Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta
Katedra informatiky

Úlohy o společné práci a směsích
Multimediální studijní materiál

Diplomová práce

Autor: Bc. Pavel Nix

Studijní program: N1101 / Matematika

Studijní obor: 7504T261 / Učitelství pro střední školy - informatika

7504T088 / Učitelství matematiky pro střední školy

Typ studia: Navazující magisterský

Vedoucí práce: PhDr. Michal Musílek, Ph.D.

Hradec Králové 2015

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval (pod vedením vedoucího diplomové práce) samostatně a uvedl jsem všechny použité prameny a literaturu.

V Hradci Králové dne ....

Poděkování

Děkuji panu PhDr. Michalovi Musílkovi, Ph.D., vedoucímu diplomové práce, za ochotu, trpělivost a velmi cenné rady při vedení mé diplomové práce.

Anotace

NIX, Pavel. *Úlohy o společné práci a směsích – Multimediální studijní materiál.* Hradec Králové: Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové, 2015. 80 s. Diplomová práce.

Práce se zabývá multimediální podporou matematiky na základních školách a v nižších ročnících víceletých gymnázií. Je zaměřena na úlohy o společné práci a směsích. Praktickým výstupem je multimediální program, který obsahuje teorii k řešení úloh o společné práci a směsích a sbírku řešených úloh, které jsou doplněny u náročnějších příkladů videem či animací.

Klíčová slova: matematika, úlohy o společné práci, úlohy o směsích, řešené příklady, video, animace

Annotation

NIX, Pavel. *Problem solving of working together and mixtures - Multimedia study material.* Hradec Králové: Faculty of Science, University of Hradec Králové, 2015. 80 pp. Thesis.

The theses deals with multimedia support for study of mathematics especially in primary schools and lower secondary schools. It is focused on the tasks of joint work and the tasks of the mixtures.
The practical outcome is a multimedia program that includes theory to solve working together and mixtures tasks and a collection of examples. Difficult examples are complemented with video or an animation.

Keywords: mathematics, tasks of joint work, tasks of the mixtures, solved examples, video, animation

Obsah

Úvod

Tato diplomová práce navazuje na moji bakalářskou práci s názvem Úlohy o pohybu – Multimediální studijní materiál.

Cílem mé práce je vytvořit multimediální studijní materiál, který přispěje k větší názornosti úloh o společné práci a směsích. Přínos programu byl ověřen výzkumem při výuce matematiky na základní škole.

Jádrem mé práce je interaktivní program. Tento program asi nejvíce využijí při doučování nebo samostudiu ti žáci, kteří nepatří k premiantům třídy, ale věřím, že zaujme i matematicky nadané žáky, kteří zde naleznou i náročnějších úlohy. Přestože je dotace hodin matematiky při výuce na ZŠ často nedostatečná a učitelé mají co dělat, aby stihli probrat vše, co je v tematickém plánu, tak bych byl potěšen, kdyby byl program využit na základních školách a nižších ročnících víceletých gymnázií jako multimediální pomůcka i v rámci výuky. Pevně věřím, že vyučující tento interaktivní materiál o čas příliš neokrade a u žáků přispěje k většímu pochopení látky, propojení učiva s praxí a především větší názornosti.

K vytvoření obou multimediálních pomůcek mě motivovala především má desetiletá učitelská praxe na základní škole, která mě utvrdila v tom, že velká skupina žáků považuje matematiku odtrženou od reality každodenního života. Žáci si nedovedou úlohy představit a pak je jejich výpočet chybný nebo jen mechanicky provedený. Žáci, kteří si jen zautomatizují naučené postupy, nedokáží reagovat na výraznější obměnu příkladů a především za pár týdnů zadanou úlohu nevyřeší vůbec, protože postupy rychle zapomínají.

Jádro aplikace bylo vytvořeno v programu Adobe Flash Professional CS6 a k jeho spuštění je třeba mít pouze nainstalovaný libovolný Flash přehrávač, který bývá již dnes na všech školních počítačích k dispozici, případně je zdarma ke stažení.

Stáhnout si jej můžeme například ze stránek společnosti Adobe na této internetové adrese:

http://get.adobe.com/cz/flashplayer/

Důraz byl tedy kladen na to, aby byla aplikace ihned žákům i učitelům přístupná. Aplikaci jsem testoval na Základní škole Sever v Hradci Králové a porovnal jsem úspěšnosti řešení Úloh o společné práci a směsích u žáků, kteří měli program k dispozici, oproti skupině žáků, kteří pomůcku nevyužili. Výsledky experimentu ověřující přínos programu jsou v této práci uvedeny.

Během tří let jsem testoval předchozí program vytvořený spolu s bakalářskou prací a o získané poznatky jsem obohatil nejen tuto diplomovou práci, ale především nově vytvořený program. V tomto novém programu je méně „hezky vypadajících pohybujících se obrázků“, ale o to více je zde kladen důraz na aktivitu žáka. Oproti předchozímu programu není nabídnuto žákům hned celé řešení, ale vždy jen jeho část, po které je řešení zastaveno a řešiteli je často položena doplňující otázka. Dále jsem se daleko intenzivněji zabýval výzkumem, abych si ověřil přínos této práce.

1 (Ne)oblíbenost matematiky na základní škole

Než se dostanu ke slovním úlohám, tak bych rád poukázal na jednu smutnou prioritu našeho školství. Začnu osobní zkušeností a poté zde nabídnu mezinárodní srovnání.

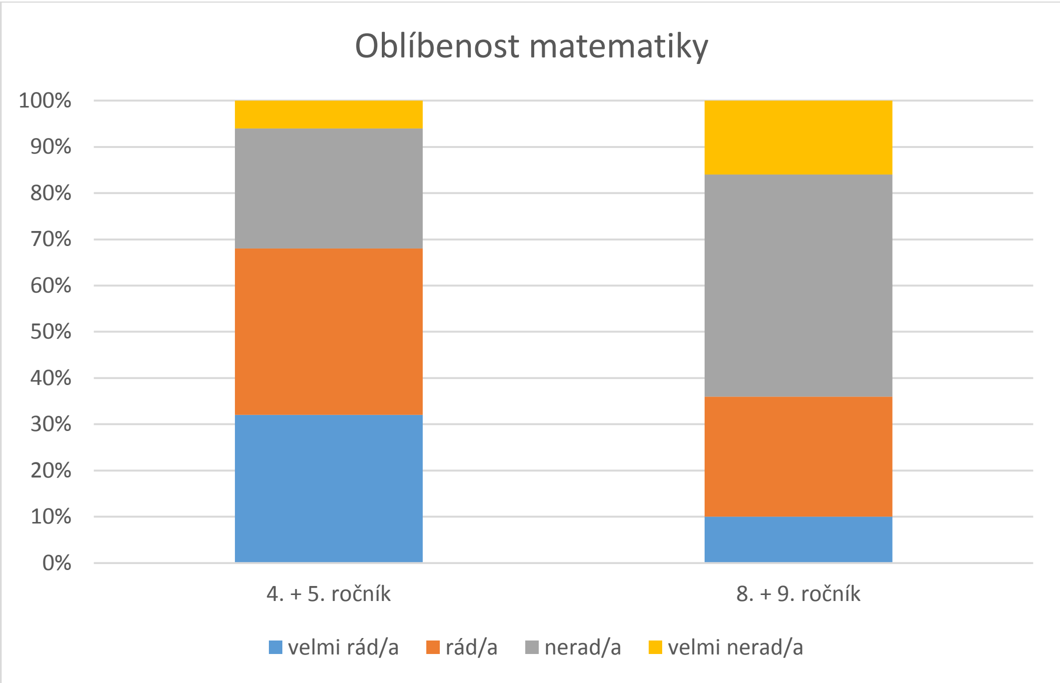
Musím říci, že mě často trápila opakující se scéna. Když jsem učil žáky v 5. třídě, tak jsem s potěšením zjistil, že žáci prvního stupně mají matematiku poměrně rádi. Neustále se na něco ptali, měli chuť se něco nového dozvědět. S postupujícími ročníky ale obliba tohoto předmětu velmi strmě klesala a v 9. třídě měli ti samí žáci matematiku neradi a k některým slovním úlohám měli dokonce odpor. A na tyto úlohy jsem se rozhodl v bakalářské a této diplomové práci zaměřit.

Oblíbenost matematiky má samozřejmě jakýsi přirozený vývoj související nejen s matematikou, ale obecně oblibou školy u dětí, kteří nadšeně nastoupí do první třídy, ale s postupujícími ročníky u nich nadšení ze školy klesá. Nicméně v žádných jiných předmětech jsem se já a moji kolegové nesetkali tak často s větou žáků směřující k učiteli: „Já tomu nerozumím." I když zde bych si dovolil připojit i osobní postřeh s touto větou. Pro některé žáky je totiž tato věta jen výmluvou. Žák učiteli sdělí, že učivo neumí, protože látce nerozumí. Ale při bližším zkoumání lze snadno zjistit, že se se na probírané učivo doma ani nepodíval. Neoblíbenost matematiky bych ale nerad bagatelizoval.

