TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta přírodovědně-humanitní
a pedagogická

„Batman decomposition“ symetrické indefinitní matice

Bakalářská práce

Studijní program: B1101 – Matematika
Studijní obory: 7504R015 – Matematika se zaměřením na vzdělávání
7507R036 – Anglický jazyk se zaměřením na vzdělávání

Autor práce: **Kateřina Stolínová**
Vedoucí práce: Martin Plešinger

Liberec 2018

TECHNICAL UNIVERSITY OF LIBEREC
Faculty of Science, Humanities
and Education

“Batman decomposition” of a symmetric indefinite matrix

Bachelor thesis

Study programme: B1101 – Mathematics
Study branches: 7504R015 – Mathematics for Education
7507R036 – English for Education

Author: **Kateřina Stolínová**
Supervisor: Martin Plešinger

Liberec 2018

Technická univerzita v Liberci
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Akademický rok: **2016/2017**

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Kateřina Stolínová**
Osobní číslo:	**P15000332**
Studijní program:	**B1101 Matematika**
Studijní obory:	**Matematika se zaměřením na vzdělávání**
	Anglický jazyk se zaměřením na vzdělávání
Název tématu:	**"Batman decomposition" symetrické indefinitní matice**
Zadávající katedra:	**Katedra matematiky a didaktiky matematiky**

Zásady pro vypracování:

S potřebou řešit soustavy se symetrickou indefinitní maticí, tzv. sedlobodové soustavy, se setkáváme v mnoha aplikacích od optimalizačních úloh, přes úlohy nejmenších čtverců, až po úlohy spojené s řešením parciálních diferenciálních rovnic. Kromě krylovovských iteračních metod pro řešení takových soustav existuje i řada přístupů postavených na rozkladu sedlobodové matice. Tyto rozklady se často snaží využít podobný přístup jaký známe z Choleského rozkladu pozitivně definitní matice. Tedy, rozložit indefinitní matici na součin horní a dolní trojúhelníkové matice, proložený navíc nějakou kvazidiagonální maticí. Poněkud odlišný přístup představuje tzv. Batman decomposition.

Bakalářská práce čtenáře seznámí se základními vlastnostmi indefinitních matic, zejména s pojmem inercie a se Sylvestrovým zákonem setrvačnosti kvadratických forem. Dále vysvětlí, co to je tzv. Batman decomposition symetrické indefinití matice, a ukáže, že tento rozklad existuje. Vysvětlí a popíše strukturu rozkladu ve vztahu k vlastnostem matice.

Základní znalosti z lineární algebry, základní znalost anglického jazyka. Práce by měla být psána tak, aby mohla celá, nebo její části, sloužit jako materiál pro úvod do studia dané problematiky. Práce by měla být psaná v LaTeXu, bude-li to v možnostech studenta.

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

G. H. Golub, C. F. Van Loan:
Matrix Computations (Fourth Edition),
Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 2012.
https://jhupbooks.press.jhu.edu/content/matrix-computations-0

I. Gohberg, P. Lancaster, L. Rodman:
Indefinite Linear Algebra and Applications,
Birkhäuser Verlag, Basel, Switzerland, 2005.
http://www.springer.com/us/book/9783764373498
http://dx.doi.org/10.1007/b137517

N. Mastronardi, P. Van Dooren:
The antitriangular factorization of symmetric matrices,
SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications,
Volume 34, Number 1 (2013), pp. 173-196. (24 pages)
http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/110858860
http://dx.doi.org/10.1137/110858860

J. Pestana, A. J. Wathen:
The antitriangular factorization of saddle point matrices,
SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications,
Volume 35, Number 2 (2014), pp. 339-353. (15 pages)
http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/130934933
http://dx.doi.org/10.1137/130934933

Vedoucí bakalářské práce: **Ing. Martin Plešinger, Ph.D.**
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Datum zadání bakalářské práce: **7. března 2017**
Termín odevzdání bakalářské práce: **2. května 2018**

prof. RNDr. Jan Picek, CSc.
děkan

L.S.

Technická univerzita v Liberci - 10 -

doc. RNDr. Jaroslav Mlýnek, CSc.
vedoucí katedry

V Liberci dne 15. března 2017

Prohlášení

Byla jsem seznámena s tím, že na mou bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé bakalářské práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li bakalářskou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědoma povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Bakalářskou práci jsem vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím mé bakalářské práce a konzultantem.

Současně čestně prohlašuji, že tištěná verze práce se shoduje s elektronickou verzí, vloženou do IS STAG.

Datum:

Podpis:

Anotace

V práci nejprve zopakujeme vybrané základních pojmy, zejména vlastní čísla symetrických (obecně indefinitních) matic a kvadratické formy. Pak se zaměříme na vybrané zajímavé podprostory týkající se symetrických matic. Konkrétně tzv. nulový prostor, neutrální podprostor, nezáporný a nekladný podprostor. V práci ukážeme, že ne všechny tyto podprostory jsou dány jednoznačně, ale vždy je umíme zvolit tak, že např. první tři zmiňované jsou postupně svými podprostory. Toho využijeme k volbě vhodné ortonormální báze těchto podprostorů a jejich ortogonálních doplňků. Nakonec ukážeme, že takto zkonstruovaná báze (po drobných úpravách), resp. ortogonální matice, která má tyto bázové vektory jako sloupce, transformuje původní symetrickou matici na tzv. dolní blokově antitrojúhelníkový tvar. Odpovídající rozklad nazýváme Batman decomposition.

Klíčová slova:

symetrická matice; kvadratická forma; definitnost; vlastní čísla; inercie; Batman decompostion (rozklad zobrazující inercii)

Abstract

First we recapitulate some basic concepts such as eigenvalues of symmetric (in general indefinite) matrices and quadratic forms. Then, we focuse mainly on selected interesting subspaces related to symmetric matrices. Specifically, the so-called null-space, neutral subspace, nonnegative, and nonpositive subspaces. In the thesis we show that not all of these subspaces are given uniquely, in general, but we are always able to choose them in such a way that, e.g. the first three of above mentioned spaces are nested. We will use that for a choice of suitable orthonormal basis of these subspaces and their orthogonal complements. Finally, we show that a basis constructed like that (after small modifications), more precisely the orthogonal matrix having those basis vectors as columns, transforms original symmetric matrix into so-called lower block antitriangular form. We call the corresponding decomposition the Batman decomposition.

Key words:

symmetric matrix; quadratic form; definiteness; eigenvalues; inertia; Batman decompostion (lower antitriangular decomposition)

Poděkování

Ráda bych poděkovala vedoucímu této bakalářské práce Martinu Plešingerovi za jeho ochotu, cenné rady a připomínky a za čas, který mi při tvoření této práce věnoval. V neposlední řadě bych chtěla také poděkovat své rodině a blízkým za pomoc a podporu během studia.

Obsah

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Použité značení a zkratky

V textu značíme

vektory	pomocí malých písmen x, y, u, v, w, z atd.,
matice	pomocí velkých písmen A, B, H, M, Q, R, U, W, X, Y, Z atd.,
koeficienty	pomocí malých řeckých písmen α, β, γ, δ, λ atd.,
prostory	pomocí velkých písmen psaných Scriptem $\mathscr{U}_0$, $\mathscr{U}_N$, $\mathscr{U}_+$, $\mathscr{U}_-$, $\mathscr{N}$ atd.

Pomocí malých písmen také značíme prvky matic a vektory. Speciální význam pak mají písmena i, j apod., jimiž zpravidla indexujeme prvky matic a vektorů, a k, m, n, r, která používáme k označení řádu matice či vektoru.

Matice a vektory

Značení	**Význam**
$A \in \mathbb{R}^{n\times m}$	reálná matice s rozměry n krát m s prvky $a_{i,j}$
$A \in \mathbb{C}^{n\times m}$	komplexní matice s rozměry n krát m s prvky $a_{i,j}$
$(A)_{i,j} = a_{i,j}$	(i, j)-tý prvek matice A
A^T	transpozice matice A
A^{-1}	inverzní matice k regulární matici A
$\overline{A}$	komplexně sdružená matice k matici A
$A^* = (\overline{A})^T$	hermitovsky sdružená matice k matici A
I, I_n	jednotková matice (řádu n)
$\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$	diagonální matice s prvky $a_1, \ldots, a_n$ na diagonále
$\mathrm{rank}(A)$	hodnost matice definovaná jako počet lineárně nezávislých řádků,resp. sloupců matice A
$\|x\|$	norma vektoru $x = [\xi_1, \ldots, \xi_n]^T$, $\|x\| = (\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2)^{\frac{1}{2}}$
$|\xi|$	absolutní hodnota čísla
$\mathrm{sgn}(\xi)$	znaménková funkce (reálného) čísla, $\mathrm{sgn}(\xi) = \xi/|\xi|$
$\min(m, n)$	minimum z čísel m a n
$\max(m, n)$	maximum z čísel m a n

Vlastní čísla

Značení	**Význam**
λ, λ_j	vlastní číslo matice A (j-té vlastní číslo matice A)
$\mathrm{sp}(A)$	spektrum matice A, tj. množina všech vlastních čísel matice A
n_0	počet nulových vlastních čísel symetrické matice A
n_+	počet kladných vlastních čísel symetrické matice A
n_-	počet záporných vlastních čísel symetrické matice A
$\mathrm{in}(A)$	inercie matice A, tj. uspořádaná trojice počtu po řadě kladných, záporných a nulových vlastních čísel symetrické matice A
$\mathrm{sg}(A)$	signatura matice A, tj. rozdíl počtu kladných a záporných vlastních čísel symetrické matice A
$\mathcal{Q}_A(x)$	kvadratická forma daná symetrickou maticí A, $\mathcal{Q}_A(x) = x^T Ax$

Prostory

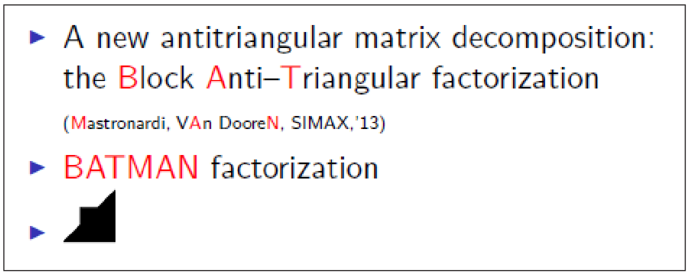
Značení	**Význam**
$\dim(\mathscr{S})$	dimenze prostoru $\mathscr{S}$
$\mathscr{S} \subseteq \mathscr{T}$	prostor $\mathscr{S}$ je podprostorem prostoru $\mathscr{T}$
$\mathscr{S} \subsetneq \mathscr{T}$	prostor $\mathscr{S}$ je vlastním podprostorem prostoru $\mathscr{T}$
$\mathscr{S}^\perp$	ortogonální doplněk prostoru $\mathscr{S}$
$\mathscr{R}(A)$	obor hodnot matice A, tj. lineární obal sloupců matice A
$\mathscr{U}_0 = \mathscr{N}(A)$	nulový prostor matice A
$\mathscr{U}_N$	neutrální prostor symetrické matice A
$\mathscr{U}_+$	nezáporný prostor symetrické matice A
$\mathscr{U}_-$	nekladný prostor symetrické matice A

Úvod

V nedávné době byl publikován nový typ rozkladu čtvercové reálné symetrické, obecně indefinitní, matice A, který takovou matici rozkládá na součin tvaru

$$A = QMQ^T,$$

kde Q je ortogonální a M dolní antitrojúhelníková, viz [7], [8], [9], [10], a další. Nazývá se tedy transformací (nebo rozkladem) na dolní blokově antitrojúhelníkovou (trojúhelníková vzhledem k vedlejší diagonále) matici, případně také „Batman decomposition“ (což nebudeme překládat). Neformální název rozkladu odkazující k Batmanovi lze nalézt v prezentacích autorů rozkladu (údajně se vztahuje k tvaru, který má výsledná matice a který prý připomíná letícího Batmana, viz třetí odrážka ve výřezu prezentace na obrázku 1), ale i např. v článku [10].



Obrázek 1: Ukázka z úvodu prezentace [6]. Batman v názvu rozkladu může být akronymem, ale může odkazovat i k vizuální podobnosti tvaru matice a stínu letícího Batmana.

Cílem práce je zkonstruovat tento rozklad pro obecnou symetrickou matici pomocí základních nástrojů, které známe ze základního kurzu lineární algebry. Vysvětlit jednotlivé kroky tak detailně, abychom byli schopni snadno dokázat, že rozklad vždy existuje, a abychom mohli zformulovat větu o Batman decomposition symetrické matice. Uvidíme, že matice M má navíc jistou blokovou strukturu a pro nás bude důležité porozumět vlastnostem jednotlivých bloků.

Symetrické matice jsou důležitou třídou matic a soustavy se symetrickými indefinitními maticemi, často ve tvaru tzv. sedlobodových matic

$$\begin{bmatrix} K & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

kde K je symetrická pozitivně definitní a B má lineárně nezávislé sloupce, se objevují v řadě praktických problémů, viz zejména [1, sekce 2]. Batman decomposition tak doplňuje řadu dalších rozkladů symetrických matic jako jsou Choleského rozklad a rozklady Bunche, Parletta a Kaufmannové (rozklady tvarů $A = LL^T$, $A = LDL^T$, $A = LTL^T$, kde L je dolní trojúhelníková, D je blokově diagonální se čtvercovými bloky řádů 1 resp. 2 na diagonále a T je třídiagonální), viz např. [2, sekce 4.4 a 4.5].

Poznamenejme, že dle článku [10] hraje Batman decomposition také následující důležitou roli, volně parafrázováno:

> Tak jako lze algoritmus Gaußovy eliminační metody interpretovat jako LU rozklad matice, tak Batman decomposition představuje maticový rozklad odpovídající algoritmu tzv. *metody projekce na nulový prostor* (*null-space method*) používanému při řešení indefinitních soustav.

Doslova autoři píší:

> In other words, the antitriangular factorization allows the nullspace method to be represented not just as a procedure but also as a matrix decomposition, similar to other well-known methods for solving linear systems like Gaussian elimination.

viz [10, str. 340].

Práce postupně v kapitole 1 zrekapituluje několik základních, ale důležitých konceptů z lineární algebry. Konkrétně pojem vlastního čísla, Schurovu větu a její důsledky pro čtvercové matice. V kapitole 2 připomene pojem kvadratické formy, inercie a pojmy související a zejména zákon setrvačnosti kvadratických forem. Dále v kapitole 3 se seznámíme se čtyřmi důležitými podprostory symetrické matice – nulový prostor, neutrální prostor, nezáporný prostor a nekladný prostor. Zkonstruujeme jejich báze a vysvětlíme, proč jsou některé z prostorů určené nejednoznačně.

