiky průběhu vyprazdňování korečku. V_0 a V jsou množství materiálu na začátku a v průběhu vyprazdňování. Materiál: hrací kostky.

Tab. 6.5: Koeficient korelace R a koeficient determinace R^2 mezi časovými charakteristikami průběhů vyprazdňování korečku získanými použitím výpočetního nástroje a DEM simulace a charakteristikami získanými experimentálně.

Materiál: bílé plastové kuličky.

Koeficient	Výpočetní nástroj	Kulové částice
Úhlová rychlost: 0,549 rad/s		
R	0,909	0,996
R^2	0,365	0,983
Úhlová rychlost: 4,280 rad/s		
R	0,443	0,986
R^2	-	0,948

Tab. 6.6: Koeficient korelace R a koeficient determinace R^2 mezi časovými charakteristikami průběhů vyprazdňování korečku získanými z výsledků DEM simulací a charakteristikami získanými experimentálně. Materiál: hrací kostky.

Koeficient	Kulové částice	Shluky	Mnohostěny	Zkosené mnohostěny
Úhlová rychlost: 0,516 rad/s				
R	0,986	0,989	0,987	0,983
R^2	0,894	0,965	0,972	0,956
Úhlová rychlost: 0,953 rad/s				
R	0,990	0,988	0,992	0,970
R^2	0,964	0,956	0,909	0,933

Co se týče výpočetního nástroje, je podle výše uvedených koeficientů, časových charakteristik a hodnot dvojic úhlů natočení korečku nutné uvést, že se tento nástroj podařilo validovat spíše pro nízké rychlosti rotace experimentálního zařízení. Pro vyšší rychlosti je použití tohoto nástroje nevhodné. Toto je způsobeno jednak skutečností, že úloha je řešena jako statická, a dále zanedbáním existence jednotlivých částic, ze kterých se materiál skládá. Obdobně je tomu i v případě vektorových polí okamžitých rychlostí, kdy obr. 6.1c a 6.1d koresponduje s experimentem, zatímco 6.2c a 6.2d nikoli.

Co se týče diskrétně-prvkových modelů, lze jak na výše uvedených časových charakteristikách, tak i z hodnot koeficientů korelace a determinace a také z hodnot dvojic úhlů natočení korečku pozorovat dobrou shodu mezi experimentálními a vypočtenými daty. Podobně je tomu i v případě vektorových polí okamžitých rychlostí znázorněných na obr. 6.1e, 6.1f, 6.2e, 6.2f a 6.3 až 6.4.

Z prezentovaných výsledků lze vyvodit závěr, že zatímco analytické popisy a na jejich základě vytvořený výpočetní nástroj jsou pro popis (simulaci) vyprazdňování korečku použitelné pouze omezeně, tj. pro nízké rychlosti rotace experimentálního zařízení, tak výpočtové modely využívající teorie prezentované v podkapitole 3.2.1 byly validovány a získané výsledky korespondují se všemi provedenými experimenty. Nicméně vzhledem k možnostem experimentálního zařízení je rozsah použitelnosti omezen spíše na gravitační způsob vyprazdňování.

S ohledem na tyto skutečnosti je optimalizační úloha popsaná v kapitole 8 řešena s použitím výpočtového diskrétně-prvkového modelu s kulovými částicemi.

7 OPTIMALIZAČNÍ METODA A METAMODELING

V předchozích kapitolách byly uvedeny popisy vhodné pro řešení problematiky toků a deformací homogenních a v případě použití metody diskrétních prvků i nehomogenních materiálů, implementace těchto popisů a jejich následná validace.

Za účelem optimalizace návrhu konstrukce korečkového dopravníku¹ je zapotřebí implementace těchto popisů použít společně s vhodnou optimalizační metodou a sestavit optimalizační úlohu.

Tato kapitola je věnována popisu vybrané optimalizační metody, která je zvolena tak, aby mohla být použita nezávisle, nebo s minimální závislostí na řešeném problému, respektive na způsobu jeho řešení, a zároveň aby umožňovala řešení takových úloh, pro které exaktní řešení neposkytuje uspokojivé výsledky, nebo neexistuje. V kontextu této práce to znamená, že ať už je problematika řešena buď s použitím analytického popisu, nebo s použitím metody diskrétních prvků, bude možné pro nalezení hodnot vektoru vstupních (optimalizovaných) parametrů použít stejný algoritmus.

Existuje několik metod, které splňují výše uvedené podmínky. Patří mezi ně *gradientní algoritmus*, *simulované žíhání*, *optimalizace hejnem částic*, nebo *genetický algoritmus*. Vzhledem ke skutečnosti, že během vypracovávání této práce se její autor věnoval implementaci a aplikaci výhradně genetického algoritmu, je právě tato metoda patřící do skupiny evolučních optimalizačních metod vybrána pro řešení optimalizační úlohy.

Z důvodu vysoké časové náročnosti při použití genetického algoritmu spolu s výpočtem průběhu vyprazdňování korečku pomocí metody diskrétních prvků je v této kapitole pozornost věnována také základnímu popisu metamodelování (též označovanému jako metamodeling).

Následující podkapitola je věnována popisu genetického algoritmu tak, jak byl použit při řešení optimalizační úlohy.

7.1 Genetický algoritmus

Genetický algoritmus je heuristická (někdy označován jako meta-heuristická [81]) metoda, která se snaží aplikací principů evoluční biologie nalézt řešení problémů, pro které například neexistuje použitelný exaktní algoritmus [82]. Přestože je tato metoda relativně mladá (poprvé ji představil J. H. Holland v publikaci *Adaptation*

¹V této práci je provedena ukázka této optimalizace, přičemž jejím předmětem je nalezení vhodné geometrie korečku pro daný materiál a způsob vyprazdňování.

in natural and artificial systems v roce 1975 [25]), tak již existuje v mnoha různých úpravách a její možnosti jsou v současné době dobře prozkoumány, o čemž svědčí i množství dostupné literatury.

Genetický algoritmus pracuje se skupinou potenciálních řešení daného problému - *populace*. Každé potenciální řešení - *jedinec*, je reprezentované uspořádanou množinou parametrů - *genů*, které charakterizují dané řešení. Způsob reprezentace informací na úrovni jednotlivých genů - *kódování*, závisí na charakteru řešeného problému a může být binární, celočíselný, reálný, symbolický, nebo kombinovaný. Zde je nutno poznamenat, že v literatuře se lze setkat i s dalšími termíny používanými v oblasti genetických algoritmů, avšak pro potřeby této práce budou postačovat výše uvedené.

V typické implementaci genetického algoritmu je na začátku výpočtu, tj. v první generaci, populace složena z náhodně vygenerovaných jedinců - hodnoty jejich genů jsou získány vhodným použitím generátoru náhodných čísel. V přechodu do nové generace je pro každého jedince spočtena tzv. *hodnoticí (fitness) funkce* - účelová funkce řešeného problému, v rámci které je hledán globální extrém. Funkční hodnota fitness funkce pak vyjadřuje kvalitu řešení reprezentovaného tímto jedincem. Podle této funkční hodnoty jsou stochasticky vybráni jedinci, kteří jsou modifikováni pomocí genetického operátoru - *selektce, křížení a mutace*, čímž vznikne nová populace. Tento postup se iterativně opakuje, čímž se kvalita řešení v populaci postupně zvyšuje. Algoritmus se obvykle zastaví při dosažení postačující kvality řešení, případně po předem dané době [82].

Tak jako existuje genetický algoritmus v mnoha různých úpravách (např. *generační model, ustálený model*, popř. *ostrovní model* [18, 68]), tak také existují i různé způsoby implementace pro genetické operátory, jejichž cílem je pro daný typ úlohy urychlit konvergenci k hledanému globálnímu extrému. Rovněž i zde existuje množství článků, ve kterých se jejich autoři věnují popisu konkrétní implementace genetického operátoru a porovnávají jej s jinými, v tu dobu existujícími implementacemi [18, 64].

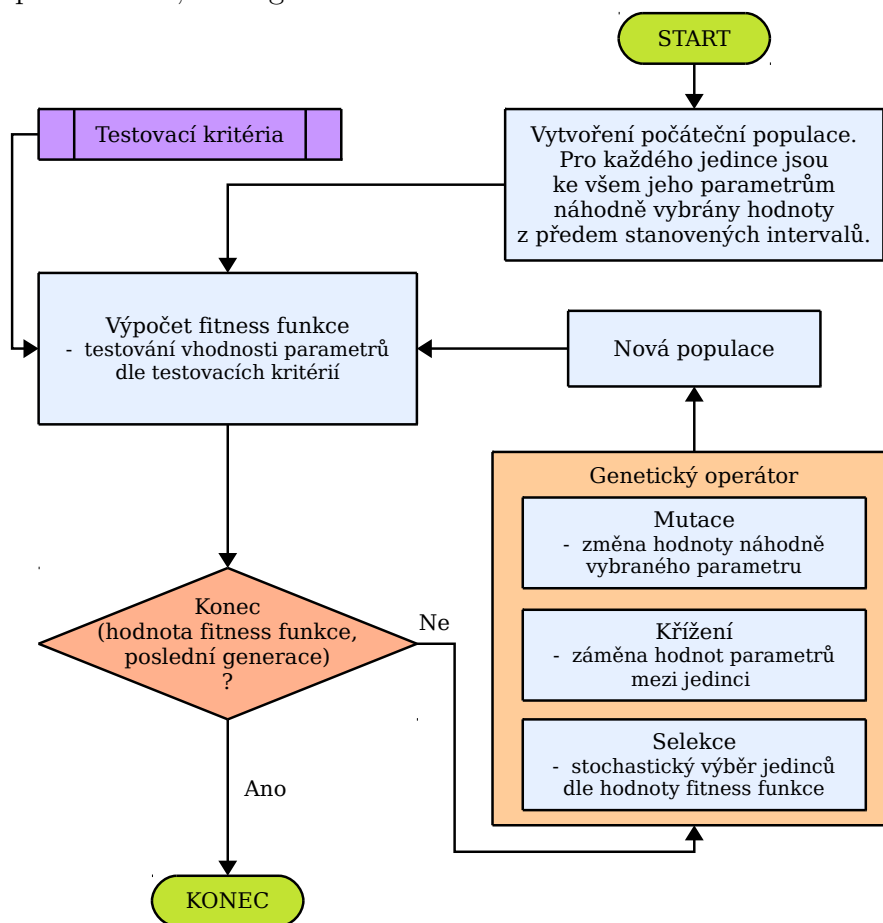
Mezi výhody genetického algoritmu patří jednoduchost jeho implementace, autonomnost celého algoritmu, vysoká pravděpodobnost nalezení řešení ležícího v blízkosti hledaného globálního extrému [64] a také vysoká nezávislost na řešeném problému. Je nutno poznamenat, že co se zmiňované nezávislosti týče, tak dle [68] obvykle existují dvě hlavní „komponenty“ genetického algoritmu, kdy způsob jejich použití závisí na řešeném problému. Jedná se o kódování (s tím souvisí způsob použití genetických operátorů) a fitness funkci.

Mezi nevýhody lze zařadit skutečnost, že při řešení komplexních úloh může být opakující se výpočet fitness funkce časově náročný. Totéž lze říci v případě vysokého počtu optimalizovaných parametrů, neboť s nárůstem jejich počtu roste velikost prohledávaného prostoru exponenciálně [81].

V rámci řešení cíle této práce byl genetický algoritmus shledán jako vhodná optimalizační metoda a to z následujících důvodů:

1. Univerzálnost - vhodnost nalezeného řešení je testována vně algoritmu pomocí vhodně sestavené fitness funkce, tudíž algoritmus jako takový nemá žádné informace o řešené problematice.
2. Vysoká pravděpodobnost nalezení řešení ležícího v blízkosti globálního extrému.
3. Jednoduchá implementace a množství dostupné literatury.

Celkově byly vytvořeny dvě implementace genetického algoritmu. V prvním případě se jedná pouze o generační model a v případě druhém o kombinaci generačního a ostrovního modelu. Každá implementace byla vytvořena i v paralelizované verzi. Jednotlivé geny pak mají zpravidla podobu reálných čísel, neboť se v rámci řešení optimalizační úlohy jedná o hledání vhodné geometrie korečků. Průběh první implementace genetického algoritmu je popsán prostřednictvím vývojového diagramu na obr. 7.1 a pseudokódu, viz algoritmus 1.



Obr. 7.1: Vývojový diagram principiálně znázorňující průběh výpočtu generačního modelu genetického algoritmu [32].

```

t = 0; // začátek
P = InitPopulation(C); // vytvoření první populace
while t < tmax do
    Evaluation(P); // výpočet fitness funkce
    Sort(P); // seřazení jedinců v populaci
    P' = Selection(P); // stochastický výběr jedinců
    S = Crossover(P'); // křížení
    Mutation(S); // mutace genů potomků
    Swap(S, P); // vznik nové populace P
    t = t + 1;
end

```

Algoritmus 1: Generační model genetického algoritmu - základní verze.

Argumentem funkcí v algoritmu 1 je vždy celá populace, tj. iterace přes jedince v populaci se provádí v každé funkci zvlášť. Častým případem je také umístění iterační smyčky přes jednotlivé členy populace vně funkce, argumentem kterých je pak konkrétní jedinec, nebo jedinci v případě funkcí pro *selekcí* a *křížení*. S ohledem na možnost paralelizace je tento způsob výhodnější a je znázorněný algoritmem 2.