Vždy jsem se zajímal o zpětnou vazbu žáků. Z tohoto důvodu jsem se rozhodl provést výzkum, který jsem uskutečnil na Základní škole Sever v Hradci Králové, kde učím, a to u žáků 4. – 9. tříd. Abych zvýšil vypovídající hodnotu dotazníkového šetření, zadával jsem jej žákům po dobu 4 let. Část žáků vyplňovala tedy dotazník vícekrát s postupujícími ročníky. Abych měl shodný počet respondentů za 1. i 2. stupeň, tak jsem náhodným výběrem (losováním) do výsledků zahrnul 320 výsledků za 1. stupeň (160 žáků ze 4. třídy + 160 žáků z 5. třídy) a 320 dotazníků za 2. stupeň (8. +

9. třída). Žáci si vybírali právě jednu z možností. Matematiku mám: a) velmi rád/a, b) rád/a, nerad/a, velmi nerad/a. Výsledky jsou zobrazeny na obr. 1.

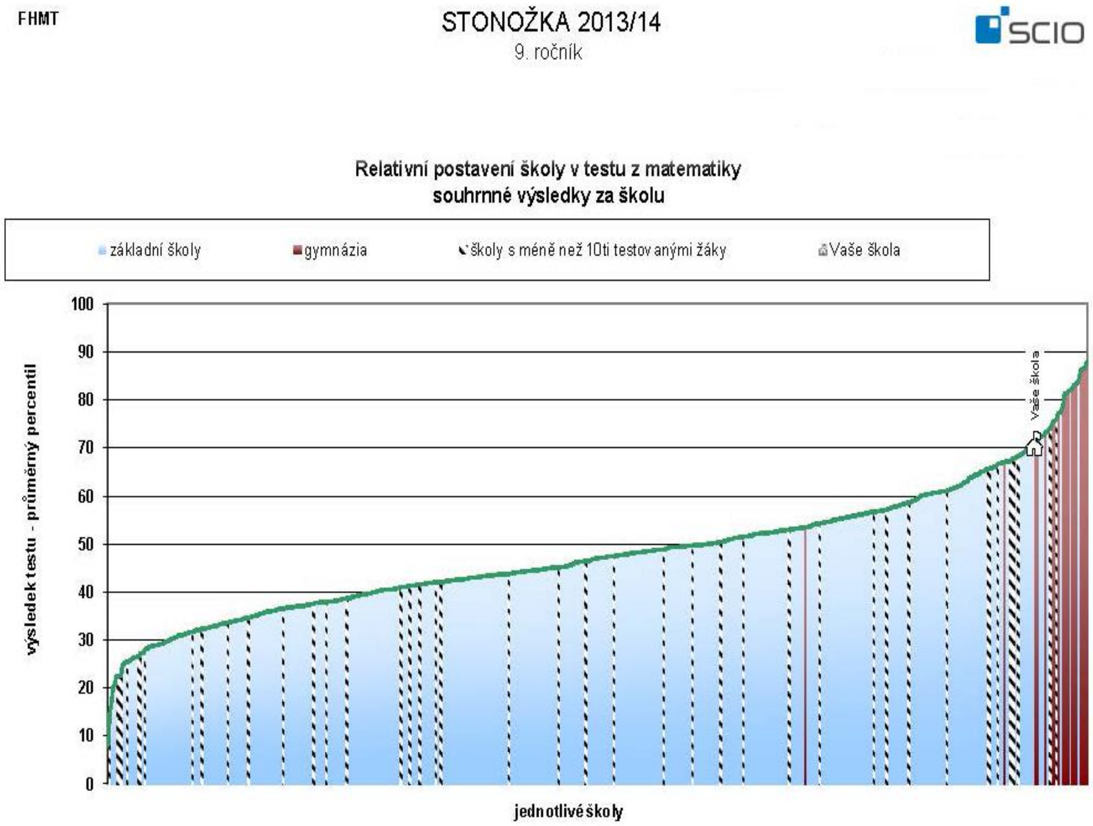
Obrázek 1: Oblíbenost matematiky na ZŠ Sever v Hradci Králové. Průzkum proveden v letech 2012-2015



Z grafu je mimo jiné vidět velká změna ve vyhraněnosti odpovědí. **Odpověď *velmi rád/a* klesla přibližně na třetinu a odpověď *velmi nerad* se zvýšila dvojnásobně.** Na konci 1. stupně mělo matematiku nerado nebo velmi nerado 32% žáků a na konci 2. stupně to byl přesně dvojnásobek tedy 64 %.

Naše škola je ve srovnání znalostí matematiky žáků 9. tříd s ostatními školami v nadprůměru, což dokazuje např. testování SCIO, kterého se naše škola pravidelně účastní. Nabízím zde např. testování, které proběhlo v listopadu 2013. Testování se zúčastnilo celkem 613 škol. Celkový počet testovaných žáků byl 17 823. Výsledky jsou zobrazeny na obr. 2.

Obrázek 2: Scio testy matematiky žáků 9. tříd ZŠ Sever v Hradci Králové v národním srovnání



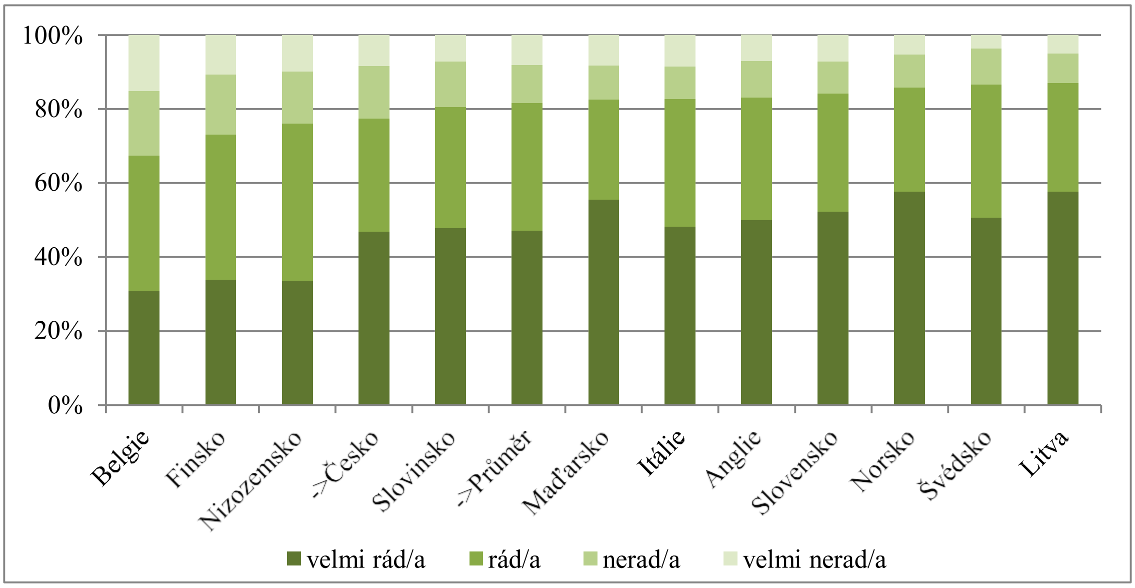
Zdroj: SCIO 2013

Přes klesající oblibu matematiky jsou tedy žáci naší školy poměrně úspěšní, co se znalostí matematiky týče, ve srovnání s ostatními školami. Jako jedno z možných vysvětlení se nabízí to, že výrazná klesající obliba matematiky je typická pro celou Českou republiku, jak dokazují následující studie.

Neoblíbenost matematiky u nás strmě klesá i v mezinárodním kontextu. Opírám se zde o informace publikované ve zprávách o výzkumu TIMSS 2003, 2007 a 2011 (Federičová, Münich, 2014).