V kapitole 4 práce vysvětlí, že zmiňované podprostory jdou vhodně zvolit tak, aby byly některé z výše jmenovaných prostorů svými podprostory. Ukáže, jak z jejich bází sestrojit ortogonální matici, která bude transformovat danou symetrickou matici tak, že výsledkem bude právě požadovaný tvar. Transformace bude v této kapitole po částech rozebraná tak, aby bylo jasné, jak funguje. Na závěr kapitoly zformulujeme větu o Batman decomposition, jejíž důkaz přímo vyplyne z diskuze v předcházejícím textu.

1 Vlastní čísla symetrických matic

V této kapitole se budeme věnovat zejména spektrálním vlastnostem reálných symetrických matic. Nejprve si však musíme připomenout některé základní pojmy a další znalosti ze základního kurzu algebry tak, abychom v dalších kapitolách byli schopni bez problémů pochopit konstrukci samotného rozkladu „Batman decomposition“.

1.1 Základní pojmy

Začněme tedy ujasněním základních pojmů, které budeme v této práci využívat. Jedním z důležitých pojmů lineární algebry, který je pro nás zcela klíčový, je pojem symetrické matice.

Definice 1. *Symetrickou maticí budeme rozumět čtvercovou matici A s reálnými prvky $(A)_{i,j} = a_{i,j}$, které navíc splňují $a_{i,j} = a_{j,i}$, tj.*

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \textit{tj.} \quad A = A^T, \tag{1.1}$$

tedy matice A se po záměně sloupců za řádky (transpozici) nezmění.

Dalšími pojmy, které jsou zásadní pro naše téma a budeme je často používat, tudíž je nutné si je ujasnit, jsou pojmy vlastní číslo matice, vlastní vektor matice a spektrum matice.

Definice 2. *Nechť $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ je čtvercová matice nad tělesem $\mathbb{F}$, reálných nebo komplexních čísel (tj. $\mathbb{F}$ je buď $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$). Pak obecně komplexní číslo λ a nenulový obecně komplexní vektor $x \in \mathbb{C}^n$ splňující rovnici*

$$Ax = x\lambda$$

nazýváme vlastní číslo a vlastní vektor matice A.

Množinu všech vlastních čísel matice A značíme $\operatorname{sp}(A)$ a nazýváme spektrum matice A.

1.2 Schurův rozklad obecné čtvercové matice

Nyní vyslovíme a dokážeme tzv. Schurovu větu pro obecnou komplexní čtvercovou matice. Větu i její důkaz lze nalézt např. v [2, kap. 2]. Schurova věta je jednou z nejdůležitějších vět souvisejících s vlastními čísly. Pomáhá při řešení úloh, kdy se snažíme nalézt vlastní čísla, jednak jako teoretický nástroj ale má také důležitý vliv na praktické řešení (výpočet).

Věta 1 (Schurova věta)**.** *Pro libovolnou matici $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ existuje taková unitární matice U, tj. $U^* = U^{-1}$, a taková matice R v horním trojúhelníkovém tvaru, že platí*

$$A = URU^*$$

a matice R má na diagonále vlastní čísla matice A v libovolném předepsaném pořadí.

Poznamenejme, že M^* značí matici transponovanou a komplexně sdruženou, tj. $M^* = (\overline{M})^T$, kde $\overline{M}$ pak značí právě komplexní sdružení.

Důkaz. Důkaz s drobnými úpravami přebíráme z [2]. Budeme postupovat pomocí indukce podle řádu matice A. Pro matici řádu 1 je tvrzení zřejmě pravdivé. Předpokládejme také pravdivost tvrzení pro všechny matice do řádu $n-1$, včetně.

Nyní musíme zjistit, zda tato věta platí i pro matici $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ (s libovolně ale pevně dopředu zvoleným pořadím vlastních čísel matice A na diagonále R). Označme λ první vlastní číslo matice A. Jemu odpovídající *normalizovaný* vlastní vektor označíme $x = [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]^T \in \mathbb{C}^n$, tj.

$$Ax = x\lambda, \quad \text{kde} \quad \|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2\right)^{1/2} = 1. \tag{1.2}$$

Doplňme vektor x o další vektory tak, abychom z nich byli schopni sestavit čtvercovou a zároveň unitární matici, tj. $H = [x, X] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ a $H^* = H^{-1}$, kde $X \in \mathbb{C}^{n\times n-1}$ a platí $X^*x = 0$, $x^*x = 1$, $X^*X = I_{n-1}$ (protože H je unitární, takže sloupce X jsou navzájem ortonormální). Dostáváme tedy

$$H^*AH = \begin{bmatrix} x^*Ax & x^*AX \\ X^*Ax & X^*AX \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & b^* \\ 0 & C \end{bmatrix}, \quad \text{kde} \quad b \in \mathbb{C}^{n-1},\ C \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)},$$

protože $x^*Ax = x^*(Ax) = x^*(x\lambda) = \lambda(x^*x) = \lambda$ a podobně $X^*Ax = X^*(Ax) = X^*(x\lambda) = \lambda X^*x = 0$ je nulový vektor. Jako výsledek tedy vyjde blokově horní trojúhelníková matice se čtvercovými diagonálními bloky.

Proto je možné spektrum matice A napsat jako

$$\mathrm{sp}(A) = \{\lambda\} \cup \mathrm{sp}(C).$$

Podle indukčního předpokladu je tvrzení věty pro matici C řádu $n-1$ pravdivé. Tedy existuje taková matice V, že V^*CV je horní trojúhelníková matice s vlastními čísly na diagonále v určeném pořadí. Označme

$$U = [x, XV] = H \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix}, \quad U^*U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V^* \end{bmatrix} \underbrace{H^*H}_{I_n} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} = I_n,$$

pak
$$U^*AU = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & b^* \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & b^*V \\ 0 & V^*CV \end{bmatrix} = R$$
je horní trojúhelníková matice R s vlastními čísly matice A na diagonále a U je hledaná unitární matice. Po úpravách dostáváme Schurův rozklad matice A

$$A = URU^*.$$

Poznamenejme, že libovolné pořadí vlastních čísel na diagonále matice R se de-facto realizuje výběrem vlastního čísla λ v rovnici (1.2). □

1.3 Vlastní čísla symetrické matice

Při zkoumání vlastních čísel nejen komplexních, ale i reálných matic musíme obecně pracovat s komplexními čísly (připomeňme, že vlastní čísla jsou totiž kořeny tzv. charakteristického polynomu, jehož stupeň je dán řádem matice; už pro matici řádu dva tak snadno najdeme takovou reálnou matici, jejíž charakteristický polynom má záporný diskriminant). Jiná situace ale nastává u (reálných) symetrických matic.

Věta 2. *Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je (reálná) čtvercová symetrická matice, tj. $A = A^T$, číslo λ je jejím vlastním číslem a vektor x je vlastním vektorem odpovídajícím vlastnímu číslu λ. Potom*

- *vlastní číslo je vždy reálné, tj. $\lambda \in \mathbb{R}$;*
- *vlastní vektor lze vždy volit reálný, tj. $x \in \mathbb{R}^n$.*

Důkaz. Víme, že matice A je symetrická, tj. $A = A^T$, a reálná, tj. $A = \overline{A}$. Víme, že x a λ jsou vlastní vektor a číslo, platí tedy

$$Ax = x\lambda, \quad x \neq 0.$$

Když tuto rovnici vynásobíme vektorem x^* zleva, dostaneme

$$x^*Ax = x^*x\lambda. \tag{1.3}$$

Nyní vidíme: a) Součin x^*x na pravé straně je vlastně skalární součin vektoru x se sebou samým, což je kvadrát normy daného vektoru. Je to tedy nezáporné kladné číslo. Protože vlastní vektor je nenulový, jeho norma je dokonce kladná. Zapsáno v rovnici,

$$x^*x = \langle x, x\rangle = \|x\|^2 > 0, \quad \text{protože} \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \ : \ \|v\| > 0 \iff v \neq 0.$$

b) Číslo x^*Ax na levé straně můžeme komplexně sdružit a formálně transponovat. Pak dostáváme

$$(x^*Ax)^* = (\overline{x^*Ax})^T = (x^T\overline{A}\overline{x})^T = (\overline{x})^T(\overline{A})^T x = x^*A^*x.$$

Jelikož je A reálná matice, tj. $A = \overline{A}$ a tedy $A^* = A^T$, a navíc symetrická, tj. $A = A^T$, můžeme psát

$$x^* A^* x = x^* A x.$$

Došli jsme tedy k závěru, že

$$(x^* A x)^* = x^* A x \in \mathbb{C},$$

tj. obecně komplexní číslo $(x^* A x)$ se rovná svému komplexně sdruženému číslu $(x^* A x)^*$, tudíž musí být toto číslo reálné.

Dáme-li dohromady pozorování a) a b) a z rovnice (1.3) vyjádříme vlastní číslo λ,

$$\lambda = \frac{(x^* A x)}{(x^* x)},$$

vidíme, že λ je podíl dvou reálných čísel, tudíž musí být vlastní číslo λ také reálné. Nyní se podíváme na vlastní vektor x. Vlastní číslo a vlastní vektor splňují rovnici

$$\begin{aligned} Ax &= x\lambda, \\ Ax &= Ix\lambda = (I\lambda)x, \\ (A - \lambda I)x &= 0, \end{aligned}$$

přičemž matice $(A - \lambda I)$ na levé straně poslední rovnice i vektor 0 na straně pravé jsou reálné. Interpretujeme-li poslední řádek jako soustavu lineárních algebraických rovnic, hledání vektoru x je hledáním řešení (kompatibilní) soustavy rovnic s reálnou maticí a reálnou pravou stranou. Taková soustava bude mít vždy nějaké reálné řešení. Vlastní vektor x tedy lze volit reálný. □

1.4 Schurova věta pro symetrické matice

Shurova věta má hned několik důsledků. Jeden z nich si vyslovíme v následující větě. V zásadě přeformulujeme původní Schurovu větu pro reálnou symetrickou matici A. Ukážeme, že pro symetrické matice lze Schurův rozklad vždy volit tak, aby byl reálný. Tedy s reálnými ortogonálními maticemi, které budou navíc obsahovat přímé vlastní vektory matice A. Původně trojúhelníková komplexní matice R s vlastními čísly matice A na diagonále bude nejen reálná, ale navíc bude jen diagonální maticí.

Věta 3. *Pro libovolnou symetrickou matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existuje diagonální matice $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a ortogonální matice $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$, tj. $U^{-1} = U^T$ tak, že platí*

$$A = UDU^T. \tag{1.4}$$

Diagonální matice $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ obsahuje vlastní čísla matice A v libovolném předepsaném pořadí. Sloupce matice $U = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$ představují odpovídající normalizované vlastní vektory.

Důkaz. Víme, že podle Schurova rozkladu lze matici A rozložit následovně

$$A = URU^*, \tag{1.5}$$

kde R je horní trojúhelníková obecně komplexní a U unitární. Protože A je reálná, tak také platí

$$A^T = A^* = (URU^*)^* = UR^*U^*. \tag{1.6}$$

Protože A je navíc symetrická, tj. $A = A^T$, dosazením předchozích rovnic (1.5) a (1.6) dostaneme

$$\begin{aligned} A &= A^T \\ URU^* &= UR^*U^* \\ R &= R^*. \end{aligned}$$

Víme, že R je matice v horním trojúhelníkovém tvaru a R^* je tedy v dolním trojúhelníkovém tvaru. Jelikož se tyto dvě matice musí rovnat, je zřejmé, že všechny *mimodiagonální prvky* matice R musí být nulové, tedy matice R je diagonální, a její *diagonální prvky* se musí rovnat svým komplexně sdruženým protějškům, tj. $r_{j,j} = \overline{r_{j,j}}$, musí tedy být reálné (mimochodem, z předchozích dvou vět víme: z věty 1, že matice R obsahuje na diagonále vlastní čísla matice A, tj. $r_{j,j} = \lambda_j$, z věty 2, že symetrická matice má vlastní čísla reálná; tvrzení o diagonálních prvcích tedy není překvapivé). Poznamenejme, že v dalším textu budeme pro odlišení tohoto speciálního tvaru Schurova rozkladu nebudeme tuto diagonální matici značit R jako doposud, ale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.

Pokud si ortogonální matici U rozepíšeme po sloupcích, tj. $U = [u_1, u_2, \cdots, u_n]$, můžeme po úpravách rozklad $A = UDU^*$ přepsat následovně

$$\begin{aligned} A &= UDU^* \\ AU &= UD \\ A[u_1, u_2, \cdots, u_n] &= [u_1, u_2, \cdots, u_n]D. \end{aligned}$$

Podíváme-li se na j-tý sloupec poslední rovnice, dostaneme

$$Au_j = u_j\lambda, \quad j = 1, \cdots, n, \tag{1.7}$$

neboli, sloupce matice U tvoří navzájem ortonormální sadu vlastních vektorů matice A. Zbývá ukázat, že je lze volit reálné. Přerovnáním rovnice (1.7) dostáváme jako v důkazu předchozí věty

$$(A - I\lambda_j)u_j = 0,$$

tedy soustavu rovnic s reálnou maticí $(A - I\lambda_j)$ a reálnou pravou stranou 0, z čehož plyne, že řešení u_j lze volit reálné. Zcela libovolnou volbou se však může poškodit vzájemná ortogonalita. Bylo by potřeba ještě ukázat, že volba (normalizovaných) vlastních vektorů odpovídajících různým vlastním číslům vždy vede na jejich ortogonalitu. U násobného vlastního čísla pak stačí zvolit příslušný počet lineárně nezávislých vlastních vektorů a ty zortogonalizovat (např. pomocí QR rozkladu). To však již nebudeme dělat. Viz také [2, sekce 2.2]. □

2 Kvadratické formy

V této kapitole si zavedeme pojem kvadratické formy, pojem inercie, ukážeme souvislost mezi symetrickými maticemi a kvadratickými formami a zformulujeme tzv. zákon setrvačnosti kvadratických forem.

2.1 Kvadratické formy a symetrické matice

Nejprve se seznámíme s kvadratickými formami a ukážeme jejich souvislost s vlastními čísly symetrických matic, respektive zejména s jejich znaménky. To nám pomůže určit, kvadratické formy (a symetrické matice) určitým způsobem rozklasifikovat.

Definice 3. *Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická matice, pak*

$$\mathcal{Q}_A(x) = x^T A x$$

se označuje jako kvadratická forma definovaná maticí A.

Tedy symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (resp. kvadratická forma $\mathcal{Q}_A$) může být považována za zobrazení $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Pro vektor $x = [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]^T \in \mathbb{R}^n$ lze kvadratickou formu, resp. součin $x^T A x$, obecně rozepsat následujícím způsobem

$$x \longmapsto x^T A x = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}\xi_j^2 + 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j.$$

Toto je obecný tvar kvadratické formy na prostoru dimenze n.

Pro názornost uvedeme jednoduchý příklad, kde vektor $x \in \mathbb{R}^2$ a symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Součin $x^T A x$ lze rozepsat jako

$$x^T A x = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = a\xi_1^2 + b\xi_1\xi_2 + c\xi_2^2, \tag{2.1}$$

což je vlastně *obecný kvadratický člen* (přesněji řečeno trojice kvadratických členů) polynomu o dvou proměnných. Analogicky kvadratická forma na prostoru dimenze n tvoří obecný kvadratický člen (resp. $\binom{n+1}{2}$ členů) polynomu o n proměnných.

