Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta

KOMBINATORICKÉ PRINCIPY VE ŠKOLSKÉ MATEMATICE

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Jiřina BŘEZINOVÁ

České Budějovice, říjen 2010

Prohlášení:

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích dne 26.11.2010 ....

Anotace

Název: Kombinatorické principy ve školské matematice

Vypracovala: Bc. Jiřina Březinová

Vedoucí práce: RNDr. Pavel Leischner, Ph. D.

Klíčová slova: kombinatorika, kombinatorické principy, pravidlo součtu, pravidlo součinu, princip inkluze-exkluze, Dirichletův princip, přihrádkový princip, rekurze, bijektivní důkaz, dvojí výpočet.

Práce obsahuje podrobné vysvětlení kombinatorických principů využívaných ve školské matematice. Jednotlivé principy jsou důkladně vysvětleny a procvičeny. Úkoly v závěru kapitoly slouží čtenáři k otestování získaných vědomostí.

Annotation

Title:	Combinatorial principles in school mathematics
Author:	Bc. Jiřina Březinová
Supervisor:	RNDr. Pavel Leischner, Ph. D.

Key words: Combinatorics, combinatorial principles, rule of sum, rule of product, Inclusion-exclusion principle, pigeonhole princip, recurrence relation, bijective proof, double counting.

The thesis includes delatiled explanation of combinatorial principles used in school mathematics. The single principles are explained in details and practicised. The tasks at the end of the chapter serve readers for testing acquired knoledge.

Tímto bych chtěla poděkovat RNDr. Pavlu Leischnerovi, Ph. D. za velkou trpělivost a odborné vedení při psaní této diplomové práce.

Obsah

1 Úvod

Jak říká Milan Hejný ([1], str. 472), kombinatorika patří k nejméně oblíbeným částem středoškolské matematiky. Nejen u žáků, ale také u učitelů. Výstižně to napsal jeden student M-F do anketního lístku: „Kombinatorika je jako sportka. Nikdy nevím, jestli použít vzorec na kombinace, variace nebo permutace. Většinou se netrefím. Nemám zde pevnou půdu pod nohama, proto kombinatoriku nemám rád.“

To, co student pojmenoval pevnou půdou pod nohama, jsou zkušenosti s kombinatorickými situacemi. Bez nich je čtveřice vzorců

$$P(n)=n!,\quad C_k(n)=\binom{n}{k},\quad V_k^{'}(n)=n^k,\quad V_k(n)=\frac{n!}{(n-k)!}$$

jen kostrou, a i to je zatížené formalismem.

Žák by se tedy měl nejprve naučit kombinatoricky myslet a teprve potom si osvojovat vzorce a pojmy pro ulehčení práce při řešení složitějších situací. Cílem této práce bylo shromáždit metodický materiál k počáteční výuce kombinatorického myšlení.

Práce je formálně rozdělena do několika kapitol. První kapitola obsahuje vymezení kombinatorických principů spolu se zdrojem, odkud byla definice převzata. V případě nutnosti je uvedená definice vysvětlena podrobněji. Další kapitoly jsou věnovány jednotlivým principům a jejich procvičení.

Příklady, jež jsou v práci uvedeny jsem si sama sestavila, převzala či upravila z publikací uvedených v literatuře pod označením [3], [4], [6], [7] – [16], [18], [19].

2 Vymezení kombinatorických principů

Prameny se ve výčtu kombinatorických principů liší. Uvedu je tak, jak je uvádí anglická online Wikipedie [2].

Kombinatorické pravidlo součinu

Kombinatorické pravidlo součinu dle ([3], str.9): Počet všech uspořádaných *k*-tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního členu n_2 způsoby atd. až *k*-tý člen po výběru všech předchozích členů n_k způsoby, je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Kombinatorické pravidlo součtu

Definice dle ([3], str.9): Jsou-li $A_1, A_2, \ldots A_n$ konečné množiny, které mají po řadě $p_1, p_2, \ldots p_n$ prvků a jsou-li každé dvě disjunktní, pak počet prvků množiny $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ je roven $p_1 + p_2 + \ldots + p_n$.

Princip inkluze-exkluze

Pro dvě konečné množiny: nechť jsou M_1, M_2 libovolné konečné množiny, pak zřejmě platí:

$$|M_1 \cup M_2| = |M_1| + |M_2| - |M_1 \cap M_2|$$

Pro tři množině je zřejmé, že mohutnost jejich sjednocení obecně neobdržíme, když od součtu jejich mohutností odečteme mohutnosti prvků všech dvojic těchto množin. Některé prvky bychom totiž mohli odečíst dvakrát – a sice ty prvky, které leží v průniku tří těchto množin.

Také platí:

$$|M_1 \cup M_2 \cup M_3| = |M_1| + |M_2| + |M_3| - |M_1 \cap M_2| - |M_1 \cap M_3| - |M_2 \cap M_3| + \\ + |M_1 \cap M_2 \cap M_3|$$

Obecně pro n množin (převzato z [6]):

Nechť je dáno N předmětů, z nichž některé mají vlastnosti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$. Přitom každý z těchto předmětů může mít jednu nebo několik z uvedených vlastností, nebo nemusí mít ani jednu z nich. Označme $N(\alpha_i \alpha_j \ldots \alpha_k)$ počet předmětů, které mají vlastnosti $\alpha_i, \alpha_j, \ldots, \alpha_k$ (přičemž nevylučujeme, že mají i některé další vlastnosti). Budeme-li chtít zdůraznit, že bereme jenom předměty, jež nemají určitou vlastnost, pak tuto vlastnost zapíšeme s čárkou. Např. $N(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4')$ označíme počet předmětů, které mají vlastnosti α_1 a α_2 , ale nemají vlastnost α_4 (otázka ostatních vlastností zůstává otevřena).

Počet předmětů, jež nemají žádnou z uvedených vlastností, pak v souladu s dříve provedenými úmluvami označíme symbolem $N(\alpha_1' \alpha_2' \ldots \alpha_n')$. Obecný zákon zní takto:

$$N(\alpha_1' \alpha_2' \ldots \alpha_n') = N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) - \ldots - N(\alpha_n) + N(\alpha_1 \alpha_2) + N(\alpha_1 \alpha_3) + \ldots \\ \ldots + N(\alpha_1 \alpha_n) + \ldots + N(\alpha_{n-1} \alpha_n) - N(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) - \ldots - N(\alpha_{n-2} \alpha_{n-1} \alpha_n) + \ldots \\ \ldots + (-1)^n N(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n). \tag{1}$$

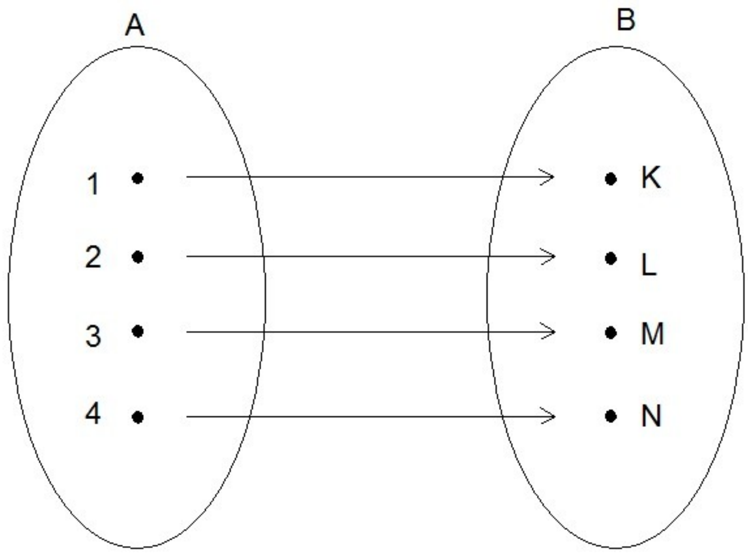
Algebraický součet se zde vztahuje na všechny skupiny o vlastnostech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ (bez přihlédnutí k jejich pořadí). Přitom znak $+$ je právě u těch sčítanců, jimž přísluší sudý počet uvažovaných vlastností, znak $-$, je-li tento počet liché číslo. Např. $N(\alpha_1 \alpha_3 \alpha_6 \alpha_8)$ Je zde se znakem $+$, $N(\alpha_3 \alpha_4 \alpha_{10})$ se zankem $-$. Vzorec (1) nazýváme principem inkluze a exkluze (nebo také principem připojování a vylučování); nejprve se vylučují všechny předměty, které mají aspoň jednu z vlastností $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, potom se připojují předměty, jež mají alespoň dvě z těchto vlastností, vylučují se ty, které mají alespoň tři vlastnosti atd.

Metoda bijekce

Bijektivní důkaz je postaven na faktu, že množiny A, B mají stejný počet prvků, právě když existuje vzájemně jednoznačné zobrazení množiny A na množinu B.

Vzájemně jednoznačné zobrazení množiny A na množinu B neboli bijekce mezi množinami A, B, je prosté zobrazení, jehož definičním oborem je celá množina A a oborem hodnot celá množina B.

Chceme-li tedy dokázat, že mají dvě množiny stejný počet prvků, stačí nalézt bijekci mezi nimi.



Obr. 2.1: Bijekce množiny A na B

Metoda dvojího výpočtu

Spočívá v tom, že dvěma různými způsoby vyřešíme tentýž problém, přičemž dojdeme ke zdánlivě různým výsledkům. Porovnáním obou výsledků objevíme nový poznatek.

Dirichletův princip (přihrádkový princip)

Pod tímto označením se skrývá jednoduchý princip. Je-li k dispozici více než n kuliček, které budeme přidělovat do n přihrádek, vždy bude alespoň jedna přihrádka obsahovat dvě kuličky. Pokud tam umístíme více než $k \cdot n$ kuliček, bude v některém důlku více než k kuliček.

Pokud tedy budeme mít tři kuličky a dvě jamky, můžeme si být absolutně jisti, že v jedné jamce budou nejméně dvě kuličky.

Metoda zvoleného prvku

Řešení řady problémů usnadňuje, když si zvolíme nějaký prvek a vyšetřujeme vlastnosti dané množiny na základě úvah o tomto prvku. Můžeme například zvolit libovolný prvek a rozdělit kombinatorickou úlohu na dvě části podle toho, zda prvek patří či nepatří do uvažované skupiny prvků. Jindy volíme prvek se speciálními vlastnostmi a využijeme těchto vlastností k důkazu nějakého tvrzení.

Rekurentní vztahy

Podle slovníku cizích slov ([12], str. 656) rekurze znamená využití části vlastní vnitřní struktury.

Rekurentní vztahy zjišťují každý objekt z předcházejících. Zjednodušeně řečeno, objekt je součástí definice významu tohoto samotného objektu. Ačkoli jsme si toho nebyli vědomi, setkali jsme se s rekurzí u mocniny s přirozeným exponentem ($a^{n+1}=a^n \cdot a$), u definice aritmetické ($a_{n+1}=a_n+d$) či geometrické posloupnosti ($a_{n+1}=a_n \cdot q$) a v mnoha dalších případech.

Vytvořující funkce (potenční řady)

Metoda vytvořujících funkcí spočívá v převedení řešení kombinatorických úloh s omezujícími podmínkami na součty nekonečných řad. Protože nespadá do elementární matematiky, nebudeme ji dále uvádět. Jestliže se s ní chcete seznámit, najdete ji v [5] nebo [6].

3 Kombinatorické pravidlo součtu a součinu

Obě tato pravidla jsou intuitivní. Na úvod zadáme takové příklady, aby žáci principy použili i bez jejich znalosti. Ukažme žákům, že mohou úspěšně řešit kombinatorické úlohy pouze za použití jednoduchých úvah. K tomuto účelu mohou sloužit nečíslované příklady pod tímto textem. Doporučuji začít s příklady na princip součtu, který je pro žáky snáze pochopitelný.

Příklad Kolik různých částek lze zaplatit třemi mincemi, pokud máme k dispozici dostatek mincí v hodnotě 1Kč, 2Kč a 5Kč?

Řešení: (Žáci řeší tuto úlohu vypsáním všech možných součtů tří hodnot. Každý z nich si najde vlastní organizační systém, aby žádnou možnost nevynechal. Po vypsání logika (i princip součtu) velí všechny tyto možnosti sečíst. Možností je pouze 10 v rozsahu sum od 3 do 15, vypisování tedy nezabere mnoho času.)

Příklad Zjistěte počet všech dvouciferných přirozených čísel.

Řešení: (Žáci jsou schopni úlohu vyřešit bez znalosti principů pouze za použití úvahy. Většina žáků začne s vypisováním těchto čísel a přitom si všimnou, že čísel začínajích jedničkou je 10, začínajících dvoujkou taktéž atd. Na základě těchto poznatků jsou schopni vyvodit závěr o počtu dvouciferných čísel. Vyučující poté stručně shrne získané poznatky.)

Na místo desítek nelze dosadit nula. Proto máme výběr jen z devíti čísel $(1, 2, \ldots, 9)$. Dvouciferné číslo je např. i 11, cifry se mohou opakovat. Na místo jednotek umístíme kterékoliv z deseti čísel. Ke každé číslici na místě desítek připadá deset různých číslic na místo jednotek. Uspořádanou dvojici představující dvouciferná čísla je možno vytvořit $9 \cdot 10 = 90$ způsoby.

Příklad Zjistěte počet všech trojciferných přirozených čísel.

Řešení: (Po shrnutí předchozího příkladu učitelem již pro žáky nebude problém rozšířit úvahu i na trojciferná čísla. Dostáváme $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ trojciferných čísel).

Příklad Kolik je celkem jednociferných a dvouciferných čísel?

Řešení: (Počet dvouciferných čísel je již znám z předchozí úlohy. Stačí tedy sečíst počet jednociferných (10) a dvouciferných (90) čísel. Tato úloha na princip součtu, může sloužit i jako demonstrace uvedeného principu.)

Po těchto příkladech můžeme přistoupit k samotnému představení pravidel a poukázání na jejich použití v předchozích příkladech. K dalšímu procvičení slouží řešené příklady v podkapitole 3.1 seřazených podle obtížnosti a náročnosti úvah.

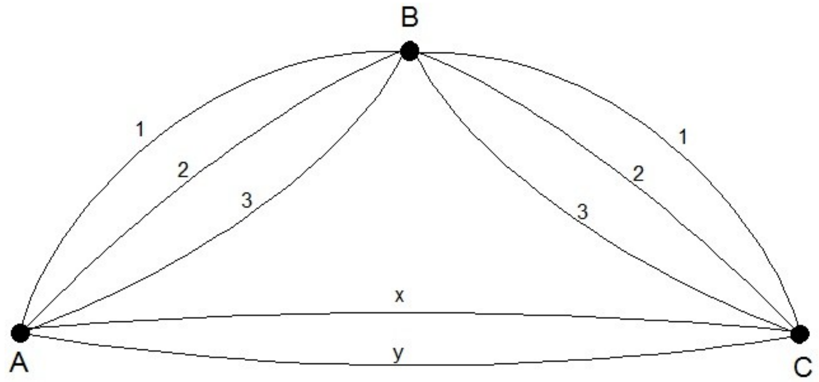
<u>Pravidlo součinu</u>: Jestliže máme r možností pro výběr typu A a s možností pro výběr typu B, pak pro výběr typu A a B máme celkem $r \cdot s$ možností.

<u>Pravidlo součtu [6]:</u> Jestliže nějaký objekt A můžeme vybrat m způsoby a jiný objekt B lze vybrat n způsoby, potom výběr „buď A, nebo B“ je možno provést $m+n$ způsoby. Pravidlo platí za předpokladu, že žádný ze způsobů výběru objektu A není shodný s některým způsobem výběru objektu B.

Příklad Turista jede vlakem, může vystoupit buď na zastávce B, nebo na zastávce C (obr. 3.1). Kolika způsoby se může pěšky dopravit do místa A?

Řešení: Z B do A vedou tři cesty, z C do A pouze dvě. Mohu volit zda se vydám z B či C a také kterou z nabízených cest, celkem $3+2=5$ způsobů (pravidlo součtu).

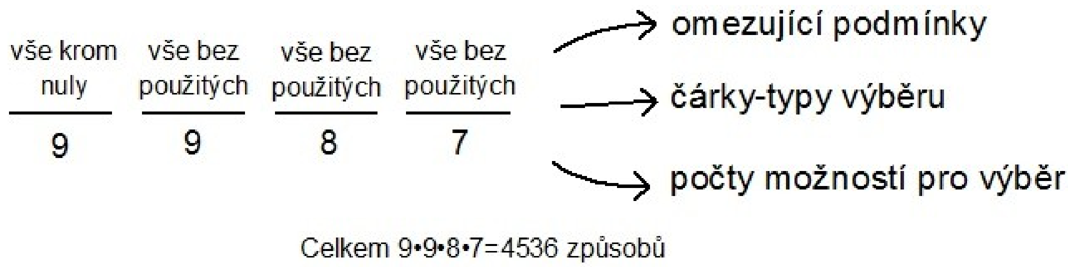
Příklad Z místa B do A i C vedou tři turistické cesty, z místa A do C dvě (obr. 3.1). Určete počet způsobů, jimiž lze vybrat trasu z A do C, jestliže musíme projít přes B?



Obr. 3.1: Cesty mezi body A, B a C

Řešení: Je nařízena mezizastávka v B. Z A do B tedy vedou tři cesty, ke každé z nich v bodě B volíme jednu ze tří možností do C. Je totiž rozdíl, zda půjdeme trasu A-B-C po 1-1, 1-2, 1-3 nebo 2-1, 2-2, 2-3 či snad 3-1, 3-2, 3-3. Dle pravidla součinu celkově $3 \cdot 3=9$ možných způsobů cesty.

Dohoda: Pro příklady u nichž to bude vhodné, budeme pro výběry užívat znázornění na (obr. 3.2). Nejlepší strategií je začít od těch částí, jež mají omezující podmínky.