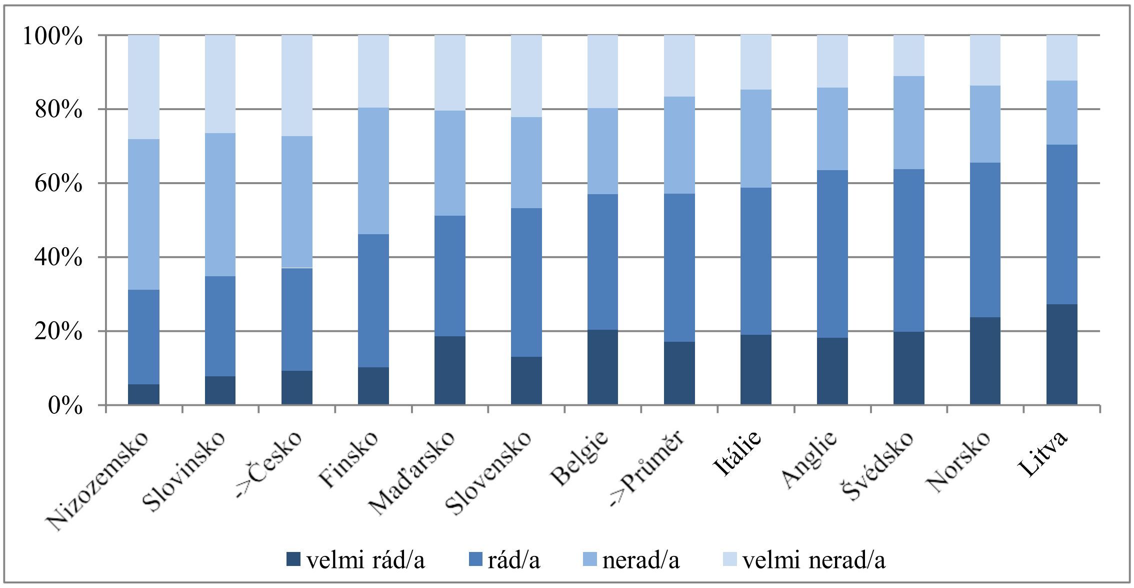
Obliba matematiky podle této studie je znázorněna na obr. 3, 4. Fenomén klesající obliby matematiky s věkem je opět zřejmý ve všech zemích. Zatímco ve 4. třídách se matematiku učí velmi rádo v průměru téměř 50% žáků, v 8. třídách to je již jen pouhých 17%. Pozoruhodný je propad obliby v Česku. V 8. třídách se v Česku matematiku velmi rádo učí zanedbatelných 9 % žáků (podobně jako v Nizozemsku, Slovinsku a Finsku).

Obrázek 3: Proporce odpovědí na otázku o oblibě učení se matematice (4. třída)



Poznámka: Hodnota Průměr je průměr za všechny země kromě Česka. Země jsou seřazeny dle oblibyškoly (odpověď velmi rád/a a rád/a) od nejnižší k nejvyšší oblibě.
Zdroj: TIMSS 2011.

Obrázek 4: Proporce odpovědí na otázku o oblibě učení se matematice (8. třída)



Poznámka: Hodnota Průměr je průměr za všechny země kromě Česka. Země jsou seřazeny dle oblibyškoly (odpověď velmi rád/a a rád/a) od nejnižší k nejvyšší oblibě.
Zdroj: TIMSS 2003, 2007 a 2011.

Starší výzkum TIMSS 1995 dokonce řadí Českou republiku na smutné první místo (Straková, Tomášek, Palečková, 1996). Žákům 8. tříd byla položena stejná otázka jako v předchozím výzkumu tedy: Jak rád(a) máš matematiku? A žáci vybírali právě jednu ze 4 možností: velmi rád(a), rád(a), nerad(a), velmi nerad(a). V Rakousku, Německu, České republice, Maďarsku, Japonsku, Koreji, Litvě a Nizozemsku uvedlo více než 40 % žáků, že matematiku nemají rádi. Na prvním místě mezi těmito zeměmi je Česká republika, kde polovina žáků odpověděla, že matematiku nemají rádi.

I v tomto výzkumu ovšem Česká republika dosáhla ve znalostech matematiky výborných výsledků v mezinárodním srovnání. Kromě mě desetileté učitelské praxe na základní škole, doučuji již více než 13 let především studenty středních škol. Za tuto dobu jsem dospěl k názoru, že bychom se tímto neměli nechat ukolébat. Protože žáci se velmi dobře dokáží připravit na testy, přijímací zkoušky na střední školu apod. Mají ovšem často jen naučené postupy ale nechápou širší souvislosti a navíc mají k matematice negativní přístup, jak ukázaly výše uvedené výzkumy. To vše má za následek, že u studentů středních škol strmě klesají znalosti nabyté na základních školách.

Tuto moji hypotézu bohužel potvrzuje šetření TIMSS (Straková, Tomášek, Palečková, 1996). Žákům v něm byly zadány čtyři stejné úlohy v 8. ročníku základní školy a v posledním ročníku střední školy. Dle tohoto výzkumu j**sme jedinou zemí, která má celkovou úspěšnost středoškoláků nižší než úspěšnost žáků 8. ročníku!**

Můžeme se podívat na dvě z těchto úloh (právě jedna z nabídnutých odpovědí A, B, C, D, E je správná).

Úloha 1: *Kolik kalorií je ve 30 gramové porci jídla, je-li ve 100g tohoto jídla 300 kalorií?*

a) 90	b) 100	c) 900	d) 1 000	e) 9 000

Úloha 2: *Ze zásilky 3 000 žárovek bylo 100 namátkou vybráno ke kontrole. Je –li z tohoto vzorku 5 žárovek vadných, kolik vadných žárovek můžeme očekávat v celé zásilce?*

a) 15	b) 60	c) 150	d) 300	e) 600

První úlohu mělo správně 78 % žáků základní školy a 61 % žáků střední školy. Druhou úlohu vyřešilo správně 76 % žáků základní školy a 63 % žáků střední školy. Rozdíl je tedy v obou případech více jak 10 %. Všechny ostatní státy měli naopak výrazný nárůst úspěšnosti na středních školách (10 – 20 %).

Prof. Hejný a prof. Kuřina tvrdí, že příčinou neúspěchu je patrně skutečnost, že naši studenti se učí tomu, co se asi bude požadovat, nikoli tomu, co má hlubší vzdělávací smysl. Navíc upozorňují na to, že u žáků klesá s věkem úspěšnost řešit jednoduché matematické úkoly a nejsou schopni využít matematické poznatky v praxi. (Hejný, Kuřina, 2009).

Jsem stejného názoru jako prof. Hejný a prof. Kuřina. Bohužel se potvrzuje to, co jsem uvedl v samém úvodu a to, že velká skupina žáků považuje matematiku odtrženou od reality každodenního života. Díky tomu jim přijde matematika postupně stále méně zajímavá a nejsou schopni a ochotni získané matematické vědomosti v dalším životě dostatečně využít.

2 Proč právě úlohy o společné práci a úlohy o směsích

V předchozím textu jsem nastínil problém, že žáci nevidí u matematiky propojenost s běžným životem. V matematice se již od 1. třídy základní školy vyskytují slovní úlohy a setkáváme se s nimi postupně v průběhu studia čím dál častěji. Smysl slovních úloh vidím v tom, že nutí žáka se zamyslet nad daným problémem a může zde využít naučené postupy, které jsou zpočátku pouze jednoduché (sčítání, odčítání apod.) a posupně se rozvíjejí. Navíc by slovní úlohy měly ukazovat na využití probrané látky v praxi a na propojení praktického života a matematiky.

Dalo by se očekávat, že žáci budou mít radost, že to, co se naučili, má nějaké praktické využití. Účinek to má u žáků vyšších ročníků ovšem často opačný. Jak vidí slovní úlohu, tak v tom nehledají využití matematických vědomostí pro budoucí život, ale naopak jsou otráveni. Pokoušejí se jen dospět k nějakému výsledku tím, že se snaží rychle do úlohy „napasovat“ čerstvě naučené vzorce a postupy.

Rád bych přispěl ke změně postoje žáků touto multimediální pomůckou. Vybral jsem si ty slovní úlohy, které příliš žákům nejdou a navíc je sami považují za složité. Zvolil jsem 3 skupiny slovních úloh: 1) Úlohy o pohybu, 2) Úlohy o společné práci, 3) Úlohy o směsích.
První skupině jsem věnoval svoji bakalářskou práci. Zbylým dvěma tématům věnuji tuto diplomovou práci.

