Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Diplomová práce

Metoda řešení problémů ve výuce matematiky

Vypracovala: Bc. Dagmar Melicharová

Vedoucí práce: Mgr. Roman Hašek, Ph.D.

České Budějovice, 2017

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma Metoda řešení problémů ve výuce matematiky jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích .... ……………………..

Poděkování

Tímto bych velmi ráda poděkovala panu Mgr. Romanu Haškovi, Ph.D. za odborné vedení, cenné připomínky a doporučení, trpělivost a ochotu v průběhu zpracovávání mé diplomové práce.

Anotace

Tato diplomová práce se zabývá nestandardními aplikačními úlohami a problémy ve výuce matematiky na druhém stupni základní školy a strategiemi jejich řešení. Práce obsahuje analýzu žákovských řešení vybraných problémových úloh. Bylo zjištěno, že významná část vybraných žáků měla s řešením matematických problémů značné obtíže. Poslední část práce obsahuje sbírku řešených problémových úloh, která byla vytvořena na základě zjištěných výsledků při testování žáků. Sbírka úloh je zaměřena na výuku jednotlivých heuristických strategií.

Klíčová slova

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, kompetence k řešení problémů, problémové úlohy, problémové vyučování, výuková metoda řešení problémů, heuristika, heuristické strategie

Abstract

This master's thesis deals with unusual applications tasks and problem tasks in teaching mathematics at the upper primary school as well as with their solving strategies. The whole work is build around an analysis of pupils' solutions of selected problem tasks. It was found that solving the tasks caused considerable troubles to a significant part of the pupils. The final part of the thesis contains a collection of problem tasks along with their solutions that is focused on teaching heuristic problem solving strategies and based on the analysis results.

Key words

Framework Education Programme for Elementary Education, problem solving skills, problem tasks, problem-based instruction, problem solving as teaching method, heuristic, heuristic strategies

Obsah

Úvod

Ve své diplomové práci jsem se rozhodla věnovat pozornost nestandardním aplikačním úlohám a problémům, které jsou podle Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání důležitou součástí matematického vzdělávání (RVP ZV, 2016).

Cílem mé diplomové práce je provést rešerši tématu využití metody řešení problémů ve výuce matematiky a shrnout známé strategie řešení problémových úloh. Dalším cílem je analyzovat a porovnat žákovská řešení problémových úloh. Posledním cílem je vytvořit metodicky zpracovaný soubor problémových úloh, které budou vhodné pro rozvíjení kompetence k řešení problémů.

Tomuto tématu jsem se věnovala již v bakalářské práci a velmi mě tato oblast zajímá. Ráda bych využila prostor zde v úvodu k popsání toho, proč jsem se tímto tématem začala zabývat. Když jsem chodila na základní školu, matematika mě bavila hlavně tehdy, když jsem se mohla jednou za rok účastnit Matematického klokana[1]. Běžné vyučovací hodiny mi připadaly nudné a neužitečné. Pamatuji si, že jsme se problémovými úlohami vůbec nezabývali. Dodnes si vzpomínám na některé problémové úlohy, které jsem jako dítě řešila, ale nevzpomínám si na konkrétní vyřešenou rovnici nebo první narýsovaný trojúhelník. Tím chci říci, že dítě si zapamatovává věci, které samo objeví daleko snáze, než ty, na jejichž řešení dostane „recept“. To mě přivedlo k otázce, proč se ve školách při běžných hodinách matematiky téměř vůbec neřeší problémové úlohy. Mohlo by to být přínosnější než řešení rutinních úloh a navíc by to mohlo žáky bavit.

Od napsání své bakalářské práce jsem získala zkušenosti s výukou matematiky jak na základní, tak na střední škole. Tedy myslím, že se mi povedlo trochu nahlédnout „pod pokličku“ problémovým úlohám ve výuce. Dle mého názoru není kámen úrazu v tom, že by učitelé nechtěli problémové úlohy s žáky řešit nebo že by nevěděli, z jakých zdrojů je čerpat. Obtíž vidím v tom, že problémové úlohy vyžadují čas, některé dokonce hodně času. Vzhledem k hodinovým dotacím matematiky na základních školách je toto opravdu problém. Učitelé se ženou za tím, aby stihli probrat všechno učivo, které stanovuje jejich Školní vzdělávací program a na problémové úlohy většinou už čas nezbývá. Podle mého

[1] http://matematickyklokan.net/info.php

názoru někteří žáci „úspěšně“ zapomenou rutinní matematiku hned po testu, ale problémové úlohy, kterým „přišli na kloub“, jim mohou zůstat v hlavě velmi dlouho.

Řešení matematických problémů dává příležitost k rozvoji logického a kombinatorického myšlení (RVP ZV, 2016), které rutinní matematika příliš nerozvíjí. Ze své zkušenosti si troufám říci, že mnoho žáků základních či středních škol, ale i studentů vysokých škol, si myslí, že zkrátka nemají logické myšlení, a proto jim problémové příklady nejdou. Toto přesvědčení má původ pravděpodobně v nějaké špatné zkušenosti s příliš obtížným matematickým problémem. George Pólya říkal: *„Řešení úloh je praktická dovednost, jako je například plavání. Každou praktickou dovednost nabýváme napodobováním a cvikem. Pokud se chcete naučit plavat, napodobujete jiné lidi v tom, jak používají svoje ruce a nohy, jak drží hlavu nad vodou, a nakonec se naučíte plavat opakovaným cvičením. Pokud se chcete naučit řešit matematické úlohy, musíte pozorovat a napodobovat jiné lidi, jak si počínají, když řeší úlohy, a nakonec se naučíte řešit úlohy samostatně.“* (Pólya, 2016, s. 6-7) S tímto Pólyovo přesvědčením se plně ztotožňuji. Myslím si, že jediným důvodem, proč jsou žáci neúspěšní v řešení problémových úloh je, že nemají dostatek příležitostí se s nimi setkat. Proto jsem se o toto téma začala více zajímat a vznikla tato diplomová práce.

První kapitola mé práce se věnuje samotnému pojmu problémová úloha. Každý autor odborné literatury vysvětluje problémové úlohy po svém. Já jsem vybrala definice dvou různých autorů, které jsem v této kapitole podrobně popsala.

V druhé kapitole shrnuji zasazení problémových úloh do státních dokumentů, jako je Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání a Standardy pro základní vzdělávání. V první části této kapitoly se věnuji klíčovým kompetencím v základním vzdělávání a zaměřuji se na kompetence k řešení problémů. V další části se věnuji oblasti Matematika a její aplikace. Upřesňuji obsah této oblasti vzdělávání a uvádím, jakou pozici v něm mají právě nestandardní aplikační úlohy a problémy. V poslední části této kapitoly uvádím obsah a rozdělení oblasti nestandardní aplikační úlohy a problémy dle Standardů pro základní vzdělávání.

Třetí kapitolu jsem zaměřila na výukové metody. Tedy nejdříve uvádím pojem výukové metody a klasifikuji je dle dvou různých autorů a popisuji souvislost metody heuristické a metody řešení problémů. Dále se věnuji pouze problémovému vyučování. Nejdříve ho charakterizuji a poté uvádím postup učitele při řešení problémů s žáky při výuce. V této kapitole také hovořím o příčinách neúspěchů žáků při řešení problémových úloh.

Čtvrtá kapitola se věnuje konkrétním heuristickým strategiím, které se využívají při řešení problémových úloh z matematiky. Vzhledem k tomu, že těchto strategií existuje opravdu velmi mnoho, vybrala jsem ty, které jsou dle mého názoru nejpoužívanější. Každá strategie je zde blíže popsaná a ukázaná na konkrétní úloze.

V páté úloze se věnuji výsledkům zjišťování schopností žáků řešit problémové úlohy. Nejdříve popisuji, jakým způsobem zjišťování probíhalo a charakterizuji žáky, kteří se toho účastnili. Poté se v jednotlivých kapitolách zaměřuji vždy na jednu z testovaných úloh. Uvádím správné řešení a hodnotím úspěšnost žáků v dané úloze. Každá úloha je doprovázena ukázkami správných i špatných žákovských řešení a jejich rozborem. Na závěr kapitoly navrhuji postup na zlepšení schopností žáků v této oblasti.

Šestá kapitola je samotnou sbírkou problémových úloh. Tuto sbírku jsem rozdělila do pěti podkapitol dle oblasti, na kterou jsou zaměřené. Každá podkapitola obsahuje několik úloh zaměřených na výuku jedné či více heuristických strategií. Úlohy jsou za sebe řazeny od nejjednodušší po složitější.

1 Problémové úlohy - pojem

Dříve než se začneme věnovat problémovým úlohám podrobněji, je nutné upřesnit, co to problémová úloha je a jak se odlišuje od jiných typů úloh.

Nejprve bych ráda zdůraznila, že terminologie v této oblasti se může mírně lišit. Stejné typy úloh se mohou v různé literatuře objevovat také pod názvem příklady, cvičení, zajímavé úlohy, matematické hry nebo hlavolamy. V této diplomové práci používám pojmy úlohy, problémové úlohy nebo nestandardní aplikační úlohy, jelikož takto o tomto typu úloh hovoří Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání.

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání definuje nestandardní aplikační úlohy a problémy jako úlohy, jejichž správné řešení není zcela závislé na znalostech školské matematiky. Při řešení problémů je nutné do značné míry uplatnit logické myšlení (RVP ZV, 2016).

František Kuřina ve své knize *Matematika a řešení úloh* (Kuřina, 2011) třídí matematické úlohy do následujících tří skupin:

1. Cvičení
2. Úlohy (v užším slova smyslu)
3. Problémy

Při řešení matematického cvičení žákovi k vyřešení stačí znalost určitého postupu, který je určen zadáním cvičení. Jedná se pouze o aplikaci algoritmů, které se žák naučí během hodin matematiky. U úloh již žák kombinuje více různých postupů. Avšak jde pouze o typickou aplikaci teorie v praktických úlohách. Zadání úlohy napovídá algoritmy, pomocí kterých ji má žák řešit.

Schopnost řešit cvičení a úlohy Kuřina označuje jako matematickou gramotnost žáka či studenta. Říká, že všichni, kdož absolvují příslušný stupeň školy, by měli být matematicky gramotní.

Třetí kategorií jsou problémy, při jejichž řešení si student nevystačí pouze s matematickou gramotností. Ze zadání problému není jasný žádný algoritmus, proto musí student hledat vlastní cestu k vyřešení daného problému. Problémy vyžadují tvořivý přístup, hluboké soustředění a dostatek času. Typickými problémy jsou úlohy z matematických olympiád (Kuřina, 2011).

Jan Kopka popisuje matematické problémy ve své knize *Hrozny problémů ve školské matematice* (Kopka, 1999) pomocí tří složek tvořících matematický problém:

1. Výchozí situace = zadání problému, obsahuje veškeré známé informace či údaje
2. Cíl = řešení, kterého chce řešitel dosáhnout
3. Cesta = postup, který řešitel využívá, aby se dostal z výchozí situace do cíle

Obr. 1: Grafické znázornění matematického problému (Kopka, 1999, s. 14)

Tyto tři složky vytvářejí matematický problém, který je znázorněn na obr. 1. Z tohoto grafického znázornění je zřejmé, že řešitel musí nejdříve pochopit výchozí situaci a až poté může hledat cestu k dosažení cíle. Na základě tohoto vymezení matematického problému rozděluje Jan Kopka problémy na tři kategorie.

1. **Cvičení (rutinní problémy)**

Problém se nazývá matematické cvičení, nebo také rutinní problém, pokud řešitel zná všechny složky problému. Výchozí situace a cíl je zřejmý ze zadání a cesta je známa na základě matematických znalostí řešitele (Kopka, 1999). Příkladem cvičení může být, jestliže žák umí vypočítat povrch krychle a učitel mu zadá konkrétní rozměry krychle a vyžaduje vypočítání jejího povrchu.

Grafické znázornění rutinního problému dle Kopky je uvedeno na obr. 2.

Obr. 2: Grafické znázornění rutinního problému (Kopka, 1999, s. 15)

2. úlohy (nerutinní problémy)

Matematický problém nazveme úlohou nebo také nerutinním problémem, pokud má řešitel ze zadání jasnou výchozí situaci a cíl, kterého má dosáhnout. Úloha se od cvičení liší tím, že u ní neznáme cestu, jak se k cíli dopracovat (Kopka, 1999). Příkladem nerutinního problému může být, jestliže žák dokáže vypočítat povrchy základních geometrických těles a dostane zadání úlohy na vypočítání povrchu útvaru, který je z nich různě poskládaný.

Grafické znázornění nerutinního problému dle Kopky je uvedeno na obr. 3.

Obr. 3: Grafické znázornění nerutinního problému (Kopka, 1999, s. 15)

3. Zkoumání

Problém v matematice nazýváme zkoumání, jestliže je nám ze zadání známa pouze výchozí situace. Cíl problému není jednoznačně určen nebo není určen vůbec. Pokud není zadán cíl, nemůže být známa ani cesta. Příkladem zkoumání může být zadání Pascalova trojúhelníku bez konkrétního požadavku jen se slovy „zkoumejte tento trojúhelník“. (Kopka, 1999)

Grafické znázornění zkoumání dle Kopky je uvedeno na obr. 4.

Obr. 4: Grafické znázornění matematického zkoumání (Kopka, 1999, s. 16)

Pokud se nacházíme v roli učitele, který chce žákům předložit k řešení problémové úlohy, můžeme při jejich výběru snadno narazit na překážku, jak popisuje Kopka: „*Někdy je těžké určit, zda pro určitého žáka je zadaný problém rutinní či nikoliv. Dostatečným procvičováním postupně přechází určitý druh problémů z kategorie nerutinních do kategorie rutinních problémů. Navíc, v danou chvíli může být určitý problém pro některé žáky třídy rutinní a pro jiné nerutinní.*“ (Kopka, 1999, s. 16)

V této diplomové práci pojímám problémové úlohy dle definice Františka Kuřiny hlavně z toho důvodu, že mi jeho definice připadá „úplná“. Tím myslím, že zdůrazňuje důležitost tvořivého myšlení při hledání vlastní cesty k řešení a také dostatek času na řešení. Vysvětlení problémové úlohy dle Jana Kopky je dle mého názoru také výstižné, ale chybí mu právě zdůraznění tvůrčího procesu. Do Kopkovo problémových úloh by dle definice mohly spadat i takové rutinní úlohy, na které žák pouze nemá dostatečné matematické znalosti (tedy nezná cestu k řešení). Takové úlohy ale vůbec nemusí být problémové.

2 Pojem řešení problémů ve školských dokumentech

Na základních školách se celé vzdělávání opírá o Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (dále jen RVP ZV). Proto považuji za nutné podrobně popsat, jakou pozici v něm mají nestandardní aplikační úlohy a problémy. RVP ZV můžeme najít na internetových stránkách Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy[2] nebo Národního ústavu vzdělávání[3].

Dalším dokumentem, který zde budu zmiňovat, jsou Standardy pro základní vzdělávání, které stanovují minimální cíle vzdělávání po dokončení pátého a devátého ročníku. Ke Standardům pro základní vzdělávání existují také metodické komentáře, které udávají také vyšší požadavky, než jsou ty minimální. Oba tyto dokumenty můžeme najít na internetových stránkách Národního ústavu vzdělávání[4].

2.1 Rámcový vzdělávací program

Podle RVP ZV je cílem základního vzdělávání pomoci žákům utvářet a rozvíjet klíčové kompetence a tím jim poskytnout základ všeobecného vzdělání zaměřeného především na praktické jednání a situace blízké životu. (RVP ZV, 2016) „*Klíčové kompetence představují souhrn vědomostí, dovedností, schopností, postojů a hodnot důležitých pro osobní rozvoj a uplatnění každého člena společnosti*.“ (RVP ZV, 2016, s. 10)

Osvojování klíčových kompetencí je dlouhodobý a složitý proces, který nás provází od předškolního vzdělávání v průběhu celého života. Klíčové kompetence se navzájem různými způsoby prolínají, nejsou součástí konkrétního vyučovaného předmětu a je možné je získat jen jako výsledek celkového procesu vzdělávání. K utváření a rozvíjení klíčových kompetencí tedy směřuje veškerý vzdělávací obsah a činnosti, které ve škole probíhají. (RVP ZV, 2016) „*V etapě základního vzdělávání jsou za klíčové považovány: kompetence k učení; kompetence k řešení problémů; kompetence komunikativní; kompetence sociální a personální; kompetence občanské; kompetence pracovní.*“ (RVP ZV, 2016, s. 10)

[2] http://www.msmt.cz/vzdelavani/skolstvi-v-cr/skolskareforma/ramcove-vzdelavaci-programy
[3] http://www.nuv.cz/t/rvp-pro-zakladni-vzdelavani
[4] http://www.nuv.cz/t/zarazeni-standardu-do-rvp-zv

2.1.1 Kompetence k řešení problémů

Jednu ze šesti klíčových kompetencí tvoří právě kompetence k řešení problémů. Tuto klíčovou kompetenci si žáci utváří a rozvíjí (mimo jiné) řešením matematických problémových úloh, proto se touto kompetencí budu zabývat podrobněji. RVP ZV stanovuje, jaké úrovně kompetencí k řešení problémů by měl žák na konci základního vzdělávání dosáhnout. Vzhledem k důležitosti všech bodů cituji:

„Na konci základního vzdělávání žák:

- *vnímá nejrůznější problémové situace ve škole i mimo ni, rozpozná a pochopí problém, přemýšlí o nesrovnalostech a jejich příčinách, promyslí a naplánuje způsob řešení problémů a využívá k tomu vlastního úsudku a zkušeností*
- *vyhledá informace vhodné k řešení problému, nachází jejich shodné, podobné a odlišné znaky, využívá získané vědomosti a dovednosti k objevování různých variant řešení, nenechá se odradit případným nezdarem a vytrvale hledá konečné řešení problému*
- *samostatně řeší problémy; volí vhodné způsoby řešení; užívá při řešení problémů logické, matematické a empirické postupy*
- *ověřuje prakticky správnost řešení problémů a osvědčené postupy aplikuje při řešení obdobných nebo nových problémových situací, sleduje vlastní pokrok při zdolávání problémů*
- *kriticky myslí, činí uvážlivá rozhodnutí, je schopen je obhájit, uvědomuje si zodpovědnost za svá rozhodnutí a výsledky svých činů zhodnotí“*

(RVP ZV, 2016, s. 11)

2.1.2 Matematika a její aplikace

Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace klade důraz na porozumění základním myšlenkovým postupům a pojmům v matematice a pochopení vztahů mezi nimi. Je založena na aktivních činnostech s matematickými objekty a na užití matematiky v reálných situacích. Umožňuje žákům získat matematickou gramotnost, která hraje nezastupitelnou roli v praktickém životě.

Obsah vzdělávacího oboru Matematika a její aplikace na 2. stupni základní školy se dělí na čtyři tematické okruhy: číslo a proměnná, závislosti, vztahy a práce s daty, geometrie v rovině a v prostoru, nestandardní aplikační úlohy a problémy. Dále se zaměřím pouze na nestandardní aplikační úlohy a problémy.

Problémové úlohy by měly provázet výuku matematiky po celou dobu základního vzdělávání a měly by prolínat všechny tematické okruhy. Řešení problémových úloh vede žáka k rozvoji kombinatorického a logického myšlení, ke kritickému usuzování a ke srozumitelné a věcné argumentaci. Dále rozvíjí schopnost žáků spolupracovat na řešení problémových úloh a situací z běžného života a následně využít získané řešení v praxi. Během řešení nestandardních aplikačních úloh se žáci učí pochopit a analyzovat daný problém, utřídit údaje a podmínky, provádět situační náčrty a řešit optimalizační úlohy. Také tím poznávají možnosti matematiky a skutečnosti, že k výsledku je možné dospět různými způsoby. (RVP ZV, 2016)

Očekávané výstupy okruhu nestandardní aplikační úlohy a problémy RVP ZV rozděluje do dvou oblastí:

M-9-4-01 *„užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací*

M-9-4-02 *řeší úlohy na prostorovou představivost, aplikuje a kombinuje poznatky a dovednosti z různých tematických a vzdělávacích oblastí“* (RVP ZV, 2016, s. 37)

Učivo, které by mělo naplňovat očekávané výstupy tohoto okruhu, by mělo obsahovat především číselné a logické řady, číselné a obrázkové analogie a logické a netradiční geometrické úlohy. (RVP ZV, 2016)

2.2 Standardy pro základní vzdělávání

Standardy pro základní vzdělávání uvádí ke každému očekávanému výstupu z RVP ZV ilustrativní úlohu, kterou by měl žák na konci druhého stupně zvládnout. Úlohy jsou na minimální úrovni. Standardy rozdělují očekávané výstupy tematické oblasti nestandardní aplikační úlohy a problémy dle indikátorů:

M-9-4-01

1. *„žák vyhledá v textu úlohy potřebné údaje a vztahy*
2. *žák řeší jednoduchou úlohu*
3. *žák ověří výsledek úlohy*

M-9-4-02

1. *žák určí reálnou podobu jednoduchého trojrozměrného útvaru z jeho obrazu v rovině*
2. *žák využívá představu o podobě trojrozměrného útvaru při řešení jednoduchých úloh z běžného života"* (Standardy pro základní vzdělávání, 2013)

Ke Standardům pro základní vzdělávání byly vydány metodické komentáře, které rozšiřují samotné Standardy. Uvádí ilustrativní úlohy ke všem oblastem matematického vzdělávání a také je doprovází metodickými komentáři pro učitele. Úlohy jsou uváděné vždy ve třech úrovních (minimální, optimální, excelentní). Díky tomu poskytují učitelům materiály pro práci se žáky na nižší úrovni, ale také s žáky velmi talentovanými.

3 Řešení problémů jako výuková metoda

V současné době mají učitelé na výběr z velké škály výukových metod. Za jednu z nich je považována i metoda řešení problémů. Než se budeme podrobně této metodě věnovat, ráda bych vysvětlila pojem výuková metoda a vymezila pozici metody řešení problémů mezi ostatními výukovými metodami.

Výukovou metodu (z řeckého slova „methodos“) definuje pedagogický slovník jako postup, cestu či způsob vyučování. Jedná se o činnost učitele, která vede žáka k dosažení stanovených cílů vzdělávání (Průcha, 2001). Podobně hovoří o metodách i Jarmila Skalová, která říká: *„V didaktice pod pojmem vyučovací metoda chápeme způsoby záměrného uspořádání činností učitele i žáků, které směřují ke stanoveným cílům.“* (Skalková, 2007, s. 181) Podle Skalové je výuková metoda zásadním prostředkem k dosahování cílů v jakékoli uvědomělé činnosti (Skalková, 2007).

