Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Diplomová práce

Tvorba pracovních listů z kombinatoriky pro 1. stupeň ZŠ s využitím interaktivní tabule

Vypracoval: Terezie Šobová
Vedoucí práce: RNDr. Marika Hrubešová, Ph.D.
České Budějovice 2024

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem autorem této kvalifikační práce a že jsem ji vypracovala pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu použitých zdrojů.

V Českých Budějovicích dne ……………...   …………………….....................

Terezie Šobová

Poděkování

Mé poděkování patří RNDr. Marice Hrubešové, Ph.D. za odborné vedení, trpělivost, cenné rady a ochotu, kterou mi v průběhu zpracování diplomové práce věnovala.

Abstrakt:

Tato diplomová práce inovativně propojuje kombinatoriku s moderními výukovými metodami prostřednictvím interaktivních pracovních listů navržených speciálně pro žáky 1. stupně základní školy, konkrétně první až třetí třídy.

V teoretické části jsou představeny základní principy kombinatoriky, včetně pravidel součtu a součinu, variací, permutací a kombinací, které jsou přizpůsobeny věkové kategorii žáků.

Praktická část práce se zaměřuje na vytvoření interaktivních pracovních listů z kombinatoriky formou hry s názvem „MĚSTO“. Tato hra je detailně popsána včetně jejího konceptu, technické realizace a příkladů použití ve výuce. V rámci praktické části je rovněž proveden výzkum, který zkoumá účinnost a efektivitu interaktivních materiálů v učebním procesu.

Výsledkem práce je soubor připravených interaktivních pracovních listů, které jsou připraveny k použití ve výuce na 1. stupni základní školy. Tato diplomová práce přispívá k modernizaci výuky matematiky na základních školách prostřednictvím efektivního využití digitálních technologií a inovativních pedagogických metod.

Klíčová slova: kombinatorika, interaktivní tabule, pracovní listy, 1. stupeň ZŠ, digitální technologie

Abstract:

This master thesis innovatively combines combinatorics with modern teaching methods through interactive worksheets designed specifically for primary school pupils in the first to third grade.

In the theoretical part, the basic principles of combinatorics are introduced, including the rules of sum and product, variations, permutations and combinations, which are adapted to the age category of pupils.

The practical part of the work focuses on the creation of interactive worksheets on combinatorics in the form of a game called "CITY". This game is described in detail including its concept, technical implementation and examples of its use in the classroom. As part of the practical part, research is also conducted to investigate the effectiveness and efficiency of interactive materials in the learning process.

As a result of the work, a set of prepared interactive worksheets are prepared for use in teaching at primary school level 1. This thesis contributes to the modernization of mathematics teaching in primary schools through the effective use of digital technologies and innovative pedagogical methods.

Keywords: combinatorics, interactive whiteboard, worksheets, 1st grade elementary school, digital technology

Obsah

1 Úvod

Vzdělávací proces se neustále vyvíjí, přizpůsobuje se novým poznatkům a technologiím, které otevírají nové možnosti pro efektivní a interaktivní výuku. Tato diplomová práce se zaměřuje na inovativní propojení disciplíny kombinatoriky s moderními výukovými metodami prostřednictvím vytvoření interaktivních pracovních listů určených pro žáky prvního stupně základní školy. Cílem práce je nejen představit základní principy kombinatoriky v přístupné formě pro mladší žáky, ale také demonstrativně ukázat, jak digitální technologie mohou podpořit jejich pochopení matematických konceptů.

Teoretická část práce se zaměřuje na seznámení se základními pravidly kombinatoriky, které jsou vhodně přizpůsobeny věkové skupině žáků prvního stupně. Důraz je kladen na principy součtu a součinu, variace, permutace a kombinace, které jsou klíčovými pojmy v rámci výuky kombinatoriky.

Praktická část práce popisuje proces vytvoření pracovních listů z kombinatoriky na interaktivní tabuli, zaměřených na hru nazvanou „MĚSTO“. Tuto hru jsem navrhla tak, aby nejen podporovala pochopení matematických principů, ale také aby byla motivujícím prvkem v učebním procesu. Každý aspekt hry je podrobně analyzován včetně technické realizace a příkladů její aplikace ve výuce.

Součástí práce je rovněž provedení výzkumu, který zkoumá účinnost a efektivitu interaktivních materiálů ve výuce na 1. stupni základní školy. Získané výsledky potvrzují přínos digitálních technologií a inovativních pedagogických metod pro modernizaci výuky matematiky na základních školách.

Výsledkem diplomové práce jsou připravené interaktivní pracovní listy, které jsou navrženy tak, aby podporovaly aktivní zapojení žáků a jejich kreativní myšlení v oblasti kombinatoriky. Tato práce představuje krok k efektivnějšímu využití digitálních technologií ve výuce matematiky na 1. stupni základní školy a poskytuje inspiraci pro další rozvoj moderních výukových metod.

2 Kombinatorika

2.1 Vymezení pojmu

„Kombinatorika je matematická disciplína, která se zabývá rozdělováním, uspořádáváním, výběrem prvků z nějaké množiny.“ (Blažková a Budinová, 2012, s. 1)

„Kombinatorika zkoumá skupiny (podmnožiny) prvků vybraných z jisté základní množiny. Podle toho, zda se prvky v jednotlivých skupinách mohou či nemohou opakovat, rozdělujeme skupiny prvků na skupiny s opakováním a skupiny bez opakování. Dále rozlišujeme, zda jsou vybrané skupiny uspořádané či nikoli. Vybíráme tedy k prvku z daných n prvků konečné podmnožiny N ($k \in$ N, $n \in$ N) všech přirozených čísel a tvoříme (ne) uspořádané k-tice.“ (Příhonská, 2013, s. 15)

Příhonská (2013) poukazuje na to, že kombinatorika, stejně jako jakákoli jiná matematická disciplína, úzce souvisí s jinými matematickými obory. Jedna z disciplín, která je s kombinatorikou spjata, je pravděpodobnost, která vychází z právě z kombinatoriky a statistiky.

2.2 Historie Kombinatoriky

Počátek kombinatoriky není přesně vymezen, v literatuře je zaznamenán v různých etapách. Voglová (2006) uvádí, že první zmínky o kombinatorice najdeme již kolem roku 2000 př. n. l. nejčastěji v čínských a indických civilizacích.

Jedním z prvních známých děl zabývajících se kombinatorikou je Leibnizovo dílo "Disertatio de Arte Combinatoria" z roku 1666, jak uvádí (Fuchs, 2000). Toto dílo reprezentuje významný milník v historii kombinatoriky, protože představuje první publikovanou práci v této oblasti.

Kombinatorika vznikla v 17. století především s cílem předpovědět pravděpodobnost výhry hazardních hráčů, kteří měli oblibu v karetních hrách a hrách s kostkami. Jména jako Jacob Bernoulli, Leonhard Euler, Gottfried Wilhelm Leibniz a Blaise Pascal jsou spojována s kombinatorikou jako vědní disciplínou (Kubanová, 2003).

„Italský matematik Niccolo Tartaglia jako jeden z prvních počítal různé kombinace při hře v kostkách. Vytvořil tabulku, do které zaznamenal, kolika způsoby může padnout na *r* kostkách *s* ok. (např. $1 + 3 + 4 = 4 + 2 + 2$).“ (Vilenkin, 1977, s.10)

V 17. století začali Blaise Pascal a Pierre Fermat, francouzští vědci, zkoumat teoretické otázky kombinatoriky. Jejich zkoumání problémů s hazardními hrami, konkrétně „Úkol rozdělování sázky“, podnítil Pascalův přítel, Chevalier de Méré, který byl vášnivým hazardním hráčem. Problém se týkal hry nazvané „Zápas“ hlava – orel s cílem šest vyhraných partií, hra byla přerušena, když jeden hráč vyhrál 5 partií a druhý vyhrál čtyři partie.
Pascal použil kombinatoriku, aby našel spravedlivé řešení pro rozdělení vsazených peněz, s ohledem na obecný případ, kdy jeden hráč stále potřeboval vyhrát *r* partií a druhý potřeboval vyhrát *s* partií (Vilenkin, 1977).

„V roce 1901 byla vydána první učebnice kombinatoriky, jejíž autorem byl německý matematik Netto.“ (Voglová, 2006, s. 72–73)

Fuchs (2000) konstatuje, že největší rozmach v oblasti kombinatoriky nastal v posledních třiceti letech 20. století. „Jedním z prvních známých děl zabývajících se kombinatorikou je Leibnizovo dílo "Disertatio de Arte Combinatoria" z roku 1666.“ (Fuchs, 2000, s.6) Toto dílo představuje významný milník v historii kombinatoriky, protože představuje první publikovanou práci v této oblasti.

2.3 Základní kombinatorická pravidla

Na prvním stupni základní školy se žáci s kombinatorikou setkávají jen okrajově. Neznají danou terminologii a kombinatorické vzorce. Avšak k vyřešení většiny kombinatorických úloh jim stačí dvě jednoduchá pravidla, a to pravidlo součtu a součinu.

2.3.1 Pravidlo součtu

„Prvním pravidlem kombinatoriky je **kombinatorické pravidlo součtu**. To je možné použít tehdy, když se nám podaří rozdělit zkoumané prvky (skupiny prvků) do několika tříd (množin), přičemž každý prvek patří právě do jedné třídy. Je pak zřejmé, že celkový počet prvků je roven součtu počtů prvků ve všech třídách (za podmínky, že ani jedna z uvažovaných prvků nepatří do dvou nebo více tříd, tzn., že třídy jsou disjunktní).“ (Příhonská, 2013, s. 15)

Definice

„Jestliže $A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n$ jsou konečné množiny, které mají po řadě $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_n$ prvků, a jsou-li každé dvě disjunktní, pak počet prvků množiny $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ je roven $p_1 + p_2 + \cdots + p_n$.“ (Calda a Dupač, 1993, s. 9)

Řešený příklad

Honzík by si chtěl koupit zmrzlinu, vydal se tedy do cukrárny. V nabídce cukrárny mají 7 druhů kopečkové zmrzliny a 3 druhy zmrzliny točené. Kolik má Honzík možností výběru jednoho druhu zmrzliny?

Řešení

Pravidlo součtu říká, že pokud máme dvě nebo více kategorií, které se navzájem vylučují (Honzík si může vybrat buď kopečkovou, nebo točenou zmrzlinu), celkový počet možností je součet počtů jednotlivých možností.

Počet druhů kopečkové zmrzliny = 7

Počet druhů točené zmrzliny = 3

Počet druhů kopečkové zmrzliny + Počet druhů točené zmrzliny = Celkový počet možností výběru

$$7 + 3 = 10$$

Obrázek 1- Znázornění deseti různých možností

Honzík má tedy celkem 10 různých možností, jakou zmrzlinu si může koupit.

2.3.2 Pravidlo součinu

„Druhé pravidlo, které nazýváme **kombinatorickým pravidlem součinu**, je poněkud složitější. Při sestavování skupin o dvou prvcích je často známo, kolika způsoby můžeme vybrat první prvek a kolika způsoby prvek druhý, přitom počet způsobů výběru druhého prvku nezávisí na tom, jak byl vybrán první prvek. Nechť je první prvek možno vybrat m způsoby a druhý prvek n způsoby. Pak skupinu těchto prvků $\boldsymbol{(m, n)}$ lze vybrat $\boldsymbol{m \cdot n}$ způsoby. Uvedenou vlastnost můžeme zobecnit pro výběr *k*-tic prvků." (Příhonská, 2013, s. 15).

Definice

„Jestliže *vybíráme uspořádané k-tice čísel, přičemž první člen můžeme vybrat* n_1 *způsoby, druhý* n_2 *způsoby, ... k-tý člen* n_k *způsoby, pak počet všech uspořádaných k-tic je roven* $n_1.n_2...n_k$." (Blažková a Budínová, 2012, s. 2)

Řešený příklad

Anička si v butiku koupila 4 trička (modré, červené, zelené a růžové) a 2 kalhoty (modré, hnědé). Kolik kombinací může s oblečením vytvořit?

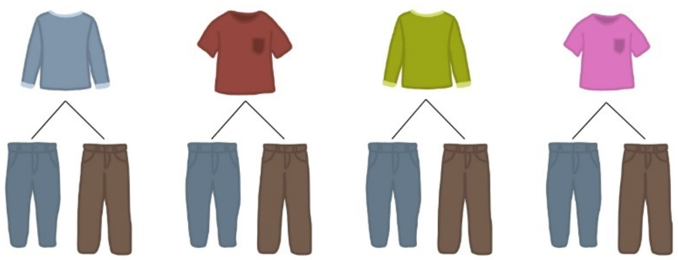
Kombinace = tričko + kalhoty

Řešení

Pravidlo součinu říká, že pokud máme dvě nebo více kategorií a vybíráme jednu položku z každé kategorie, celkový počet kombinací je součin počtu položek v jednotlivých kategoriích.

Počet triček: 4 (modré, červené, zelené, růžové)

Počet kalhot: 2 (modré, hnědé)



Obrázek 2 - Znázornění pravidla součinu pomocí stromového grafu

Výpočet celkového počtu kombinací

Počet triček · Počet kalhot = Celkový počet kombinací

$$4 \cdot 2 = 8$$

Anička může vytvořit celkem 8 různých kombinací triček a kalhot.

3 Variace

3.1 Variace bez opakování

Kubanová (2003) uvádí že, v kombinatorických úlohách se často setkáváme s uspořádanými *k*-ticemi, které jsou tvořeny prvky z dané množiny a žádný prvek se v nich neopakuje. Pro tyto *k*-tice existuje specifický termín – variace bez opakování.

Definice

„*k-**členná variace** z n prvků je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.*“ (Calda a Dupač, 1993, str. 13)

„Počet V (k, n) všech k-členných variací z n prvků je

$$V(k, n) = n(n-1)(n-2) \ldots (n-k+1).\text{“}$$

(Calda a Dupač, 1993, s. 14)

Řešený příklad

Kolik různých dvojciferných přirozených čísel můžeme zapsat pomocí číslic 2, 6, 7, pokud platí, že číslice se nesmí opakovat?

Řešení:

Vybíráme přirozené dvojciferné číslo, budeme tedy řešit pozici desítek a jednotek.
Nejprve dosadíme jednu z číslic na pozici desítek, poté vybíráme na pozici jednotek jednu ze zbylých dvou číslic.

Na pozici desítek vložíme číslici 2:

Na pozici jednotek vložíme číslici 6 → číslo 26

Na pozici jednotek vložíme číslici 7 → číslo 27

Na pozici desítek vložíme číslici 6:

Na pozici jednotek vložíme číslici 2 → číslo 62

Na pozici jednotek vložíme číslici 7→ číslo 67

Na pozici desítek vložíme číslici 7:

Na pozici jednotek vložíme číslici 2 → číslo 72

Na pozici jednotek vložíme číslici 6 → číslo 76

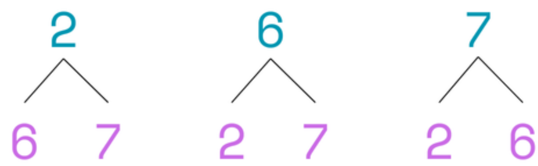
To znamená že, na první pozici můžeme dosadit jednu ze tří číslic (2, 6, 7). Pro první pozici (pozici desítek) máme 3 možnosti. Poté vybíráme číslici na pozici jednotek ze zbylých dvou. Nabízejí se nám tedy dvě možnosti.

Použijeme pravidlo součinu

$$3 \cdot 2 = 6$$

Z číslic 2, 6, 7 můžeme tedy vytvořit 6 dvojciferných čísel, pokud se číslice nebudou opakovat.

Zobrazení pomocí stromového grafu:



Obrázek 3 - Znázornění pomocí stromového grafu

Řešení pomocí výčtu prvků: 26, 27, 62, 67, 72, 76.

Pomocí číslic 2, 6, 7, které se neopakují, můžeme vytvořit 6 různých dvojciferných čísel.

3.2 Variace s opakováním

„O Variacích k – té třídy s opakováním z n prvků hovoříme tehdy, když v těchto k – ticích záleží na uspořádání prvků.“ (Kubanová, 2003, s. 32)

Definice

*„k – **členná variace s opakováním** z n prvků je uspořádaná k – tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše k-krát.*

Počet V‘(k,*n*) všech *k*-členných variací s opakováním z *n* prvků je

$$V'(k,n) = n^k.“$$

(Calda a Dupač, 1993, s. 37)

Řešený příklad

Kolik různých trojciferných přirozených čísel můžeme zapsat pomocí číslic 3, 4, 5, 6, pokud platí, že číslice se mohou opakovat?

Řešení

a) Pomocí pravidla součinu

Vybíráme přirozené trojciferné číslo, budeme tedy řešit pozici stovek, desítek a jednotek. Na jednotlivé pozice můžeme zvolit kteroukoliv ze čtyř číslic - 3, 4, 5, 6.
K výpočtu můžeme použít pravidlo součinu. Jelikož se číslice mohou opakovat, máme na každou pozici 4 možnosti. Z toho vyplývá:

$$4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$$

Pomocí číslic 3, 4, 5, 6, které se mohou opakovat, můžeme vytvořit 64 různých trojciferných čísel.

b) Pomocí vzorce

Vytváříme trojciferné číslo - 3 pozice (stovky, desítky, jednotky).
Na výběr máme ze 4 různých číslic- 3, 4, 5, 6.
Jelikož se jedná o variace s opakováním použijeme vzorec

$$V'(k,n) = n^k,$$

kde *n* je počet možných prvků (číslic) a *k* je počet pozic (řádů).
n = 4 (číslice 3, 4, 5, 6)
k = 3 (trojciferné číslo)

$$V\ (4,3) = 4^3 = 64$$

Pomocí číslic 3, 4, 5, 6, které se mohou opakovat, můžeme vytvořit 64 různých trojciferných čísel.