Ze vzorce (2.1) nemusí být hned na první pohled jasné, jak bude graf $\mathcal{Q}_A(x)$ vypadat. Abychom tomu porozuměli, můžeme matici A nahradit jejím Schurovým rozkladem (1.4). Dostaneme pak

$$A = UDU^T,$$

tedy

$$\mathcal{Q}_A(x) = x^T A x = x^T U D U^T x = (U^T x)^T D (U^T x).$$

Součin $(U^T x)$ je vektor, který si můžeme označit jako $y = [\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n]^T$. Protože je matice U ortogonální, potom tedy určitě platí

$$y = U^T x, \quad x = U y, \quad \|x\| = \|y\|,$$

tedy

$$\mathcal{Q}_A(x) = (U^T x)^T D (U^T x) = y^T D y = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \nu_j^2.$$

Suma na pravé straně se, jak je vidět, zjednoduší (místo $\binom{n+1}{2}$ sčítanců má pouze n sčítanců) protože matice D je diagonální. Navíc D obsahuje na diagonále vlastní čísla matice A. Každé vlastní číslo je v součinu s kvadrátem nějakého prvku vektoru y, který ale znaménko celého součinu $(\lambda_j \nu_j^2)$ nezmění, to je zřejmě dané znaménkem vlastního čísla, $\operatorname{sgn}(\lambda_j \nu_j^2) = \operatorname{sgn}(\lambda_j) = \lambda_j / |\lambda_j|$.

V našem jednoduchém případě (2.1) tedy dostáváme $\lambda_1 \nu_1^2 + \lambda_2 \nu_2^2$. Máme tedy k dispozici v zásadě šest možností, viz obrázek 2.1:

- obě vlastní čísla jsou kladná, tj. $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$;
- jedno vlastní číslo je kladné a druhé vlastní číslo je záporné, tj. $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$;
- obě vlastní čísla jsou záporná, tj. $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$;
- jedno vlastní číslo je kladné a druhé vlastní číslo je nulové, tj. $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$;
- jedno vlastní číslo je záporné a druhé vlastní číslo je nulové, tj. $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 = 0$;
- obě vlastní čísla jsou nulová, tj. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

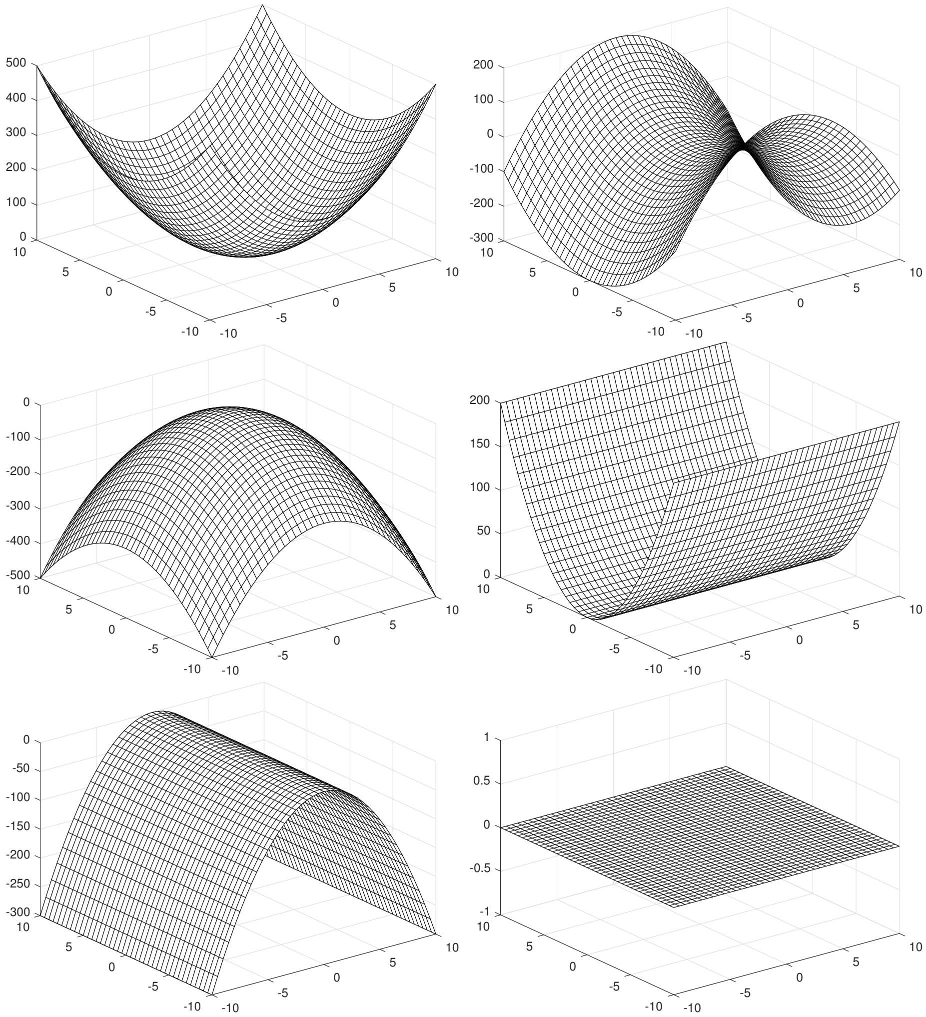
Pro rozlišení jednotlivých příkladů pro obecnou symetrickou matici A zavedeme následující pojmy.

Definice 4. *Kvadratickou formu $\mathcal{Q}_A(x) = x^T A x$ definovanou na $\mathbb{R}^n$ pomocí symetrické matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, jakož i samotnou symetrickou matici nazýváme:*

- *pozitivně definitní, pokud $\forall x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{Q}_A(x) > 0$;*
- *pozitivně semidefinitní, pokud $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{Q}_A(x) \geq 0$;*
- *negativně definitní, pokud $\forall x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{Q}_A(x) < 0$;*
- *negativně semidefinitní, pokud $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{Q}_A(x) \leq 0$;*
- *indefinitní, existují-li vektory x_+, x_- takové, že $\mathcal{Q}_A(x_+) > 0$ a $\mathcal{Q}_A(x_-) < 0$.*

Poznamenejme, že každá pozitivně (resp. negativně) definitní matice je zároveň pozitivně (resp. negativně) semidefinitní.

Jak jsme viděli na příkladu matice řádu dva, klíčovou roli v definitnosti reálné symetrické matice hrají její vlastní čísla. Zřejmě platí následující věta, kterou již uvedeme bez důkazu.



Obrázek 2.1: Kvadratické formy v prostoru $\mathbb{R}^2$. V prvním a druhém řádku regulární formy, zleva: pozitivně definitní ($\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$), indefinitní ($\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$) a negativně definitní ($\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$). V druhém a třetím řádku singulární formy, zleva: pozitivně semidefinitní ($\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$), negativně semidefinitní ($\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 < 0$) a identicky nulová forma ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$).

Věta 4. *Nechť $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je symetrická matice. Pak A je*

- *pozitivně definitní právě když má všechna vlastní čísla kladná,*
- *pozitivně semidefinitní právě když má všechna vlastní čísla nezáporná,*
- *negativně definitní právě když má všechna vlastní čísla záporná,*
- *negativně semidefinitní právě když má všechna vlastní čísla nekladná,*
- *indefinitní právě když má alespoň jedno kladné a alespoň jedno záporné vlastní číslo.*

Důkaz je zřejmý z předchozí diskuze. Provedli bychom ho jako u příkladu dimenze dva, jednoduše dosazením Schurova rozkladu $A = UDU^T$ za matici A do kvadratické formy $\mathcal{Q}_A(x) = x^T A x$.

2.2 Inercie matice, hodnost matice, signatura matice

Jak jsme viděli, vlastní čísla matice, resp. jejich znaménka, hrají důležitou roli v klasifikaci matic a kvadratických forem ve smyslu definitnosti, ale zejména také v tom, jak vypadá graf dané kvadratické formy. To všechno nás vede k zavedení nového pojmu, tzv. *inercie*.

Definice 5 (Inercie)**.** *Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická matice. Označme n_+ počet jejích kladných vlastních čísel včetně násobností, n_- počet jejích záporných vlastních čísel včetně násobností a n_0 násobnost nulového vlastního čísla, tj $n_+ + n_- + n_0 = n$. Uspořádanou trojici*

$$\mathrm{in}(A) = (n_+, n_-, n_0)$$

nazýváme inercií matice A.

Inercie bude zjevně užitečná při popisu kvadratických forem, protože nám vlastně říká v maximálně kolika lineárně nezávislých směrech se paraboly v grafu „ohýbají“ do kladných a do záporných čísel a v kolika musí zůstat identicky nulové. Pojmu se ale budeme dále věnovat i v následujících sekcích a kapitolách. Zejména bude potřeba při popisu „Batman decomposition“ symetrických matic.

Poznamenejme, že když už jsme zavedli pojem inercie, bylo by dobré vyjasnit jeho vztah k dalším podobným nebo souvisejícím pojmům. Prvním z nich je *hodnost* matice, který známe již ze základního kurzu lineární algebry. Hodnost se definuje jako počet lineárně nezávislých řádků, resp. sloupců matice, nebo ekvivalentně jako řád největšího nenulového poddeterminantu matice, nebo ekvivalentně jako dimenze oboru hodnot viz např. [2, kaptola 1]. U (čtvercových) normálních matic (přičemž reálná symetrická matice je speciální případ normální matice) je hodnost dána rozdílem řádu matice a násobností nulového vlastního čísla. Platí tedy následující věta, kterou uvádíme bez důkazu.

Věta 5. *Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická matice a nechť její inercie je $\mathrm{in}(A) = (n_+, n_-, n_0)$. Potom hodnost matice A je rovna počtu nenulových vlastních čísel (včetně násobností), tedy*

$$\mathrm{rank}(A) = n - n_0 = n_+ + n_- \,.$$

Mezi dalšími související pojmy patří také tzv. *signatura* matice. Poznamenejme, že signatura se zpravidla používá v kontextu regulárních matic (tj. když $\mathrm{rank}(A) = n$, neboli $n_0 = 0$), viz např. [5].

Definice 6. *Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická matice a nechť její inercie je $\mathrm{in}(A) = (n_+, n_-, n_0)$. Signaturou matice A nazveme číslo*

$$\mathrm{sg}(A) = n_+ - n_- \,,$$

tedy rozdíl počtu kladných a záporných vlastních čísel (včetně násobností).

Je zřejmé, že signatura je kladná, resp. záporná, má-li matice více kladných, resp. záporných vlastních čísel (opět ovšem včetně násobností). Signatura nám tedy říká, kterých vlastních čísel má matice více.

2.3 Zákon setrvačnosti kvadratických forem

V minulé sekci jsme zavedli pojem *inercie*, který nám říká, kolik má matice A kladných, záporných a nulových vlastních čísel. Nyní si zformulujeme tzv. *zákon setrvačnosti kvadratických forem*, který nám v zásadě ukazuje, kdy se inercie zachovává. Poznamenejme, že slovo inercie (anglicky, resp. latinsky inertia) se do češtiny překládá právě jako setrvačnost.

Věta 6 (Sylvestrův zákon setrvačnosti kvadratických forem)**.** *Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická matice, $Z \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární matice a nechť matice*

$$B = Z^T AZ \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Pak je matice B symetrická a platí

$$\mathrm{in}(A) = \mathrm{in}(B),$$

tj. při transformaci $A \longmapsto B = Z^T AZ$, kterou nazýváme (maticová) kongruence se zachovává inercie.

Důkaz. Matice $B = Z^T AZ$ je zjevně symetrická, $B^T = (Z^T AZ)^T = Z^T A^T Z = Z^T AZ = B$, neboť $A = A^T$ je symetrická. Matice Z je regulární, tj. existuje inverzní matice Z^{-1}, tedy $A = Z^{-T} BZ^{-1}$. Pokud rozepíšeme kvadratickou formu $\mathcal{Q}_A(x)$, dostaneme

$$\mathcal{Q}_A(x) = x^T Ax = x^T Z^{-T} BZ^{-1} x = (Z^{-1}x)^T B(Z^{-1}x).$$

Pokud si vektor $Z^{-1}x$ označíme jako y, vyjde nám

$$\mathcal{Q}_A(x) = x^T Ax = y^T By = \mathcal{Q}_B(y).$$

Z rovnosti vyplývá, že grafy obou kvadratických forem, jak $\mathcal{Q}_A(x)$, tak i $\mathcal{Q}_B(y)$, budou v podstatě stejné (jen v jiných souřadnicích; $y = Z^{-1}x$, $x = Zy$ představuje změnu souřadnicového systému). Speciálně bude u obou forem stejný maximální počet lineárně nezávislých směrů, ve kterých jsou paraboly v grafu kladné a záporné a také kolik jich zůstalo identicky nulových. Z toho následně plyne, že i počet kladných, záporných a nulových (tj. včetně násobností) vlastních čísel matic A a B musí být stejný, tedy také $\mathrm{in}(A) = \mathrm{in}(B)$. $\square$

Poznamenejme, že inercie je sice stejná, ale samotná vlastní čísla matic A a B mohou být různá. Pro vlastní číslo a vlastní vektor matice A platí

$$Ax = x\lambda.$$

Pokud mezi A a x vložíme šikovně rozepsanou jednotkovou matici $I = ZZ^{-1}$ a celou rovnici vynásobíme Z^T zleva, dostaneme

$$\begin{aligned}(Z^T AZ)(Z^{-1}x) &= (Z^T x)\lambda,\\ By &= w\lambda, \quad \text{kde} \quad B = Z^T AZ,\ y = Z^{-1}x,\ \text{a}\ w = Z^T x.\end{aligned}$$

Z těchto vztahů tedy plyne, že λ by bylo vlastním číslem, pokud by vektor y byl roven vektoru w. Pokud by měla být všechna vlastní čísla λ_i stejná, musel by odpovídajíc vektor $y_i = Z^{-1}x_i$ být roven vektoru $w_i = Z^T x_i$, pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Protože matice Z je regulární a protože vektory x_i a tedy i y_i a w_i tvoří bázi celého $\mathbb{R}^n$, z rovností

$$Z^{-1}x_i = y_i = w_i = Z^T x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

plyne, že $Z^{-1} = Z^T$, tj. že matice Z je ortogonální.

Došli jsme tedy k závěru, že vlastní čísla matic A a B se rovnají pouze v případě, když matice Z realizující kongruenci je ortogonální. V takovém případě (a pouze v takovém případě) však kongruence splývá s podobnostní transformací. Můžeme tedy říct, že *ortogonální kongruence* je zároveň *ortogonální podobností*. Tedy, pokud je matice Z jen regulární, jsou matice A a B navzájem kongruentní (zachovaná je obecně pouze inercie) a pokud je matice Z navíc ortogonální, jsou si matice A a B navzájem podobné (zachovává se jak inercie, tak vlastní čísla).