3.1 Klasifikace výukových metod

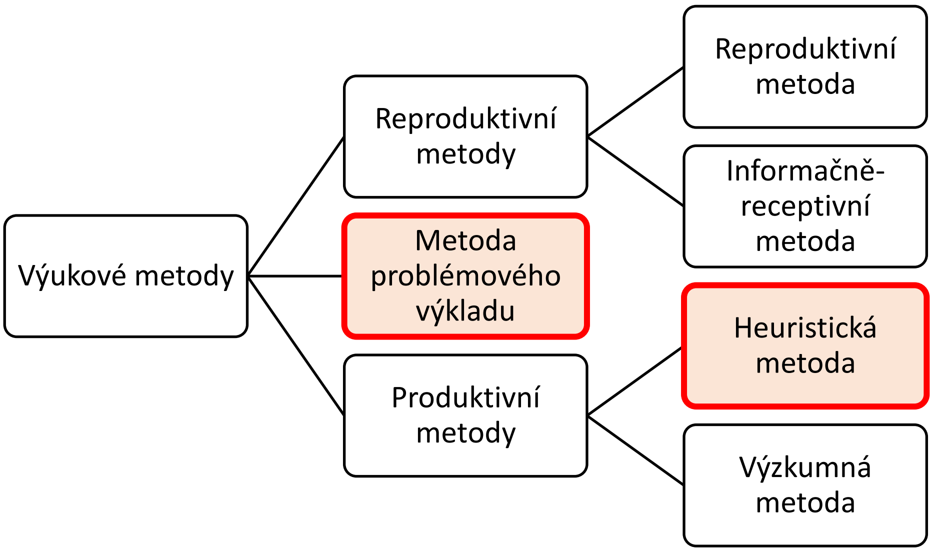
Jak už jsem zmínila výše, existuje velké množství různých výukových metod. Tento vysoký počet vedl a dosud vede autory odborné literatury k pokusům o jejich přesné klasifikování. Různí autoři si pro klasifikaci metod výuky vybírají různá kritéria. Existují klasifikace např. podle fází vyučovacího procesu (utváření, upevňování, prověřování vědomostí), podle způsobu prezentace (slovní, názorné, praktické) podle charakteru specifické činnosti (uplatňované v jednotlivých vyučovacích předmětech) či obecně podle způsobu interakce mezi učitelem a žáky (frontální, skupinové, individuální). (Průcha, 2001) Přehledné klasifikování metod výuky může mít velký význam pro učitele, jelikož si díky ní utváří jasnou představu o podstatě a funkcích jednotlivých metod. Také se jimi může inspirovat a inovovat své dosud používané postupy (Maňák, 2003). Jako ukázku zde uvádím dvě různé klasifikace výukových metod.

Nejčastěji se v odborné literatuře můžeme setkat s klasifikací podle Josefa Maňáka. Ten používá kombinovaný pohled na výukové metody a klasifikuje je podle kritéria stupňující se složitosti edukačních vazeb. Rozděluje metody na tři skupiny, totiž metody klasické, metody aktivizující a metody komplexní (Maňák, 2003). Kompletní přehled metod dle Maňáka jsem shrnula do tab. 1.

<table>
<tr><th colspan="3">Klasické výukové metody</th></tr>
<tr><th>Slovní</th><th>Názorně-demonstrační</th><th>Dovednostně-praktické</th></tr>
<tr><td>Vyprávění</td><td>Předvádění a pozorování</td><td>Napodobování</td></tr>
<tr><td>Vysvětlování</td><td>Práce s obrazem</td><td rowspan="2">Manipulování, laborování a experimentování</td></tr>
<tr><td>Přednáška</td><td>Instruktáž</td></tr>
<tr><td>Práce s textem</td><td></td><td>Vytváření dovedností</td></tr>
<tr><td>Rozhovor</td><td></td><td>Produkční metody</td></tr>
<tr><th colspan="3">Aktivizující metody</th></tr>
<tr><td>Metody diskusní</td><td>Metody situační</td><td>Metody inscenační</td></tr>
<tr><td colspan="2">Metody heuristické, řešení problémů</td><td>Didaktické hry</td></tr>
<tr><th colspan="3">Komplexní výukové metody</th></tr>
<tr><td>Frontální výuka</td><td>Skupinová a kooperativní výuka</td><td>Brainstorming</td></tr>
<tr><td>Partnerská výuka</td><td>Sugestopedie a superlearning</td><td>Otevřené učení</td></tr>
<tr><td>Projektová výuka</td><td>Výuka dramatem</td><td>Hypnopedie</td></tr>
<tr><td rowspan="2">individualizovaná výuka, samostatní práce žáků</td><td>Výuka podporovaná počítačem</td><td>Televizní výuka</td></tr>
<tr><td>Učení v životních situacích</td><td>Kritické myšlení</td></tr>
</table>

Tab. 1: Přehled výukových metod dle Maňáka

Jako druhou uvádím klasifikaci dle Isaaka Jakovleviče Lernera, která je uvedena v knize *Školní didaktika* (Kalhous, 2002) Lerner klasifikuje výukové metody podle charakteru poznávacích činností žáka při osvojování obsahu vzdělávání a podle základní charakteristiky činnosti učitele, který výuku organizuje. Uvádí pět výukových metod, které zařazuje do tří skupin tak, jak je zobrazeno na obr. 5.



Obr. 5: Klasifikace výukových metod dle Lernera

Reproduktivní metody jsou takové, při kterých si žák osvojuje hotové vědomosti a poté je dokáže reprodukovat. Produktivní metody jsou naopak takové, kdy žák získává nové poznatky převážně díky samostatnému zkoumání a tvořivé činnosti. Metoda problémového výkladu je řazena samostatně, protože jde o přechodnou metodu mezi reproduktivními a produktivními metodami. Tato metoda předpokládá osvojování hotových informací, tak i tvořivou a samostatnou činnost žáků (Kalhous, 2002).

3.2 Heuristika a řešení problémů

V obou výše zmíněných klasifikacích jsem zvýraznila výukové metody, které se týkají problémového vyučování a s tím spojené heuristiky. Můžeme si všimnout, že Maňák řadí heuristické metody a řešení problémů do jedné metody. Oproti tomu Lerner považuje heuristiku za metodu produktivní a problémové vyučování řadí na přechod mezi produktivními a reproduktivními metodami. Ráda bych tyto rozdíly uvedla na pravou míru. Podle mého názoru spolu tyto dvě oblasti velmi úzce souvisí tak, že je nelze zcela odtrhnout, ale zároveň je nelze stavět na stejnou pozici. Nejdříve si definujeme pojem heuristika.

Heuristika je vědní odvětví, které vzniklo již ve starověku a zabývalo se metodami a postupy při objevování. Heuristikou se zabývali takoví velikáni v oblasti matematiky jako např. Pappus, Descartes, Leibnitz nebo také český matematik a filosof Bernard Bolzano. Jejich úvahy ovšem nebyly známy široké veřejnosti. O rozšíření heuristiky i mezi širší vrstvy učitelů se postaral George Pólya, který o ní napsal v roce 1944 knihu s názvem *How to solve it* (Kopka, 1999). Sám Pólya definuje huristiku takto: *„Heuristika, nebo také hereutika, nebo „ars inveniendi“ byl název jistého oboru výzkumu, ne zcela přesně popsaného, náležícího k logice, filozofii nebo psychologii, často jen načrtnutého, zřídkakdy popsaného detailně a dnes téměř zapomenutého. Cílem heuristiky bylo studovat metody a zásady objevování a vynalézání.“* (Pólya, 2016, s. 114)

Nyní už můžeme vymezit vztah, který je mezi heuristikou a řešením problémů. Již v první kapitole jsme zjistili, že při řešení problémové úlohy vlastně hledáme neznámou cestu od zadání k řešení. Hledání cesty bychom mohli jinak nazvat slovy jako pátrání či objevování řešení. Objevováním se zabývá právě heuristika. Tím pádem bychom mohli tvrdit, že při řešení problémů využíváme heuristické strategie. Tomuto tématu se věnuje celá čtvrtá kapitola.

3.3 Problémové vyučování

Člověk se učí v průběhu celého života tím, že je nucen každodenně řešit problémy a problémové situace, které mu vstupují do cesty. Takové mimoškolní učení založené na řešení problémů běžného života vede k získávání zkušeností, znalostí a dovedností. Marie Kličková říká, že *„vyučování a učení může probíhat efektivně jedině tehdy, jestliže se styl a metody práce ve škole přiblíží co nejvíce situacím, s nimiž se setkáváme v běžném životě.“* (Kličková, 1989, s. 10) Možná právě proto je problémové vyučování považováno za jednu z efektivních výukových metod (Kličková, 1989).

Problémová výuka je založena na principu umělého navozování problémových situací. Tyto situace vznikají pomocí problémů, které žákům předkládá učitel v podobně problémových úloh. Při navození takové situace žák pociťuje nedostatek vědění a nutkavou potřebu tento problém překlenout. Při řešení problému vzniká potřeba myšlení (Kličková, 1989). Vztah problémové situace a myšlenkového procesu definoval Rubinštejn takto *„Výchozím bodem myšlenkového procesu je problémová situace. Člověk začíná myslet, když u něho vyvstane potřeba něco pochopit. Počátkem myšlení je problém, otázka, údiv, rozpaky, nesrovnalost. Nutnost myslet vzniká tam, kde stojí před člověkem nový cíl, problém, okolnost či podmínky činnosti, k jejichž zvládnutí známé prostředky nepostačují. Myšlení začíná v okamžiku analyzování problémové situace.“* (Kličková, 1989, s. 12)

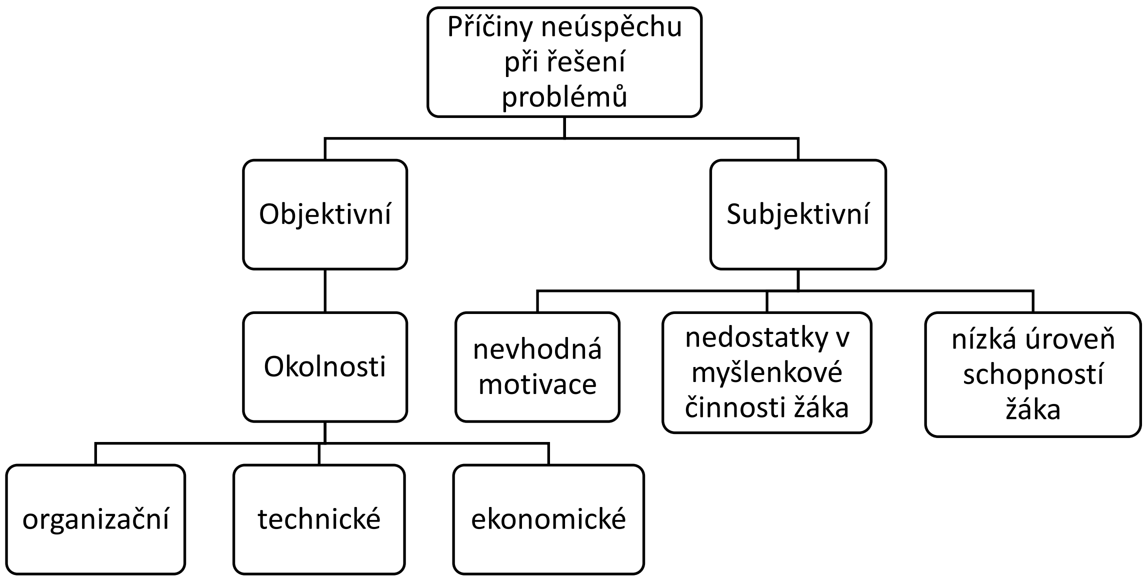
K předkládání problémů žákům může docházet různými formami. Zadaný problém může být zadán ústně, písemně či graficky. Způsob zadání se odvíjí od stanoveného cíle, který si učitel stanoví před zadáním daného problému. Nejdůležitější na zadaném problému je, aby ho byli žáci schopni řešit a zároveň pro ně nebyl příliš jednoduchý nebo příliš složitý. Aby ho mohli žáci řešit, musí mít osvojeny všechny potřebné znalosti nutné k vyřešení problému. Po vyřešení problému je nutné nové poznatky shrnout a řádně procvičit. Proto se problémová výuka prokládá neproblémovými úlohami (Pecina, 2009).

Aby došlo k navození správné problémové situace, musí být správně zvolena problémová úloha, která má tuto situaci navodit. Na tomto základě vznikla kritéria, která musí problémová úloha splňovat. Tato kritéria uvádí Pavel Pecina (Pecina, 2009).

- Problémová úloha musí být v logické návaznosti s dosavadními poznatky žáků
- Musí být přiměřená žákovým možnostem
- Musí mít problémový obsah (obtíž)
- Musí mít povahu nového poznatku
- Musí u žáka vyvolat chuť poznávat.

3.3.1 Příčiny neúspěchu žáků

Při problémovém vyučování můžeme narazit na mnohá úskalí, která vedou k neúspěchu žáků při řešení problémových úloh. Grafické znázornění příčin neúspěchu při řešení problémů dle Kličkové uvádím na obr. 6.



Obr. 6: Příčiny neúspěchu při řešení problémů (Kličková, 1989)

Subjektivní příčiny neúspěchu z velké většiny pramení ve výše zmíněných zásadách správného problémového úkolu. Nevhodná motivace může být způsobena nevhodným výběrem úlohy, která v žákovi nevzbudí problémovou situaci a touhu po řešení. Nedostatky v myšlenkové činnosti žáka se projevují především neschopností žáka prozkoumat podmínky a pochopit jednotlivé části zadání úlohy. Nízká úroveň schopnosti žáka se projeví, pokud je žák postaven před problémovou úlohu, pro kterou nemá dostatečné matematické znalosti. Nutno říci, že všechna tato úskalí neúspěchu je možné odstranit. Tento úkol patří učiteli, který se na problémovou výuku musí důkladně připravovat. Prvním důležitým krokem je správný výběr úloh pro konkrétní skupinu žáků a druhým krokem je správný postup při řešení úloh (Kličková, 1989). Tento postup podrobně popisuji níže.

3.3.2 Postup při řešení problémů ve výuce

George Pólya formuloval čtyři kroky pro úspěšné řešení problémových úloh ve výuce matematiky. Jedná se o rady pro učitele, který má být žakovým průvodcem a oporou při řešení problémů. Pólya klade velký důraz na důležitost učitele ve vyučovacím procesu žáka. Hlavní úkol učitele je pomáhat svým žákům. Tento úkol ovšem vyžaduje čas, zkušenosti, oddanost a zdravé zásady. Pokud by žák byl ponechán sám s úlohou, mohlo by se stát, že nedosáhne žádného pokroku. Učitel by měl žákovi radit přirozeně a nenápadně tak, aby nesděloval informace, které mohou žáka samotného napadnout. Měl by pouze směrovat žáka správnou cestou pomocí různých otázek. Pólya uvádí fáze řešení matematické úlohy včetně otázek, které by měl v daných fázích učitel pokládat žákovi. Každá fáze je při řešení úlohy velmi důležitá. Jistě se může stát, že žáka napadne výjimečná myšlenka a má hotové řešení, aniž by prošel všemi fázemi řešení úlohy. Takové případy jsou ale pouze šťastnou náhodou. (Pólya, 2016) Níže popisuji podrobně každou fázi řešení problémové úlohy včetně otázek.

1. **Porozumění úloze**

Nejprve by měl žák plně porozumět dané úloze. Je pošetilé řešit nějakou úlohu, pokud nerozumíte zadání. Proto by úloha měla být srozumitelně zadaná. Učitel by měl žákům pokládat tyto otázky: *Co je neznámá? Jaké jsou údaje? Jaké jsou podmínky?* Žák by měl pozorně zkoumat úlohu a dokázat na tyto otázky odpovědět. Pokud je s danou úlohou spojen nějaký obrázek, měli by si ho žáci v této fázi nakreslit a v něm ukázat známé údaje, podmínky i neznámou. Také je nutné zvolit vhodné označení objektů či přiřadit objektům názvy pro přehlednost. Poté, co žáci dokáží odpovědět na první tři otázky, by se měli zamyslet ještě nad dalšími otázkami: *Je možné splnit dané podmínky? Jsou podmínky dostačující? Neobsahují podmínky rozpor?* Odpověď na tyto otázky je sice pouze předběžná, ale může být velmi užitečná (Pólya, 2016).

2. **Navržení plánu řešení**

V druhé fázi jde především o představu, pomocí jakých výpočtů či postupů je možné úlohu řešit. Tento proces od pochopení zadání v první fázi až ke vzniku plánu řešení může být velmi obtížný a zdlouhavý. Může jít o myšlenku, která se utváří postupně, nebo se také může objevit náhle, jako „chytrý nápad“ po několika neúspěšných pokusech či delším váhání. Úkolem učitele v této fázi je nabádat žáky ke správným myšlenkám, pomocí kterých sami přijdou na tu hlavní, která jim pomůže úlohu vyřešit. Učitel pokládá žákům například tyto otázky: *Znáte nějakou podobnou úlohu? Znáte nějakou úlohu, která má podobnou neznámou? Umíte úlohu přeformulovat? Umíte si představit nějakou obecnější úlohu? Speciálnější úlohu? Analogickou úlohu? Umíte vyřešit alespoň část úlohy?* Takových otázek existuje celá řada. Učitel se vlastně snaží napovědět strategii, pomocí které lze úlohu vyřešit. Samozřejmě se může stát, že žáci objeví zcela nový způsob řešení. Pokud žáci přijdou na nějaký způsob řešení, měl by učitel ještě položit otázky: *Využili jste všechny údaje? Vzali jste v potaz všechny dané podmínky?* (Pólya, 2016)

3. **Realizace plánu**

Pokud již máme navržený plán řešení úlohy, je na čase tento plán realizovat. Tato část už není příliš obtížná. Vyžaduje především pečlivost a trpělivost během provádění všech částí řešení. V této fázi musí učitel především vést žáky ke kontrole každého kroku, který provedou. Vhodné otázky jsou: *Vidíte jasně, že tento krok je správný? Umíte dokázat, že je správný?* Žák by měl být schopen zdůvodnit každý krok svého řešení (Pólya, 2016).

4. **Pohled zpět**

V poslední fázi je velmi důležité překontrolovat celé řešení a zjistit, zda je výsledek opravdu správný. Většina žáků, pokud dokončí řešení nějaké úlohy, zavřou sešit a poohlížení se po něčem jiném. Ovšem ohlédnutí zpět za řešením úlohy je velmi důležitou součástí řešení, jelikož při přezkoumávání řešení si žáci nejlépe upevňují své znalosti a rozvíjí schopnost řešit úlohy. Učitel by měl motivovat žáky pomocí otázek: *Dokážete překontrolovat výsledek? Umíte zkontrolovat důkaz? Uměli byste odvodit výsledek jinak? Umíte použít výsledek nebo metodu na řešení jiné úlohy?* Učitel by měl v žácích vzbuzovat dobrý pocit z vyvinutí úsilí při řešení dané úlohy tím, že daný postup využijí i v jiné úloze a tím se jejich vykonaná práce stává užitečnější (Pólya, 2016).

4 Strategie řešení problémových úloh

Heuristické strategie jsou způsoby, pomocí kterých objevujeme řešení problémových úloh. Tyto strategie ovšem vždy nezaručují správnost řešení. Z toho důvodu je vždy nutné zkontrolovat, že konečné řešení je opravdu správné. (Kopka, 1999) Heuristických strategií existuje velmi mnoho, ale ne všechny jsou použitelné na základní škole. Vybrala jsem osm strategií, které jsou podle mého názoru dostatečně jednoduché a je možné je využívat při řešení problémových úloh na druhém stupni základní školy. Jedná se o tyto:

- Pokus - omyl
- Pokus – ověření – korekce
- Systematické experimentování
- Grafické znázornění
- Algebraická cesta
- Analogie
- Zavedení pomocného prvku
- Cesta nazpět

V následujících podkapitolách blíže popisuji každou z těchto strategií. Každá strategie je názorně řešena na ukázkové úloze. Pro prvních pět strategií jsem použila stejnou ukázkovou úlohu, aby bylo vidět, že jeden problém je možno řešit různými strategiemi. Také je nutné zmínit, že málokterá úloha se řeší pouze jednou strategií, většinou se jedná o kombinaci jedné či více strategií, které společně vedou k řešení dané úlohy. Většinu těchto strategií žák používá intuitivně, aniž by věděl, že jde o nějakou popsanou strategii. Z žákova řešení problému je často obtížné poznat, jakou strategii žák použil, jelikož postupy či části postupů všech strategií mohou probíhat pouze v žákových představách a nemusí být nutně znázorněny na papíře.

4.1 Pokus – omyl

Tato strategie je považována za nejjednodušší heuristickou strategii. Jedná se o zcela náhodné experimentování při řešení problému. Hlavní nevýhodou této strategie je, že může vést k řešení až po velmi mnoha pokusech a také nemusí vést k řešení vůbec (Kopka, 2005). Ukážeme si tuto strategii na konkrétní ukázce.

Ukázka č. 1: Farmář má na zahradě vypuštěná pouze prasata a slepice. Když se podíval z okna, vidí, že tam má právě 23 hlav a 76 nohou. Kolik je na zahradě prasat a kolik slepic? (Kopka, 2005)

Řešení (pokus – omyl): Pokud žák řeší tuto úlohu metodou pokus-omyl může jeho zápis řešení vypadat například takto:

$10 \times 4 = 40$	$7 \times 4 = 28$	$18 \times 4 = 72$	$15 \times 4 = 60$
$\underline{13 \times 2 = 26}$	$\underline{16 \times 2 = 32}$	$\underline{5 \times 2 = 10}$	$\underline{8 \times 2 = 16}$
66	50	82	76

Výsledkem tedy je, že na dvorku je 15 prasat a 8 slepic. Postup spočívá v tom, že žák volí náhodně počet prasat a slepic tak, aby jich dohromady bylo 23 (dle počtu hlav) a dopočítává, kolik nohou odpovídá této volbě. Ve chvíli kdy žák dostane 76 nohou, získal jedno možné řešení. Tento výsledek je správný, ale mohlo by trvat velmi dlouho, než by žák vyzkoušel všechny možnosti, pokud by se dlouho nemohl trefit do správného řešení.