Tyto úlohy považuji za důležité a náročné nejen já, ale většina autorů učebnic matematiky. Řada typů slovních úloh nemá svoji vlastní kapitolu, ale tyto slovní úlohy ji mají v učebnicích matematiky téměř vždy. Např. prof. Půlpán a kolektiv uvádí ve své učebnici pro 8. ročník v kapitole Rovnice kolem nás tyto podkapitoly slovních úloh: 1. Slovní úlohy, 2. Úlohy o pohybu, 3. Úlohy o práci a výkonu lidí i strojů, 4. Úlohy o směsích (Půlpán a kol., 2009). Velmi pěkně je zde zvolen název kapitoly, který poukazuje na to, že rovnice jsou všude kolem nás a lze je využít velmi často v běžném životě. Naprosto stejně pojmenovává podkapitoly Půlpán i v učebnici algebry pro 9. ročník (Půlpán a kol., 2010). U některých autorů tyto kapitoly chybí, ale namísto toho se objevuje před těmito příklady upozornění na vyšší náročnost. Např. Trejbal sestavil sbírku zajímavých úloh a v této knize píše před úlohami o směsích: “ Předpokladem úspěšného vyřešení dalších úloh je vaše hlubší zamyšlení nad danou problematikou, popřípadě i znalosti z fyziky. Zdatný počtář se však překážek neleká." (Trejbal, 1996)

3 Úlohy o společné práci

3.1 Historie slovních úloh o společné práci

Slovní úlohy vznikaly z potřeb člověka, proto jsou velmi propojeny s praktickým životem. A práce k člověku od nepaměti neodmyslitelně patří. Existuje proto mnoho historických záznamů těchto úloh. Jeden z nejstarších pochází od Hérona z Alexandrie z 1. století n.l., který sestavil tuto slovní úlohu: „Do studny objemu 12 (objemových jednotek) přitéká voda dvěma rourami. Jednou rourou nateče za hodinu jedna jednotka, druhou rourou čtyři jednotky. Jak brzy se studna naplní, bude-li voda přitékat oběma rourami najednou?“ Řešení přechozí úlohy: Studna se naplní za 2 hodiny a 24 minut. Tuto slovní úlohu zmiňuje např. Müllerová ve své učebnici. (Müllerová, 2002)

V rámci mé diplomové práce jsem se rozhodl vytvořit rozsáhlou sbírku slovních úloh, která je zaměřena čistě na slovní úlohy o společné práci a úlohy o směsích. Do této sbírky jsem zařadil i několik historických slovních úloh např. se zde vyskytuje tato slovní úloha:

Úloha Lva Nikolajeviče Tolstého o sekáčích – L. N. Tolstoj (1838-1910) nebyl jen velkým spisovatelem, ale i pedagogem. Ve svém sídle ma statku Jasná Polana založil a vedl školu pro vesnické děti a sám pro ně psal učebnice. Mimo jiné sestavil např. tuto úlohu:

Skupině sekáčů bylo nařízeno pokosit dvě louky, z nichž jedna byla dvakrát větší než druhá. Půl dne kosila celá skupina sekáčů větší louku; v druhém půldnu se skupina rozdělila na dvě stejné části.

První část skupiny pokračovala v kosení větší louky a do konce dne ji celou pokosila. Druhá část šla kosit druhou, menší louku a kosila ji až do konce dne, ale práci nedokončila. Zbytek menší louky byl pokosen druhý den, a to tak, že ji pokosil jeden sekáč za celý den práce.

a) Kolik sekáčů bylo celkem?
b) Za kolik dnů by byl schopen posekat obě louky jeden sekáč?

Tuto úlohu uvádí ve své knize mnoho autorů např. ji ve své knize zmiňuje Kowal. (Kowal, 1986)

Řešení této úlohy je uvedeno v mé sbírce příkladů.

3.2 Popis slovních úloh o společné práci

Řešení těchto slovních úloh je zpočátku pro mnoho žáků velmi náročné. Postupně zjistí, že jsou si tyto úlohy poměrně podobné a naučí se mechanicky sestavovat rovnici, kde se většinou vyskytují jakési zlomky s neznámou x většinou v čitateli a na pravé straně rovnice je číslo 1. Tento postup si ale časem bohužel natolik zautomatizují, že brzy netuší, proč je na pravé straně právě číslo 1 a u zlomků si nepamatují, zda x mělo být v čitateli nebo ve jmenovateli apod.

Cílem mého multimediálního programu je tedy to, aby žáci objevili souvislosti mezi jednotlivými úlohami, naučili se dané postupy, ale zároveň nepřestaly nad každým příkladem přemýšlet a ověřovat si, zda je daný postup správný a odpovídá zadání. Abych tento postup podpořil, zařadil jsem do sbírky i příklady, kde na pravé straně není obvyklá jednička a také ještě méně běžný případ, že se neznámá vyskytuje u zlomků ve jmenovateli (je znám celkový čas práce, ale nevíme, za jak dlouho by dotyčný práci vykonal sám).

Co si pod těmito úlohami můžeme představit? Jedná se nejen o společnou práci lidí, ale okruh zadání je daleko širší. Většina autorů tyto úlohy označuje jednoduše Úlohy o společné práci a uvádí je v učebnicích pro 8. a 9. ročník. Přesnější název uvádí ve svých učebnicích prof. Půlpán, jak jsem uvedl výše. Ten kapitolu s touto tématikou nazývá „Úlohy o práci a výkonu lidí i strojů.“ (Půlpán a kol., 2009).

V těchto úlohách se většinou jedná o napouštění a vypouštění bazénu (nebo jiné nádrže) dvěma i více přítoky, práce dvou a více strojů, práce dvou a více lidí apod. Tyto úlohy můžeme shrnout takto:
Pracovat mohou dva, tři i více subjektů naráz.

- Všichni začnou a skončí práci ve stejnou dobu.
- Subjekty nezačnou pracovat ve stejnou dobu, ale někdo začne a další se k němu přidá. Nebo začnou pracovat společně a někdo se během práce odpojí (doba práce zde tedy není stejná).

- Subjekty také mohou pracovat proti sobě. Např. voda současně přitéká i odtéká nebo (jak je zaznamenáno na videu v jedné úloze v programu) někdo se věnuje sběru plodin a jiný mu z košíku ujídá.

Doporučená strategie řešení těchto úloh je obsažena v interaktivním programu a také je popsána níže v podkapitole 5.2. Obecné řešení úloh.

4 Úlohy o směsích

4.1 Historie slovních úloh o směsích

Podobně jako úlohy o společné práci vycházejí i úlohy o směsích z každodenních potřeb člověka a některé úlohy tohoto typu jsou přibližně 2 000 let staré. Jedna z úloh, kterou jsem také uvedl ve své sbírce, je úloha ze starořecké matematiky. Jejím autorem je pravděpodobně Metrodoros.

Úloha zní takto: Ukovej mi korunu a smíchej dohromady zlato s mědí, vezmi k tomu také ještě cín a namáhavě připravené železo. Ať to váží šedesát min. Zlato a měď ať váží dvě třetiny celku, zlata s cínem ať jsou naopak tři čtvrtiny, ale zlato a železo dohromady ať váží tři pětiny. Nuže, nyní mi přesně řekni, kolik zlata musíš vzít a mědi, abys dosáhl oné směsi, jakou váhu cínu a jakou konečně železa, abys ukoval korunu přesně ze šedesáti min.

Řešení: Muselo se jednat o korunu vskutku královskou, protože 1 mina = 436 g. Všechny úlohy, které jsem ve sbírce uvedl, lze řešit pomocí jedné rovnice o jedné neznámé, kromě této. Tuto úlohu lze zapsat pomocí soustavy 4 lineárních rovnic o 4 neznámých; ke zhotovení koruny je třeba vzít 30,5 miny zlata, 9,5 miny mědi, 14,5 miny cínu a 5,5 miny železa.

4.2 Popis slovních úloh o směsích

Ve fyzice, v chemii i v praxi, například v potravinářském a chemickém průmyslu, v zemědělství, ve stavebnictví, ale i v mnoha dalších oborech se počítají různé úlohy o směsích. Část z nich se řeší podle určitých receptur, část pomocí zvláštních vzorců a část různými jinými postupy, mezi něž patří i řešení pomocí rovnic s jednou neznámou. Na tento postup se učebnice a sbírky pro základní školu zaměřují a také já jsem se na něj při vytváření interaktivního programu zaměřil.

Základním předpokladem úspěšného vyřešení těchto úloh je znalost jednotek a schopnost převádět různé jednotky mezi sebou. Nejčastěji se zde převádí jednotky objemu či hmotnosti. Dalším nutným předpokladem je znalost procent, které se objevují v řadě úloh.

Při své pedagogické praxi jsem se občas setkal s tím, že učitelé na základní škole úlohy o směsích vypouštěli, protože jim připadala tato látka pro žáky příliš obtížná. Myslím si, že úlohy o směsích by žáci zvládnout měli a to právě proto, protože jsou tyto úlohy značně propojeny s reálným životem. Navíc se příklady tohoto typu často objevují i v přijímacích zkouškách na střední školy. Dokonce se několik úloh objevilo i ve státní maturitě z matematiky a toto učivo se již příliš podrobně na střední škole neprobírá.

Jako rozšiřující učivo se v učebnicích a sbírkách objevují příklady se změnou teploty, které se řeší pomocí měrné tepelné kapacity, kterou by žáci měli znát z hodin fyziky. Pokud jsou tyto úlohy řešeny při hodinách matematiky, tak je to velmi užitečné, neboť dojde k propojení obou těchto předmětů.