3 Důležité podprostory symetrických indefinitních matic

Symetrické matice mají několik podprostorů, které pro nás budou velmi důležité, jejich popis a vysvětlení můžeme nalézt například v [8]. Tyto podprostory $\mathscr{U}_0$, $\mathscr{U}_N$, $\mathscr{U}_+$ a $\mathscr{U}_-$ a jejich ortogonální báze U_0, U_N, U_+ a U_- dané symetrické matice A s inercií $\mathrm{in}(A) = (n_+, n_-, n_0)$ jsou následovné:

- nulový podprostor matice A, kde platí, že $AU_0 = 0$ a $\dim(\mathscr{U}_0) = n_0$;
- neutrální podprostor matice A, kde platí, že $U_N^T A U_N = 0$ a $\dim(\mathscr{U}_N) = n_0 + \min(n_+, n_-)$;
- nezáporný podprostor matice A, kde platí, že $U_+^T A U_+$ je pozitivně semidefinitní a $\dim(\mathscr{U}_+) = n_0 + n_+$;
- a nekladný podprostor matice A, kde platí, že $U_-^T A U_-$ je negativně semidefinitní a $\dim(\mathscr{U}_-) = n_0 + n_-$.

Podrobněji se nyní budeme věnovat těmto podprostorům v jednotlivých kapitolách.

3.1 Nulový podprostor

Prvním prostorem, který pro nás bude důležitý je nulový prostor $\mathscr{U}_0$.

Definice 7. *Nechť* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *je symetrická matice s inercií* $\mathrm{in}(A) = (n_+, n_-, n_0)$. *Prostor* $\mathscr{U}_0 = \mathscr{N}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ *nazýváme nulovým prostorem, jestliže*

1. *pro každé* $w \in \mathscr{U}_0$ *platí* $Aw = 0$ *a zároveň*
2. *neexistuje prostor* $\mathscr{S}$, $\mathscr{U}_0 \subsetneq \mathscr{S}$, $\dim(\mathscr{U}_0) < \dim(\mathscr{S})$ *splňující podmínku 1.*

Druhou podmínku můžeme formulovat tak, že hledáme podprostor s vlastností 1. maximální dimenze.

Tento prostor známe již ze základního kurzu lineární algebry a lze definovat pro jakoukoliv (tedy obecně i obdélníkovou) matici. Jeho dimenze je rovna defektu matice, v našem případě

$$\dim(\mathscr{U}_0) = n - \mathrm{rank}(A) = n_0.$$

Snadno ověříme, že v případě symetrické matice je nulový prostor lineárním obalem právě těch vlastních vektorů, které odpovídají nulovému vlastnímu číslu. Nulový prostor souvisí s pohledem na matici A jako na lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

3.2 Neutrální prostor

Druhým prostorem je $\mathscr{U}_N$, prostor neutrální. Tento prostor (stejně jako následující dva) souvisí přímo s kvadratickými formami, tedy souvisí s chápáním matice A, respektive odpovídající kvadratické formy jako zobrazení $\mathcal{Q}_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Je tedy trochu komplikovanější než prostor předchozí.

Definice 8. *Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická matice s inercií $\mathrm{in}(A) = (n_+, n_-, n_0)$. Prostor $\mathscr{U}_N \subseteq \mathbb{R}^n$ budeme nazývat neutrální, jestliže*

1. *pro každé $w \in \mathscr{U}_N$ platí $w^T A w = 0$ a zároveň*

2. *neexistuje prostor $\mathscr{S}$, $\mathscr{U}_N \subsetneq \mathscr{S}$, $\dim(\mathscr{U}_N) < \dim(\mathscr{S})$ splňující podmínku 1.*

Druhou podmínku můžeme formulovat tak, že hledáme podprostor s vlastností 1. maximální dimenze.

Označme $m = \dim(\mathscr{U}_N)$ dimenzi prostoru $\mathscr{U}_N$. Nechť $u_N^{(1)}, u_N^{(2)}, \cdots, u_N^{(m)}$ je báze prostoru $\mathscr{U}_N$ a nechť $U_N = [u_N^{(1)}, u_N^{(2)}, \cdots, u_N^{(m)}]$, tj. $\mathscr{R}(U_N) = \mathscr{U}_N$. Zřejmě každý pro vektor $w \in \mathscr{U}_N$ existuje nějaký vektor $z \in \mathbb{R}^m$ tak, že platí $w = U_N z$ (a naopak, každý vektor $z \in \mathbb{R}^m$ generuje nějaký vektor $w = U_N z$ neutrálního prostoru). Pak

$$\mathcal{Q}_A(w) = w^T A w = z^T (U_N^T A U_N) z = 0, \quad \forall z \in \mathbb{R}^m.$$

Matice $U_N^T A U_N$ je zřejmě symetrická. Pro euklidovské vektory $z = e_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, dostáváme $(U_N^T A U_N)_{i,i} = 0$, tedy matice $U_N^T A U_N$ musí mít nulovou diagonálu. Pro součty dvojic různých euklidovských vektorů $z = e_i + e_j$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$, $i \neq j$, dostáváme s využitím symetrie $2(U_N^T A U_N)_{i,j} = 0$, tedy i mimodiagonální prvky jsou nulové. Závěrem, matice

$$U_N^T A U_N = 0$$

je nulová.

3.2.1 Vektory v neutrálním prostoru – příklady

Jak jsme již zmínili, zobrazení $\mathcal{Q}_A : w \longmapsto w^T A w$ funguje nepatrně složitějším způsobem než zobrazení $\mathcal{A} : w \longmapsto Aw$. Je jasné, že když máme vektor w, pro který platí $Aw = 0$, tak platí $w^T A w = 0$, tedy prostor $\mathscr{U}_0$ by mohl být (a vždy ho také bude možné považovat za) podprostor prostoru $\mathscr{U}_N$. Obráceně to však neplatí, tj. $w^T A w = 0$, nemusí nutně implikovat $Aw = 0$. Tuto situaci si můžeme jednoduše ilustrovat s využitím vhodné regulární matice A (tedy takové matice, jejíž nulový prostor je triviální a obsahuje jenom nulový vektor 0) následujícím způsobem:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Aw = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vektor w zřejmě není v nulovém prostoru matice A, ale když se zaměříme na celý součin $\mathcal{Q}_A(w) = w^T A w$, vidíme, že se rovná 0 (vektory w a Aw jsou na sebe kolmé).

Ukažme si další, složitější, příklad. Vezměme si symetrickou matici A a dva normalizované vlastní vektory. Nechť v_1 je vlastním vektorem vlastního čísla λ_1, a v_2 vlastního čísla $\lambda_2 \neq \lambda_1$, a řekněme, že pro jednoduchost zároveň platí

$$\lambda_1 = -\lambda_2.$$

Jelikož je matice symetrická a vlastní čísla λ_1 a λ_2 jsou různá, víme, že v_1 je kolmé na v_2. Podívejme se na součet těchto dvou vektorů

$$w = v_1 + v_2, \quad \text{resp., pro formu,} \quad w = \frac{v_1}{\|v_1\|} + \frac{v_2}{\|v_2\|}.$$

Potom

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_A(w) = w^T A w &= w^T(Av_1 + Av_2) \\ &= w^T(v_1\lambda_1 + v_2\lambda_2) \\ &= w^T(v_1 - v_2)\lambda_1 \\ &= (v_1^T + v_2^T)(v_1 - v_2)\lambda_1 \\ &= (v_1^T v_1 + v_2^T v_1 - v_1^T v_2 - v_2^T v_2)\lambda_1 = 0, \end{aligned}$$

neboť kolmost v_1 a v_2 způsobí $v_1^T v_2 = v_2^T v_1 = 0$. Protože $v_i^T v_i = \|v_i\|^2 = 1^2 = 1$, platí $v_1^T v_1 - v_2^T v_2 = 0$.

Tento příklad lze zjevně ihned zobecnit na případ, kdy vlastní čísla nebudou stejně velká. Máme tedy

$$Av_1 = v_1\lambda_1, \quad Av_2 = v_2\lambda_2, \quad \text{kde} \quad \lambda_1 > 0 > \lambda_2. \tag{3.1}$$

Vezměme si lineární kombinaci vlastních vektorů

$$w_1 = \alpha v_1 + \beta v_2 \tag{3.2}$$

a vhodně si zvolme α a β,

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}\,\|v_1\|}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{-\lambda_2}\,\|v_2\|}. \tag{3.3}$$

Potom dostaneme

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_A(w_1) = w_1^T A w_1 &= (\alpha v_1^T + \beta v_2^T)(\alpha v_1\lambda_1 + \beta v_2\lambda_2) \\ &= \alpha^2\lambda_1 \|v_1\|^2 + \alpha\beta \underbrace{(v_2^T v_1 + v_1^T v_2)}_{0} + \beta^2\lambda_2 \|v_2\|^2 = 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Závorka je nulová z důvodu ortogonality v_1 a v_2. Alternativně můžeme zkonstruovat vektor

$$w_1' = \alpha v_1 - \beta v_2, \tag{3.5}$$

pro který zřejmě dostaneme stejný výsledek

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_A(w_1') = {w_1'}^T A w_1' &= (\alpha v_1^T - \beta v_2^T)(\alpha v_1\lambda_1 - \beta v_2\lambda_2) \\ &= \alpha^2\lambda_1 \|v_1\|^2 - \alpha\beta \underbrace{(v_2^T v_1 + v_1^T v_2)}_{0} + \beta^2\lambda_2 \|v_2\|^2 = 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Následně můžeme pokračovat zcela analogicky s vlastními vektory v_3 a v_4 takovými, že platí

$$Av_3 = v_3\lambda_3, \quad Av_4 = v_4\lambda_4, \quad \text{kde} \quad \lambda_3 > 0 > \lambda_4$$

a stejným způsobem, jako jsme získali vektor w_1 z vektorů v_1 a v_2, získáme nyní vektor $w_2 = \gamma v_3 + \delta v_4$ (případně $w_2' = \gamma v_3 - \delta v_4$), přičemž konstanty γ a δ volíme analogicky jako v (3.3).

Nyní bude vhodné ověřit, zda jsou takto získané vektory na sebe kolmé, tedy zda je skalární součin $\langle w_1, w_2 \rangle$ rovný nule. Dosazením získáme skalární součin dvou lineárních kombinací různých dvojic vektorů. Hodnoty čísel α a β ani nemusíme uvažovat, protože víme, že skalární součin je (v reálném prostoru) lineární v obou složkách a po roznásobení dostaneme lineární kombinaci skalárních součinů vlastních vektorů v_1 s v_3, v_1 s v_4, v_2 s v_3 a v_2 s v_4. Vlastní vektory symetrické matice však vždy můžeme uvažovat takové, aby na sebe byly navzájem kolmé (navíc když odpovídají různým vlastním číslům tak jsou na sebe kolmé vždy) a jejich skalární součin tedy bude roven nule. Analogicky ukážeme, že $\langle w_1, w_2 \rangle = \langle w_1', w_2 \rangle = \langle w_1, w_2' \rangle = \langle w_1', w_2' \rangle = 0$.

3.2.2 Konstrukce báze neutrálního prostoru

Výše uvedený postup tedy můžeme shrnout tak, že si vezmeme dvojici kladného a záporného vlastního čísla $\lambda_{2\ell-1} > 0 > \lambda_{2\ell}$. Počet těchto dvojic bude dán číslem $\min(n_+, n_-)$. Ke každé takovéto dvojici si vezmeme také jim odpovídající vlastní dvojici vlastních vektorů $v_{2\ell-1}$ a $v_{2\ell}$ a z nich zkonstruujeme vektor w_ℓ. Víme, že jelikož jsou vektory w_ℓ zkonstruované z vlastních vektorů, které jsme volili navzájem kolmé, jsou i vektory w_ℓ na sebe kolmé.

Vezměme nyní lineární kombinaci

$$w = \sum_{\ell=1}^{\min(n_+,n_-)} \varphi_\ell w_\ell \tag{3.7}$$

a dosaďme ji do kvadratické formy $\mathcal{Q}_A$. Dostáváme

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_A(w) = w^T A w &= \left(\sum_{i=1}^{\min(n_+,n_-)} \varphi_i w_i^T\right)\left(\sum_{j=1}^{\min(n_+,n_-)} \varphi_j A w_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\min(n_+,n_-)} \sum_{j=1}^{\min(n_+,n_-)} \varphi_i \varphi_j w_i^T A w_j. \end{aligned}\tag{3.8}$$

V případě $i = j$ můžeme s jistotou říci, že $w_i^T A w_i = 0$, tak jsme vektory konstruovali. Jak je to ale v případě, kdy $i \neq j$?

Pro objasnění se nejdříve vrátíme k příkladu se dvěma vektory a ukážeme, jak bude vypadat součin Aw_1 a součin $w_2^T A w_1$. Zřejmě

$$\begin{aligned} Aw_1 &= \alpha\lambda_1 v_1 + \beta\lambda_2 v_2, \\ \text{a} \quad w_2^T A w_1 &= (\gamma v_3^T + \delta v_4^T)(\alpha\lambda_1 v_1 + \beta\lambda_2 v_2) \\ &= \alpha\gamma\lambda_1\, v_3^T v_1 + \beta\gamma\lambda_2\, v_3^T v_2 + \alpha\delta\lambda_1\, v_4^T v_1 + \beta\delta\lambda_2\, v_4^T v_2 = 0. \end{aligned}$$

Součin $w_2^T A w_1$ je také roven nule, protože je lineární kombinací skalárních součinů dvojic různých vlastních vektorů, které jsme ale zvolili tak, že jsou na sebe kolmé.

To samé bude zřejmě platit i pro každý součin $w_i^T A w_j$, kde $i \neq j$, v rovnici (3.8). Celkově tedy dostáváme

$$\mathcal{Q}_A(w) = w^T A w = 0$$

pro každé w zkonstruované jako v (3.7).

Prostor $\mathscr{U}_N$ tedy konstruujeme tak, že vezmeme matici A, její vlastní čísla a sadu navzájem ortogonálních a (pro jednoduchost) normalizovaných vlastních vektorů. Vektory w_1, konstruujeme tak, že vezmeme libovolné dva vlastní vektory, které odpovídají vlastním číslům s opačnými znaménky a provedeme jejich vhodnou lineární kombinaci, jak bylo ukázáno v (3.2)–(3.3). Chceme-li ortonormální bázi, vektor w_1 navíc normalizujeme, tj. vezmeme $w_1/\|w_1\|$. To opakujeme tak dlouho, dokud nám nedojdou disponibilní dvojice vlastních vektorů, tedy dokud nedosáhneme minima z počtu kladných a záporných vlastních čísel. Konstruované vektory jsou na sebe kolmé. Dostáváme tak ortonormální bázi

$$\frac{w_\ell}{\|w_\ell\|}, \quad \ell = 1, 2, \ldots, \min(n_+, n_-)$$

části prostoru $\mathscr{U}_N$. Tu doplníme (navzájem ortonormálními) vlastními vektory odpovídajícími nulovému vlastnímu číslu (ty jsou zřejmě všechny kolmé na všechna w_ℓ), tj. bází nulového prostoru. Tím dostáváme ortonormální bázi celého $\mathscr{U}_N$.