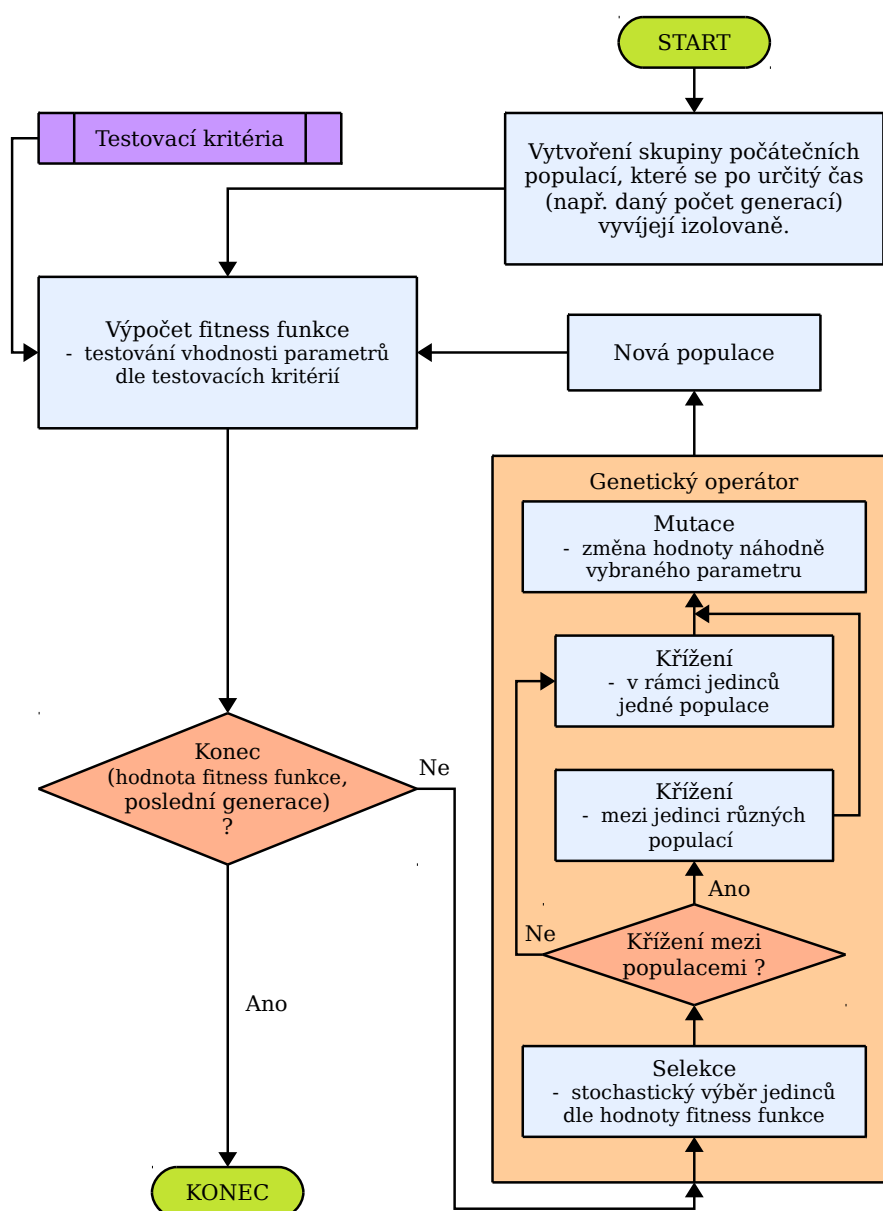
```

t = 0; // začátek
P = InitPopulation(C); // vytvoření první populace
Evaluation(P); // výpočet fitness funkce
while t < tmax do
    Sort(P); // seřazení jedinců v populaci
    for i-tého jedince populace konečné délky do in parallel
        P' = Selection(P); // stochastický výběr jedinců
        S[i] = Crossover(P'); // křížení
        Mutation(S[i]); // mutace genů potomků
        Evaluation(S[i]); // výpočet fitness funkce
    end
    Swap(S, P); // vznik nové populace P
    t = t + 1;
end

```

Algoritmus 2: Generační model genetického algoritmu - paralelizovaná verze.

Druhá implementace, obdobně jako první, je také popsána prostřednictvím vývojového diagramu znázorněného na obr. 7.2 a pseudokódu, ve kterém je již provedena paralelizace, viz algoritmus 3.



Obr. 7.2: Vývojový diagram principiálně znázorňující průběh výpočtu generačního modelu genetického algoritmu v kombinaci s ostrovním modelem.

```

t = 0; // začátek
for k-tou populaci do in parallel
| P[k] = InitPopulation(C); // vytvoření první populace
end
while t < tmax do
| for k-tou populaci do in parallel
| | while t < t1 do
| | | for i-tého jedince k-té populace do in parallel
| | | | Evaluation(P[k][i]); // výpočet fitness funkce -
| | | | // časově nejnáročnější
| | | end
| | | Sort(P[k]); // seřazení jedinců v populaci
| | | if ukončovací podmínka? then
| | | | P[k][0].fitness > fitness; // kontrola dosažené
| | | | // hodnoty fitness
| | | | // funkce
| | | end
| | | for i-tého jedince k-té populace do
| | | | P' = Selection(P[k]); // stochastický výběr jedinců
| | | | S[i] = Crossover(P'); // křížení
| | | | Mutation(S[i]); // mutace genů potomků
| | | end
| | | Swap(S, P[k]); // vznik nové populace
| | | t = t + 1;
| | end
| end
| for k-tou populaci do in parallel
| | for i-tého jedince k-té populace do
| | | if P[k][i] není v elitní skupině then
| | | | P[k][i] = Random(P); // migrace mezi členy jednotlivých
| | | | // populací
| | | end
| | end
| end
| t = t + 1;
end

```

Algoritmus 3: Implementace ostrovního a generačního modelu genetického algoritmu - paralelizovaná verze.

Co se genetických operátorů týče, tak pro operátor *selekce* byly při řešení optima-
lizační úlohy používány dvě *jedno-kriteriální selekční metody*. Nejčastěji používána
byla *selekce ruletovým kolem*, někdy označovaná jako proporcionalní selekce [67],
kdy pravděpodobnost výběru jedince lze vyjádřit vztahem:

$$p_{s_i} = \frac{F_i}{\sum_{j=1}^n F_j} \quad i \in (1, 2, \dots, n), \quad (7.1)$$

kde:

n je velikost populace,

F_i je hodnota fitness funkce i -tého jedince v populaci.

Z důvodu, že použití selekce ruletovým kolem může v některých případech vést
k předčasné konvergenci [68], byla používána také tzv. *lineární klasifikace*. Zde je
jedinec vybírán dle své pozice v populaci, která je vzestupně seřazena podle hod-
noty fitness funkce. Dle [26] lze pravděpodobnost výběru i -tého jedince z populace
o velikosti n vyjádřit vztahem:

$$p_{s_i} = \frac{1}{n} \left(\mu^- + (\mu^+ - \mu^-) \frac{i-1}{n-1} \right) \quad i \in (1, 2, \dots, n), \quad (7.2)$$

kde:

n je velikost populace, tedy i „známka“ jedince s nejvyšší hodnotou
fitness funkce,

i je pořadí jedince v populaci,

μ^+, μ^- jsou volitelné parametry a dle [26] musí být splněny dvě podmínky:

$$\mu^+ + \mu^- = 2 \quad \wedge \quad 1 \leq \mu^+ \leq 2.$$

Za účelem urychlení konvergence genetického algoritmu byl v rámci selekce také
použit tzv. *elitismus*. Jedná se o postup, ve kterém je určitý počet nejlepších jedinců
přímo přenesen do následující populace a nedochází tak k jejich případné ztrátě.
Velikost této „elity“ byla většinou volena v řádech jednotek procent z celé populace.

Operátor *křížení* je nástrojem pro vytváření nových řešení do dalších populací
a slouží k zajištění konvergence [67]. Operátor byl implementován ve své základní a
často používané formě. S použitím operátoru selekce byli z populace vybráni vždy
dva jedinci - *rodice*, a vzájemnou kombinací jejich genů vznikl jeden, popř. dva po-
tomci, přičemž bylo použito *uniformní křížení* a *bodové křížení* a to jak jednobodové,
tak také dvoubodové (často v závislosti na počtu genů). Pravděpodobnost použití
tohoto operátoru byla zpravidla volena jako $p_c = 1$, což lze zdůvodnit současným
použitím elitismu.

Operátor *mutace* je unární operátor [67], který je aplikován s pravděpodobností p_m na jedince v populaci, resp. na jejich geny, přičemž účel operátoru je vložit do populace novou informaci, která může mít zásadní vliv na kvalitu nalezeného řešení a která by se v nové populaci jinak nemusela vyskytovat. Na druhou stranu však mutace významně narušuje genetickou informaci, tudíž je účelné aplikovat ji s nízkou pravděpodobností [67]. Při řešení ukázkové úlohy, ve které jednotlivé geny měly podobu reálných čísel, byla velikost změny hodnoty vybraného genu daného jedince vybírána z předem stanoveného intervalu. Zpravidla se jednalo o interval se zmenšujícím se záběrem, viz (7.3), a pravděpodobnost výběru dané hodnoty odpovídala rovnoměrnému rozdělení. Samotný operátor byl aplikován s pravděpodobností $p_m = 0,5$. Tuto relativně vysokou pravděpodobnost lze obdobně jako v případě křížení obhájit použitím elitismu.

$$\begin{aligned} gen_{ij_{k+1}} &= gen_{ij_k} + (max - gen_{ij_k}) \left(1 - \frac{k+1}{N}\right) X \\ gen_{ij_{k+1}} &= gen_{ij_k} - (gen_{ij_k} - min) \left(1 - \frac{k+1}{N}\right) X \end{aligned} \quad (7.3)$$

kde:

- gen_{ij_k} je j -tý gen i -tého člena populace v k -té iteraci,
- max, min jsou hraniční hodnoty intervalu pro daný gen,
- k je k -tá iterace,
- N je maximální počet iterací,
- X je náhodná proměnná, přičemž $X \sim U([0, 1])$.

Existuje řada dalších metod a způsobů použití genetických operátorů. Co se selekce týče, existuje např. exponenciální klasifikace, turnajová selekce, nebo Boltzmanův výběr. V rámci křížení lze použít např. *aritmetické křížení*, nebo i další modifikace výše uvedených, a způsob použití mutace se bude odvíjet především od způsobu kódování. Podrobný popis lze nalézt v [64, 67]. Výše prezentované metody pro selekci, křížení a mutaci jsou právě ty, jež byly použity při řešení ukázkové optimalizační úlohy.

Závěrem kapitoly je potřeba zmínit také vliv *selekčního tlaku* (viz vztah (7.4) [67]) na rychlost konvergence a velikost prohledaného prostoru. Dle [67] se jedná o dva protichůdné požadavky. S rostoucím selekčním tlakem se zvyšuje rychlost konvergence a zároveň klesá velikost prohledaného prostoru. Je-li hodnota selekčního tlaku příliš vysoká, dojde v populaci ke ztrátě diverzity a pravděpodobnost uvíznutí v lokálním extrému se zvyšuje. Naopak pokud hodnota selekčního tlaku klesá, rychlost konvergence se snižuje a velikost prohledaného prostoru roste.

$$I = \frac{\bar{F}^* - \bar{F}}{\sigma^*} \quad (7.4)$$

kde:

- I je velikost selekčního tlaku,
- \bar{F} je průměrná hodnota fitness funkce celé populace před selekcí,
- \bar{F}^* je průměrná hodnota fitness funkce celé populace po selekci,
- σ^* je rozptyl hodnot fitness funkce v populaci po selekci.

Časový průběh vývoje hodnoty selekčního tlaku během „evoluce“ může vypovídat o kvalitě nalezeného řešení.

7.2 Metamodeling

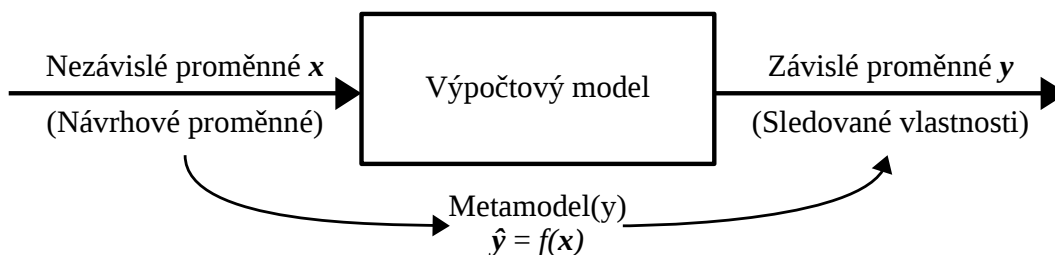
Při hledání řešení, které se má nalézt v blízkosti svého optima, hraje důležitou roli také čas, za který lze toto řešení nalézt. Přestože rychlost konvergence genetického algoritmu je vysoká ve srovnání s „brute-force“ způsobem prohledávání návrhového prostoru, tak nutnost provedení simulace ve všech vybraných bodech tohoto prostoru značně zvyšuje časovou náročnost celé optimalizace.

Za účelem nalezení vyhovujícího řešení v řádově kratším čase, než v jakém by bylo nutno toto řešení hledat pomocí konvenčních postupů (tedy i včetně použití genetického algoritmu), se do popředí zájmu dostává tzv. metamodeling².

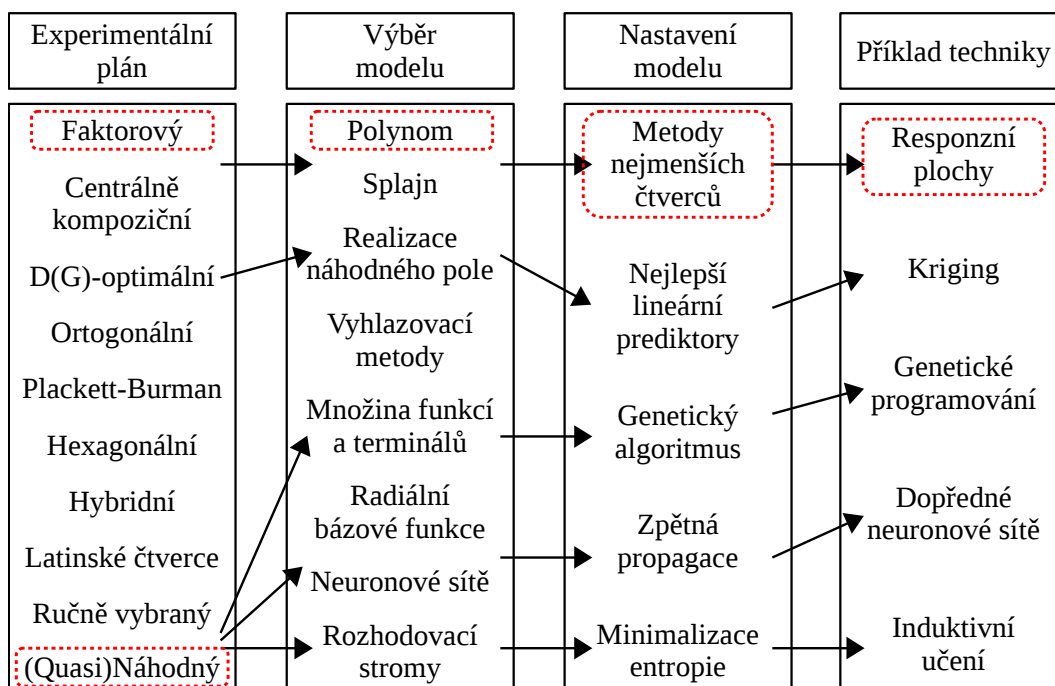
Metamodeling je v kontextu této práce chápán jako souhrnný název pro kombinaci přístupů jako je plánování a analýza experimentu (fyzického, nebo počítačového), přičemž správně navržený experiment má za cíl při co nejmenším počtu měření (vyčíslení) získat co nejvíce informací o chování zkoumaného systému [63]. Výstupem metamodelování je metamodel, aproximační model, kterým lze chování zkoumaného systému popsat. Metamodel bývá někdy označován jako „model modelu“.