4 Permutace

„Z dané *n*-prvkové množiny vybíráme uspořádané *n*-tice prvků, přičemž každý prvek můžeme použít nejvýše jednou. Takové *n*-tice nazýváme permutace. Permutace obsahuje všechny prvky dané množiny, je to jakési uspořádání všech prvků množiny." (Pokorný, 2019, s. 32)

4.1 Permutace bez opakování

Definice

„Permutace z n prvků je uspořádaná n-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje právě jednou." (Calda a Dupač, 1993, s. 17)

„Počet permutací bez opakování z *n*-prvkové množiny je dán vztahem:

$$\mathbf{P\ (n) = n!}\ ."$$

(Kubanová, 2003, s. 23)

Řešený příklad

Paní učitelka potřebuje seřadit do řady 3 děti: Adama, Barboru a Cecílii. Kolika různými způsoby může paní učitelka děti seřadit?

Řešení

a) Pomocí pravidla součinu

Pro výpočet můžeme použít pravidlo součinu.

Máme 3 pozice, na které budeme vybírat ze 3 dětí. Budeme postupovat následovně:

Výběr dítěte na první pozici

- Máme 3 možnosti (Adama, Barboru a Cecílii).

Výběr dítěte na druhou pozici

- Máme 2 možnosti, jelikož jsme jedno dítě vybrali na první pozici.

Výběr dítěte na třetí pozici

- Máme 1 možnost. Jelikož jsme na předchozích pozicích vybrali dvě děti.

To znamená: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Paní učitelka může děti seřadit 6 způsoby.

Pro kontrolu můžeme vypsat všechny možnosti:

1. Adam, Barbora, Cecílie
2. Adam, Cecílie, Barbora
3. Barbora, Adam, Cecílie
4. Barbora, Cecílie, Adam
5. Cecílie, Adam, Barbora
6. Cecílie, Barbora, Adam

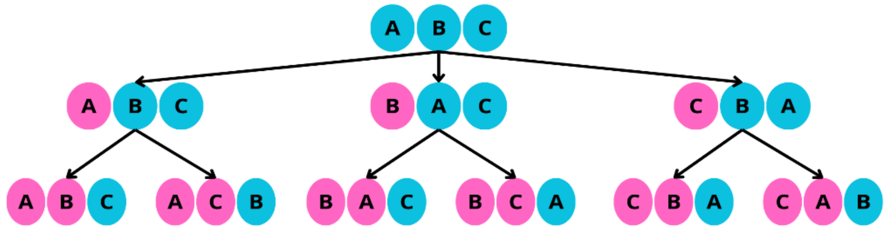
Zobrazení pomocí stromového grafu:

Označme si jména následovně

Adam = A

Barbora = B

Cecílie = C



Obrázek 4 - Znázornění pomocí stromového grafu

b) Pomocí vzorce

Pro výpočet počtu uspořádání použijeme vzorec $P(n) = n!$, kde $n!$ (n faktoriál) je součin všech kladných celých čísel od 1 do n.

V našem případě máme tři děti, to znamená: $n = 3$

$$P\,(3) = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Paní učitelka může děti seřadit 6 způsoby.

4.2 Permutace s opakováním

Definice

„Permutace s opakováním z n prvků je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje aspoň jednou.“ (Calda a Dupač, 1993, s. 41)

„Počet $P'(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ permutací s opakováním z *n* prvků, v nichž se jednotlivé prvky opakují $k_1, k_2, \ldots, k_n$ – krát, je

$$P'(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{(k_1+k_2+\ldots+k_n)!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}.“$$

(Calda a Dupač, 1993, s. 42)

Řešený příklad

Vítek si staví věž z kostek, má 2 modré a 2 zelené kostky. Kolika způsoby může věž postavit?

Řešení

Při zjišťování počtu všech možností, jak může Vítek věž z kostek postavit, můžeme využít zákonitostí permutací s opakováním.

Využijeme vzorce:

$P'(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{(k_1+k_2+\ldots+k_n)!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}$.

V našem případě:

n = 2 (modrá kostka, zelená kostka)

k_1= 2 (2 modré kostky)

k_2= 2 (2 zelené kostky)

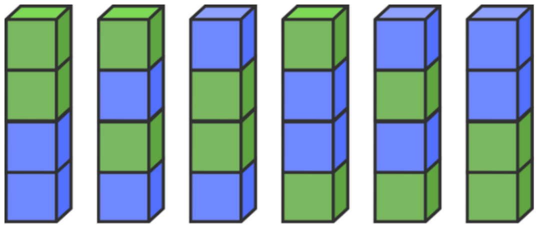
$$P'(4) = \frac{(2+2)!}{2!\,2!} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6$$

Vítek může postavit věž 6 různými způsoby.

Pro kontrolu můžeme provést výčet možností:

1. modrá – modrá – zelená – zelená
2. modrá – zelená – modrá – zelená
3. modrá – zelená – zelená – modrá
4. zelená – modrá – modrá – zelená
5. zelená – modrá – zelená – modrá
6. zelená – zelená – modrá – modrá

Znázornění



Obrázek 5 - Znázornění šesti různých možností

5 Kombinace

5.1 Kombinace bez opakování

„Je dána množina *N*, která má *n* prvků. Z těchto prvků chceme vybrat její *k*-prvkovou podmnožinu *K*. Ptáme se, kolika způsoby to můžeme udělat. Takto zadaná úloha je typická pro kombinace bez opakování. Tedy kombinací budeme nazývat libovolnou takovou vybranou podmnožinu. Kombinace *k*-té třídy z *n* prvků je tedy každá *k*-prvková podmnožina dané *n*-prvkové množiny. Počet takových kombinací vyjadřuje kombinační číslo $\binom{n}{k}$." (Pokorný, 2019, s. 41)

Definice

„Kombinací bez opakování k-té třídy (k$\in$ N, k $\leq$ n) z n-prvkové množiny rozumíme každou neuspořádanou k-tici, vytvořenou z prvků základní množiny tak, že každý prvek je v ní obsažen nejvýše jednou." (Kubanová, 2003, s. 27)

„Počet K (*k*, *n*) všech *k*-členných kombinací z *n* prvků je
K (*k*, *n*) =$\binom{n}{k}$.

Kdy $\binom{n}{k}$ je kombinační číslo, které definujeme takto:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\text{."}$$

(Calda a Dupač, 1993, s. 27)

V předchozí kapitole jsme řešili příklad na permutace s opakováním, tento příklad lze také vyřešit pomocí kombinačního čísla, pojďme si ukázat, jak by se tento příklad dal za pomocí kombinačního čísla vyřešit.

Zadání příkladu:

Vítek si staví věž z kostek, má 2 modré a 2 zelené kostky. Kolika způsoby může věž postavit?

Řešení pomocí kombinačního čísla:

Vítek má k dispozici dvě modré a dvě zelené kostky, tedy 4 objekty celkem.

Čtveřici kostek můžeme chápat jako jednu skupinu, která se děli na dvě skupiny. V jedné skupině jsou dvě kostky modré, v druhé skupině dvě kostky zelené.

Použijeme kombinační číslo, které vyjadřuje počet způsobů, jak vybrat 2 pozice ze 4 pro modré kostky (nebo zelené, což je totožné).

Vzorec pro kombinační číslo je následující:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

V našem případě je

n = 4 (celkový počet kostek)

k = 2 (počet modrých kostek nebo zelených kostek).

Po dosazení nám vznikne:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{4} = 6$$

Existuje tedy 6 různých způsobů, jak můžeme uspořádat 2 modré a 2 zelené kostky do věže.

Řešený příklad

Maminka chystá Petříkovi svačinu do školy, Petřík si přeje na svačinu dva kusy ovoce. Maminka má na výběr z 6 druhů ovoce – banán, jablko, jahoda, pomeranč, meloun a malina. Kolika způsoby může maminka svačinu připravit?

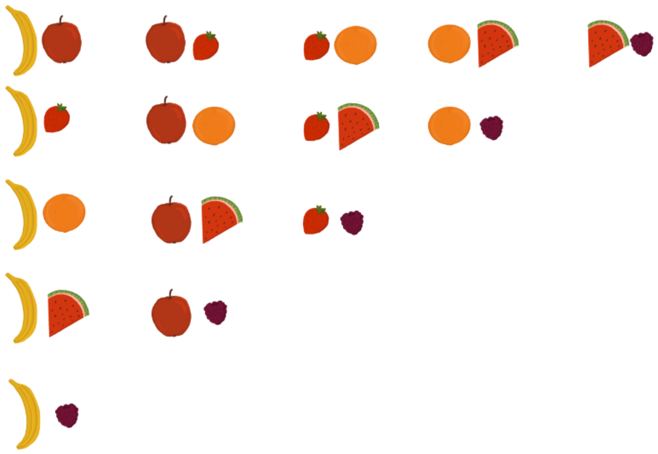
Řešení

a) řešení pomocí výčtu prvků

Úlohu můžeme vyřešit pomocí výčtu všech prvků:

1. banán, jablko; 2. banán, jahoda; 3. banán, pomeranč; 4. banán, meloun; 5. banán, malina; 6. jablko, jahoda; 7. jablko, pomeranč; 8. jablko, meloun; 9. jablko, malina; 10. jahoda, pomeranč; 11. jahoda, meloun; 12. jahoda, malina; 13. pomeranč, meloun; 14. pomeranč, malina; 15. meloun, malina

znázornění pomocí obrázku



Obrázek 6 - Znázornění výčtu možností

Maminka má 15 možností, jak připravit Petrovi svačinu.

b) řešení pomocí pravidla součinu

Maminka vybírá dvojici z šesti prvkové množiny.

Nejprve vybírá ovoce na první pozici - 6 možností.

Poté vybere ovoce na druhou pozici. Protože již na první pozici jedno ovoce vybrala, má 5 možností.

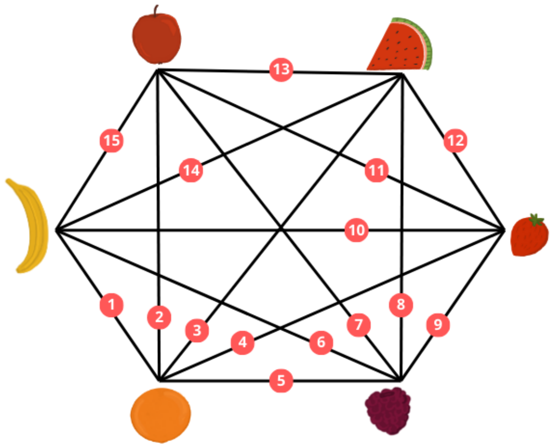
Celkový počet možností je tedy podle pravidla součinu:

$$6 \cdot 5 = 30$$

Musíme dát ale pozor na to, že tímto způsobem jsme vybrali každou dvojici dvakrát (např. jablko a jahoda, jahoda a jablko). Nám ale na pořadí prvků nezáleží, proto vydělíme dvěma, dostaneme tedy:

$$\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

Možné znázornění pomocí obrázku:



Obrázek 7 - Znázornění, proč musíme vydělit dvěma

Maminka má tedy 15 možností, jak připravit Petřikovi svačinu.

c) řešení pomocí vzorce

Maminka vybírá dvojici z šesti prvkové množiny (banán, jablko, jahoda, pomeranč, meloun a malina).

n = celkový počet položek na výběr

n = 6 (6 druhů ovoce)

k = počet položek které vybíráme

k = 2 (dvojici ovoce)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{2!4!} = 15$$

Maminka má tedy 15 možností, jak připravit Petřikovi svačinu.

5.2 Kombinace s opakováním

Definice

„k-členná kombinace s opakováním s n prvků je neuspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků, tak že každý se v ní vyskytuje nejvýše k-krát.“ (Calda a Dupač, 1993, s. 47)

„Počet K‘ (*k*, *n*) všech *k*-členných kombinací s opakováním z *n* prvků je

$$K' (k, n) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}.\text{“}$$

(Calda a Dupač, 1993, s. 49)

Řešený příklad

V obchodě mají 4 druhy lízátek – modré, zelené, žluté a oranžové. Bertík si chce koupit dvě lízátka, nevadí mu, když obě lízátka budou stejná. Kolik má Bertík možností, jak si lízátka koupit?

Řešení

a) řešení pomocí výčtu prvků

Úlohu můžeme vyřešit pomocí výčtu všech prvků.

1. Modré a modré; 2. Modré a zelené; 3. Modré a žluté; 4. Modré a oranžové; 5. Zelené a zelené; 6. Zelené a žluté; 7. Zelené a oranžové; 8. Žluté a žluté; 9. Žluté a oranžové; 10. Oranžové a oranžové

Bertík má 10 možností, jak si koupit dva kusy lízátek.

b) řešení pomocí vzorce

Bertík vybírá dvojici ze 4 prvkové množiny (modré, zelené, žluté a oranžové lízátko).

n = 4 (celkový počet položek na výběr)

k = počet položek, které vybíráme

k = 2 (dvojici lízátek)

Použijeme vzorec pro kombinace s opakováním:

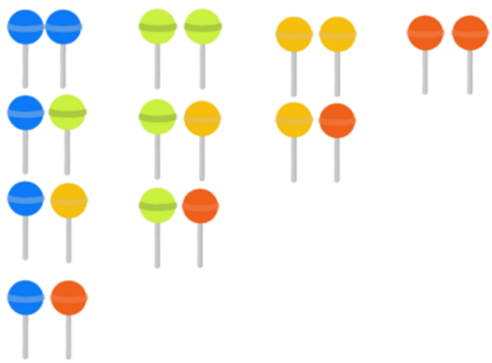
$$K'(k, n) = \binom{n+k-1}{k}$$

$$K'(2, 4) = \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2}$$

Pokračujeme výpočtem kombinačního čísla $\binom{5}{2}$.

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

Znázornění pomocí obrázku:



Obrázek 8 - Znázornění výčtu možností

Bertík má 10 možností, jak si koupit dva kusy lízátek.

c) pomocí logického řešení

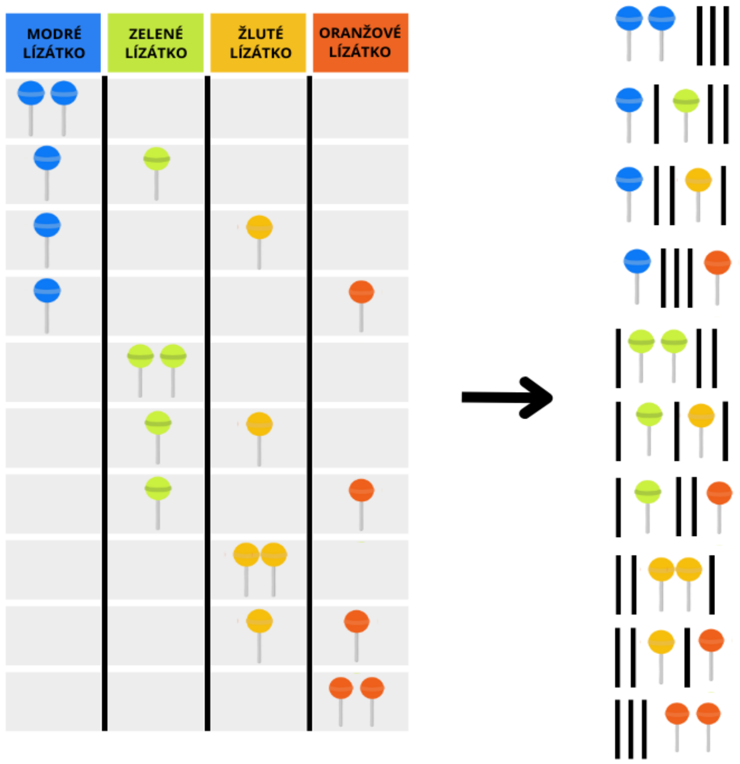
Nejprve najdu všechny dvojice, ve kterých jsou lízátka stejná, takové dvojice jsou 4.

Poté hledám dvojice, ve kterých jsou lízátka různá, těch je:

$$\binom{4}{2} = 6$$

$$6 + 4 = 10$$

d) pomocí strategie založené na šifrování



Obrázek 9 - Strategie založena na šifrování

Jednotlivé možnosti z tabulky si lze zapsat tak, že nejdříve uvedeme modrá lízátka, poté zelená lízátka, potom žlutá lízátka, a nakonec oranžová lízátka; různá lízátka vždy oddělíme příčkami. Čtyři druhy lízátek můžeme oddělit třemi příčkami. V každém řádku tedy máme vybráno pět objektů (dvě lízátka, tři příčky). Pro jednoznačné řešení je potřeba vědět, na kterých místech jsou příčky. Existuje pět míst, kam lze umístit příčku a příčky jsou tři. Tedy počet možností je určen kombinačním číslem:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

6 Kombinatorika v RVP pro ZV

Kombinatorika představuje důležitou součást matematického vzdělávání, která významně přispívá k rozvoji logického a kritického myšlení žáků. Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (RVP ZV) v České republice stanovuje strukturu a obsah vzdělávání na základních školách a kombinuje různé vzdělávací oblasti s cílem poskytnout žákům komplexní a vyvážené vzdělání. V této kapitole se zaměříme na postavení kombinatoriky v rámci RVP ZV, její zařazení do jednotlivých vzdělávacích oblastí a metodiku jejího vyučování na prvním a druhém stupni základní školy.