Jako příklad uvádím úlohu z učebnice prof. Půlpána: „Olda má malou sestřičku. Pro její vykoupání napustila maminka do vaničky 18 litrů vody teplé 55°C. Kolik litrů vody s teplotou 10°C musela ještě přilít do vody ve vaničce, aby její výsledná teplota byla 37°C? Předpokládejte, že 1 litr vody na koupání má hmotnost 1 kg. (Půlpán, 2009)

5 Interaktivní program – multimediální studijní pomůcka

5.1 O programu

Program je určen především pro žáky 8. a 9. tříd základních škol a studenty nižších ročníků víceletých gymnázií. Může být využit jako multimediální pomůcka při hodinách matematiky, ale stejně tak je vhodný i k domácímu studiu.

Neúspěch při řešení příkladů bývá většinou způsoben tím, že si žáci nedovedou úlohu dostatečně představit v praxi a pak ji nezvládnou ani správně matematicky zapsat. Proto vznikla tato učební pomůcka, která si klade za cíl úlohy představit co nejnázorněji i za pomoci videa či animace, tedy prostředků, které nemohou být v běžné tištěné učebnici použity.

Po spuštění programu se zobrazí úvodní nabídka. Zde si můžeme především vybrat ze 2 typů úloh: 1) Úlohy o společné práci, 2) Úlohy o směsích

Každá úloha je označena podle obtížnosti počtem hvězdiček, čím je úloha obtížnější, tím má více hvězdiček. Není nutné úlohy řešit postupně, ale velmi bych to doporučoval, protože se obtížnost úloh stupňuje. Většině žáků dělají větší obtíže úlohy o směsích, proto je vhodnější řešit nejprve úlohy o společně práci.

Přestože je možné ve většině případů řešit úlohy více způsoby, byl vybrán vždy takový způsob, který je maximálně názorný a také je podobný řešení předchozích úloh, je-li to možné a to z toho důvodu, aby byl postup snadněji zapamatovatelný. Žáci si díky tomu mohou látku nejen rychleji osvojit, ale také to přispívá k tomu, aby řešitelé nalezli maximum spojitostí mezi jednotlivými úlohami.

Přestože je program určen pro žáky 8. i 9. ročníků, tak by všechny úlohy měly být schopni vyřešit žáci 8. ročníků, protože jsou všechny řešitelné pomocí jedné rovnice o jedné neznámé. Jelikož sestavení takové rovnice dělá žákům největší obtíže, tak většině rovnic předchází tabulka, kde jsou všechny veličiny názorně uvedeny.

Některé úlohy jsou doplněny o nápovědu, která obsahuje různé doplňující otázky a odpovědi, které mají žáka donutit se nad úlohou více zamyslet. Je totiž velmi důležité neřešit úlohy jen podle naučeného mechanického postupu, který navíc nemusí přesně danému příkladu odpovídat a někteří tomuto postupu ani nerozumí, ale žáci by se měli vždy snažit se nad úlohou zamyslet.

Všechny úlohy jsou řešené. Některé příklady jsou navíc pro větší názornost a pochopení doplněny videem či animací

Tento program nemá nahradit sbírku příkladů, proto je v každé kategorii pouze několik úloh, po jejichž pochopení by měli být žáci schopni řešit příklady z učebnic a sbírek, které při hodinách matematiky používají. Navíc jsem k programu vytvořil samostatnou rozsáhlou sbírku slovních úloh s touto tématikou, která je uvedena v 6. kapitole.

Obrázek 5: Úvodní obrazovka programu

5.2 Obecné řešení úloh

V úvodu programu mají žáci k dispozici jakýsi obecný návod pro řešení úloh o společné práci a směsích. Tento návod obsahuje tyto body:

- **Kontrola zadání:** Tato zdánlivá banalita je velmi prospěšná, protože se stává často, že si žáci špatně přečtou zadání úlohy. A nejedná se zdaleka jen o problém špatně zapsaných numerických hodnot, ale především o to, že žáci občas neporozumí zadání nebo nepochopí, na co se jich autor úlohy vlastně ptá.
- **Znázornění úlohy:** Není nutné si vždy příklad graficky znázornit, ale občas je to prospěšné, obzvláště pokud máme pocit, že se v „úloze tak trochu ztrácíme.“
- **Kontrola jednotek:** Je dobré zkontrolovat, zda si všechny jednotky vzájemně odpovídají. Např. v úlohách o společné práci může přitékat jedním potrubím zadané množství l/s a druhým potrubím zadaný objem vody vyjádřený v hl/min. Samozřejmě si můžeme vybrat, na kterou jednotku převedeme, ale pro ušetření práce je dobré si promyslet, které jednotce dáme přednost. Vycházíme přitom ze zadání a především pak ze zadané otázky.
- **Vytvoření tabulky:** Na rozdíl od ostatních slovních úloh je zde téměř vždy užitečné vytvořit si tabulku a to jak v úlohách o společné práci, tak ještě více v úlohách o směsích. Čas, který nám to zabere, se nám bohatě vrátí při sestavování rovnice. Při sestavování rovnice dělají žáci nejčastěji chybu, případně nedokáží sestavit rovnici vůbec. Proto je dobré vytvořit si tabulku tak vhodně, aby z ní sestavení rovnice přímo vyplývalo. Problematice sestavení tabulky se proto v programu podrobně zabývám.
- **Sestavení rovnice:** Žáci jsou upozorněni na to, aby nesestavovali rovnici jen mechanicky, což se často stává především u slovních úloh o společné práci, ale aby si sestavení rovnice pečlivě promysleli a pokud možno k tomu využili připravenou tabulku.
- **Řešení rovnice:** Předpokladem úspěšného vyřešení slovní úlohy je samozřejmě jistá početní zdatnost při řešení lineárních rovnic, ale také propojení řešení rovnice se slovní úlohou. Žáci občas vyřeší nějaké číslo, ale

klidně tam ponechají zápornou hodnotu apod. Často také neví, co to vlastně spočítali. Tomu se dá předejít především tím, že po vyřešení rovnice ihned zapíšeme k řešení jednotky (pokud neznámá jednotky má). Mám totiž zkušenosti s tím, že když se žák zamýšlí nad jednotkou výsledku, tak ho to nutí si uvědomit, co to vlastně spočítal.

- **Zkouška a slovní odpověď:** Na závěr bychom měli provést zkoušku a to ne zkoušku rovnice, která může být nejen chybně vyřešena, ale navíc špatně sestavena, ale zkoušku, zda náš výsledek odpovídá zadání. Poté bychom měli napsat slovní odpověď. Občas se stává, že žáci nechtějí slovní odpovědi psát, ale tato část je velmi důležitá. Není to jen jakýsi formální závěr, ale často si teprve při formulaci slovní odpovědi žák uvědomí, co spočítal. A někdy je překvapen, že nám vyřešená rovnice nedává ještě výslednou hodnotu a je nutné ještě výsledek dopočítat. Na to přijdou žáci často až při formulaci odpovědi.

  Tato část navíc pomáhá k tomu, aby úloha nebyla řešena jen mechanicky, ale znovu nutí žáka se nad zadáním, výpočtem a svým výsledkem zamyslet.

5.3 Příklady použité v programu

Do programu jsem vybral 4 úlohy o společné práci a 4 úlohy o směsích. Příklady jsem pečlivě vybíral, aby se obtížnost stupňovala a jednalo se o jakési charakteristické zástupce slovních úloh těchto typů. Důraz je kladen především na aktivitu žáka. Proto je řešení každé úlohy rozloženo do několika kroků a žákům jsou často před začátkem řešení položeny doplňující otázky k úloze, které jim mají pomoci lépe porozumět dané úloze a zamyslet se nad danou problematikou.