V této práci se jedná o tvorbu metamodelu diskrétně prvkového modelu chování partikulárního materiálu během průchodu korečkovým dopravníkem. Schematicky je problematika znázorněna na obr. 7.3. Na obr. 7.4 jsou pak uvedeny příklady technik používaných při metamodelování.

²V této práci též označován jako metamodelování.



Obr. 7.3: Schematické znázornění vztahu mezi modelem a metamodelem [63].



Obr. 7.4: Schematické znázornění příkladů technik metamodelování [62]. Červeně jsou vyznačeny ty metody, které byly použity při řešení ukázkové optimalizační úlohy.

S ohledem na obsáhlost této problematiky jsou v následujících podkapitolách prezentovány postupy, které byly použity při řešení optimalizační úlohy. Další informace lze nalézt v [53, 62, 63].

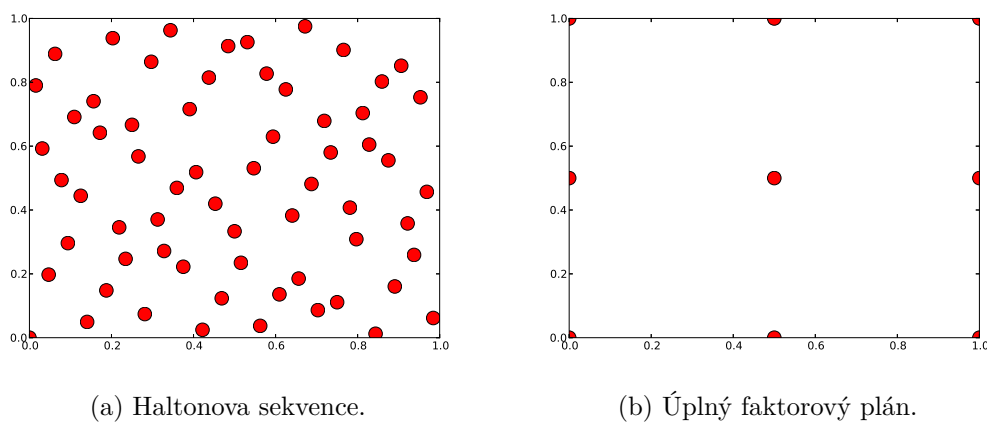
7.2.1 Plánování a analýza experimentu

Aby bylo možné chování zkoumaného systému, tedy vztah mezi vstupními (nezávislými) a výstupními (závislými) proměnnými, popsat vhodným metamodelem, je

nutné provést sérii experimentů v předem stanovených bodech návrhového prostoru, jehož mohutnost závisí na počtu nezávislých proměnných. Dle [63] lze plánování experimentu chápat jako strategický výběr těchto bodů tak, aby při jejich minimálním počtu bylo možné získat co „nejlepší“ parametry aproximačního modelu, tj. dostatečně vypovídající popis hledané závislosti mezi vstupními a výstupními proměnnými. Ukázalo se, že pro konstrukci určitého typu aproximačního modelu je vhodný určitý experimentální plán [63].

Jelikož v této práci je aproximační model vytvořen nad výpočtovým modelem, je zde upřednostněno použití metod pro plánování experimentů deterministické povahy. Dle [63] je namísto klasických experimentálních plánů navržených pro fyzické experimenty, tj. experimenty s náhodnou chybou, vhodné použít experimentální plány pro experimenty na výpočtových modelech. Tyto jsou označovány jako moderní, nebo rovnoměrně rozprostřené.

Konkrétně se jedná o *Haltonovu sekvenci*, kdy jsou body v návrhovém prostoru rozmístěny co možná nejrovnoměrnějším, ale stále quasi-náhodným způsobem [44]. Dále, především za účelem porovnání, je bez opakování použit *Úplný faktorový plán*. Schematicky jsou oba dva experimentální plány znázorněny na obr. 7.5.



Obr. 7.5: Schematické znázornění vybraných experimentálních plánů.

7.2.2 Aproximační model

Poté co je vybrán vhodný experimentální plán a proveden (počítačový) experiment, je následujícím krokem volba aproximačního modelu a metody vhodné pro nalezení hodnot parametrů tohoto modelu [62], viz obr. 7.4.

S ohledem na literaturu, ve které se její autoři věnují popisu tvorby metamodelů nad výpočtovými modely [53, 62], byla v rámci řešení ukázkové optimalizační úlohy

použita technika *responzní plochy*. Konkrétně se jedná o tvorbu lineárního regresního metamodelu druhého řádu, viz (7.5), přičemž hodnoty koeficientů tohoto polynomu byly získány s použitím metody nejmenších čtverců.

$$\hat{y} = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^k \sum_{j=i+1}^k \beta_{ij} x_i x_j \quad (7.5)$$

kde:

- \hat{y} je aproximace výstupní proměnné - metamodel,
- β_i jsou neznámé regresní koeficienty,
- x_i jsou nezávislé proměnné (prvky návrhového vektoru \mathbf{x}) a
- k je počet nezávislých proměnných.

Kromě responzních ploch lze použít i kvalitativně zcela jiné metamodely, např. umělé neuronové sítě.

7.2.3 Hodnocení kvality metamodelů

Kvalitu aproximace, obecně vyjádřené vztahem:

$$y = \hat{y} + \varepsilon_M \quad (7.6)$$

kde:

- y je výstupní proměnná,
- \hat{y} je aproximace výstupní proměnné - metamodel a
- ε_M je chyba aproximace,

lze hodnotit celou řadou metrik [63]. Mezi nejpoužívanější metriky patří:

1. *Koeficient determinace*, označován R^2 , který zpravidla na intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ kvantifikuje, jak velká část variability výstupní proměnné je metamodelem vysvětlena. Hodnotu R^2 lze získat použitím vztahu (7.7), příp. (7.8).

$$R^2 = 1 - \frac{SS_E}{SS_T} \quad (7.7)$$

$$R^2 = \frac{SS_M}{SS_T} \quad (7.8)$$

$$SS_T = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \quad (7.9)$$

$$SS_M = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \quad (7.10)$$

$$SS_E = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (7.11)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (7.12)$$

kde:

SS_T je celková suma čtverců,

SS_M je suma čtverců modelu,

SS_E je suma čtverců reziduí,

y_i je skutečná hodnota výstupní proměnné v i -tém bodě návrhového prostoru,

\hat{y}_i je hodnota výstupní proměnné v i -tém bodě návrhového prostoru získaná použitím metamodelu,

\bar{y} je průměrná hodnota výstupní proměnné,

n je počet bodů v návrhovém prostoru použitý pro tvorbu metamodelu.

2. *Upravený koeficient determinace*, označován R_{adj}^2 , kterému dle [63] bývá dávána přednost před R^2 , neboť zohledňuje počet parametrů metamodelu a počet prozkoumaných bodů v návrhovém prostoru. Hodnotu R_{adj}^2 lze získat použitím vztahu (7.13).

$$R_{\text{adj}}^2 = R^2 - (1 - R^2) \frac{k}{n - k - 1} \quad (7.13)$$

3. *Průměrná absolutní chyba*, která udává rozdíl mezi dvěma spojitými proměnnými.

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i| \quad (7.14)$$

4. *Maximální absolutní chyba a Maximální relativní chyba.*

$$MAX = \max |\hat{y}_i - y_i| \quad (7.15)$$

$$REL = \max \left| \frac{\hat{y}_i - y_i}{y_i} \right| \quad (7.16)$$

8 UKÁZKOVÉ PŘÍKLADY OPTIMALIZACE KONSTRUKCE KOREČKOVÝCH DOPRAVNÍKŮ

V této kapitole jsou prezentovány dva ukázkové příklady, ve kterých je provedena optimalizace geometrie korečku korečkového dopravníku. V prvním příkladě je optimalizace provedena pomocí genetického algoritmu přímo s použitím dvou vytvořených výpočtových modelů korečkového dopravníku prezentovaných v rámci kapitoly 4. Z důvodu vysoké časové náročnosti tohoto přístupu byl vytvořen druhý ukázkový příklad, ve kterém je s výpočtovými modely korečkového dopravníku proveden počítačový experiment a na základě jeho výsledků je vytvořen metamodel, tedy „model výpočtového modelu“. Samotná optimalizace již probíhá na úrovni metamodelu.

8.1 Optimalizace s použitím genetického algoritmu

Při řešení této ukázkové optimalizační úlohy byla použita paralelizovaná verze ostrovního a generačního modelu genetického algoritmu s použitím elitismu, viz algoritmus 3, spolu s výpočtovými modely korečkového dopravníku.

Důvodem pro použití ostrovního modelu genetického algoritmu byla obecně nižší pravděpodobnost uvíznutí výpočtu v lokálním extrému a také skutečnost, že ostrovní model [18] při srovnávacích výpočtech¹ s klasickým modelem [64] vykazoval po N výpočetních cyklech stejné výsledky - s ohledem na jejich střední hodnotu, avšak hodnota jejich směrodatné odchylky byla řádově nižší.

8.1.1 Popis

Optimalizační úlohu lze formulovat následovně:

Najdi takovou geometrii korečku, pro kterou při konstantních mechanicko-fyzikálních vlastnostech materiálu, rozměrech zařízení a velikosti úhlové rychlosti bude podíl materiálového toku Q_{OUT} na výstupu z dopravníku ku materiálovému toku Q_{IN} na vstupu do dopravníku maximální.

Úloha byla řešena pro odstředivý i gravitační způsob vyprazdňování korečku, přičemž v případě odstředivého způsobu byly optimalizovány dva parametry: výška vnější stěny h_2 a vyložení korečku a , a v případě gravitačního způsobu byly optimalizovány tři parametry: výška vnitřní stěny h_1 , výška vnější stěny h_2 a vyložení korečku a . Jednotlivé parametry byly voleny s ohledem na způsob plnění a způsob

¹Hledání globálních extrémů funkcí pro testování optimalizačních algoritmů, např. Rosenbrock, Eggholder apod.

vyprazdňování. U odstředivého dopravníku je průběh plnění hrabacím způsobem i průběh vyprazdňování ovlivněn geometrií vnější stěny korečku. U gravitačního dopravníku je průběh plnění násypným způsobem ovlivněn geometrií vnější stěny, zatímco průběh vyprazdňování je ovlivněn geometrií vnitřní stěny korečku.

Z důvodu porovnatelnosti získaných výsledků byly optimalizované parametry záměrně voleny v souladu s normou ČSN 26 2008 [88]. Intervaly vymezující prohledávaný prostor jsou uvedeny v tab. 4.4.

Zatímco kritériem pro ukončení jedné simulace byla doba jejího běhu, tak kritériem pro ukončení celé optimalizace byla velikost změny hodnoty fitness funkce.

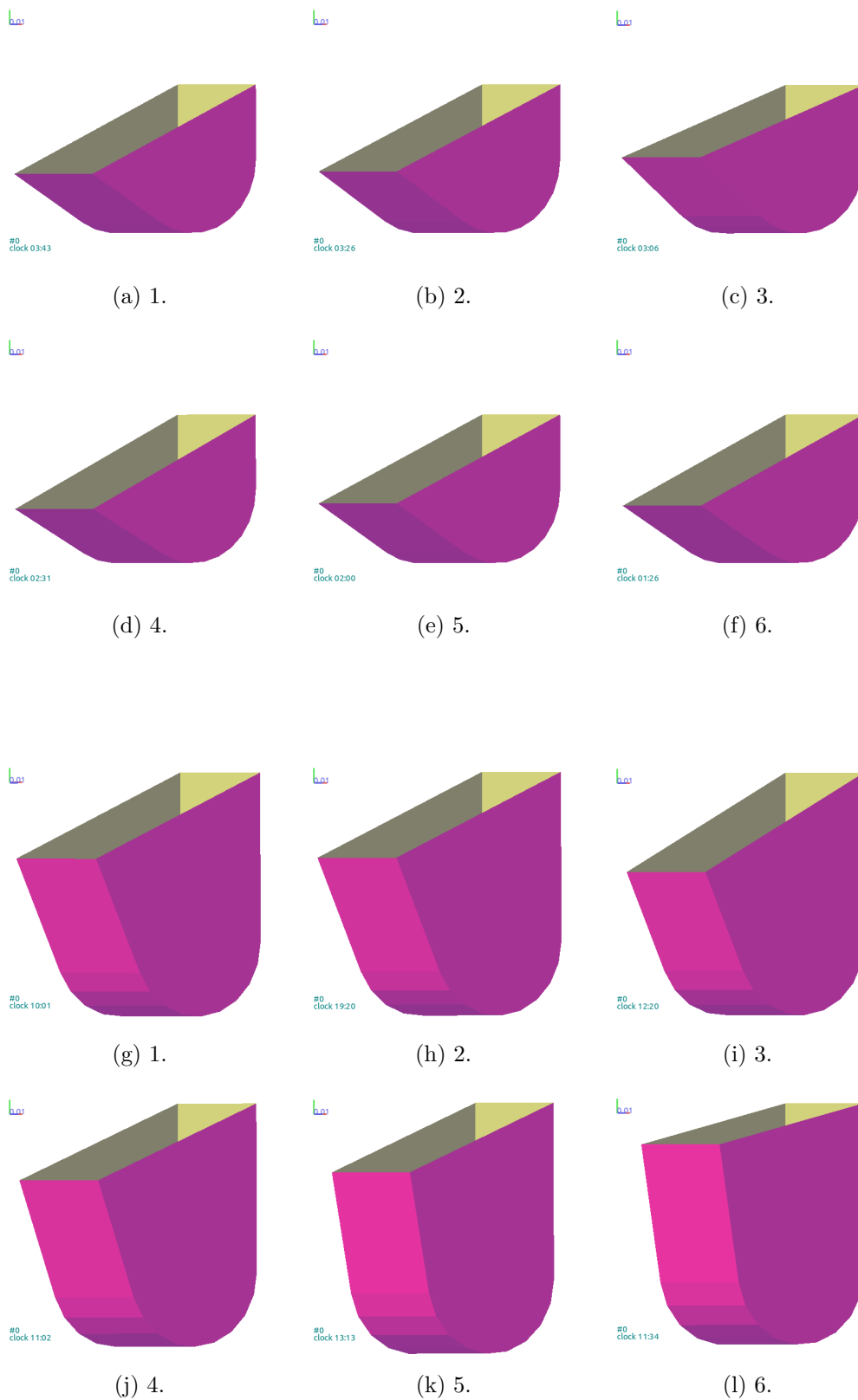
8.1.2 Výsledky

V tab. 8.1 jsou uvedeny výsledky optimalizace v podobě hodnot výše uvedených parametrů, jejichž grafická reprezentace je znázorněna na obr. 8.1. Vždy se jedná o šestici řešení s nejvyšší hodnotou fitness funkce. V tab. 8.2 jsou uvedeny časy běhu jedné simulace i celkové časy optimalizace. Z výsledků je patrné, že se pro jednotlivé způsoby vyprazdňování korečku podařilo nalézt takové geometrie, které jsou tvarově podobné korečkům doporučeným normou ČSN 26 2008. Jmenovitě se jedná o typ korečku A-mělký přímý a typ korečku D-hluboký přímý.