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (RVP ZV) je rozdělen na devět vzdělávacích oblastí, ty jsou pak dále členěny na jeden nebo více vzdělávacích oborů:

1. Jazyk a jazyková komunikace (Český jazyk a literatura, Cizí jazyk, Další cizí jazyk)
2. Matematika a její aplikace (Matematika a její aplikace)
3. Informatika (Informatika)
4. Člověk a jeho svět (Člověk a jeho svět)
5. Člověk a společnost (Dějepis, Výchova k občanství)
6. Člověk a příroda (Fyzika, Chemie, Přírodopis, Zeměpis)
7. Umění a kultura (Hudební výchova, Výtvarná výchova)
8. Člověk a zdraví (Výchova ke zdraví, Tělesná výchova)
9. Člověk a svět práce (Člověk a svět práce)

(RVP ZV 2023, s.14)

Matematika je zařazena do vzdělávací oblasti "Matematika a její aplikace", kde tvoří čtyři tematické okruhy: čísla a početní operace, závislosti, vztahy a práce s daty, geometrie v rovině a prostoru, a nestandardní aplikační úlohy a problémy.
Právě v tomto posledním okruhu je kombinatorika zařazena a zaměřena na rozvoj kombinatorického a logického myšlení, kritického usuzování a srozumitelné argumentace prostřednictvím řešení matematických problémů.

Kombinatorika je do RVP ZV explicitně zařazena až na druhém stupni základního vzdělávání, kde se žáci seznamují s jejími principy a aplikacemi v rámci tematického okruhu "Nestandardní aplikační úlohy a problémy". Tento přístup umožňuje žákům rozvíjet schopnosti potřebné k řešení komplexnějších matematických úloh a problémů (RVP ZV, 2023).

Blažková (2020) zdůrazňuje, že na prvním stupni základní školy se kombinatorika nevyučuje jako samostatné téma, ale je integrována do řešení různých úloh a problémů. Tímto způsobem se žáci učí kombinatorické myšlení a logické úvahy prostřednictvím praktických aktivit a her, které podporují jejich schopnost analytického myšlení.
Tento přístup ke kombinatorice v základním vzdělávání tedy umožňuje postupné a systematické budování kombinatorických dovedností od raného věku až po složitější úlohy ve vyšších stupních vzdělávání.

7 Digitální technologie ve výuce

Digitální technologie ve výuce jsou dnes nezbytnou součástí moderního vzdělávání. Jejich využití na základních školách je stále běžnější. Jednou z velkých výhod digitálních technologií je zvýšený zájem a motivace žáků, a také lepší vizualizace učební látky.

Téma digitálních technologií ve výuce je diskutováno již několik desítek let. Strategie pro zavádění digitálních technologií jsou formulovány v různých dokumentech státu, například v Strategii digitálního vzdělávání do roku 2020 (MŠMT, 2014) a Strategii digitální gramotnosti 2015-2020 (MPSV, 2015). Tyto strategie jsou také součástí nové Strategie vzdělávací politiky ČR do roku 2030+ (Kopecký et al., 2021).

7.1 Interaktivní tabule

Tradiční model výuky se stále více proměňuje díky moderním technologiím. V poslední době se stále častěji setkáváme s využíváním interaktivních tabulí ve výuce. Tyto digitální nástroje jsou oblíbené napříč všemi vyučovacími předměty – od přírodopisu a zeměpisu až po technickou výchovu, chemii, hudbu a výtvarnou výchovu. Integrace interaktivních tabulí do výuky není omezena na konkrétní stupeň vzdělávání. Tyto tabule jsou využívány jak na základních školách (první i druhý stupeň), tak i na středních a vysokých školách. Jsou to skvělé nástroje, které podporují zapojení studentů, vizualizaci učební látky a různorodé metody výuky (Dostál, 2009).
Interaktivní tabule je jednou z nejvíce rozšířených digitálních technologií ve výuce. Mnoho škol již tuto technologii vlastní a ve výuce využívá.

„Interaktivní tabule je plocha, která se obsluhuje prostřednictvím ruky, nebo interaktivního pera. Je připojena k počítači a datovému projektoru. Obraz je promítán z počítače přes dataprojektor na tabuli. Interaktivní tabule je připevněna jako klasická tabule na stěnu v přední nebo zadní části třídy. Je buď připevněna na pevno, nebo na posuvném jezdci. Na tabuli je promítán obraz z počítače.“ (Půža, 2015, s.5)

7.1.1 Typy interaktivních tabulí

V současnosti lze rozlišit několik základních typů interaktivních tabulí a obrazovek podle způsobu snímání pohybu:

1. **Měření odporu:** Dvě elektricky vodivé plochy pod membránou jsou odděleny tenkou vzduchovou mezerou. Stlačením membrány perem nebo prstem se plochy propojí a detekuje se místo dotyku.

2. **Elektromagnetická technologie:** Soustava vodičů za interaktivní plochou působí na cívku ve špičce pera. Pero může být aktivní (vyžaduje baterii) nebo pasivní (signály vysílá tabule bez potřeby zdroje napětí v peru). Po stlačení špičky pera se určí místo dotyku.

3. **Kapacitní technologie:** Podobná elektromagnetické, soustava vodičů je umístěna za plochou a elektrické pole ovlivňuje uživatelův prst.

4. **Laserová technologie:** Laserové vysílače a snímače jsou obvykle v horních rozích tabule nebo obrazovky. Paprsky promítané před plochu se odrážejí od zrcátek na pasivním peru a jejich pozice se vypočítává triangulací.

5. **Kombinovaná ultrazvuková a infračervená technologie:** Po stisknutí tlačítka na peru se vyšle ultrazvukový a infračervený paprsek. Poloha pera se určí z obou signálů. Tato technologie může využívat jakýkoliv povrch tabule, ale není citlivá na tlak.

6. **Optická technologie:** Kamery umístěné v horních rozích tabule nebo obrazovky zaměřují prst nebo pero při dotyku povrchu a z obrazových dat vypočítávají místo dotyku. V některých systémech může být kamera v peru.

7. **Infračervená technologie:** Při dotyku prst nebo pero přeruší paprsky mezi infračervenými zdroji a senzory kolem tabule nebo obrazovky, což umožňuje vypočítat místo dotyku.

Interaktivní řešení pro školní třídy lze rozdělit do následujících kategorií:
- Klasické interaktivní tabule pro použití s projektorem.
- Projektory s interaktivním senzorem.
- Interaktivní obrazovky.
- Interaktivní senzory pro použití s projektorem, obrazovkou nebo univerzálně.

Projektory mohou být klasické nebo s krátkou či ultrakrátkou projekční vzdáleností a mohou podporovat 3D zobrazení (Wagner, 2011).

7.1.2 Typy projekce

Při výběru interaktivní tabule je důležité zvážit různé typy projekce, které ovlivňují kvalitu a praktičnost použití ve výukovém prostředí. Různé metody umístění a provozu datového projektoru mohou mít zásadní vliv na zážitek uživatelů, ať už jde o učitele nebo studenty. Níže jsou uvedeny hlavní typy projekce, které se liší způsobem umístění projektoru a jejich specifickými výhodami a nevýhodami. Existují tyto typy projekce:

1. Interaktivní tabule s přední projekcí: Datový projektor je umístěn před tabulí. Nevýhodou je jeho náchylnost k mechanickému poškození a vrhání stínu na tabuli.
2. Interaktivní tabule se zadní projekcí: Datový projektor je umístěn za tabulí, čímž se eliminuje problém vrženého stínu. Tento systém je však výrazně dražší, má větší rozměry a montáž přímo na stěnu může být komplikovaná, i když není nemožná.
3. Interaktivní tabule s krátkou projekcí: Datový projektor je umístěn blízko povrchu tabule a promítá obraz pod úhlem 45 stupňů směrem dolů. Tento typ projekce snižuje riziko oslnění nebo poškození zraku přednášejícího či žáka a také minimalizuje vrhání stínu na tabuli (Plch, 2020).

7.1.3 Softwary pro interaktivní tabuli

V rámci výběru vhodného softwaru pro interaktivní tabule nabízí trh široké spektrum možností, které odpovídají na specifické potřeby vzdělávacích institucí. Tento text se zaměří na přehled některých z nejčastěji používaných softwarů pro interaktivní tabule, jejich funkce a přínosy pro moderní výuku ve školách.

Mezi nejčastěji doporučované patří SmartBoard, který podporuje soubory s příponou *.notebook* a ActivBoard, který pracuje s formátem *flipchart* (Inkluzivní škola, n.d.).

Open Sankoré je dalším významným nástrojem, který je kompatibilní s většinou interaktivních tabulí a je volně dostupný (Černý, 2015).

SMART Notebook, určený pro interaktivní tabule SMART Board, poskytuje široké možnosti pro kreslení, zvýrazňování, práci s obrázky a animacemi (Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, 2019).

MozaBook CLASSROOM CZ je moderní software, který také podporuje interaktivní tabule a je volně dostupný pro vzdělávací účely (Pachner, 2020).

Tyto softwary umožňují uživatelům importovat obsah, vytvářet interaktivní prezentace a efektivně využívat potenciál interaktivních tabulí ve výuce. Jejich široká dostupnost a rozmanité funkce přispívají k interaktivní a moderní výuce v různých vzdělávacích prostředích.

8 PRAKTICKÁ ČÁST

8.1 Hra „Město“

8.1.1 Koncept a tvorba

V rámci praktické části této diplomové práce jsem se zaměřila na vytvoření pracovních listů z kombinatoriky určených pro interaktivní tabuli. Mým cílem bylo plně využít možnosti interaktivní tabule a tím zpřístupnit učivo kombinatoriky zábavnou a přístupnou formou. Zvolila jsem proto koncept hry s názvem "Město".

Interaktivní tabule nabízí širokou škálu funkcí, které výrazně obohacují výukový proces. Díky interaktivním prvkům mohou žáci aktivně pracovat s učebním materiálem, což podporuje jejich zapojení a motivaci. Proto jsem se rozhodla vytvořit pracovní listy formou hry, která by nejen učila, ale také bavila.

Koncept hry "Město" byl zvolen s ohledem na známé prostředí, ve kterém se žáci mohou snadno orientovat. Městské prostředí je jim blízké a známé, což usnadňuje vtažení do hry a zvyšuje jejich zájem o řešení úloh. Každá budova ve městě představuje různé kombinatorické úlohy, které jsou přizpůsobeny věkovým a znalostním schopnostem žáků 1. až 3. třídy. Tím je zajištěno, že úlohy jsou náročné, ale zároveň dosažitelné pro danou věkovou skupinu.

8.1.2 Popis hry "Město"

Hra "Město" je zasazena do prostředí, které je žákům blízké a známé. Ve hře se žáci pohybují městem a v jednotlivých budovách či na různých místech ve městě řeší kombinatorické úlohy. Hra je rozdělena do tří částí, odpovídajících úrovni obtížnosti pro žáky 1. až 3. třídy. Každá úroveň obtížnosti je přizpůsobena věkovým a znalostním schopnostem žáků.

8.1.3 Ilustrace hry

Rozhodla jsem se celou hru ilustrovat sama, aby byla pro žáky atraktivnější. Ilustrace jsem vytvořila pomocí aplikace Procreate na tabletu, což mi umožnilo vytvořit originální a poutavé vizuální prvky. Každou budovu ve městě jsem vybavila specifickými ilustracemi, které nejen zaujmou, ale také pomáhají lépe porozumět zadání úloh.

Ilustrace hrají klíčovou roli v zapojení žáků do hry. Barevné a detailní obrázky přitahují pozornost a činí úlohy vizuálně přitažlivými. Ilustrace nejenže zlepšují estetický dojem, ale také slouží jako vizuální nápověda, která může žákům pomoci při řešení úloh.

8.1.4 Technická realizace

Pro samotnou realizaci hry jsem zvolila internetovou aplikaci Genially. Tento internetový nástroj umožňuje vytvářet interaktivní obsah, který je snadno přístupný z jakéhokoli zařízení s internetovým připojením. Výhodou je, že žáci a učitelé nemusí řešit instalaci speciálního softwaru, což usnadňuje implementaci hry do výuky.

Genially je ideálním nástrojem pro tvorbu interaktivního vzdělávacího obsahu díky své flexibilitě a široké škále funkcí. Aplikace umožňuje vkládání animací, interaktivních prvků a multimediálního obsahu, což činí hru dynamickou a poutavou. Díky snadné dostupnosti přes webový prohlížeč je hra přístupná kdykoli a kdekoli, což je velkou výhodou pro učitele i žáky.

Využití Genially také umožňuje snadnou aktualizaci a úpravu obsahu. Pokud je potřeba přidat nové úlohy nebo upravit stávající, lze to provést rychle a jednoduše, aniž by bylo nutné instalovat nebo aktualizovat software na straně uživatele.
Dalším důležitým aspektem technické realizace je zajištění spolehlivosti a bezpečnosti aplikace. Genially poskytuje robustní platformu, která je stabilní a bezpečná pro použití ve školním prostředí. Díky tomu mohou učitelé a žáci bez obav používat hru jako součást svého vzdělávacího procesu.

8.1.5 Průběh hry

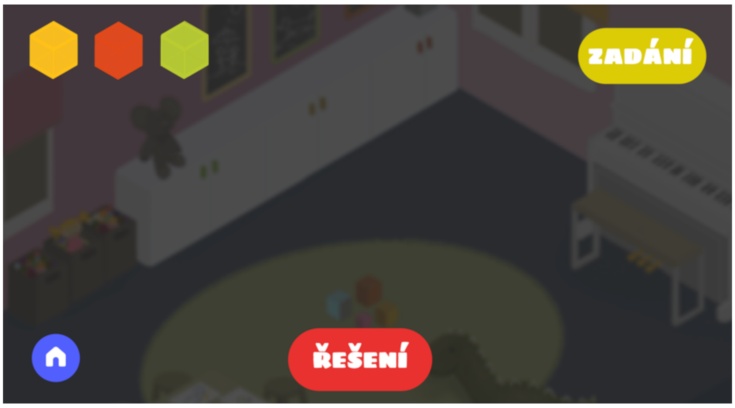
Hra začíná přivítáním hlavní postavy, holčičky Aničky, která provází žáky celou hrou. Po úvodním přivítání si žáci vyberou svůj ročník, čímž se nastaví úroveň obtížnosti úloh, které budou řešit. Následně se jim zobrazí mapa města, kde je označena budova, ve které začnou svou cestu.

Ve městě se nachází celkem osm budov či míst: ŠKOLA, ŠKOLKA, DŮM, CUKRÁRNA, BUTIK, ŘEKA, HŘIŠTĚ a SUPERMARKET. V některých budovách jsou umístěny dvě úlohy. Na úvodní obrazovce hry se na levé straně nachází lišta s osmi okénky. Za každou splněnou úlohu se v okénku objeví obrázek, který charakterizuje daný příklad. Tento vizuální prvek umožňuje žákům sledovat svůj postup hrou a zároveň je motivuje k dalšímu řešení úloh.

Po kliknutí na budovu se žákům otevře uvítací úkol, který není zaměřen na kombinatoriku. Tento úkol jsem zařadila, aby motivoval žáky k řešení dalších úloh, a aby i ti, kteří si nebudou vědět rady s kombinatorickými úlohami, měli radost ze zvládnutého úkolu. Po vyřešení uvítacího úkolu se jim otevře hlavní úloha v dané budově.

Obrázek 10 - Plánek hry „MĚSTO"

Na obrazovce je v pravém horním rohu zadání úlohy, ve spodní části obrazovky je znázorněno řešení. U některých úloh je také v horní části k dispozici nápověda. Na levém okraji obrazovky se nachází ikona domečku, kterou se žáci po vyřešení úlohy vrátí zpět k plánku města.



Obrázek 11 - Ukázka příkladu ve hře

Obrázek 12 - Ukázka ze hry

Odkaz na hru:
https://view.genially.com/666770b5a1d0630014dc19a7/interactive-content-mesto-finalni-verze

QR kód s odkazem na hru:

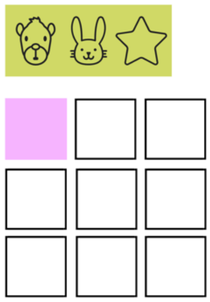
Obrázek 13 - QR kód s odkazem na hru

8.1.6 Příklady ve hře

8.1.6.1 Příklady pro 1. ročník:

ŠKOLA

Anička potřebuje poskládat obrázky do tabulky tak, aby byl stejný obrázek v každém řádku i sloupci pouze jednou. Hvězda musí být v růžovém políčku.