Obr.3.2: Způsob znázornění v příkladech

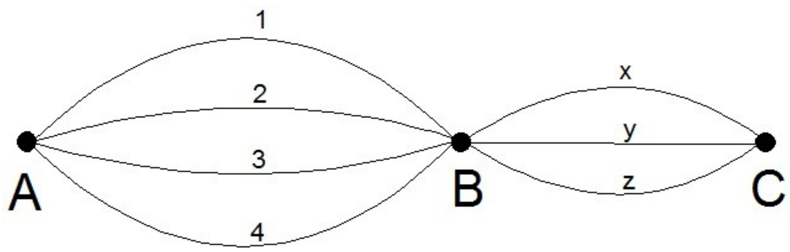
3.1 Řešené příklady

Příklad 3.1. Z místa A do místa B vedou čtyři turistické cesty, z místa B do C tři. Určete počet způsobů, jimiž lze vybrat trasu

a) z A do C a zpět;

b) z A do C a zpět tak, že z těchto sedmi cest není žádná použita dvakrát;

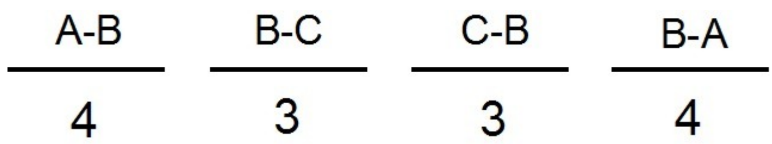
c) z A do C a zpět tak, že z těchto sedmi jsou právě dvě použity dvakrát.



Obr. 3.3

Řešení:

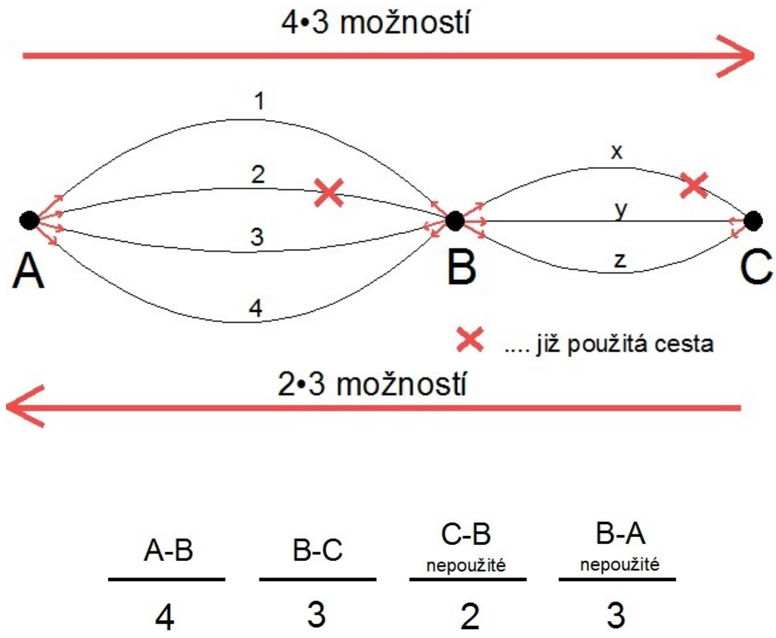
a) Pro překonání prvního úseku cesty, tedy z A do B, máme možnost výběru mezi čtyřmi cestami. Můžeme se tedy vydat po cestě 1, 2, 3 nebo 4. Do C vedou z B už jen tři cesty, cesta x, y, a cesta z. Jednotlivé výběry na sobě závisí, pro A-B-C je rozdíl například mezi výběrem 1-x a 2-x či 3-x a 3-y.



Obr. 3.4

Za použití dohodnutého zápisu (obr. 3.4) dostáváme $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 = 144$ způsobů pro cestu z A do C a zpět.

b) V tomto případě nesmíme použít cestu, po které jsme už prošli. Při cestě do C si s tím nemusíme dělat žádné starosti. Ještě jsme tudy nešli a tak není možné abychom po zvolené cestě kráčeli již v minulosti. Pro první dva úseky A-B a B-C se nic nemění. Při zpáteční cestě C-B pak zbývají dvě nepoužité cesty a pro B-A cesty tři.



Obr. 3.5

Celkem 72 způsobů při nepoužití jedné cesty dvakrát.

c) Nyní, když musíme projít právě po dvou cestách a přesto projít celou trasu, je zřejmé, že máme možnost si cestu vybrat v každém úseku jen jednou. Při zpáteční cestě pak není možnost volby, musíme následovat tu cestu, po které jsme přišli. Celkový počet možností pro projití celé trasy odpovídá možnostem pro cestu do bodu C, tedy $4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 = 12$ způsobů.

Příklad 3.2. V košíku je 12 jablek a 10 hrušek. Petr si z něj má vybrat buď jablko, anebo hrušku tak, aby Věra, která si po něm vybere jedno jablko a jednu hrušku, měla co největší možnost výběru. Určete, co si má vybrat Petr.

Řešení: Nejsnazším způsobem bude spočítat, kolik by měla Věra možností v případě Petrovi volby hrušky a kolik při volbě jablka.

Petr volil hrušku:

Kdyby si Petr vybral hrušku, měla by Věra 12 možností pro výběr jablka a 9 možností pro výběr hrušky. Pro výběr „jablko a hruška“ má tedy $9 \cdot 12 = 108$ možností.

Petr volil jablko:

Věra bude mít na výběr z 11 jablek a 10 hrušek. Na každou hrušku připadne 11 možností na volbu jablka. Celkem je to tedy $11 \cdot 10 = 110$ různých způsobů jak zvolit jedno jablko a jednu hrušku.

Aby měla Věra co nejvíce možností, musí si Petr zvojit jablko.

Příklad 3.3. Určete, kolika způsoby je možno v kině posadit 5 přátel (označme je Z, K, M, L, S) vedle sebe na 5 sedadel

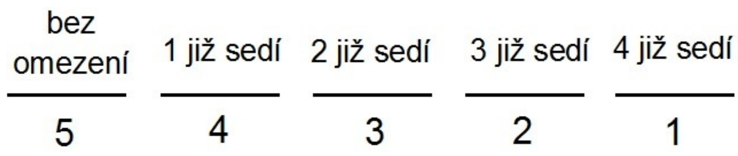
a) bez omezujících podmínek;

b) jestliže má K a L sedět vedle sebe.

Řešení:

a) Takové usazení může být (Z, K, M, L, S), jedná se však pouze o jeden z mnoha způsobů. Jde o uspořádanou pětici tvořenou písmeny (jmény) K, L, M, S, Z. Za uspořádanou pětici ji považujeme proto, že záleží na pořadí jednotlivých prvků, pokud by byly některé osoby přehozeny či úplně nahrazeny, jednalo by se o jiný způsob usazení, tedy o jinou uspořádanou pětici.

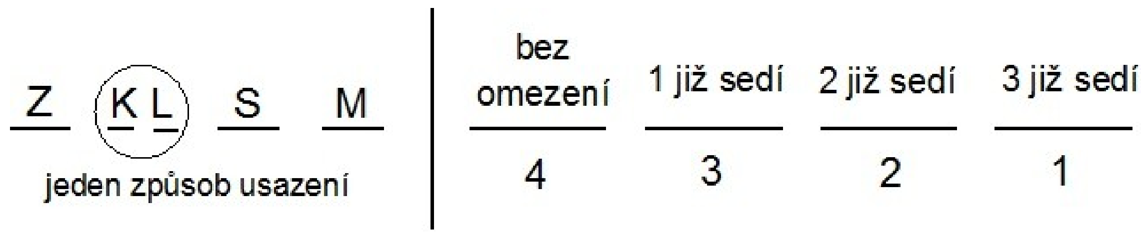
Při usazování první osoby volíme jednoho z pěti možností (volím např. Zdeňka). Pro vedlejší pozici mám již jen 4 adepty, jelikož Zdeněk již sedí a není možné, aby seděl současně na několika sedadlech. Na prostřední místo zbývají jen 3 osoby, pak jen 2 a na poslední sedadlo se posadí zbývající člověk.



Obr. 3.6: Způsoby usazení 5-ti osob

Podle pravidla součinu by všech způsobů bylo $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

b) Osoby K a L chtějí sedět vedle sebe, proto je zatím budeme počítat jako jeden objekt a jejich místa za dvojsedadlo. Usazujeme tedy 4 objekty na 4 pozice.



Obr. 3.7:Usazení pokud K, L vedle sebe

Toto je jeden způsob usazení z $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ pokud sedí K a vedle L (K vlevo od L), dalších 24 způsobů bychom získali jestliže by si K a L svá místa vyměnili, celkem 48 způsobů.

K vyřešení příkladu jsme použili pravidla součinu i pravidla součtu.

Příklad 3.4. Určete počet všech čtyřciferných čísel v jejichž dekadickém zápisu se vyskytují pouze cifry 0, 1, 2, 5, 7, 8 jestliže

a) cifry se nesmějí opakovat;

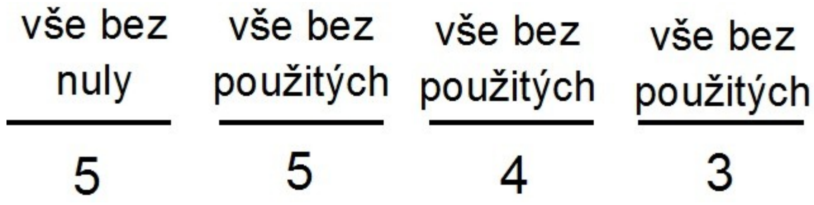
b) cifry se mohou opakovat;

c) číslo je dělitelné dvěma, cifry bez opakování;

d) výsledné číslo je větší než 2000 a dělitelné 5-ti, opakování cifer.

Řešení:

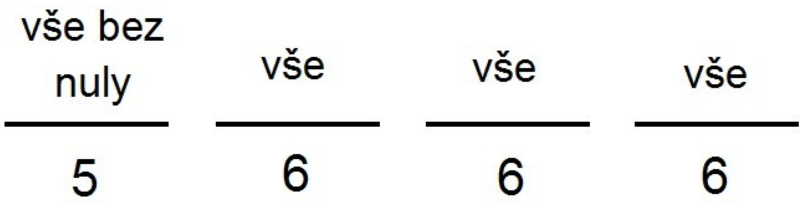
a)



Obr. 3.8

Celkem $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$ takových čísel.

b)



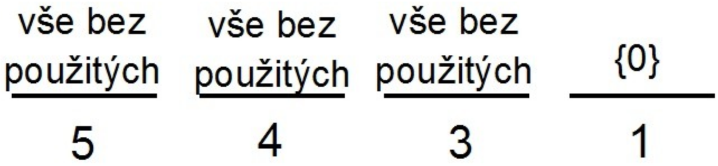
Obr. 3.9

Cifry se mohou opakovat, jediná potíž bude s nulou na začátku. Celkem $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1080$ čísel.

c) Aby bylo číslo dělitelné dvěma, musí být jeho poslední cifra nula nebo sudá. V nabídce máme tři vyhovující cifry 0, 2 a 8. Nula je speciální případ, rozdělíme řešení na dvě části, v první je poslední cifrou nula ve druhé nenulová sudá číslice.

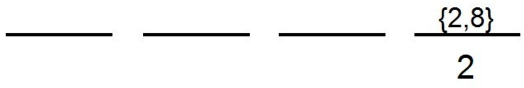
I. část

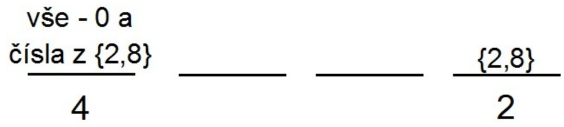
Pokud by byla na konci nula, nemusíme vylučovat její výskyt na první pozici (obr. 3.10).



Obr. 3.10 Poslední cifrou je nula

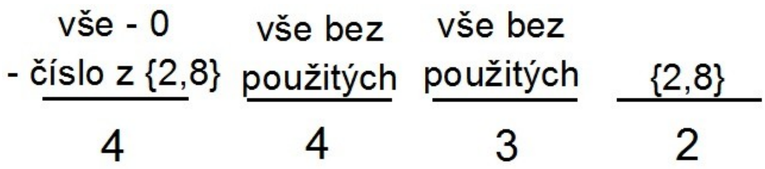
II.část





Obr. 3.11a: pro poslední cifru dvě možnosti Obr. 3.11b

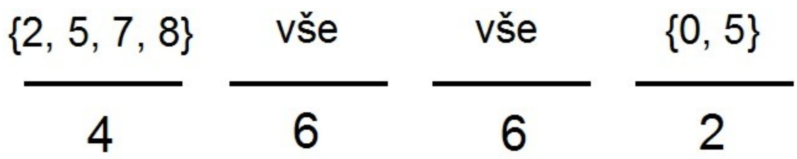
Na prvním místě nesmí být nula a zároveň tam nemůže být buď 8 nebo 2, jelikož jedno z těchto čísel již je použito na posledním místě (Obr. 3.11b). Na první pozici máme na výběr ze $6-1-1=4$ možností. Na druhé místo nesmíme použít cifru, jež je použita na prvním, ale máme k dispozici i nulu, kterou jsme předtím neměli. Možností pro druhou pozici je stejně jako pro první. Na třetí pozici je méně o tu možnost, jež byla použita na pozici druhé (obr. 3.12).



Obr. 3.12

Všech možností pro čtyřciferné číslo dělitelné dvěma složených ze zadaných cifer je $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 156$.

d)



Obr. 3.13: Čísla dělitelná 5-ti a větší než 2000

První cifra musí být vyšší nebo rovna 2 a poslední 0 nebo 5. Také musíme vyloučit číslo 2000. Celkový počet hledaných čísel je $4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 - 1 = 287$.

Příklad 3.5. Kolika způsoby můžeme rozestavit na šachovnici o osmi sloupcích a osmi řadách 8 věží tak, aby se vzájemně neohrožovaly?

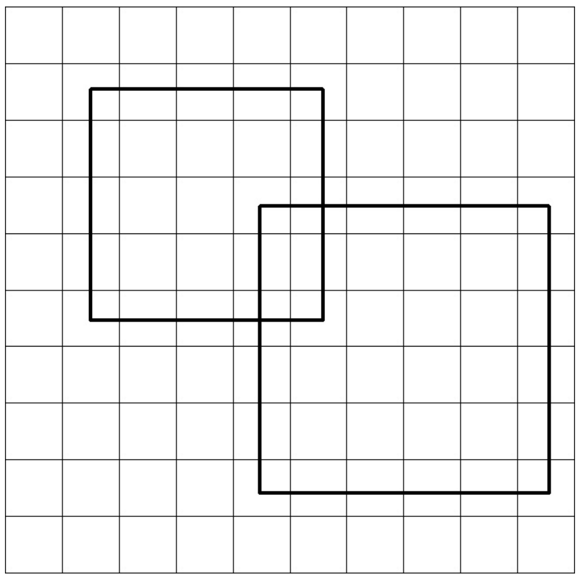
Řešení: Aby se neohrožovaly, je po jedné věži v každé řadě a v každém sloupci. Rozestavíme věže po řadách. Pro umístění věže v 1. řadě máme 8 možností, ve 2. řadě již jen 7, ve 3. řadě 6 možností, ... , v 7. řadě 2 možnosti a v 8. řadě již jen jedna možnost.

kterýkoli sloupec	neobsazený sloupec	neobsazený sloupec	neobsazený sloupec	neobsazený sloupec	neobsazený sloupec	neobsazený sloupec	neobsazený sloupec
8	7	6	5	4	3	2	1
(1. řada)	(2. řada)	(3. řada)	(4. řada)	(5. řada)	(6. řada)	(7. řada)	(8. řada)

Obr. 3.14:

Existuje tedy celkem $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$ možných rozestavení věží, která splňují požadovanou podmínku.

Příklad 3.6. Určete počet pravoúhelníků, jež je možné sestrojit ve čtvercové síti 10x10 polí, jestliže se jednotlivé body nacházejí ve středech čtverců. Dva takové pravoúhelníky jsou znázorněny na (obr. 3.15).

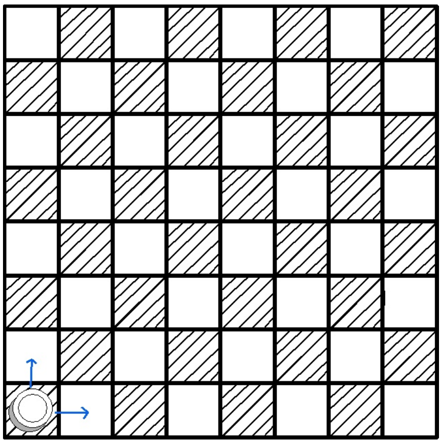


Obr. 3.15: Čtvercová síť 10x10 se dvěma pravoúdelníky

Řešení: Každý pravoúhelník je určen dvěma sloupci a dvěma řádky. Pro výběr dvou řádků máme $10 \cdot 9 = 90$ možností, pokud rozlišujeme pořadí, v jakém jsme vybírali. My však zde pořadí nerozlišujeme (u vybrané dvojice řádků nelze rozlišit, který řádek byl vybrán jako první, a který jako druhý), proto máme pro výběr dvou řádků $\frac{10 \cdot 9}{2}$ možností. Stejně je tomu u výběru dvou sloupců. Na každý výběr řádků připadá 45 výběrů sloupců. Celkem je možno vytvořit $\frac{10 \cdot 9}{2} \cdot \frac{10 \cdot 9}{2} = 2025$ pravoúhelníků.

Příklad 3.7. V levém dolním rohu šachovnice 8x8 je umístěna figurka, kterou lze jedním tahem přemístit buď o jedno pole vpravo, nebo o jedno pole vzhůru. Spočtěte, kolika různými způsoby lze tuto figurku přemístit do pravého horního rohu.

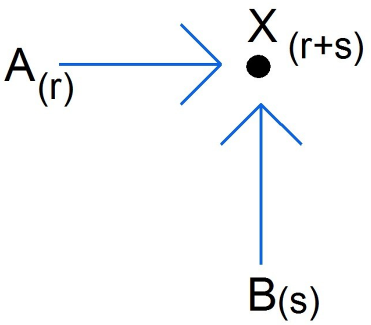
Řešení:



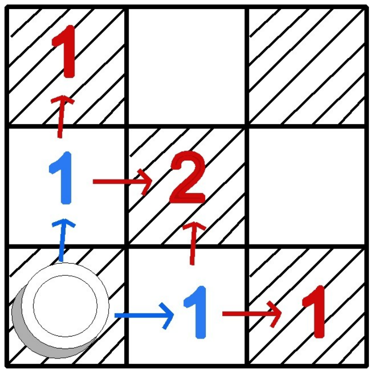
Obr. 3.16: Šachovnice 8x8 s figurkou

Do každého pole na šachovnici vepíšeme počet způsobů, kterými jsme mohli tohoto pole dosáhnout.

Do políček, která sousedí s figurkou na (obr. 3.16) se mohu dostat pouze jediným způsobem, vložím do nich hodnotu 1. Při dalším označování využívám logického závěru vycházejícího z (obr. 3.17). Jestliže se mohu do bodu A dostat (r) způsoby, do B (s) způsoby, pak X mohu dosáhnout (r+s) způsoby.