Z postupu je zřejmé, že menší sadu vlastních čísel (záporných nebo kladných) vyčerpáme celou. Je dobré si uvědomit, že je-li druhá sada ostře větší, prostor $\mathscr{U}_N$ se může lišit v závislosti na tom, které vektory z větší sady jsme si použili. Tudíž prostor $\mathscr{U}_N$ není jednoznačně daný. Jednoznačně určená je však dimenze tohoto prostoru, platí $\dim(\mathscr{U}_N) = n_0 + \min(n_+, n_-)$.

Prostor $\mathscr{U}_N$ ale není dán jednoznačně ani když jsou obě sady stejně velké. Zřejmě je tu navíc v každém kroku volnost ve volbě mezi vektorem w_i a w_i'; srovnej (3.2) a (3.5), (3.4) a (3.6), také viz obrázek 3.1, zejména první graf v prvním řádku. Jednoznačně je dán jen jeho podprostor $\mathscr{U}_0$.

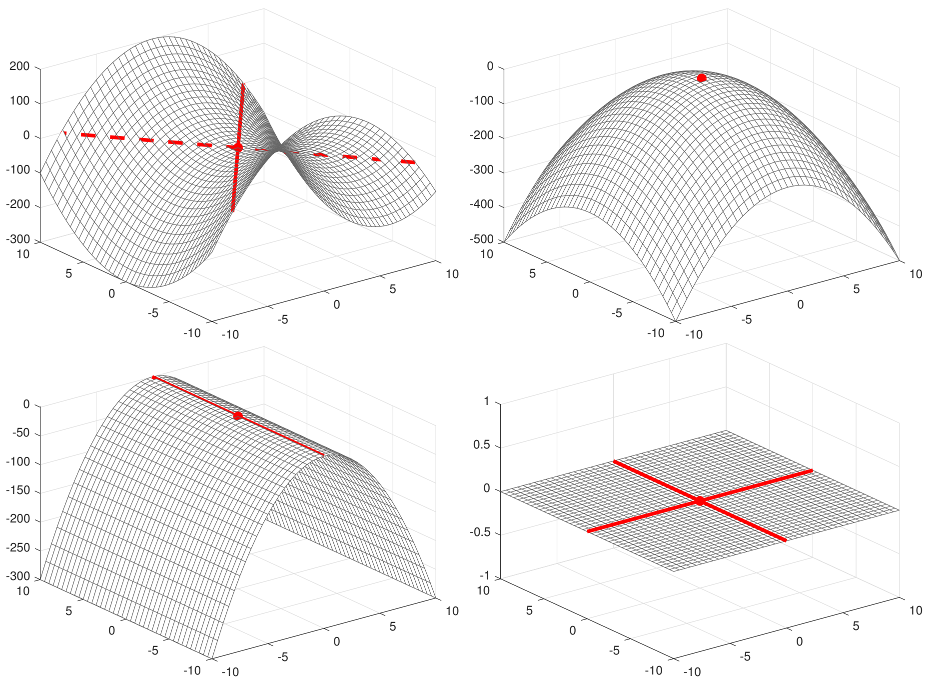
3.3 Nezáporný podprostor

Dalším zajímavým prostorem, se kterým budeme pracovat, je nezáporný prostor $\mathscr{U}_+$. Tento prostor také není dán jednoznačně, ale můžeme si jeho polohu zvolit. Podívejme se nejprve, jak je tento nezáporný prostor definován.

Definice 9. *Nechť* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *je symetrická matice s inercií* $\mathrm{in}(A) = (n_+, n_-, n_0)$. *Prostor* $\mathscr{U}_+ \subseteq \mathbb{R}^n$ *budeme nazývat nezáporný, jestliže*

1. *pro každé* $w \in \mathscr{U}_+$ *platí* $w^T A w \geq 0$ *a zároveň*

2. *neexistuje prostor* $\mathscr{S}$, $\mathscr{U}_+ \subsetneq \mathscr{S}$, $\dim(\mathscr{U}_+) < \dim(\mathscr{S})$ *splňující podmínku 1.*



Obrázek 3.1: Vyznačený neutrální prostor v daných kvadratických formách v prostoru $\mathbb{R}^2$. V prvním řádku je neutrální prostor vyznačený v regulárních formách, zleva: indefinitní a negativně definitní. V druhém řádku je neutrální prostor vyznačený v singulárních formách, zleva: negativně semidefinitní a identicky nulové formě.

Druhou podmínku můžeme formulovat tak, že hledáme podprostor s vlastností 1. maximální dimenze.

Označme $m = \dim(\mathscr{U}_+)$ dimenzi prostoru $\mathscr{U}_+$. Nechť $u_+^{(1)}, u_+^{(2)}, \cdots, u_+^{(m)}$ je báze prostoru $\mathscr{U}_+$ a nechť $U_+ = [u_+^{(1)}, u_+^{(2)}, \cdots, u_+^{(m)}]$, tj. $\mathscr{R}(U_+) = \mathscr{U}_+$. Zřejmě pro každé $w \in \mathscr{U}_+$ existuje nějaký vektor $z \in \mathbb{R}^m$ tak, že $w = U_+ z$. Pak zřejmě musí platit

$$w^T A w = z^T (U_+^T A U_+) z \geq 0,$$

tedy matice $U_+^T A U_+$ je pozitivně semidefinitní.

3.3.1 Konstrukce báze nezáporného prostoru

Nyní si ukážeme, jak vypadá prostor $\mathscr{U}_+$. Nejprve se ale na celou věc podíváme skrze bázi vlastních vektorů. Ukážeme, jaké vlastní vektory může prostor obsahovat a z toho odvodíme, jakou má dimenzi. Musíme však opět připomenout, že prostor $\mathscr{U}_+$ není dán jednoznačně, vlastní vektory opět budeme moci kombinovat a konstruovat různé nezáporné prostory stejné dimenze.

Vezměme si nejprve vlastní normalizovaný vektor v, který odpovídá nezápornému vlastnímu číslu λ, tj.

$$Av = v\lambda, \quad \text{kde} \quad \lambda \geq 0, \quad \|v\| = 1.$$

Vynásobením rovnice vektorem v^T zleva dostáváme

$$\mathcal{Q}_A(v) = v^T A v = v^T v \lambda = \lambda \geq 0.$$

Vlastní vektor v tedy zjevně *může* (obecně ale nemusí) patřit do $\mathscr{U}_+$. Pokud si naopak vezmeme vlastní vektor v, který odpovídá zápornému vlastnímu číslu $\lambda < 0$, dostaneme zcela analogicky $\mathcal{Q}_A(v) < 0$. Takový vlastní vektor v tedy určitě nemůže být v prostoru $\mathscr{U}_+$. Protože požadujeme pouze nezápornost (nikoliv kladnost), určitě *mohou* (obecně ale nemusí) být součástí tohoto prostoru všechny vektory, které jsou také součástí neutrálního prostoru, tj. nezáporný prostor lze určitě volit tak, aby neutrální prostor byl jeho podprostor. Speciálně, protože po nezáporném prostoru chceme aby byl maximální možné dimenze, bude určitě obsahovat celý nulový prostor jako podprostor. Pokud budeme chtít, do nezáporného prostoru zařadit všechny vlastní vektory odpovídající kladným a nulovým (tj. nezáporným) vlastním číslům, zřejmě už nepůjde zvětšit a jeho dimenze bude právě rovna $\dim(\mathscr{U}_+) = n_+ + n_0$.

Obecně můžeme nezáporný prostor (resp. jeho bázi) konstruovat následujícím způsobem:

- Nezáporný prostor musí obsahovat všechny vektory nulového prostoru. Odpovídající část báze budou tvořit vlastní vektory odpovídající nulovému vlastnímu číslu.

- Dále bude nezáporný prostor obsahovat $\min(n_+, n_-)$ lineárních kombinací dvojic vlastních vektorů odpovídajících vždy jednomu kladnému a jednomu zápornému vlastnímu číslu (viz (3.1)–(3.6)) takových, abychom dostali tentokrát nezáporný výsledek, tj. $\mathcal{Q}_A(w_\ell) = w_\ell^T A w_\ell \geq 0$, $\ell = 1, 2, \ldots, \min(n_+, n_-)$. Stačí např. volit α větší nebo rovno než jak tomu je v (3.3).

- Pokud navíc platí $n_+ > n_-$, tj. máme k dispozici více kladných vlastních čísel než záporných, pak nám po předchozím kroku stále zbylo $(n_+ - n_-)$ nevyužitých vlastních vektorů odpovídajících kladným vlastním číslům. Tyto vlastní vektory musíme také přidat do báze nezáporného prostoru.

Z těchto úvah vyplývá, že $\mathscr{U}_+$ obecně obsahuje vlastní vektory odpovídající nulovým vlastním číslům, některým kladným vlastním číslům (podle toho zda nějaká zbyla navíc). Protože jeho báze obsahuje lineární kombinace dvojic vlastních vektorů odpovídajících zápornému a kladnému vlastnímu číslu, bude i prostor obsahovat některé relativně obecné lineární kombinace daných kladných a záporných vlastních vektorů.

Z konstrukce je jasné, že prostor není dán jednoznačně, stejně jako v případě neutrálního prostoru. Je také zřejmé, že pokud v druhém bodu předchozí konstrukce budeme volit vhodně, celý neutrální prostor bude podprostorem nezáporného prostoru. Dimenze nezáporného prostoru je dle konstrukce rovna $\dim(\mathscr{U}_+) = n_0 + \min(n_+, n_-) + \max(n_+ - n_-, 0) = n_+ + n_0$, tj. zůstává taková, jak jsme odhadli jen na základě pohledu skrze bázi vlastních vektorů. Dimenze nezáporného prostoru je tedy dána jednoznačně.

3.4 Nekladný podprostor

Posledním prostorem je nekladný prostor $\mathscr{U}_-$. Ten bude vypadat analogicky jako nezáporný podprostor $\mathscr{U}_+$. Začněme opět definicí.

Definice 10. *Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická matice s inercií* $\mathrm{in}(A) = (n_+, n_-, n_0)$. *Prostor $\mathscr{U}_- \subseteq \mathbb{R}^n$ budeme nazývat nekladný, jestliže*

1. *pro každé $w \in \mathscr{U}_-$ platí $w^T A w \leq 0$ a zároveň*
2. *neexistuje prostor $\mathscr{S}$, $\mathscr{U}_- \subsetneq \mathscr{S}$,* $\dim(\mathscr{U}_-) < \dim(\mathscr{S})$ *splňující podmínku 1.*

Druhou podmínku můžeme formulovat tak, že hledáme podprostor s vlastností 1. maximální dimenze.

Označme $m = \dim(\mathscr{U}_-)$ dimenzi prostoru $\mathscr{U}_-$. Nechť $u_-^{(1)}, u_-^{(2)}, \cdots, u_-^{(m)}$ je báze prostoru $\mathscr{U}_-$ a nechť $U_- = [u_-^{(1)}, u_-^{(2)}, \cdots, u_-^{(m)}]$, tj. $\mathscr{R}(U_-) = \mathscr{U}_-$. Zřejmě pro každé $w \in \mathscr{U}_-$ existuje nějaký vektor $z \in \mathbb{R}^m$ tak, že $w = U_- z$. Pak zřejmě musí platit

$$w^T A w = z^T (U_-^T A U_-) z \leq 0,$$

tedy matice $U_-^T A U_-$ je negativně semidefinitní.

3.4.1 Konstrukce báze nekladného prostoru

Nekladný prostor je zcela analogický jako prostor nezáporný. Vezměme normalizovaný vlastní vektor v, který odpovídá kladnému vlastnímu číslu λ, tj.

$$Av = v\lambda, \quad \text{kde} \quad \lambda > 0, \quad \|v\| = 1.$$

Vynásobením rovnice vektorem v^T zleva dostáváme

$$\mathscr{Q}_A(v) = v^T A v = v^T v \lambda = \lambda > 0.$$

Takový vlastní vektor v tedy určitě nemůže být v prostoru $\mathscr{U}_+$. Pokud si naopak vezmeme vlastní vektor v, který odpovídá nekladnému vlastnímu číslu $\lambda \leq 0$, dostaneme zcela analogicky $\mathscr{Q}_A(v) \leq 0$ a takový vlastní vektor v tedy tedy zjevně *může* (obecně ale nemusí) patřit do $\mathscr{U}_-$.

Obecně můžeme nekladný prostor (resp. jeho bázi) konstruovat, stejně jako v předchozím případě, následujícím způsobem:

- Prostor $\mathscr{U}_-$ opět obsahuje vlastní vektory odpovídající nulovému vlastnímu číslu.
- Pak $\min(n_+, n_-)$ lineárních kombinací dvojic vlastních vektorů odpovídajících vždy jednomu kladnému a jednomu zápornému vlastnímu číslu (viz (3.1)–(3.6)) takových, abychom dostali tentokrát nekladný výsledek, tj. $\mathscr{Q}_A(w_\ell) = w_\ell^T A w_\ell \leq 0$, $\ell = 1, 2, \ldots, \min(n_+, n_-)$. Stačí např. volit α menší nebo rovno než jak tomu je v (3.3).
- Nakonec, v případě že $n_- > n_+$, vlastní vektory odpovídající $(n_- - n_+)$ záporným vlastním číslům, která jsou navíc.

Dimenze prostoru je zřejmě opět dána počtem nulových a záporných vlastních čísel, tj. $\dim(\mathscr{U}_-) = n_0 + \min(n_+, n_-) + \max(n_- - n_+, 0) = n_- + n_0$.

3.5 Vzájemné vztahy podprostorů

Víme, že existují čtyři důležité prostory se vztahem k matici A. Ne všechny jsou určené jednoznačně, i když některých případech mohou být jednoznačně dané všechny. To je třeba případ, kdy je matice pozitivně definitní. Pak mají nulový, neutrální a nekladný prostor dimenzi 0, tedy $\mathscr{U}_0 = \mathscr{U}_N = \mathscr{U}_- = \{0\}$, a nezáporný prostor má dimenzi rovnu rozměru matice, tedy $\mathscr{U}_+ = \mathbb{R}^n$. Obecné vztahy mezi prostory jsou popsány v tabulce 3.1.

Tabulka 3.1: Přehledné zobrazení vzájemných vztahů výše zmíněných důležitých podprostorů a to, jak je nutně nebo vhodně zvolit, aby do sebe byly dané podprostory vnořené.