V případě odstředivého způsobu vyprazdňování byla rozhodující maximální velikost vyložení a vhodná výška vnější stěny korečku a v případě gravitačního způsobu vyprazdňování byla rozhodující dostatečná výška vnitřní stěny korečku, díky které nedocházelo k propadávání materiálu zpět do šachty dopravníku.

Tab. 8.1: Hodnoty výšky vnitřní stěny h_1 , výšky vnější stěny h_2 a vyložení korečku a šesti nejlepších nalezených řešení.

Parametr / řešení	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Odstředivý korečkový dopravník (2D úloha)						
$Q_{\text{OUT}}/Q_{\text{IN}}$, [-]	0,98	0,97	0,97	0,96	0,96	0,95
$h_1 = \text{konst}$, [m]	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
h_2 , [m]	0,040	0,042	0,051	0,037	0,040	0,039
a , [m]	0,130	0,130	0,130	0,129	0,130	0,129
Gravitační korečkový dopravník (3D úloha)						
$Q_{\text{OUT}}/Q_{\text{IN}}$, [-]	0,90	0,90	0,89	0,89	0,86	0,86
h_1 , [m]	0,163	0,163	0,163	0,163	0,170	0,163
h_2 , [m]	0,106	0,106	0,097	0,112	0,123	0,136
a , [m]	0,130	0,129	0,125	0,125	0,114	0,114



Obr. 8.1: Grafická reprezentace šesti nejlepších nalezených řešení pro odstředivý ((a) - (f)) a gravitační ((g) - (l)) způsob vyprazdňování.

Hodnota podílu $Q_{\text{OUT}}/Q_{\text{IN}}$ nebyla v čase konstantní. Na počátku simulace byla nulová a postupně se zvyšovala, až došlo k jejímu ustálení. V případě odstředivého způsobu vyprazdňování došlo k ustálení přibližně po 30 minutách reálného času a v případě gravitačního způsobu vyprazdňování přibližně po 20 minutách reálného času.

Z tab. 8.2 je patrné, že i přes určitou jednoduchost výpočtových modelů je tento způsob optimalizace časově velmi náročný.

Tab. 8.2: Vybrané časy optimalizace pro Intel® Core™ i7 CPU 960 (4 jádra).

Parametr / typ dopravníku	Odstředivý (2D úloha)	Gravitační (3D úloha)
Doba běhu simulace, [minuta]	30	20
Celkový čas optimalizace, [den]	20	22

8.2 Optimalizace s použitím metamodelů

Následující podkapitola pojednává o tvorbě metamodelů nad diskrétně-prvkovými modely toku partikulárního materiálu korečkovým dopravníkem. Motivací je nalezení vhodné geometrie korečku v řádově kratším čase než v případě použití genetického algoritmu.

S ohledem na skutečnost, že problematika tvorby metamodelů nad diskrétně-prvkovými modely nebyla doposud v dostupné literatuře dostatečně kriticky diskutována, je nutné tento přístup k optimalizaci geometrie korečku považovat za experimentální.

8.2.1 Popis

Obdobně jako při použití genetického algoritmu byl i tento ukázkový příklad optimalizace proveden pro odstředivý a gravitační způsob vyprazdňování, přičemž v prvním případě vektor vstupních (nezávislých) proměnných obsahoval dva parametry (výška vnější stěny h_2 a vyložení korečku a) a v druhém případě tři parametry (výška vnitřní stěny h_1 , výška vnější stěny h_2 a vyložení korečku a). Byla uvažována jediná výstupní (závislá) proměnná a to podíl materiálového toku Q_{OUT} na výstupu z dopravníku k materiálovému toku Q_{IN} na vstupu do dopravníku. Formulace optimalizační úlohy tímto zůstává shodná s formulací provedenou v předchozí podkapitole.

Na rozdíl od optimalizace řešené pomocí genetického algoritmu, kdy simulace s použitím dvou výpočtových modelů korečkového dopravníku byly prováděny pro

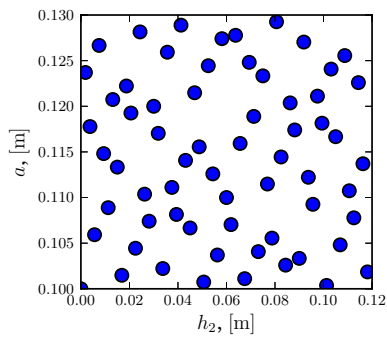
stanovení hodnoty fitness funkce každého jedince (bod návrhového prostoru), jsou nyní tyto modely použity pro získání série výstupních proměnných v závislosti na vstupních, jejichž hodnoty byly vhodně voleny z návrhového prostoru.

S přihlédnutím k podkapitole 7.2 byly pro jednotlivé způsoby vyprazdňování korečku sestaveny čtyři experimentální plány. Jmenovitě se jedná od dvě Haltonovy sekvence (HS) a dva úplné faktorové plány (UFP). Pro aproximaci chování výpočtových modelů byl použit lineární regresní metamodel druhého řádu, viz rovnice (7.5). V závislosti na počtu vstupních proměnných se jedná o kvadratický polynom ve dvou, resp. třech proměnných. Celkově tedy byly vytvořeny čtyři metamodely pro odstředivý a čtyři pro gravitační způsob vyprazdňování. Parametry použité při tvorbě metamodelů jsou uvedeny v tab. 8.3 a experimentální plány pro 2D i 3D úlohu jsou zobrazeny na obr. 8.2.

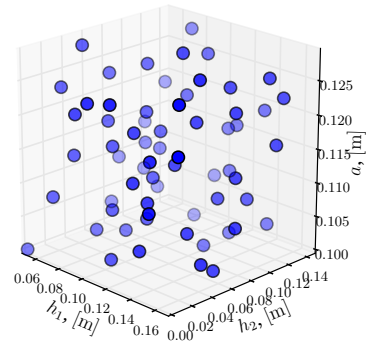
Následná optimalizace byla prováděna již na úrovni jednotlivých metamodelů s použitím algoritmu L-BFGS-B (aproximace metody Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) implementovaného v knihovně *SciPy* [73].

Tab. 8.3: Vybrané parametry a experimentální plány použité při tvorbě metamodelů.

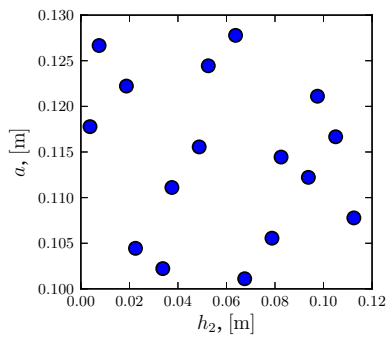
Parametr / typ dopravníku	Odstředivý (2D úloha)	Gravitační (3D úloha)
Počet nezávislých proměnných	2	3
Intervaly parametrů (označení, interval, jednotka)	$h_2, <0; 0,12>, [m];$ $a, <0,1; 0,13>, [m]$	$h_1, <0,05; 0,17>, [m];$ $h_2, <0; 0,15>, [m];$ $a, <0,1; 0,13>, [m]$
Experimentální plány (název, typ, počet návrhových bodů)	HS 64, Haltonova sekvence, 64 HS 16, Haltonova sekvence, 16 UFP 4x4, úplný faktorový plán, 16 UFP 3x3, úplný faktorový plán, 9	HS 64, Haltonova sekvence, 64 HS 16, Haltonova sekvence, 16 HS 4x4x4, úplný faktorový plán, 64 HS 3x3x3, úplný faktorový plán, 27



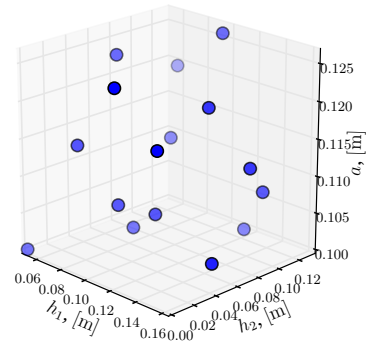
(a) HS 64



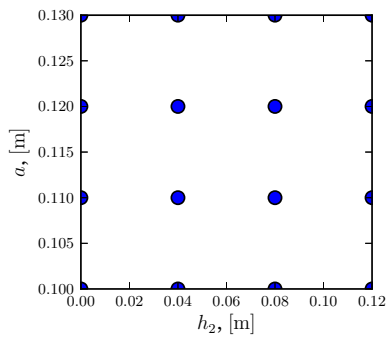
(b) HS 64



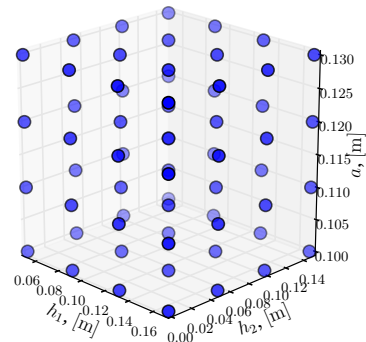
(c) HS 16



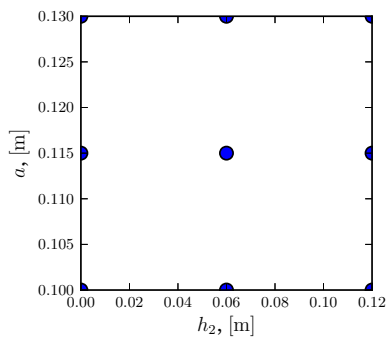
(d) HS 16



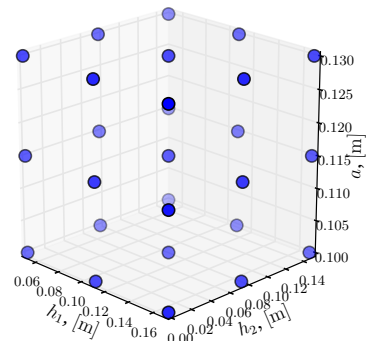
(e) UFP 4x4



(f) UFP 4x4x4



(g) UFP 3x3

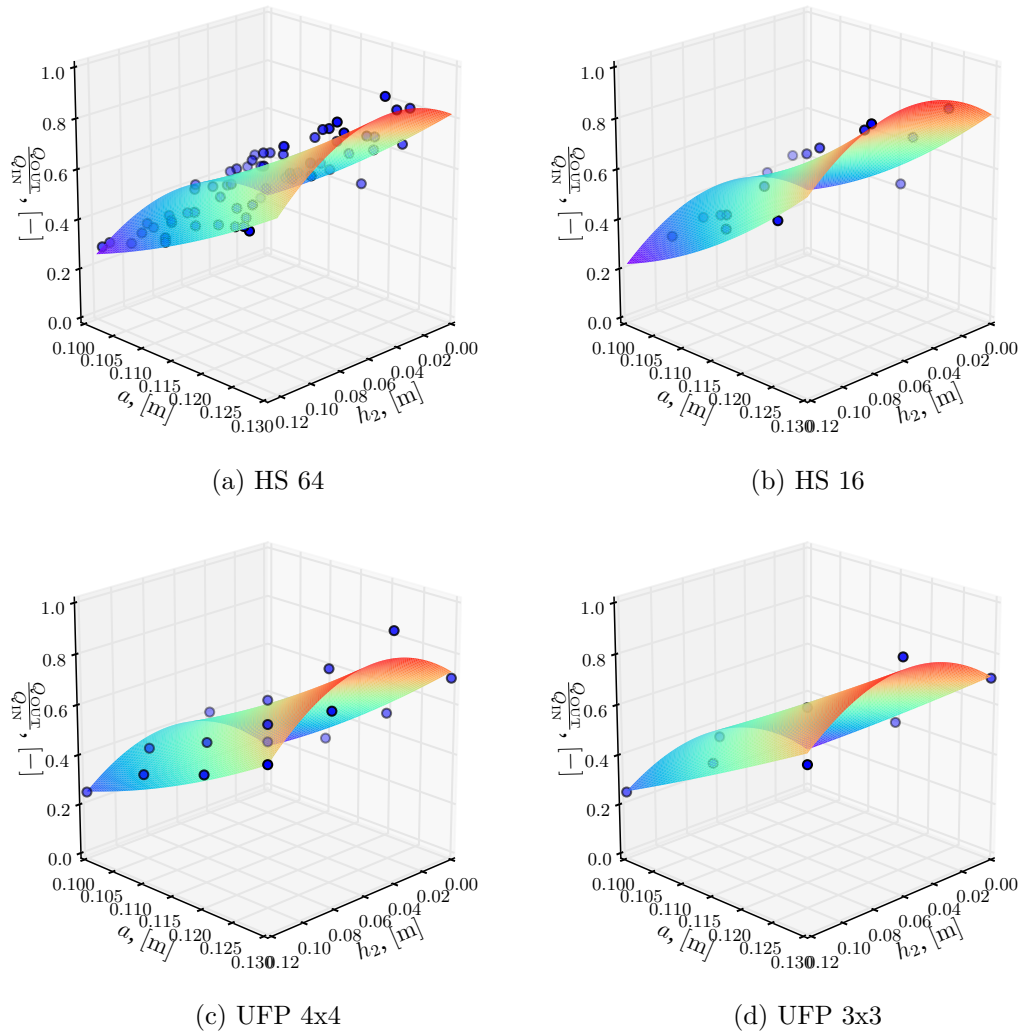


(h) UFP 3x3x3

Obr. 8.2: Experimentální plány 2D úlohy (vlevo) a 3D úlohy (vpravo).