Obr. 3.17: Počet způsobů do X z A a B



Obr. 3.18: První dva kroky výpočtu

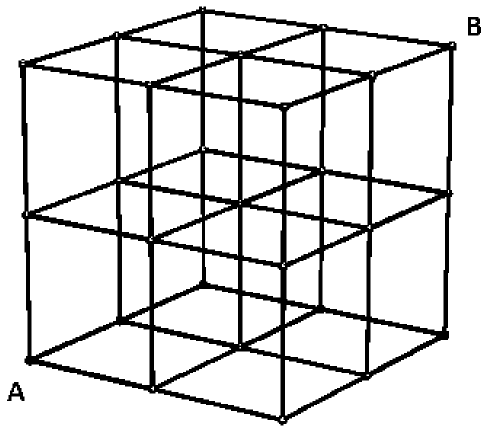
Jestliže tímto způsobem (obr. 3.18) doplníme všechna políčka šachovnice, bude vypadat jako na (obr. 3.19).

1	8	36	120	330	792	1716	3432
1	7	28	84	210	462	924	1716
1	6	21	56	126	252	462	792
1	5	15	35	70	126	210	330
1	4	10	20	35	56	84	120
1	3	6	10	15	21	28	36
1	2	3	4	5	6	7	8
	1	1	1	1	1	1	1

Obr. 3.19: Výsledná šachovnice

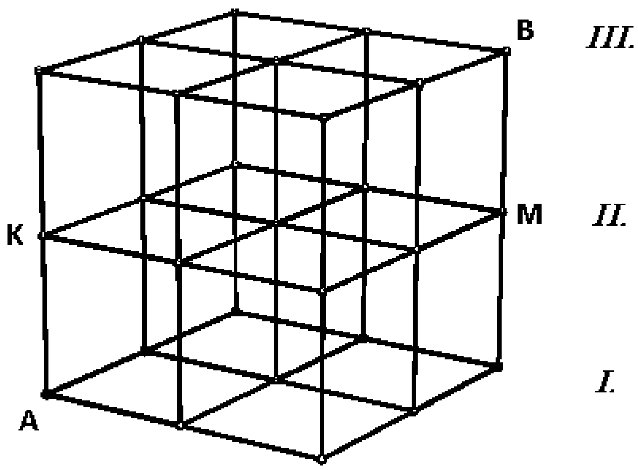
Je 3432 způsobů, jak se může figurka dostat do pravého horního rohu.

Příklad 3.8. Budova má tvar krychle. Rozvod elektřiny po této budově je znázorněn na (obr. 3.20). Kolika způsoby můžeme vést proud z bodu A do bodu B?

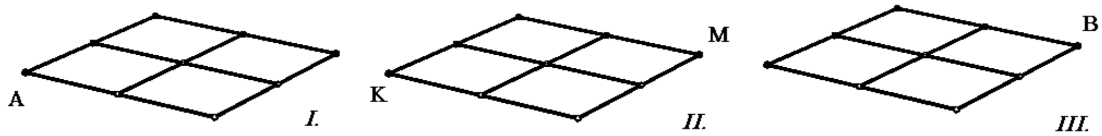


Obr. 3.20: Krychle

Řešení: Krychli si rozdělím na tři čtverce, znázorňující podstavu, střed a horní plochu. Všechny tyto části, jsou k viděná na (obr. 3.21) spolu se zadanou krychlí s pojmenovanými vrcholy.



Obr. 3.21

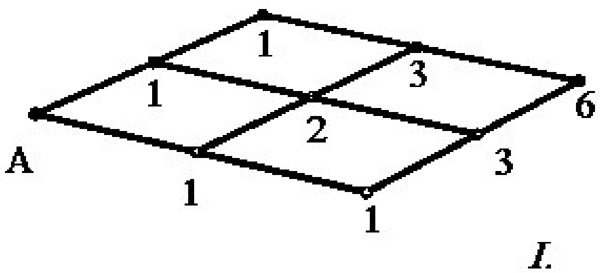


Obr. 3.22

Začneme od bodu A na ploše označené římskou jedničkou. Každý bod označíme číslem znázorňujícím počet způsobů, kterými se k němu můžeme dostat. Do dvou okolních bodů od A se můžeme dostat jen z A (postupujeme směrem od A), označíme je jedničkou.

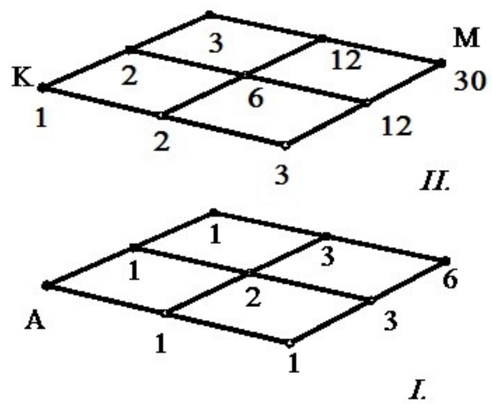
Úvaha: Jestliže se do X mohu dostat x způsoby a do Y y způsoby, pak do bodu Q, do kterého vedou cesty z X i Y se mohu dostat x+y způsoby.

Pomocí předešlé úvahy zjišťuji, že do bodu ve středu první plochy se mohu dostat $1+1=2$ způsoby. Takto označím celou podstavu krychle.



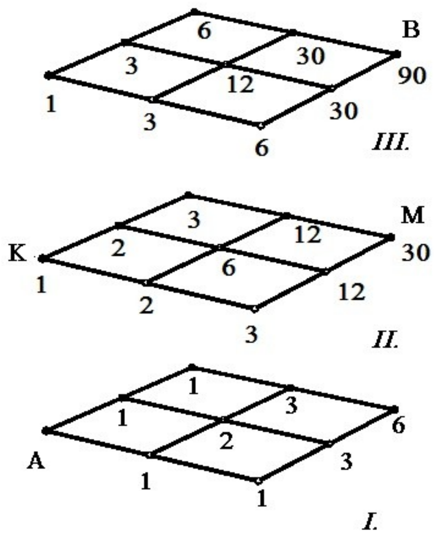
Obr. 3.23: Podstava krychle

Podobný postup uplatním i pro plochu II. jen s tím rozdílem, že nyní se nemohu omezovat jen na body této plochy. Je nutno započítat i ty možnosti, které vedly do bodu, který se nachází pod označovaným bodem na ploše I. (obr. 3.24). Kvůli přehlednosti nejsou na obrázku uvedeny propojovací čáry mezi vrstvami (takovou čarou by byla i spojnice AK).



Obr. 3.24: Plochy I. a II. Krychle (podstava a střední vrstva)

Postup pro horní plochu zůstane stejný. Číslo, ke kterému se tímto způsobem dopracujeme pro bod B, odpovídá počtu způsobů jimiž můžeme vést proud (obr. 3.25), tedy 90 způsobů.



Obr. 3.25: Počty způsobů z A do jednotlivých bodů krychle

Příklad 3.9. [1] Při přijímacích zkouškách na univerzitu je každému zájemci o studium přidělován krycí kód složený z pěti číslic. Zkoušky organizoval důkladný, leč pověrčivý docent, který se před přidělováním kódů rozhodl vyřadit ze všech možných kódů (tj. 00000 až 99999) ty, které v sobě obsahovaly číslo 13, tedy číslici 3 bezprostředně následující po číslici 1. Kolik kódů musel docent vyřadit?

Řešení: Na každém z pěti míst je možno dát čísla od nuly do devíti, tedy jednu z deseti cifer. Musíme si tedy uvědomit, že v tomto případě může být na začátku i nula, dokonce několik nul. Kdybychom chtěli například spočítat, v kolika pěticiferných číslech je obsaženo číslo 13, pak by bylo řešení jiné, protože po umístění nuly na začátek by se z onoho čísla stalo číslo čtyřciferné (např. 0125Kč = 125 Kč). V tomto příkladu se nemusíme obávat umístění nul na začátku zápisu čísla, jelikož je v zadání

1 Úloha převzata ze III. kola MO kategorie Z9, 55. ročník a upravena autorkou práce

uveden rozsah od 00000 do 99999.

Nejprve zjistíme, kolik kódů obsahuje číslo 13 jednou. Třináctka se může nacházet na čtyřech různých místech (obr. 3.26). Na každé volné místo můžeme umístit jedno z deseti cifer, je tedy možné sestavit $10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 = 1000$ čísel.

1)	1	3	__	__	__	$10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$
2)	__	1	3	__	__	$10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$
3)	__	__	1	3	__	$10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$
4)	__	__	__	1	3	$10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$

Obr. 3.26: Možná rozmístění pro třináctku

V těchto 4000 číslech jsou dvakrát započítány ty, které obsahují dvě čísla 13. Musíme ale zjistit, kolik takových kódů je.

a)	1	3	1	3	__
b)	__	1	3	1	3
c)	1	3	__	1	3

Obr. 3.27: Možné rozmístění pro dvě třináctky

Zde vidíme tři možné rozestavení dvou třináctek (obr 3.27), z každého tohoto typu můžeme vytvořit deset různých kódů, cekem tedy 30 kódů.

Celkový počet kódů je $4000 - 30 = 3970$. Pověrčivý docent vyřadil 3970 kódů z celkového počtu 10 000.

3.2 Úlohy k řešení

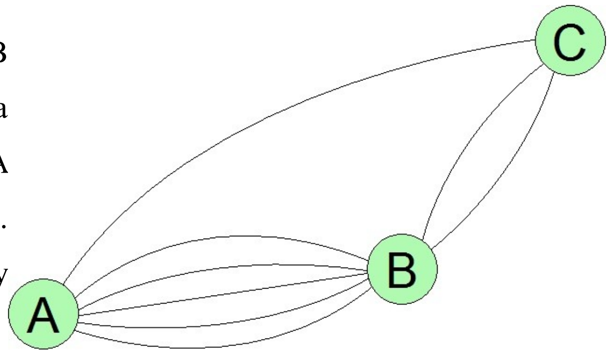
U 3.1. Na kotouči je 12 písmen a tajné slovo se skládá z 5 písmen. Kolik nezdařených pokusů může provést ten, kdo toto tajné slovo nezná?

U 3.2. Kolik existuje nejvýše trojciferných čísel?

U 3.3. Určete, kolik značek Morseovy abecedy lze utvořit sestavením teček a čárek do skupin o jednom až čtyřech prvcích.

U 3.4. Zvětší-li se počet prvků o 2, zvětší se počet permutací dvanáctkrát. Kolik je prvků?

U 3.5. Z místa A do místa B vede pět cest, z místa B do místa C vedou dvě cesty a z místa A do místa C vede jedna cesta. Určete, kolika různými způsoby lze vykonat cestu:



Obr. 3.28

a) z místa A do místa C přes místo B;

b) z místa A do místa C (jakkoli);

c) z místa A do místa C (jakkoli) a potom zpět do místa B (přímo).

U 3.6. Jsou dány cifry 1, 2, 3, 4, 5. Cifry nelze opakovat. Kolik je možno vytvořit z těchto cifer čísel, která jsou:

a) pětimístná, sudá;

b) pětimístná, končící dvojčíslím 21;

c) pětimístná, menší než 30 000;

d) trojmístná, lichá;

e) čtyřmístná, větší než 2000;

f) čtyřmístná, začínající cifrou 2;

g) čtyřmístná, sudá nebo končící cifrou 3;

h) dvojmístná nebo trojmístná.

U 3.7. Jsou dány cifry: 0, 1, 2, 3, 4. Splňte úkoly minulé úlohy (U 3.6) tak, že cifry se nesmí opakovat a číslo nemůže začínat nulou.

U 3.8. V plně obsazené lavici sedí 6 žáků a, b, c, d, e, f.

a) Kolika způsoby je lze přesadit?

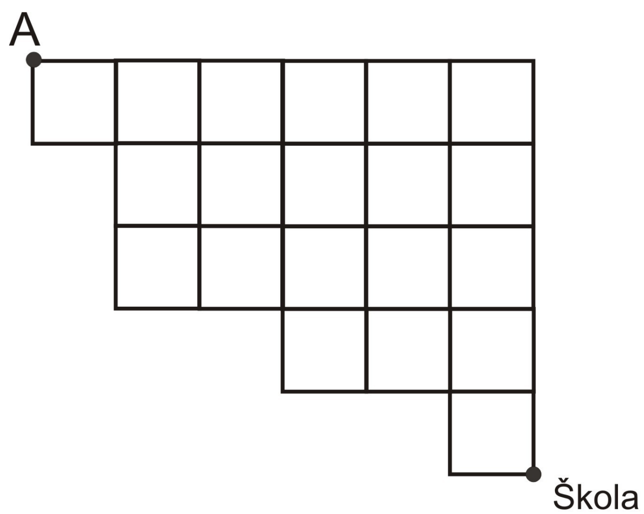
b) Kolika způsoby je lze přesadit tak, aby žáci a, b seděli vedle sebe?

c) Kolika způsoby je lze přesadit tak, aby žák c seděl na kraji?

d) Kolika způsoby je lze přesadit tak, aby žák c seděl na kraji a žáci a,b seděli vedle sebe?

U 3.9. Určete počet kvádrů, jejichž velikosti hran jsou přirozená čísla rovná nejvýše deseti. Kolik je v tomto počtu krychlí?

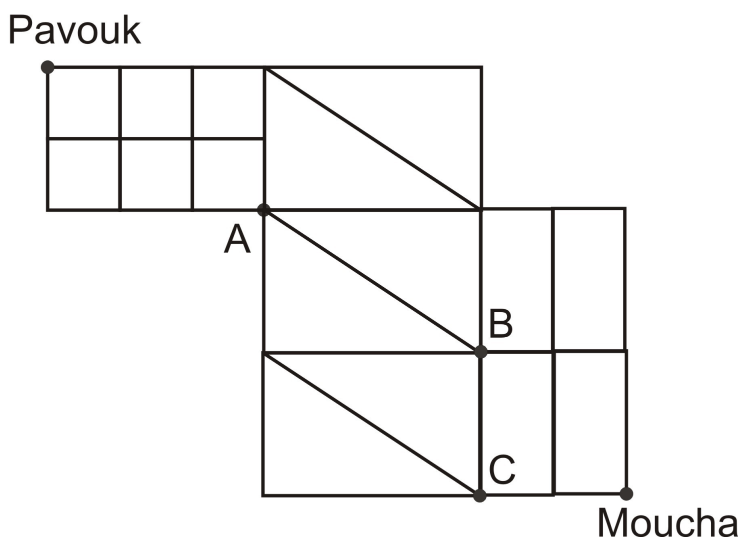
U 3.10. Anička žila na sídlišti, kde byly samé čtvercové zahrádky (obr. 3.29). Kolika různými cestami se mohla dostat do školy?



Obr. 3.29

U 3.11. Kolik cest vede z bodu V do A, jestliže bod V je vrcholem jehlanu a A je bodem podstavy tvaru šestiúhelníka? Žádná cesta neprochází dvakrát stejným bodem.

U 3.12. Pavouk Hubert má zálibu ve tvorbě nezvyklých pavučin. Do takovéto pavučiny (obr. 3.30) se chytila moucha. Kolik cest k mouše nejkratší délky má Hubert k dispozici, jestliže musí projít přes body A, B a C?



Obr. 3.30

4 Základní kombinatorické pojmy

Kombinatorika zkoumá skupiny (podmnožiny) prvků vybraných z jisté základní množiny. Touto základní skupinou je zde myšlena *n*-prvková množina $M=\{a_1, a_1, \ldots, a_n\}$

V této kapitole zkoumáme obecně, jaké druhy skupin prvků je možné z této množiny tvořit a jak se počty takových skupin dají zjistit. Nalezená pravidla pak usnadňují řešení kombinatorických úloh.

Podle toho, zda se prvky v jednotlivých skupinách mohou či nemohou opakovat, rozdělujeme skupiny prvků na skupiny s opakováním a skupiny bez opakování. Skupiny, kde se prvky nemohou opakovat, si lze představit tak, že prvky, které vybíráme ze základní skupiny do ní nevracíme zpět a nemůžeme je tedy použít při dalším výběru. Naopak skupiny, kde se prvky mohou opakovat, vznikají tak, že vybrané prvky vracíme do základní skupiny a v dalším výběru je můžeme znovu použít.

Rozlišuje tři základní způsoby výběru skupiny prvků bez opakování:

Variace

Variace *k*-té třídy z *n* prvků jsou uspořádané skupiny po k prvcích z daných n prvků.

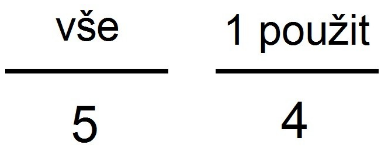
Příklad: Je dána množina M={1,2,3,4,5}. Z prvků této množiny máme vytvářet dvojice, přičemž záleží na pořadí a prvky se nemohou opakovat.

Řešení: Vytváříme tedy variace druhé třídy z pěti prvků. Vypíšeme všechny takové množiny:

$$
\begin{aligned}
V_2(5)=(1{,}2)\ &(1{,}3)\ (1{,}4)\ (1{,}5)\ (5{,}1)\ (4{,}1)\ (3{,}1)\ (2{,}1)\\
&(2{,}3)\ (2{,}4)\ (2{,}5)\ (5{,}2)\ (4{,}2)\ (3{,}2)\\
&\qquad\ \ (3{,}4)\ (3{,}5)\ (5{,}3)\ (4{,}3)\\
&\qquad\qquad\quad (4{,}5)\ (5{,}4)
\end{aligned}
$$

Počet všech možností je 20.

Kdybychom stejný příklad řešili pravidlem součinu a hledali dvouciferná čísla skládající se pouze z cifer 1, 2, 3, 4, 5 bez opakování, postupovali bychom takto:



Obr. 4.1

Všech takovýchto dvouciferných čísel by tedy bylo opět 20 ($5\cdot 4=20$).

Kdybychom hledali trojciferná čísla ze stejné množiny, pak $V_3(5)=5\cdot 4\cdot 3=60$. Při vzorném pozorování bychom zjistili, že variace *k*-té třídy z n prvků je rovna součinu k po sobě jdoucích hodnot s nejvyšší hodnotou n .

$$V_k(n)=\underbrace{n\bullet(n-1)\bullet(n-2)\bullet\ \ldots\ \bullet(n-k+1)}_{k}$$

$$
\begin{aligned}
V_k(n)&=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)=\\
&=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot\frac{(n-k)\cdot(n-k-1)\ldots 2\cdot 1}{(n-k)\cdot(n-k-1)\ldots 2\cdot 1}=\\
&=\frac{n!}{n-k!}
\end{aligned}
$$

$$V_k(n)=\frac{n!}{n-k!}$$

Permutace

Permutace je každá uspořádaná n-tice z n prvků. Jedná se tedy o variaci $V_n(n)$.

$$P(n)=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot2\cdot1=n!$$

Kombinace

Kombinace k-té třídy z n prvků jsou skupiny o k prvcích vybraných z n prvků. Jedná se vlastně o k-prvkové podmnožiny n-prvkové základní množiny. Vybíráme bez zřetele na uspořádání: tzn. , že v daných n-ticích nezáleží na pořadí prvků. Jsou to vlastně k-prvkové podmnožiny n-prvkové základní množiny. Značíme $C_k(n)$.