Podprostor	**Jednoznačnost**	**Vzájemný vztah podprostorů**
$\mathscr{U}_0$	jednoznačně	$\forall \mathscr{U}_N : \mathscr{U}_0 \subseteq \mathscr{U}_N$
$\mathscr{U}_N$	nejednoznačně	
$\mathscr{U}_0$	jednoznačně	$\forall \mathscr{U}_+ : \mathscr{U}_0 \subseteq \mathscr{U}_+$
$\mathscr{U}_+$	nejednoznačně	
$\mathscr{U}_0$	jednoznačně	$\forall \mathscr{U}_- : \mathscr{U}_0 \subseteq \mathscr{U}_-$
$\mathscr{U}_-$	nejednoznačně	
$\mathscr{U}_N$	nejednoznačně	$\forall \mathscr{U}_N \, \exists \mathscr{U}_+ : \mathscr{U}_N \subseteq \mathscr{U}_+$
$\mathscr{U}_+$	nejednoznačně	$\mathscr{U}_0 \neq \mathscr{U}_N \Rightarrow \exists \mathscr{U}_+ : \mathscr{U}_N \nsubseteq \mathscr{U}_+$
$\mathscr{U}_N$	nejednoznačně	$\forall \mathscr{U}_N \, \exists \mathscr{U}_- : \mathscr{U}_N \subseteq \mathscr{U}_-$
$\mathscr{U}_-$	nejednoznačně	$\mathscr{U}_0 \neq \mathscr{U}_N \Rightarrow \exists \mathscr{U}_- : \mathscr{U}_N \nsubseteq \mathscr{U}_-$

Nás však budou zajímat především matice indefinitní (v takovém případě prostory dané jednoznačně nejsou) a určitá specifická volba těchto prostorů. Víme, že nulový prostor $\mathscr{U}_0$ je vždy podprostorem neutrálního prostoru $\mathscr{U}_N$. A zároveň můžeme vybrat nezáporný prostor $\mathscr{U}_+$ tak, aby neutrální prostor $\mathscr{U}_N$ byl jeho podprostorem. Stejně tak lze vybrat nekladný prostor $\mathscr{U}_-$ tak, aby neutrální prostor $\mathscr{U}_N$ byl jeho podprostorem. Pokud prostory vhodně zvolíme, bude tedy platit

$$\mathscr{U}_0 \subseteq \mathscr{U}_N \subseteq \mathscr{U}_+ \subseteq \mathbb{R}^n \quad \text{nebo} \quad \mathscr{U}_0 \subseteq \mathscr{U}_N \subseteq \mathscr{U}_- \subseteq \mathbb{R}^n, \tag{3.9}$$

respektive

$$\mathscr{U}_0 \subseteq \mathscr{U}_N \begin{array}{c} \subseteq \mathscr{U}_+ \subseteq \\ \subseteq \mathscr{U}_- \subseteq \end{array} \mathbb{R}^n. \tag{3.10}$$

V příští kapitole si ukážeme, jak lze z ortonormálních bází těchto podprostorů vystavět hledaný rozklad „Batman decompostion“; viz např. [7]. Pro to bude nutné zvolit si jednu ze dvou větví (cest) vnoření daných v (3.10). Větev vnoření si budeme volit podle toho, který z prostorů $\mathscr{U}_+$ resp. $\mathscr{U}_-$ má větší dimenzi, tj. podle počtu kladných a záporných vlastních čísel (včetně násobností). Pokud bude počet kladných vlastních čísel větší než nebo roven počtu záporných vlastních čísel ($n_+ \geq$

n_-), zvolíme si horní větev, a naopak, pokud bude počet záporných vlastních čísel větší než nebo roven počtu kladných vlastních čísel ($n_+ \leq n_-$), zvolíme si dolní větev. Menší z prostorů je totiž vždy přímo roven neutrálnímu prostoru, tj. v prvním případě $\mathscr{U} = \mathscr{U}_-$, v druhém případ $\mathscr{U} = \mathscr{U}_+$. Ve speciálním případě $n_+ = n_-$ zřejmě platí $\mathscr{U} = \mathscr{U}_- = \mathscr{U}_+$.

Bez újmy na obecnosti si tedy nyní vybereme první z výše uvedených variant. Nechť tedy

$$n_+ \geq n_- \quad \text{a uvažujme vnoření} \quad \mathscr{U}_0 \subseteq \mathscr{U}_N \subseteq \mathscr{U}_+ \subseteq \mathbb{R}^n \tag{3.11}$$

pro celý zbytek textu.

4 Rozklad zobrazující inercii

V nedávné době byl objeven nový typ rozkladu matice, který pomůže identifikovat inercii matice – antitriangular „Batman decomposition“, který je popsaný například v [8] a [7]. Tomuto způsobu rozkladu matice se budeme v této kapitole věnovat a podrobně se podíváme, jak funguje. Na celý postup se podíváme obecně, tedy se pokusíme odvodit a vysvětlit celý postup tohoto rozkladu.

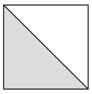
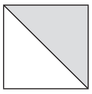
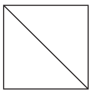
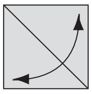
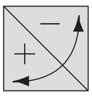
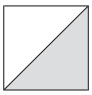
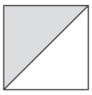
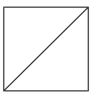
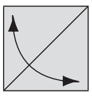
Poznámka 1. *Je důležité upřesnit používanou terminologii, aby se zabránilo nedorozuměním v souvislosti s různými významy slov a jejich českých překladů. Ujasněme si tedy následující pojmy (dané pojmy jsou přehledně vysvětlené také v tabulce 4.1):*

- *lower/upper triangular matrix — dolní/horní trojúhelníková matice, tj. matice obsahující nulové prvky nad/pod diagonálou;*
- *diagonal matrix — diagonální matice, tj. matice zároveň v dolním i horním trojúhelníkovém tvaru, tedy matice obsahující nenulové prvky pouze na hlavní diagonále;*
- *symmetric matrix — matice symetriká podle hlavní diagonály, tj. transponovaná matice je rovna matici původní;*
- *lower/upper antitriangular matrix — dolní/horní „antitrojúhelníková“ matice, tj. matice obsahující nulové prvky nad/pod vedlejší diagonálou;*
- *antidiagonal matrix — „antidiagonální“ matice, tj. matice obsahující nenulové prvky pouze na vedlejší diagonále;*
- *antisymmetric matrix — „symetrická matice podle vedlejší diagonály“.*

Co se týče posledního pojmu, v češtině se vyskytuje termín antisymetrická matice (viz [2]), což by se mohlo zdát být překladem anglického termínu antisymmetric matrix, avšak ve skutečnosti tyto dva pojmy značí dva odlišné typy matic. Zatímco anglický pojem antisymmetric matrix značí matici, která je symetrická podle vedlejší diagonály, český pojem antisymterická matice je označení pro takovou matici, která je symetrická podle hlavní diagonály až na znaménko, přesněji řečeno $A^T = -A$.

Český pojem antisymetrická matice, v některých publikacích (například [11]) také nazývaná kososymetrická matice, se do anglického jazyka překládá jako skew-symmetric matrix. Širší rozšíření termínu kososymetrická matice by bylo vhodnější, neboť by nám v takovém případě zůstal termín antisymetrická matice volný právě pro překlad anglického antisymmetric matrix.

Tabulka 4.1: Porovnání běžně používané terminologie v anglickém a českém jazyce s vysvětlením těchto pojmů. Za povšimnutí stojí zejména rozdíl mezi pojmy „antisymetrická matice“ a „antisymmetric matrix“. My budeme pracovat s maticemi typu „lower antitriangular“.

Anglický název	**Český název**		**Vysvětlení pojmu**
Struktura matice s ohledem na hlavní diagonálu			
lower triangular matrix	dolní trojúhelníková matice		matice, která má nad hlavní diagonálou pouze nulové prvky
upper triangular matrix	horní trojúhelníková matice		matice, která má pod hlavní diagonálou pouze nulové prvky
diagonal matrix	diagonální matice		matice, která má nad i pod hlavní diagonálou pouze nulové prvky
symmetric matrix	symetrická matice		matice, která je symetrická podle hlavní diagonály, tj. $A = A^T$
skew-symmetric matrix	**antisymetrická** (též kososymetrická, viz [11]) **matice**		matice, která je po změně znaménka symetrická podle hlavní diagonály, tj. $A = -A^T$
Struktura matice s ohledem na vedlejší diagonálu			
lower antitriangular matrix	dolní trojúhelníková matice podle vedlejší diagonály		matice, která má nad vedlejší diagonálou pouze nulové prvky
upper antitriangular matrix	horní trojúhelníková matice podle vedlejší diagonály		matice, která má pod vedlejší diagonálou pouze nulové prvky
antidiagonal matrix	diagonální matice s vedlejší diagonálou		matice, která má nad i pod vedlejší diagonálou pouze nulové prvky
antisymmetric matrix	symetrická matice podle vedlejší diagonály		matice, která je symetrická podle vedlejší diagonály

4.1 Antitrojúhelníkový tvar matice

Jelikož v češtině neexistuje konkrétní vhodný překlad námi velmi užívaného termínu (lower) *antitrianglular matrix*, bude dobré si tedy pro potřeby této práce české označení zavést. Pro naše potřeby tedy budeme takovou matici nazývat *maticí v dolním trojúhelníkovém tvaru podle vedlejší diagonály*, případně prostě *dolní antitrojúhelníková matice*.

Předmětem této kapitoly bude důkaz tvrzení, že libovolnou symetrickou matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A = A^T$, lze transformovat pomocí ortogonální podobnostní transformace (tj. ortogonální kongruence; transformace, která zachová nejen vlastní čísla matice a tedy i inercii, ale i symetrii matice) realizované maticí Q tak, že matice bude převedená do *blokově antitrojúhelníkového tvaru*, neboli, že existuje rozklad

$$A = Q^T M Q, \quad Q^T = Q^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

a

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y^T \\ 0 & 0 & X & Z^T \\ 0 & Y & Z & W \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \tag{4.1}$$

kde

$$Y \in \mathbb{R}^{n_1\times n_1}, \quad X \in \mathbb{R}^{n_2\times n_2}, \quad W \in \mathbb{R}^{n_1\times n_1} \quad \text{a} \quad Z \in \mathbb{R}^{n_1\times n_2},$$

matice X a W jsou symetrické čtvercové matice (různých velikostí) a matice Y je dolní antitrojúhelníková. Rozměry matic jsou navíc dány následujícím způsobem

$$\mathrm{in}(A) = \mathrm{in}(M) = (n_+, n_-, n_0), \quad n_1 = \min(n_+, n_-), \quad n_2 = \max(n_+, n_-) - n_1.$$

V následujícím textu podrobně ukážeme, jak tuto transformaci zkonstruovat, čímž mimochodem dokážeme, že vždy existuje.

4.2 Základní struktura transformace na dolní blokově antitrojúhelníkový tvar

Nyní se budeme zabývat hledáním podobnostní transformace Q, $Q^{-1} = Q^T$ takovou, aby platilo

$$Q^T A Q = M,$$

kde M je dolní blokově antitrojúhelníková, viz (4.1). Nebo-li hledáme rozklad matice

$$A = QMQ^T,$$

kde Q je ortogonální matice a M je dolní blokově antitrojúhelníková matice.

4.2.1 Transformační matice

Výše zmíněnou matici Q začneme sestavovat tak, že budeme hledat ortonormální báze jednotlivých prostorů a jejich ortogonálních doplňků. Postup sestavování matice bází podprostorů

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 \end{bmatrix}$$

je následující.

- Nejprve sestrojíme bázi Q_1 tak, že sloupce Q_1 tvoří bázi prostoru $\mathscr{U}_0$.
- Následně sestavíme bázi prostoru $\mathscr{U}_N$. Jelikož je prostor $\mathscr{U}_0$ podprostorem prostoru $\mathscr{U}_N$, tak při sestavování báze prostoru $\mathscr{U}_N$ využijeme bázi Q_1 prostoru $\mathscr{U}_0$ a doplníme jí o Q_2, jejíž sloupce tvoří bázi ortogonálního doplňku prostoru $\mathscr{U}_0$ v prostoru $\mathscr{U}_N$. Sloupce Q_1 a Q_2 tvoří bázi neutrálního prostoru $\mathscr{U}_N$.
- Jak jsme již řekli, bez újmy na obecnosti jsme si zvolili, že nyní budeme hledat bázi prostoru $\mathscr{U}_+$. Nyní využijeme toho, že prostor $\mathscr{U}_N$ je podprostorem prostoru $\mathscr{U}_+$, tzn. již existující bázi (sloupce $[Q_1, Q_2]$) prostoru $\mathscr{U}_N$ doplníme o Q_3, jejíž sloupce tvoří bázi ortogonálního doplňku prostoru $\mathscr{U}_N$ v prostoru $\mathscr{U}_+$. Tím získáme bázi celého prostoru $\mathscr{U}_+$, která je tvořena sloupci matic Q_1, Q_2 a Q_3.

  Poznámka 2. *Pokud by bylo $n_+ \leq n_-$, vybrali bychom si z (3.10) spodní větev a sestavovali bychom zde bázi prostoru $\mathscr{U}_-$. Postupovali bychom analogicky. Opět bychom využili vztahů platících mezi prostory, tedy $\mathscr{U}_N$ je podprostorem prostoru $\mathscr{U}_-$. Bázi prostoru $\mathscr{U}_N$ bychom doplnili o Q_3' tak, že sloupce Q_3' tvoří bázi ortogonálního doplňku prostoru $\mathscr{U}_N$ v prostoru $\mathscr{U}_-$.*

- Nakonec sestavíme matici Q_4. Chceme dostat bázi celého n-rozměrného prostoru, tedy musíme bázi prostoru $\mathscr{U}_+$ doplnit o bázi ortogonálního doplňku prostoru $\mathscr{U}_+$ v $\mathbb{R}^n$.

Nyní jsme tedy sestavili matici $Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 \end{bmatrix}$. Připomeňme, že

$$\mathrm{in}(A) = (n_+, n_-, n_0), \quad n_1 = \min(n_+, n_-), \quad n_2 = \max(n_+, n_-) - n_1.$$

Sloupce Q_1 jsou bází nulového prostoru $\mathscr{U}_0$ dimenze n_0, sloupce Q_2 bází ortogonálního doplňku $\mathscr{U}_0$ v neutrálním prostoru $\mathscr{U}_N$ dimenze n_1, sloupce Q_3 bází ortogonálního doplňku $\mathscr{U}_N$ v nezáporném prostoru $\mathscr{U}_+$ dimenze n_2 a sloupce Q_4 bází ortogonálního doplňku $\mathscr{U}_N$ v $\mathbb{R}^n$ velikosti $n - n_0 - n_1 - n_2 = n_1$. Teď se podíváme, jak bude vypadat podobnost realizovaná touto ortogonální maticí

$$\begin{aligned} Q^T A Q &= \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 \end{bmatrix}^T A \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Q_1^T A Q_1 & Q_1^T A Q_2 & Q_1^T A Q_3 & Q_1^T A Q_4 \\ Q_2^T A Q_1 & Q_2^T A Q_2 & Q_2^T A Q_3 & Q_2^T A Q_4 \\ Q_3^T A Q_1 & Q_3^T A Q_2 & Q_3^T A Q_3 & Q_3^T A Q_4 \\ Q_4^T A Q_1 & Q_4^T A Q_2 & Q_4^T A Q_3 & Q_4^T A Q_4 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Postupně se podrobně podíváme, jak vypadají jednotlivé bloky této matice.