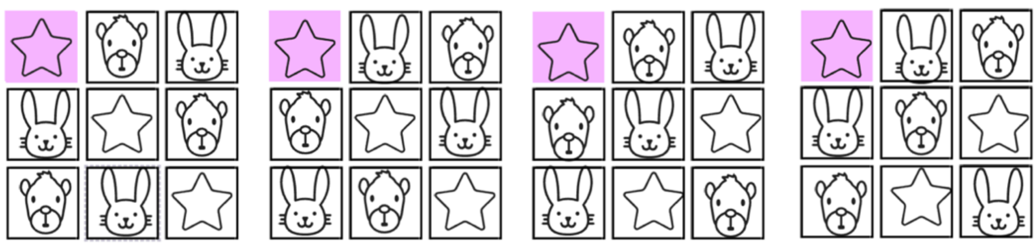
Obrázek 14 - Zadání příkladu 1. tř.- ŠKOLA

Kolika způsoby může obrázky poskládat?

Řešení příkladu:

Vzhledem k tomu, že růžové pole je vlevo nahoře a hvězda musí být v tomto poli, umístíme hvězdu do prvního řádku a prvního sloupce tabulky.

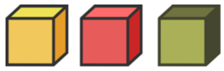
Nyní musíme umístit zbývající 2 obrázky tak, aby se žádný obrázek neopakoval ve stejném řádku ani sloupci.



Obrázek 15 - Řešení příkladu 1. tř.- ŠKOLA

ŠKOLKA

Anička staví věž ze žluté, červené a zelené krychle. Přála by si, aby žlutá krychle byla v základu věže.



Obrázek 16 - Zadání příkladu 1.tř. ŠKOLKA

Kolika různými způsoby může postavit věž, má-li věž obsahovat všechny 3 krychle?

Řešení příkladu:

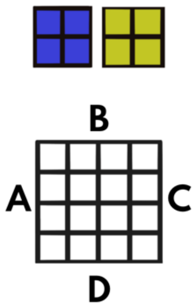
Nejprve umístíme žlutou krychli do základu věže, poté vybíráme jednu ze dvou krychlí (červenou, zelenou). Po postavení druhé krychle máme již jen jednu možnost k postavení třetí krychle na vrchol věže.

Obrázek 17 - Řešení příkladu 1.tř – ŠKOLKA

DŮM

Anička bude mít novou podlahu v koupelně. Má 2 modré a 2 zelené dlaždice.

Přeje si, aby byla modrá dlaždice vlevo dole. (základ podlahy se neotáčí – písmena A, B, C, D



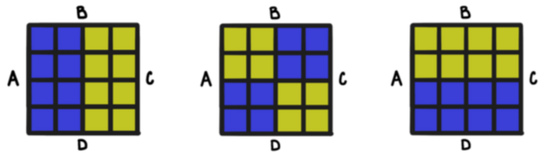
Obrázek 18 - Zadání příkladu- 1.tř. DŮM

Kolika způsoby může být podlaha položena?

Řešení příkladu:

Nejprve umístíme modrou dlaždice do levého dolního rohu. Nyní máme 3 možnosti, jak položit druhou modrou dlaždici. (vlevo nahoře, vpravo nahoře, vpravo dole).

Nakonec rozmístíme zbylé dvě zelené dlaždice.



Obrázek 19 - Řešení příkladu 1.tř. - DŮM

CUKRÁRNA

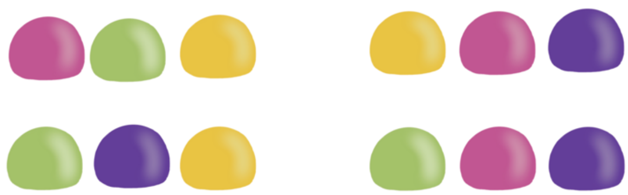
1. Anička si chce koupit 3 kopečky zmrzliny. Na výběr má ze 4 druhů: vanilková, pistáciová, malinová, borůvková. Je jí jedno, jak budou v kornoutu kopečky umístěny. Nechce mít v kornoutu kopečky stejné příchutě.

Obrázek 20 - Zadání příkladu 1. tř.- CUKRÁRNA

Kolik má možností výběru?

Řešení příkladu:

a) Příklad vyřešíme nejsnáze **výčtem možností**.



Obrázek 21 - Řešení příkladu 1. tř. CUKRÁRNA

Anička má 4 možnosti výběru.

b) „chytré" řešení

Na úlohu se můžeme dívat i tak, že když vybíráme tři kopečky ze čtyř, znamená to, že vždy jedna příchuť nebude vybrána. Tzn. nevybereme vanilkovou, nebo pistáciovou, nebo malinovou anebo borůvkovou, dostáváme tedy 4 různé možnosti výběru 3 různých druhů zmrzliny (kopečků).

2. Anička si chce koupit 2 kopečky zmrzliny. Na výběr má ze 4 druhů: vanilková, pistáciová, malinová, borůvková. Je jí jedno, jak budou v kornoutu kopečky umístěny. Nechce mít v kornoutu kopečky stejné příchutě.

Obrázek 22 - Zadání příkladu 1.tř. - CUKRÁRNA

Kolik má možností výběru?

Řešení příkladu: Příklad vyřešíme nejsnáze výčtem možností.

Obrázek 23 - Řešení příkladu 1. tř.- CUKRÁRNA

Anička má 6 možností, jak si koupit dva kopečky zmrzliny.

BUTIK

1. Anička si v butiku vybrala 2 trička a 2 kalhoty. (kombinace = kalhoty + tričko)

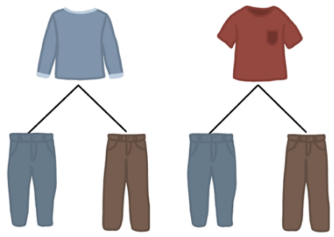
Obrázek 24 - Zadání příkladu.1.tř.- BUTIK

Kolik kombinací může s oblečením vytvořit?

Řešení příkladu

Nejprve vybereme jedno ze dvou triček, k němu poté máme dvě možnosti výběru kalhot. Z toho vyplývá, že k výpočtu můžeme použít pravidlo součinu.

Tedy $2 \cdot 2 = 4$.



Obrázek 25 - Řešení pomocí stromového grafu

Anička má tedy 4 možnosti, jak nakombinovat oblečení.

2. Anička si v butiku vybrala 3 trička a 2 kalhoty. (kombinace = kalhoty + tričko)

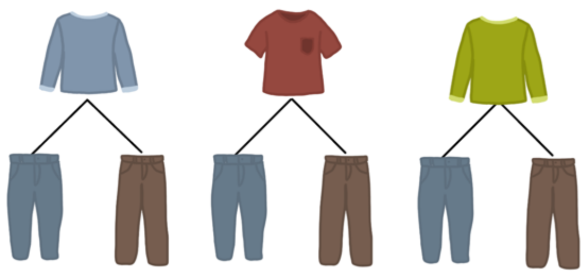
Kolik kombinací může s oblečením vytvořit?

Obrázek 26 - Zadání příkladu 1.tř. -BUTIK

Řešení příkladu

Nejprve vybereme jedno ze tří triček, k němu poté máme dvě možnosti výběru kalhot. Z toho vyplývá, že k výpočtu můžeme použít pravidlo součinu. Tedy

$$3 \cdot 2 = 6.$$



Obrázek 27 - Řešení příkladu 1. tř. - BUTIK

Anička může vytvořit 6 kombinací.

ŘEKA

Anička stojí na břehu pod stromy, potřebuje se dostat na druhý břeh.

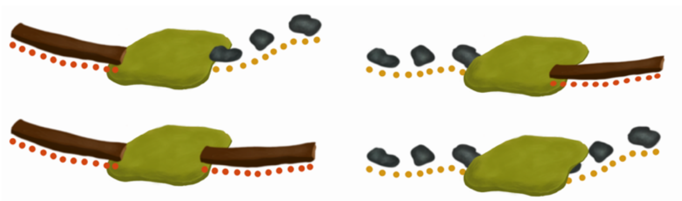
Obrázek 28 - Zadání příkladu 1. tř. - ŘEKA

Kolika způsoby se může na druhý břeh dostat?

Řešení příkladu:

Anička stojí na břehu pod stromy na ostrůvek vedou dvě cesty, z ostrůvku vedou dvě cesty také. Použijeme tedy pravidlo součinu:

$$2 \cdot 2 = 4$$

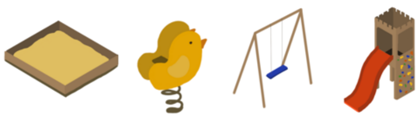


Obrázek 29 - Řešení příkladu 1. tř.- ŘEKA

Anička má tedy 4 možnosti, jak se dostat na druhý břeh.

HŘIŠTĚ

Anička si hraje na hřišti. Chce začít na pískovišti a končit na skluzavce.



Obrázek 30 - Zadání příkladu. 1.tř.- HŘIŠTĚ

Kolika způsoby může projít všechny atrakce, každou pouze jednou?

Řešení příkladu:

Anička chce začít na pískovišti a končit na skluzavce. Zbývají nám tedy dvě atrakce, tyto dvě atrakce můžeme protočit, proto má Anička dvě možnosti, jak může projít atrakce na hřišti.

Obrázek 31 - Řešení příkladu 1. tř.- HŘIŠTĚ

SUPERMARKET

1. Anička si chce koupit 2 lízátka. Na výběr má ze 2 druhů. Nevadí ji stejná lízátka.

Obrázek 32 - Zadání příkladu 1. tř.- SUPERMARKET

Kolik má možností výběru?

Řešení příkladu:

V obchodě mají dva druhy lízátek. Anička si chce koupit dvě lízátka. Může mít dvě stejná – tedy buď dvě žlutá lízátka, nebo dvě oranžová, poté můžeme lízátka nakombinovat, tzn. jedno oranžové a jedno žluté.

Obrázek 33 - Řešení příkladu 1.tř.- SUPERMARKET

Anička má tedy 3 možnosti, jak si vybrat dvě lízátka.

2. Anička si koupila jahodu, pomeranč a jablko.

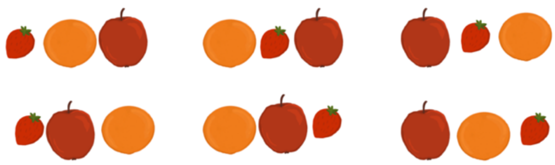
Obrázek 34 - Zadání příkladu 1. tř.- SUPERMARKET

V jakém pořadí může sníst ovoce? Kolik existuje různých možností?

Řešení příkladu:

Anička si vybírá ze tří druhů ovoce a přemýšlí, v jakém pořadí je může sníst. Nejprve si zvolí první ovoce, které vybírá ze tří druhů. Poté si vybere druhé ovoce ze dvou zbývajících druhů. Nakonec jí zbývá poslední ovoce, které už nemá na výběr a musí si ho vzít. Z toho plyne, že můžeme použít pravidlo součinu, tedy:

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$



Obrázek 35 - Řešení příkladu 1. tř.- SUPERMARKET

Anička má tedy 6 možností v jakém pořadí může ovoce sníst.

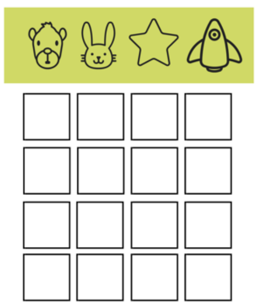
V těchto případech bychom měli učit děti vypisovat si všechny možnosti systematicky, v čem nám může pomoci obrázek či interaktivní zpracování. Dále si můžeme pomoci znázorněním, např. stromovým diagramem.

8.1.6.2 Příklady pro 2. ročník

ŠKOLA

Anička potřebuje poskládat obrázky do tabulky tak, aby byl stejný obrázek v každém řádku i sloupci pouze jednou.

Vymysli 2 různé způsoby, jak může Anička obrázky poskládat.



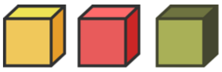
Obrázek 36 - Zadání příkladu 2. třída – ŠKOLA

Řešení příkladu:

V každém řádku i sloupci musí být stejný obrázek právě jednou. Možné řešení ponecháme na čtenáři.

ŠKOLKA

Anička si staví ze žluté, červené a zelené krychle.



Obrázek 37 - Zadání příkladu 2. tř. - ŠKOLKA

Kolika různými způsoby může postavit věž, má-li věž obsahovat všechny 3 krychle?

Řešení příkladu:

Anička má tři různé krychle. Na prvním místě, tedy na spodní části věže, má 3 možnosti, jak umístit první krychli. Na druhém místě, uprostřed, má 2 možnosti, jak umístit druhou krychli (zbývající dvě krychle, které ještě nepoužila). Na vrcholu věže, tedy na třetím místě, má Anička jedinou možnost, jak umístit třetí krychli.

Celkem má Anička podle pravidla součinu:

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

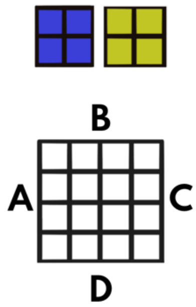
možností, jak postavit věž ze tří krychlí.

Obrázek 38 - Řešení příkladu 2. tř.- ŠKOLKA

Anička může postavit věž ze tří krychlí 6 různými způsoby.

DŮM

Anička bude mít novou podlahu v koupelně. Má 2 modré a 2 zelené dlaždice. (základ podlahy se neotáčí – písmena A, B, C, D)

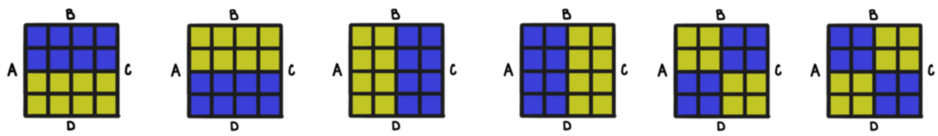


Obrázek 39 - Zadání příkladu 2. tř.- ŠKOLKA

Kolika způsoby může být podlaha položena?

Řešení příkladu:

Nejprve položíme například dvě modré dlaždice, najdeme všechna možná řešení. Poté doplníme zelenými dlaždicemi.



Obrázek 40 - Řešení příkladu 2. tř.- DŮM

Anička má 6 možností, jak může podlahu položit.

CUKRÁRNA

1. Anička si chce koupit 2 kopečky zmrzliny. Na výběr má ze 3 druhů: vanilková, pistáciová, malinová. Je jí jedno, jak budou v kornoutu kopečky umístěny. Nevadí ji, když oba kopečky v kornoutu budou stejné příchutě.

Obrázek 41 - Zadání příkladu 2.tř – CUKRÁRNA

Kolik má možností výběru?

Řešení příkladu:

Anička má na výběr 3 druhy zmrzliny pro každý kopeček, a protože pořadí není důležité, musíme vzít v úvahu, že kombinace vanilkové a pistáciové je stejná jako pistáciové a vanilkové.

První kopeček může být vanilkový (V), pistáciový (P), nebo malinový (M). To jsou tři možnosti. Druhý kopeček může být rovněž vanilkový (V), pistáciový (P), nebo malinový (M). To jsou také 3 možnosti.

Použijeme pravidlo součinu pro spočítání všech možností, nezávisle na tom, jestli se opakují nebo ne:

$$3 \cdot 3 = 9$$

Tímto způsobem však zahrneme i pořadí (např. vanilková a pistáciová je odlišná od pistáciové a vanilkové). Proto musíme vyloučit přebytečné kombinace.

Ty jsou tři.

$$9 - 3 = 6$$

Obrázek 42 - Řešení příkladu 2. tř.- CUKRÁRNA

Anička má tedy 6 možností, jak vybrat 2 kopečky zmrzliny.

2. Anička si chce koupit 2 kopečky zmrzliny. Na výběr má ze 4 druhů: vanilková, borůvková, malinová, pistáciová. Je jí jedno, jak budou v kornoutu kopečky umístěny. Nevadí ji, když oba kopečky v kornoutu budou stejné příchutě.

Obrázek 43 - Zadání příkladu 2.tř. -CUKRÁRNA

Kolik má možností výběru?

Řešení příkladu:

Příklad můžeme vyřešit pomocí pravidla součinu. Musíme ale dbát na duplicitní varianty jako vanilková (V) a borůvková (B), borůvková (B) a vanilková (V), protože nám na pořadí kopečků nezáleží.

Podíváme se na všechny možné kombinace, přičemž nezáleží na pořadí kopečků a mohou být oba stejné.

První kopeček může být jeden ze 4 druhů: V, B, M, P. Druhý kopeček může být rovněž jeden ze 4 druhů: V, B, M, P.

Použijeme pravidlo součinu pro spočítání všech možností:

$$4 \cdot 4 = 16$$

V 16 možnostech jsou zahrnuty 4 možnosti, kdy oba kopečky jsou stejné příchutě a 12 možností, kdy kopečky jsou různé příchutě. U různých příchutí však každou zahrnujeme dvakrát.

Tímto způsobem však zahrneme i pořadí (např. vanilková a borůvková je odlišná od borůvková a vanilková). Abychom správně zohlednili, že pořadí není důležité, musíme odstranit duplicitní kombinace. Tedy

$$16 - 6 = 10$$

Obrázek 44 - Řešení příkladu 2. tř.- CUKRÁRNA

Anička má tedy 10 možností.

Další možné řešení je určit počet všech možností, kdy oba kopečky mají stejnou příchuť, a poté počet všech možností, kdy kopečky budou mít rozdílnou příchuť.

BUTIK

1. Anička si v butiku vybrala 4 trička a 2 kalhoty. (kombinace = kalhoty + tričko)

Obrázek 45 - Zadání příkladu 2. tř.- BUTIK

Kolik kombinací může s oblečením vytvořit?