4.2 Pokus – ověření – korekce

Tato strategie je určitou modifikací strategie pokus-omyl, která vede většinou k řešení až po mnoha pokusech, nebo nemusí vést k řešení vůbec. Pokus – ověření – korekce je zdokonalená a obsahuje jasné zákonitosti. Řešitel nejprve odhadne řešení, ověří ho a následující odhad volí na základě předchozího výsledku. Odhady a jejich ověření je vhodné pro přehlednost zaznamenávat do tabulky. Tato strategie se využívá například při dělení víceciferného čísla dvojciferným číslem. Nejprve je nutné odhadnout, kolikrát je dělitel v příslušném čísle přítomný a poté se výpočtem ověří správnost odhadu. Tuto strategii také procvičujeme řešením algebrogramů (Eisenmann, 2015a). Nyní bych ráda ukázala tuto strategii na stejné ukázce, jako strategii pokus-omyl.

Ukázka č. 1: Farmář má na zahradě vypuštěné pouze prasata a slepice. Když se kouknul z okna, vidí, že tam má právě 23 hlav a 76 nohou. Kolik je na zahradě prasat a kolik slepic? (Kopka, 2005)

Řešení (pokus – ověření – korekce): Jak jsem již zmiňovala v popisu této strategie, je vhodné si zaznamenávat zjištěné údaje do tabulky. To nám pomůže objevit zákonitosti v jednotlivých pokusech a tím dojít k řešení rychleji. V tomto případě budeme do prvního a druhého sloupce zaznamenávat počty jednotlivých zvířat (vždy dohromady 23) a ve třetím sloupci vypočítáme ke každému pokusu počet noh. Čtvrtý sloupec ukazuje, jak se od předchozího pokusu změnil počet nohou. Podle toho během několika pokusů zjistíme, že pokud zvýšíme počet prasat o jedno a ubereme jednu slepici, zvýší se počet nohou o dvě. Podle toho již v dalším kroku víme, jaké je řešení. Postup uvádí tab. 2.

	Počet prasat	Počet slepic	Celkem nohou	Rozdíly
1. pokus	9	14	64	
2. pokus	10	13	66	+2
3. pokus	15	8	**76**	+10

Tab. 2: Řešení ukázky č. 1 (pokus - ověření – korekce)

4.3 Systematické experimentování

Systematické experimentování, které se také nazývá řešení pomocí hrubé síly, spočívá v hledání řešení pomocí určitého systému v provádění pokusů. Každý pokus je mírně pozměněný oproti předchozímu. Podstatou je, že si řešitel zvolí nějaký počáteční stav a od toho se pomalu posouvá k řešení úlohy. Jako počáteční stav se většinou určuje jeden z extrémních stavů úlohy. Při využívání této strategie se někdy vyplatí použít k výpočtům počítač, jelikož ruční počítání může být velmi zdlouhavé (Eisenmann, 2013). Pro představení této strategie opět použiji ukázku č. 1.

Ukázka č. 1: Farmář má na zahradě vypuštěné pouze prasata a slepice. Když se kouknul z okna, vidí, že tam má právě 23 hlav a 76 nohou. Kolik je na zahradě prasat a kolik slepic? (Kopka, 2005)

Řešení (Systematické experimentování): Hlavním rozdílem od předchozí strategie je v tom, že zde se řeší všechny možnosti krok po kroku. Tedy se nejdříve zvolí extrémní příklad, že prase bude 1 a slepic 22 (dohromady 23). Další pokusy se vždy budou lišit tím, že se zvýší počet prasat a sníží počet slepic. Toto se opakuje, dokud nedojdeme k celkovému počtu 76 nohou. Celý postup je uveden v tab. 3. Na první pohled je vidět, že tato strategie sice prozkoumá všechny možnosti, ale je zbytečně zdlouhavá.

	Počet prasat	Počet slepic	Celkem nohou
1. pokus	1	22	48
2. pokus	2	21	50
3. pokus	3	20	52
4. pokus	4	19	54
5. pokus	5	18	56
6. pokus	6	17	58
7. pokus	7	16	60
8. pokus	8	15	62
9. pokus	9	14	64
10. pokus	10	13	66
11. pokus	11	12	68
12. pokus	12	11	70
13. pokus	13	10	72
14. pokus	14	9	74
15. pokus	15	8	**76**

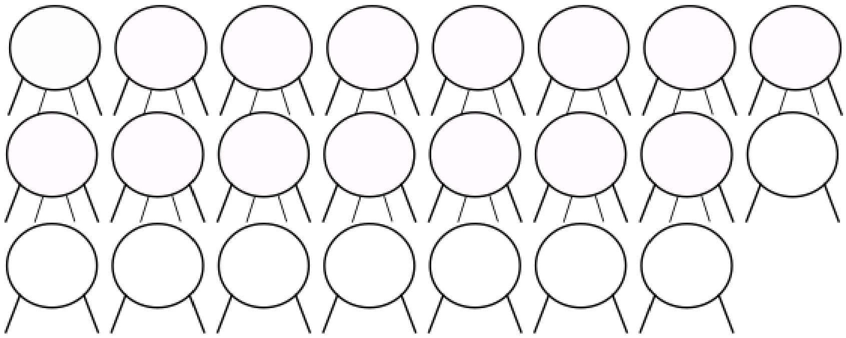
Tab. 3: Řešení ukázky č. 1 (systematické experimentování)

4.4 Grafické znázornění

V této strategii se může jednat o prosté vytvoření náčrtku ke geometrické úloze, či znázornění jakékoli jiné úlohy pomocí obrázku. Pokud se jedná o geometrickou úlohu, je přirozené, že se váže k nějakému náčrtku. Vytvoření přehledného náčrtku včetně všech známých a neznámých částí může velmi ulehčit cestu k řešení nebo dokonce dovést žáka až k řešení úlohy. Grafické znázornění ale nepatří pouze ke geometrickým úlohám. Může se jednat o jakýkoli obrázek, který umožní lepší vhled do dané situace a pomůže s řešením daného problému (Pólya, 2016). Abychom si ukázali, že nemusí jít pouze o znázornění geometrické úlohy, vrátíme se opět k ukázce č. 1 z předchozích strategií.

Ukázka č. 1: Farmář má na zahradě vypuštěné pouze prasata a slepice. Když se kouknul z okna, vidí, že tam má právě 23 hlav a 76 nohou. Kolik je na zahradě prasat a kolik slepic? (Kopka, 2005)

Řešení (grafické znázornění): Tuto úlohu je možné řešit tak, že si nakreslíme 23 tělíček a ke každému dvě nohy. Poté budeme přidávat postupně další dvě nohy (tím nahradíme slepice prasaty), dokud nerozdáme všech 76 nohou. Řešení je znázorněno na obr. 7.



Obr. 7: Řešení ukázky č. 1 (grafické znázornění)

4.5 Algebraická cesta

Algebraická cesta většinou není považována za výzkumnou strategii při řešení problému. Ovšem od chvíle, kdy žák dokáže používat jednu či více proměnných, používá tuto strategii velmi často. Algebraická cesta nejčastěji spočívá v označení neznámých prvků pomocí proměnných a sestavení jedné či více rovnic. Nevýhoda této strategie je v tom, že může působit velmi abstraktně. Vyřešíme si pomocí této metody opět ukázku č. 1.

Ukázka č. 1: Farmář má na zahradě vypuštěné pouze prasata a slepice. Když se kouknul z okna, vidí, že tam má právě 23 hlav a 76 nohou. Kolik je na zahradě prasat a kolik slepic? (Kopka, 2005)

Řešení (algebraická cesta): Označíme si počet prasat p a počet slepic s. Poté můžeme sestrojit soustavu dvou rovnic:

$$p + s = 23$$

$$4p + 2s = 76$$

Po vyřešení této soustavy zjistíme řešení $p = 15$ a $s = 8$.

4.6 Analogie

Analogie je určitý druh podobnosti. Pokud řešíme obtížnou úlohu, můžeme se pokusit najít analogickou úlohu, která bude pojednávat podobně o analogickém objektu. Nalezení a vyřešení takového analogického problému, nám může pomoci k vyřešení původního problému. V některých úlohách můžeme použít výsledek analogické úlohy, v jiných využijeme metodu řešení analogické úlohy, abychom vyřešili úlohu původní. Analogický problém může mít mnoho podob. Například obdélník může být analogický ke kvádru, trojúhelník ke čtyřstěnu atd. Ovšem analogie může spočívat také v nahrazení velkých čísel numericky jednoduššími čísly. Strategie analogie hraje v řešení matematických problémů důležitou roli, většinou ji žáci využívají intuitivně. Nevýhodou analogie je, že při zvolení špatné analogie, či špatného odhadu analogických vlastností objektů, vede ke špatnému výsledku (Kopka, 1999). Ukáži tuto strategii na konkrétním příkladu.

Ukázka č. 2: Je dána prázdná tabulka 8 × 8 čtverečků. Doplň do této tabulky čísla -1, 0, 1 tak, aby ve všech řádcích, sloupcích a obou diagonálách byly součty navzájem různé (Eisenmann, 2015b).

Řešení: pomocí analogie můžeme tuto úlohu řešit tak, že si vytvoříme analogickou tabulku (tab. 4), která bude menší a přehlednější. Zvolíme si tabulku velikosti 3 × 3 čtverečky. Tím jsme získali analogický a o mnoho jednodušší problém. Pokud se do této analogické tabulky pokusíme vložit čísla -1, 0, 1, budeme muset experimentovat.

-1	1	0
-1	1	1
-1	1	-1

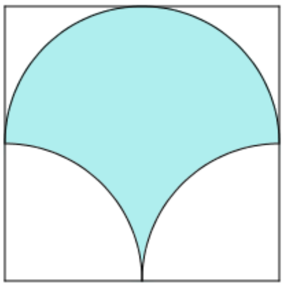
Tab. 4: Analogická úloha pro ukázku č. 2

Po několika pokusech zjistíme, že tento experiment nemá řešení. Pokusíme se zjistit, proč tuto úlohu nelze vyřešit. Pokud se zamyslíme, kolik existuje tříčlenných součtů z daných čísel, vyjde nám -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3. Součtů je celkem 7. Ve čtverci musíme vytvořit součty pro 3 řádky, 3 sloupce, 2 diagonály. To je 8 součtů, tedy tento problém je neřešitelný. Pokud se vrátíme k tabulce 8 × 8, zjistíme, že pro tuto tabulku existuje 17 součtů a máme jich vytvořit 18, tedy i tato úloha je neřešitelná.

4.7 Zavedení pomocného prvku

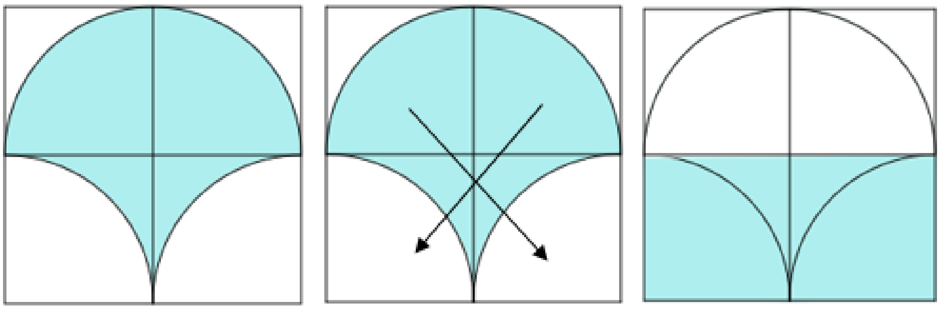
Tato strategie spočívá v zavedení pomocného prvku do problémové úlohy s vidinou zjednodušení úlohy. Pomocný prvek bychom mohli definovat jako objekt, který se v původním znění úlohy viditelně nevyskytuje, ale my ho tam vložíme z důvodu lepší dosažitelnosti řešení. V geometrických úlohách může být pomocným prvkem bod, přímka či složitější geometrický útvar. V úlohách algebraických se jedná nejčastěji o zavedení nové pomocné proměnné (Přibyl, 2014).

Ukázka č. 3: Na obr. 8 je znázorněný čtverec o délce strany 12 cm a v něm je světle modře vybarvená „kapka" vytvořená z kruhových oblouků. Vypočítej obsah vybarvené části (Maláč, 1981).



Obr. 8: Ukázka č. 3 zadání

Řešení: V tomto případě mohou jako pomocný prvek sloužit přímky, které rozdělí čtverec na čtyři části. Pokud si poté přeskupíme vybarvené části v obrázku, jednoduše zjistíme, že je vybarvená přesně polovina čtverce. Tento postup je znázorněn na obr. 9.



Obr. 9: Řešení ukázky č. 3 (zavedení pomocného prvku)

Ze zadání víme, že čtverec má délku strany 12 cm. Tím pádem vzniklý obdélník má strany dlouhé 12 cm a 6 cm. Obsah této části je $12 \times 6 = 72\ cm^2$.

4.8 Cesta nazpět

Tato strategie spočívá v tom, že začínáme cílem a snažíme se krok po kroku dostat k počátečnímu zadání. Na začátku řešení problému se soustředíme na cíl, tedy na situaci, ve které bychom rádi byli. Tuto situaci si vizuálně představíme a položíme si otázku: *Ze které předchozí pozice bychom se sem mohli dostat?* S pomocí zdravého rozumu dokážeme odpovědět na otázku a tím se přiblížit k cíli. Když zjistíme předchozí krok, překontrolujeme, zda už nejsme v počátečním stavu. Pokud ne, celý postup opakujeme, dokud se nedostaneme k počátku úlohy. Nakonec je nutné seřadit kroky opačně tak, aby šly správně za sebou od zadání k cíli (Pólya, 2016) .

U této strategie se můžeme setkat s jistou psychologickou obtíží spočívající v obrácení toku myšlenek. Pro některé žáky je velmi obtížné změnit řetězec myšlenkových operací a pracovat na problému přesně v opačném směru než obvykle. Pokud není tato strategie pečlivě vysvětlena, může i velmi schopný žák získat psychologickou nechuť k tomuto obrácenému pořádku, která mu v její pochopení zabrání (Pólya, 2016). Tuto strategii můžeme použít v následující ukázce.

Ukázka č. 4: Tři kamarádi hrají hru, ve které vždy jeden prohrává, a dva vyhrávají. Ten, který prohrál, musí zdvojnásobit částky peněz, které mají v tu chvíli jeho spoluhráči. Domluvili se, že budou hrát tři hry. V průběhu hraní každý hráč jednou prohrál a na konci měl každý hráč 8 Kč. Kolik korun měli jednotliví hráči před začátkem hry? (Kopka, 1999)

Řešení: V zadání nejsou rozlišeni jednotliví hráči, ani není dáno kdo, ve které hře prohrál. Určíme si tedy, že první hráč prohrál v první hře, druhý v druhé a třetí v třetí hře. Nyní můžeme data zaznamenat do tabulky. Jak znázorňuje tabulka, postupujeme od posledního kola a přibližujeme se k počátečnímu stavu. Poslední řádek tabulky ukazuje výsledek.

	1. hráč	2. hráč	3. hráč
Konec 3. hry	8	8	8
Konec 2. hry	4	4	16
Konec 1. hry	2	14	8
Počáteční stav	**13**	**7**	**4**

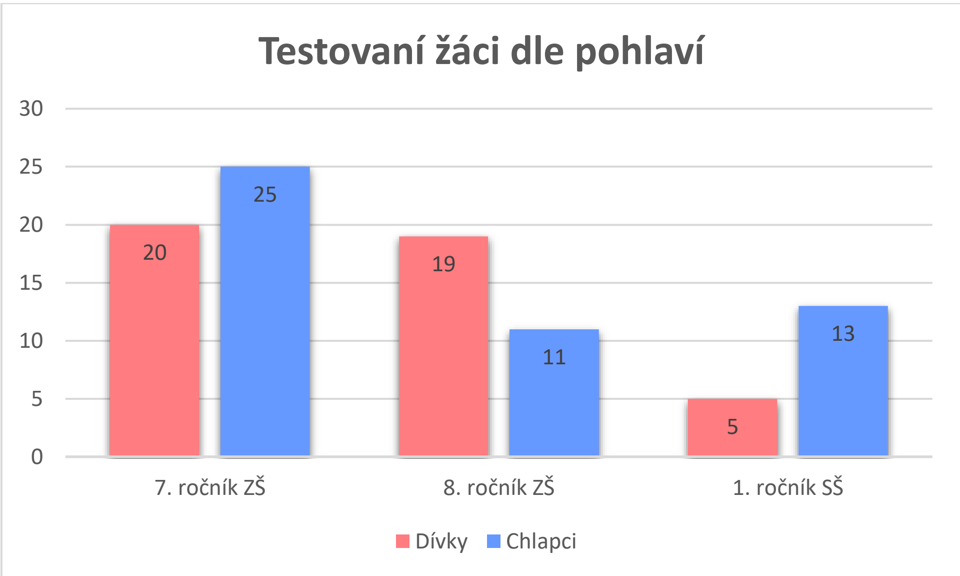
Tab. 5: Řešení ukázky č. 4

5 Ověření schopnosti žáků řešit problémové úlohy

Předmětem mého ověřování bylo zjišťování schopností žáků řešit nestandardní aplikační úlohy a problémy. Zaměřila jsem se také na to, jaké strategie žáci při řešení využívají. Pro žáky byl vytvořen nestandardizovaný didaktický test (příloha 1), který obsahuje tři problémové úlohy. Dále jsem vytvořila krátký dotazník (příloha 2), který se týkal charakteristiky samotných žáků a obtížnosti úloh. Na vypracování úloh a vyplnění dotazníku měli žáci jednu vyučovací hodinu, tedy 45 minut.

5.1 Charakteristika testovaných žáků

Ověřování jsem prováděla v sedmém a osmém ročníku základní školy ve Velešíně a v prvním ročníku na střední odborné škole v Českých Budějovicích. Na základní škole se testování účastnilo celkem 45 žáků sedmých ročníků a 31 žáků osmých ročníků. Dále jsem testovala také 18 žáků prvního ročníku střední školy. Celkem tedy 94 žáků.



Graf 1: Přehled testovaných žáků dle pohlaví

5.2 Didaktický test

Nestandardizovaný didaktický test, který jsem sestavila pro účely ověřování, se skládá ze tří problémových úloh. Každá úloha se dá řešit několika způsoby a je možné na ní aplikovat minimálně dvě různé strategie z těch, které popisuji v předchozí kapitole. V následujících kapitolách analyzuji řešení každé úlohy zvlášť. U každé úlohy uvádím komentář, ve kterém je uvedeno, proč jsem zvolila právě takovou úlohu. Úlohy jsem doplnila správným řešením. Nejedná se o jediné, ani o nejlepší řešení. Je to pouze mnou předpokládané řešení, které by mohli žáci použít. Více různých řešení potom dokazují správná žákovská řešení, ve kterých jsou mnohdy použity jiné, přesto správné postupy. Ke každé úloze uvádím vždy několik správných a několik chybných žákovských řešení.

5.3 Analýza řešení úlohy 1

Zadání: Marťanský farmář chová na své farmě různá mimozemská zvířátka. Hned pod oknem má výběh pro čtyřnožky a pětinožky. To jsou tam běžná zvířátka a je o nich známo, že čtyřnožky mají tři oči a pětinožky mají dvě oči. Farmář se kouká z okna a vidí celkem 57 nohou a 34 očí. Kolik má farmář čtyřnožek a kolik pětinožek?

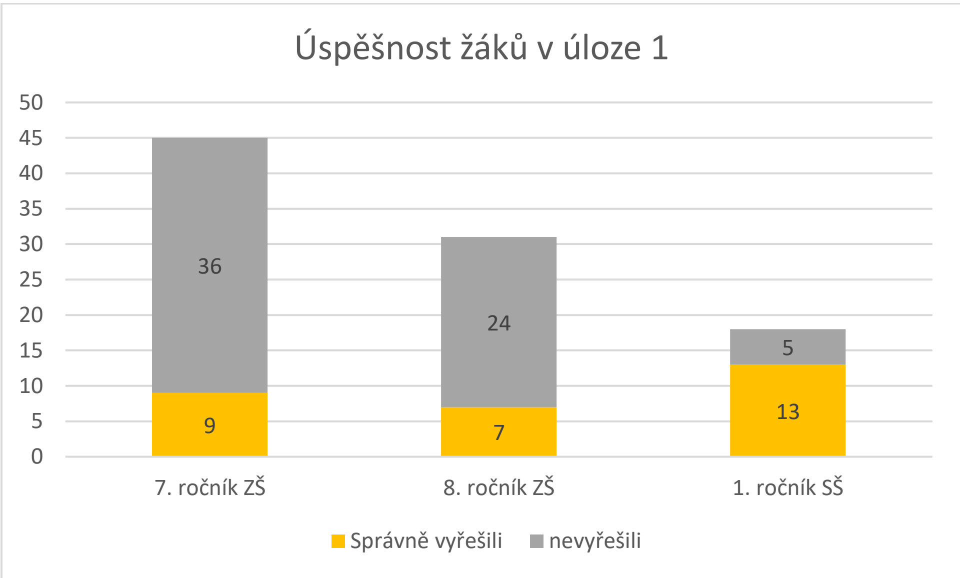
Komentář: Podle RVP ZV by měl žák pro řešení úloh využívat logickou úvahu a zkoušet hledat různá řešení. (RVP ZV, 2016) Tímto směrem je mířena i podstata této úlohy. Úlohu je sice možné řešit algebraicky pomocí soustavy dvou rovnic, ale tu se žáci učí většinou v osmém nebo devátém ročníku. Protože testovaní žáci ze základní školy byli pouze ze sedmého a osmého ročníku, očekávala jsem u nich spíše využití strategií pokus - omyl, pokus – ověření – korekce nebo systematického experimentování.

Předpokládané řešení: Řešení, které jsem u žáků očekávala nejvíce, je založeno na strategii pokus – ověření – korekce. Vytvoříme si tabulku, do které budeme zapisovat pokusy a budeme se snažit dosáhnout zadaných počtů nohou a očí. Jako první pokus můžeme zvolit libovolně tak, aby vyšel počet nohou 57. Zjistíme, že potřebujeme o 7 víc očí a stejně nohou. To lze, když přidáme tři čtyřnožky a ubereme jednu pětinožku. Zjistíme ale, že máme pak o 7 víc nohou. Ubereme tři pětinožky (6 očí) a nahradíme je dvěma čtyřnožkama (6 očí). V tu chvíli vychází počty nohou i očí, a tedy jsme zjistili, že marťanský farmář má osm čtyřnožek a pět pětinožek. Řešení je zobrazeno v tab. 6.