8.2.2 Výsledky

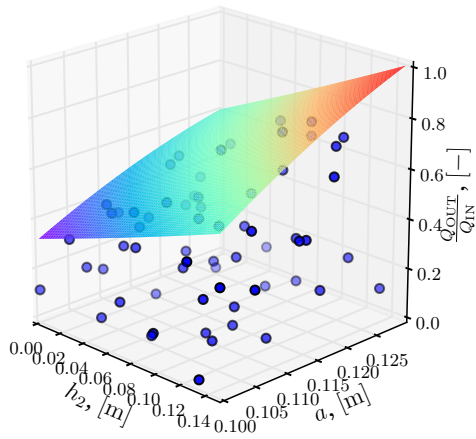
Po provedení počítačových experimentů bylo vytvořeno osm metamodelů, které jsou uvedeny na obr. 8.3 a 8.4. Hodnoty návrhových proměnných ležící ve zkoumaném prostoru v blízkosti maxima jsou uvedeny v tab. 8.4 a 8.5.



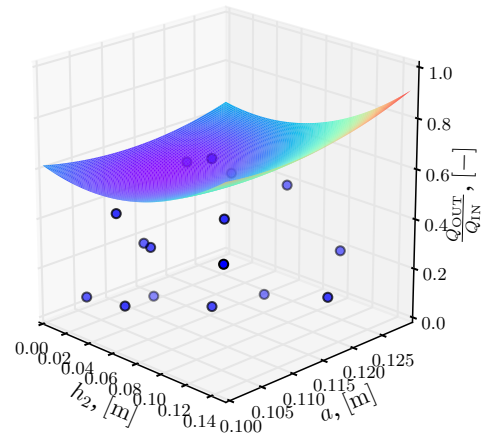
Obr. 8.3: Metamodely $Q_{\text{OUT}}/Q_{\text{IN}}$ 2D úlohy.

Tab. 8.4: Optimalizované hodnoty návrhových proměnných 2D úlohy.
Výška vnitřní stěny $h_1 = 0,1 \text{ m} = \text{konst.}$

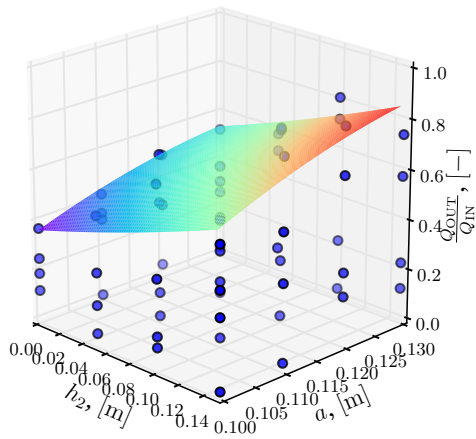
Proměnná / plán	HS 64	HS 16	UFP 4x4	UFP 3x3
h_2 , [m]	0,044	0,054	0,052	0,056
a , [m]	0,13	0,13	0,13	0,13



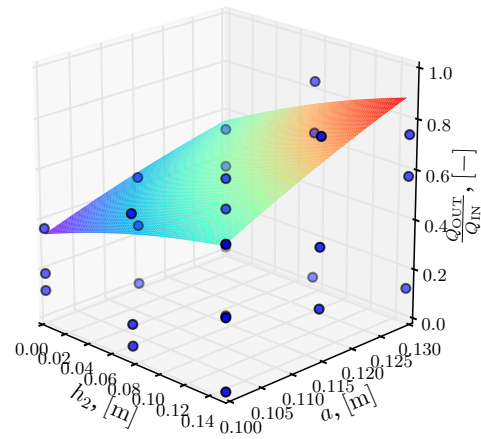
(a) HS 64



(b) HS 16



(c) UFP 4x4x4



(d) UFP 3x3x3

Obr. 8.4: Řezy metamodely $Q_{\text{OUT}}/Q_{\text{IN}}$ 3D úlohy pro $h_1 = 0,17$.

Tab. 8.5: Optimalizované hodnoty návrhových proměnných 3D úlohy.

Proměnná / plán	HS 64	HS 16	UFP 4x4x4	UFP 3x3x3
h_1 , [m]	0,17	0,17	0,17	0,17
h_2 , [m]	0,15	0,15	0,15	0,15
a , [m]	0,13	0,13	0,13	0,13

Pro hodnocení kvality metamodelů byl použit koeficient determinace, upravený koeficient determinace, průměrná absolutní a maximální absolutní chyba. Hodnoty použitých metrik jsou uvedeny v tab. 8.6.

Tab. 8.6: Hodnocení kvality metamodelů: koeficient determinace R^2 , upravený koeficient determinace R_{adj}^2 , průměrná absolutní chyba MAE a maximální absolutní chyba MAX .

2D úloha				
Koeficient / plán	HS 64	HS 16	UFP 4x4	UFP 3x3
R^2	0,920	0,886	0,934	0,978
R_{adj}^2	0,918	0,878	0,924	0,971
MAE	0,039	0,045	0,044	0,028
MAX	0,123	0,109	0,105	0,049
3D úloha				
Koeficient / plán	HS 64	HS 16	UFP 4x4x4	UFP 3x3x3
R^2	0,849	0,921	0,851	0,918
R_{adj}^2	0,841	0,901	0,844	0,908
MAE	0,066	0,045	0,071	0,055
MAX	0,176	0,094	0,250	0,159

Přestože nalezené hodnoty optimalizovaných parametrů a jim odpovídající geometrie korečků jsou si přibližně podobné s geometriemi nalezenými genetickým algoritmem, je zřejmé, že všechna nalezená řešení leží alespoň na jedné mezi intervalů optimalizovaných parametrů.

Z výsledků hodnocení kvality metamodelů je patrné, že v případě 2D úlohy vyšší hodnoty koeficientů determinace vypovídají o dobré globální aproximaci chování výpočtového modelu. Nicméně hodnoty lokálních odchylek (metriky MAE a MAX) mezi aproximací a výpočtem poukazují na skutečnost, že použití responzní plochy nedokáže ideálně vystihnout zkoumané chování výpočtového modelu. V případě 3D úlohy je tato skutečnost ještě patrnější. Zde je potřeba upozornit na experimentální plán HS 16, který byl zvolen zejména za účelem porovnání kvality metamodelu s 2D úlohou. Přestože nalezená řešení i hodnoty hodnotících metrik jsou si s ostatními plány podobné, tak s ohledem na počet nezávislých proměnných, komplexní chování aproximovaného výpočtového modelu a také na rozdílný „tvar“ metamodelu v řezu (viz obr. 8.4b), nelze doporučit použití tohoto experimentálního plánu.

V budoucnu bude nutné při tvorbě metamodelů zohlednit i vliv dalších parametrů, které ovlivňují chování výpočtového modelu korečkového dopravníku, a také bude pravděpodobně potřeba otestovat i použití jiné techniky metamodelování, např. umělých neuronových sítí.

Časy vypovídající o náročnosti tohoto přístupu jsou uvedeny v tab. 8.7, přičemž

z uvedených hodnot je ve srovnání s tab. 8.2 patrná výrazná časová úspora. Obdobně jako v předchozí podkapitole se i zde celkový čas skládá výhradně z výpočetního času.

Tab. 8.7: Vybrané časy metamodelování pro Intel® Core™ i7 CPU 960 (4 jádra).

Parametr / typ dopravníku	Odstředivý (2D úloha)	Gravitační (3D úloha)
Doba běhu simulace, [minuta]	30	20
HS 64, [hodina]	8,0	5,3
HS 16, [hodina]	2,0	1,3
UFP 4x4, resp. 4x4x4, [hodina]	2,0	5,3
UFP 3x3, resp. 3x3x3, [hodina]	1,1	2,3
Celkový čas (včetně analýzy metamodelů), [hodina]	14	15

9 DISKUZE DOSAŽENÝCH VÝSLEDKŮ

V souladu s plněním cíle práce bylo dosaženo určitých dílčích výsledků, které v této kapitole budou zhodnoceny. Celkově lze dosažené výsledky spolu s přínosy této práce rozdělit na teoretické a praktické.

9.1 Teoretické výsledky

Teoretické výsledky vycházejí z teoretických popisů prezentovaných v kapitole 3. Přínosem je provedené odvození pro analytický způsob popisu tvaru povrchu materiálu v korečku pro $\varphi = 0^\circ$ a $\varphi > 0^\circ$. Zároveň zde byla nastíněna skutečnost, že křivka vzniklá řezem povrchu materiálu v korečku kolmým na jeho osu otáčení nemusí obecně odpovídat logaritmické spirále, neboť φ lze definovat jako $\varphi = \arctan \frac{f(\sigma)}{\sigma}$, kde f je obecná funkce.

Přínosem je rovněž vytvoření Kelvin-Voigtova modelu lineárního viskoelastického materiálu, který je teoreticky vhodný pro popis chování jak homogenních, tak nehomogenních materiálů.

V rámci teoretických výsledků lze také uvést návrh a implementaci paralelizované verze generačního modelu genetického algoritmu spolu s ostrovním modelem.

9.2 Praktické výsledky

Praktické výsledky zahrnují zejména provedené implementace teoretických popisů, experimenty a validace. Zde je přínosem vytvořený výpočetní nástroj a implementace materiálového modelu v rámci open-source frameworku Yade pro modelování s použitím metody diskrétních prvků. Přínosem jsou také provedené validace včetně identifikace hodnot parametrů materiálových modelů.

V případě analytického popisu implementovaného do výpočetního nástroje se ukázalo, že je vhodný pro dobře tekoucí a nekohezivní materiály a pro velmi nízké rychlosti pohybu korečku, tj. přibližně do 0,1 m/s. Pro vyšší rychlosti, nebo v případě, že by materiál neopouštěl koreček plynule a spojitě, např. z důvodu jeho nalepování na stěnu, je použití tohoto popisu zcela nevyhovující.

Při validaci diskrétně-prvkového materiálového modelu se ukázala velmi dobrá shoda se všemi experimentálně získanými daty jak pro případ kulových částic, tak také pro případ shluků kulových částic, kterými byly aproximovány hrací kostky (čtyřstěny, šestistěny, osmistěny a dvanáctistěny). Dobrou shodu s experimenty také vykazoval model elastického materiálu se třením, pomocí kterého lze vytvořit přímo konvexní mnohostěn [15]. Za zmínku stojí i aproximace hracích kostek

kulovými částicemi, kdy po identifikaci vhodných hodnot parametrů (třecí úhel, rameno valivého odporu apod.) vykazoval i tento základní model dobrou shodu s experimenty. Nicméně, oproti změřeným hodnotám mechanicko-fyzikálních parametrů hracích kostek musely být hodnoty parametrů materiálových modelů upraveny. Dále je potřeba zdůraznit, že všechny identifikované hodnoty parametrů použitých materiálových modelů jsou platné pouze pro použité partikulární materiály (bílé plastové kuličky a hrací kostky) a materiály experimentálního zařízení, které během vyprazdňování korečku byly s výše uvedenými ve vzájemném kontaktu.

Nakonec je nutné zmínit dva ukázkové příklady optimalizace a porovnání jejich časové náročnosti. Jak v případě použití genetického algoritmu, tak v případě tvorby metamodelu bylo dosaženo vyhovujících výsledků, které korespondovaly s geometriemi korečků doporučenými normou ČSN 26 2008. Nicméně, v případě tvorby metamodelu bylo těchto výsledků dosaženo v řádově kratším čase - desítky hodin namísto desítek dnů. Problematikou zde však zůstává volba vhodné techniky metamodelování, neboť hodnoty lokálních metrik poukázaly na skutečnost, že použití responzních ploch nedokáže v návrhovém prostoru ideálně vystihnout zkoumané chování výpočtového modelu.

10 ZÁVĚR

Předkládaná disertační práce se zabývá studiem metod vhodných pro popis chování (ne)homogenních materiálů během jejich přepravy korečkovými dopravníky a dále vybranými způsoby optimalizace jejich konstrukce. Konkrétně byla pozornost věnována identifikaci teoretických popisů vhodných pro řešení problematiky toků a deformací zejména partikulárních materiálů, implementaci těchto popisů do výpočetního nástroje a výpočtových modelů, jejich experimentální validaci a následnému použití v ukázkové optimalizační úloze.

V práci byly prezentovány popisy, které lze zařadit do dvou přístupů - spojitý a diskrétní.

V rámci spojitého přístupu bylo provedeno odvození křivky vzniklé řezem povrchu materiálu v korečku kolmým na jeho osu otáčení. Jelikož toto odvození nebývá v dostupných publikacích uvedeno, může odvození zde provedené sloužit jako doplnění ke známé skutečnosti, že pro konstantní, ale nenulový úhel vnitřního tření se jedná o logaritmickou spirálu.

V rámci diskrétního přístupu byl s použitím frameworku Yade vytvořen poměrně univerzální materiálový model. Důraz byl kladen především na jednoduchost a srozumitelnost tohoto modelu, přičemž se ukázalo, že jej lze použít i pro popis chování deformovatelných těles. Výpočtové modely, ve kterých byl tento materiálový model použit, vykazovaly velmi dobrou shodu s experimenty.

Míra shody mezi simulovaným a změřeným průběhem vyprazdňování byla kvantifikována pomocí koeficientu korelace a koeficientu determinace, jejichž hodnoty se pohybovaly v rozmezí 0,365 – 0,909 při použití výpočetního nástroje a 0,894 – 0,996 při použití diskrétně-prvkových modelů.