Příklad Najděte všechny kombinace druhé třídy z množiny M={1, 2, 3, 4, 5}

Řešení: Vytváříme kombinace druhé třídy z 5-ti prvků $C_2(5)$. (protože nezáleží na pořadí, nepovažujeme (1,2) a (2,1) za rozdílnou možnost, jak tomu bylo u variací).

$$\begin{aligned} C_2(5)=(1,2)\ (1,3)\ (1,4)\ (1,5) \\ (2,3)\ (2,4)\ (2,5) \\ (3,4)\ (3,5) \\ (4,5) \end{aligned}$$

Počet všech možností je 10.

Jestliže je k=2, pak $V_2(5)=20$ a $C_2(5)=10$ protože jestliže nezáleží na pořadí (a, b) i (b, a) jsou stejné prvky.

Jestliže je k=2, pak $V_3(5)=60$ a $C_2(5)=10$ protože jestliže nezáleží na pořadí (a, b, c), (b, a, c), (a, c, b), (c, b, a), (b, c, a) i (c, a, b) jsou stejné prvky. Jednu skupina je tedy ve variacích započítána hned šestrát pouze s rozdílným pořadím prvků. Počet *k*-tic lišících se pouze v pořadí prvků spočítat již dokážeme, jedná se totiž o permutaci k prvků.

Z toho vyplývá, že kombinace *k*-té třídy z n prvků je rovna podílu variace *k*-té třídy z n prvků a permutaci k prvků.

$$C_k(n)=\frac{V_k(n)}{P(k)}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}=\binom{n}{k}$$

Rozlišujeme tři základní způsoby výběru skupiny prvků s opakováním. V případě, že se cifry smí opakovat, je zvykem užívat základní zkratky opatřené apostrofem ($V'_k(n), P'(n), C'_k(n)$):

Variace s opakováním

Příklad: Kolik existuje trojciferných čísel, které lze zapsat užitím cifer 1, 2, 3, 4, jestliže se mohou dané cifry opakovat?

Řešení: Jedná se o uspořádanou trojici a cifry se mohou opakovat. Na první pozici v čísle se může vyskytovat libovolná zadaná číslice, jsou tedy čtyři možnosti. Vzhledem k tomu, že se cifry v zápise čísla mohou opakovat, pro druhou i třetí pozici v čísle zůstává počet možností stejný. Počet všech takových čísel je $V'_3(4)=4\cdot4\cdot4=4^3$

Pokud tuto úvahu zobecníme, dostaneme vzorec pro variace s opakováním:

$$V'_k(n)=n^k$$

Kombinace s opakováním

Chceme-li určit počet všech k-prvkových kombinací s opakováním z n prvků m_1, m_2, m_3, ... , m_n . Každou takovou kombinaci s opakováním si můžeme znázornit následujícím způsobem:

- postupně zleva doprava napíšeme tolik teček, kolikrát je v kombinaci s opakováním zastoupen prvek m_1 ;
- napíšeme oddělovací čárku / ;
- napíšeme tolik teček, kolikrát je v kombinaci s opakováním zastoupen prvek m_2 , a za nimi čárku. Takto pokračujeme dále, dokud nezobrazíme čárku následovanou tečkami odpovídajícími prvku m_n (za nimi už čárka není).

Např. Čtyřprvkové kombinace (m_1, m_1, m_2, m_3); (m_1, m_1, m_2, m_2) z množiny M={m_1, m_2, m_3} postupně zobrazíme : $\bullet\bullet \mid \bullet \mid \bullet \qquad \bullet\bullet \mid \mid \bullet\bullet$

Vždy tak dostaneme schéma obsahující k teček a $n-1$ čárek. Obráceně, každému řádku složenému z k teček a $n-1$ čárek odpovídá k-prvková kombinace s opakováním z n prvků. Hledaný počet kombinací s opakováním je tedy roven počtu všech uspořádání složených z $k+n-1$ znamének. Jde tedy vlastně o to určit, kolika způsoby lze na $k+n-1$ míst napsat k teček a $n-1$ čárek. Tento hledaný počet je roven počtu všech k-prvkových podmnožin (teček) ($k+n-1$)-prvkové množiny (znamének), tj. $\binom{k+n-1}{k}$.

$$C'_k(n)=\binom{k+n-1}{k}$$

Permutace s opakováním

Příklad: Kolik různých slov lze utvořit ze slova MISSISSIPPI změnou pořadí písmen?

Řešení: Jedno ze slov které bychom tímto způsobem mohli vytvořit je např. MSISPISPIIS. Jde vlastně o to určit, kolik existuje různých pořadí jednoho písmene **M**, čtyř písmen **I**, čtyř písmen **S** a dvou písmen **P**. Kdybychom mezi sebou rozlišovali písmena téhož druhu (např. každé písmeno **P** obarvili jinou barvou), bylo by celkem $(1+4+4+2)!=11!$ různých pořadí těchto jedenácti navzájem různých písmen.

V tomto případě ovšem jednotlivá písmena neobarvujeme a ani jiným způsobem nerozlišujeme. Pouhou záměnou písmen stejného druhu tedy získáme stejná slova (např. pokud v daném slově zaměníme písmena **P**, budeme mít stále stejné slovo). V každém uvažovaném slově lze mezi sebou zaměnit písmena **S** $4!$ způsoby, písmena **I** $4!$ způsoby, písmeno **M** $1!$ způsobem a písmena **P** $2!$ způsoby. Lze tedy provést $4!\cdot 4!\cdot 1!\cdot 2!$ záměn písmen téhož druhu mezi sebou. Tato hodnota udává počet takových pořadí jedenácti písmen, dávajících stejné slovo. Z daného slova lze tedy sestavit celkem $\frac{11!}{4!\cdot 4!\cdot 1!\cdot 2!}$ různých slov.

Jestliže se mezi *n* prvky vyskytuje: první prvek n_1 krát
druhý prvek n_2 krát
$\vdots$
k-tý prvek n_k krát, kde $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$,
mluvíme o permutacích s opakováním.

Počet permutací *n*-prvkové množiny je roven

$$P'(n_1, n_2, \ldots, n_k)=\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot \ldots \cdot n_k!}$$

5 Princip Inkluze-exkluze

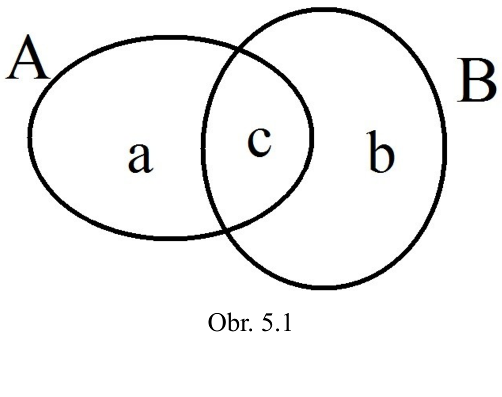
Tento princip je pro žáky složitý, z didaktických důvodů je lépe nezmiňovat ho ihned a odvodit až z úloh. Zopakujte princip součtu a ptejte se „ Co když disjunktní nebudou?“, jako je tomu v příkladě pod tímto textem. Po společném výpočtu několika úloh patrně budou žáci schopni podobný postup aplikovat i na rozsáhlejší úlohy. Dbejte na grafické znázornění úloh pomocí diagramu k lepší orientaciv zadání. Obzvláště na začátku je potřeba zdůraznit, že na rozdíl od principu součtu, nemusí být množiny disjunktní.

Na teoretické seznámení s tímto tématem je vhodná metoda odvozená od principu součtu. Samotné odvození může probíhat podobně, jako je uvedeno v poznámce.

Příklad Prodavačka v obchodě s obuvi spočítala, že za dnešní den si 23 zákazníků koupilo nové boty a 9 osob koupilo ponožky. Z těchto zákazníků si 4 koupili boty i ponožky. Kolik osob dnes nakoupilo v obchode s obuvi (na prodej jen boty nebo ponožky)?

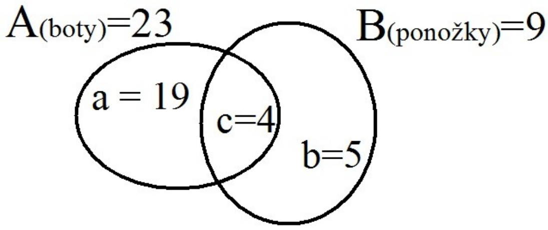
Řešení: K řešení budeme využívat znázornění zvané Vennovy diagramy tak, abychom vyjádřili požadované situace. Do polí diagramu vpisujeme čísla nebo proměnné udávající počet prvků příslušných podmnožin množiny.

Pro vyřešení úlohy použijeme diagram dvou množin (obr. 5.1).



Obr. 5.1

Jak vidíte v diagramu, označili jsme si jednotlivé části (podmnožiny) písmeny. Množina A znázoňuje osoby které koupily boty, A=a+c; množina B znázorňuje nákup ponožek B=b+c. Z toho plyne, že počet zákazníků kupujících boty i ponožky je zobrazen podmnožinou c . Některé hodnoty neznámých najdeme v zadání, doplníme je do diagramu.

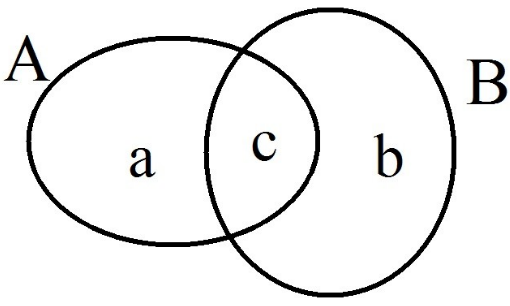


Obr. 5.2

Z (obr. 5.2) snadno vyčteme kolik zákazníků dnes v obchodě nakoupilo. Jedná se o sjednocení množin A, B $A\cup B=a+b+c=19+5+4=28$.

Všimněte si, že pouhým sečtením množin A, B jak je tomu u principu součtu by jste získali špatný výsledek. V tomto případě totiž nemáme disjunktní množiny, které jsou u principu součtu vyžadovány.

Princip inkluze-exkluze je zobecněním principu součtu na situace, kdy mají množiny neprázdný průnik. Již v předchozím příkladě jsme nevědomky použili princip inkluze-exkluze pro dvě množiny A, B. tedy $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$

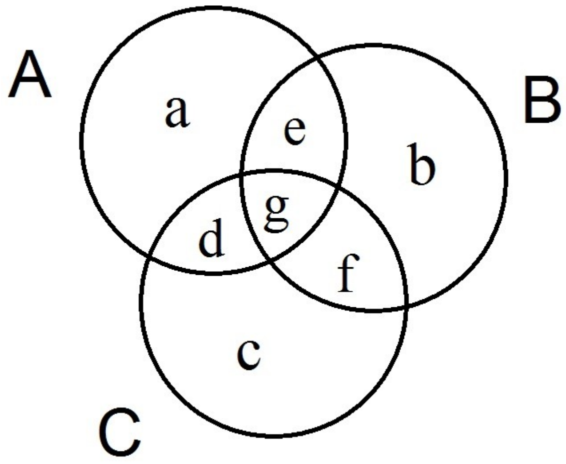


Obr. 5.3

(upraveno z [11], str. 55) Schéma nahoře zachycuje obecnou situaci, přičemž a, b, c jsou počty prvků v jednotlivých, již vzájemně disjunktních částí diagramu. Takto již můžeme aplikovat princip součtu a dostaneme:

$$A\cup B=a+b+c=(a+c)+(c+b)-c=|A|+|B|-|A\cap B|$$

Podobně bychom získali vzorec pro tři množiny z (obr. 5.4).



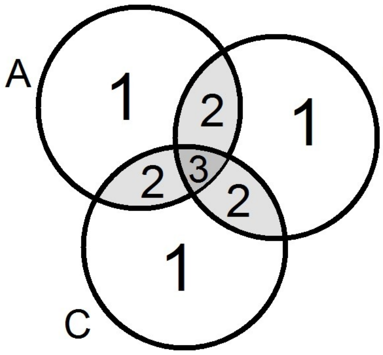
Obr. 5.4

Schéma opět zachycuje obecnou situaci, přičemž a, b, c, d, e, f, g jsou počty prvků v jednotlivých, vzájemně disjunktních částech diagramu. Můžeme aplikovat princip součtu:

$$|A\cup B\cup C|=a+b+c+d+e+f+g=(a+d+e+g)+(b+e+f+g)+(c+d+f+g)-$$
$$-(d+g)-(f+g)-(e+g)+g=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

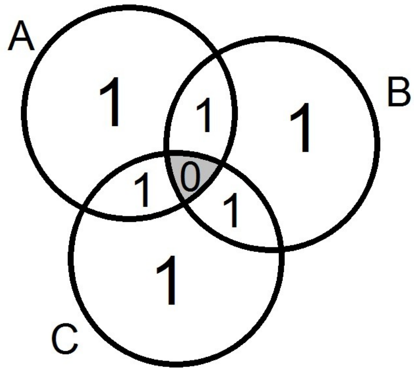
Poznámka: Další možností jak odvodit vzorec je graficky znázornit množiny, uplatnit princip součtu a sledovat kolikrát byly jednotlivé části přičteny. Našim cílem je, aby byla každá část přičtena právě jednou (označena jedničkou).

Ukážeme postup pro tři množiny, pro jiný počet by byl postup podobný:



Čísla uvnitř znázorňují, kolikrát byly jednotlivé části přičteny, jestliže jsme množiny A, B a C pouze sečetli. Prozatím máme vzorec $A \cup B \cup C = A + B + C$

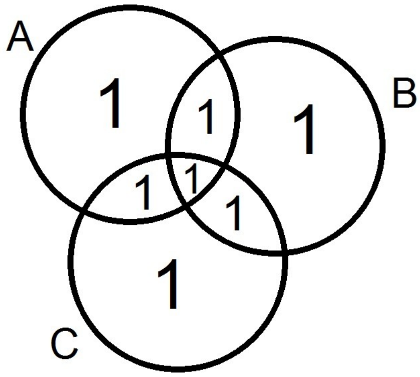
Každá čás by měla být přičtena jen jednou, proto odečteme všechny průniky dvou množin a dostaneme jiný obrázek:



I odečtení zaneseme do vzorce, jeho současná podoba je tato:

$A \cup B \cup C = A + B + C - A \cap B - A \cap C - B \cap C$

Stále není hotovo, odečítali jsme tolik, až jedna část, která je společná pro všechny množiny není vůbec zahrnuta. Musíme ji znovu přičíst.



Všude je jednička, našli jsme vzorec pro inkluzi-exkluzi pro tři množiny:

$$A \cup B \cup C = A + B + C - A \cap B - A \cap C - B \cap C + A \cap B \cap C$$

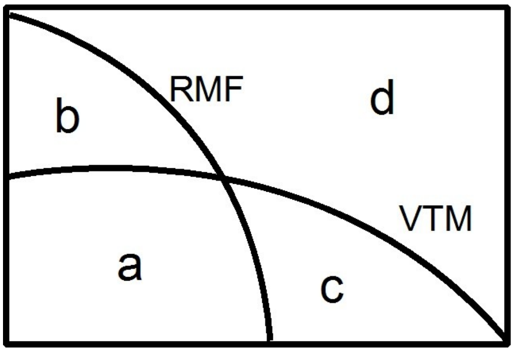
Pro čtyři a více množin by se dal vzorec odvodit podobným způsobem, zjednodušeně řečeno, vzorec sestavíme takto:

Sjednocení *n* množin dosáhneme tak, že nejprve sečteme všechny podmnožiny, od nich odečteme průnik každých dvou podmnožin, přičteme průniky tří podmnožin, odečteme průnik čtyř podmnožin..... Takto budeme pokračovat dokud se nedostaneme k průniku n podmnožin. Pokaždé když se změní počet množin jejichž průnik hledáme, změní se i znaménko (střídání plus a mínus).

5.1 Řešené příklady

Příklad 5.1. Z 35 žáků odebírá Rozhledy matematicko-fyzikální 8 žáků, časopis Věda a technika 10 žáků. 21 žáků neodebírá žádný z těchto dvou časopisů. Kolik z nich odebírá oba časopisy?

Řešení: Nakreslíme diagram, do kterého budeme zapisovat počty prvků které mají sledované vlastnosti (obr. 5.5). V tomto případě je onou vlastností jaký časopis či zda vůbec některý žáci odebírají.



Obr. 5.5: Vennův diagram pro dvě množiny

Množina odběratelů časopisu Rozhledy matematicko-fyzikální (RMF) se skládá z podmnožin a, b , odběratelé Vědy a techniky (VTM) z podmnožin a, c . Je zřejmé že podmnožina a jsou ti žáci, jež odebírají oba tyto časopisy a d naopak ti, co neodebírají žádný z nich. Na základě těchto informací jsme schopni sestavit několik rovnic vystihujících základní údaje ze zadání.

(1) $a+b=8$ odběratelé RMF

(2) $a+c=10$ odběratelé VTM

(3) $d=21$ neodebírají žádný z nich

(4) $a+b+c+d=35$ celkem dotazovaných žáků

Z rovnic (1) i (2) vyjádříme neznámé pomocí a.

$(1) \quad b = 8 - a$

$(2) \quad c = 10 - a$

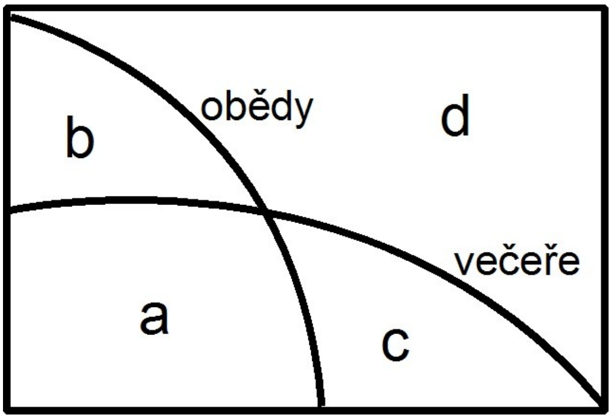
Do rovnice (4) dosadíme za proměnné b, c, d z ostatních rovnic.

$$a + (8 - a) + (10 - a) + 21 = 35;$$
$$-a + 39 = 35;$$
$$a = 4$$

Pouze čtyři žáci odebírají oba zmíněné časopisy.