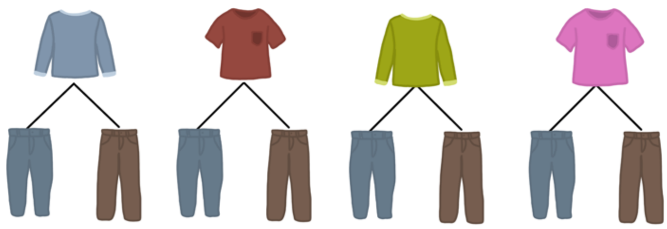
Řešení příkladu:

Použijeme pravidlo součinu.

Anička má 4 možnosti pro výběr trička a 2 možnosti pro výběr kalhot.

Celkový počet kombinací je tedy:

$$4 \cdot 2 = 8$$



Obrázek 46 - Řešení 2. tř.- BUTIK pomocí stromového grafu

Anička může vytvořit 8 různých kombinací trička a kalhot.

2. Anička si v butiku vybrala 3 trička, 2 kalhoty a 1 sukni. (kombinace = kalhoty, sukně + tričko)

Obrázek 47 - Zadání příkladu 2. tř. -BUTIK

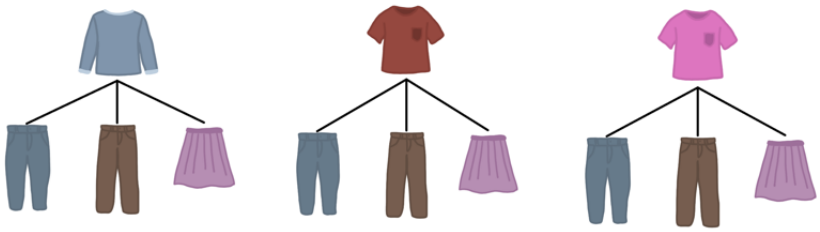
Kolik kombinací může s oblečením vytvořit?

Řešení příkladu:

Anička má 3 trička, tj. 3 možnosti výběru horního dílu. 2 kalhoty a 1 sukni, celkem tedy 3 možnosti pro spodní část.

Celkový počet kombinací je tedy:

$$3 \cdot 3 = 9$$



Obrázek 48 - Řešení 2. tř.- BUTIK pomocí stromového grafu

Anička může vytvořit 9 různých kombinací.

ŘEKA

Anička stojí na břehu pod stromy, potřebuje se dostat na druhý břeh.

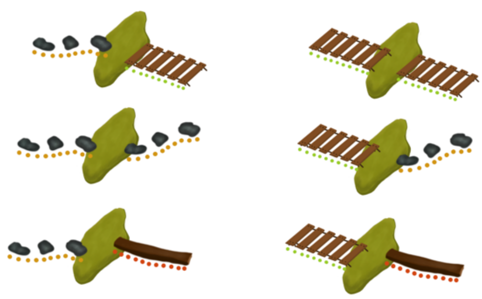
Kolika způsoby se může na druhý břeh dostat?

Obrázek 49 - Zadání příkladu 2. tř.- ŘEKA

Řešení příkladu:

Anička stojí na břehu pod stromy na ostrůvek vedou dvě cesty, z ostrůvku vedou cesty tři. Použijeme tedy pravidlo součinu:

$$2 \cdot 3 = 6$$

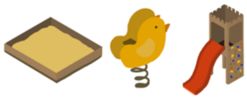


Obrázek 50 - Řešení příkladu 2. tř.- ŘEKA

Anička má tedy 6 možností, jak se dostat na druhý břeh.

HŘIŠTĚ

Anička si hraje na hřišti.



Obrázek 51 - Zadání příkladu 2. tř.- HŘIŠTĚ

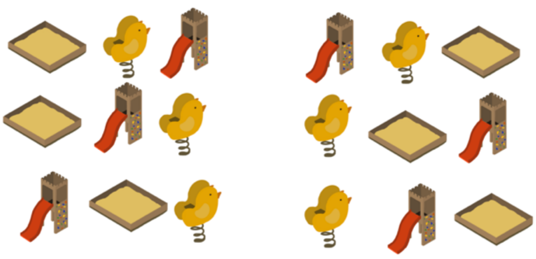
Kolika způsoby může projít všechny atrakce, každou pouze jednou?

Řešení příkladu:

Abychom zjistili, kolika způsoby může Anička projít tři atrakce pomocí pravidla součinu, musíme zohlednit, že pro každou atrakci, kterou si vybere, se snižuje počet zbývajících atrakcí, které může navštívit.

Anička má 3 možnosti, kterou atrakci si vybere jako první. Po výběru první atrakce zbývají 2 možnosti. Po výběru druhé atrakce zbývá 1 možnost. Tedy:

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$



Obrázek 52 - Řešení příkladu 2. tř.- HŘIŠTĚ

Anička může projít atrakce 6 způsoby.

SUPERMARKET

1. Anička si chce koupit 2 lízátka. Na výběr má ze 3 druhů. Nechce mít lízátka stejná.

Obrázek 53 - Zadání příkladu 2. tř.- SUPERMARKET

Kolik má možností výběru?

Řešení příkladu:

Máme 3 možnosti pro výběr prvního lízátka. Po vybrání prvního lízátka zbývají 2 možnosti pro druhé lízátko (zbylé dva druhy).

Tedy celkový počet kombinací je:

$$3 \cdot 2 = 6$$

Na pořadí lízátek nezáleží, proto musíme výsledek 6 vydělit dvěma, protože každou možnost, zde započítáváme dvakrát.

$$6 : 2 = 3$$

Obrázek 54 - Řešení příkladu 2. tř.- SUPERMARKET

To znamená, že existují 3 různé způsoby, jak Anička může vybrat 2 různá lízátka ze 3 druhů, aniž by záleželo na pořadí.

2. Anička si koupila jahodu, pomeranč, jablko a banán. Chtěla by nejprve sníst jablko.

Obrázek 55 - Zadání příkladu 2. tř. -SUPERMARKET

V jakém pořadí může sníst ovoce? Kolik existuje různých možností?

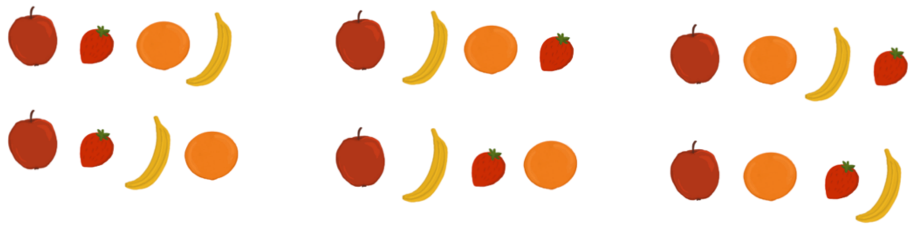
Řešení příkladu:

Anička musí nejprve sníst jablko. To má právě 1 možnost. Po snězení jablka jí zbývají 3 další ovoce (jahoda, pomeranč, banán), které může sníst v libovolném pořadí.

Tedy pro výběr druhého ovoce má 3 možnosti, pro výběr třetího ovoce 2 možnosti a pro výběr posledního ovoce jednu možnost.

Celkový počet možností je tedy součinem počtu možností pro jablko a počtu možností pro zbývající ovoce:

$$1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$



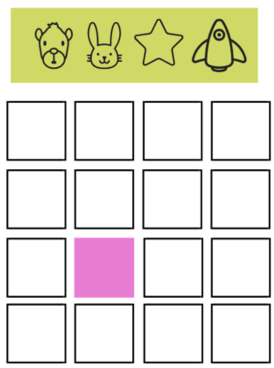
Obrázek 56 - Řešení příkladu 2. tř.- SUPERMARKET

Existuje tedy 6 možností, jak může Anička ovoce sníst.

8.1.6.3 Příklady pro 3. ročník

ŠKOLA

Anička potřebuje poskládat obrázky do tabulky tak, aby byl stejný obrázek v každém řádku i sloupci pouze jednou. Hvězda musí být v růžovém políčku. Vymysli 4 způsoby, jak může Anička obrázky poskládat?



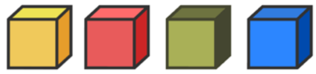
Obrázek 57 - Zadání příkladu 3. tř. - ŠKOLA

Řešení příkladu:

Nejprve umístíme hvězdu do růžového pole tedy třetí řádek druhého sloupce. Nyní musíme umístit zbývající 3 obrázky tak, aby se žádný obrázek neopakoval ve stejném řádku ani sloupci. Možná řešení ponecháme na čtenáři.

ŠKOLKA

Anička si staví ze žluté, červené, zelené a modré krychle. Přála by si, aby žlutá krychle byla v základu věže.



Obrázek 58 - Zadání příkladu 3. tř.- ŠKOLKA

Kolika různými způsoby může postavit věž, má-li věž obsahovat všechny 4 krychle?

Řešení příkladu:

Žlutá krychle bude první, kterou Anička postaví. Po umístění žluté krychle do základu zbývají 3 další krychle (červená, zelená, modrá), které může použít na stavbu věže.

Pro výběr druhé krychle má Anička 3 možnosti, pro výběr třetí krychle má možnosti 2. Pro poslední krychli má Anička 1 možnost. Výpočet pomocí pravidla součinu bude vypadat následovně:

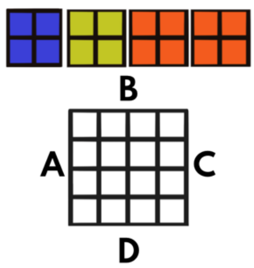
$$1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Obrázek 59 - Řešení příkladu 3. tř. - ŠKOLKA

To znamená že existuje 6 různých možností, jak postavit věž.

DŮM

Anička bude mít novou podlahu v koupelně. Má 1 dlaždici modrou, jednu zelenou a dvě oranžové. Přeje si, aby zelená dlaždice byla vpravo nahoře. (základ podlahy se neotáčí písmena A, B, C, D)

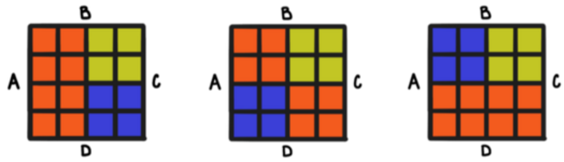


Obrázek 60 - Zadání příkladu 3.tř.- DŮM

Kolika způsoby může být podlaha položena?

Řešení příkladu:

Nejprve umístíme zelenou dlaždici vpravo nahoře. Poté máme 3 možnosti kam položit modrou dlaždici, zbytek podlahy doplníme oranžovými dlaždicemi.



Obrázek 61 - Řešení příkladu 3. tř.- DŮM

Existují tedy 3 možnosti, jak podlahu položit.

CUKRÁRNA

1. Anička si chce koupit 3 kopečky zmrzliny. Na výběr má ze 4 druhů: vanilková, borůvková, malinová, pistáciová. Přála by si nejprve ochutnat malinovou. (Bude lízat vždy svrchu.) Na ostatním pořadí kopečků ji záleží. Nechce mít v kornoutu kopečky stejné příchutě.

Obrázek 62 - Zadání příkladu 3. tř. - CUKRÁRNA

Kolik má možností výběru?

Řešení příkladu:

1. Anička si jako první vybere malinovou zmrzlinu, která bude na vrcholu kornoutu. Tím pádem máme již jednu fixní volbu. Po vybrání malinové zmrzliny jí zbývá vybrat 2 další kopečky z třech zbývajících příchutí (vanilková, borůvková, pistáciová).

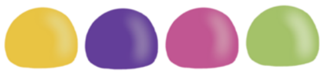
Tedy pro druhý kopeček má 3 možnosti a pro třetí kopeček 2 možnosti. Pomocí pravidla součinu bude výpočet vypadat následovně:

$$1 \cdot 3 \cdot 2 = 6$$

Obrázek 63 - Řešení příkladu 3. tř.- CUKRÁRNA

Anička má 6 možností, jak si koupit 3 kopečky zmrzliny.

2. Anička si chce koupit 4 kopečky zmrzliny. Na výběr má ze 4 druhů: vanilková, borůvková, malinová, pistáciová. Přála by si nejprve ochutnat pistáciovou. (Bude lízat vždy svrchu.) Na ostatním pořadí kopečků ji také záleží. Všechny 4 kopečky chce mít s jinou příchutí či všechny mají mít stejnou příchuť. Kolik má možností výběru?



Obrázek 64 - Zadání příkladu 3. tř.- CUKRÁRNA

Řešení příkladu:

Anička si jako první vybere pistáciovou zmrzlinu, která bude na vrcholu kornoutu. Tím pádem máme již jednu fixní volbu. Po vybrání pistáciové zmrzliny jí zbývá vybrat 3 další kopečky z třech zbývajících příchutí (vanilková, borůvková, malinová).

Tedy pro druhý kopeček má 3 možnosti, pro třetí kopeček 2 možnosti a pro čtvrtý kopeček jednu možnost. Pomocí pravidla součinu bude výpočet vypadat následovně:

$$1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Poté musíme připočítat ještě možnost, kdy budou v kornoutu 4 pistáciové kopečky.

Tedy $6 + 1 = 7$

Obrázek 65 - Řešení příkladu 3. tř.- CUKRÁRNA

Anička má tedy 7 možností.

BUTIK

1. Anička si v butiku vybrala 2 trička, 2 kalhoty a 2 ponožky. (kombinace = kalhoty + tričko + ponožky) Kolik kombinací může s oblečením vytvořit?

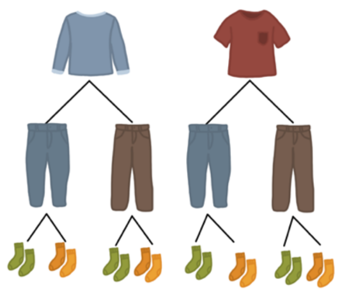
Obrázek 66 - Zadání příkladu 3. tř.- BUTIK

Řešení příkladu:

Anička má k dispozici 2 druhy kalhot. Také má na výběr ze 2 druhů triček. A nakonec má 2 různé páry ponožek.

Pro každou kombinaci kalhot a trička existují 2 možnosti výběru ponožek. Celkový počet kombinací je tedy součin možností pro kalhoty, trička a ponožky:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 6$$



Obrázek 67 - Řešení příkladu 3. tř. - BUTIK pomocí stromového grafu

Anička má tedy 6 možností.

2. Anička si v butiku vybrala 2 trička, 2 kalhoty a 2 ponožky. Zelené ponožky chce kombinovat jen s hnědými kalhotami. (kombinace = kalhoty + tričko + ponožky) Kolik kombinací může s oblečením vytvořit?

Obrázek 68 - Zadání příkladu 3. tř.- BUTIK

Řešení příkladu:

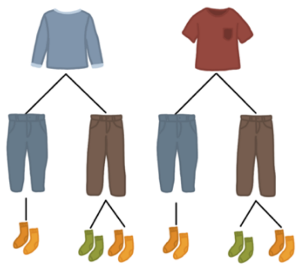
Nejprve vyřešme příklad bez omezení, tedy všechny různé kombinace. Anička má 2 možnosti pro tričko, 2 možnosti pro kalhoty, 2 možnosti pro ponožky. Podle pravidla součinu to je:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

Nyní vyřešíme omezení. Odečteme kombinace, které nejsou možné kvůli omezení (zelené ponožky s kalhotami, které nejsou hnědé). Najdeme kombinace, které neplatí: modré triko + modré kalhoty + zelené ponožky. Červené triko + modré kalhoty + zelené ponožky. Tedy máme 2 neplatné kombinace.

Celkový počet kombinací zjistíme, že od počtu kombinací bez omezení odečteme počet neplatných kombinací:

$$8 - 2 = 6 \text{ kombinací}$$



Obrázek 69 - Řešení příkladu 3. tř.- BUTIK pomocí stromového grafu

Anička může vytvořit 6 kombinací.

Úlohu lze řešit i rozdělením všech možných řešení na ty, které obsahují zelené ponožky, a na ty, které obsahuje oranžové ponožky.

ŘEKA

Anička stojí na břehu pod stromy, potřebuje se dostat na druhý břeh.

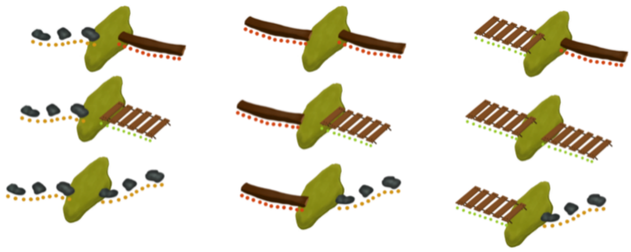
Kolika způsoby se může na druhý břeh dostat?

Obrázek 70 - Zadání příkladu 3. tř. - ŘEKA

Řešení příkladu:

Anička stojí na břehu pod stromy na ostrůvek vedou dvě cesty, z ostrůvku vedou cesty tři. Použijeme tedy pravidlo součinu:

$$3 \cdot 3 = 9$$

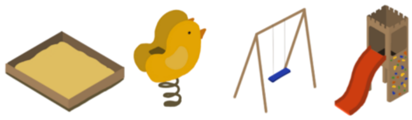


Obrázek 71 - Řešení příkladu 3.tř.- ŘEKA

HŘIŠTĚ

Anička si hraje na hřišti. Chce začít na pískovišti.