Experimenty byly prováděny na „Zařízení pro kreativní systém tvorby matematických popisů obecných procesů“ a jednalo se o vyprazdňování korečku gravitačním způsobem. Průběhy experimentů byly zaznamenávány vysokorychlostní kamerou a pořízený záznam byl analyzován metodami pro zpracování obrazu. Výsledkem této analýzy byla identifikace vektorových polí okamžitých rychlostí pohybujícího se materiálu.

Jelikož výsledky simulací využívajících metody diskrétních prvků korespondovaly s experimenty ve větším rozsahu než analytické popisy, byly pro řešení ukázkové optimalizační úlohy vytvořeny dva výpočtové modely korečkového dopravníku. Jeden pro odstředivý způsob vyprazdňování (2D úloha - dva optimalizované parametry) a jeden pro gravitační způsob vyprazdňování (3D úloha - tři optimalizované parametry). V obou případech se jednalo o optimalizaci geometrie korečku.

Optimalizační metodou byl genetický algoritmus, a přestože nalezené geometrie korečku korespondovaly s geometriemi doporučenými normou ČSN 26 2008, použití

tohoto algoritmu poukázalo na výjimečnou časovou náročnost takového přístupu.

Za účelem snížení časové náročnosti optimalizace byl použit metamodeling. Následným vytvořením a použitím dvou sérií metamodelů v podobě responzních ploch bylo dosaženo podobných výsledků jako v případě použití genetického algoritmu, avšak v řádově kratším čase. Doba tvorby výpočtových modelů spolu s jejich validací nebyla do celkového času optimalizace zahrnuta, neboť je pro oba přístupy shodná. Zde je nutno zdůraznit, že použití této techniky optimalizace je spíše experimentální, neboť problematika tvorby metamodelů nad diskrétně-prvkovými modely nebyla doposud v dostupné literatuře dostatečně kriticky diskutována.

Vybrané výsledky získané při plnění cíle této práce byly publikovány v recenzovaném časopise [33] a na mezinárodních konferencích indexovaných v databázích Scopus a WoS [31, 41, 42].

Přínosem této práce je předložení doposud nepublikovaného přístupu k možnostem optimalizace korečkových dopravníků s využitím moderních výpočtových a optimalizačních metod. V práci je také přikládán význam experimentu a validaci vytvořených modelů.

Další výzkum v této oblasti bude spočívat v použití vytvořeného materiálového modelu pro popis chování kohezivních materiálů a identifikaci hodnot parametrů tohoto modelu pro danou aproximaci. Vzhledem k vysoké časové náročnosti prezentovaných DEM simulací bude nutné v brzké budoucnosti vytvořit nové implementace klíčových částí simulačního softwaru, které budou schopny využít dalších hardwarových prostředků, např. GPU. Je předpokládáno, že při dostatečném urychlení běhu těchto simulací bude možné optimalizaci vykonávat pro větší počet optimalizovaných parametrů a ve větším prostoru.

LITERATURA

- [1] ALLABY, A.; ALLABY, M. *A Dictionary of Earth Sciences*. Oxford University Press, 1999, 619 s. ISBN 9780192800794.
- [2] ALLEN, M. P.; TILDESLEY, D. J. *Computer simulation of liquids*. Oxford, Clarendon press, 1987.
- [3] BARKER, C. H.; FOOTLIK, I. M. *Industrial materials handling*. Cleveland, Lincoln Extension Institute, inc. 1950.
- [4] BIGOŠ, P.; KULKA, J.; KOPAS, M.; MANTIČ, M. *Teória a stavba zdvíhacích a dopravných zariadení*. TU v Košiciach, Strojnícká Fakulta 2012, 356 s., ISBN 978-80-553-1187-6.
- [5] BOON, C. W.; HOULSBY, G. T.; UTILI, S. A new algorithm for contact detection between convex polygonal and polyhedral particles in the discrete element method. In *Computers and Geotechnics*, Volume 44, 2012, Pages 73 - 82, DOI 10.1016/j.compgeo.2012.03.012.
- [6] CAGLI, A. a kol. Flow property measurement using the Jenike shear cell for 7 different bulk solids. In *Proceedings of European Congress of Chemical Engineering (ECCE-6)*. Copenhagen, 16-20 September 2007.
- [7] COLIJN, H. *Mechanical Conveyors for Bulk Solids*. 1st Ed. Amsterdam: Elsevier, 1985, 512 s.
- [8] COWIN, S. C. A theory for the flow of granular materials. In *Powder Technology*, Volume 9, Issues 2–3, February–March 1974, Pages 61-69, ISSN 0032-5910.
- [9] CUNDALL, P. A. *BALL - A program to model granular media using the distinct element method*. Technical Note, Advanced Technology Group, Dames & Moore, London.
- [10] CUNDALL, P. A.; STRACK, O. D. L. A discrete numerical model for granular assemblies. In *Geotechnique*. 1979. pages 47–65. DOI 10.1680/geot.1979.29.1.47.
- [11] CVEKL, Z.; DRAŽAN, F. a kol. *Teoretické základy transportních zařízení*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1976, s. 320.
- [12] DRAŽAN, F. a kol. *Teorie a stavba dopravníků*, skripta ČVUT v Praze, 1983.
- [13] DRAŽAN, F.; JEŘÁBEK, K. *Manipulace s materiálem*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1979, s. 456.

- [14] DRAŽAN, F.; KUPKA, L. *Transportní zařízení*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1966, s. 454.
- [15] ELIÁŠ, J. Simulation of railway ballast using crushable polyhedral particles. In *Powder Technology*, Volume 264, September 2014, Pages 458-465, ISSN 0032-5910.
- [16] FARNEBACK G. Fast and accurate motion estimation using orientation tensors and parametric motion models. In *Proceedings 15th International Conference on Pattern Recognition*. ICPR-2000, Barcelona, 2000, pp. 135-139 vol.1. doi: 10.1109/ICPR.2000.905291.
- [17] FEDA, J. *Základy mechaniky partikulárních látek*. 1. vyd. Praha: Academia, 1977, 347 s. : il.
- [18] FRIEND, D. H.; ELNAINAY, M. Y.; SHI, Y.; MCKENZIE, A. B. Architecture and Performance of an Island Genetic Algorithm-based Cognitive Network. In *Consumer Communications and Networking Conference*. 2008. CCNC 2008. 5th IEEE (10-12 Jan. 2008), 993 – 997.
- [19] GAJDŮŠEK, J.; ŠKOPÁN, M. *Teorie dopravních a manipulačních zařízení*. VUT Brno 1988.
- [20] GELNAR, D.; ZEGZULKA, J. Simulace (DEM) pohybu partikulární hmoty v aplikaci na konstrukci korečkového elevátoru. In *XXXVIII. Mezinárodní konference kateder dopravních, manipulačních, stavebních a zemědělských strojů*. 1. Plzeň, Západočeská univerzita v Plzni. 2012. p. 19-22. ISBN 978-80-261-0141-3.
- [21] GELNAR, D. *Verifikace a validace DEM modelů sypkých hmot v aplikaci na korečkové elevátory a možnosti řešení reálné situace v praxi při plnění a vyprazdňování korečků*. Ostrava: Institut dopravy, Fakulta strojní VŠB – Technická univerzita Ostrava, 2015, školitel: Zegzulka, J.
- [22] HRDINA, M. *Korečkový elevátor*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2007, 85 s. Vedoucí diplomové práce doc. Ing. Jiří Malášek, Ph.D.
- [23] HETZEL, F. V. *Belt conveyors and belt elevators*. New York, J. Wiley and Sons, 1922.
- [24] HÖHNER, D.; WIRTZ, S.; SCHERER, V. Experimental and numerical investigation on the influence of particle shape and shape approximation on hopper discharge using the discrete element method. In *Powder Technology*, Volume 235, February 2013, Pages 614-627, ISSN 0032-5910.

- [25] J. H. HOLLAND *Adaptation in natural and artificial systems: An introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence*. University of Michigan Press, 1975, ISBN 978-0-472-08460-9.
- [26] CHAKRABORTY, U. K.; DEB, K.; CHAKRABORTY, M. Analysis of Selection Algorithms: A Markov Chain Approach. In *Evolutionary Computation*. 1996, Volume 4, Issue 2, s. 133-167. ISSN 1063-6560.
- [27] IMMER, J. R. *Materials Handling*. New York 1953.
- [28] JASAŇ, V. Teória a stavba dopravníkov. TU Košice: Alfa Bratislava, 1984 s. 336.
- [29] JEDELSKÝ, P. *Korečkový elevátor*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2002, 69 s. Vedoucí diplomové práce Ing. Jiří Špička, CSc.
- [30] JIANG, M.; SHEN, Z.; WANG, J. A novel three-dimensional contact model for granulates incorporating rolling and twisting resistances, In *Computers and Geotechnics*, Volume 65, April 2015, Pages 147-163, ISSN 0266-352X.
- [31] JONÁK, M. Determining the influence of load near machine's component, caused by reshaped material. In *Mechatronics: Recent Technological and Scientific Advances*. Scientific Publishing Services Pvt. Ltd., Chennai, India: Springer - Verlag, Berlin Heidelberg, 2011. s. 723-727. ISBN: 978-3-642-23243-5.
- [32] JONÁK, M. Výpočetní nástroj pro popis toků a deformací partikulárních materiálů během procesu vyprazdňování korečku. In *XI. mezinárodní konference Dynamika tuhých a deformovatelných těles 2013*. Ústí nad Labem: FVTM UJEP, 2013. s. 1-8. ISBN: 978-80-7414-607-7.
- [33] JONÁK, M. Možnosti modelování toků partikulárních materiálů během vyprazdňování korečků korečkového dopravníku. In *Strojírenská technologie*, 2013, roč. 2013, č. 2, s. 63-67. ISSN: 1211-4162.
- [34] JONÁK, M.; KAŠPÁREK, J.; ŘEZNÍČEK, M. Numerická simulace pohybu nehomogenního materiálu. In *Dynamika tuhých a deformovatelných těles DTDT 2014 Sborník přednášek z XII. mezinárodní vědecké konference*. 1. Ústí Nad Labem: Univerzita J. E. Purkyně v Ústí n. L., 2014. s. 1-6. ISBN: 978-80-7414-749-4.
- [35] JONÁK, M.; KAŠPÁREK, J. Výpočtový model pružného kola využívající metody diskretních prvků a jeho validace. In *Dynamika tuhých a deformovatelných*

- těles DTDT 2015 Sborník přednášek z XIII. mezinárodní vědecké konference*. 1. Ústí Nad Labem: Univerzita J. E. Purkyně v Ústí n. L., 2015. s. 1-5. ISBN: 978-80-7414-914-6.
- [36] JONÁK, M.; MALÁŠEK, J. Popisy toků a deformací nehomogenních hmot. In *XXXVIII. Mezinárodní konference kateder dopravních, manipulačních, stavebních a zemědělských strojů*. 1. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2012. s. 47-50. ISBN: 978-80-261-0141-3.
- [37] JONÁK, M. Použití meta-heuristické optimalizační metody pro získání vybraných vstupních parametrů pro dem simulaci korečkového dopravníku v aplikaci na optimalizaci geometrie korečku. In *Sborník XXXIX. mezinárodní konference kateder dopravních, manipulačních, stavebních a zemědělských strojů*. Horní Bečva: Institut Dopravy, VŠB- TU Ostrava, 2013. s. 1-5. ISBN: 978-80-248-3124-4.
- [38] JONÁK, M.; KOTEK, L.; DRÁPAL, L. Numerická CFD-DEM simulace vstříkování paliva. In *Sborník XL. mezinárodní konference kateder dopravních, manipulačních, stavebních a zemědělských strojů*. Bílá: Institut dopravy, VŠB-TU, Ostrava, 2014. s. 1-5. ISBN: 978-80-248-3439-9.
- [39] JONÁK, M.; KAŠPÁREK, J.; MALÁŠEK, J.; ŘEZNÍČEK, M. DEM simulace procesu vyprazdňování korečku s použitím konvexních mnohostěnů. In *41. mezinárodní konference kateder dopravních, manipulačních, stavebních a zemědělských strojů*. Studentská 1402/2, Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2015. s. 12-17. ISBN: 978-80-7494-196-2.
- [40] JONÁK, M.; KOTEK, L.; DRÁPAL, L.; PÍŠTĚK, V. Modelling of the fuel flow out of the injection nozzle in the application for increasing the efficiency of the diesel fuel injection process. In *Proceeding of International Conference Transport Means 2014*. Transport Means. "Technologija", Studentu St. 54, LT-51424 Kaunas: Kaunas University of Technology, K. Donelaičio st. 73, LT- 44029 Kaunas, 2014. s. 173-176. ISSN: 1822-296X.
- [41] JONÁK, M.; KAŠPÁREK, J. Discrete computational model of a tire. In *Proceeding of International Conference Transport Means 2015*. Transport Means. "Technologija", Studentu St. 54, LT- 51424 Kaunas: Kaunas University of Technology, K. Donelaičio st. 73, LT- 44029 Kaunas, 2015. s. 341-344. ISSN: 2351-7034.
- [42] JONÁK, M.; KAŠPÁREK, J.; KOTEK, L. Experimental validation of a discrete tire model. In *Transport Means 2016: Proceeding of the 20th International*

- Scientific Conference. Transport Means. Kaunas, Litevská republika: Technologija, 2016. s. 741-744. ISSN: 1822-296X.*
- [43] JONÁK, M. Optimalizace geometrie korečku korečkového dopravníku s využitím metamodelů. In *TUNS 2017*. VŠB-TUO, Ostrava, 2017. s. 83-88. ISBN: 978-80-248-4030-7.
- [44] KUIPERS, L. a NIEDERREITER, H. *Uniform Distribution of Sequences*. Dover Publications, 2006, 390 s. ISBN 9780486450193.
- [45] KULWIEC, R. A. a American Society of Mechanical Engineers (ASME) & International Material Management Society (IMMS). *Materials Handling Handbook*. John Wiley & Sons, 1985, 1458 s. ISBN 9780471097822.
- [46] KRAUSE, F.; KATTERFELD, A. *Usage of the Discrete Element Method in Conveyor Technologies*. Magdeburg: The Otto-von-Guericke-University of Magdeburg, 2010.
- [47] LANDALE, D. Elevators and conveyors. In *Journal of the Institute of Brewing*, Volume 34, 1928, Pages 16-21, ISSN 2050-0416.
- [48] MACK, S.; LANGSTON, P.; WEBB, C.; YORK, T. Experimental validation of polyhedral discrete element model. In *Powder Technology*, Volume 214, Issue 3, 25 December 2011, Pages 431-442, ISSN 0032-5910.
- [49] MALÁŠEK, J. *Identifikace napjatosti, deformace a proudění v nehomogenních materiálech*. Brno: VUT v Brně, 2008, 28 s., Habilitační a inaugurační spisy, sv. 278. ISSN 1213-418X.
- [50] MALÁŠEK, J. Orientation of stress tensors in transformed matters. In *Engineering Mechanics*. 2006. Pages 224-225. ISBN 80-86246-27-2.
- [51] MALÁŠEK, J. VUT v Brně: Zařízení pro kreativní systém tvorby matematických popisů obecných procesů. 23722, užitečný vzor. Praha (2012).
- [52] MCBRIDE, W.; SINNOTT, M.; CLEARY, P. W. Discrete element modeling of a bucket elevator head pulley transition zone. In *Granular matter*. Volume 13:169–17. Springer-Verlag 2011. DOI 10.1007/s10035-010-0243-2.
- [53] MONTGOMERY, D. C. and RUNGER, G. C. *Applied Statistics and Probability For Engineers*. 3rd edition. John Wiley & Sons, 2003. p. 720. ISBN:04712045442017.