5.3.1 Společná práce – řešené příklady

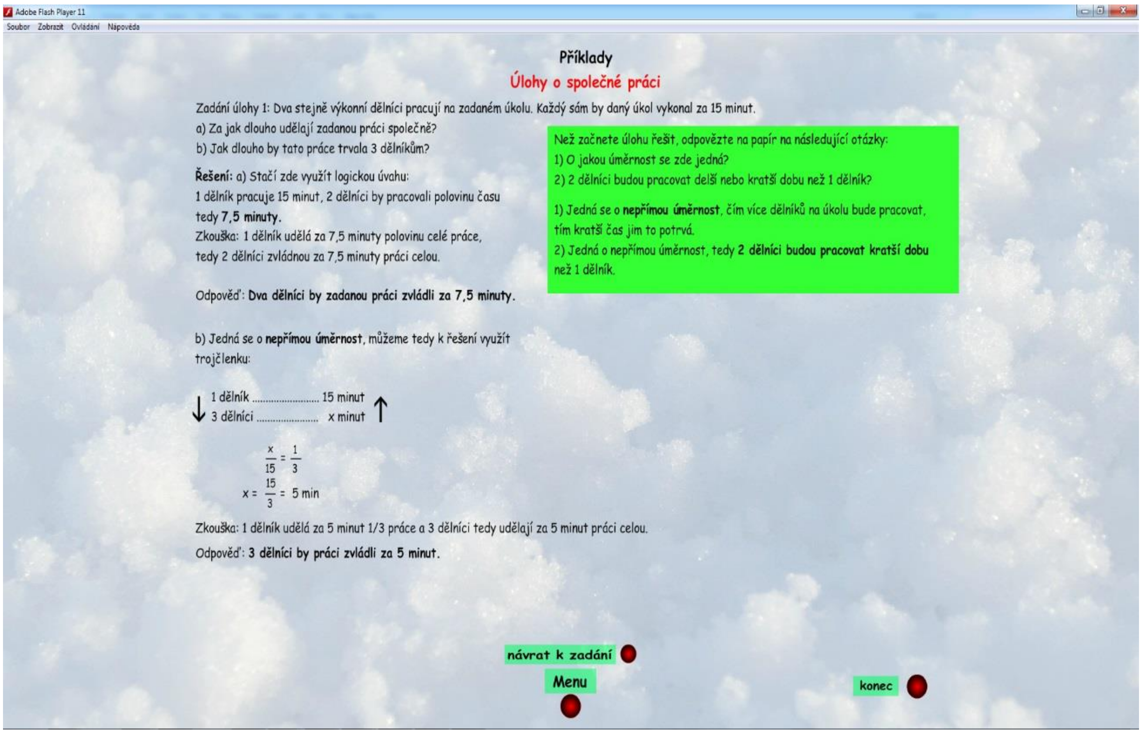
*1) Dva stejně výkonní dělníci pracují na zadaném úkolu. Každý sám by daný úkol vykonal za 15 minut.

a) Za jak dlouho udělají zadanou práci společně?

b) Jak dlouho by tato práce trvala 3 dělníkům?

Ukázka řešení, které je uvedeno v programu, je zobrazena na obr. 6.

Obrázek 6: Úloha1 - společná práce



*2) Dva spolužáci jdou na brigádu trhat třešně. Dostali na starosti menší strom k otrhání. Pavel by sám celý strom otrhal za 6 hodin, Petr by celý strom sám otrhal za 4 hodiny. Jak velkou část stromu bude mít Pavel otrhanou za:

a) 1 hodinu?

b) 2 hodiny

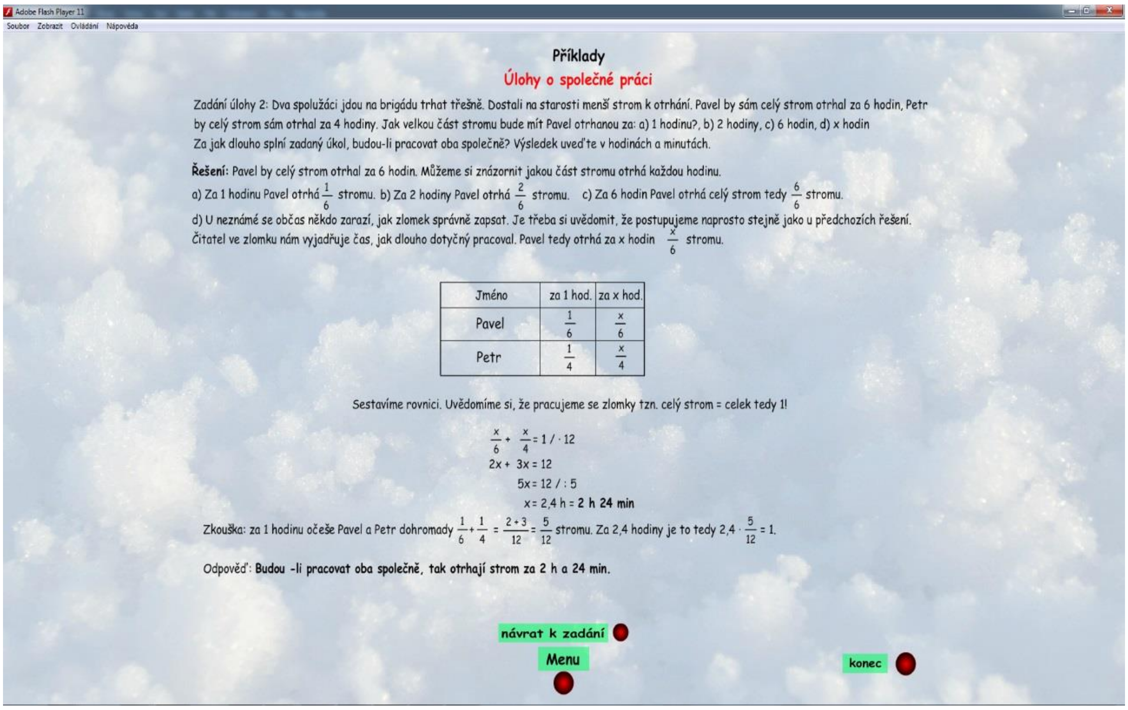
c) 6 hodin

d) x hodin

Za jak dlouho splní zadaný úkol, budou-li pracovat oba společně? Výsledek uveďte v hodinách a minutách.

Ukázka řešení, které je uvedeno v programu, je zobrazena na obr. 7.

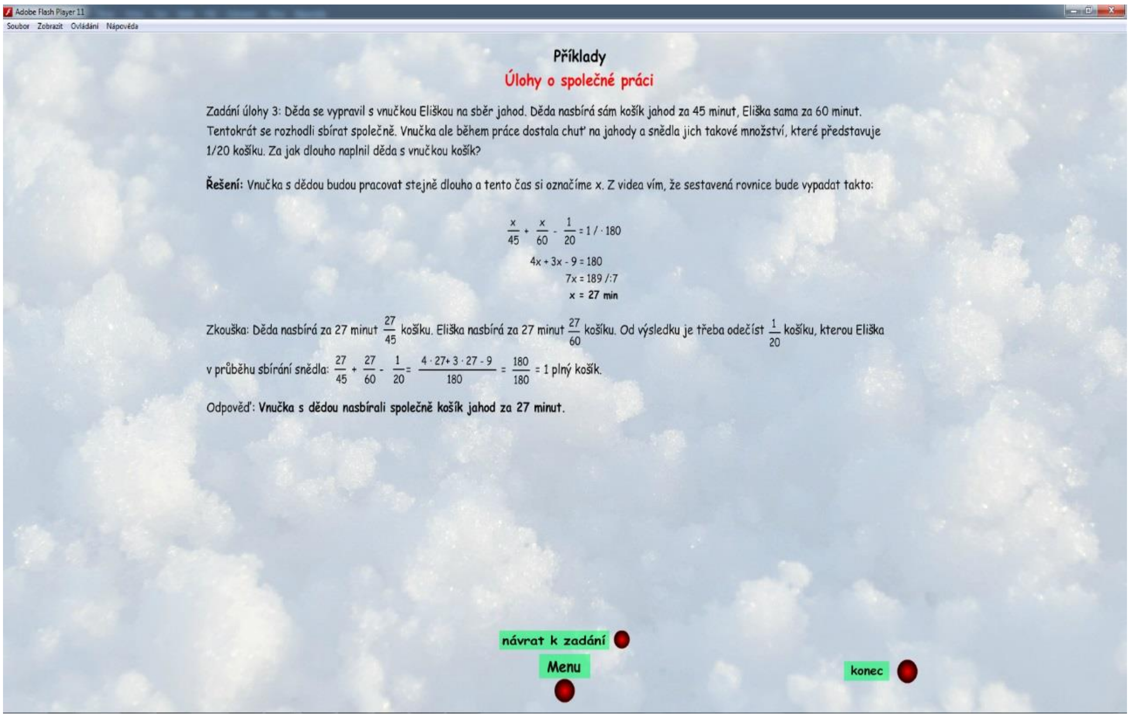
Obrázek 7: Úloha2 - společná práce



**3) Děda se vypravil s vnučkou Eliškou na sběr jahod. Děda nasbírá sám košík jahod za 45 minut, Eliška sama za 60 minut. Tentokrát se rozhodli sbírat společně. Vnučka ale během práce dostala chuť na jahody a snědla jich takové množství, které představuje 1/20 košíku. Za jak dlouho naplnil děda s vnučkou košík?

Ukázka řešení, které je uvedeno v programu, je zobrazena na obr. 8. K této úloze je v programu přiloženo také video, které je zobrazeno na obr. 9.