	Čtyřnožky (3 oči)	Pětinožky (2 oči)	Celkem nohou	Celkem očí
Pokus 1	3	9	$(3 \times 4) + (9 \times 5) = 57$	$(3 \times 3) + (9 \times 2) = 27$
Pokus 2	6	8	$(6 \times 4) + (8 \times 5) = 64$	$(6 \times 3) + (8 \times 2) = 34$
Pokus 3	8	5	$(8 \times 4) + (5 \times 5) = 57$	$(8 \times 3) + (5 \times 2) = 34$

Tab. 6: Předpokládané řešení úlohy 1

Úspěšnost žáků: Z počtu 94 žáků tuto úlohu vyřešilo správně 29 žáků. Z toho bylo 16 žáků základní školy a 13 žáků střední školy. Úspěšnost žáků v jednotlivých ročnících uvádí graf 2.

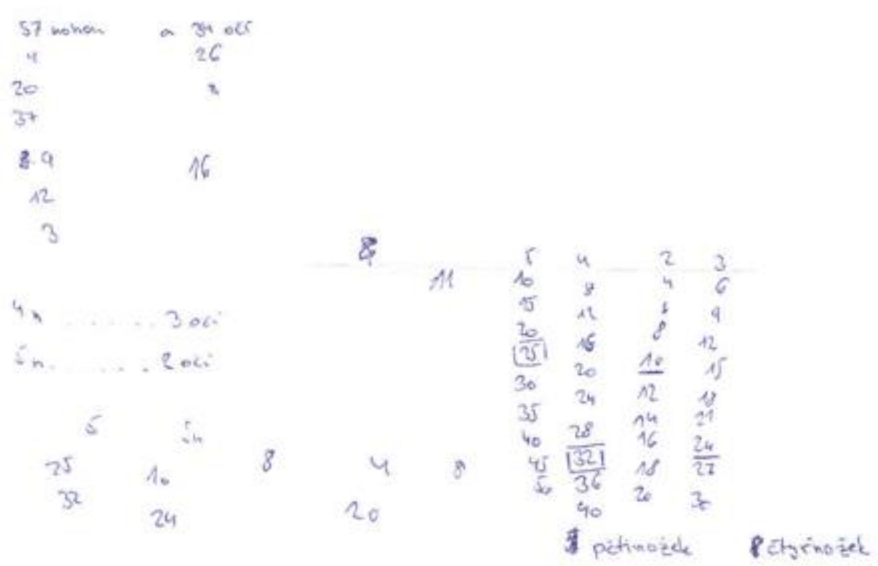


Graf 2: Úspěšnost žáků v úloze 1

Z 29 úspěšných žáků bylo 12 dívek a 17 chlapců. Žáci základní školy úlohu řešili převážně graficky či systematickým experimentováním. Žáci střední školy využívali soustavu dvou rovnic.

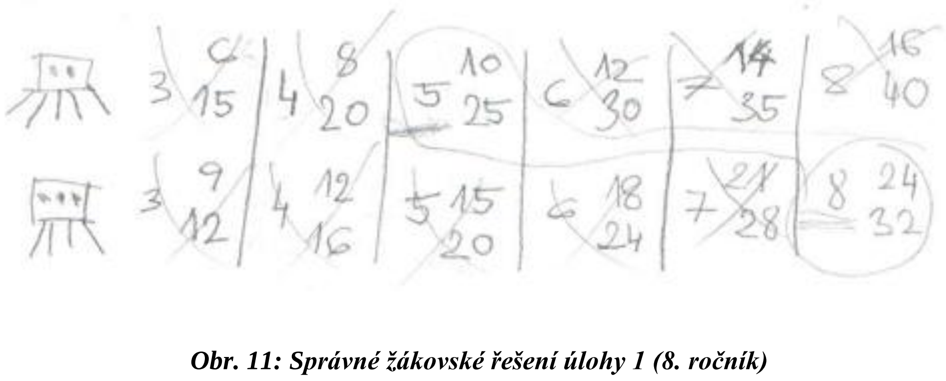
5.3.1 Správná žákovská řešení

Žák sedmého ročníku řešil úlohu pomocí systematického experimentování. Počítal si počet očí a počet nohou zvlášť a poté je zkoušel sčítat tak, aby vyšel daný počet nohou a očí. Jeho řešení je na obr. 10. Ostatní chlapci sedmého i osmého ročníku řešili tuto úlohu velmi podobně. Často bylo špatně poznat, jakým způsobem přesně postupovali, protože na papíře byl pouze shluk čísel, který, podle mého názoru, nedával příliš smysl, ale mohl znázorňovat například strategii pokus – omyl.



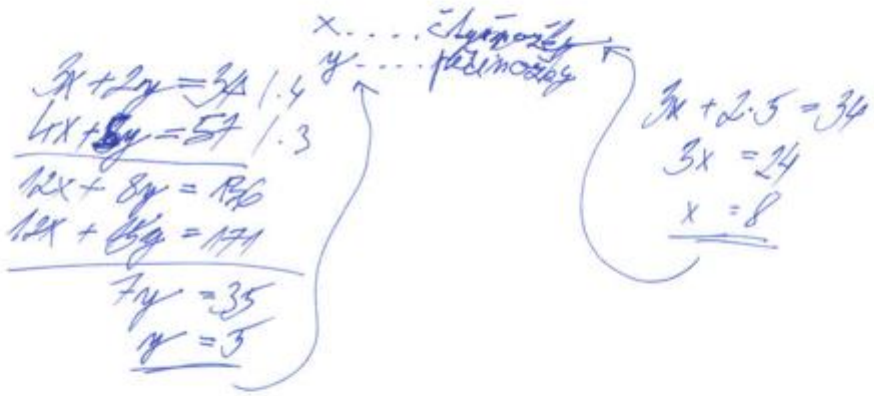
Obr. 10: Správné žákovské řešení úlohy 1 (7. ročník)

Žákyně osmého ročníku použila taktéž strategii systematického experimentování, kterou doprovodila grafickým znázorněním. Žákyně pravděpodobně nejdříve předpokládala stejný počet obou zvířátek a poté zkoušela hledat dvojice tak, aby vyšel daný počet nohou a očí. Její řešení znázorňuje obr. 11.



Obr. 11: Správné žákovské řešení úlohy 1 (8. ročník)

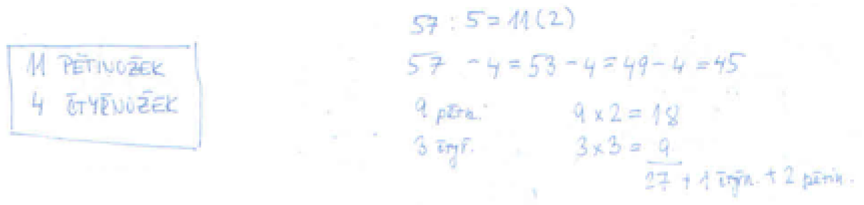
Jak jsem již zmínila, středoškolští žáci využívali převážně strategii algebraickou. Tato úloha pro ně byla podle mého názoru spíše rutinní úlohou. Dva žáci, kteří úlohu nevyřešili, měli ve výpočtu aritmetickou chybu a zbývající tři se nepokusili úlohu řešit. Algebraický výpočet žáka střední školy ukazuje obr. 12.



Obr. 12: Správné žákovské řešení úlohy 1 (1. ročník SŠ)

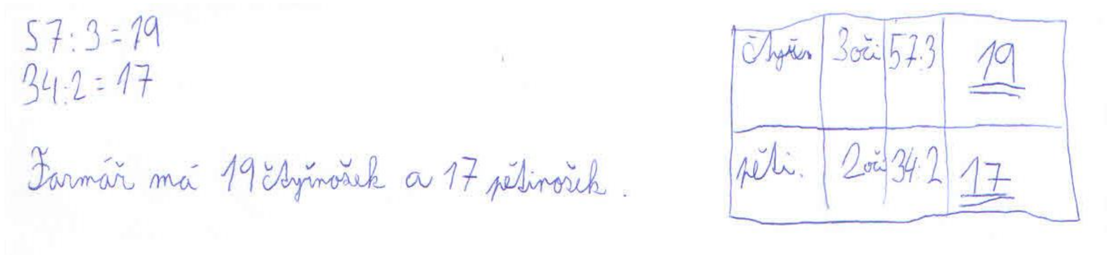
5.3.2 Chybná žákovská řešení

Mezi řešiteli bylo také mnoho těch, kteří se snažili úlohu řešit, ale zvolili špatnou cestu. Jedním z takových byla i žákyně sedmého ročníku, jejíž řešení je zobrazeno na obr. 13. Tato žákyně si spočítala maximální počet pětinožek. Změnila počet tak, aby po doplnění čtyřnožkami vyšel počet nohou. Ale nakonec začala dopočítávat oči, jejichž počet jí vycházel méně než 34, tak přidala oba druhy zvířátek tak, aby jí vyšel počet očí. Chyba byla v tom, že si neuvědomila, že zvýšením počtu zvířátek bude mít i větší počet nohou.



Obr. 13: Chybné žákovské řešení úlohy 1 (7. ročník)

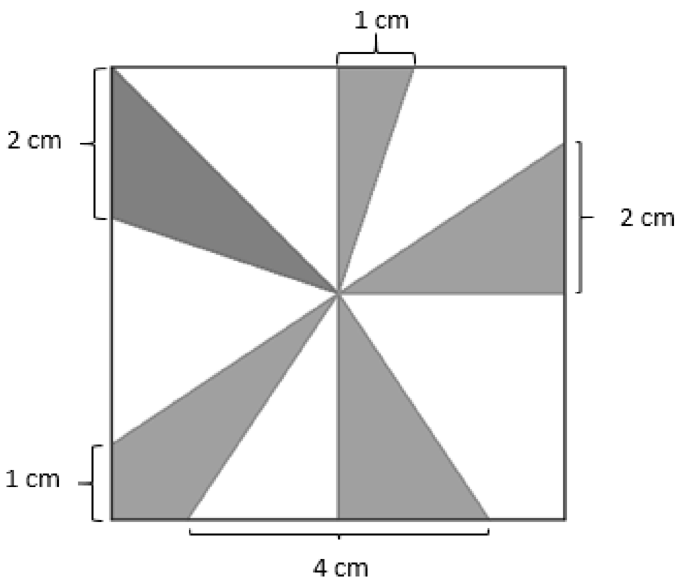
Ještě bych ráda uvedla jedno špatné řešení, kdy žák osmého ročníku zvolil zcela nesmyslný postup. Jak je vidět na obr. 14, žák pravděpodobně nepochopil zadání. Celkový počet nohou vydělil třemi (počtem očí čtyřnožek) a celkový počet očí vydělil dvěma (počtem očí pětinožek). Tyto výsledky považoval za správný počet čtyřnožek a pětinožek.



Obr. 14: Chybné žákovské řešení úlohy 1 (8. ročník)

5.4 Analýza řešení úlohy 2

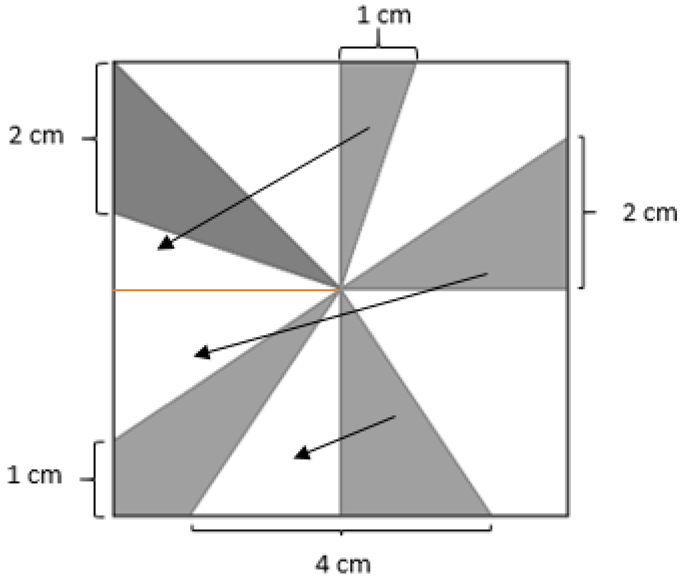
Zadání: Na obrázku je čtverec o délce strany 6 cm. Šedou barvou jsou v něm vyznačeny různé tvary, které dohromady připomínají hvězdu. Jaký je obsah šedé plochy tvořící hvězdu?



Obr. 15: Zadání úlohy 2

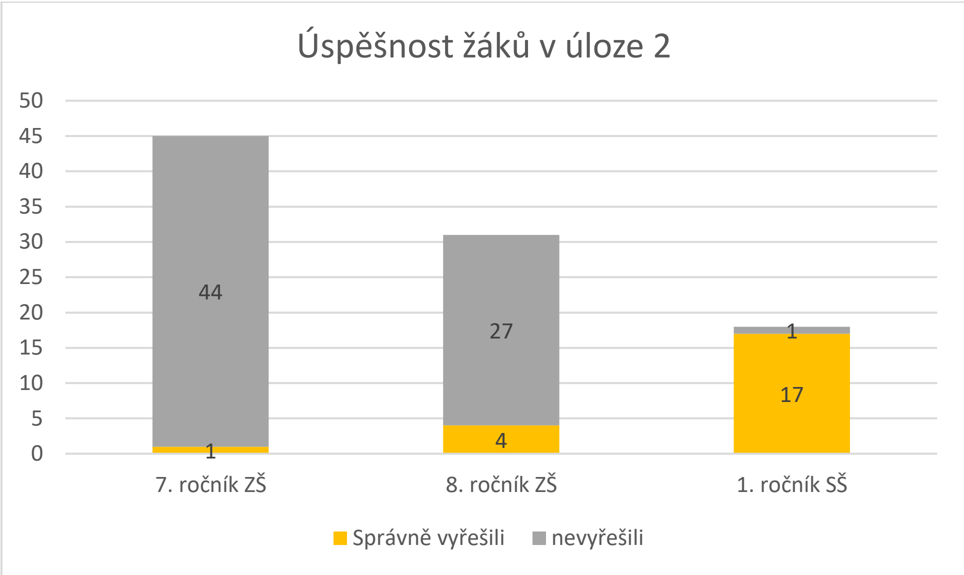
Komentář: Tato úloha patří mezi netradiční geometrické úlohy, které jsou dle RVP ZV obsahem učiva druhého stupně základní školy (RVP ZV, 2016). Jedná se o úlohu, ve které žák kombinuje poznatky z geometrie v rovině. Pro zvládnutí této úlohy žák potřebuje pouze znalost výpočtu pro obsah čtverce a trojúhelníku. Tato úloha způsobuje žákovi obtíž tím, že nezná délky stran jednotlivých trojúhelníků a čtyřúhelníku, které jsou uvnitř čtverce. Úloha je zaměřena na strategii zavedení pomocného prvku nebo grafické znázornění.

Předpokládané řešení: Předpokládala jsem, že by žáky mohlo napadnout přeskládat trojúhelníky ve čtverci tak, aby vznikl jen jeden geometrický útvar. Tím by byla levá dolní čtvrtina čtverce spojená s polovinou čtverce vlevo nahoře. Obsah by se poté počítal jako $(3 \times 3) + \left(\frac{3 \times 3}{2}\right) = 13{,}5\ cm^2$.



Obr. 16: Předpokládané řešení úlohy 2

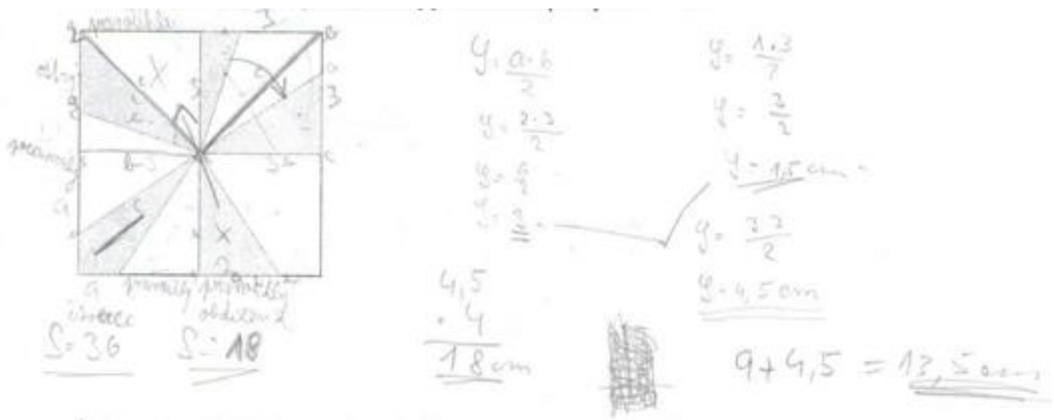
Úspěšnost žáků: Tuto úlohu vyřešilo správně celkem 22 žáků. Z toho bylo pouze 5 žáků základní školy a 17 žáků střední školy. Úspěšnost žáků po jednotlivých ročnících uvádí graf 3. Je vidět, že pro žáky střední školy byla tato úloha velmi snadná. Pouze jediný žák ji neměl vyřešenou, ale ani se o řešení nepokusil. Naopak žákům základní školy dělala tato úloha velké problémy.



Graf 3: Úspěšnost žáků v úloze 2

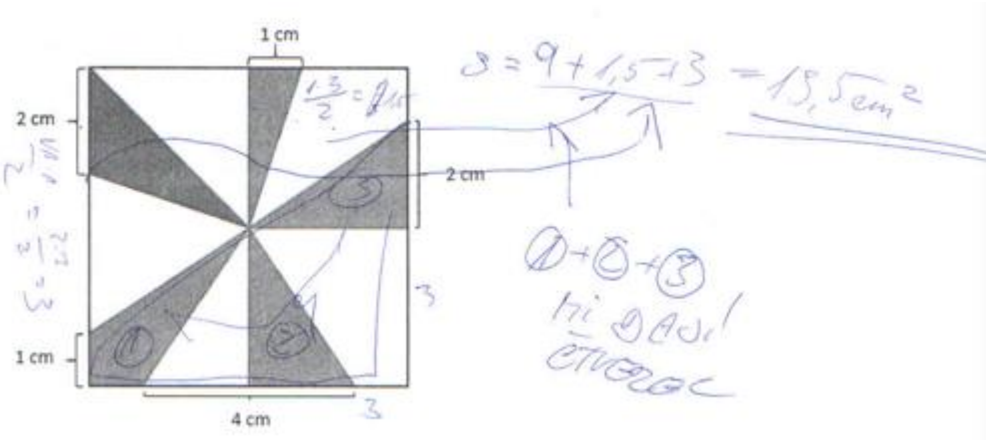
5.4.1 Správná žákovská řešení

Jediná žákyně sedmého ročníku, která vyřešila správně tuto úlohu, si dala s úlohou velkou práci. Na jejím řešení je vidět, že hodněkrát gumovala, protože se nejdříve snažila dopočítat délky všech stran vybarvených částí. Nakonec ale zjistila, že si může vybarvené obrazce přerovnat uvnitř čtverce jinak a pomocí toho došla ke správnému řešení. Toto řešení je zobrazeno na obr. 17.



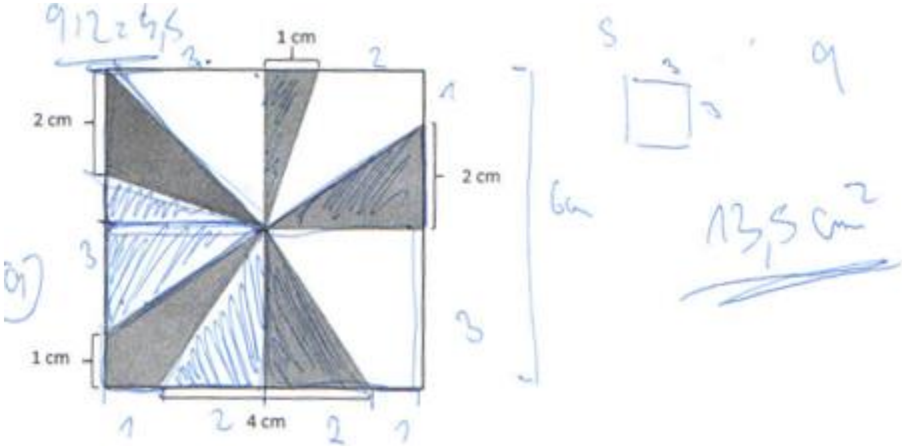
Obr. 17: Správné žákovské řešení úlohy 2 (7. ročník)

Dalším úspěšným řešitelem této geometrické problémové úlohy byl žák 8. ročníku. Tento žák zjistil, že tři vybarvené části dávají dohromady čtverec. Zbylé dvě části dopočítal pomocí vzorečku pro výpočet obsahu trojúhelníku. Nakonec vše sečetl a tím se dostal ke správnému řešení. Postup je patrný z obr. 18.



Obr. 18: Správné žákovské řešení úlohy 2 (8. ročník)

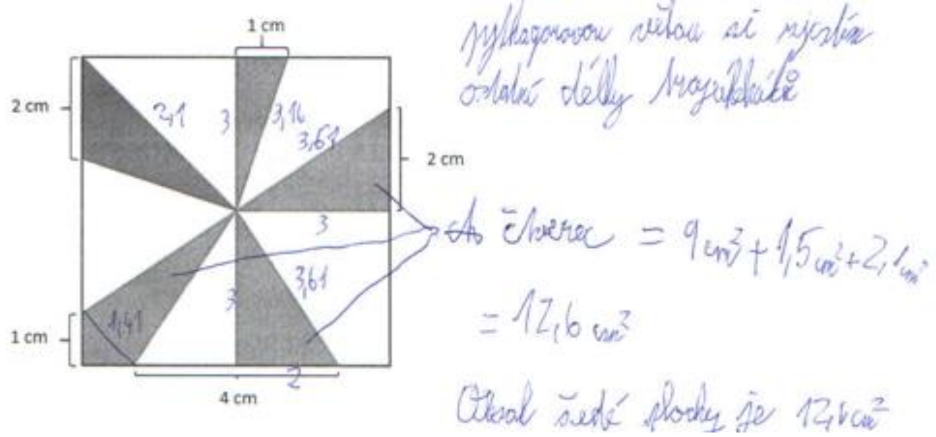
Ještě doplním jedno úspěšné řešení, které je stejné jako mé předpokládané řešení této úlohy. Je to řešení žáka střední školy. Středoškolští žáci toto řešení použili ve většině případů. Postup řešení je vidět na obr. 19.