- [54] PATEL, S.; PATEL, S.; PATEL, J. Productivity Improvement of Bucket Elevator by Modified Design. In *International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering*. Volume 3. Issue 1. January 2013. ISSN 2250-2459.
- [55] POLÁK, J.; BAILOTTI, K.; PAVLISKA, J.; HRABOVSKÝ, L. Dopravní a manipulační zařízení II. Ostrava: VŠB – Technická univerzita Ostrava, 2003, s. 104. ISBN 80-248-0493-X.
- [56] POTYONDY, D.O.; CUNDALL P.A., A bonded-particle model for rock. In *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Volume 41, Issue 8, December 2004, Pages 1329-1364, ISSN 1365-1609.
- [57] POURNIN, L.; LIEBLING, TH. M.; MOCELLIN, A. Molecular-dynamics force models for better control of energy dissipation in numerical simulations of dense granular media. In *Phys. Rev.* (2001), E (65), pages 011302. DOI 10.1103/PhysRevE.65.011302.
- [58] PRICE, M.; MURARIU, V.; MORRISON, G. Sphere clump generation and trajectory comparison for real particles. In *Proceedings of Discrete Element Modelling 2007*. 2007.
- [59] RADEMACHER, F. J. C. Non-spill discharge characteristics of bucket elevators. In *Powder Technology*. Volume 22, Issue 2, March–April 1979, Pages 215-241.
- [60] ROZBROJ, J.; ZEGZULKA, J. Simulace (DEM) pohybu partikulární hmoty ve šnekovém dopravníku v aplikaci na konstrukci svislého šneku. In *XXXVIII. Mezinárodní konference kateder dopravních, manipulačních, stavebních a zemědělských strojů*. 1. Plzeň, Západočeská univerzita v Plzni. 2012. p. 135 - 138. ISBN 978-80-261-0141-3.
- [61] ROZBROJ, J. *Simulace (DEM) pohybu partikulární hmoty ve šnekovém dopravníku v aplikaci na konstrukci svislého šneku*. Disertační práce 2013, Ostrava: VŠB-TU Ostrava, 2013.
- [62] SIMPSON, T. W.; POPLINSKI, J. D.; KOCH, P. N.; ALLEN, J. K. Meta-models for Computer-based Engineering Design: Survey and recommendations. In *Engineering with Computers*. Volume 17, Issue 2, Jul 2001, Pages 129-150. ISSN 1435-5663.
- [63] ŠŤASTNÝ, A. *Modelování silových účinků působících na dopravní a manipulační zařízení s cílem jejich optimalizace*. Brno: Vysoké učení technické v Brně,

- Fakulta strojního inženýrství, 2015. 113 s. Vedoucí dizertační práce doc. Ing. Miroslav Škopán, CSc.
- [64] TANG, K. S.; MAN, K. F.; KWONG, S.; HE, Q. Genetic Algorithms and their Applications. In *IEEE Signal Processing Magazine*. 22-37. 1996.
- [65] TAVAREZ, F. A.; PLESHA, M. E. Discrete element method for modelling solid and particulate materials. In *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. Volume 70, Issue 4, pages 379–404, 23 April 2007.
- [66] TOURNIER, E. J. *Materials handling equipment*. New York: McGraw-Hill book company, inc., 1929. 1st ed.
- [67] WEISSER, R. Evoluční optimalizace řídicích algoritmů. Vysoké učení technické v Brně. Fakulta strojního inženýrství, 2010.
- [68] WHITLEY, D. A genetic algorithm tutorial. In *Statistics and Computing*. Volume 4, Issue 2, pages 65-85, 1994. ISSN: 1573-1375.
- [69] ZEGZULKA, J. *Mechanika sypkých hmot*. VŠB-TU Ostrava, 2004, 186 s. ISBN 80-248-0699-1.
- [70] ZHOU, Y. C.; WRIGHT, B. D.; YANG, R. Y.; XU, B. H.; YU, A. B. Rolling friction in the dynamic simulation of sandpile formation. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* (269), pages 536–553. 1999. DOI 10.1016/S0378-4371(99)00183-1.
- [71] ZUBÍK, P. *Integrální laserová anemometrie*. Vědecké spisy Vysokého učení technického v Brně , Edice PhD Thesis. Edice PhD Thesis, sv. 90. Brno: Vědecké spisy Vysokého učení technického v Brně, 2001. ISBN: 80-214-1965-2. ISSN: 1213-4198.
- [72] EDEM Software [online]. [cit. 2015-05-04]. Dostupné z: <http://www.dem-solutions.com/software/edem-software/>.
- [73] JONES, E., OLIPHANT, E., PETERSON, P., et al. SciPy: Open Source Scientific Tools for Python, 2001-, <http://www.scipy.org/> [Online; accessed 2017-08-29].
- [74] CFDEM project - Open Source CFD, DEM and CFD-DEM [online]. Dostupné z: <http://www.cfdem.com/liggghtsr-open-source-discrete-element-method-particle-simulation-code>.

- [75] Logarithmic Spiral - from Wolfram MathWorld [online]. Dostupné z: <http://mathworld.wolfram.com/LogarithmicSpiral.html>.
- [76] Mechanical Properties of Plastics [online]. Dostupné z: <http://www.professionalplastics.com/professionalplastics/MechanicalPropertiesofPlastics.pdf>
- [77] OpenCV (Open source computer vision) [online]. Dostupné z: <http://opencv.org>.
- [78] Paraview – Open Source Scientific Visualization [online]. Dostupné z: <http://www.paraview.org/>.
- [79] V. ŠMILAUER, E. CATALANO, B. CHAREYRE, S. DOROFEEENKO, J. DURIEZ, A. GLADKY, J. KOZICKI, C. MODENESE, L. SCHOLTÈS, L. SIBILLE, J. STRÁNSKÝ, AND K. THOENI. Yade Documentation (V. Šmilauer, ed.), The Yade Project, 1st ed., 2010. <http://yade-dem.org/doc/>.
- [80] Discrete element method [online]. Dostupné z http://en.wikipedia.org/wiki/Discret_element_method.
- [81] Genetic algorithm [online]. Dostupné z http://en.wikipedia.org/wiki/Genetic_algorithm.
- [82] Genetický algoritmus [online]. Dostupné z http://cs.wikipedia.org/wiki/Genetický_algoritmus.
- [83] Hill climbing [online]. Dostupné z https://en.wikipedia.org/wiki/Hill_climbing.
- [84] Gradientní algoritmus [online]. Dostupné z https://cs.wikipedia.org/wiki/Gradientní_algoritmus.
- [85] Leapfrog integration [online]. Dostupné z https://en.wikipedia.org/wiki/Leapfrog_integration.
- [86] Particle image velocimetry [online]. Dostupné z http://en.wikipedia.org/wiki/Particle_image_velocimetry.
- [87] wxWidgets: Cross-Platform GUI Library [online]. Dostupné z <https://www.wxwidgets.org/>.
- [88] ČSN 26 2008. Svislé korečkové elevátory - Základní parametry a rozměry. 8 s., Praha, 1993.
- [89] ČSN 26 2001. Zařízení pro plynulou dopravu nákladů - Korečkové a lavičkové elevátory - třídění. 9 s., Praha, 1994.

SEZNAM SYMBOLŮ, VELIČIN A ZKRATEK

a	vyložení korečku	[m]
\mathbf{a}	vektor dráhového zrychlení	[m·s ⁻²]
A	bod na křivce popisující tvar povrchu materiálu v korečku	
A	hrabací práce	[J]
A_h	měrná hrabací práce	[J·kg ⁻¹]
A_i	označení pro i -tou částici	
b	velikost mezery (experimentální zařízení)	[m]
B	bod na křivce popisující tvar povrchu materiálu v korečku	
c_n	koeficient tlumení v normálovém směru	[N·m ⁻¹ ·s]
c_t	koeficient tlumení v tečném směru	[N·m ⁻¹ ·s]
c_o	koeficient tlumení ve směru ohybu	[N·m·rad ⁻¹ ·s]
c_k	koeficient tlumení ve směru krutu	[N·m·rad ⁻¹ ·s]
c_k	součinitel rozteče korečků	[-]
d	průměr válce (experimentální zařízení)	[m]
f	součinitel tření	[-]
F_i	hodnota fitness funkce i -tého jedince	
\bar{F}	průměrná hodnota fitness funkce před selekcí	
\bar{F}^*	průměrná hodnota fitness funkce po selekci	
\mathbf{F}	síla - obecné označení	[N]
\mathbf{F}_n	normálová složka síly \mathbf{F}	[N]
\mathbf{F}_t	tečná složka síly \mathbf{F}	[N]
\mathbf{F}_{celk}	celková síla působící na částici	[N]
F_h	hrabací odpor	[N]
F_{hs}	střední hodnota hrabacího odporu	[N]

F_s	velikost odporu při násypném plnění	[N]
F_g	tíhová objemová síla	[N·m ⁻³]
F_o	odstředivá objemová síla	[N·m ⁻³]
F_v	výsledná objemová síla	[N·m ⁻³]
g	tíhové zrychlení	[m·s ⁻²]
G	tíhová síla	[N]
h_1	výška pádu materiálu	[m]
h_1	výška vnitřní stěny korečku	[m]
h_2	výška vnější stěny korečku	[m]
I	selekční tlak	[–]
I	moment setrvačnosti	[kg·m ²]
k	počet nezávislých proměnných	[–]
k_n	koeficient tuhosti v normálovém směru	[N·m ⁻¹]
k_t	koeficient tuhosti v tečném směru	[N·m ⁻¹]
k_o	koeficient tuhosti ve směru ohybu	[N·m·rad ⁻¹]
k_k	koeficient tuhosti ve směru krutu	[N·m·rad ⁻¹]
k_n	směrnice normály	[–]
k_t	směrnice tečny	[–]
K	kontaktní bod	
m	hmotnost materiálu v korečku	[kg]
m	hmotnost částice	[kg]
M	moment - obecné označení	[N·m]
M_1	moment působící na částici A_1	[N·m]
M_2	moment působící na částici A_2	[N·m]
M_o	složka momentu M kolmá na nositelku síly F_n	[N·m]

M_k	složka momentu M rovnoběžná s nositelkou síly F_n	$[N \cdot m]$
M_r	moment valivého odporu	$[N \cdot m]$
M_{celk}	celkový moment působící na částici	$[N \cdot m]$
MAE	průměrná absolutní chyba	
MAX	maximální absolutní chyba	
n^0	jednotkový normálový vektor roviny p	$[-]$
n	velikost populace	$[-]$
N	maximální počet iterací	$[-]$
O	počátek souřadného systému	
p	rovina průniku dvou interagujících částic	
P	pól	
P_h	příkon pro hrabání	$[W]$
p_{c_i}	pravděpodobnost křížení mezi jedinci	$[-]$
p_{m_i}	pravděpodobnost mutace genu jedince	$[-]$
p_{s_i}	pravděpodobnost výběru jedince	$[-]$
Q_{IN}	materiálový tok na vstupu	$[kg \cdot s^{-1}]$
Q_{OUT}	materiálový tok na výstupu	$[kg \cdot s^{-1}]$
r	polohový vektor (poloha částice)	$[m]$
R_i	poloměr i -té částice	$[m]$
R	koeficient korelace	$[-]$
R^2	koeficient determinace	$[-]$
R_1	poloměr - vzdálenost bodu ležícího na hraně vnější stěny korečku od O	$[m]$
R_2	poloměr - vzdálenost bodu ležícího na hraně vnitřní stěny korečku od O	$[m]$
REL	maximální relativní chyba	$[-]$
s	dráha hrany korečku	$[m]$