Kolika způsoby může projít všechny atrakce, každou pouze jednou?



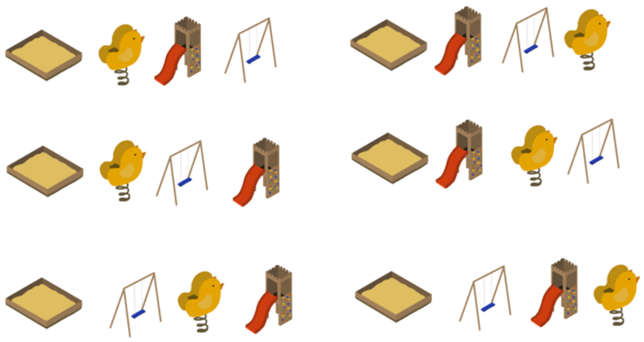
Obrázek 72 - Zadání příkladu 3. tř.- HŘIŠTĚ

Řešení příkladu:

Abychom zjistili, kolika způsoby může Anička projít čtyři atrakce pomocí pravidla součinu, musíme zohlednit, že pro každou atrakci, kterou si vybere, se snižuje počet zbývajících atrakcí, které může navštívit.

Nejprve chce začít na pískovišti, tedy máme jen jednu možnost výběru, pro druhou atrakci máme 3 možnosti výběru, pro třetí atrakci 2 možnosti výběru. Má jednu možnost, jak vybrat poslední atrakci. Výpočet bude vypadat takto:

$$1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$



Obrázek 73 - Řešení příkladu 3. tř. - HŘIŠTĚ

Anička má tedy 6 možností, jak atrakce projít.

SUPERMARKET

1. Anička si chce koupit 2 lízátka. Na výběr má ze 3 druhů. Nevadí ji dvě stejná lízátka.

Obrázek 74 - Zadání příkladu 3. tř.- SUPERMARKET

Kolik má možností výběru?

Řešení příkladu:

Pro výpočet použijeme pravidlo součtu. Máme 3 druhy lízátek, označme je A, B a C. Nejprve zjistíme všechny kombinace, kde budou obě lízátka stejná. (A, A), (B, B), (C, C). Tedy 3 možnosti. Nyní najdeme všechny kombinace, kde jsou dvě různá lízátka. (A, B), (A, C), (B, C). To jsou také 3 možnosti.

Sečteme počet možností, jak si může Anička vybrat dvě lízátka:

3 (stejná lízátka) + 3 (různá lízátka) = 6

Obrázek 75 - Řešení příkladu 3. tř.- SUPERMARKET

Anička má 6 různých možností výběru dvou lízátek.

2. Anička si koupila jahodu, pomeranč, jablko a meloun. Chtěla by nejprve sníst jahodu. V jakém pořadí může sníst ovoce? Kolik existuje různých možností?

Obrázek 76 - Zadání příkladu 3. tř.- SUPERMARKET

Řešení příkladu:

Anička má čtyři druhy ovoce: jahodu, pomeranč, jablko a meloun. Chce nejprve sníst jahodu. Příklad vyřešíme pomocí pravidla součinu:

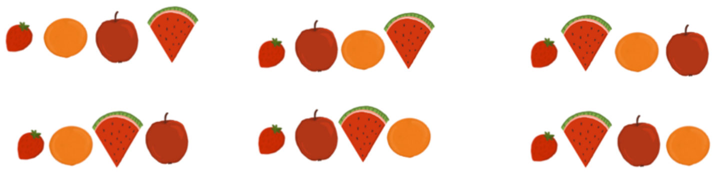
První ovoce je fixováno jako jahoda. Má právě 1 možnost. Po snězení jahody jí zbývají 3 další ovoce (pomeranč, jablko, meloun). Pro výběr druhého ovoce má 3 možnosti.

Po snězení druhého ovoce jí zbývají 2 další ovoce. Pro výběr třetího ovoce má 2 možnosti.

Po snězení třetího ovoce jí zbývá 1 poslední ovoce. Pro výběr čtvrtého ovoce má 1 možnost.

Celkový počet možností je tedy součinem počtu možností pro jednotlivé kroky:

$$1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$



Obrázek 77 - Řešení příkladu 3. tř. - SUPERMARKET

Anička může sníst ovoce v 6 různých pořadích.

9 Výzkum

9.1.1 Charakteristika výzkumu

V rámci praktické části diplomové práce byl proveden výzkum zaměřený na evaluaci pracovních listů v kombinatorice pro žáky prvního stupně ZŠ. Výzkum probíhal ve dvou druhých třídách téže základní školy, přičemž každá třída měla odlišný počet žáků. Třída 2. A obsahovala 26 žáků, zatímco ve třídě 2. B bylo 24 žáků. Celkově bylo tedy 50 žáků z toho 25 dívek a 25 chlapců.

Pracovní listy, které byly vyhodnocovány, zahrnovaly každý sedm úloh zaměřených na kombinatoriku. Úlohy byly navrženy tak, aby odpovídaly věkové kategorii žáků druhé třídy a aby podporovaly jejich schopnost logického myšlení a matematického uvažování v rámci tématu kombinatoriky.

V rámci výzkumu byla sledována úspěšnost žáků při řešení jednotlivých úloh, aby bylo možné zhodnotit efektivitu pracovních listů jako vzdělávacího nástroje pro rozvoj matematických dovedností a porozumění kombinatorice u žáků prvního stupně základní školy.

9.1.2 Metodologie

Průběh výzkumu byl rozdělen do dvou vyučovacích hodin, což představuje celkovou dobu 90 minut. Každá třída byla testována zvlášť, aby bylo možné sledovat reakce a výsledky žáků v různých prostředích.

Na začátku každé vyučovací hodiny jsem žáky seznámila s tématem kombinatoriky pomocí hry na interaktivní tabuli. Společně jsme prošli několik příkladů, abych žákům ukázala princip tvorby kombinací. Tyto úlohy byly odlišné od těch, které měli následně v pracovních listech. Během této části jsem nezobrazovala přímo správná řešení, ale spíše jsme diskutovali o tom, jak se kombinace tvoří a jaké jsou možnosti jejich vytváření.

Po seznámení s tématem následovala část, kdy žáci zkoušeli sami řešit úlohy na interaktivní tabuli. Tato část výzkumu trvala přibližně 20 minut a sloužila k tomu, aby si žáci vyzkoušeli aplikovat teoretické znalosti v praxi.

Následně jsem žákům rozdala pracovní listy obsahující sedm úloh zaměřených na kombinatoriku. Před začátkem jejich řešení jsem žákům sdělila, že způsob, jakým budou úlohy řešit, je na nich. Mohli si zaznamenávat možné kombinace kresbou, psaním nebo používat jiné strategie, které považovali za vhodné. Další instrukce jsem již nedávala, ale odpovídala jsem na jejich další dotazy, těch se ale vyskytlo jen minimum. Snažila jsem se minimalizovat svůj vliv na jejich řešení, aby jejich odpovědi byly co nejautentičtější.

Během průběhu řešení pracovních listů jsem mezi žáky chodila a kontrolovala, zda aktivně pracují a zda rozumí jednotlivým příkladům. Mým cílem bylo sledovat jejich postup a zjistit, jak se jim daří řešit úlohy, aniž bych do jejich řešení zasahovala. Žáci měli k dispozici dostatek času na to, aby mohli v klidu pracovat na všech úlohách.
Po vypracování pracovních listů jsem žáky požádala, aby číslem zaznamenali počet možností, které jim vyšly při řešení jednotlivých úloh na pracovních listech.

Na konci výzkumného bloku po vypracování pracovních listů jsme si ukázali všechna řešení a rozebrali každou úlohu právě přes vytvořenou hru na interaktivní tabuli. Žáci si tak mohli tvořit všechny kombinace zábavně a interaktivně.

Cílem výzkumu bylo zjistit, jakým způsobem přistupují k řešení úloh a jaké strategie používají. Výzkum byl zaměřen na sledování autentických reakcí a postupů žáků při řešení kombinatorických úloh, aniž by byly jejich odpovědi výrazně ovlivněny učitelem.

Při řešení úloh mě nejvíce zajímalo, jaké strategie žáci používají: zda si řešení znázorňují kresbou, psaním nebo jinými metodami. Také jsem chtěla zjistit, které úlohy budou pro žáky nejjednodušší a které nejtěžší. Očekávala jsem, že jednodušší úlohy budou ty, které budou mít menší počet kombinací, zatímco složitější budou ty s více kombinacemi. Dále mě zajímalo, jaké problémy se objeví při řešení. Předpokládala jsem, že největší problémy budou souviset s pochopením zadání a dodržení všech podmínek.

Před šetřením jsem si stanovila následující hypotézy:

1. Očekávala jsem, že jednodušší budou úlohy, které budou mít menší počet kombinací (například „SUPERMARKET“), zatímco složitější budou ty s více kombinacemi (například „BUTIK“).

2. Největší problémy budou souviset s pochopením zadání a dodržením všech podmínek.

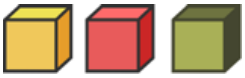
3. Předpokládala jsem, že většina žáků bude vyjadřovat řešení kresbou nebo grafickým způsobem, což je intuitivní způsob pro porozumění kombinacím.

4. Očekávala jsem, že dívky budou úspěšnější v úlohách jim bližších, např. „BUTIK“, naopak chlapci budou úspěšnější např. v úloze „ŠKOLKA“.

Obrázek 78 - Žáci 2. třídy vyplňující pracovní listy

V pracovních listech, bylo následujících 7 příkladu z kombinatoriky:

1. ŠKOLKA
Anička si staví ze žluté, červené a zelené krychle.



Obrázek 79 - Zadání příkladu – ŠKOLKA

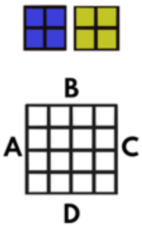
Kolika různými způsoby může postavit věž, má-li věž obsahovat všechny 3 krychle?

ŘEŠENÍ: Anička může postavit věž ze tří krychlí 6 různými způsoby.

Obrázek 80 - Řešení příkladu – ŠKOLKA

2. DŮM

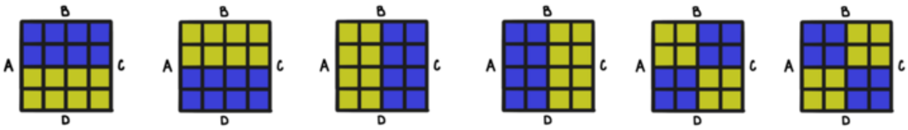
Anička bude mít novou podlahu v koupelně. Má 2 modré a 2 zelené dlaždice. (základ podlahy se neotáčí – písmena A, B, C, D)



Obrázek 81 - Zadání příkladu – DŮM

Kolika způsoby může být podlaha položena?

ŘEŠENÍ: Anička má 6 možností, jak může podlahu položit.



Obrázek 82 - Řešení příkladu – DŮM

3. CUKRÁRNA

Anička si chce koupit 2 kopečky zmrzliny. Na výběr má ze 3 druhů: vanilková, pistáciová, malinová. Je jí jedno, jak budou v kornoutu kopečky umístěny. Nevadí ji, když oba kopečky v kornoutu budou stejné příchutě.

Obrázek 83 - Zadání – CUKRÁRNA

Kolik má možností výběru?

ŘEŠENÍ:

Anička má tedy 6 možností, jak vybrat 2 kopečky zmrzliny.

Obrázek 84 - Řešení příkladu – CUKRÁRNA

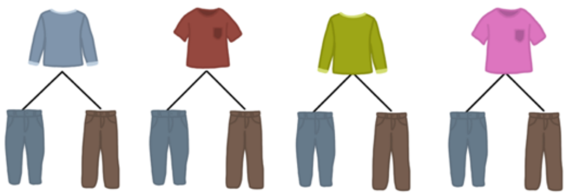
4. BUTIK

Anička si v butiku vybrala 4 trička a 2 kalhoty. (kombinace = kalhoty + tričko)

Obrázek 85 - Zadání příkladu – BUTIK

Kolik kombinací může s oblečením vytvořit?

ŘEŠENÍ: Anička může vytvořit 8 různých kombinací trička a kalhot.

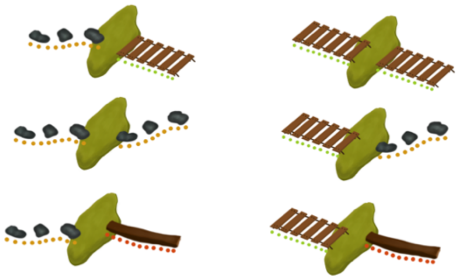


Obrázek 86 - Řešení příkladu – BUTIK

5. **ŘEKA** Anička stojí na břehu pod stromy, potřebuje se dostat na druhý břeh. Kolika způsoby se může na druhý břeh dostat?

Obrázek 87 - Zadání příkladu – ŘEKA

ŘEŠENÍ: Anička má tedy 6 možností, jak se dostat na druhý břeh.

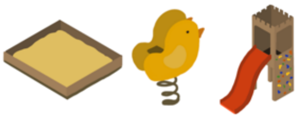


Obrázek 88 - Řešení příkladu – ŘEKA

6. HŘIŠTĚ

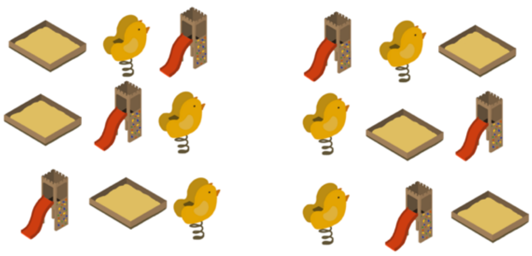
Anička si hraje na hřišti.

Kolika způsoby může projít všechny atrakce, každou pouze jednou?



Obrázek 89 - Zadání příkladu – HŘIŠTĚ

ŘEŠENÍ: Anička může projít atrakce 6 způsoby.



Obrázek 90 - Řešení příkladu – HŘIŠTĚ

7. SUPERMARKET

Anička si chce koupit 2 lízátka. Na výběr má ze 3 druhů. Nechce mít lízátka stejná.

Kolik má možností výběru?

Obrázek 91 - Zadání příkladu 2. tř. SUPERMARKET

ŘEŠENÍ: Existuje 6 různých způsobů, jak Anička může vybrat 2 různá lízátka ze 3 druhů, aniž by záleželo na pořadí.

Obrázek 92 - Řešení příkladu – SUPERMARKET

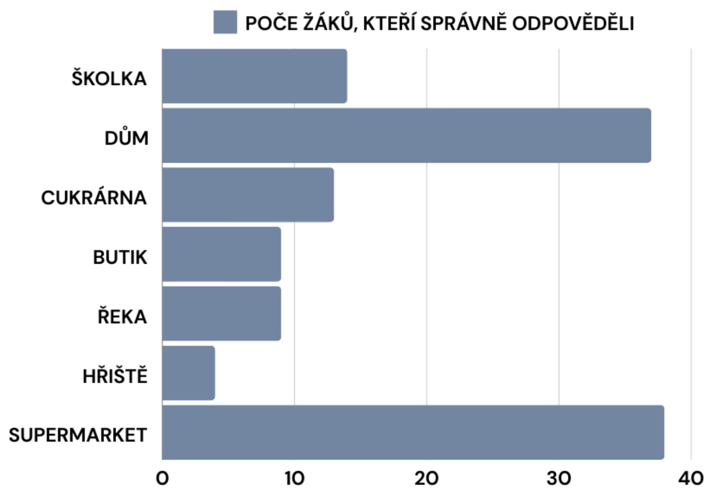
9.1.3 Analýza výsledků

Než se pustíme do analýzy výsledků příkladů v pracovních listech, pojďme si povědět pár slov o tom, jaké byly reakce žáků při tomto šetření.

Před začátkem výuky jsem na interaktivní tabuli připravila hru „Město". Aktivace této hry okamžitě přilákala pozornost žáků. Někteří přišli přímo ke mně a ptali se, zda tuto hru budeme hrát. Poté, co jsem potvrdila jejich očekávání, jsem zaznamenala jejich nadšení. Při otázce, kdo by se chtěl hry zúčastnit, se všechny ruce zvedly. Interaktivní prostředí přilákalo žáky a rychle je vtáhlo do aktivního řešení úkolů. Zvláštní radost mi udělalo, když několik dětí při ukončení hodiny přišlo za mnou a ptalo se, kde by mohly hru najít, protože by si ji chtěly zahrát i doma. Tento aspekt považuji za klíčový při hodnocení mého výzkumu.

9.1.4 Kvantitativní analýza

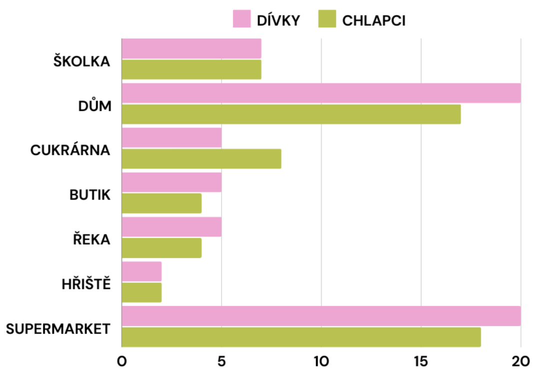
V následující kapitole se zaměříme na popis výsledků jednotlivých úloh z výzkumu pracovních listů z kombinatoriky, který byl proveden mezi žáky 2. třídy.