Obr. 19: Správné žákovské řešení úlohy 2 (1. ročník SŠ)

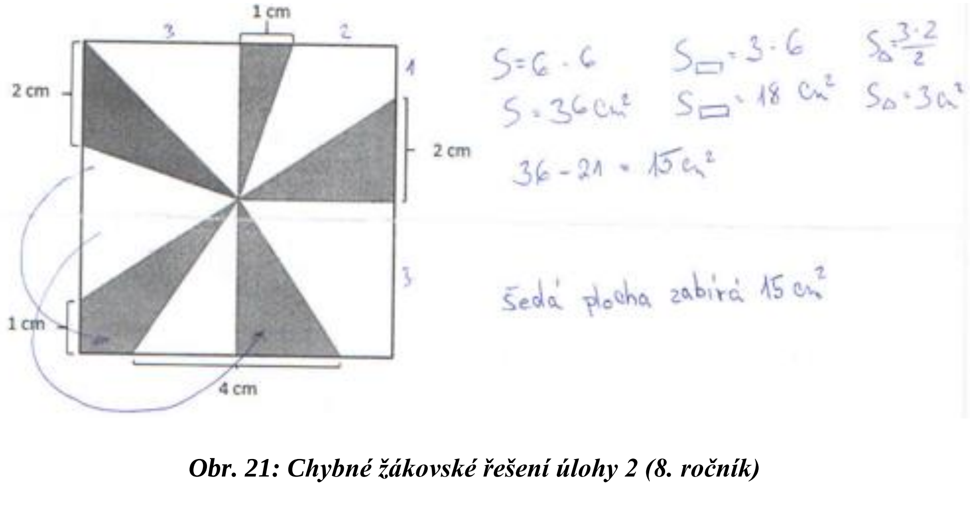
5.4.2 Chybná žákovská řešení

Bylo mnoho studentů, kteří se o řešení této úlohy vůbec nepokusili, ale bylo také hodně těch, kteří se snažili vymyslet nějaký vhodný způsob řešení, ale neúspěšně. Několik takových bych zde také ráda ukázala. První neúspěšný žák 7. ročníku se dopustil drobné chyby tím, že se pokusil obsah jedné části odhadnout. Nejdříve se snažil dopočítat všechny strany trojúhelníků pomocí Pythagorovy věty. Samozřejmě by takové řešení bylo možné, pokud by počítal správně. Během řešení si pravděpodobně uvědomil, že tři části tvoří čtverec. Následně určil obsah nejmenší šedé části, ale poslední část pravděpodobně určil odhadem, což se mu nepovedlo. Celé řešení můžeme vidět na obr. 20.



Obr. 20: Chybné žákovské řešení úlohy 2 (7. ročník)

Jako další chybné řešení uvádím řešení žákyně 8. ročníku. Tato žákyně si nejdříve vypočítala obsah celého čtverce a poté chtěla odečíst bílou plochu. Takové řešení by mohlo být správné, ale žákyně si špatně vypočítala obsah bílé plochy, proto je její výsledek špatný. To ukazuje i její řešení na obr. 21.



Obr. 21: Chybné žákovské řešení úlohy 2 (8. ročník)

5.5 Analýza řešení úlohy 3

Zadání: Na střední škole se vždy na konci roku koná burza učebnic, kde žáci jiným žákům mohou prodat své učebnice, které již nepotřebuji. Burza začíná po vyučování a trvá tři hodiny. Anička během první hodiny prodala polovinu svých knih a ještě polovinu knihy. Druhou hodinu prodala polovinu zbytku knih a ještě půl knihy k tomu. Během poslední hodiny prodala opět polovinu zbytku svých knih a navíc polovinu knihy. Pouze dvě knihy se jí nepovedlo prodat. S kolika knihami přišla Anička na burzu učebnic?

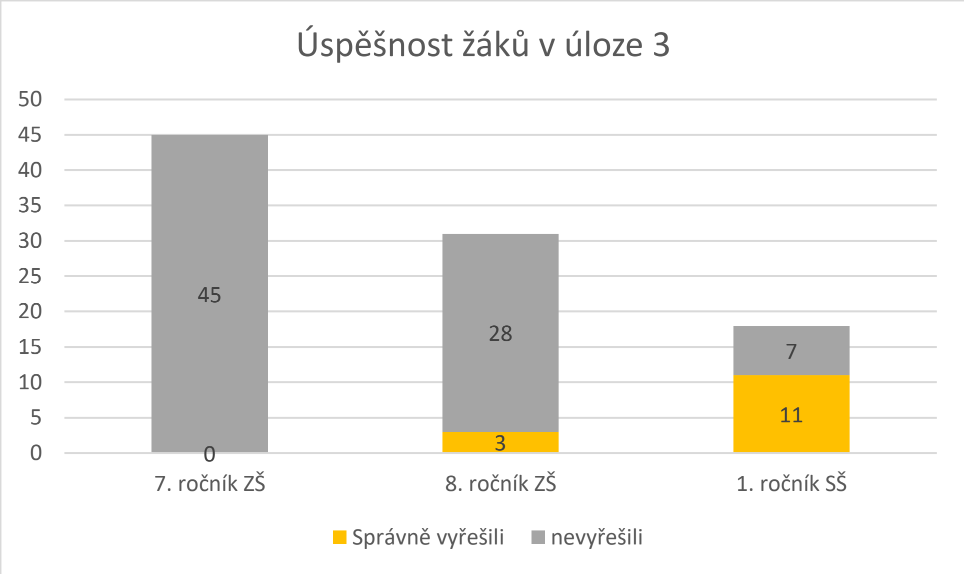
Komentář: podle RVP ZV by měl žák v průběhu vzdělávání řešit logické úlohy a číselné řady. (RVP ZV, 2016) Tato úloha vyžaduje logickou úvahu směřující od konce úlohy k jejímu začátku. Protože se v každém kroku děje totéž (přičítá se jedna polovina a násobí dvěma) mohli bychom říct, že se jedná o skrytou číselnou řadu. Tato problémová úloha je přímo mířená na strategii cesta nazpět. Samozřejmě ji lze řešit i algebraicky pomocí rovnice, ovšem tuto metodu považuji za zbytečně složitou.

Předpokládané řešení: Jak jsem již zmínila, tuto úlohu je výhodné řešit postupováním od konce. Víme, že Anička vždy nejprve prodala polovinu svých knih a poté ještě polovinu knihy. Tedy od konce vždy přičteme polovinu knihy a vynásobíme dvěma. Tím získáme počet knih, které měla před hodinou. Postup opakujeme třikrát, protože jsou tři hodiny. Zjistíme, že na začátku měla Anička 23 knih. Postup ukazuje tabulka níže.

	Počet knih
Po 3. hodině	2
Po 2. hodině	$\left(2+\frac{1}{2}\right)\times 2 = 2{,}5\times 2 = 5$
Po 1. hodině	$\left(5+\frac{1}{2}\right)\times 2 = 5{,}5\times 2 = 11$
Na začátku	$\left(11+\frac{1}{2}\right)\times 2 = 11{,}5\times 2 = 23$

Tab. 7: Úloha 3: řešení

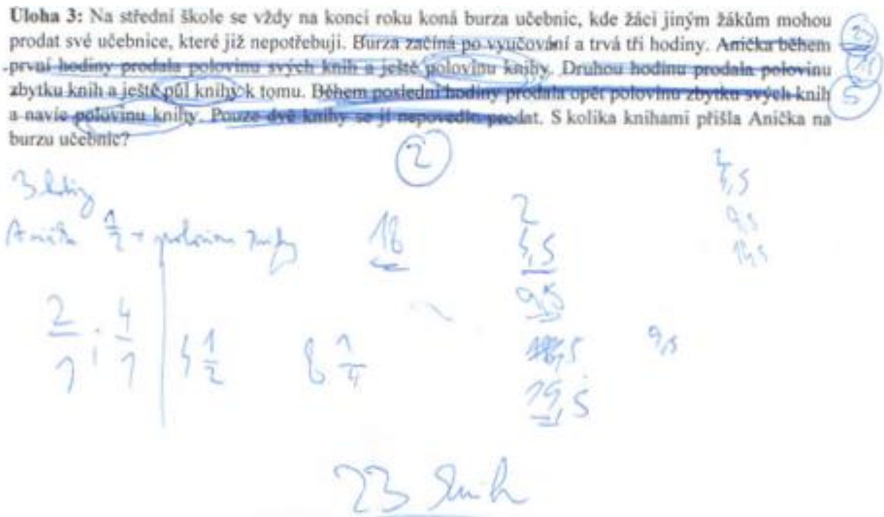
Úspěšnost žáků: Ze všech 94 žáků tuto úlohu vyřešilo správně pouze 14 žáků. Z toho nebyl ani jeden žák ze 7. ročníku, 3 žáci z 8. ročníku a 11 žáků bylo ze střední školy. Úspěšnost žáků udává graf 4. Zajímavé je, že všichni úspěšní řešitelé byli chlapci.



Graf 4: Úspěšnost žáků v úloze 3

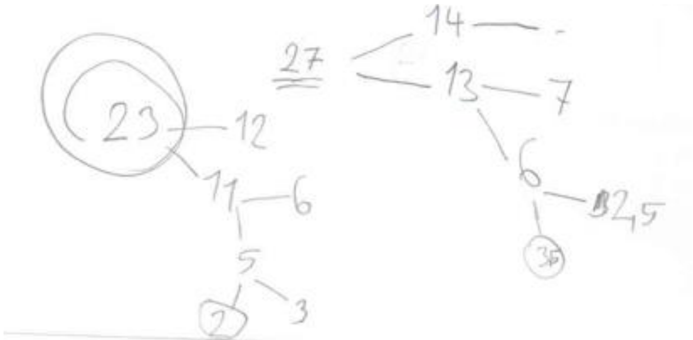
5.5.1 Správná žákovská řešení

Žák z osmého ročníku řešil tuto problémovou úlohu od konce tak, jak jsem uváděla předpokládané řešení. Ovšem nejdříve postupoval špatně, protože dvě knihy nejprve vynásobil dvěma a poté až přičetl polovinu knihy. Tím pádem mu jako výsledek vycházela desetinná čísla či zlomky. Poté šel systematicky přesně od konce úlohy, přičemž si postupně škrtal části zadání, to je vidět na obr. 22.



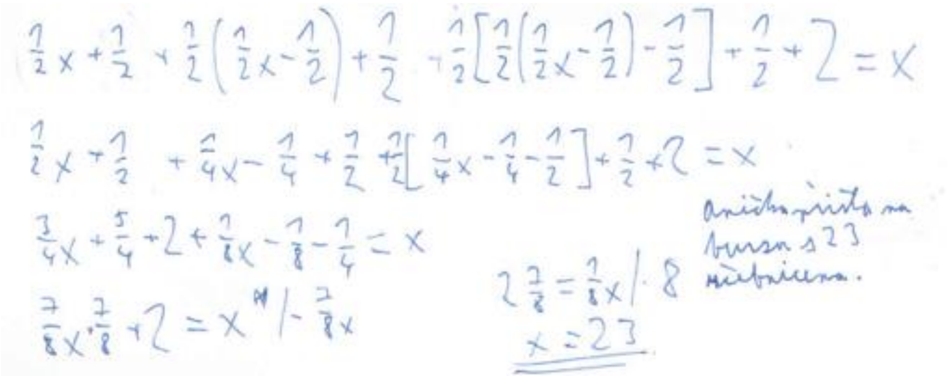
Obr. 22: Správné žákovské řešení úlohy 3 (8. ročník)

Další žák osmého ročníku řešil úlohu pomocí strategie pokus – omyl. Odhadem určil, že by mohl být počet knih 27 a zkusil dopočítat zbylé knihy. Protože mu zbytek vyšel vyšší, snížil svůj odhad na 23. Po dopočítání zjistil, že vychází na konci správně dvě knihy. Řešení je vidět na obr. 23.



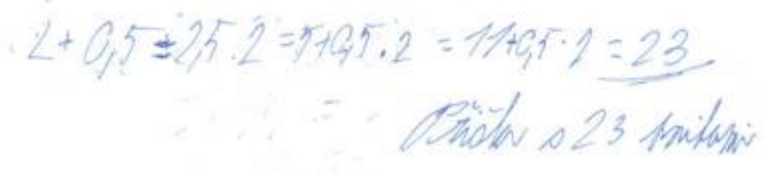
Obr. 23: Správné žákovské řešení úlohy 3 (8. ročník)

Žáci na střední škole řešili tuto úlohu převážně algebraickým způsobem. Označili si pomocí neznámé x počet knih, se kterými přišla Anička na burzu, a vytvořili rovnici. Pomocí rovnice poté neznámou vypočítali. Jeden takový případ je zobrazen na obr. 24.



Obr. 24: Správné žákovské řešení úlohy 3 (1. ročník SŠ)

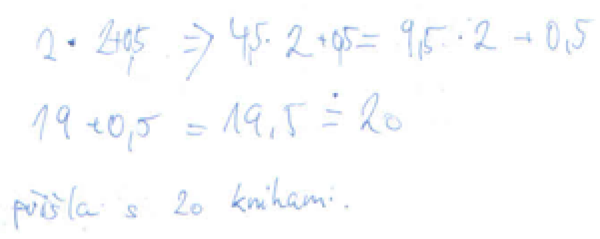
Poslední úspěšné řešení, které bych ráda uvedla, je opět řešení žáka střední školy. Tento způsob přesně koresponduje s předpokládaným řešením. Žák pouze využívá kratšího zápisu, jak ukazuje obr. 25.



Obr. 25: Správné žákovské řešení úlohy 3 (1. ročník SŠ)

5.5.2 Chybná žákovská řešení

Většina žáků se tuto úlohu ani nepokusilo vyřešit. Ti, kteří se o to pokusili, ale neúspěšně, dělali většinou všichni stejnou chybu. Jedná se o stejnou chybu, kterou udělal i žák osmého ročníku, jehož řešení ukazuje obr. 26. Tato chyba spočívá v tom, že žáci nejprve násobili počet knih a až poté přičetli polovinu knihy. Tím pádem vycházely počty knih v desetinných číslech, které žáci zaokrouhlovali.



Obr. 26: Chybné žákovské řešení úlohy 3 (8. ročník)

5.6 Shrnutí

Jak je vidět z analýzy řešení jednotlivých úloh, tito žáci základní školy byli schopni řešit problémové úlohy jen ve výjimečných případech. Na střední škole neměli žáci s úlohami problém.

V sedmém ročníku bylo testováno 45 žáků, to je 135 úloh, které mohli vyřešit. Ze všech správných řešení bylo pouze 10 ze sedmého ročníku. Jejich celková úspěšnost v řešení byla tedy 7,4 %.

V osmém ročníku jsem testovala 31 žáků. Z celkového počtu 93 úloh tito žáci vyřešili 14 úloh. Úspěšnost řešení žáků osmého ročníku byla 15,05 %.

V prvním ročníku střední školy byla úspěšnost o mnoho vyšší než na základní škole. Je nutno podotknout, že se jednalo o třídu, ve které mělo na posledním vysvědčení pouze 5 žáků dvojku z matematiky, ostatní měli jedničky. Z 18 žáků, tedy 54 možných vyřešených úloh, bylo správně vyřešeno 41 úloh. Jejich celková úspěšnost v řešení problémových úloh byla 75,93 %.

Možných příčin neúspěchu žáků základní školy vidím hned několik. První obtíž shledávám v tom, že úlohy byly pro žáky příliš obtížné na pochopení i na řešení. S tím souvisí druhá příčina, kterou je fakt, že se tito žáci na běžných hodinách matematiky nesetkávají s problémovými úlohami. Pokud žák není zvyklý na tvůrčí řešení nerutinních úloh, může ho už samotné zadání rozhodit tím, že na první pohled nezná postup, kterým by mohl úlohu řešit. Žáci se často obávají, že jejich řešení nebude to, které se očekává, proto se raději o řešení nepokusí. Poslední příčinou, která mě napadá, je anonymita. Žáci byli obeznámeni s tím, že dotazník i test je anonymní a tím pádem nemůže být hodnocený učitelem. Tento problém se projevil u testu, který se mi mnohdy vrátil zcela prázdný, ale také v dotaznících, ve kterých žáci často zaškrtávali schválně více možností, či vyplnili pouze třídu a pohlaví.

5.7 Návrh řešení

Zjistila jsem, že schopnost vybraných žáků řešit matematické problémy je na velmi nízké úrovni. Podle mého názoru by se tento problém s neúspěšností dal řešit u žáků každého věku pravidelným předkládáním problémů tak, aby nejdříve řešili problémy jednodušší a pomalu se dostávali ke složitějším. Pro žáky je velmi složité řešit obtížnou problémovou úlohu, pokud se nikdy předtím nesetkali s jednodušší úlohou podobného typu. Poté je žák zbytečně vystaven stresu a pocitu neschopnosti řešit problémy. Není důležité učit žáky řešit konkrétní problémové úlohy, ale vést je k objevní různých strategií řešení, které mohou při řešení nestandardních úloh využívat. Pokud žák zná různé strategie a postupy, které může využít při řešení problémových úloh (vytvoření tabulky, nakreslení obrázku, analogie, experimentování atp.), daleko snadněji nalezne řešení i obtížného problému. Pro výuku těchto strategií jsem navrhla sbírku problémových úloh, která je obsahem následující kapitoly.

6 Sbírka problémových úloh z matematiky

Tuto sbírku problémových úloh z matematiky jsem pojala jako materiál pro učitele k výuce nestandardních aplikačních úloh a problémů na druhém stupni základní školy. Při výuce matematických problémů by se měli žáci učit různým strategiím, které mohou při jejich řešení využívat. Tímto směrem je mířena i tato sbírka problémových úloh, kterou jsem rozdělila do těchto pěti kapitol:

- Logické úlohy
- Obsahy rovinných obrazců
- Úlohy řešené od konce
- Úlohy pro rozvoj prostorové představivosti
- Kombinatorické úlohy.

Každou kapitolu zaměřuji na jinou oblast matematických problémů, které podporují výuku jedné konkrétní heuristické strategie. Problémy jsem se snažila řadit za sebou tak, aby se postupně zvyšovala jejich obtížnost. Toto řazení ovšem nemusí být jednoznačné.

U každé úlohy uvádím ukázkové řešení. Každou úlohu, která se v této sbírce objevuje, lze řešit více způsoby. Já uvádím vždy takové řešení, které je nerutinní a využívá nějakou heuristickou strategii. Tedy pokud je úlohu možné řešit pomocí soustavy rovnic, ukazuji řešení bez jejího použití.

Úlohy v této sbírce, by měly sloužit jako inspirace pro učitele matematiky, jak vyučovat strategie řešení problémů. Vždy je dobré se jedné strategii věnovat ve více příkladech a ne pouze náhodně předkládat problémové úlohy, které se řeší pokaždé zcela jiným způsobem. Proto pro každou strategii uvádím několik úloh. Jedná se o takové úlohy, které lze různě modifikovat a upravovat jejich obtížnost pouhou změnou otázky či upravení zadaných informací. Každá úloha je doplněna motivačním obrázkem.

6.1 Logické úlohy

První kapitolu této sbírky problémových úloh věnuji úlohám čistě logického charakteru. K řešení těchto úloh není potřeba mít kromě základních aritmetických operací žádné vstupní matematické znalosti. RVP ZV uvádí schopnost řešení logických problémových úloh jako jeden z očekávaných výstupů žáka druhém stupně základní školy (RVP ZV, 2016). Při řešení těchto úloh se nejčastěji využívají experimentální strategie, ale také grafické znázornění či tabulka.

První dvě úlohy této kapitoly věnuji jednodušším úlohám podobným těm, které jsem využila pro testování žáků. Další tři úlohy se zabývají známými úlohami o přelévání tekutin a snaze dosáhnout daného objemu vody v nádobě. Poslední dvě úlohy jsou věnovány také velmi známému typu problémových úloh, ve kterých se k sobě přiřazují objekty podle zadaných kritérií. K těmto úlohám není nutné žádné počítání, ale stačí jen přehledné znázornění a logické uvažování.

I. Cyklo obchod

V cyklistické prodejně se prodávají jízdní kola, tříkolky a koloběžky. Víme, že jízdních kol mají dvakrát více než koloběžek a celkem mají vystaveno 53 dopravních prostředků. Dohromady je na prodejně 117 kol (ráfků). Kolik mají na prodejně jízdních kol, koloběžek a tříkolek?

Řešení:

Tuto úlohu můžeme řešit strategií pokus – omyl – korekce pomocí tabulky. Nejdříve odhadneme přibližný výsledek a podle počtu kol buď přidáme dopravní prostředky se dvěma koly, nebo tříkolky. Musíme při každém odhadu brát v úvahu to, že jízdních kol musí být dvakrát tolik, než počet koloběžek a také, že počet dopravních prostředků musí vyjít 53. Toto řešení je uvedeno v tab. 8.

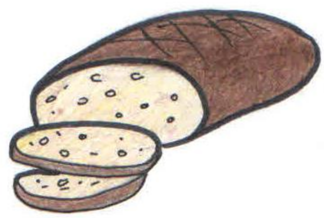
	Počet Odhad 1	Kola	Počet Odhad 2	Kola	Počet Odhad 3	Kola
Jízdní kolo (2)	18	36	20	40	28	56
Koloběžka (2)	9	18	10	20	14	28
Tříkolka (3)	26	78	23	69	11	33
Celkem	53	132	53	129	53	117

Tab. 8: Cyklo obchod

Po druhém odhadu si můžeme všimnout, že pokud přidáme jednu koloběžku (zároveň také dvě jízdní kola), tak tím musíme ubrat t3 tříkolky. Počet kol se v tu chvíli zmenší o 3. Tedy když máme 129 kol po druhém odhadu a potřebujeme 117, musíme přidat 4 koloběžky, protože mezi čísly 129 a 117 je 12 kol, o které potřebujeme tento počet snížit. Poté, co jsme se dostali ke správnému počtu kol, víme, že je v prodejně 28 jízdních kol, 14 koloběžek a 11 tříkolek.