S_i	střed i -té částice	
SS_T	celková suma čtverců	
SS_M	suma čtverců modelu	
SS_E	suma čtverců reziduí	
Δt	časový krok	[s]
t_{α_0}	čas při natočení korečku o úhel α_0	[s]
t_{α_1}	čas při natočení korečku o úhel α_1	[s]
t_{α_2}	čas při natočení korečku o úhel α_2	[s]
t_k	rozteč korečků	[m]
\mathbf{T}_1	transformační matice mezi souřadným systémem (x_k, y_k) a (x, y)	[–]
\mathbf{T}_2	transformační matice mezi souřadným systémem (ρ, θ) a (x, y)	[–]
V_o	objem korečku	[m ³]
$\frac{V}{V_o}$	podíl množství materiálu v korečku během vyprazdňování	[–]
v	dopravní rychlost	[m·s ⁻¹]
\mathbf{v}	rychlost částice	[m·s ⁻¹]
v_1	dopadová rychlost materiálu	[m·s ⁻¹]
\mathbf{v}_1	rychlost částice A_1	[m·s ⁻¹]
\mathbf{v}_2	rychlost částice A_2	[m·s ⁻¹]
\mathbf{v}_{rel}	relativní rychlost dvou interagujících částic	[m·s ⁻¹]
\mathbf{v}_n	normálová složka \mathbf{v}_{rel}	[m·s ⁻¹]
\mathbf{v}_t	tečná složka \mathbf{v}_{rel}	[m·s ⁻¹]
x_i	hodnota vstupní proměnné	
y_i	skutečná hodnota výstupní proměnné	
\hat{y}_i	aproximovaná hodnota výstupní proměnné	
\bar{y}	průměrná hodnota výstupní proměnné	

z_k	počet současně hrabajících korečků	[—]
α	úhel natočení korečku - obecné označení	[rad], [°]
α_0	úhel natočení korečku v čase 0 s	[°]
α_1	úhel natočení korečku na začátku vyprazdňování	[°]
α_2	úhel natočení korečku na konci vyprazdňování	[°]
α	úhlové zrychlení	[rad·s ⁻²]
β_i	regresní koeficient	[—]
ϵ_M	chyba aproximace	
φ	úhel vnitřního tření	[rad], [°]
φ	orientace částice	[rad]
φ_{rel}	relativní orientace částice	[rad]
φ_n	normálová složka φ_{rel}	[rad]
φ_t	tečná složka φ_{rel}	[rad]
μ^+	parametr výběru jedince	[—]
μ^-	parametr výběru jedince	[—]
ω	úhlová rychlost	[rad·s ⁻¹]
ω_i	úhlová rychlost i -té částice	[rad·s ⁻¹]
ω_{rel}	relativní úhlová rychlost dvou interagujících částic	[rad·s ⁻¹]
ω_n	normálová složka ω_{rel}	[rad·s ⁻¹]
ω_t	tečná složka ω_{rel}	[rad·s ⁻¹]
ψ	součinitel plnění	[—]
$\bar{\psi}$	střední součinitel plnění	[—]
γ_v	objemová hmotnost	[kg·m ⁻³]
ρ_γ	hustota	[kg·m ⁻³]
ρ	vzdálenost bodu na povrchu materiálu v korečku od pólu P	[m]

σ	normálové napětí	[Pa]
σ^*	rozptyl hodnot fitness funkce po selekci	
τ	smykové napětí	[Pa]
θ	úhel mezi kladným směrem osy x_P a úsečkou ρ	[rad]

CFD Výpočtové modelování proudění tekutin – Computational fluid dynamics

DEM Metoda diskretních prvků – Discrete element method

GA Genetický algoritmus – Genetic algorithm

GPU Grafický procesor – Graphics processing unit

HS Haltonova sekvence

L-BFGS-B „Limited-memory“ Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno algoritmus

STL Standard template library – standardní knihovny pro jazyk C/C++

UFP Úplný faktorový plán

Yade Yet Another Dynamic Engine

PUBLIKACE AUTORA DISERTAČNÍ PRÁCE

Prvoautorské

JONÁK, M. Determining the influence of load near machine's component, caused by reshaped material. In *Mechatronics: Recent Technological and Scientific Advances*. Scientific Publishing Services Pvt. Ltd., Chennai, India: Springer - Verlag, Berlin Heidelberg, 2011. s. 723-727. ISBN: 978-3-642-23243-5.

JONÁK, M.; MALÁŠEK, J. Popisy toků a deformací nehomogenních hmot. In *XXXVIII. Mezinárodní konference kateder dopravních, manipulačních, stavebních a zemědělských strojů*. 1. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2012. s. 47-50. ISBN: 978-80-261-0141-3.

JONÁK, M. Výpočetní nástroj pro popis toků a deformací partikulárních materiálů během procesu vyprazdňování korečku. In *XI. mezinárodní konference Dynamika tuhých a deformovatelných těles 2013*. Ústí nad Labem: FVTM UJEP, 2013. s. 1-8. ISBN: 978-80-7414-607-7.

JONÁK, M. Možnosti modelování toků partikulárních materiálů během vyprazdňování korečků korečkového dopravníku. In *Strojírenská technologie*, 2013, roč. 2013, č. 2, s. 63-67. ISSN: 1211-4162.

JONÁK, M. Použití meta-heuristické optimalizační metody pro získání vybraných vstupních parametrů pro dem simulaci korečkového dopravníku v aplikaci na optimalizaci geometrie korečku. In *Sborník XXXIX. mezinárodní konference kateder dopravních, manipulačních, stavebních a zemědělských strojů*. Horní Bečva: Institut Dopravy, VŠB- TU Ostrava, 2013. s. 1-5. ISBN: 978-80-248-3124-4.

JONÁK, M.; KOTEK, L.; DRÁPAL, L. Numerická CFD-DEM simulace vstřikování paliva. In *Sborník XL. mezinárodní konference kateder dopravních, manipulačních, stavebních a zemědělských strojů*. Bílá: Institut dopravy, VŠB-TU, Ostrava, 2014. s. 1-5. ISBN: 978-80-248-3439-9.

JONÁK, M.; KAŠPÁREK, J.; ŘEZNÍČEK, M. Numerická simulace pohybu nehomogenního materiálu. In *Dynamika tuhých a deformovatelných těles DTDT 2014 Sborník přednášek z XII. mezinárodní vědecké konference*. 1. Ústí Nad Labem: Univerzita J. E. Purkyně v Ústí n. L., 2014. s. 1-6. ISBN: 978-80-7414-749-4.

JONÁK, M.; KOTEK, L.; DRÁPAL, L.; PÍŠTĚK, V. Modelling of the fuel flow out of the injection nozzle in the application for increasing the efficiency of the diesel fuel injection process. In *Proceeding of International Conference Transport Means 2014*. Transport Means. "Technologija", Studentu St. 54, LT- 51424 Kaunas: Kaunas University of Technology, K. Donelaičio st. 73, LT- 44029 Kaunas, 2014. s. 173-176. ISBN: 9955-09-935- 6. ISSN: 1822-296X.

JONÁK, M.; KAŠPÁREK, J.; MALÁŠEK, J.; ŘEZNÍČEK, M. DEM simulace procesu vyprazdňování korečku s použitím konvexních mnohostěnů. In *41. mezinárodní konference kateder dopravních, manipulačních, stavebních a zemědělských strojů*. Studentská 1402/2, Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2015. s. 12-17. ISBN: 978-80-7494-196-2.

JONÁK, M.; KAŠPÁREK, J. Discrete computational model of a tire. In *Proceeding of International Conference Transport Means 2015*. Transport Means. "Technologija", Studentu St. 54, LT- 51424 Kaunas: Kaunas University of Technology, K. Donelaičio st. 73, LT- 44029 Kaunas, 2015. s. 341-344. ISSN: 1822-296X.

JONÁK, M.; KAŠPÁREK, J. Výpočtový model pružného kola využívající metody diskretních prvků a jeho validace. In *Dynamika tuhých a deformovatelných těles DTDT 2015 Sborník přednášek z XIII. mezinárodní vědecké konference*. 1. Ústí Nad Labem: Univerzita J. E. Purkyně v Ústí n. L., 2015. s. 1-5. ISBN: 978-80-7414-914-6.

JONÁK, M.; KAŠPÁREK, J.; KOTEK, L. Experimental validation of a discrete tire model. In *Transport Means 2016: Proceeding of the 20th International Scientific Conference*. Transport Means. Kaunas, Litevská republika: Technologija, 2016. s. 741-744. ISSN: 1822-296X.

JONÁK, M. Optimalizace geometrie korečku korečkového dopravníku s využitím metamodelů. In *TUNS 2017*. VŠB-TU, Ostrava, 2017. s. 83-88. ISBN: 978-80-248-4030-7.

Spoluautorské

KILKOVSKÝ, B.; JEGLA, Z.; JONÁK, M. Comparison of methods for fluid pressure drop calculation in 180 deg elbows. In *Proceedings of the 19th International Congress of Chemical and Process Engineering CHISA 2010*. Praha: Process Engi-

neering Publisher, Ing. Jan Novosad, 2010. s. 1194 (s.)ISBN: 978-80-02-02248-0.

ŘEZNÍČEK, M.; JONÁK, M.; ŠKOPÁN, M. Výukové pracoviště měření vibrací – optický přístup. In *Sborník XL. mezinárodní konference kateder dopravních, manipulačních, stavebních a zemědělských strojů*. Bílá: Institut dopravy, VŠB-TU, Ostrava, 2014. s. 1-7. ISBN: 978-80-248-3439-9.

KOTEK, L.; JONÁK, M.; DRÁPAL, L.; PÍŠTĚK, V. High-speed inspection and visualization of fuel injection in the large combustion chamber. In *Proceeding of International Conference Transport Means 2014*. Transport Means. Kaunas Univ Technol, Kaunas, LITHUANIA: Kaunas univ technology press, K Donelaicio 73, Kaunas Lt 3006, Lithuania, 2014. s. 59-62. ISBN: 9955-09-935- 6. ISSN: 1822- 296X.

KOTEK, L.; PÍŠTĚK, V.; JONÁK, M. Bivariate Process Capability Analysis of Fuel Injection Nozzles Production. *WSEAS Journal Transactions on Environment and Development*, 2014, roč. 2014, č. 10, s. 492-495. ISSN: 1790-5079.

ŠKOPÁN, M.; KAŠPÁREK, J.; JONÁK, M.; POKORNÝ, P.; ULRICH, R.; NOVOTNÝ, V. *Zpráva o postupu prací a dosažených výsledcích při řešení projektu TA04020087 "Vývoj a výroba variabilního vyvážecího traktoru se zaměřením na ekologickou čistotu prací a efektivní zpracování biomasy v lesním hospodářství" za rok 2014*. Hrabová 50: Strojírna Novotný, s.r.o., 2014. s. 1-16.

ŠKOPÁN, M.; KAŠPÁREK, J.; POKORNÝ, P.; JONÁK, M. *Průběžná zpráva o postupu prací a dosažených výsledcích při řešení projektu TA04020087 "Vývoj a výroba variabilního vyvážecího traktoru se zaměřením na ekologickou čistotu prací a efektivní zpracování biomasy v lesním hospodářství" za rok 2014*. Hrabová 50: Strojírna Novotný, s.r.o., 2014. s. 1-16.

KAŠPÁREK, J.; JONÁK, M. Předpoklady tvorby modelu pružného kola. In *Dynamika tuhých a deformovatelných těles DTD 2014 Sborník přednášek z XII. mezinárodní vědecké konference*. 1. Ústí Nad Labem: Univerzita J. E. Purkyně v Ústí n. L., 2014. s. 1-8. ISBN: 978-80-7414-749-4.

KAŠPÁREK, J.; JONÁK, M. Advanced approaches for modeling of a virtual terrain. In *Proceeding of International Conference Transport Means 2015*. Transport Means. Kaunas Univ Technol, Kaunas, LITHUANIA: Kaunas univ technology press, K Donelaicio 73, Kaunas Lt 3006, Lithuania, 2015. s. 37-40. ISSN: 1822-296X.

KAŠPÁREK, J.; JONÁK, M.; ŠKOPÁN, M.; POKORNÝ, P. Vliv polohy břemene na zatěžování rámu vyvážecího stroje. In *41. Mezinárodní konferenci kateder dopravních, manipulačních, stavebních a zemědělských strojů*. 55-18- 15. Studentská 1402/2, Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2015. s. 72-77. ISBN: 978-80-7494-196-2.

KOTEK, L.; SEMANOVÁ, P.; SUJOVÁ, E.; DADO, M.; KUČERA, M.; HNILICA, R.; JONÁK, M. Effects of a Cutting Fluid on Aerosol Size Distribution during Turning. In *Manufacturing TECHNOLOGY*, 2015, roč. 13, č. 3, s. 367-373. ISSN: 1213-2489.

KAŠPÁREK, J.; JONÁK, M. Předpoklad tvorby virtuálního terénu pro dynamickou simulaci v MBS. In *XIII. mezinárodní konference Dynamika tuhých a deformovatelných těles 2015 - Sborník přednášek*. Ústí nad Labem: Univerzita Jana Evangelisty Purkyně, 2015. s. 1-6. ISBN: 978-80-7414-914-6.

KAŠPÁREK, J.; ŠKOPÁN, M.; JONÁK, M.; POKORNÝ, P. Experimental verification of FEM analysis of the forestry forwarder. In *Transport Means 2016: Proceeding of the 20th International Scientific Conference*. Transport Means. Kaunas, Litevská republika: Technologija, 2016. s. 751-755. ISSN: 1822-296X.

KAŠPÁREK, J.; JONÁK, M.; POKORNÝ, P. Tenzometrické ověření napěťových stavů predikovaných FEM analýzou na lesním vyvážecím stroji. In *XIV. mezinárodní konference Dynamika tuhých a deformovatelných těles 2016 - Sborník přednášek*. Ústí nad Labem: Univerzita Jana Evangelisty Purkyně, 2016. s. 1-7. ISBN: 978-80-7561-016-4.

KOTEK, L.; JONÁK, M.; PÍŠTĚK, V.; DRÁPAL, L.; TRÁVNÍČEK, P. Design and verification of a large combustion chamber for testing of fuel injection nozzles. In *Transport Means 2016: Proceeding of the 20th International Scientific Conference*. Transport Means. Kaunas, Litevská republika: Technologija, 2016. s. 997-1000. ISSN: 1822-296X.

KAŠPÁREK, J.; ŠKOPÁN, M.; JONÁK, M. Simulace pásového podvozku prototypu vyvážecího stroje. In *Zborník príspevkov 42. medzinárodnej vedeckej konferencie kateder dopravných, manipulačných, stavebných a poľnohospodárskych strojov*. prvá. Kočovce, Slovenská republika: STU Bratislava, Slovenská republika, 2016. s. 59-64. ISBN: 978-80-227-4584-0.

KOTEK, L.; ŤAVODOVÁ, M.; JONÁK, M.; KALINCOVÁ, D.; TŮMA, Z.; SUJOVÁ, E. Using Of High Speed Motion Analysis For Compression Test Of Motorcycle Forks Arm. In *Proceedings of the 2016 17th International Conference on Mechatronics - Mechatronika, ME 2016*. 1. Prague: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2016. s. 1-4. ISBN: 978-1-5090-1303-6.

KAŠPÁREK, J.; ŠKOPÁN, M.; JONÁK, M.; POKORNÝ, P. *Výzkum variabilního vyvážecího traktoru LVS 511*. Mendlova univerzita v Brně: Mendlova univerzita v Brně, 2017. 196 s. ISBN: 978-80-263-1086-0.