Graf 1 - Celkový počet správných odpovědí v jednotlivých příkladech (absolutní četnost)

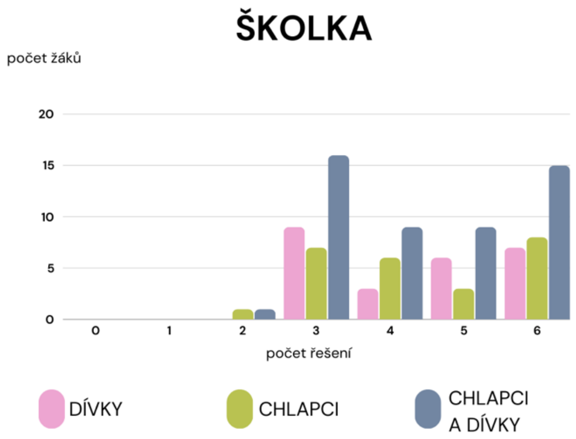
"Pojďme se podívat na tento graf, ve kterém je znázorněn celkový počet správných odpovědí všech žáků obou tříd, tedy padesáti, u jednotlivých úloh. V rámci výzkumu kombinatoriky se projevila rozmanitost ve výsledcích žáků při řešení sedmi různých úloh. V úloze „ŠKOLKA“ správně odpovědělo 14 žáků z 50, což představuje úspěšnost 28 %. Druhá úloha „DŮM“ byla jednou z nejúspěšnějších s 37 správnými odpověďmi, což odpovídá úspěšnosti 74 %. „CUKRÁRNA“ dosáhla úspěšnosti 26 %, což je 13 správných odpovědí. „BUTIK“ a „ŘEKA“ dosáhly úspěšnosti 18 %, což odpovídá 9 správným odpovědím. Nejméně úspěšnou úlohou bylo „HŘIŠTĚ“ s 8 % úspěšnosti, což představuje 4 správné odpovědi. Poslední úloha „SUPERMARKET“ dosáhla 38 správných odpovědí, což představuje úspěšnost 76 %, což naznačuje, že žáci lépe porozuměli tomuto typu kombinatorické úlohy."

Následující graf zobrazuje porovnání úspěšnosti mezi dívkami a chlapci v jednotlivých úlohách. V úloze ŠKOLKA dosáhli jak dívky, tak chlapci stejné úspěšnosti se sedmi správnými odpověďmi každý. V úloze „DŮM“ dívky předčily chlapce s 20 správnými odpověďmi oproti 17 správným odpovědím chlapců. Naopak v úloze „CUKRÁRNA“ chlapci dosáhli lepšího výkonu s 8 správnými odpověďmi, zatímco dívky odpověděly správně 5krát. V úlohách „BUTIK“ a „ŘEKA“ byly výsledky podobné: dívky odpověděly správně 5krát, chlapci 4krát. V úloze „HŘIŠTĚ“ dosáhli jak dívky, tak chlapci stejné úspěšnosti se 2 správnými odpověďmi každý. V úloze „SUPERMARKET“ dívky opět předčily chlapce s 20 správnými odpověďmi ve srovnání s 18 správnými odpověďmi chlapců. Celkově lze pozorovat, že úspěšnost mezi dívkami a chlapci se v jednotlivých úlohách liší; v některých případech jsou dívky úspěšnější (např. „DŮM“, „SUPERMARKET“), zatímco v jiných jsou úspěšnější chlapci (např. „CUKRÁRNA“). Celkové rozdíly jsou však pouze velmi malé.



Graf 2 - Rozdíl mezi dívkami a chlapci v odpovědích v jednotlivých úlohách

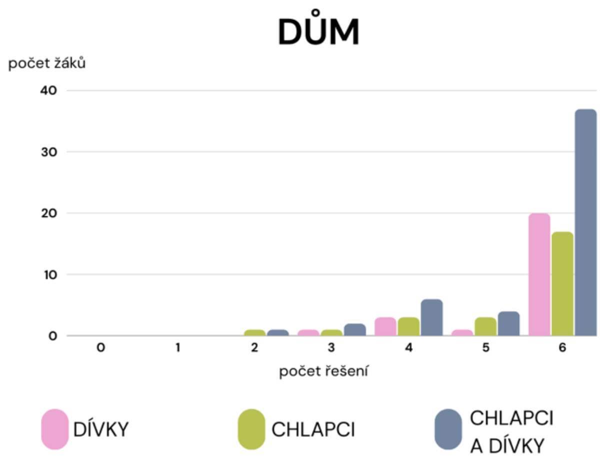
Úloha „ŠKOLKA“ - Správné řešení, tedy 6 možností, našlo 15 žáků. Těsně pod správným řešením, tedy 5 možností, našlo 9 žáků. Čtyři možná řešení našlo také 9 žáků. Nejvyšší počet žáků, a to 16, dosáhlo 3 kombinací.



Graf 3 - Počet řešení v úloze – ŠKOLKA

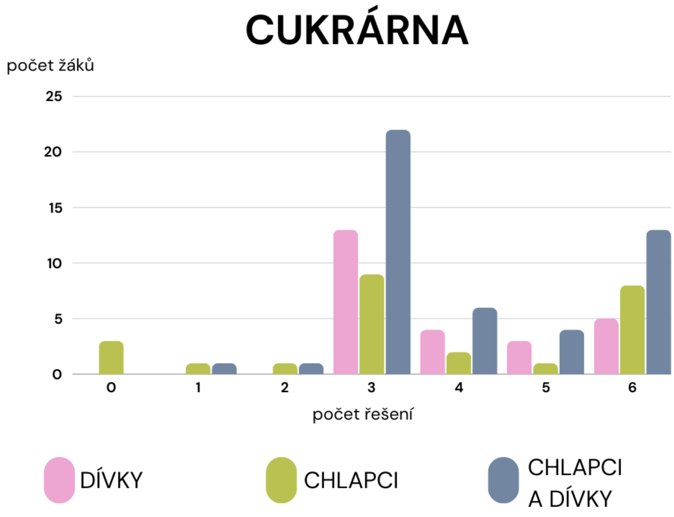
Pojďme se nyní podívat na rozdíl mezi řešením chlapců a dívek. Správný počet možností tedy 6 zaznamenalo 7 dívek a 8 chlapců tedy, počet úspěšných řešitelů je velmi vyrovnaný. Pět možností vymyslelo 6 dívek a 3 chlapci naopak u čtyřech možností 3 dívky a 6 chlapců.

Úloha „DŮM“ - Správné řešení, tedy 6 možností, našlo 37 žáků. Pět možností, znázornili 4 žáci. Čtyři možná řešení našlo 6 žáků. Tedy tento příklad byl jeden z nejúspěšnějších. Při porovnání řešení pohlaví vyřešilo příklad úspěšně 20 dívek a 17 chlapců.



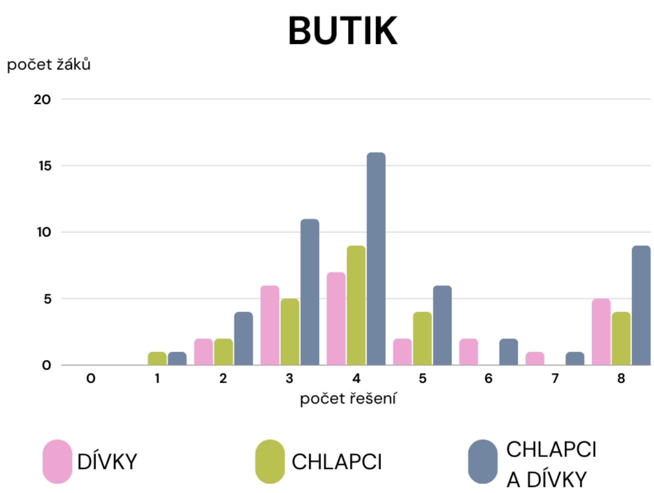
Graf 4 - Počet řešení v úloze – ŠKOLKA

Úloha „CUKRÁRNA“ - Správné řešení je 6 kombinací. Tuto možnost vymyslelo 5 dívek a 8 chlapců, tedy celkem 13 správných odpovědí. Těsně pod správným řešením, tedy 5 možností, našli 4 žáci. Čtyři možná řešení našlo 6 žáků. Nejvyšší počet žáků, a to 22, dosáhlo 3 kombinací. Tento jev, kdy nejvíce žáků našlo polovinu možností jsme již viděli u úlohy „ŠKOLKA“.



Graf 5 - Počet řešení v úloze – CUKRÁRNA

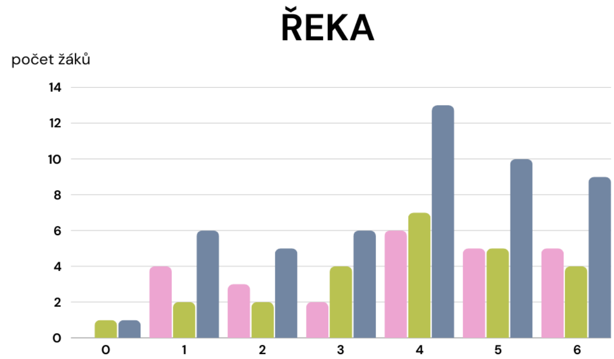
Úloha „BUTIK“ - Správného řešení, tedy 8 kombinací, dosáhlo devět žáků 4 chlapci a 5 dívek. Těsně pod správným řešením, tedy sedm řešení, našel jeden žák jedna dívka, šest řešení našli dva žáci, a to dvě dívky. Opět vidíme stejný jev jako u některých předchozích příkladů, a to že nejvíce žáků našlo polovinu řešení 7 dívek a 9 chlapců tedy 16 dětí.



Graf 6 - Počet řešení v úloze – BUTIK

Pří porovnání dívek a chlapců v celkovém počtu správných řešení vycházejí lépe dívky, a to o jednu dívku, tedy rozdíl je nepatrný.

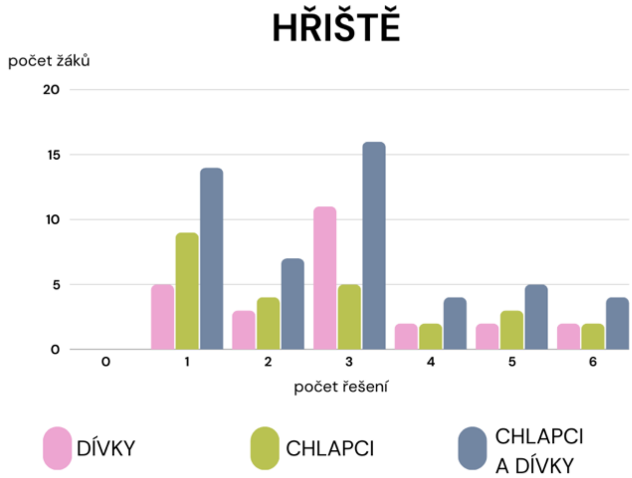
Úloha „ŘEKA“: V úloze Řeka našlo správný počet možností 9 žáků- 5 dívek a 3 chlapci. Zde se nejvíce žáků objevilo u odpovědi 4 kombinace, a to 6 dívek a 7 chlapců. Deset žáků se přiklonilo k pěti kombinacím.



Graf 7 - Počet řešení v úloze – ŘEKA

Úloha „HŘIŠTĚ“:

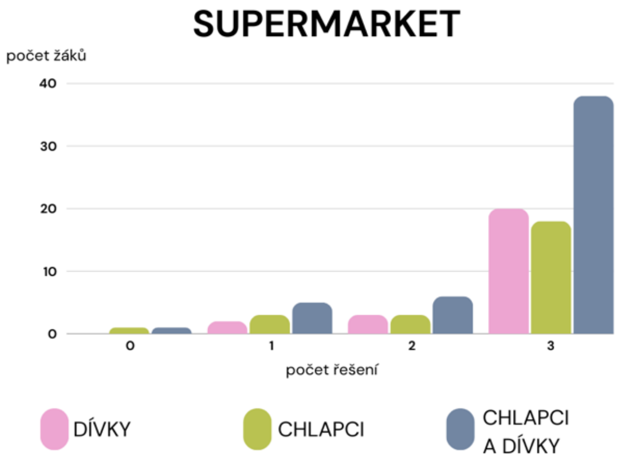
Tento příklad vychází jako jeden z nejtěžších. Jelikož nejvíce žáků vymyslelo 3 a méně kombinací. Nejčastější odpověď byly kombinace tři – 16 odpovědí z tohoto 11 dívek a 5 chlapců, jako druhá častá odpověď můžeme označit jednu kombinaci, tu zaznamenalo 14 žáků - 9 chlapců a 5 dívek.



Graf 8 - Počet řešení v úloze – HŘIŠTĚ

Úloha „SUPERMARKET“:

Tato úloha, se ukázala jako nejjednodušší, zřejmě i díky nejmenšímu počtu kombinací, které žáci museli zaznačit a to 3. Správně odpovědělo 38 žáků, z toho 20 dívek a 18 chlapců.



Graf 9 - Počet řešení v úloze – SUPERMARKET

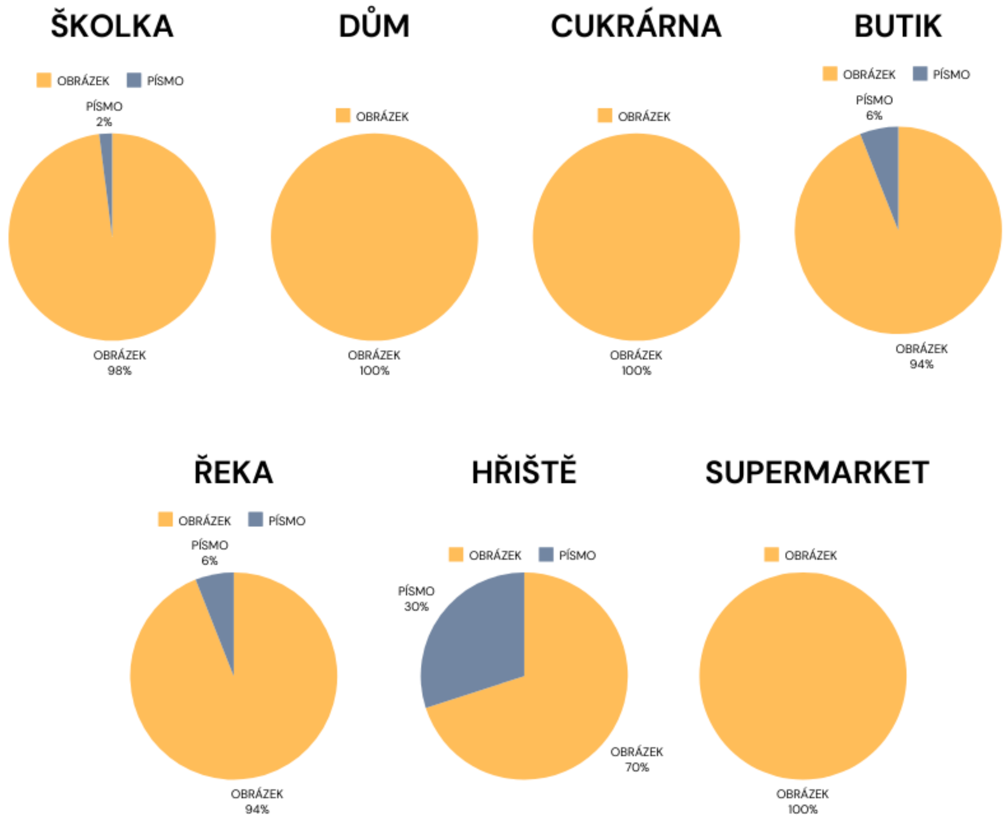
9.1.5 Kvalitativní analýza

V této kapitole se zaměříme na kvalitativní analýzu, kde budeme zkoumat nejčastější chyby, kterých se žáci dopouštěli při řešení úloh, a zároveň budeme analyzovat strategie, které při řešení využívali.

Strategie při řešení

Žáci měli volnou ruku při výběru metod znázornění řešení úloh. Mohli využívat různé vizuální i písemné metody.

Jak ukazuje graf č. 10, většina žáků používala obrázkové znázornění. Pouze v několika případech, například u úlohy „HŘIŠTĚ“, bylo zastoupeno i písemné znázornění. Písemná řešení představují důležitý aspekt, protože ukazují na schopnost žáků využívat symbolické reprezentace a logické struktury při řešení úloh.

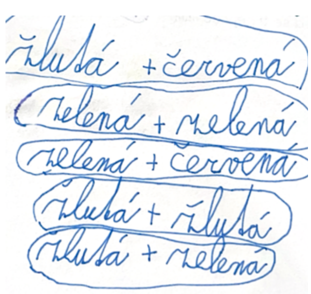


Graf 10 - Strategie řešení ve všech úlohách

Písemná řešení

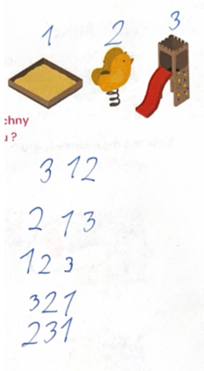
Nejprve se zaměříme na některá písemná řešení, která se objevila v pracovních listech. Na obrázku můžeme vidět jedno z písemných znázornění úlohy „ŘEKA". U tohoto příkladu využili písemné znázornění pouze tři žáci – dvě dívky a jeden chlapec. Tato řešení ukazují na jejich schopnost využívat textové a číselné reprezentace k vyjádření kombinatorických problémů.