Příklad 5.2. Ze 129 studentů jednoho ročníku univerzity chodí pravidelně do menzy na oběd nebo večeři 116 studentů, 62 studentů dochází na nejvýše jedno z těchto jídel. Přitom na obědy chodí o 47 studentů více než na večeři. Kolik studentů chodí na obědy i večeře, kolik na večeře, kolik jenom na obědy?

Řešení: Znovu sledujeme dvě společné vlastnosti, nakreslíme si diagram a vytvoříme rovnice popisující zadání.



$(1) \quad a + b + c = 116$

$(2) \quad b + d + c = 62$

$(3) \quad a + b = a + c + 47$

$(4) \quad a + b + c + d = 129$

Obr. 5.6

Častou chybou v tomto příkladě může být špatné sestavení rovnic, obzvláště rovnice (2). V zadání se uvádí, „nejvýše jedno z těchto jídel“, znamená to že dochází buď na jedno nebo na žádné jídlo. Odtud podoba rovnice $b + d + c = 62$.

Z rovnic (1), (2) a (3) vyjádříme vhodné neznáme tak, aby po dosazení do rovnice (4) zůstala jen jediná neznámá. Upravíme rovnici (3) a vyjádříme a.

$$(3)\quad a+b=a+c+47 \qquad b=47+c$$

$$(1)\quad a+(47+c)+c=116 \qquad a+2c=69 \qquad a=69-2c$$

$$(2)\quad (47+c)+d+c=62 \qquad d+2c=15 \qquad d=15-2c$$

Tyto hodnoty dosadíme do rovnice (4).

$$\begin{gathered} a+b+c+d=129 \\ (69-2c)+(47+c)+c+(15-2c)=129 \\ 131-2c=129 \\ 2c=2 \\ c=1 \end{gathered}$$

Zjistili jsme, že jediný student chodí pouze na večeře (c=1). Pokud hodnotu neznámé c vložíme do ostatních rovnic, získáme další požadované informace. Pouze na oběd chodí 48 studentů a na obě jídla dochází 67 studentů.

Příklad 5.3. Dílenský kvalitář kontroluje citlivost, přesnost a kvalitu vnější úpravy měřících přístrojů. Kontroloval sérii 1000 kusů a zjistil, že u 8 je snížena citlivost, u 6 není kvalitně provedena vnější úprava a 11 nesplňuje normu týkající se přesnosti přístroje. Žádný přístroj nevykazoval všechny závady společně. Celkem 98% kontrolovaných výrobků nemělo žádnou z těchto tří závad. Sníženou citlivost nebo nepřesnost měření vykazovalo 16 výrobků, 12 mělo sníženou citlivost nebo nemělo kvalitní vnější úpravu. Výrobky, které mají některou závadu, posílá kvalitář zpět k opravě.

- Kolik jich pošle pouze k opravě přesnosti měření?
- U kolika přístrojů stačí pouze zvýšit citlivost?
- Kolik jich pošle kvalitář pouze ke zkvalitnění vnější úpravy?
- Kolik výrobků musí poslat ke zkvalitnění vnější úpravy nebo k opravě přesnosti?

Řešení: Příklad vyřešíme užitím Vennova diagramu (obr. 5.7). Zvolme označení :

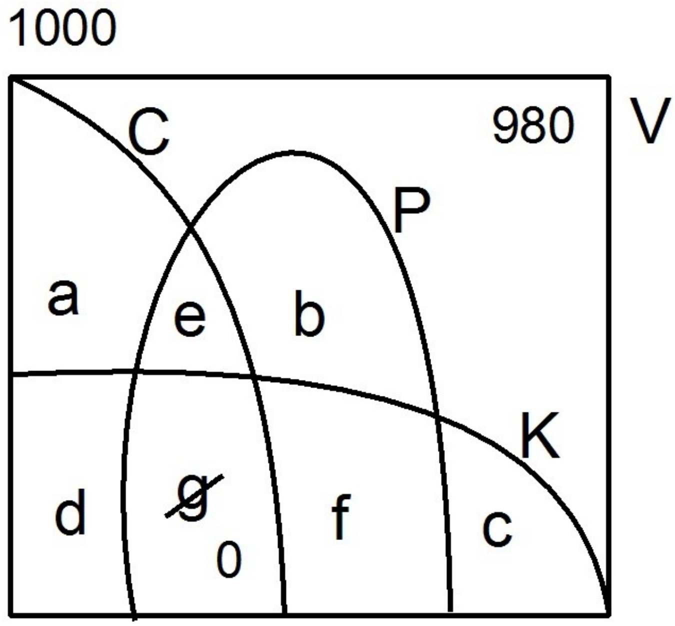
C .... množina všech výrobků, u nichž je snížena citlivost;

P .... množina všech výrobků, jež jsou nepřesné;

K .... množinu všech výrobků, jež nemají kvalitně provedenu vnější úpravu;

V .... množina výrobků jež jsou kontrolovány.

Již v zadání vyplývá $V=1000$ a $g=0$. Snadno také spočítáme pole diagramu vně oblasti C, P, K, ve kterém by měly být znázorněny měřící přístroje, jež nemají ani jednu z uvedených závad. Je jich 98% z 1000, t.j 980; toto číslo je již v diagramu (obr. 5.7) znázorněno spolu s dalšími známými hodnotami.



Obr. 5.7

Jednotlivé oblasti diagramu označíme písmeny a, b, c, d, e, f. Při pozorném čtení zadání sestavíme rovnice vyjadřující dané údaje za pomoci proměnných a, b, c, d, e, f.

(1) $C \cup P \cup K = a+b+c+d+e+f=20$

(2) $C = a+d+e=8$

(3) $K = c+d+f=6$

(4) $P = b+e+f=11$

(5) $C \cup P \quad = a + b \quad + d + e + f = 16$

(6) $C \cup K \quad = a \quad + c + d + e + f = 12$

Získali jsme soustavu šesti rovnic o 6 proměnných a, b, c, d, e, f. K zodpovězení otázek už tedy stačí pouze tuto soustavu rovnic vyřešit.

Rovnice (5) a (6) se podobají rovnici (1), chybí pouze jedna poměnná, jejíž hodnotu zjistíme odečtením této rovnice od (1). Proto:

$(1)-(5)$ dostáváme $c=4$;

$(1)-(6)$ dostáváme $b=8$.

Tyto hodnoty dosadíme za příslušné proměnné do rovnic (3) a (4), podoba těchto rovnic se změní následovně:(3) $d+f=2$; (4) $e+f=3$. V obou figuruje proměnná f , pomocí níž tedy vyjádříme další přítomnou proměnnou: (3) $d=2-f$ (4) $e=3-f$. Tyto dvě rovnice dosadím do (2) a po úpravách získám:

$$(2) \qquad \begin{gathered} a+(2-f)+(3-f)=8; \\ a-2\mathrm{f}+5=8; \\ a=3+2\mathrm{f} \end{gathered}$$

Nyní mám tři proměnné vyjádřené pomocí f a u dalších dvou znám jejich hodnotu. Všechny tyto údaje dosadím do rovnice (1) a následně vyjádřím všechny zbývající proměnné.

$$(1) \qquad \begin{gathered} a+b+c+d+e+f=20; \\ (3+2\mathrm{f})+8+4+(2-f)+(3-f)+f=20; \\ f=0. \end{gathered}$$

Po dosazení do vhodné rovnice dostávám hodnoty pro zbývající proměnné. Zkouška provedená dosazením do rovnice ukáže, že řešením soustavy rovnic je: a=3; b=8; c=4; d=2; e=3; f=0.

Odpověď bude znít takto:

Pouze k opravě přesnosti (b) pošle kvalitář	8 výrobků,
pouze k opravě citlivosti (a)	3 výrobky,
pouze ke zkvalitnění vnější úpravy (c)	4 výrobky,
k opravě přesnosti nebo zkvalitnění vnější úpravy	17 výrobků.

Příklad 5.4. Určete, kolik přirozených čísel v rozmezí 1 až 500 (včetně obou) není dělitelných ani 2, ani 3, ani 5, ani 7.

Řešení: U je množina všech přirozených čísel v rozmezí 1 až 500, a označíme U_2, U_3, U_5, U_7 její podmnožiny odpovídající násobkům 2, resp. 3, resp. 5, resp. 7. Podobně bude např. U_6 množina všech násobků 6 a zřejmě je $U_6 = U_2 \cap U_3$. Navíc je zřejmé, že pro každé přirozené číslo n platí $|U_n| = [\frac{500}{n}]$. Přímým užitím principu inkluze-exkluze rovnou vypočítáme:

$$|U_2 \cup U_3 \cup U_5 \cup U_7| = |U_2| + |U_3| + |U_5| + |U_7| - |U_6| - |U_{10}| - |U_{14}| - |U_{15}| -$$

$$- |U_{21}| - |U_{35}| + |U_{30}| + |U_{42}| + |U_{70}| + |U_{105}| - |U_{210}| = [\frac{500}{2}] + [\frac{500}{3}] + [\frac{500}{5}] +$$

$$+ [\frac{500}{7}] - [\frac{500}{6}] - [\frac{500}{10}] - [\frac{500}{14}] - [\frac{500}{15}] - [\frac{500}{21}] - [\frac{500}{35}] + [\frac{500}{30}] + [\frac{500}{42}] +$$

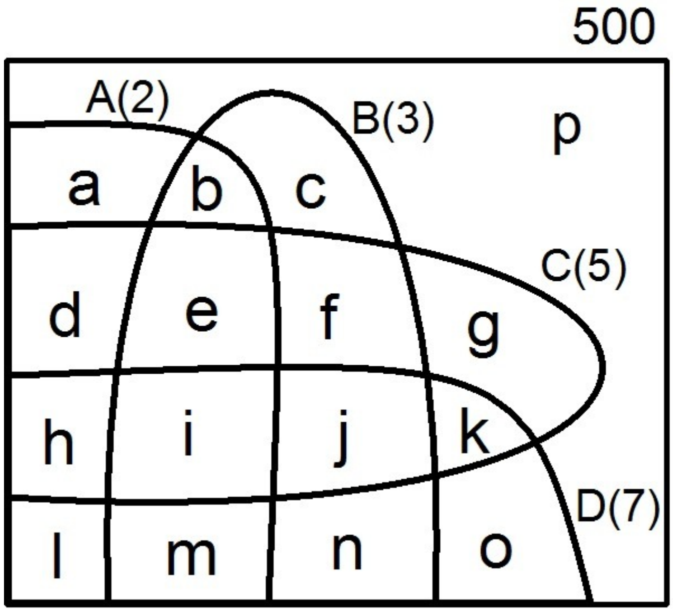
$$+ [\frac{500}{70}] + [\frac{500}{105}] - [\frac{500}{210}] = 250 + 166 + 100 + 71 - 83 - 50 - 35 - 33 - 23 - 14 +$$

$$+ 16 + 11 + 7 + 4 - 2 = 385$$

Tím je určen počet prvků množiny U, jež jsou dělitelné alespoň jedním z čísel 2, 3, 5, 7. To znamená, že prvků v U, které nejsou dělitelné ani jedním z nich, je $500 - 388 = 115$.

Jiné řešení: K řešení použijeme Vennův diagram pro čtyři množiny (obr. 5.8) a jednotlívé oblasti diagramu označíme neznámými a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p.

Využijeme znalosti počtu čísel $U_2, U_3, U_5, U_7, U_6, U_{10}, \ldots, U_{210}$ jež byly použity i v předchozím řešení a z diagramu sestavíme 16 rovnic. Po jejich vyřešení získáme hodnotu hledané proměnné p , tedy počet čísel, jež nejsou dělitelná ani 2, ani 3, ani 5 a ani 7.



Obr. 5.8: Vennův diagram pro 4 množiny

(1) $a+b+c+d+e+f+g+h+i+j+k+l+m+n+o+p=500$

(2) $a+b+d+e+h+i+l+m=U_2=250$

(3) $b+c+e+f+i+j+m+n=U_3=166$

(4) $d+e+f+g+h+i+j+k=U_5=100$

(5) $h+i+j+k+l+m+n+o=U_7=71$

(6) $b+e+i+m=U_6=83$

(7) $d+e+h+i=U_{10}=50$

(8) $e+f+i+j=U_{15}=33$

(9) $h+i+l+m=U_{14}=35$

(10) $h+i+j+k=U_{35}=14$

(11) $i+j+m+n=U_{21}=23$

(12) $e+i=U_{30}=16$

(13) $i+j=U_{105}=4$

(14) $h+i=U_{70}=7$

(15) $i+m=U_{42}=11$

(16) $i=U_{210}=2$

Pokud bychom dosazovali známé hodnoty proměnných postupně do rovnic (15), (14), ...(1), získáme všechny hodnoty proměnných $m=9, h=5, j=2, e=14, n=10, k=5, l=19, f=15, d=29, b=58, o=19, g=28, c=56, a=114$ a konečně $p=115$.

5.2 Úlohy k řešení

U 5.1. Na úpravě terénu pracovaly dva bagry – první 63 dní, druhý 48 dní. Přitom 23 dní pracovaly oba bagry společně. Kolik dní pracoval na úpravě alespoň jeden bagr?

U 5.2. Plnění bojového úkolu se zúčastnily dvě vojenské jednotky. Celá akce trvala 120 hodin. První jednotka byla nasazena 60 hodin, druhá 85 hodin. Kolik hodin plnily bojový úkol obě jednotky společně?

U 5.3. V potravinářské samoobsluze se objevily dva nové druhy sýrů. Ze 153 zákazníků, kteří prošli během jedné hodiny samoobsluhu, jich 65 neodolalo koupi prvního druhu; druhý druh zakoupilo 49 zákazníků. Těch, kteří zakoupili oba druhy, byla pouze jedna pětina počtu těch zákazníků, kteří zakoupili aspoň jeden druh. Kolik zákazníků koupilo pouze první druh, kolik pouze druhý druh; kolik oba; kolik jich odolalo oběma svodům.

U 5.4. Ve vědeckotechnickém ústavu pracuje 67 lidí, 47 z nich ovládá angličtnu, 35 němčinu a 23 zná oba z těchto jazyků. Kolik pracovníků ústavu neumí ani německy, ani anglicky?

U 5.5. V kanceláři Čedoku prodali během jednoho dne celkem 166 poukazů na zahraniční rekreaci. Leteckých zájezdů bylo prodáno dvakrát víc než zájezdů do Srbska. Zájezdů do Srbska, jež nejsou letecké, bylo prodáno o 40 více než leteckých zájezdů do Srbska. Zájezdů, jež nejsou ani letecké ani do Srbska, bylo prodáno o 30 méně než těch zájezdů do Srbska, jež nejsou letecké. Kolik bylo prodáno zájezdů do Srbska? Kolik bylo prodáno leteckých zájezdů jinam než do Srbska?

U 5.6. V jedné třídě je údajně 45 žáků, z toho 25 chlapců. 30 žáků této třídy má dobrý prospěch a z nich je 16 chlapců. Brýle nosí 28 žáků, z nich je 18 chlapců. 17 žáků s brýlemi má dobrý prospěch. 15 chlapců má dobrý prospěch a zároveň nosí brýle. Je to možné?

U 5.7. Velká tlumočnická agentura obdržela zakázku na zabezpečení překladatelských služeb pro mimořádně náročnou mezinárodní konferenci. Je třeba zajistit tlumočení v angličtině, němčině a francouštině. Z celkového počtu tlumočníků, kteří budou na akci nasazeni, jich ovládá 14 angličtinu, 10 němčinu a 7 francouštinu. Někteří z nich mohou ovšem bez problému zajistit dva jazyky, totiž: na angličtinu a němčinu lze nasadit celkem 8, na angličtinu a francouštinu celkem 5 z nich, na němčinu a francouzštinu celkem 4 z nich. O dvou z celé skupiny se ví, že mohou zajistit nejen dva z požadovaných jazyků, ale dokonce všechny tři. Kolik tlumočníků vlastně agentura na akci nasadí?

U 5.8. Kolik čísel, která nejsou dělitelná ani dvěma, ani pěti, je mezi přirozenými čísly od 1 do 2000?

6 Bijektivní metoda

Podstatu bijektivní metody jsme uvedli ve 2. kapitole. Jako motivaci a vysvětlení metody doporučuji příklad 6.1. Při řešení úlohy 6.2 nejprve poskytneme žákům prostor pro experimentování. (Necháme je nakreslit takové n-úhelníky aspoň pro $n=4,5,6$ zjišťovat tento počet, resp. vytvářet hypotézy. Další řešené příklady jsem se snažila seřadit podle obtížnosti, jak by měly následovat zasebou.

6.1 Řešené příklady

Příklad 6.1. Představte si, že jste na taneční zábavě a máte zjistit, od kterého pohlaví je v sále více osob. Jak byste to co nejsnadněji provedli?

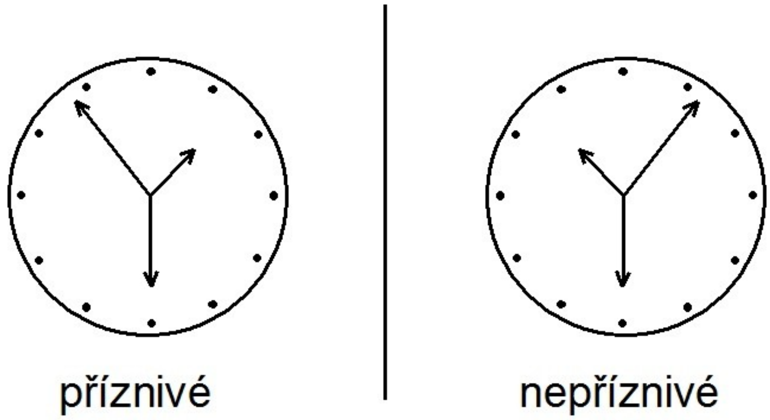
Řešení: Půjčíme si mikrofon a vyzveme všechny muže, aby si každý vybral právě jednu partnerku. Až budou páry vytvořeny, zeptáme se kdo přebývá. Budou-li to muži, je v sále více mužů v opačném případě přebývají ženy.

Příklad 6.2. Představte si konvexní n-úhelník, ve kterém žádné tři úhlopříčky nemají společný bod (tzn. každé dvě úhlopříčky mají nejvýše jeden průsečík). Určete počet p_n všech průsečíků úhlopříček takového n-úhelníka.