II. Chléb

Dvanáct osob nese 12 bochníků chleba. Mají je rozdělené tak, že muži nesou po dvou bochnících, ženy po půlkách a každé dítě nese čtvrtinu chleba. Kolik je mezi těmito lidmi mužů, žen a dětí?



(Maláč, 1981, s. 61)

Řešení:

Tuto úlohu budeme řešit strategií pokus – ověření – korekce s využitím tabulky. Do tabulky nejprve zapíšeme přibližný odhad počtu mužů, žen a dětí. Vzhledem k tomu, že je jednodušší počítat s celými čísly, budeme říkat, že potřebujeme, aby 12 osob neslo 48 čtvrtin chlebu. Vždy po odhadu dopočítáváme, kolik by v tomto počtu nesli čtvrtin chlebů. Odhady upravujeme, dokud se nedostaneme na 48 čtvrtin. Tabulka může vypadat podobně, jako tab. 9.

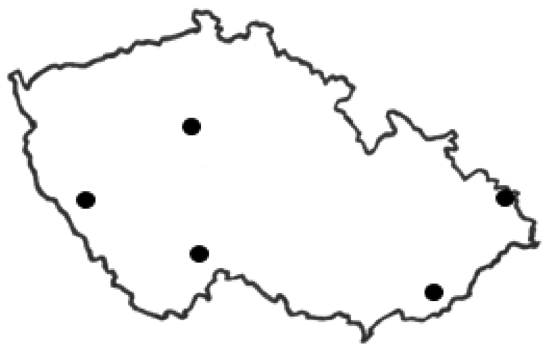
	Počet	Chleby	Počet	Chleby	Počet	Chleby
Muži (8)	3	24	5	40	5	40
Ženy (2)	4	8	4	8	1	2
Děti (1)	5	5	3	3	6	6
celkem	12	37	12	51	12	48

Tab. 9: Chléb

Po několika pokusech dospějeme k závěru, že mužů bylo 5, žena byla pouze 1 a 6 dětí.

III. Návštěvy

Na celostátním kole matematické soutěže se setkali Tomáš z Třeboně, Zdeněk ze Zlína, Pavel z Prahy, Ondřej z Ostravy a Karel z Klatov. Při loučení se domluvili, že každý z nich během prázdnin navštíví právě jednoho kamaráda tak, že každého z nich také navštíví právě jeden kamarád. Pavel, který se o prázdninách zastaví v Klatovech, navrhnul plán návštěv, který obsahoval následující podmínky. Ondřej nepojede do Prahy. Pavla navštíví ten, kdo bydlí ve městě, kam pojede Zdeněk. Karel to nebude. Sestav plán návštěv.



Vytvořeno dle (Repáš, 1991)

Řešení:

V této úloze je nejdůležitější si udělat pořádek v zadaných podmínkách. Mohli bychom si tedy podmínky zapsat do tabulky. Z první podmínky víme, že Pavel se zastaví v Klatovech, tedy do řádku P a sloupce K napíšeme plus. Ondřej nepojede do Prahy, zapíšeme do příslušného políčka mínus. Z poslední podmínky lze zjistit, že Karel nepojede za Pavlem. Za Pavlem pojede ten, za kým pojede Zdeněk. Proto za Pavlem nemůže jet ani Zdeněk. Za Pavlem jede tedy Tomáš a za Tomášem Zdeněk. V tab. 10 je vidět, že Ondřej musí jet ke Zdeňkovi a Karel k Ondřejovi.

Kdo \ Koho	T	Z	P	O	K
T	X	-	+	-	-
Z	+	X	-	-	-
P	-	-	X	-	+
O	-	+	-	X	-
K	-	-	-	+	X

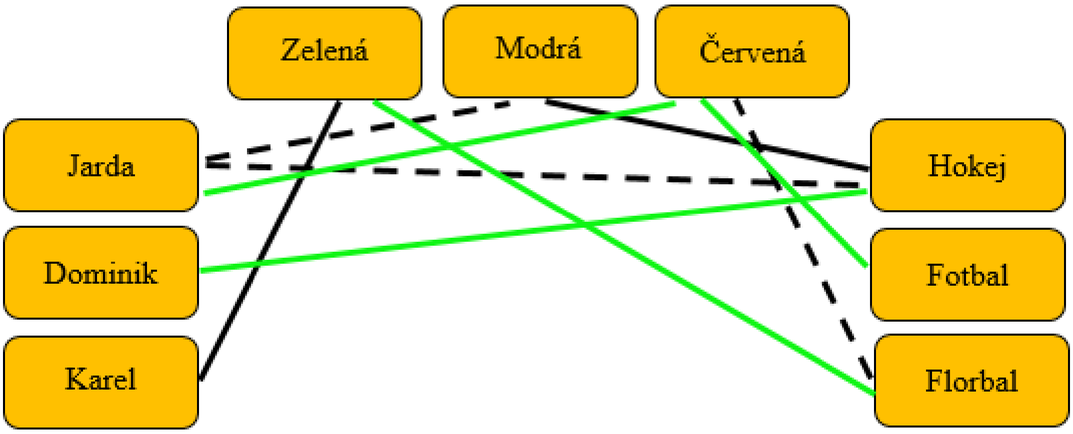
Tab. 10 - Úloha 1: řešení

IV. Sportovci

Tři kamarádi Jarda, Dominik a Karel hrají každý jiný sport a každý má jinou barvu dresu. Víme, že Karel má zelený dres. Hokejový dres je modrý a nenosí ho Jarda. Florbalový dres není červený. Jaký sport hraje Dominik a jaká je barva jeho dresu?

Řešení:

Máme tři kamarády, tři barvy a tři sporty. Známe k nim nějaká fakta, ale ne všechna. Abychom se v tom lépe vyznali, vytvoříme si obrázek. Zakreslíme si do něj všechny vztahy, které platí plnou čarou a všechny, které neplatí, přerušovanou čarou.



Obr. 27: Sportovci

Pokud máme zaznamenány všechny vazby vyplývající ze zadání, můžeme zapojit logické myšlení a dokreslit vazby, které z toho vyplývají. Tyto vazby jsou na obr. 27 vyznačeny zelenou barvou. O Dominikovi nebyl známý žádný fakt, ale pomocí grafického znázornění jsme zjistili, že hraje hokej a jeho dres je modrý.

V. Dívčí parta

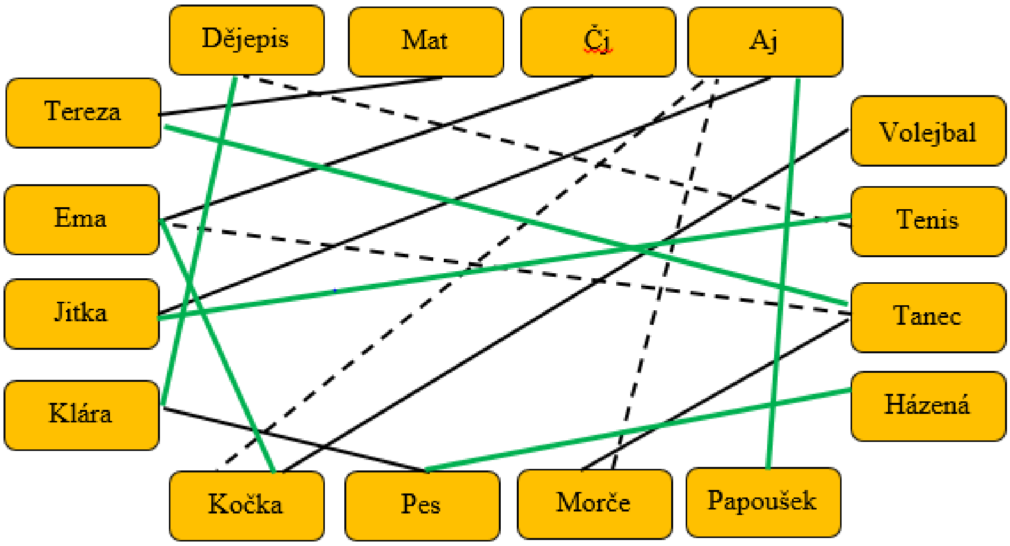
V dívčí partě je Tereza, Ema, Klára a Jitka, každá dívka má ve škole jiný nejoblíbenější předmět (dějepis, matematika, český jazyk, anglický jazyk) a věnuje se jinému sportu (tenis, házená, tanec, volejbal). Všechny dívky mají také domácího mazlíčka, každá jiného (morče, papoušek, kočka, pes). Je dáno deset informací, které o dívkách víme. Pomocí těchto informací zjisti, jaký předmět má oblíbený dívka, která tančí?

Známe tyto informace:

1. Emy oblíbený předmět je český jazyk
2. Klára má doma psa
3. Dívka, která hraje volejbal, má kočku
4. Tereza miluje matematiku
5. Dívka, která ráda tančí, má doma morče
6. Jitka má ráda angličtinu
7. Dějepis nesnáší dívka hrající tenis
8. Ema nerada tančí
9. Dívka, která má morče, neumí anglicky
10. Angličtinu neumí ani dívka, která má kočku

Řešení:

Nejprve si vytvoříme obrázek. Plnou černou čarou vyznačíme fakta, která platí a přerušovanou fakta, která neplatí. Pokud vyčerpáme všechny podmínky, zadíváme se na obrázek a budeme hledat taková místa, která logicky vyplývají z obrázku. Tam kde to nemůže být jinak. Např. je jasné, že Klára má ráda dějepis, protože ostatní dívky už mají předměty přidělené. Stejně tak víme, že musí Klára hrát házenou, protože není jiný sport, se kterým bychom ji mohli spojit. Takto postupujeme, až dokud nespojíme vše. Otázka zní, jaký oblíbený předmět má dívka, která tančí. Informaci můžeme vyčíst z obr. 28. Tančí Tereza, která má morče a má ráda matematiku.



Obr. 28: Dívčí parta

6.2 Obsahy rovinných obrazců

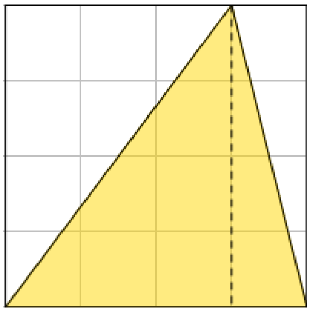
V této kapitole se zaměřuji na úlohu 2, kterou jsem testovala na žácích. Podle RVP ZV by měl žák na druhém stupni základní školy řešit nestandardní geometrické úlohy a problémy (RVP ZV, 2016). Předkládám soubor úloh, které jsou stejného charakteru, ale postupují od nejjednodušší až po složitou.

V rámci ověřování schopností žáků řešit problémové úlohy jsem zjistila, že žáci jsou v geometrii upnuti na vzorečky a dané délky stran všech útvarů. Problém vzniká, jakmile žák dostane k řešení geometrickou úlohu, ve které stačí pouhá logická úvaha. Cílem této kapitoly je naučit žáka nahlédnout do rovinné geometrie jinak, než pomocí vzorečků, se kterými je zvyklý počítat obsahy geometrických útvarů v běžných hodinách matematiky. K řešení těchto úloh žák potřebuje pouze znalosti základních geometrických útvarů, jako jsou čtverec, obdélník, trojúhelník a čtyřúhelník. Musí dokázat vypočítat obsah čtverce a obdélníku.

Úlohy v této kapitole jsou zaměřené především na výuku strategie zavedení pomocného prvku. V první úloze je zavedena čtvercová síť a čárkovaně naznačená úsečka, která napovídá k řešení. V druhé a třetí úloze je stále nápomocná čtvercová síť, ale pomocné úsečky už nejsou zvýrazněné. Od čtvrté úlohy je odebrána i čtvercová síť. Žák by měl být schopen si síť či pomocné přímky sám do obrázku dokreslit tak, aby mohl problém vyřešit.

I. Trojúhelník

Na obrázku je žlutě vybarvený trojúhelník. Jaký je jeho obsah, pokud víme, že jeden čtvereček čtvercové sítě má obsah 1 cm^2?

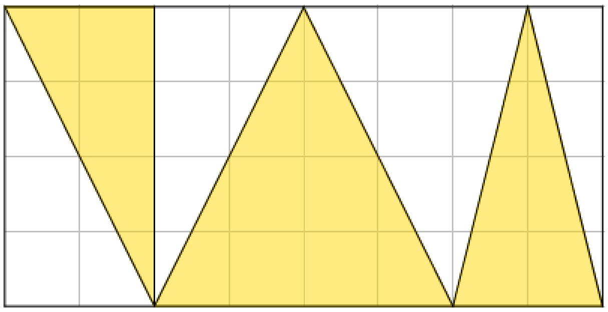


Řešení:

Čárkovaná úsečka rozděluje čtverec na dvě části. První část má obsah $3 \times 4 = 12\ cm^2$. Druhá část $1 \times 4 = 4\ cm^2$. Celkem je obsah žluté části $12 + 4 = 16\ cm^2$.

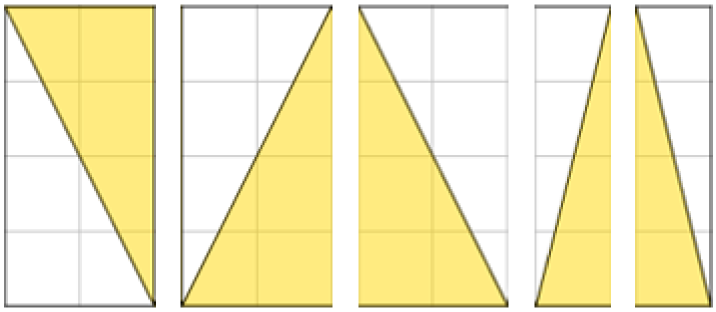
II. Trojúhelníky

Rozměry obdélníku, který je znázorněný na obrázku jsou $8 \times 4\ cm$. Jaký obsah mají dohromady všechny trojúhelníky na obrázku?



Řešení:

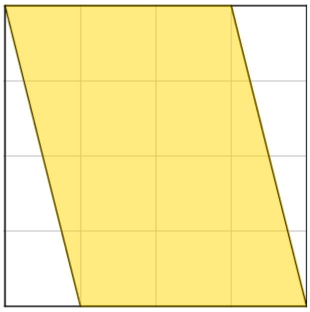
Tuto úlohu můžeme řešit tak, že si rozdělíme obdélník na 4 stejné obdélníky tak, jak je ukázáno na obr. 29. Z toho je vidět, že každá část je vybarvena z poloviny, tím pádem obsah žluté plochy je polovina obsahu obdélníku. Tedy $8 \times 4 \div 2 = 16\ cm^2$.



Obr. 29: Trojúhelníky

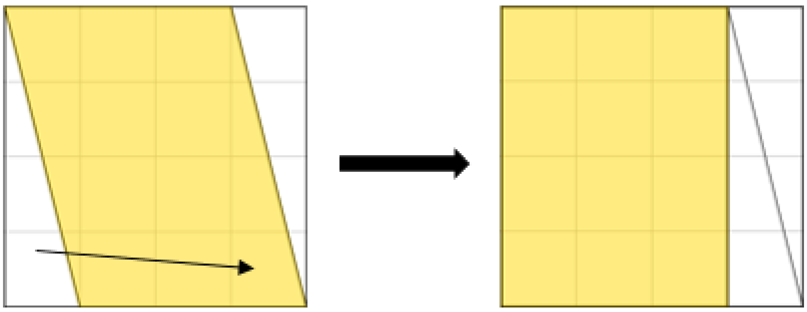
III. Rovnoběžník

Do čtverce o délce strany 4 cm je zakreslený rovnoběžník, jaký je jeho obsah?



Řešení:

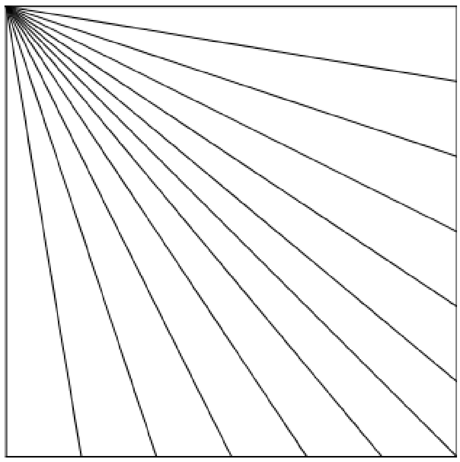
Tuto úlohu můžeme řešit tak, že bílé trojúhelníky přesuneme k sobě a vzniknou nám tím dva obdélníky. Tento postup ukazuje obr. 30. Obsah původního rovnoběžníku je pak stejný jako obsah vzniklého obdélníku. Tedy $3 \times 4 = 12\ cm^2$.



Obr. 30: Rovnoběžník

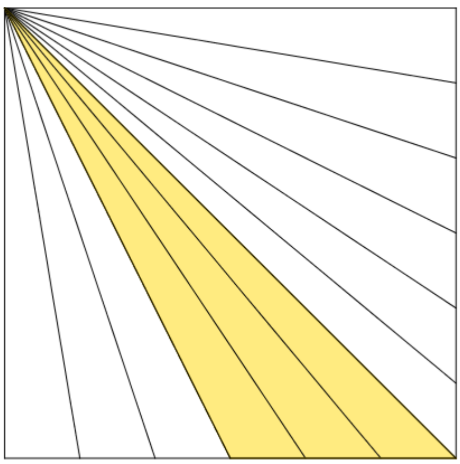
V. Paprsky

Čtverec na obrázku má délku strany 6 cm. Z levého horního rohu vychází paprsky, mezi kterými je vždy stejný úhel. V tomto připraveném obrázku vybarvi takový trojúhelník, který má obsah 9 cm^2.



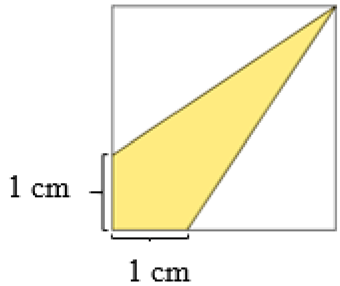
Řešení:

Délka strany čtverce je 6 cm, tím pádem je jeho obsah $6 \times 6 = 36\ cm^2$. Protože je mezi paprsky stejný úhel, musí mít všechny trojúhelníky, které mezi nimi vznikají, stejný obsah. Celý čtverec je tedy rozdělen na 12 trojúhelníků o obsahu $36 \div 12 = 3\ cm^2$. Zadání vyžaduje trojúhelník s obsahem 9 cm^2. To znamená, že stačí vybarvit libovolné 3 sousedící malé trojúhelníky. Takových řešení je mnoho, jedno z nich ukazuje obr. 31.



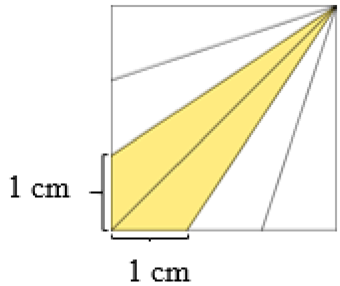
Obr. 31: Paprsky

VI. Čtyřúhelník

Na obrázku je žlutě vybarvený čtyřúhelník, který má obsah 3 cm^2. Jaký obsah má celý tento čtverec? 

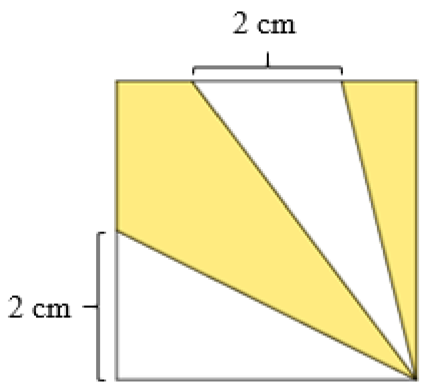
Řešení:

V této úloze si stačí doplnit pomocné přímky tak, jako znázorňuje obr. 32. Je vidět, že žlutý čtyřúhelník tvoří třetinu z celého čtverce. Obsah čtverce je $3 \times 3 = 9\ cm^2$.



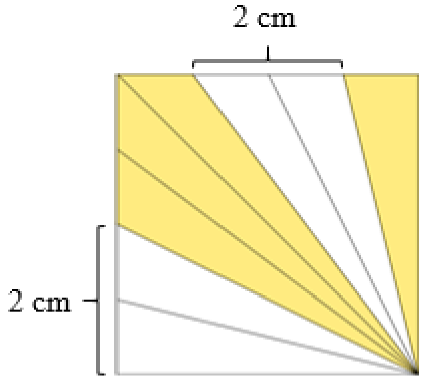
Obr. 32: Čtyřúhelník

VII. Dva paprsky

Čtverec na obrázku má obsah 16 cm^2. Jaký je obsah žlutě vybarvených části? 

Řešení:

Víme, že čtverec má obsah 16 cm^2, tím pádem jeho strany mají 4 cm. Můžeme si rozdělit levou a horní stranu po jednom centimetru a vytvořit pomocné paprsky. Tento krok je zobrazen na obr. 33.



Obr. 33: Paprsky

Vidíme, že čtyři části jsou žluté a čtyři bílé. Potom musí být obsah vybarvených částí polovinou z obsahu čtverce. Tedy $16 \div 2 = 8\ cm^2$.

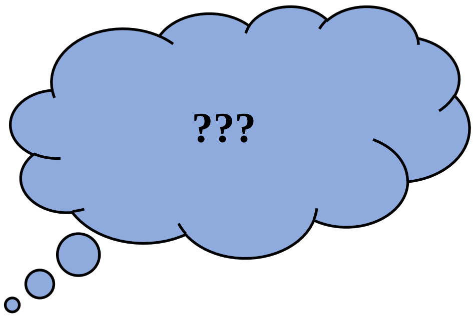
6.3 Úlohy řešené od konce

Tuto kapitolu věnuji úlohám, které se od ostatních liší tím, že je jednodušší je řešit od konce než od začátku. Tento typ úloh jsem popisovala již jako jednu z heuristických strategií. Jedná se o způsob řešení logických problémových úloh, které kromě jednoduchých aritmetických výpočtů nevyžadují jiné matematické znalosti. Dle RVP ZV je jedním z očekávaných výstupů žáka druhého stupně základní školy schopnost řešit problémové úlohy logického charakteru (RVP ZV, 2016). Všechny problémové úlohy v této kapitole jsou jednoduššími variantami k úloze 3, kterou jsem testovala na žácích.