Žák využil barevné znázornění u každého druhu cesty přes řeku. Cestě přes dřevěné mosty náleží zelená barva, cestě přes kameny žlutá barva, cestě po kládě červená barva.



Obrázek 93 - Písemné znázornění příkladu – ŘEKA

Písemné znázornění se nejčastěji objevovalo u úlohy „HŘIŠTĚ“, kde několik žáků využilo označení atrakcí pomocí písmen, či číslic, které následně skládali do různých kombinací, jak je vidět na následujícím obrázku. Písmena představují jednotlivé atrakce a jejich kombinace pak různé možné trasy nebo pořadí návštěv atrakcí. Tento přístup demonstruje schopnost žáků abstrahovat konkrétní prvky do symbolických reprezentací a systematicky s nimi pracovat.



Obrázek 94 - Písemné znázornění úlohy – HŘÍŠTĚ

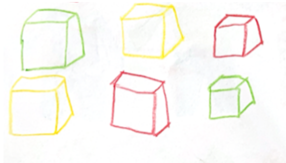
Vizuální řešení

Většina dětí však používala k řešení kombinatorických úloh obrázky. U úloh jako „DŮM“, „CUKRÁRNA“ a „SUPERMARKET“ používalo obrázky 100 % žáků. Mile mě překvapilo, jak se žáci snažili při kreslení obrázků. Obrázky nejenže pomáhají vizualizovat problém, ale také podporují kreativní myšlení a usnadňují pochopení složitějších kombinatorických principů.

Obrázek 96 - Znázornění pomocí obrázku – HŘIŠTĚ

Obrázek 95 - Znázornění pomocí obrázku – BUTIK

Dalším překvapením bylo řešení úlohy „ŠKOLKA“, kde někteří žáci byli schopni znázornit řešení pomocí kresby krychle, což svědčí o jejich dobré prostorové představivosti.



Obrázek 97 - Znázornění pomocí obrázku – ŠKOLKA

Většina žáků znázorňovala kombinace náhodně, avšak několik žáků systematicky znázorňovalo řešení, což je pozitivním indikátorem jejich analytických schopností. Tento přístup je zvláště užitečný při řešení složitějších úloh.

Obrázek 98 - Systematické znázornění pomocí obrázku – ŠKOLKA

Nejčastější chyby

Nejvíce chyb pramenilo ze špatného přečtení či pochopení zadání. U úlohy „CUKRÁRNA“ několik dětí zaznamenalo kombinace tří kopečků místo dvou. Tento typ chyby často vyplývá z nepozornosti nebo nedostatečného porozumění textu zadání. Je důležité věnovat zvláštní pozornost tomu, aby žáci správně pochopili instrukce a byli schopni je přesně aplikovat.

U téže úlohy děti také často zaznamenaly stejnou kombinaci příchutí, a to i přes podmínku, že na pořadí kopečků nezáleží (například malinová – pistáciová a pistáciová – malinová byly považovány za různé kombinace).

Obrázek 99 - Chybné pochopení zadání u příkladu – CUKRÁRNA

Celkově lze konstatovat, že žáci zadání nedodržovali jen výjimečně. Výskyt chyb nám však poskytuje cennou zpětnou vazbu, která může být využita k úpravě a vylepšení výukových materiálů a metod. Důkladným rozborem chyb můžeme identifikovat konkrétní oblasti, kde žáci potřebují další podporu a vedení.

Většina žáků řešila úlohy pomocí vypisování (namalování) všech možností řešení. Našlo se ale několik žáků, kteří řešili úlohy systematicky. Například u úlohy „CUKRÁRNA“ to byli jen 3 žáci. Systematické řešení se vyplatilo nejen u této úlohy, ale i u úloh: „ŠKOLKA“, „BUTIK“, „ŘEKA“, „HŘIŠTĚ“, „SUPERMARKET“.

9.1.6 Interpretace výsledků

Samotná analýza výsledků výzkumu zaměřeného na evaluaci pracovních listů v kombinatorice poskytuje hlubší vhled do reakcí a výkonů žáků prvního stupně základní školy. V rámci tohoto výzkumu bylo sledováno, jak žáci přistupují k řešení sedmi různých úloh, které byly součástí pracovních listů navržených pro výuku kombinatoriky. Celkový počet 50 žáků z druhých tříd zúčastněné školy poskytl dostatečný vzorek pro hodnocení efektivity těchto materiálů jako vzdělávacího nástroje.

Výsledky ukázaly rozmanitost v úspěšnosti žáků při řešení jednotlivých úloh. Úloha "SUPERMARKET" se ukázala jako nejúspěšnější s 76% úspěšností, což odpovídá 38 správným odpovědím. Naopak úloha "HŘIŠTĚ" dosáhla nejnižší úspěšnosti s pouhými 8% správných odpovědí. Tento rozdíl v úspěšnosti mezi jednotlivými úlohami naznačuje variabilitu v obtížnosti a náročnosti zadání.

Analýza také porovnávala výsledky mezi žáky podle pohlaví. Zjistilo se, že v některých úlohách dosahovaly dívky lepších výsledků než chlapci, zatímco v jiných úlohách byly výsledky obou skupin vyrovnané. Například v úloze "DŮM" dosáhly dívky lepšího výkonu s 20 správnými odpověďmi oproti 17 u chlapců, zatímco v úloze "CUKRÁRNA" dosáhli lepšího výsledku chlapci s 8 správnými odpověďmi oproti 5 dívkám. Musíme ale zdůraznit, že rozdíly mezi dívkami a chlapci jsou zanedbatelné.

Další část analýzy se zaměřila na způsoby, jakými žáci řešili úlohy. Většina žáků zaznamenávala své řešení kresbou nebo graficky, což naznačuje, že tato metoda je pro ně intuitivní a efektivní při řešení úloh z oblasti kombinatoriky. Důležitým aspektem bylo také sledování problémů, které se objevily při řešení úloh, přičemž často se jednalo o špatné porozumění zadání a dodržení všech podmínek.

Jak píšu ve své práci v rámci čtyř hypotéz jsem analyzovala, jak různé faktory, jako je počet kombinací v úloze, správné pochopení zadání, preferovaný typ vizualizace a potenciální rozdíly mezi pohlavími, ovlivňují výsledky.

Hypotéza č. 1: Tato hypotéza se zaměřuje na očekávání, že úlohy s menším počtem kombinací budou jednodušší na řešení než úlohy s více kombinacemi. Na základě výsledků mého šetření, kde úloha "SUPERMARKET" s pouhými 3 kombinacemi byla úspěšně zvládnuta 38 žáky, zatímco úloha "BUTIK" s 8 kombinacemi byla správně vyřešena pouze 9 žáky, mohu konstatovat, že hypotéza č. 1 se potvrdila. Úlohy s menším počtem kombinací skutečně představovaly menší náročnost na pozornost a systematický přístup než úlohy s více kombinacemi.

Hypotéza č. 2: Tato hypotéza se zabývá předpokladem, že hlavní obtíže při řešení úloh budou spojeny s pochopením zadání a dodržením všech podmínek úlohy. Podle mého pozorování, které jsem získala během provádění experimentů, se ukázalo, že tento aspekt skutečně hraje klíčovou roli při úspěšném řešení úloh. Například u úlohy „CUKRÁRNA“ jsem zaznamenala, že žáci často udělali chybu tím, že zaznamenali kombinaci tří kopečků místo požadovaných dvou, což naznačuje, že porozumění zadání má vliv na jejich úspěch při řešení. Na základě těchto výsledků mohu hypotézu č. 2 potvrdit.

Hypotéza č. 3: Tato hypotéza předpokládala, že většina žáků bude preferovat grafické vyjádření řešení, což je intuitivní způsob porozumění kombinacím. Na základě mého výzkumu jsem zjistila, že 100 % zkoumaných žáků použilo grafické znázornění při řešení tří z celkových sedmi zkoumaných úloh. Tento fakt jasně indikuje silnou tendenci žáků využívat vizuální formy řešení. Překvapivě jsem také zaznamenala, že písemné řešení bylo nejvíce preferováno u úlohy "HŘIŠTĚ", kde 30 % žáků zvolilo tuto metodu, což naznačuje, že existuje variabilita v tom, jak jednotliví žáci přistupují k řešení kombinatorických úloh. Tato hypotéza se tedy potvrdila.

Hypotéza č. 4: Tato hypotéza se týkala očekávání, že by mohl existovat rozdíl v úspěšnosti řešení úloh podle pohlaví žáků. Má analýza však neprokázala žádné signifikantní rozdíly mezi dívkami a chlapci v závislosti na typu úloh, například mezi "BUTIK" a "ŠKOLKA". Tímto způsobem je hypotéza č. 4 na základě získaných dat vyvrácena, což naznačuje, že úspěšnost v řešení těchto úloh není podstatně ovlivněna pohlavím žáků.

Výsledky mého výzkumu podporují hypotézy č. 1, 2 a 3, které se týkají snazšího řešení úloh s menším počtem kombinací, klíčové role pochopení zadání a preferovaného grafického vyjádření řešení. Naopak hypotéza č. 4, která se zabývala rozdíly mezi pohlavími, nebyla potvrzena.

10 Závěr

Při psaní této diplomové práce jsem se snažila inovativně propojit kombinatoriku s moderními výukovými metodami prostřednictvím interaktivních pracovních listů, které jsem navrhla speciálně pro žáky 1. stupně základní školy, konkrétně první až třetí třídy. Cílem mé práce bylo představit základní principy kombinatoriky v přístupné formě a demonstrovat, jak mohou digitální technologie podpořit jejich pochopení matematických konceptů.

V teoretické části jsem se zaměřila na vysvětlení klíčových konceptů kombinatoriky, jako jsou pravidla součtu a součinu, variace, permutace a kombinace. Tyto principy jsem přizpůsobila věkové kategorii žáků, aby byly srozumitelné a přístupné pro mladší děti. Zjistila jsem, že i složité matematické koncepty lze efektivně zprostředkovat mladším žákům, pokud jsou správně vysvětleny a prezentovány.

Praktická část mé práce se zaměřila na vytvoření interaktivních pracovních listů s názvem „MĚSTO“, které kombinují zábavnou formu hry s výukou kombinatoriky. Tento projekt byl detailně rozpracován od konceptu přes technickou realizaci až po praktické příklady využití ve výuce. Cílem bylo vytvořit nástroj, který nejen vysvětlí matematické principy, ale zároveň žáky motivuje a zapojí je do aktivního učení. Hra „MĚSTO“ byla koncipována tak, aby žákům pomohla aplikovat kombinatorické principy v reálných situacích a podpořila jejich logické myšlení a kreativitu. Tímto způsobem jsem chtěla ukázat, jak mohou digitální technologie a interaktivní metody výrazně obohatit tradiční výuku matematiky.

Výzkum, který jsem v rámci této práce provedla, se zaměřil na evaluaci účinnosti a efektivity interaktivních materiálů ve výuce. Výsledky ukázaly, že žáci přistupovali k řešení úloh různými způsoby, nejčastěji využívali grafické znázornění, což potvrzuje vhodnost tohoto přístupu pro mladší žáky. Sledovala jsem úspěšnost žáků při řešení jednotlivých úloh a analyzovala jsem jejich postupy a strategie.

Zjistila jsem, že rozdíly v úspěšnosti mezi chlapci a dívkami byly minimální, což naznačuje, že pracovní listy byly navrženy tak, aby byly rovněž přístupné a srozumitelné pro všechny žáky bez ohledu na pohlaví. Největší problémy při řešení úloh souvisely se správným porozuměním zadání a dodržením všech podmínek úloh. Tyto poznatky mi poskytly cenné informace o tom, jak lze pracovní listy dále zlepšit a optimalizovat.

Celkově tato diplomová práce přispěla k modernizaci výuky matematiky na základních školách prostřednictvím efektivního využití digitálních technologií a inovativních pedagogických metod. Interaktivní pracovní listy, které jsem vytvořila, se ukázaly jako cenný nástroj pro rozvoj matematických dovedností a logického myšlení u žáků prvního stupně základní školy. Věřím, že výsledky této práce mohou inspirovat další výzkum a vývoj inovativních výukových materiálů, které přispějí k lepšímu porozumění matematických konceptů a zvýšení zájmu žáků o matematiku.

Seznam použitých zdrojů

Knižní zdroje

Calda, E., & Dupač, V. (1993). *Matematika pro gymnázia: Kombinatorika, pravděpodobnost*, statistika. Prometheus.

Fuchs, E. (2000). *Diskrétní matematika pro učitele*. Brno: Masarykova univerzita – Přírodovědecká fakulta.

Kubanová, J. (2003). *Úvod do studia kombinatoriky, pravděpodobnosti a statistiky*. Univerzita Pardubice.

Vilenkin, N. J. (1977). *Kombinatorika. SNTL* – Státní nakladatelství technické literatury.

Internetové zdroje

Blažková, R. (2020). *Prvky kombinatoriky v učivu matematiky 1. stupně ZŠ.* [cit. 2024-02-09] Dostupné z https://is.muni.cz/el/ped/jaro2020/ZS1MK_PDM2/um/prvky_kombinatoriky.pdf

Blažková, R., & Budínová, I. (2012). *Kombinatorika – možnosti využití v učivu matematiky na základní škole*. [cit. 2024-02-12]. Dostupné z https://is.muni.cz/el/ped/jaro2012/MA2MP_PDM2/um/DM2P9.pdf

Černý, M. (2015). *Interaktivní tabule: Open Sankoré a Smart Notebook. Metodický portál:* Články. [cit. 2024-06-26] Dostupné z https://clanky.rvp.cz/clanek/19827/INTERAKTIVNI-TABULE-OPEN-SANKORE-A-SMART-NOTEBOOK.html

Dostál, J. (2009). *Interaktivní tabule ve výuce. Volume 1, Issue 3*. ISSN 1803-537X. [cit. 2024-06-27] Dostupné z https://jtie.upol.cz/pdfs/jti/2009/03/02.pdf

Inkluzivní škola. (2023). *Interaktivní tabule*. [cit. 2024-06-26] Dostupné z https://inkluzivniskola.cz/cdj-interaktivni-tabule

Kopecký, K., Szotkowski, R., Krejčí, V., Kubala, L., & Havelka, M. (2021). *Moderní technologie ve výuce (o moderních technologiích ve výuce s pedagogy pro pedagogy)*. [cit. 2024-06-26] Dostupné z https://doivup.upol.cz/pdfs/doi/9900/04/4200.pdf

Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy. (2023). *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání – RVP ZV.* [cit. 2024-06-10] Dostupné z https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcovy-vzdelavacici-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv

Pachner. (2020). *MozaBook CLASSROOM CZ – pro 1 interaktivní tabuli a 1 PC.* [cit. 2024-06-26] Dostupné z https://www.pachner.cz/vyukove-programy-95k/komplety-programu-9k/mozabook-classroom-cz---pro-1-interaktivni-tabuli-a-1-pc-1830p?mena=EUR

Plch, R. (2020). *Programy pro interaktivní tabule*. Masarykova univerzita. [cit. 2024-06-26] Dostupné z https://is.muni.cz/el/sci/podzim2020/MUC71/um/predn5.pdf?lang=en

Pokorný, M. (2019). *Kombinatorika a práca s údajmi*. Trnava. [cit. 2024-04-29] Dostupné z https://pdfweb.truni.sk/download?e-skripta/pokorny-kpu-2019.pdf

Příhonská, J. (2013). *Kombinatorické problémy: Aplikace a metody řešení. Technická Univerzita v Liberci, Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická.* [cit. 2024-02-21] Dostupné z https://dspace.tul.cz/handle/15240/172725

Půža, M. (2015). *Využití ICT ve výuce.* [cit. 2024-06-26] Dostupné z https://digifolio.rvp.cz/artefact/file/download.php?file=71667&view=11067

Šimeček, K. (2013). *Volně dostupný software pro interaktivní tabule Open-Sankoré.* Metodický portál: Spomocník. [cit. 2024-04-29] Dostupné z https://spomocnik.rvp.cz/clanek/17807/VOLNE-DOSTUPNY-SOFTWARE-PRO-INTERAKTIVNI-TABULE-OPEN-SANKORE.html

Voglová, Z. (2006). *Historie kombinatoriky.* In M. Bečvářová (Ed.), Historie matematiky (str. 72). Karlova Univerzita, Praha. [cit. 2024-03-06] Dostupné z https://kdm.karlin.mff.cuni.cz//sborniky/sbornik-27.pdf

Vysoká škola chemicko-technologická v Praze. (2019). *Interaktivní tabule a jejich aplikace: SMART Notebook.* [cit. 2024-06-26] Dostupné z https://vc.vscht.cz/files/uzel/0026752/q0rMzklMycuML87Oz0kF0pl5JalFidklmWVATkliUmlOKgA.pdf

Wagner, J. (2011). *Interaktivní tabule v roce 2011*. Česká škola. [cit. 2024-06-20] Dostupné z http://www.ceskaskola.cz/2011/02/jan-wagner-interaktivni-tabule-v-roce.html

Přílohy

Příloha A – Seznam obrázků

Příloha B – Seznam grafů