Řešení: Každému průsečíku dvou úhlopříček lze přiřadit právě jednu čtveřici vrcholů jako koncových bodů těch dvou úhlopříček, které se protínají. Naopak libovolně vybrané čtveřici vrcholů daného n-úhelníka $A_1 A_2 \ldots A_n$ přísluší právě jeden průsečík úhlopříček. Proto je počet p_n roven počtu všech čtyřprvkových podmnožin množiny $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$: $p_n = \binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$.

Příklad 6.3. Jeden astrolog rozlišuje příznivé a nepříznivé okamžiky podle polohy ručiček na svých hodinkách. Příznivé okamžiky nastávají, když se vteřinová ručička při svém pohybu předběhla minutovou, ale nedohonila ručičku hodinovou. Nepříznivé okamžiky nastávají v opačných situacích. Kterých okamžiků je za jeden den (časový interval od půlnoci do půlnoci) více, příznivých nebo nepříznivých?

Řešení: Na obr. 6.1 je na hodinách znázorněn příznivý a nepříznivý okamžik. Hodiny na obrázku jsou osově souměrné. Ke každým hodinám znázorňujícím příznivý moment je možno sestrojit hodiny znázorňující nepříznivý. Totéž platí i naopak. Obou okamžiků je tedy stejně.



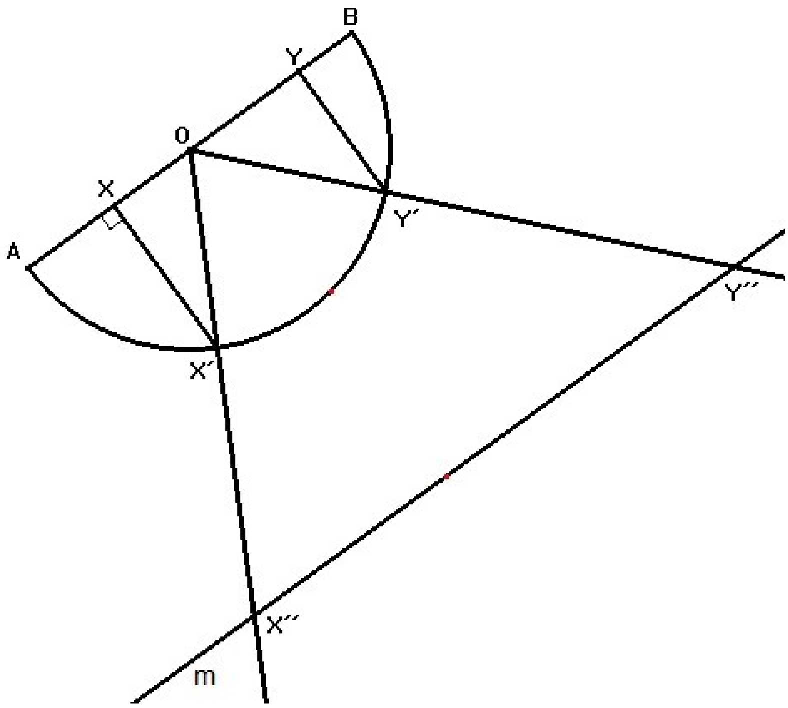
Obr. 6.1: Hodiny

Příklad 6.4. Dokažte, že přímka a vnitřek úsečky mají stejný počet bodů.

Řešení: Stačí najít vzájemně jednoznačné zobrazení úsečky AB na přímku m, kterou umístíme podle obr.6.2 rovnoběžně s AB. Takové zobrazení je dáno například touto konstrukcí:

1. $m, m \| AB, |m, AB| = libovolna$
2. $X, X \in AB$
3. $th, thaletova\, kružnice\, AB$
4. $X', X' \in th \cap k, k \perp AB$
5. $X'', X'' \in m \cap OX'$

Našli jsme tak bod X'' jež je vzorem libovolného bodu X .



Obr. 6.2

Příklad 6.5. Odůvodněte rovnost daných vztahů $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

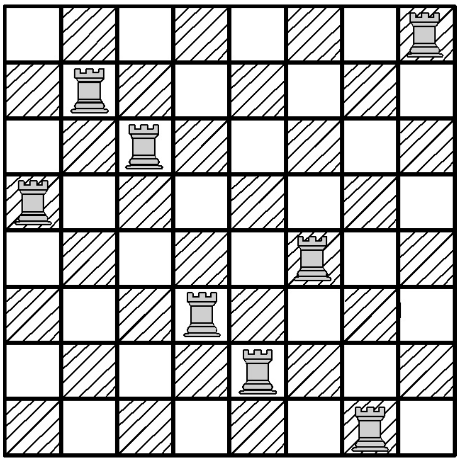
Řešení:

Tato vlastnost popisuje fakt, že pokud chceme vybrat *k*-prvkovou množinu z n prvků, zbyde vždy $n-k$ nevybraných prvků. Tvrdíme, že pokud bychom vybrali $n-k$ prvků ze stejné množiny, počty způsobů těchto výběrů by byly stejné. Tím, že vybereme k prvků z n vlastně rozdělíme množinu prvků na dvě hromádky (o k a $n-k$ prvcích), stejného výsledku bychom dosáhli při výběru $n-k$ prvků. Téhož efektu dosáhneme rozdílným přístupem. Tato vlastnost je patrná již z rozpisu kombinačních čísel: $\binom{n}{n-k}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot[n-(n-k)]!}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=\binom{n}{k}$.

Následující příklad jsme již řešili v kapitole 3 (příklad 3.6), ukážeme si, jak by se dal řešit pomocí bijekce převodem na permutace z čísel 1, 2, ..., 8.

Příklad 6.6. Kolika způsoby můžeme rozestavit na šachovnici o osmi sloupcích a osmi řadách 8 věží tak, aby se vzájemně neohrožovaly? ([6], str.34)

Řešení: Je zřejmé, že při takovém rozestavení stojí na šachovnici v každém sloupci i v každé řadě jediná věž. Uvažujme jednu z těchto poloh a označme a_1 číslo obsazeného pole v první řadě, a_2 v druhé řadě, $\ldots$, a_8 v osmé řadě. Pak je $a_1, a_2, \ldots, a_8$ určitou permutací[2] z čísel $1, 2, \ldots, 8$ (je jasné, že mezi čísly $a_1, a_2, \ldots, a_8$ nejsou žádná dvě sobě rovná; jinak by dvě věže stály v témž sloupci).



Obr. 6.3: Příklad rozestavení osmi věží tak, aby se navzájem neohrožovaly

Obráceně, jestliže $a_1, a_2, \ldots, a_8$ je nějaká permutace čísel $1, 2, \ldots, 8$, pak jí odpovídá jisté rozestavení věží, v němž se vzájemně neohrožují. Na (obr. 6.3) je znázorněna poloha věží odpovídající permutaci 8 2 3 1 6 4 5 7. To však znamená, že počet hledaných poloh věží je roven počtu permutací z čísel $1, 2, \ldots, 8$ t.j.

$$8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40\ 320$$

Existuje tedy celkem 40 320 možných rozestavení věží, která splňují požadovanou podmínku.

2 Permutace je uspořádaná n-tice prvků

Příklad 6.7. Sekretářka měla za úkol nakoupit pro podnik kávu za 200 Kč. V samoobsluze měli 3 druhy kávy (označme je **A**, **B**, **C**) v balíčcích po 100g. Každý balíček stál 50 Kč. Kolik různých možností nákupu čtyř balíčků existuje?

Řešení: Nejprve si vypíšeme do sloupce všechny možnosti. (Při práci s žáky jim poskytneme prostor pro samostatnou práci, nebo možnosti vypisujeme společně s nimi. Snažíme se přitom, aby žáci sami objevili vhodnou a přehlednou strategii pro zápis všech možností.)

Zjistili jsme, že možností je celkem 15. Jak ale najít obecné pravidlo pro určení počtu nákupů *k* balíčků, jsou-li balíčky *n* druhů? Abychom takové pravidlo zjistili, zkusíme nejprve původní úlohu vyřešit jinak. Každý nákup můžeme jednoznačně popsat zápisem uspořádané šestice ze čtyř hvězdiček a dvou čárek do řady podle těchto pravidel:

1. Za každý balíček vybraný do nákupu napíšeme hvězdičku.
2. Na první místa děláme hvězdičky, které představují balíčky druhu **A**. Když je všechny takto vypíšeme, uděláme čárku a za ní píšeme hvězdičky, které představují balíčky druhu **B**. Až je vyčerpáme, uděláme čárku a za ní píšeme hvězdičky, které představují balíčky druhu **C**.

AAAA	**** | |
AAAB	*** | * |
AAAC	*** | | *
AABB	** | ** |
AABC	** | * | *
AACC	** | | **
ABBB	* | *** |
ABBC	* | ** | *
ABCC	* | * | **
ACCC	* | | ***
BBBB	| **** |

BBBC	| *** | *
BBCC	| ** | **
BCCC	| * | ***
CCCC	| | ****

Tab. 6.1

Je zřejmé, že každému nákupu náleží právě jedna taková skupina teček a čárek a naopak každé uvedeným způsobem vytvořené skupině teček a čárek je přiřazen právě jeden nákup. Hledaný počet nákupů je proto roven počtu uspořádaných šestic ze čtyř teček a dvou čárek. Kdybychom všechny prvky v šestici navzájem rozlišovali, měli bychom pro obsazení prvního místa šest možností, pro obsazení druhého pět, ... , pro obsazení páteho místa dvě možnosti a na šesté místo by zbyl poslední prvek (což představuje jedinou možnost). Bylo by to $m=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$ možností.

Ty dvě čárky jako prvky však nerozlišujeme. Při stanovení počtu *m* jsme je však rozlišovali, mohli jsme je mít označené například jako prvky *a*, *b*. Dvě uspořádané dvojice [*a, b*] a [*b, a*] představují jedinou uspořádanou dvojici [|, |] nerozlišitelných prvků – čárek. Proto se zavedením podmínky, že dva z prvků v šestici přestaveme rozlišovat, zredukuje počet *m* na polovinu. My však v šesticích nerozlišujeme ani hvězdičky, které jsou celkem čtyři. To znamená, že číslo *m* je nutno ještě vydělit počtem všech uspořádaných čtveřic z různých prvků, tedy číslem $4\cdot3\cdot2\cdot1$. Proto je celkový počet nákupů roven číslu

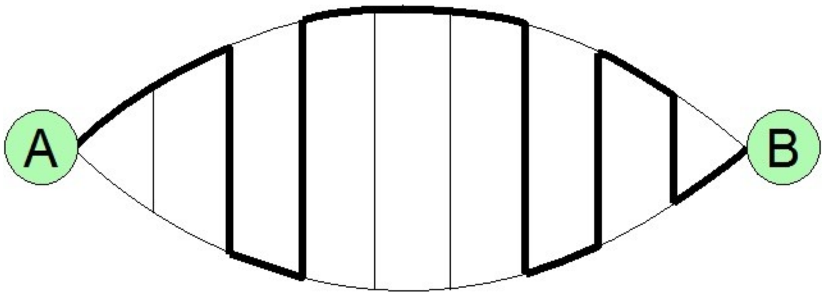
$$p=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot(4\cdot3\cdot2\cdot1)}=15.$$

Nyní bychom mohli úvahu zobecnit pro *k* balíčků jsou-li *n* druhů. Vybíráme tedy *k* balíčků, jež mohou být *n* druhů (použili bychom $n-1$ oddělovačů |) u nichž nezáleží na pořadí (nezáleží jestli nejprve koupíme balíčky druhu **A** a poté **B** nebo naopak, podstatné je, že budeme mít např. 2 balíčky druhu **A** a jeden **B**). Druhy balíčků se mohou opakovat. Jedná se tedy o kombinace s opakováním (viz. Kapitola 4, str. 36).

Hledaný počet tedy zjistíme dosazením do vzorce $\binom{n+k-1}{k}=\frac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!}$.

6.2 Úlohy k řešení

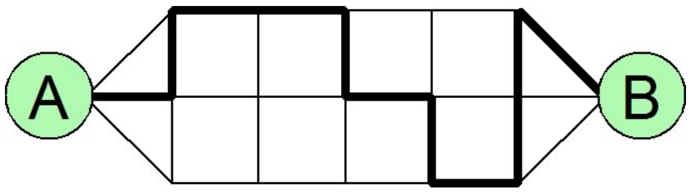
U 6.1. Města A, B jsou spojena dvěma hlavními silnicemi, které jsou navzájem propojeny osmi vedlejšími (obr. 6.4). Určete, kolika způsoby lze projet z A do B, jestliže se do žádného úseku nevracíme. (Na obr. 6.4 je jedna z možných cest vyznačena silnou čárou).



Obr. 6.4: Jedna z cest z A do B

U 6.2. V cukrárně prodávají čtyři druhy zákusků, špičky, větrníky, věnečky a kremrole. Kolika způsoby lze nakoupit 8 zákusků? Řešte bez použití vzorců.

U 6.3. Určete, kolika způsoby se lze dostat z A do B, cestujeme-li po cestách zobrazené sítě a nikdy se nevracíme směrem k místu A. Jedna z možných cest je zobrazena (obr. 6.5).



Obr. 6.5

U 6.4. Kolik existuje trojúhelníků, z nichž žádné dva nejsou shodné a každá strana má některou z délek 6, 7, 8, 9, 10 cm?

U 6.5. Kolik existuje různých kvádrů, pro něž platí: Délka každé hrany je přirozené číslo z intervalu <2,15>? Řešte za použití vzorců i bez nich.

U 6.6. Kolik různých částek lze zaplatit třemi mincemi, pokud máme k dispozici dostatek mincí v hodnotě 1Kč, 2Kč a 5Kč? Řešte za použití vzorců i bez nich.

U 6.7. Kolika způsoby je možné rozdělit 9 kuliček mezi 4 chlapce? Kuličky jsou všechny stejné, nerozlišujeme je.

7 Metoda dvojího výpočtu

Spočívá v tom, že dvěma různými způsoby vyřešíme tentýž problém, přičemž dojdeme ke zdánlivě různým výsledkům. Porovnáním obou výsledků objevíme nový poznatek.

7.1 Řešené příklady

Příklad 7.1. Určete součet $S_n = 1+3+9+\ldots+3^n$.

Řešení: Vyjádříme $S_{n+1} = 1+3+9+\ldots+3^n+3^{n+1}$ dvěma způsoby:

1.
$$S_{n+1} = (1+3+9+\ldots+3^n)+3^{n+1}$$
$$S_{n+1} = S_n + 3^{n+1}$$

2.
$$S_{n+1} = 1+3\cdot(1+3+\ldots+3^n)$$
$$S_{n+1} = 1+3\cdot S_n$$

Porovnáním obou výpočtů máme $1+3\cdot S_n = S_n+3^{n+1}$ a odtud $S_n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$.

Příklad 7.2. V prostoru je dáno 15 bodů, kdy žádné tři body neleží na jedné přímce. Právě šest z nich leží na téže rovině a ze zbývajících 9-ti bodů žádné 4 neleží v rovině. Kolik rovin je těmito body určeno?

Řešení: Počet rovin označíme p a rovinu ze zadání, ve které leží šest bodů q . K určení roviny jsou zapotřebí tři body. Roviny, které hledáme, jsou čtyř druhů. Ty, které jsou určeny žádným, jedním či dvěma body tvořících rovinu q . Posledním druhem je jediná rovina pouze z bodů roviny q , tedy sama rovina q .

1. $$p = \binom{9}{3}+\binom{9}{2}\cdot\binom{6}{1}+\binom{9}{1}\cdot\binom{6}{2}+1$$

Rovina je tedy tvořena třemi body, proto musíme vybrat 3 body z 15 a nezáleží nám na pořadí výběru. Takových rovin je $\binom{15}{3}$. Šest bodů leží v jedné rovině, je tedy $\binom{6}{3}$ rovin, které splývají v jednu.

2. $p = \binom{15}{3} - \binom{6}{3} + 1$

Porovnáním $\binom{9}{3} + \binom{9}{2} \cdot \binom{6}{1} + \binom{9}{1} \cdot \binom{6}{2} + 1 = \binom{15}{3} - \binom{6}{3} + 1$ dostáváme

$$\binom{9}{3} + \binom{9}{2} \cdot \binom{6}{1} + \binom{9}{1} \cdot \binom{6}{2} + \binom{6}{3} = \binom{15}{3}$$

7.2 Úlohy k řešení

Vypočtěte dvěma způsoby a vztahy, které vyšly před vyčíslením, porovnejte:

U 7.1. V kolika bodech se protne 12 různých přímek, z nichž právě 5 je navzájem rovnoběžných a žádné tři neprocházejí jediným bodem?

U 7.2. Jaký největší možný počet rovin může být určen 10 body, jestliže

a) právě pět leží v téže rovině;

b) právě tři body leží na přímce?

U 7.3. Jaký největší možný počet čtyřstěnů má vrcholy v deseti daných bodech, jestliže:

a) právě pět leží v téže rovině;

b) právě tři body leží na přímce?

U 7.4. Uvnitř rovnostranného trojúhelníka ABC je zvolen bod M. Dokažte, že součet vzdáleností bodu M od stran trojúhelníka je roven výšce trojúhelníka.

U 7.5. Uvnitř základny AB rovnoramenného trojúhelníka ABC je zvolen bod M. Ukažte, že součet vzdáleností bodu M od stran AC a BC je konstantní. Čemu je roven?

8 Dirichletův princip (Přihrádkový princip)

Podobně jako u předchozích principů, vhodnější strategií bude nejprve vypočítat několik snažších příkladů a poté na základě společných vlastností těchto příkladů odvodit samotný princip.

První příklady bych volila s malým počtem „přihrádek“ , čímž i slabším žákům umožníme vyřešení příkladu (třeba i tak, že si to namalují). K tomuto účelu je vhodný příklad 8.1. Příklady 8.2 a 8.3 , slouží především jako motivace pro žáky, jak je vidět, i s jednoduchým pravidlem jdou dělat zajímavé věci. Po dokončení těchto úkolů by si žáci měli tento princip zkusit zformulovat, a ikdyž se jim to nemusí zdařit, pouhé zamyšlení nad zobecněním může být přínosné.

8.1 Řešené příklady

Příklad 8.1. Kolik minimálně musíme mít kuliček, abychom měli jistotu, že při náhodném vkládání do čtyř přihrádek, budou v jedné z nich právě dvě kuličky?