První tři úlohy mají záměrně kratší zadání, aby se nestávaly chyby kvůli špatnému pochopení zadání. Pro začátek s tímto typem řešení úloh jsem vybrala velmi známé úlohy typu „myslím si číslo". Další čtyři úlohy jsou už rozsáhlejšího charakteru a vyžadují velké soustředění na pochopení zadání. Osmá úloha je zde záměrně přestože se nedá řešit od konce. Jedná se o návodnou úlohu k problémům týkajícím se „půlení" věcí, které se běžně rozpůlit nedají. Tím, že žáci vyřeší takovou jednodušší úlohu, by měli zjistit, že pokud liché číslo vydělí dvěma, potřebují buď přičíst, nebo odečíst jednu polovinu, aby nemuseli půlit daný předmět.

I. Myslím si číslo 1

Myslím si číslo, které když vynásobím šesti a od tohoto součinu odečtu 31, vyjde mi 23. Jaké číslo si myslím?



Řešení:

Pokud tuto úlohu pojmeme krok po kroku od konce, dostaneme následující výpočty.

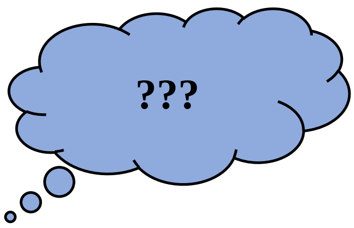
$23 + 31 = 54$

$54 \div 6 = 9$

Myšlené číslo je 9.

II. Myslím si číslo 2

Od čísla, které si myslím, odečtu 5, vydělím ho třemi a přičtu k němu 29, dostanu číslo 50. Jaké číslo si myslím?



Řešení:

Budeme postupovat od konce a dávat si postupně dohromady aritmetický výpočet.

$$50 - 29 = 21$$

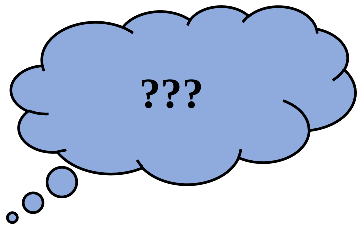
$$21 \times 3 = 63$$

$$63 + 5 = 68$$

Myšlené číslo je tedy 68.

III. Myslím si číslo 3

Myslím si číslo, které vynásobím dvěma a přičtu k němu původní číslo. K výsledku přičtu číslo devět a vydělím ho třemi. Vyjde mi 33, jaké číslo si myslím?



Řešení:

Budeme postupovat od konce takto:

$$33 \times 3 = 99$$

$$99 - 9 = 90$$

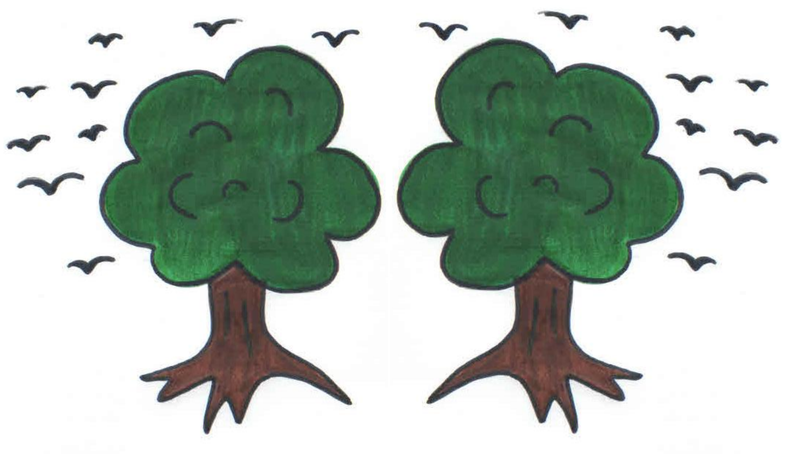
První větu tohoto zadání je nutno více promyslet. Pokud nějaké číslo vynásobíme dvěma a ještě jednou totéž číslo přičteme, vlastně jsme ho násobili třemi. Tedy je nutné ho ve výsledku třemi vydělit.

$$90 \div 3 = 30$$

Nakonec zjistíme, že myšlené číslo je 30

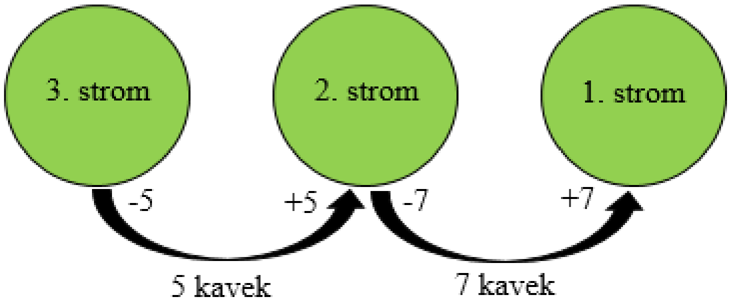
IV. Kavky

Na tři stromy přiletělo najednou 39 kavek. Po chvíli přeletělo z první stromu na druhý 7 kavek a z druhého na třetí 5 kavek. Poté byl na každém stromě stejný počet kavek. Kolik kavek přiletělo původně na každý strom?



Řešení:

Pokud víme, že kavek je celkem 39 a na konci je jich na každém stromě stejně. Pak jich na každém stromě musí být $39 \div 3 = 13$. Přesuny kavek si můžeme znázornit graficky tak, jako ukazuje obr. 34. Postupujeme od konce.



Obr. 34: Kavky na stromech

Nyní zjistíme pomocí aritmetických operací počet kavek na jednotlivých stromech. Víme, že na konci bylo na každém stromě 13 kavek. Početní operace nám naznačuje obr. 34.

Třetí strom: $13 - 5 = \mathbf{8}$

Druhý strom: $13 + 5 - 7 = \mathbf{11}$

První strom: $13 + 7 = \mathbf{20}$

Můžeme odpovědět, že na první strom přiletělo 20 kavek, na druhý strom 11 kavek a na třetí strom 8 kavek.

V. Zákusky

Maminka koupila krabici plnou zákusků a dala ji do lednice. Krabici se zákusky objevil nejstarší syn Tomáš a snědl polovinu zákusků. Nedlouho poté se šel do lednice podívat i prostřední syn Pavel, který snědl polovinu zákusků, které našel v lednici. Nejmladší syn Jakub také objevil krabici se zákusky a snědl polovinu zbylých zákusků. Když poté přišla maminka domů a zjistila, že na ní zbyl pouze jeden zákusek. Kolik zákusků maminka koupila?

Vytvořeno dle (Maláč, 1981)

Řešení:

Pokud budeme postupovat systematicky od konce úlohy, můžeme si vytvořit takovou tabulku, jako je tab. 11. Do ní budeme postupně doplňovat data. Každý syn vždy snědl polovinu toho, co v lednici našel. Druhá polovina tedy zůstala na svém místě. Početní operace naznačují šipky vedle tabulky.

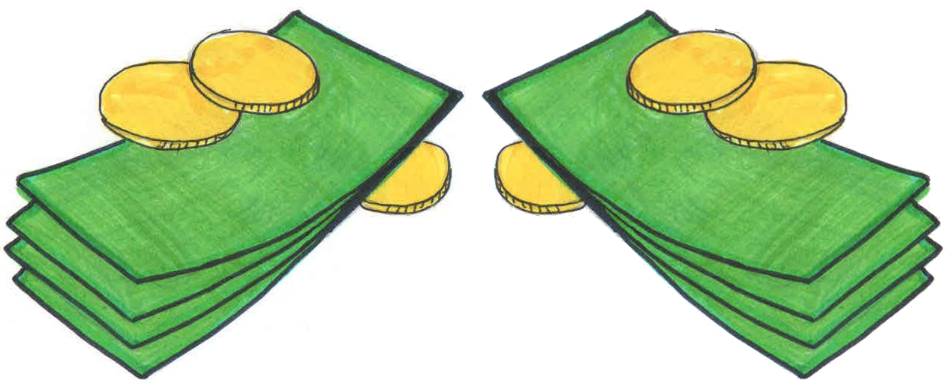
	Obsah lednice	
Po Jakubovi	1	
Po Pavlovi	2	× 2
Po Tomášovi	4	× 2
Nakoupeno	8	× 2

Tab. 11: Zákusky

Závěrem můžeme říct, že maminka koupila osm zákusků.

VI. Jarmark

Na výstavišti se každoročně koná třídenní jarmark, kde domácí kutilové prodávají své výrobky. Na tento jarmark chodí i paní Novotná se svými ručně vyráběnými šperky. První den vždy začíná s určitým obnosem peněz, aby mohla vracet zákazníkům. Během prvního dne zdvojnásobila své peníze, ale utratila u jiných prodejců 350 Kč. Druhý den ztrojnásobila svůj obnos peněz a utratila 550 Kč. Poslední den vydělala pouze 1 000 Kč a utratila 200 Kč. Po třech dnech na jarmarku měla paní Novotná 6 400 Kč. O kolik korun navýšila své peníze od počátku jarmarku?



(Novoveský, 1971, s. 33)

Řešení:
Pokud víme, kolik měla paní Novotná na konci jarmarku a chceme zjistit, kolik peněz si vydělala, musíme nejprve zjistit, kolik měla na začátku. To zjistíme postupem od konce úlohy. Vytvoříme si tabulku. První údaj o penězích na konci posledního dne známe ze zadání a utracené částky známe také. Pomocí těchto informací doplníme tabulku tak, jako je ukázáno v tab. 12.

	Konec dne	Utratila	Začátek dne
3. Den	6400	200	$(6400 + 200) - 1000 = 5600$
2. Den	5600	550	$(5600 + 550) \div 3 = 2050$
1. Den	2050	350	$(2050 + 350) \div 2 = \mathbf{1200}$

Tab. 12: Jarmark

Pomocí tabulky jsme zjistili, že na začátku jarmarku měla paní Novotná 1200 Kč. Abychom zjistili, o kolik navýšila své peníze, odečteme tuto částku od té konečné. Tedy můžeme odpovědět, že navýšila své peníze o $6400 - 1200 = 5200$ Kč.

VII. Karetní hra

Jiřík hrál se svými kamarády karetní hru. Místo peněz hráli o žetony, které připomínaly mince. Jiřík s prvním kamarádem prohrál jeden žeton, pak ještě polovinu zbytku svých žetonů, a ještě jeden žeton. To stejné se opakovalo s druhým i třetím kamarádem. Nakonec neměl Jiřík žádný žeton a nemohl hrát další hru. Kolik měl Jiřík žetonů na začátku hraní?

(Novoveský, 1971, s. 13)

Řešení:

Víme, že na konci neměl Jiřík žádný žeton a potřebujeme zjistit, kolik žetonů měl na začátku hraní. To zjistíme, pokud se na úlohu podíváme od konce. S každým kamarádem mělo Jiříkovo prohrávání stejný scénář. Vždy prohrál jeden žeton, potom polovinu toho, co měl, a poté ještě jeden žeton. Dle tohoto postupu doplníme tabulku (tab. 13)

	Konec hry	Začátek hry
3. kamarád	0	$(0+1)\times 2+1=3$
2. kamarád	3	$(3+1)\times 2+1=9$
1. kamarád	9	$(9+1)\times 2+1=\mathbf{21}$

Tab. 13: Karetní hra

Zjistili jsme, že na začátku hraní měl Jiřík 21 žetonů.

VIII. Pizza

Prodavač prodává ve svém malém občerstvení pizzu. Na začátku dne upekl 45 kusů pizzy. Jen za první 3 hodiny jich prodal polovinu z celkového množství a ještě polovinu pizzy. Kolik jich prodal za první 3 hodiny?

Řešení:

Toto řešení je velmi jednoduché, ale je to pomocná úloha k řešení obtížnějších problémů. Pekař prodal polovinu ze 45, tedy $45 \div 2 = 22{,}5$ pizzy. Poté ještě polovinu, takže je nutné k výsledku ještě přičíst prodanou polovinu. Celkem prodal $22{,}5 + 0{,}5 = 23$ kusů pizzy.

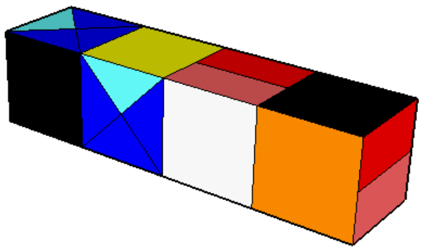
6.4 Úlohy pro rozvoj prostorové představivosti

Podle RVP ZV by měl žák druhého stupně základní školy řešit nestandardní geometrické úlohy a problémy rozvíjející prostorovou představivost (RVP ZV, 2016). V této kapitole se zaměřuji právě na tuto oblast matematického vzdělávání. V rámci těchto úloh se nejčastěji využívá strategie grafického znázornění, kdy si žák dělá pomocné náčrtky. Tuto strategii doprovází většinou jednoduché aritmetické výpočty.

První dvě úlohy jsou zaměřeny na práci s jednou krychlí. Jde o to, aby si žák dokázal představit krychli, která je nakreslená na papíře. Žáci mívají často problém si představit, že trojrozměrný objekt je možné nakreslit do roviny a naopak. Učiteli, který by tyto úlohy se žáky řešil, bych doporučila přinést na ukázku takové krychle, jako jsou v jednotlivých úlohách popsány. Zbylé čtyři úlohy se týkají krychlí složených z různého množství malých krychlí.

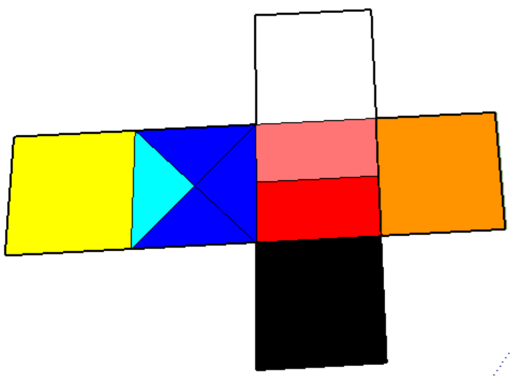
I. Síť krychle

Na obrázku jsou vedle sebe postavené čtyři stejné krychle. Nakresli síť této krychle.



Řešení:

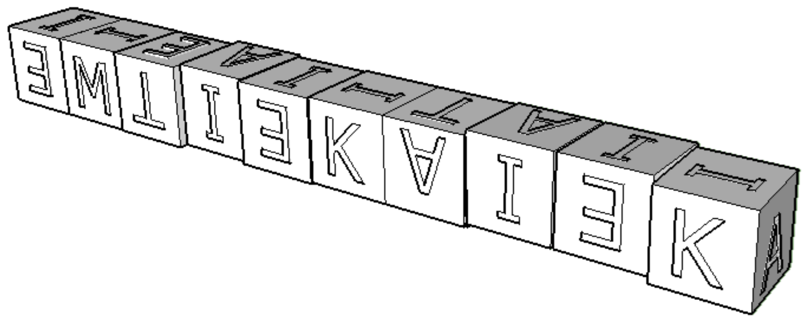
Nakreslíme si prázdnou síť a postupně vybarvujeme dle zadání. Správné řešení je zobrazeno na obr. 35.



Obr. 35: Síť krychle

II. Druhá strana

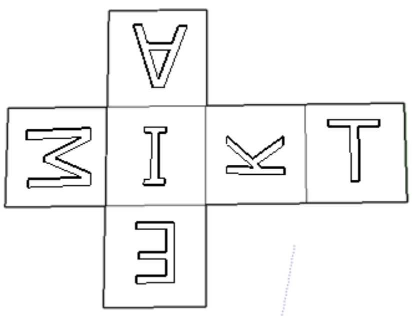
Paní učitelka měla 10 stejných krychlí. Položila je do jedné řady na svůj stůl tak, že si žáci mohli přečíst nesmyslný nápis, který je znázorněný na obrázku. Jaké slovo vidí z druhé strany paní učitelka?



Vytvořeno dle (Repáš, 1991)

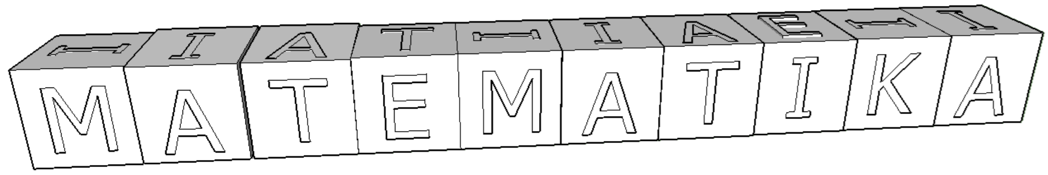
Řešení:

Řešení této úlohy spočívá ve správné představě, jak vypadají krychle, ze kterých je obrázek složen, ze všech stran. Můžeme si pomoci tím, že si vytvoříme síť této krychle, kterou zobrazuje obr. 36.



Obr. 36: Druhá strana (síť)

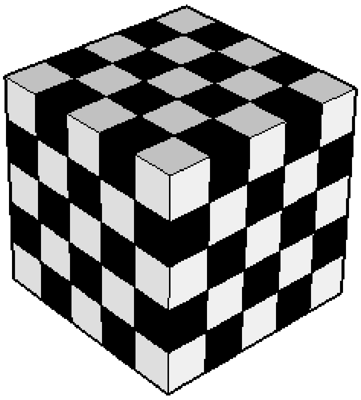
Podle vytvořené sítě si již lze představit, jaká písmena jsou na odvrácené straně jednotlivých krychlí. Výsledné slovo ukazuje obr. 37.



Obr. 37: Druhá strana řešení

III. Krychle

Velká krychle se skládá z menších krychlí, které jsou bílé nebo černé. Žádné dvě krychle stejné barvy se nedotýkají stěnami. Kolik černých a kolik bílých krychlí tvoří velkou krychli, která je zobrazena na obrázku?

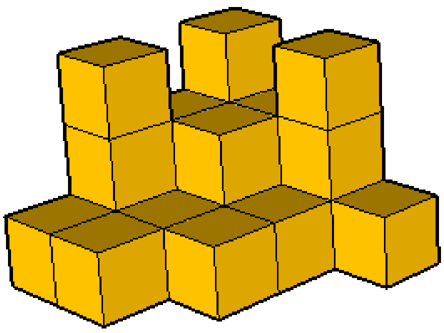


Řešení:

Při řešení této úlohy je zásadní si uvědomit, že krychle na obrázku má všechny rohy bílé, tím pádem je zřejmé, že bude bílých krychlí více. Můžeme uvažovat krychli postupně po patrech. V patře úplně navrchu krychle (z našeho pohledu) spočítáme 12 černých a 13 bílých krychlí. Analogicky známe počty i v ostatních patrech. Závěrem je, že v dané krychli je $12 + 13 + 12 + 13 + 12 = 62$ černých a $13 + 12 + 13 + 12 + 13 = 62$ bílých krychlí.

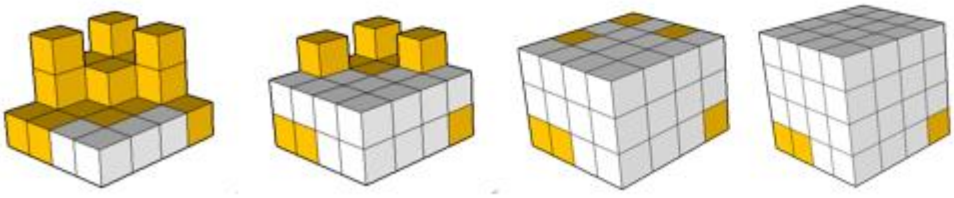
IV. Kolik chybí?

Na obrázku vidíš malé krychle, které tvoří nepravidelný útvar. Kolik by bylo nejméně potřeba dalších stejně velkých krychlí, abychom mohli tento nepravidelný útvar doplnit na krychli?



Řešení:

Nejdříve si prohlídneme zadaný útvar a zjistíme, jak bude muset být velká výsledná krychle. Zjistíme, že jsou vedle sebe maximálně čtyři krychle, tedy vytvoříme krychli o rozměrech $4 \times 4\ cm$. Systematicky budeme doplňovat krychli od spodní vrstvy a budeme počítat. Postup je znázorněný na obr. 38.

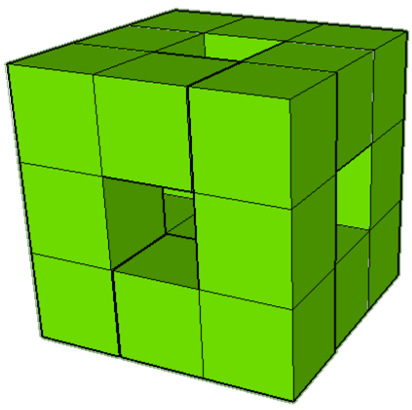


Obr. 38: Kolik chybí?

Pro vytvoření krychle bude potřeba $4 + 10 + 13 + 16 = 43$ malých krychlí.

V. Samolepky

Tomáš měl 100 kusů samolepek tvaru čtverce s délkou strany 3 cm. Kolik samolepek mu zbylo, jestliže jimi polepil zvenku i uvnitř stěny „děravé krychle" znázorněné na obrázku? Děravá krychle se skládá z dvaceti shodných krychlí o délce strany 3 cm.



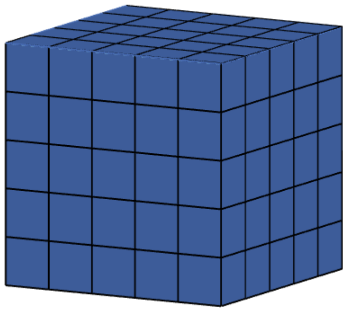
Vytvořeno dle (Repáš, 1991)

Řešení:

Abychom mohli odpovědět na otázku, musíme zjistit, kolik stěn Tomáš polepoval. Nejprve spočítáme vnější části krychle. Těch je na každé stěně osm. Krychle má šest stěn, tedy vnějších míst k polepení je $6 \times 8 = 48$. V každé stěně je díra a každá díra v sobě skrývá čtyři místa pro samolepky. Máme tedy dalších $6 \times 4 = 24$. Celkem je na takovou krychli potřeba $48 + 24 = 72$ samolepek. Tomášovi zbyde 28 samolepek.