4.2.2 Bloky v prvním řádku a prvním sloupci matice $Q^T AQ$

Nyní si musíme uvědomit, že Q_1 je báze nulového prostoru a pro každý vektor nulového prostoru platí, že v součinu s maticí A se rovná nule, tedy platí

$$AQ_1 = 0.$$

Transpozicí výrazu AQ_1 s využitím symetrie A dostaneme

$$(AQ_1)^T = Q_1^T A^T = Q_1^T A = 0.$$

Díky tomu dostáváme

$$Q_j^T AQ_1 = 0, \quad Q_1^T AQ_j = 0, \quad \text{kde} \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Matice (4.2) tak bude odteď vypadat takto

$$Q^T AQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_2^T AQ_2 & Q_2^T AQ_3 & Q_2^T AQ_4 \\ 0 & Q_3^T AQ_2 & Q_3^T AQ_3 & Q_3^T AQ_4 \\ 0 & Q_4^T AQ_2 & Q_4^T AQ_3 & Q_4^T AQ_4 \end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

4.2.3 Blok $(2, 2)$ matice $Q^T AQ$

Nyní se musíme zamyslet nad tím, co je lineárním obalem sloupců $[Q_1, Q_2]$. Odpověď již známe – je to neutrální prostor, který je definovaný právě tím, že platí

$$[Q_1 Q_2]^T A[Q_1 Q_2] = 0,$$

z čehož ihned vyplývá

$$Q_2^T AQ_2 = 0.$$

Tvar matice (4.3) se tedy dále mění na

$$Q^T AQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_2^T AQ_3 & Q_2^T AQ_4 \\ 0 & Q_3^T AQ_2 & Q_3^T AQ_3 & Q_3^T AQ_4 \\ 0 & Q_4^T AQ_2 & Q_4^T AQ_3 & Q_4^T AQ_4 \end{bmatrix}. \tag{4.4}$$

4.2.4 Bloky $(2, 3)$ a $(3, 2)$ matice $Q^T AQ$

V tomto momentě se už dostáváme do tvaru, který je blízko požadovaného antitrojúhelníkového tvaru (4.1). Zbývá pouze ukázat, že bloky

$$Q_3^T AQ_2 \quad \text{a} \quad Q_2^T AQ_3$$

jsou nulové. Jelikož jsme si z (3.10)–(3.11) vybrali první možnost, víme, že počet kladných vlastních čísel je větší než nebo roven počtu záporných vlastních čísel, tedy

$$n_+ \geq n_-.$$

V této chvíli je důležité se zamyslet nad tím, jak jsme budovali neutrální prostor $\mathscr{U}_N$. Začali jsme tak, že jsme si volili nějaký vlastní vektor v_1^+, který odpovídá kladnému vlastnímu číslu, dále jsme si vybrali vlastní vektor v_1^-, který odpovídá zápornému vlastnímu číslu. Tyto vektory jsme zkombinovali dohromady, tak aby se lineární kombinace rovnala vektoru w_1, který je ortonormální a hlavně neutrální, tedy

$$\alpha v_1^+ + \beta v_1^- = w_1, \quad \mathcal{Q}_A(w_1) = 0.$$

Analogicky jsme sestavili i další neutrální vektory $w_2, w_3, \cdots, w_{n_-}$, které tvoří sloupce matice Q_2, tedy

$$Q_2 = [w_1, w_2, w_3, \cdots, w_{n_-}].$$

Tyto vektory jsou na sebe kolmé, protože jsou to lineární kombinace různých vektorů, které jsou na sebe navzájem kolmé, jak jsme již ukázali.

V této chvíli jsme vyčerpali neutrální prostor a začínáme budovat jeho ortogonální doplněk v $\mathscr{U}_+$. Matici Q_3 vytvoříme ze zbylých vlastních vektorů, tj.

$$Q_3 = [v_{n_-+1}^+, v_{n_-+2}^+, \cdots, v_{n_+}^+].$$

Vynásobíme-li matici A získanou maticí Q_3, v podstatě vynásobíme maticí A každý sloupec matice Q_3. Jelikož je ale každý z těchto sloupců vlastním vektorem, tak dostaneme

$$\begin{aligned} AQ_3 &= [Av_{n_-+1}^+, Av_{n_-+2}^+, \cdots, Av_{n_+}^+] \\ &= [v_{n_-+1}^+\lambda, v_{n_-+2}^+\lambda, \cdots, v_{n_+}^+\lambda] = Q_3 \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

kde jednotlivá λ mohou být různá; na další postup to nemá vliv, proto je pro jednoduchost neindexujeme. Zbývá se tedy podívat na součin $Q_2^T AQ_3$, tedy

$$Q_2^T AQ_3 = Q_2^T Q_3 \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}. \tag{4.6}$$

Víme, že sloupce matice Q_2 jsou lineární kombinací vlastních vektorů a sloupce matice Q_3 jsou přímo vlastní vektory. Dále také víme, že všechny vlastní vektory (i jejich lineární kombinace) jsou na sebe navzájem kolmé, tudíž jejich součin bude roven nule, tedy

$$Q_2^T AQ_3 = 0; \quad \text{zřejmě také} \quad Q_3^T AQ_2 = (Q_2^T A^T Q_3)^T = (Q_2^T AQ_3)^T = 0^T = 0$$

z důvodů symetrie matice A.

Jako závěr sekcí 4.2.2, 4.2.3 a 4.2.4 tedy dostáváme, že transformace (4.2) má fakticky následující strukturu

$$Q^T AQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_2^T AQ_4 \\ 0 & 0 & Q_3^T AQ_3 & Q_3^T AQ_4 \\ 0 & Q_4^T AQ_2 & Q_4^T AQ_3 & Q_4^T AQ_4 \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

nulových a nenulových bloků.

4.3 Batman decomposition

Nyní jsme v situaci, kdy máme formálně stejnou strukturu nulových a nenulových bloků, jako jsme požadovali v (4.1). Zbývá nám pouze ukázat, jaké vlastnosti mají jednotlivé bloky. Od některých jsme požadovali aby byly symetrické (což bude pravděpodobně triviální splnit) od jiných aby byly dolní antitrojúhelníkové (což bude obtížnější). Označme si tedy pro jednoduchost jednotlivé bloky následujícím způsobem,

$$Q^T AQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_2^T AQ_4 \\ 0 & 0 & Q_3^T AQ_3 & Q_3^T AQ_4 \\ 0 & Q_4^T AQ_2 & Q_4^T AQ_3 & Q_4^T AQ_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{Y}^T \\ 0 & 0 & X & Z^T \\ 0 & \widetilde{Y} & Z & W \end{bmatrix}.$$

Začněme tedy nejdříve maticí X, kterou můžeme zapsat jako

$$X = Q_3^T AQ_3.$$

Nyní (za pomoci symetrie matice A) ukážeme, že $X^T = X$, tedy že matice X je symetrická,

$$X^T = (Q_3^T AQ_3)^T = Q_3^T A^T Q_3 = Q_3^T AQ_3 = X.$$

Stejně tak ukážeme symetrii matice W,

$$W = Q_4^T AQ_4,$$

$$W^T = (Q_4^T AQ_4)^T = Q_4^T A^T Q_4 = Q_4^T AQ_4 = W.$$

Jednoduše se nám tedy podařilo ukázat, že matice X a W splňují vlastnosti, které mají bloky matice v dolním antitrojúhelníkovém tvaru.

4.3.1 QR rozkladem k antitrojúhelníkovému bloku Y

Jak je již podle nadpisu jasné, budeme se věnovat tomu, jak dosáhnout přeměny z nynější matice

$$\widetilde{Y} = Q_4^T AQ_2$$

na námi požadovanou matici Y v dolním antitrojúhelníkovém tvaru. K tomu, abychom to dokázali, si potřebujeme ujasnit to, co již víme.

Hlavní věc, která je nám známá, je to, že $\widetilde{Y}$ má rozměry $n_1 \times n_1$, tedy je čtvercová. Součin, který jsme si zavedli jako blok $\widetilde{Y}$ je $Q_4^T AQ_2$. Jelikož chceme na pozici bloku $\widetilde{Y}$ získat blok Y, musíme blok $\widetilde{Y}$ vhodně modifikovat, v zásadě půjde o *QR rozklad* (viz např. [2, kapitola 3]). Máme dvě možnosti, jak toho docílit. Buď můžeme změnit bázi Q_2 nebo bázi Q_4. My si zvolíme první z daných možností, protože změna báze Q_4 by ovlivnila i bloky Z, Z^T a W. V námi zvoleném případě se změní pouze bloky $\widetilde{Y}$ a $\widetilde{Y}^T$, protože další bloky, které souvisí s volbou báze Q_2, jsou nulové.

Protože jsme rozhodli měnit bázi Q_2, musíme provádět transformaci matice $\widetilde{Y}$ zprava. Začněme tím, že si matici $\widetilde{Y}$ zapíšeme po řádcích následovným způsobem

$$\widetilde{Y} = \begin{bmatrix} y_1^T \\ y_2^T \\ \vdots \\ y_{n_1}^T \end{bmatrix}. \tag{4.8}$$

Nyní si sestavíme Householderovu transformační matici H_1 (též matici reflexe, resp. zrcadlení, viz např. [2, kapitola 3.2]) takovou, aby platilo

$$H_1 y_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \|y_1\| \end{bmatrix} = e_{n_1} \|y_1\|. \tag{4.9}$$

Taková transformace bude dozajista možná, protože si můžeme sestrojit pomocný normalizovaný vektor

$$q_1 = \frac{y_1 - e_{n_1} \|y_1\|}{\|(y_1 - e_{n_1} \|y_1\|)\|}.$$

Potom bude matice H_1 vypadat následovně $H_1 = I - 2q_1 q_1^T$. Nyní provedeme první z několika kroků transformace matice $\widetilde{Y}$ realizovaný právě maticí H_1,

$$\widetilde{Y} H_1^T = \begin{bmatrix} y_1^T \\ y_2^T \\ \vdots \\ y_{n_1}^T \end{bmatrix} H_1^T = \Big(H_1[y_1, y_2, \ldots, y_{n_1}] \Big)^T = [H_1 y_1, H_1 y_2, \ldots, H_1 y_{n_1}]^T. \tag{4.10}$$

Tedy dostaneme

$$\widetilde{Y} H_1^T = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & \widehat{y}_2 & \cdots & \widehat{y}_{n_1} \\ 0 & & & \\ \bullet & & & \end{bmatrix}^T, \tag{4.11}$$

kde $\bullet$ je jediný nenulový (kladný) prvek prvního *řádku* matice $\widetilde{Y} H_1^T$ a $\widehat{y}_k$ jsou ostatní transformované sloupce matice $\widetilde{Y}^T$,

$$\widehat{y}_k = H_1 y_k, \quad \text{kde} \quad k = 2, \ldots, n_1.$$

Jejich přesná struktura nás až tolik nezajímá, protože je budeme postupně transformovat podobným způsobem, jako jsme transformovali první vektor.

Nyní si analogicky zkonstruujeme matici H_2 tak, aby vektor $\widehat{y}_2$ zobrazila takovým způsobem, že ve výsledném vektoru bude předposlední prvek ($\bullet$) kladný (viz poznámka 3) a poslední prvek ($*$) zůstal nezměněný, tedy schematicky

$$H_2\widehat{y}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \bullet \\ * \end{bmatrix}. \tag{4.12}$$

Celková transformace matice $\widetilde{Y}$ nyní vypadá jako následující součin

$$\widetilde{Y} H_1^T H_2^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \widehat{\widehat{y}}_3 & \cdots & \widehat{\widehat{y}}_{n_1} \\ 0 & \bullet & & & \\ \bullet & * & & & \end{bmatrix}^T, \tag{4.13}$$

kde prvky $\bullet$ jsou kladné, prvek $*$ je nezměněný a vektor $\widehat{\widehat{y}}_k = H_2\widehat{y}_k$, $k = 3, \ldots, n_1$.

Poznámka 3. *Může vyjít prvek $\bullet$ nulový? Pokud se nad touto problematikou zamyslíme globálně, nulový prvek na vedlejší diagonále vyjít nemůže. Je to dáno hodností celé matice. Kdyby na místě daného prvku byla nula, znamenalo by to, že daný vektor je buď identicky nulový, nebo lze napsat jako lineární kombinaci dříve spočtených vektorů (tj. odpovídající řádek matice Y by byl lineární kombinací řádků, které jsou nad ním), tedy by byl lineárně závislý. Celá matice by pak měla o jeden lineárně závislý sloupec a tedy i jedno nulové vlastní číslo navíc, což se stát nemůže vzhledem k tomu, že všechny vlastní vektory odpovídající nulovým vlastním číslům leží v nulovém prostoru $\mathscr{U}_0$, tedy v prostoru generovaném sloupci matice Q_1.*

Analogicky postupujeme se všemi dalšími vektory do té doby, než se dostaneme do bodu, kdy je matice $\widetilde{Y} H_1^T H_2^T \cdots H_{n_1}^T$ v dolním trojúhelníkovém tvaru podle vedlejší diagonály. Splňuje tedy požadavky formulované pro matici M (4.1). Označme součin

$$H = H_{n_1} \cdots H_2 H_1 \quad \text{a} \quad Y = \widetilde{Y} H^T.$$

Naopak tedy platí

$$\widetilde{Y} = YH,$$

což je jistá forma výše zmíněného QR rozkladu matice $\widetilde{Y}$; matice Y je dolní antitrojúhelníková a matice H je ortogonální $H^{-1} = H^T$.[1]

[1] Poznamenejme, že jednotlivá Householderova zrcadlení H_k, $k = 1, \ldots, n_1$, jsou symetrická. Výše je tedy všude možné nahradit matice H_1^T, H_2^T, atd. přímo maticemi H_1, H_2, atd. Jejich součin H ovšem již symetrický není. Navíc, budeme-li matice H_k interpretovat jinak, např. jako rotace, symetrické již nebudou, ale QR rozklad půjde provést úplně stejným způsobem. Transpozice jsme tedy u matic H_k psali zejména z důvodů konzistence značení.

Výsledný blok Y, který je v dolním antitrojúhelníkovém tvaru, můžeme tedy rozepsat jako součin

$$Y = \widetilde{Y} H^T = Q_4^T A Q_2 H^T = Q_4^T A \widehat{Q}_2, \quad \text{kde} \quad \widehat{Q}_2 = Q_2 H^T.$$

Tím jsme bázi ortogonálního doplňku $\mathscr{U}_0$ v $\mathscr{U}_N$ tvořenou sloupci matice Q_2 nahradili novou „lepší“ bází tvořenou sloupci $\widehat{Q}_2$.