Řešení: Abychom měli naprostou jistotu, uvažujeme nejhorší možnost, že musíme zaplnit všechny přihrádky než do některé vložíme druhou kuličku. Je zapotřebí o kuličku více, než je přihrádek, tedy 5.

Příklad 8.2. Dokažte, že na škole s 412 – ti studenty studují dva lidé narozeni ve stejný den.

Řešení: Pokud tedy budeme za přihrádky považovat jednotlivé dny roku, kterých je 365, můžeme ke každému z těchto dnů připsat jméno studenta narozeného v tomto dnu. Nezáleží jakým způsobem budou jména při procházení seřazena (podle abecedy, bydliště, roku narození atd.). Když budeme mít štěstí, najdeme ony dvě osoby třeba hned u dvacátého studenta. I když uvažujeme nejhorší možný scénář, tedy že se nám stále nedaří najít druhou osobu, která by měla stejný den narození jako student, kterého již máme k některému dni přiřazeného, může tento stav trvat jen do určité doby. Jakmile bychom přiřadili 365. studenta, měli bychom zaplněny všechny dny, ve kterých se mohli studenti narodit. Je tedy naprosto jisté, že nejpozději 366. student bude mít stejný den narození jako jiný student.

Příklad 8.3. Kolikrát je třeba hodit třemi kostkami aby bylo zaručeno, že aspoň čtyřikrát padne tentýž součet?

Řešení: V tomto případě jsou přihrádkami možné součty hodnot na třech kostkách. Nevím však, kolik těchto přihrádek máme k dispozici. To můžeme zjistit vypsáním různých hodnot na kostkách a sečtením jejich hodnot. Mnohem rychlejší však bude, jestliže si zjistíme nejnižší a nejvyšší možný součet. Je zřejmé, že na kostkách může padnout takový součet hodnot, který se nachází kdekoli uvnitř tohoto rozmezí.

Nejmenší součet hodnot na třech kostkách je 3 – jestliže na všech padne jednička. Naopak nejvyšší nastane když na všech padnou šestky, proto hodnota 18. Celkem tedy může nastat 16 různých součtů.

Opět uvažujme nejhorší scénář, že nepadne součet znovu dokud nepadnou i všechny ostatní. Při $3 \cdot 16 = 48$ -ti hodech tedy padly všechny součty právě třikrát. Při dalším hodu máme jistotu, že stejný součet padl už po čtvrté. Je zapotřebí 49 hodů.

Příklad 8.4. Dokažte, že v každém trojúhelníku má aspoň jeden úhel velikost

a) menší než 60°,

b) větší nebo rovnu 60°.

Řešení: Důkaz provedeme sporem:

a) Uvažujeme případ, kdy žádný z úhlů není menší než 60°.Velikosti jednotlivých úhlů můžeme vyjádřit jako 60°+α, 60°+β, 60°+γ. Tyto úhly sečteme.

$$(60° + \alpha) + (60° + \beta) + (60° + \gamma) = 180° + (\alpha + \beta + \gamma)$$

Součet úhlů v trojúhelníku musí být 180°. Z předchozí rovnice je patrno, že pokud všechny úhly přesahují 60°, nejedná se o trojúhelník. Aby šlo o trojúhelník, musí být alespoň jeden úhel menší než 60°.

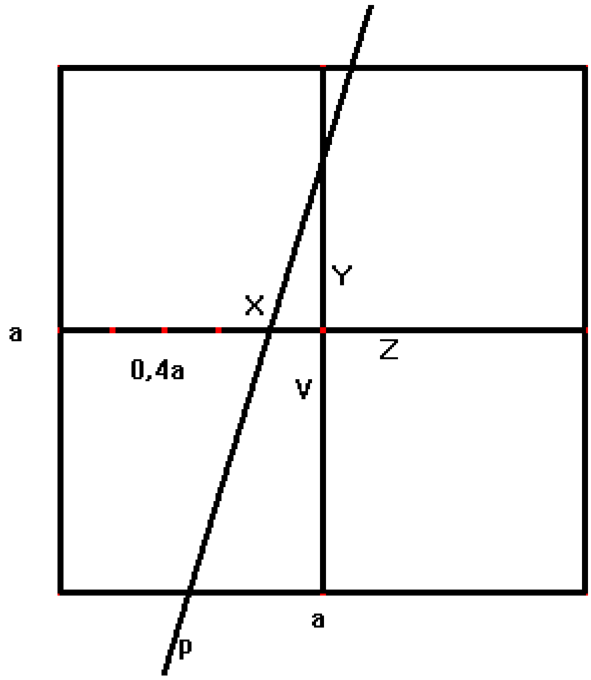
b) Vyjádříme všechny úhly objektu jako 60°-α, 60°-β, 60°-γ. Součet těchto úhlů

$$(60° - \alpha) + (60° - \beta) + (60° - \gamma) = 180° - (\alpha + \beta + \gamma)$$

Součet velikostí není 180°, nejedná se o trojúhelník. Aby se jednalo o trojúhelník, musí být alespoň jeden úhel větší než 60°.

Příklad 8.5. Je daný čtverec a 9 přímek. Každá z těchto přímek dělí čtverec na dva čtyřúhelníky, jejichž poměr obsahů je 2:3. Dokažte že aespoň 3 z těchto devíti přímek prochází jedním bodem.

Řešení (dle [13])**:** Uvedené čtyřúhelníky jsou zřejmě lichoběžníky, jejichž střední příčka má délku $\frac{2}{5}a$, kde a je délka strany čtverce (obr. 8.1). Střední příčka tedy prochází některým z bodů X, Y, Z, V, které leží na středních příčkách čtverce a dělí příčku v poměru 2:3 (resp. 3:2). Protože přímek je 9, tak aspoň 3 prochází některým z bodů X, Y, Z, V. Tvrzení je dokázáno.



Obr. 8.1

Příklad 8.6. Ve čtvercové síti 14 x 14 je v každém čtverci sítě zapsáno jedno z čísel $1, 2, .., 2000$. Dokažte, že existují dva pravoúhelníky P a Q, jejichž vrcholy se nachází ve středech čtvercových políček sítě takové, že strany pravoúhelníků jsou rovnoběžné s přímkami sítě a součet čísel ve vrcholech pravoúhelníka P je stejný jako součet čísel ve vrcholech pravoúhelníku Q.

Řešení: Pro vytvoření pravoúhelníka je potřeba dvou sloupců a dvou řádků. Kolik jich je možno vytvořit zjistíme za použití principu součinu (viz. Příklad 3.6). V této síti je celkem možno vytvořit $\frac{14 \cdot 13}{2} \cdot \frac{14 \cdot 13}{2} = 91^2 = 8\ 281$ čtyřúhelníků. Při sečtení hodnot v jednotlivých vrcholech můžeme dostat součty $4, 5, 6, \ldots, 7\ 999, 8\ 000$. Počet všech součtů je 7997, což je méně než možných útvarů. Máme tedy jistotu že nejpozději 7998. čtyřúhelník bude mít součet hodnot ve vrcholech totožný s již nakresleným útvarem.

Příklad 8.7. V krychli s hranou 15 cm je zvoleno 2198 bodů. Dokažte, že se mezi nimi najdou dva body, jejichž vzdálenost je menší než 2cm.

Řešení: Rozřežeme kostku na $13^3 = 2197$ stejných kostiček. Potom aspoň v jedné kostce se nacházejí nejméně dva body (kostiček je méně než bodů). Všechny naše malé kostky mají délku hrany $\frac{15}{13}$, tedy vzdálenost jejích libovolných dvou bodů je nejvýše $\frac{15}{13} \cdot \sqrt{3}\,cm$ (délka tělesové úhlopříčky), což je méně než 2 cm. Tvrzení je tedy dokázáno.

8.2 Úlohy k řešení

U 8.1. Je 500 beden s jablky, v každé z nich je nejvýš 240 jablek. Dokažte, že aspoň tři bedny mají stejný počet jablek.

U 8.2. Skot má jedenáct kapes a 43 jednodolarových bankovek. Může tyto bankovky rozmístit do kapes tak, aby v každých dvou kapsách měl různé obnosy?

U 8.3. Antropologové prokázali, že každý člověk má na hlavě méně než 500 000 vlasů. (Lze to zjistit stanovením maximální hustoty a největší možné plochy porostlé vlasy na hlavě.) Mexiko City má více než 18 milionů obyvatel. Dokažte, že v Mexiko City existuje aspoň 37 obyvatel se stejným počtem vlasů.

U 8.4. Sešlo se 50 lidí, z nichž někteří se znají a jiní ne. Předpokládáme, že pokud se dva znají, tak se znají navzájem, tj. Pokud A zná B, pak B zná A. Dokažte, že mezi těmito lidmi existují dva, kteří znají stejný počet lidí z uvedené skupiny.

U 8.5. Z každých dvanácti různých dvojciferných přirozených čísel lze vybrat dvě čísla, jejichž rozdíl je dvojciferné číslo zapsané stejnými ciframi. Dokažte.

9 Metoda zvoleného prvku

Metoda rozlišovaného prvku rozděluje množinu na podmnožiny na základě přítomnosti některého určujícího prvku. Tato metoda vede k důkazu některých tvrzení.

Příklad Dokažte vlastnost kombinačního čísla $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$.

Řešení: Mějme $n+1$ prvkovou množinu $M=\{a_1, a_2, \ldots a_{n+1},\}$. Za určující prvek si zvolíme prvek a_1 . Budeme rozlišovat dvě situace:

1. všechny podmnožiny obsahující prvek a_1 ; jeden prvek (a_1) je již vybrán, takže můžeme vybrat maximálně k dalších prvků z n . Podmnožin, obsahujících a_1 je $\binom{n}{k}$.

2. všechny podmnožiny neobsahující a_1 ; žádný prvek dosud vybrán nebyl, můžeme tedy vytvořit maximálně $k+1$ prvkové množiny ale jen z n prvků, protože prvek a_1 být vybrán nesmí. Těchto podmožin je $\binom{n}{k+1}$.

Sečtením těchto dvou částí získáme všechny podmnožiny. Počet všech podmnožin z $n+1$ prvkové množiny je $\binom{n+1}{k+1}$.

Odtud vztah $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$.

Tato vlastnost je patrná i z konstrukce Pascalova trojúhelníka.

$$
\begin{array}{ll}
n=0 & \binom{0}{0} \\
n=1 & \binom{1}{0}\binom{1}{1} \\
n=2 & \binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}
\end{array}
\quad \text{čili} \quad
\begin{array}{c}
(1) \\
(1)(1) \\
(1)(2)(1) \\
(1)(3)(3)(1) \\
(1)(4)(6)(4)(1)
\end{array}
$$

Příklad Dokažte $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n$

Řešení: Protože kombinační číslo $\binom{n}{k}$ udává počet všech k -prvkových podmnožin n -prvkové množiny (pro k=0 jde o prázdnou množinu, pro k=1 jde o jednoprvkové množiny), udává uvedený součet na levé straně rovnice počet všech podmnožin n -prvkové množiny.

Taktéž se jedná o koeficienty binomického rozvoje kde $a=b=1$

$$(a+b)^n=(1+1)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$$

Prvky dané n-prvkové množiny označíme čísly $1,2,3,\ldots,n$ a každé její podmnožině přiřadíme uspořádanou n-tici složenou z nul a jedniček postupně pro všechna $i=1,2,\ldots,n$ takto:

- Pokud se prvek označený **i** nachází v podmnožině, bude na **i**-tém místě v uspořádané n-tici jednička.
- Pokud se prvek označený **i** v podmnožině nenachází, bude na **i**-tém místě v uspořádané n-tici nula.

Např. Podmnožině {2,3,5} množiny {1, 2, 3, 4, 5, 6} by byla přiřazena uspořádaná šestice (0, 1, 1, 0, 1, 0), podmnožině {1, 6} bychom přiřadili (1, 0, 0, 0, 0, 1) atd.

Toto přiřazení je vzájemně jednoznačné, jsme tedy schopni z jakékoliv *n*-tice rozhodnout, o jakou podmnožinu *n*-prvkové množiny se jedná. To ovšem znamená, že n-prvková množina má právě tolik podmnožin, kolik existuje uspořádaných n-tic složených z nul a jedniček.

Kolik je tedy možno těchto uspořádaných *n*-tic z *n*-prvkové množiny vytvořit? Na každé pozici uspořádané *n*-tice může být nula či jedničky, podle příslušnosti daného prvku do podmnožiny. Pro každou pozici z n možných míst jsou tedy 2 možnosti. Dle principu součinu by byl počet podmnožin šestiprvkové množiny $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=2^6$, podmnožin *n*-prvkové množiny je 2^n . Odtud tedy uvedený vztah.

9.1 Úlohy k řešení

U 9.1. Je-li rovina rozdělena na části n přímkami, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné, pak se ke každé přímce přimyká aspoň jeden trojúhelník. Dokažte.

U 9.2. Dokažte, že v každém mnohostěnu existují aspoň dvě stěny se stejným počtem stran.

U 9.3. Na každém políčku šachovnice je napsáno číslo, které je rovno aritmetickému průměru dvou čísel na sousedních políčkách téhož řádku (i téhož sloupce). Dokažte, že všechna čísla jsou si rovna.

10 Rekurentní vztahy

Metoda rekurentních vzorců je podle publikace [6] metoda převedení na analogickou úlohu pro menší počet prvků. Pomocí rekurentního vzorce můžeme úlohu o n prvcích převést na úlohu o $n-1$ prvcích, tu potom na úlohu o n-2 prvcích atd. V mnohých případech se daří z rekurentního vztahu získat přímo vzorec pro řešení dané kombinatorické úlohy.

V kapitole 4 jsme odvodili vzorec $P(n)=n!$ pro počet permutací n prvků pomocí vzorce pro počet variací bez opakování. Tento vzorec však můžeme odvodit i tak, že nejprve najdeme rekurentní vztah, který je splněn pro $P(n)$.

Máme dáno n prvků $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$. Jejich libovolnou permutaci můžeme získat takto: vezmeme některou permutaci prvků $a_1, \ldots, a_{n-1}$ a připojíme k ní prvek a_n . Je zřejmé, že prvek a_n může zaujímat různá místa. Můžeme ho postavit na počátek, jako třetí prvek či třeba až na konec. Počet různých míst, která může obsadit prvek a_n , je roven n ; proto z každé permutace prvků $a_1, \ldots, a_{n-1}$ získáme n permutací $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$. To však znamená, že permutací z n předmětů je n-krát více než permutací z $n-1$ předmětů. Tím jsme našli rekurentní vzorec

$$P_n = n \cdot P_{n-1}$$

Při použití tohoto vzorce, dostaneme, že platí:

$$P_n = n \cdot P_{n-1} = n \cdot (n-1) \cdot P_{n-2} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot P_1$$

Ale protože $P_1 = 1$, neboť z jednoho prvku můžeme vytvořit pouze jedinou permutaci. Proto je

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

A tak se znovu dostáváme ke vzorci $P(n)=n!$.

10.1 Řešené příklady

Příklad 10.1. Určete počet všech 8-ciferných čísel sestavených z čísel 0 a 1, kde vedle sebe nestojí

a) 2 nuly

b) 3nuly.

Řešení ([13], str.75, upraveno)**:**

a) Jednociferná čísla vyhovující podmínce jsou 2 (0 a 1), dvojciferných 3 (01, 10 a 11) a trojciferné vypíšeme:

1 0 1	0 1 0
1 1 0	0 1 1
1 1 1	.

Trojciferných je tedy 5. Vidíme že jsou dvojího typu:

- začínají jedničkou a následuje libovolné dvojciferné číslo vyhovující podmínce
- začínají nulou, za kterou následuje jednička a poté libovolné jednociferné číslo vyhovující podmínce

Jestliže označíme a_n počet *n*-ciferných posloupností vyhovujících podmínce a úvahu zobecníme, dostaneme: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad pro\, n > 2$

Takto postupně vyplníme tabulku:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	2	3	5	8	13	21	34	55

Tab. 10.1

b) V tomto případě postupujeme podobně. Označíme b_n počet *n*-ciferných posloupností vyhovujících podmínce. Potom $b_1 = 2$, $b_2 = 4$, $b_3 = 7$. Čtyřciferné čísla jsou trojího typu:

- začíná 1 a následuje libovolná tříčlenná posloupnost vyhovující podmínce b)
- začíná 01 a následuje libovolná dvoučlenná posloupnost vyhovující podmínce b)
- začíná 001 a následuje libovilná jednočlenná posloupnost vyhovující podmínce b)

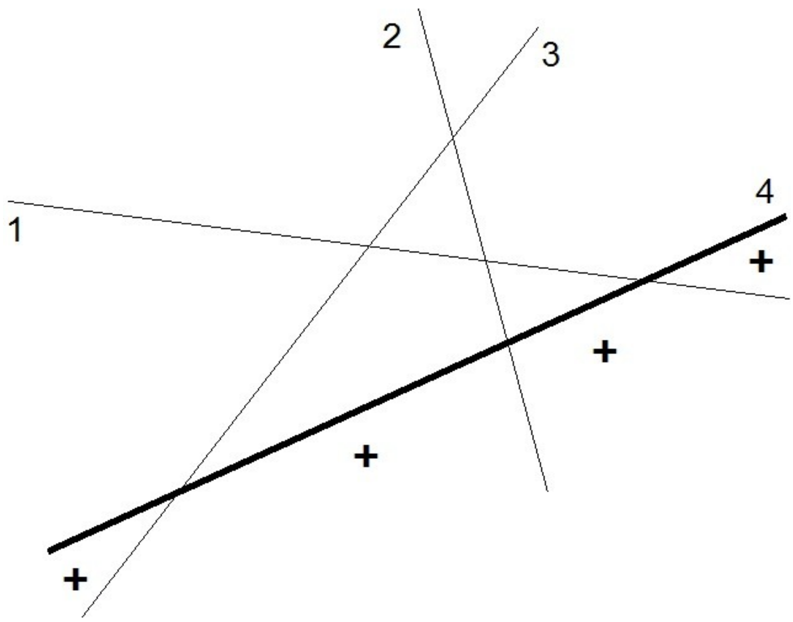
Zobecněním $b_n = b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3}$ $pro\, n > 3$ takže:

$b_4 = 13$, $b_5 = 24$, $b_6 = 44$, $b_7 = 81$, $b_8 = 149$.

Příklad 10.2. V rovině je dáno n přímek, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři neprochází jedním bodem. Na kolik částí rozdělují tyto přímky rovinu?

Řešení: Namísto otázky, na kolik částí dělí rovinu n přímek, budeme si klást otázky: na kolik částí děli rovinu 1, 2, 3, 4 přímky, kolik částí přibude, jestliže přidám *k*-tou přímku.