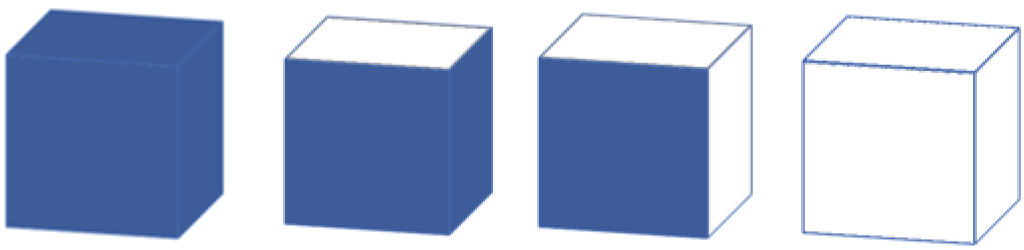
VI. Nabarvená krychle

Na obrázku je znázorněna krychle, která je vyrobena z bílé modelovací hmoty a je obarvená na modro. Tuto krychli rozřežeme na 125 stejně velkých krychlí, jak znázorňuje obrázek. Kolik vznikne kterých stejně zbarvených menších krychlí?



Řešení:

Při řešení této úlohy si nejdříve musíme uvědomit, jaké jsou různé druhy krychlí, které nám vzniknou, můžeme si je namalovat nebo popsat slovy.



Obr. 39: Modrá krychle

Na obr. 36 jsou znázorněny čtyři druhy malých krychlí, které po rozřezání vzniknou. Předpokládejme, že obrácené strany jsou bílé. Můžeme začít počítat jednotlivé druhy. Nejdříve krychle se třemi modrými stěnami. Takové jsou pouze rohové. Tedy je jich osm.

Krychle, které mají dvě stěny modré, se nachází pouze na hranách. Každou hranu velké krychle po odečtení rohů, tvoří tři krychle. Stěn je 12, takže máme 36 krychlí se dvěma modrými stěnami. Potom máme krychle s jednou modrou stěnou. Těch je na každé stěně 9 a stěn je 6. Dohromady máme 54 krychlí s jednou modrou stěnou. Zbylých 27 krychlí tvoří vnitřní část velké krychle a jsou celé bílé.

6.5 Kombinatorické úlohy

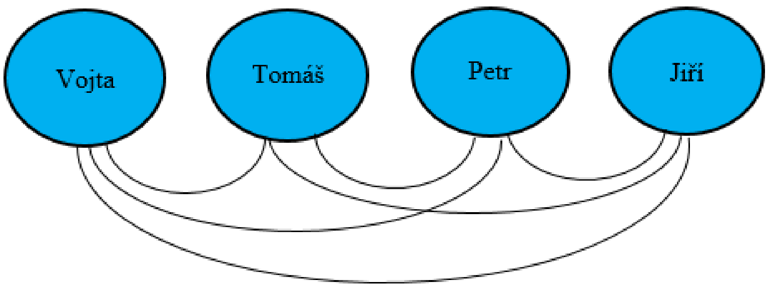
Poslední kapitolu této sbírky úloh věnuji kombinatorickým úlohám. Podle RVP ZV je schopnost užívání kombinačního úsudku jeden z očekávaných výstupů žáků druhého stupně základní školy (RVP ZV, 2016). Tyto úlohy nemají pro zkušeného řešitele kombinatorických úloh problémový charakter, ovšem pro žáky základní školy to jsou téměř vždy problémové úlohy. Kombinatorika není obsahem základního vzdělávání a tak jsou žáci nuceni zkoušet a objevovat řešení nerutinními způsoby. K řešení kombinatorických úloh se používají různé druhy strategií, od experimentování, přes grafické znázornění až po analogii.

I. Podání ruky

Čtyři kamarádi Vojta, Tomáš, Petr a Jiří si při loučení podávají ruku. Kolik podání ruky se mezi nimi uskuteční?

Řešení:

Při loučení si podávají ruce každý s každým. Tuto úlohu můžeme vyřešit graficky. Na obr. 40 je znázorněn postup grafického řešení, ze kterého je zřejmé že se odehraje šest podání ruky.



Obr. 40: Podání ruky

II. Tenisový turnaj

Šest hráčů se účastní tenisového turnaje. V prvním kole hraje každý s každým a 4 nejlepší hráči postupují do druhého kola. V druhém kole také hraje každý s každým a dva nejlepší postupují do finále. Kolik zápasů musel odehrát hráč, který celý turnaj vyhrál?

Řešení:

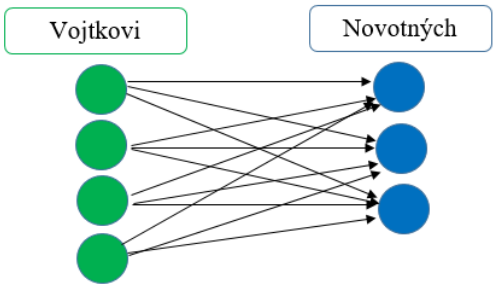
Otázka této úlohy se ptá pouze na jednoho hráče, který vyhrál. Můžeme od začátku postupovat každým kolem a počítat zápasy. V prvním kole musel zahrát 5 zápasů (má pět soupeřů). Do druhého kole jde on a ještě tři hráči, to jsou další tři zápasy. V posledním kole už hraje jen jeden zápas. To je $5 + 3 + 1 = 9$ zápasů celkem.

III. Večeře v restauraci

Paní Vojtková s manželem a dvěma syny jdou na večeři s přáteli, tříčlennou rodinou Novotných. Při loučení si podávají na rozloučení ruce tak, že každý člen rodiny Vojtkových podá ruku každému z rodiny Novotných. Kolik se odehraje podání ruky?

Řešení:

Vzájemná podání ruky nejlépe vyřešíme pomocí grafického znázornění. Do dvou sloupců si vyznačíme jednu a druhou rodinu. Poté musíme spojit každého člena jedné strany s každým členem druhé strany. To ukazuje obr. 41, na kterém je vidět, že se odehraje přesně 12 podání ruky



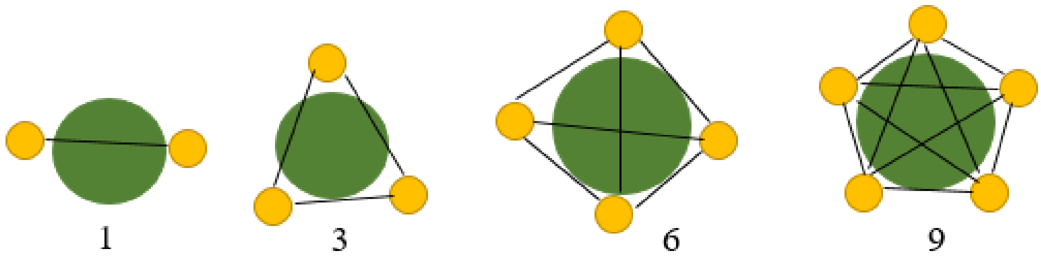
Obr. 41: Večeře v restauraci

IV. V kavárně

V kavárně bylo 12 lidí, kteří se posadili ve skupinkách k několika stolkům. Každý z nich při příchodu podal ruku všem osobám, které seděly u jednoho stolku. Bystrý pozorovatel si všiml, že se celkem vyměnilo 19 podání ruky. Vaší úlohou je zjistit, u kolika stolků seděli hosté a kolik jich bylo u každého stolku.

Řešení:

Tuto úlohu by bylo možné řešit pomocí několika různých strategií. Mohli bychom si pomocí grafického znázornění upřesnit představu o druzích stolů a počtu podání ruky ke každému stolu. Poté pomocí experimentální strategii určit, kterých stolů lidé v kavárně využili. Na obr. 42 jsou znázorněny stoly pro různý počet osob a počty podání rukou u každého stolu.

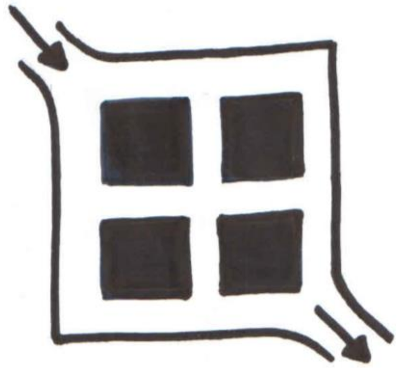


Obr. 42: V kavárně

Ze zadání víme, že na 12 lidí se uskutečnilo 19 podání ruky. S pomocí experimentování a logického myšlení dojdeme k tomu, že lidé byli posazeni u dvou stolů pro 5 osob a u jednoho pro 2 osoby.

V. Myši v bludišti

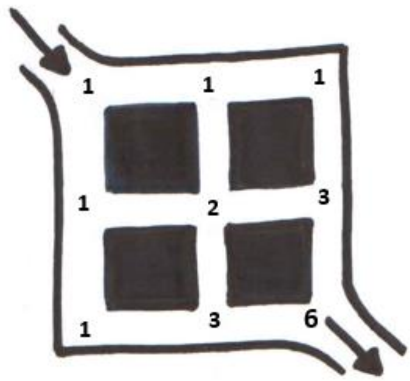
Kocour zahnal do bludiště celou myší rodinku. Všechny myši se dostaly šťastně do bezpečí v bodě B. Z rozhovoru myší se dovídáme, že každá myš běžela chodbičkami jen směrem doprava a dolů ale žádné dvě myši neběžely celou cestu po stejné trase. Kdyby myší bylo o jednu víc, musely by některé dvě běžet po stejné trase. Kolik členů měla myší rodinka? Bludiště je znázorněno na obrázku.



Vytvořeno dle (Repáš, 1991)

Řešení:

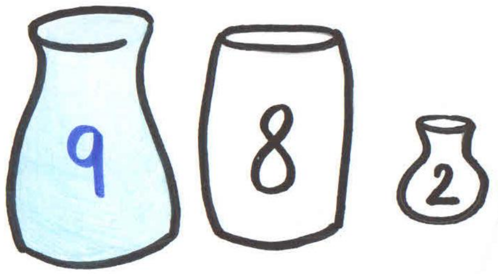
Předpokládám, že žák základní školy by tento druh úlohy řešil tak, že by využil grafické znázornění a nakreslil by si systematicky všechny cestičky. Jejich počet se pak rovná počtu členů myší rodinky. Jiný způsob znázorňuji na obr. 43. V tomto postupu si na každé křižovatce bludiště určíme, kolika způsoby se tam můžeme dostat a posouváme se od počátku k cíli. Oběma způsoby dojdeme k závěru, že myší rodinka má 6 členů.



Obr. 43: Myši v bludišti

VI. Tři nádoby

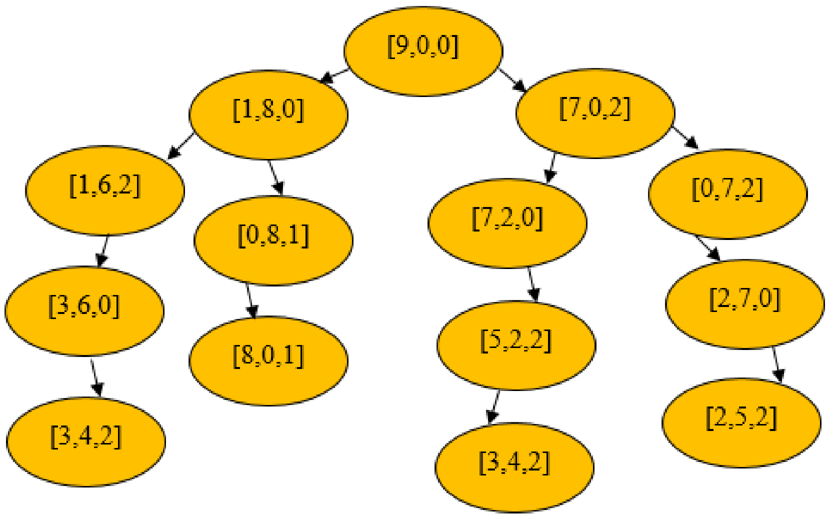
Máme plnou nádobu o objemu 9 litrů, pak máme ještě prázdné nádoby pro 8 litrů a 2 litry. Můžeme mezi nádobami libovolně přelévat tekutinu, ale pouze tak, že nádobu buď celou naplníme, nebo celou vyprázdníme. Na nádobách nejsou žádné rysky. Na jaký nejmenší počet přelití dokážeš mít v jednotlivých nádobách 4 litry, 3 litry a 2 litry? Nezáleží, ve které nádobě jaké množství bude.



Vytvořeno dle (Vejmola, 1986)

Řešení:

Řešení této úlohy budeme zapisovat do závorek, ve, kterých budou čísla dle počtu litrů v dané nádobě. Na počátku máme 9 litrů v devítilitrové nádobě a další dvě jsou prázdné. Zápisem [9,0,0] Z tohoto stavu máme dvě varianty, buď nalijeme plnou druhou nádobu a získáme [1,8,0], nebo třetí nádobu [7,0,2]. Tímto způsobem zkoušíme přelévat dále. Na obr. 44 je vidět, jak to může přelévání probíhat.



Obr. 44: Tři nádoby

Pomocí takového obrázku jsme dospěli k závěru, že nejmenší počet přelití, tak abychom dostali [3,6,0] jsou čtyři. Každá šipka značí jedno přelití.

Závěr

Tato diplomová práce volně navazuje na mou bakalářskou práci. Opět jsem se věnovala nestandardním aplikačním úlohám a problémům. V jednotlivých kapitolách jsem se zabývala vymezením pojmu problémové úlohy a jejich pozicí ve školských dokumentech. Dále jsem se věnovala metodě řešení problémových úloh ve výuce a popsala jsem nejpoužívanější heuristické strategie.

Praktická část mé diplomové práce spočívala v ověřování schopností vybraných žáků řešit matematické problémy. Výsledky žáků, jejichž schopnosti jsem zjišťovala, byly horší, než bylo mé očekávání. Zjistila jsem, že většině z této skupiny žáků dělaly nestandardní úlohy značné obtíže. V závislosti na tomto zjištění jsem vytvořila sbírku problémových úloh, která tvoří poslední část této diplomové práce. Sbírka se zaměřuje na výuku různých heuristických strategií a nestandardních postupů.

Při vypracovávání sbírky úloh jsem si všimla skutečnosti, že chybí dostatek zdrojů problémových úloh, které by byly aktuální a pro žáky školního věku přitažlivé. Inspiraci pro své úlohy jsem hledala většinou v knihách či souborech úloh, které jsou některé i čtyřicet let staré. Takové knihy jsou plné nápadů a velmi zajímavých úloh, ale nejsou aktuální. Podle mého názoru by bylo užitečné na základě starších publikací vytvořit obsáhlou sbírku matematických úloh pro učitele a žáky základní školy, která by byla poutavá a motivační.

Seznam použité literatury

EISENMANN, Petr a Jiří PŘIBYL, 2013. Systematické experimentování ve výuce matematiky. In: *Sborník příspěvků 6. konference Užití počítačů ve výuce matematiky*. České Budějovice: Katedra matematiky, Pedagogická fakulta Jihočeská univerzita v Českých budějovicích, s. 85-93. ISBN 978-80-7394-448-3.

EISENMANN, Petr, Jiří PŘIBYL, Jan KOPKA, Jarmila NOVOTNÁ, Jiří BŘEHOVSKÝ a Jiřina ONDRUŠOVÁ, 2015a. *Pokus – ověření – korekce* [online]. Ústí nad Labem: Univerzite J. E. Purkyně [cit. 2017-04-16]. Dostupné z: http://trilian.ujep.cz/~pribylk/souby/POK.pdf

EISENMANN, Petr, Jiří PŘIBYL, Jan KOPKA, Jarmila NOVOTNÁ, Jiří BŘEHOVSKÝ a Jiřina ONDRUŠOVÁ, 2015b. *Strategie analogie* [online]. Ústí nad Labem: Univerzita J. E. Purkyně [cit. 2017-04-17]. Dostupné z: http://trilian.ujep.cz/~pribylk/souby/Analogie.pdf

KALHOUS, Zdeněk, 2002. *Školní didaktika*. Vyd. 1. Praha: Portál. ISBN 80-717-8253-X.

KLIČKOVÁ, Marie, 1989. *Problémové vyučování ve školní praxi*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství. ISBN 80-042-3522-0.

KOPKA, Jan, 1999. *Hrozny problémů ve školské matematice*. Vyd. 1. Ústí na Labem: Univerzita J.E. Purkyně. Acta Universitatis Purkynianae. ISBN 80-704-4247-6.

KOPKA, Jan, 2005. *Výzkumné strategie při řešení problémů*. Ústí nad Labem: Univerzita J. E. Purkyně. Dostupné také z: pdf.truni.sk/download?zbornik/smolenice/kopka.pdf

KUŘINA, František, 2011. *Matematika a řešení úloh*. Vyd. 1. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta. ISBN 978-80-7394-307-3.

MALÁČ, Jaromír a Josef KURFÜRST, 1981. *Zajímavé úlohy z učiva matematiky ZŠ*. 1. vyd. Praha: SPN. Maják (Státní pedagogické nakladatelství).

MAŇÁK, Josef a Vlastimil ŠVEC, 2003. *Výukové metody*. Brno: Paido. ISBN 80-731-5039-5.

NOVOVESKÝ, Štefan a Karol KRIŽALKOVIČ, 1971. *777 matematických zábav a her: z učiva 6.-9. ročníku základní devítileté školy*. 1. vyd. Praha: SPN. Knižnice všeobecného vzdělání.

PECINA, Pavel a Lucie ZORMANOVÁ, 2009. *Metody a formy aktivní práce žáků v teorii a praxi*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita. ISBN 978-80-210-4834-8.

PÓLYA, György, 2016. *Jak to řešit?: překvapivé aspekty (nejen) matematických metod*. 1. vydání českého překladu. Praha: MatfyzPress. Popularizace. ISBN 978-80-7378-325-9.

PRŮCHA, Jan, Eliška WALTEROVÁ a Jiří MAREŠ, 2001. *Pedagogický slovník*. 3., rozš. a aktualiz. vyd. Praha: Portál. ISBN 80-717-8579-2.

PŘIBYL, Jiří a Jiřina ONDRUŠOVÁ, 2014. Zavedení pomocného prvku – užitečná heuristická strategie. *MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA Časopis pro výuku na základních a středních školách*. Praha 4: Prometheus, **23**(2), 95-105. ISSN 1805-7705.

REPÁŠ, Vladimír, 1991. *Úlohy z matematických olympiád na základní škole: (4.-7. ročník)*. 1. vyd. Praha: SPN. ISBN 80-042-5439-X.

RVP ZV, 2016. In: . Praha: Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy. Dostupné také z: http://www.msmt.cz/file/37052/

SKALKOVÁ, Jarmila, 2007. *Obecná didaktika: vyučovací proces, učivo a jeho výběr, metody, organizační formy vyučování*. 2., rozš. a aktualiz. vyd., [V nakl. Grada] vyd. 1. Praha: Grada. Pedagogika (Grada). ISBN 978-80-247-1821-7.

Standardy pro základní vzdělávání, 2013. In: . Dostupné také z: http://www.msmt.cz/vzdelavani/zakladni-vzdelavani/standardy-pro-zakladni-vzdelavani-1

VEJMOLA, Stanislav, 1986. *Konec záhady hlavolamů*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství. Knižnice všeobecného vzdělání.

Seznam obrázků

Seznam tabulek

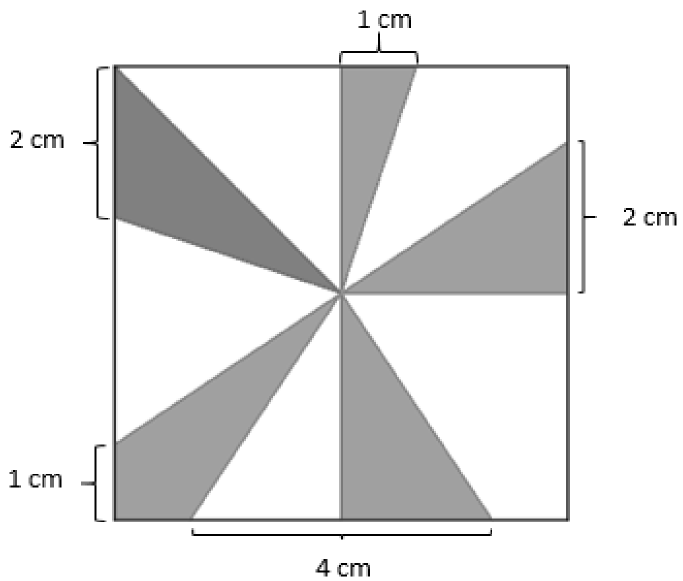
Seznam grafů

Přílohy

Příloha 1: Pracovní list pro žáky

Úloha 1: Marťanský farmář chová na své farmě různá mimozemská zvířátka. Hned pod oknem má výběh pro čtyřnožky a pětinožky. To jsou tam běžná zvířátka a je o nich známo, že čtyřnožky mají tři oči a pětinožky mají dvě oči. Farmář se kouká z okna a vidí celkem 57 nohou a 34 očí. Kolik má farmář čtyřnožek a kolik pětinožek?

Úloha 2: Na obrázku je čtverec o délce strany 6 cm. Šedou barvou jsou v něm vyznačeny různé tvary, které dohromady připomínají hvězdu. Jaký je obsah šedé plochy tvořící hvězdu?



Úloha 3: Na střední škole se vždy na konci roku koná burza učebnic, kde žáci jiným žákům mohou prodat své učebnice, které již nepotřebuji. Burza začíná po vyučování a trvá tři hodiny. Anička během první hodiny prodala polovinu svých knih a ještě polovinu knihy. Druhou hodinu prodala polovinu zbytku knih a ještě půl knihy k tomu. Během poslední hodiny prodala opět polovinu zbytku svých knih a navíc polovinu knihy. Pouze dvě knihy se jí nepovedlo prodat. S kolika knihami přišla Anička na burzu učebnic?

Příloha 2: Dotazník pro žáky

1) Jaké je tvé pohlaví?
    - ☐ Dívka
    - ☐ Chlapec
2) Do které třídy chodíš?
    - ☐ Sedmé
    - ☐ Osmé
    - ☐ Deváté
3) Jakou jsi měl/a na vysvědčení známku z matematiky?
    - ☐ 1
    - ☐ 2
    - ☐ 3
    - ☐ 4
    - ☐ 5
4) Účastnil/a ses někde nějaké matematické soutěže?
    - ☐ Ano
    - ☐ Ne
5) Která úloha ti připadala nejlehčí?
    - ☐ 1
    - ☐ 2
    - ☐ 3
6) Která úloha ti připadala nejtěžší?
    - ☐ 1
    - ☐ 2
    - ☐ 3