4.3.2 Změna báze ovlivní pouze bloky $\widetilde{Y}$ a $\widetilde{Y}^T$

Jako shrnutí můžeme říct, že námi původně zvolená matice Q_2 nevede na takový tvar bloku Y, který jsme požadovali. Nicméně namísto s maticí Q budeme pracovat s maticí $\widehat{Q}$, kterou lze zapsat jako

$$\widehat{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 & \widehat{Q}_2 & Q_3 & Q_4 \end{bmatrix}.$$

Pokud provedeme součin $\widehat{Q}^T A \widehat{Q}$, tak se změní všechny (resp. pouze) ty bloky matice, které ovlivňuje změna matice Q_2 na $\widehat{Q}_2$, tedy

$$\widehat{Q}^T A \widehat{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \widehat{Q}_2^T A Q_4 \\ 0 & 0 & Q_3^T A Q_3 & Q_3^T A Q_4 \\ 0 & Q_4^T A \widehat{Q}_2 & Q_4^T A Q_3 & Q_4^T A Q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y^T \\ 0 & 0 & X & Z^T \\ 0 & Y & Z & W \end{bmatrix},$$

viz (4.7). Tyto bloky jsou však ve většině případů nulové. Oba nenulové bloky, kterých se změna báze týká

$$Q_4^T A \widehat{Q}_2 = Y \quad \text{a} \quad \widehat{Q}_2^T A Q_4 = (Q_4^T A \widehat{Q}_2)^T = Y^T$$

jsou zjevně navzájem transponované. V následující sekci celou transformaci shrneme do věty.

4.4 Věta o Batman decomposition

Nyní, když jsme si již všechno potřebné dostatečně vysvětlili, můžeme zformulovat větu, která popisuje rozklad Batman decomposition symetrické matice. Tato věta je podrobně rozebraná například v [8].

Věta 7 (Věta o transformaci na dolní antitrojúhelníkový tvar)**.** *Nechť $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je libovolná symetrická matice, $A = A^T$, s inercií $\mathrm{in}(A) = (n_+, n_-, n_0)$, kde n_+, n_- a n_0 jsou počty postupně kladných, záporných a nulových vlastních čísel, tj. $n = n_+ + n_- + n_0$, $\mathrm{rank}(A) = n_+ + n_-$.*

Označme $n_1 = \min(n_+, n_-)$ a $n_2 = \max(n_+, n_-) - n_1$. Potom existuje ortogonální matice $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q^{-1} = Q^T$ a matice M blokově dolní trojúhelníková podle vedlejší diagonály (blokově dolní antitrojúhelníková) tak, že platí

$$A = QMQ^T, \quad \textit{resp.} \quad M = Q^T A Q, \tag{4.14}$$

přičemž

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y^T \\ 0 & 0 & X & Z^T \\ 0 & Y & Z & W \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

kde

$$Y \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}, \quad X \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}, \quad W \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1} \quad a \quad Z \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2},$$

matice X a W jsou symetrické, $X = X^T$, $W = W^T$, matice Y je dolní trojúhelníková podle vedlejší diagonály (dolní antitrojúhelníková).

Rozklad, resp. transformaci (4.14) matice A budeme nazývat Batman decomposition, resp. Batman transformation.

Důkaz. Důkaz této věty již není potřeba provádět, protože přímo vyplývá z diskuze provedené v předchozích kapitolách. □

Tvrzení věty je možné ještě nepatrně rozšířit následující diskuzí:

- Je-li matice A pozitivně definitní, pak $\dim(\mathscr{U}_0) = \dim(\mathscr{U}_N) = n_0 = 0$, dále $\dim(\mathscr{U}_+) = n_+ = n$ a $\dim((\mathscr{U}_+)^\perp) = 0$. Navíc $n_1 = 0$, $n_2 = n$ a transformace se zredukuje na triviální tvar

  $$Q^T A Q = M = \begin{bmatrix} X \end{bmatrix},$$

  matici Q lze volit např. $Q = I_n$. Symetrická matice $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je zřejmě pozitivně definitní.

- Je-li matice A negativně definitní, pak $\dim(\mathscr{U}_0) = \dim(\mathscr{U}_N) = n_0 = 0$, dále $\dim(\mathscr{U}_-) = n_- = n$ a $\dim((\mathscr{U}_-)^\perp) = 0$. Navíc $n_1 = 0$, $n_2 = n$ a transformace se zredukuje na triviální tvar

  $$Q^T A Q = M = \begin{bmatrix} X \end{bmatrix},$$

  matici Q lze volit např. $Q = I_n$. Symetrická matice $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je zřejmě negativně definitní.

- Je-li matice A pozitivně, resp. negativně semidefinitní (nikoliv však definitní), pak zřejmě $\dim(\mathscr{U}_0) = \dim(\mathscr{U}_N) = n_0 > 0$, $\dim(\mathscr{U}_+) = n_+ = n - n_0 < n$ a $\dim((\mathscr{U}_+)^\perp) = 0$, resp. $\dim(\mathscr{U}_-) = n_- = n - n_0 < n$ a $\dim((\mathscr{U}_-)^\perp) = 0$. Navíc $n_1 = 0$, $n_2 = n_+$, resp. $n_2 = n_-$ a transformace se zredukuje na tvar

  $$Q^T A Q = M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix}.$$

  Symetrická matice $X \in \mathbb{R}^{n_+ \times n_+}$, resp. $R^{n_+ \times n_+}$ je zřejmě pozitivně, resp. negativně definitní.

- Je-li matice A indefinitní – ať už s triviálním ($n_0 = 0$) nebo netriviálním ($n_0 > 0$) nulovým prostorem –, pak můžeme rozlišit tři případy:

- Pokud $n_+ = n_-$, pak $n_1 = n_+ = n_-$, $n_2 = 0$ a transformace se zredukuje na tvar

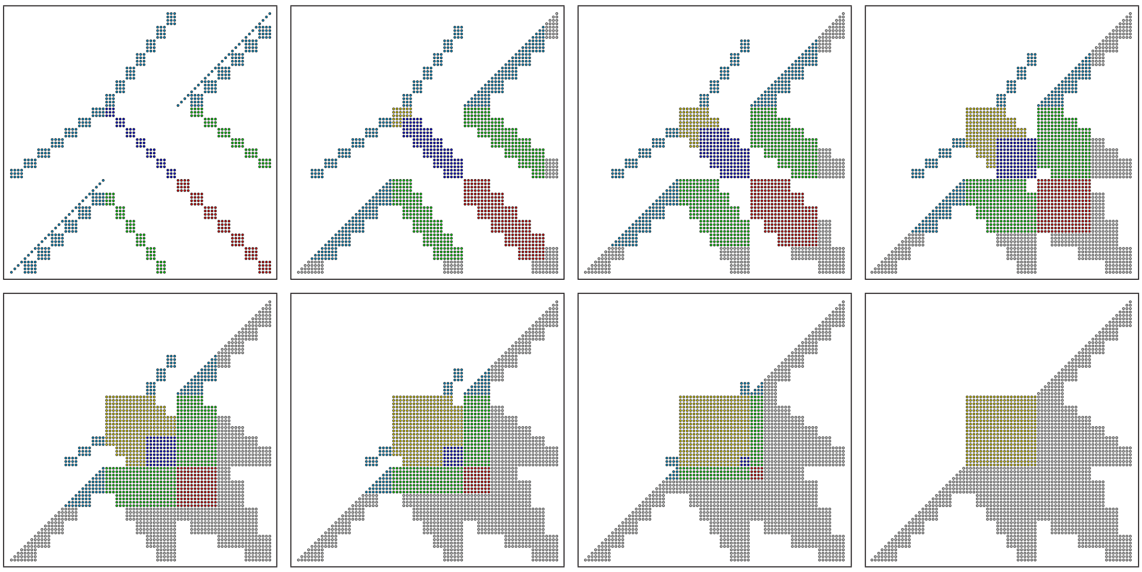
$$Q^T AQ = M = \begin{bmatrix} 0 & Y^T \\ Y & W \end{bmatrix}, \quad \text{resp.} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y^T \\ 0 & Y & W \end{bmatrix},$$

  tj. matice X zmizí, pro $n_0 = 0$, resp. $n_0 > 0$.
- Pokud $n_+ > n_-$, pak $n_1 = n_-$, $n_2 = n_+ - n_-$ a symetrická matice X je pozitivně definitní. Transformace se zredukuje pouze v případě $n_0 = 0$ tak, že zmizí první blokový nulový řádek a sloupec.
- Pokud $n_+ < n_-$, pak $n_1 = n_+$, $n_2 = n_- - n_+$ a symetrická matice X je negativně definitní. Transformace se zredukuje pouze v případě $n_0 = 0$ tak, že zmizí první blokový nulový řádek a sloupec.

Shrňme si tedy základní funkci rozkladu Batman decomposition. Pokud máme symetrickou matici A a zároveň známe i její rozklad Batman decomposition, potom pouhým pohledem na matici M tohoto rozkladu zjistíme inercii matice A. To dokážeme tak, že se podíváme nejprve na matici X. Znaménka prvků na její diagonále jsou buď všechna kladná nebo záporná a prozradí nám, že je matice X pozitivně, resp. negativně definitní. Pokud je matice X pozitivně definitní, víme, že bylo více kladných vlastních čísel, a pokud je matice X negativně definitní, víme, že bylo více záporných vlastních čísel. Zároveň pohledem na matici X zjistíme snadno její rozměry, přesněji řád, totiž hodnotu čísla n_2. O právě tolik bylo více kladných, resp. záporných vlastních čísel. Rozměr, přesněji řád, antitrojúhelníkového bloku je roven číslu n_1, tedy počtu záporných, resp. kladných vlastních čísel. Případný nulový blokový řádek a sloupec na začátku matice prozradí dimenzi nulového prostoru. Snadno tedy z těchto hodnot dopočítáme inercii matice M a tedy i A.

Závěr

Cílem této práce bylo shrnout a přehledně vysvětlit rozklad symetrické (obecně indefinitní) matice, tzv. „Batman decomposition“, který byl objeven teprve nedávno (viz [7], [8], [9]) a je tedy o to více zajímavým tématem. Rozklad jsme zformulovali a dokázali jeho existenci pro každou symetrickou matici pomocí standardních nástrojů algebry, z nichž některé jsme stručně připomněli na začátku této práce. Je důležité poznamenat, že práce se *nezabývá* tím, jak tento rozklad v praxi získat, tedy jak jednotlivé matice rozkladu vypočítat; zabývá rozkladem Batman decomposition čistě na teoretické úrovni. Ukázku výpočtu antitrojúhelníkové matice nicméně můžeme vidět na obrázku 4.1 (převzato z [6]).



Obrázek 4.1: Ukázka výpočtu Batman decomposition pro řídkou matici. Vlevo nahoře je zobrazena struktura nenulových prvků původní matice, vpravo dole pak antitrojúhelníkového faktoru. Mezi nimi je postupně šest vybraných mezivýsledků. Převzato z [6].

Jak jsme již zmínili, nejprve jsme si zopakovali a zavedli základní pojmy, jejichž znalost je pro čtenáře zásadní. Dále jsme si vysvětlili a popsali jak vypadají různé kvadratické formy a začali se věnovat případu, kdy je symetrická matice indefinitní. Následně jsme si ukázali několik vhodně zvolených zajímavých podprostorů symetrických indefinitních matic a zavedli jsme antitrojúhelníkový tvar matice. Tím jsme se dostali až k samotnému cíli této bakalářské práce.

Hlavní cíl této práce totiž bylo zavedení rozkladu Batman decomposition. Předvedli jsme, jak při odvození rozkladu využít aparát kvadratických forem. Ukázali vícero možných situací, zejména jak se výsledná matice rozkladu se bude lišit v závislosti na definitnosti původní matice. Celý postup jsme podrobně rozebrali a vysvětlili tak, aby byl srozumitelný všem čtenářům. Současně jsme také poukázali na některé související zákonitosti, které musí platit, a vše dostatečně vysvětlili.

Nejdůležitějším výstupem této práce je formulace věty o Batman decompositon, která popisuje to, jak se transformuje původní daná symetrická matice A na matici M v blokově antitrojúhelníkovém tvaru (trojúhelníkovém tvaru podle vedlejší diagonály). Tato nová matice M je velmi užitečná, jelikož z ní lze snadno na první pohled vyčíst inercii matice A, která je „schovaná“ v jednotlivých blocích matice M, zejména v bloku X. Je-li totiž původní (symetrická) matice A řádu n regulární (což je častý případ např. právě při řešení soustav lineárních rovnic), pak obsahuje jen n_+ kladných a n_- záporných vlastních čísel ($n = n_+ + n_-$) a blok X má rozměr $|n_+ - n_-|$ přičemž je pozitivně, resp. negativně definitní. Pokud $n_+ > n_-$, resp. $n_- > n_+$ a znaménko jeho definitnosti poznáme snadno pohledem na jeho diagonální prvky.

Literatura

[1] M. Benzi, G. H. Golub, J. Liesen: *Numerical solution of saddle point problems*, Acta Numerica 2005 (2005), pp. 1–137.

[2] J. Duintjer Tebbens, I. Hnětynková, M. Plešinger, Z. Strakoš, P. Tichý: *Analýza metod pro maticové výpočty, základní metody*, Matfyzpress, Praha, 2012.

[3] G. H. Golub, C. F. Van Loan: *Matrix Computations (Fourth Edition)*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 2012.

[4] I. Gohberg, P. Lancaster, L. Rodman: *Indefinite Linear Algebra and Applications*, Birkhäuser Verlag, Basel, Switzerland, 2005.

[5] R. Horn, C. Johnson: *Matrix Analysis, 2nd ed.*, Cambridge University Press, New York, USA, 2013.

[6] N. Mastronardi: *Symmetric antitriangular matrices and applications.* Prezentace z konference *SLA 2014 (Structural Numerical Linear and Multilinear Algebra: Analysis, Algorithms and Applications)*, 8.–12. září 2014, Kalamata, Řecko. Dostupné online: http://noether.math.uoa.gr/conferences/sla2014/sites/default/files/talks/mastronardi_sla2014.pdf

[7] N. Mastronardi, P. Van Dooren: *Recursive approximation of the dominant eigenspace of an indefinite matrix*, Journal of Computational and Applied Mathematics 236 (2012), pp. 4090–4104.

[8] N. Mastronardi, P. Van Dooren: *The antitriangular factorization of symmetric matrices*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, Volume 34, Number 1 (2013), pp. 173–196.

[9] N. Mastronardi, P. Van Dooren: *Rank-revealing decomposition of symmetric indefinite matrices via block anti-triangular factorization*, Linear Algebra and its Applications, Volume 502 (2016), pp. 126–139.

[10] J. Pestana, A. J. Wathen: *The antitriangular factorization of saddle point matrices*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, Volume 35, Number 2 (2014), pp. 339–353.

[11] J. Pytlíček: *Lineární algebra a geometrie*, skripta ČVUT, nakladatelství ČVUT, Praha, 1997.