Jedna přímka rozdělí rovinu na dvě části, dvě přímky na 4 části a tři přímky na 7. Kolik částí přibude, jestliže přidáme 4. přímku (obr. 10.1)? Zřejmě tolik, kolika částmi prochází 4. přímka. Pokud je tato přímka různoběžná s ostatními přímkami, tak je protíná ve třech (různých) průsečících, kterými je rozdělená na 4 segmenty a každý segment (úsečka nebo polopřímka) leží v jiné části původní roviny. Z toho vyplývá, ži po přidání 4. přímky přibívají 4 části,t.j. Celkový počat částí je 11.



Obr 10.1: Přímky v rovině

Sestavíme tabulky (n je počet přímek, p(n) částí tvořených n přímkami):

n	0	1	2	3	4
p(n)	1	2	4	7	11
+ částí	1	1	2	3	4

Tab. 10.2

Zjistili jsme, že přidáním *k*-té přímky přibude k částí, odtud pro počet částí tvořených n přímkami $p(n)$.

$$p(n)=n+p(n-1)=n+(n-1)+p(n-2)=\underbrace{n+(n-1)+\ldots+2+1}_{aritmetická\ posloupnost}+1=\frac{n\cdot(n-1)}{2}+1$$

$$p(n)=\frac{n\cdot(n-1)}{2}+1$$

Příklad 10.3. Na večírku bylo 7 manželských dvojic. Kolika způsoby je možné je rozdělit na 7 tanečních párů tak, aby žádný muž netancoval se svou ženou?

Řešení: Označme p_n počet rozdělení *n* manželských párů do *n* tanečních párů vyhovujících podmínce úlohy. Zřejmně $p_1=0, p_2=1, p_3=2$. N výpočet p_4 použijeme následující označení: muže označíme **A**, **B**, **C**, **D**, jejich manželky postupně **a**, **b**, **c**, **d**. Rozdělení, kde vystupuje dvojice **Ab** je stejně, jako kdyby zde byla dvojice **Ac** a totéž platí i pro **Ad**. Proto stačí zjistit počet rozdělení pouze pro **Ab** a vynásobit třemi. Možné rozdělení jsou:

Ab	Ba	Cd	Dc
Ab	Bc	Cd	Da
Ab	Bd	Ca	Dc

Zde máme ukázku tří rozdělení kde figuruje **Ab**, celkově tedy $p_4=3\cdot3=9$. Zkusme tedy sestavit rekurentní vztah.

Nechť máme n dvojic. Muž A potom může tancovat s $n-1$ ženami. Řekněme že tancuje s ženou **b**. Kolik bude takových možností? Rozdělují se na 2 skupiny:

- muž **B** tancuje se ženou **a** – takovýchto možností je p_{n-2} , protože zůstává $n-2$ manželských párů.
- Muž **B** netancuje se ženou **a**. Potom vlastně máme $n-1$ dvojic muž žena, a každý muž má právě jednu (vždy a vždy jinou) zakázanou partnerku. Takových možností je p_{n-1} .

Dostaneme rekurentní vztah $p_n=(n-1)(p_{n-1}+p_{n-2})$. V tabulce jsou zobrazeny první členy posloupnosti p_n .

n	1	2	3	4	5	6	7
p_n	0	1	2	9	44	265	1854

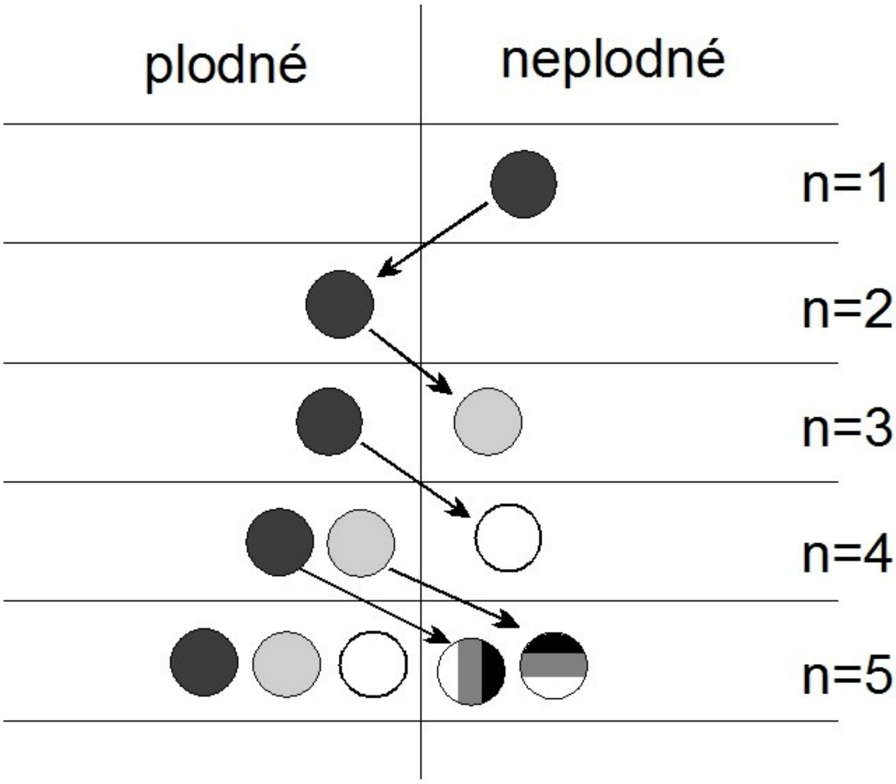
Sedm manželských dvojic je tedy možno rozdělit do párů 1854-ti způsoby tak, aby žádný muž netancoval se svou ženou.

Příklad 10.4. Pár králíků přivádí jednou za měsíc na svět dvě mláďata (samečka a samičku); tito noví králíci přinášejí další přírůstky už za dva měsíce po svém narození. Kolik králíků se objeví za rok, předpokládáme-li, že na počátku roku byl jeden pár králíků?

Řešení: Symbolem F_n označíme počet králíků po n měsících. Nakreslíme si jak to bude vypadat v učitých měsících (obr. 10.2). Průběh bychom mohli popsat následovně:

- 1. měsíc máme jediný mladý pár králíků
- 2. měsíc se již mohou pářit, ale stále je jen jediný pár
- 3. měsíc samice porodí nový pár, celkem máme 2 páry králíků

- 4. měsíc původní samice porodí další nový pár, zatímco druhý pár dospívá, dohromady 3 páry králíků
- 5. měsíc původní pár i samice narozená druhý měsíc porodí další pár. Stěmito novými přírůstky máme celkem 5 párů.



Obr. 10.2

Symbolem F_n označíme počet králíků po n měsících. V obrázku (obr. 10.2) je z celého páru vždy zakreslena jen samice (reprezentuje celý pár) a to do řádku a sloupce podle toho, zda již může plodit mladé či nikoli.

Celkový počet párů F_n v *n*-tém měsíci se skládá z plodných (P_n) a neplodných párů (N_n). Tedy.

$$F_n = P_n + N_n \tag{2}$$

Ze zadání i obrázku je zřejmé, že počet plodných párů (P_n) v *n*-tém měsíci je roven celkovému počtu párů v měsíci předchozím F_{n-1} (všechny páry jsou starší než měsíc, tedy plodné).

$$P_n = F_{n-1}$$

Počet neplodných (N_n) v *n*-tém měsíci je roven počtu plodných v předchozím měsíci.

$$N_n = P_{n-1} = F_{n-2}$$

Dosazením do vztahu (2) získáváme rekurentní vzorec pro zjištění počtu párů po *n* měsících.

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \tag{3}$$

Chceme zjistit, kolik párů bude po 12-ti měsících, proto dosadímě n=12. Přitom víme, že $F_1 = 1$ a $F_2 = 1$. Sestavím tabulku:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Poznámka: Tuto posloupnost čísel nazýváme Fibonaccho posloupnost.

Existuje i další zajimavá posloupnost čísel vytvořená součtem dvou předchozích hodnot této posloupnosti, zvaná Lucasova posloupnost (pro $n \geq 3$, $n \in$ N):

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \tag{4}$$

Přičemž $L_1 = 1$ a $F_2 = 3$. Členy této poloupnosti se nazývají Lucasova čísla (Obvykle klademe $L_0 = 2$).

Vypíšeme několik prvních členů těchto dvou posloupností:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	...
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	...

Zde vidíme: $F_{n-1} + F_{n+1} = L_n$

Fibonacciho i Lucasova posloupnost mají řadu zajímavých vlastností, některé z nich máte za úkol dokázat v podkapitole 10.2 podobně, jako je tomu v Příkladě 10.5. Pokud by jste se chtěli dozvědět více o těchto posloupnostech, doporučuji literaturu [18], [19], [20].

Příklad 10.5. Dokažte: $F_1+F_2+F_3+\ldots+F_n=F_{n+2}-1$ (5)

Řešení: Užitím rekurentního vzorce (3) získáváme

$$F_1=F_3-F_2,$$

$$F_2=F_4-F_3,$$

$$F_3=F_5-F_4,$$

$$\vdots$$

$$F_{n-1}=F_{n+1}-F_n,$$

$$F_n=F_{n+2}-F_{n+1}.$$

Součtem všech těchto rovnic dostáváme (z definice fibonacciho posloupnosti známe $F_2=1$).

$$F_1+F_2+F_3+\ldots+F_n=F_{n+2}-F_2=F_{n+2}-1$$

Dokázáno.

10.2 Úlohy k řešení

Řešte postupně, u pozdějších příkladů může být potřeba využít vztahů z předcházejících úkolů.

U 10.1. Dokažte: $F_1+F_3+F_5+\ldots+F_{2n-1}=F_{2n}$

U 10.2. Dokažte: $F_2+F_4+F_6+\ldots+F_{2n}=F_{2n+1}-1$

U 10.3. Dokažte: $F_1^2+F_2^2+F_3^2+\ldots+F_n^2=F_n F_{n+1}$

U 10.4. Dokažte: $L_1+L_2+L_3+\ldots+L_n=L_{n+2}-3$

U 10.5. Dokažte: $L_1+L_3+L_5+\ldots+L_{2n-1}=L_{2n}-2$

U 10.6. Dokažte: $L_2+L_4+L_6+\ldots+L_{2n}=L_{2n+1}-1$

11 Řešení úloh

3.1 $12^5 - 1 = 248\ 831$

3.2 1000

3.3 30

3.4 permutace z n prvků je n! - 2 prvky

3.5 a) 10; b) 11; c) 22

3.6 a) 48; b) 6; c) 48; d) 36; e) 72; f) 24; g) 72; h) 80

3.7 a) 60; b) 4; c) 48; d) 18; e) 72; f) 24; g) 78; h) 64

3.8 a) 6!; b) $2 \cdot 5!$ c) $2 \cdot 5!$ d) 96

3.9 120; 10 krychlí

3.10 269

3.11 $5 \cdot 2 + 1 = 11$ [Z vrcholu 6 cest, pouze jedna přímo do cíle, ostatní na některý bod podstavy, z těchto bodů se můžeme vydat dvěmi směry.]

3.12 10

Pořadí čísel uvedených v řešení odpovídá pořadí otázek v úloze.

5.1 88 dnů

5.2 25 hodin

5.3 46; 30; 19; 58.

5.4 8

5.5 52; 98

5.6 ANO

5.7 16

5.8 800

6.1 2^9 ; [Způsoby lze zakódovat do uspořádané devítice z nul a jedniček podle toho, zda jdeme po horní či dolní cestě]

6.2 165

6.3 3^6 ; [Způsoby lze zakódovat do uspořádané šestice z 0, 1 a 2]

6.4 $\frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$

6.5 560

6.6 10

6.7 220

7.1 56

7.2 a) 111 b) 105

7.3 a) $\binom{5}{4}\cdot\binom{5}{4}=25$ b) $\binom{3}{2}\cdot\binom{7}{6}+\binom{3}{1}\cdot\binom{7}{7}=24$

7.4 [Obsah S_{ABC} vyjádřete pomocí délky strany a výšky. Pak ho vyjádřete jako součet $S_{ABM}+S_{MBC}+S_{AMC}$ a výsledky porovnejte.]

7.5 v_a [Narýsujte trojúhelník ABC a jeho obraz ABC′ který vznikne osovou souměrností podle AB. Sestrojte kolmici na BC procházející M s patou K. Průsečík této kolmice a přímky AC′ označte L. Patu kolmice na AC procházející M označte P. Vzdálenost PM je rovna vzdálenosti LM. Posuneme-li přímku KL tak, aby A=L, vidíme, že tato vzdálenost je v_a . (osovou souměrností jsme získali rovnoběžník)]

8.1 $2\cdot 240+20=500$

8.2 není možné, minimum je 55 (pokud někde i 0) nebo 66

8.3 min 37 obyvatel, 36 pokud některý člověk nemá ani chlup

8.4 přihrádkami je počet známých 0, 1, ... 49, tedy 50 přihrádek, dokázáno pouze v případě, že nepočítáme s nulou

8.5 Chceme najít dvě čísla, jejichž rozdíl je dělitelný 11. Rozdělíme našich 12 čísel do 11 přihrádek podle zbytku po dělení 11.

9.1 [Označíme kteroukoliv z daných přímek p a ten z průsečíků zbývajících přímek, který má od p nejmenší vzdálenost označíme A. Bodem A procházejí aspoň dvě přímky, mezi kterými žádná další jdoucí bodem A neleží. Tyto dvě ohraničují s přímkou *p* trojúhelník.]

9.2 [Označme G tu stěnu, která má největší počet stran, který označíme n. Tato stěna má *n* sousedních stěn. Počet stran každé z nich patří do množiny {3,4,...,n} Tato množina má méně než n prvků, proto mají některé dvě stěny (podle Dirichletova principu) stejný počet stran.]

9.3 [Pokud by si nebyla rovna, vybereme největší z nich. Protože je rovno aritmetickému průměru sousedních čísel (a žádné ze sousedních čísel nemůže být větší) jsou na sousedních políčkách stejná čísla (největší hodnoty). Opakováním úvahy pro jejich sousedy a pak dalším a dalším opakováním nakonec zjistíme, že mají všechna čísla stejnou hodnotu.]

10.1 [Využijte rekurentní vzorec (3) ze strany 75, sečtěte rovnice $F_1 = F_2, F_3 = F_4 - F_2, \ldots, F_{2n-1} = F_{2n} - F_{2n-2}$]

10.2 [Využijte vztahy (3), (5) a vztah z úkolu 10.1 k získání $(F_{2n+2} - 1) - F_{2n}$]

10.3 [Použijte matematickou indukci]

10.4 [Sečtěte rovnice $L_1 = L_3 - L_2, L_2 = L_4 - L_3, \ldots, L_n = L_{n+2} - L_{n+1}$]

10.5 [Sečtěte rovnice $L_1 = L_2 - L_0, L_3 = L_4 - L_2, \ldots, L_{2n-1} = L_{2n} - L_{2n-2}$]

10.6 [Sečtěte rovnice $L_1 = L_3 - L_2, L_2 = L_4 - L_3, \ldots, L_n = L_{n+2} - L_{n+1}$]

10.7 [Využijte vztahy z úloh 10.5 a 10.6]

12 Literatura

[1] HEJNÝ, M. a kol.: *Teória vyučovania matematiky 2,* 2. vydání, Bratislava: SPN, ISBN 80-08-01344-3

[2] *Combinatorial principles - Wikipedia, the free encyclopedia* [online]. Poslední revize 17.10.2010 [cit. 2010-10-31]. Dostupné na WWW: http://en.wikipedia.org/wiki/Combinatorial_principles

[3] CALDA, E.; DUPAČ, V. *Matematika pro gymnázia - Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika*. Dotisk čtvrtého, upraveného vydání, PROMETHEUS Praha: 2003, ISBN 80-7196-147-7

[4] *Dirichletův princip* [online]. [cit. 2010-10-31] Dostupné z: http://mks.mff.cuni.cz/common/show.php?title=Dirichlet%26%23367%3Bv+princip&file=archive/20/3&lang=0

[5] FUCHS, E.: *Diskrétní matematika a teorie množin pro učitele*.[CD], Brno 2000,

[6] VILENKIN, N.J. *Kombinatorika*. Praha 1977: vydalo SNTL.

[7] *Soubor_uloh* [online]. [cit. 2010-11-09]. Dostupné z: http://www.fp.vslib.cz/kmd/lide/prihonska/MX2/Soubor_uloh.pdf

[8] SMIDA, J. *Matematika pro II. ročník gymnázií - Kombinatorika*. 1.vydání, SPN Praha:1989.

[9] VRBA, A. *Kombinatorika*. Mladá fronta, Praha 1980

[10] ŠEDIVÝ, J. a kol. *Úlohy o výrocích a množinách – pro I. ročník gymnasia*. SPN, Praha 1972.

[11] NÝDL, V.: *Diskrétní matematika I.*, Jihočeská universita v Českých Budějovicích. ISBN 80-7040-359-4

[12] PETRÁČKOVÁ, Věra; KRAUS, Jiří a kol. *Akademický slovník cizích slov.* Academia, nakladatelství AV ČR, Praha 2001, ISBN 80-200-0607-9

[13] HECHT, T.; SKLENÁRIKOVÁ, Z.: *Metódy riešnia matematických úloh*. SPN, Bratislava 1992. ISBN 80-08-00340-5

[14] КАНЕЛЬ-БЕЛОВ, А.Я., КОВАЛЬДЖИ А.К. - *Как решать нестандартные задачи,* МСМО, Москва 2008

[15] LEISCHNER, P. *Metody* [online]. [cit. 2010-12-02]. Dostupné z: http://eamos.pf.jcu.cz/amos/kat_mat/externi/kat_mat_82142/metody.pdf

[16] *Kombinatorika* [online]. [cit. 2010-12-02]. Dostupné z: http://homen.vsb.cz/~oti73/cdpast1/KAP01/PRAV1.HTM

[17] POLÁK, J. *Přehled středoškolské matematiky*. SPN, Praha 1972.

[18] LEISCHNER, P. *Dopřejme žákům radost z objevu Binetova vzorce*. Matematika-fyzika-informatika, **11** (2001/2002), č.9, str. 513-518, PROMETHEUS, Praha 2002.

[19] JAROŠOVÁ, M. *Fibonacciho čísla a jejich souvislost s jinými matematickými pojmy*. (Rigorózní práce), Brno: Masarykova univerzita 2007. [online]. [cit. 2010-12-18]. Dostupné z: http://is.muni.cz/th/41281/prif_r/rigo.pdf