Obrázek 8: Úloha3 - společná práce

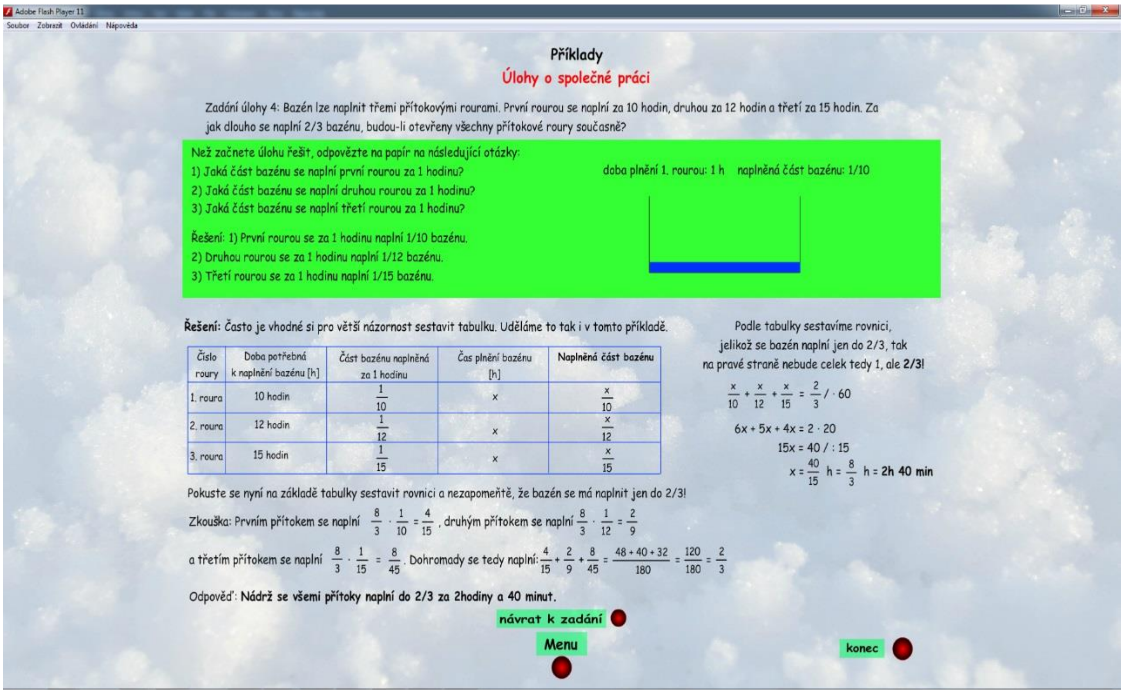


Obrázek 9: Ukázka videa k úloze č. 3 - společná práce

**4) Bazén lze naplnit třemi přítokovými rourami. První rourou se naplní za 10 hodin, druhou za 12 hodin a třetí za 15 hodin. Za jak dlouho se naplní 2/3 bazénu, budou-li otevřeny všechny přítokové roury současně?

Ukázka řešení, které je uvedeno v programu, je zobrazena na obr. 10.

Obrázek 10: Úloha4 - společná práce

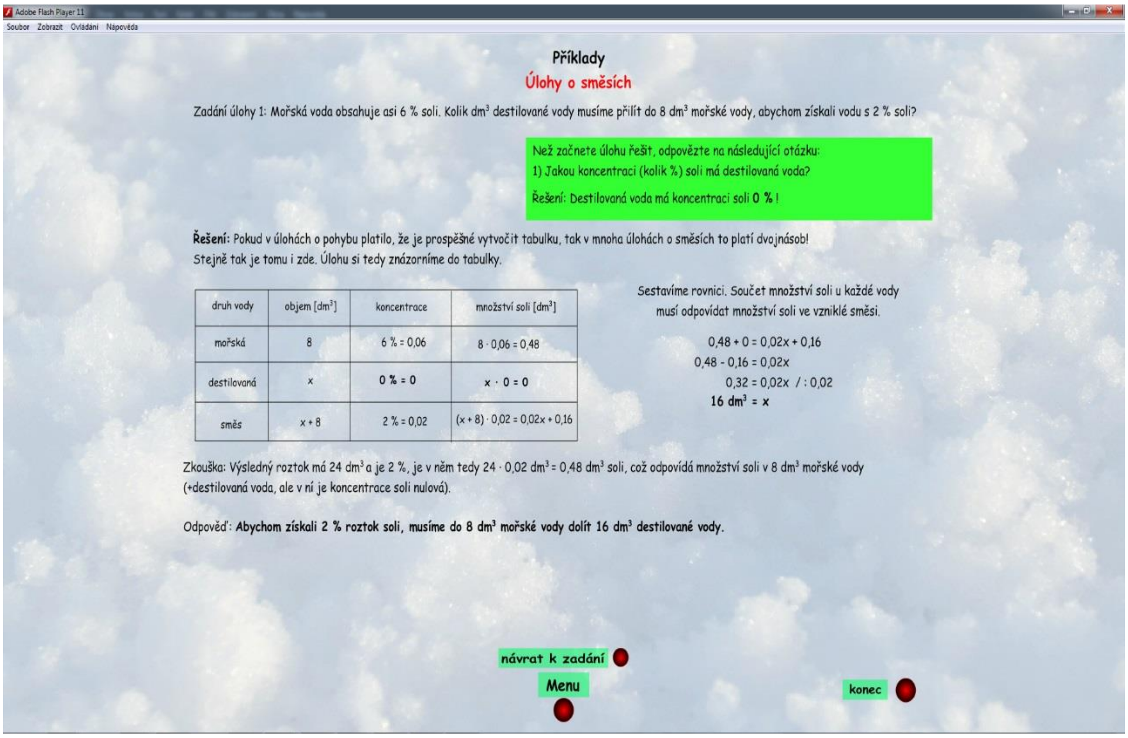


5.3.2 Směsi – řešené příklady

***1) Mořská voda obsahuje asi 6 % soli. Kolik dm^3 destilované vody musíme přilít do 8 dm^3 mořské vody, abychom získali vodu s 2 % soli?

Ukázka řešení, které je uvedeno v programu, je zobrazena na obr. 11.

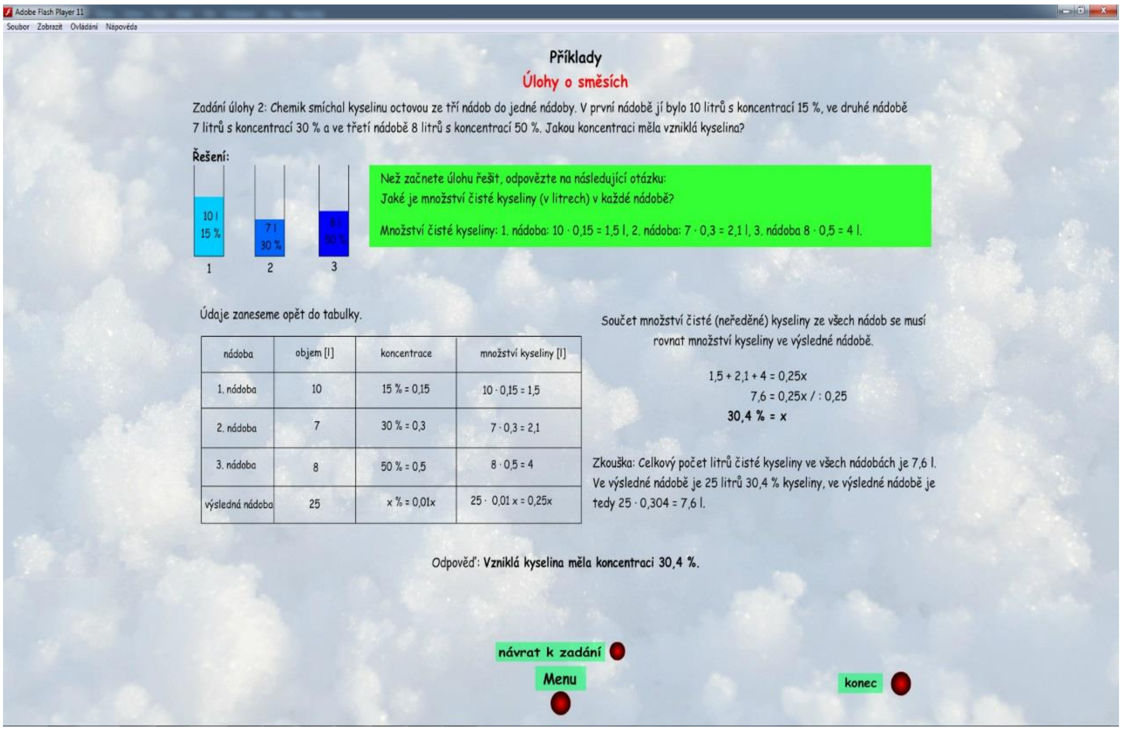
Obrázek 11: Úloha1 - směsi



***2) Chemik smíchal kyselinu octovou ze tří nádob do jedné nádoby. V první nádobě jí bylo 10 litrů s koncentrací 15 %, ve druhé nádobě 7 litrů s koncentrací 30 % a ve třetí nádobě 8 litrů s koncentrací 50 %. Jakou koncentraci měla vzniklá kyselina?

Ukázka řešení, které je uvedeno v programu, je zobrazena na obr. 12.

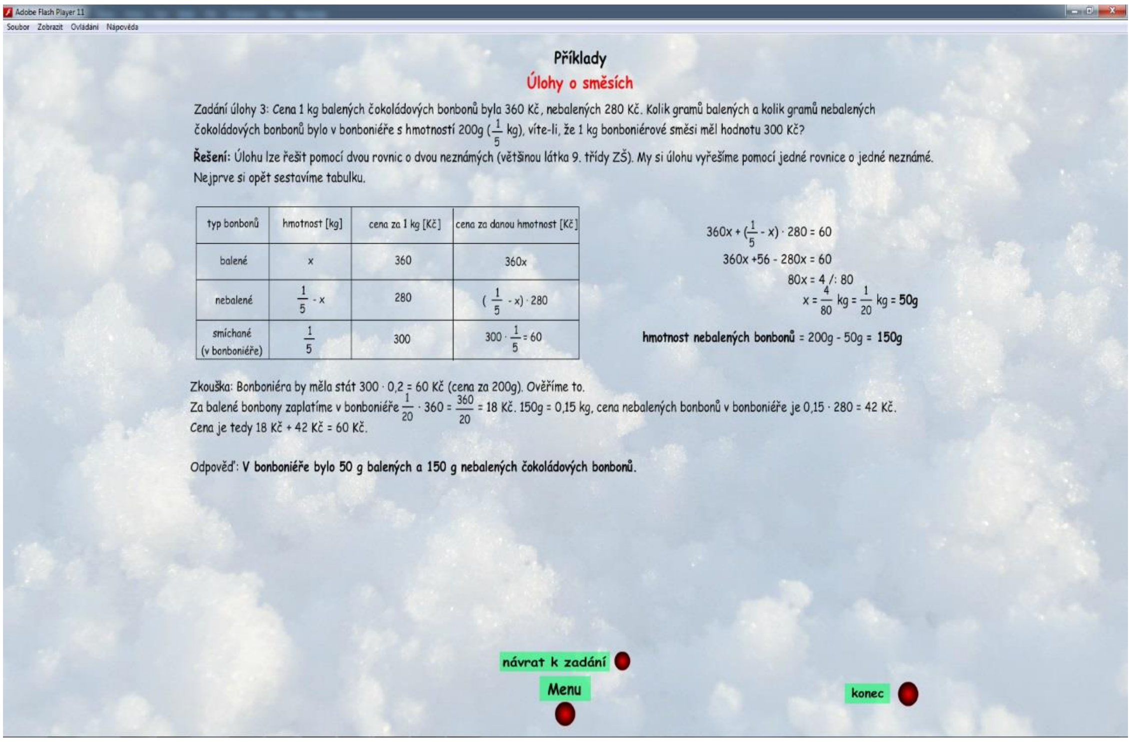
Obrázek 12: Úloha2 - směsi



***3) Cena 1 kg balených čokoládových bonbonů byla 360 Kč, nebalených 280 Kč. Kolik gramů balených a kolik gramů nebalených čokoládových bonbonů bylo v bonboniéře s hmotností 200 g ($\frac{1}{5}$ kg)? Víte –li, že 1 kg bonboniérové směsi měl hodnotu 300 korun.

Ukázka řešení, které je uvedeno v programu, je zobrazena na obr. 13.

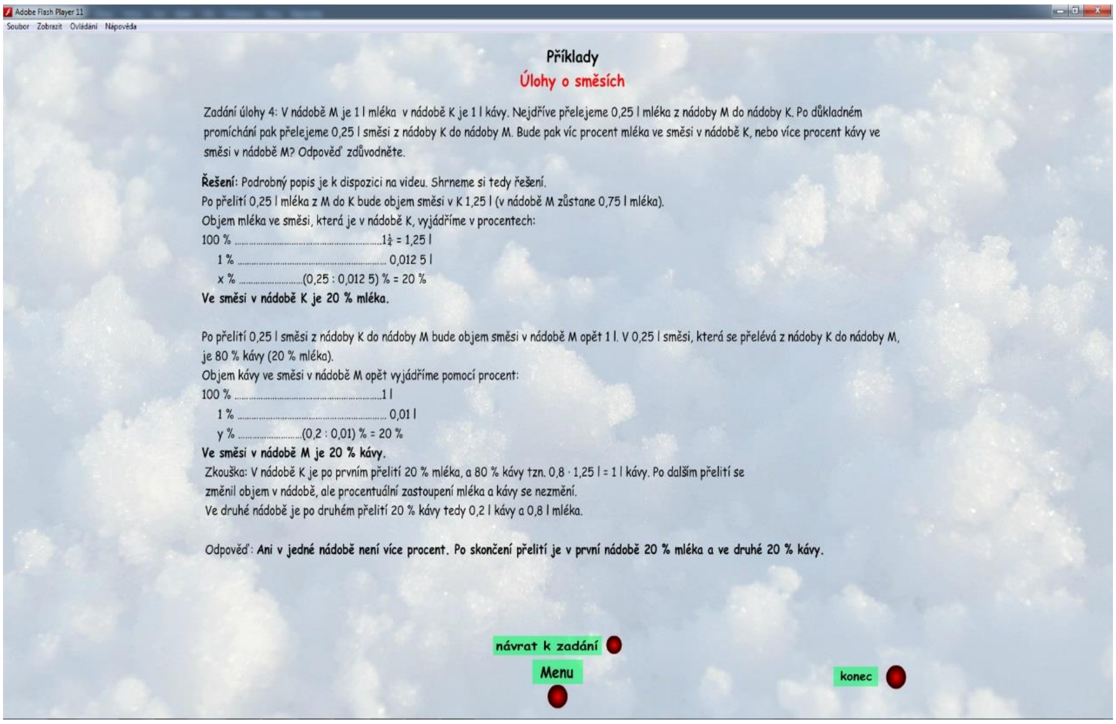
Obrázek 13:Úloha3 - směsi



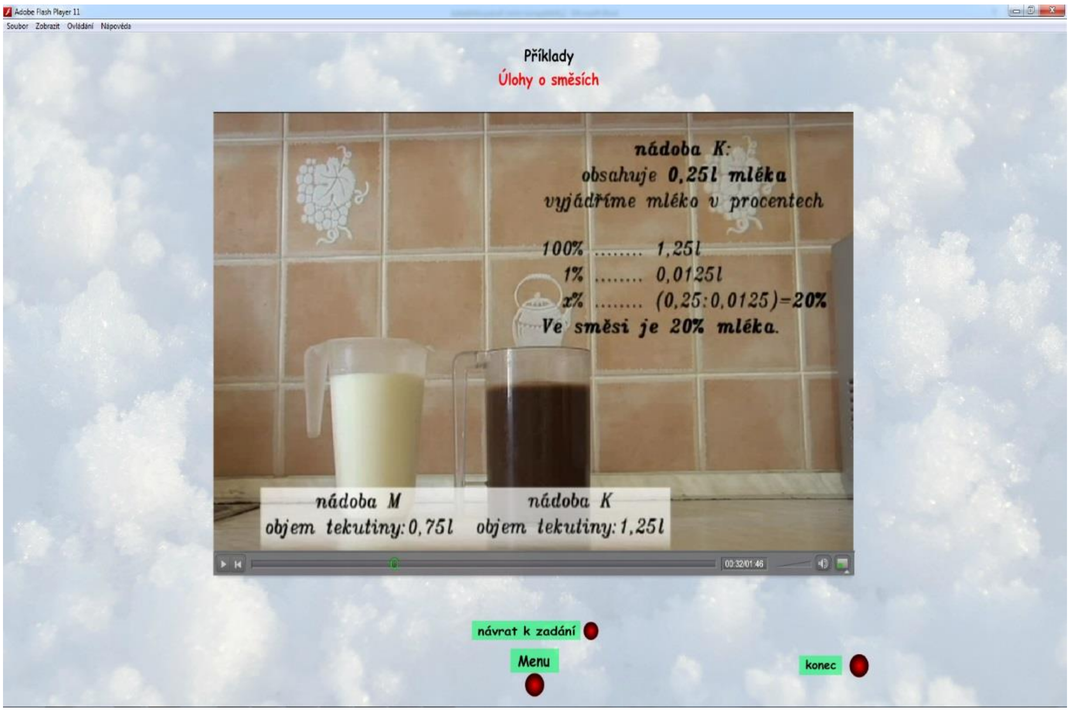
****4) V nádobě M je 1 l mléka, v nádobě K je 1 l kávy. Nejdříve přelejeme 0,25 l mléka z nádoby M do nádoby K. Po důkladném promíchání pak přelejeme 0,25 l směsi z nádoby K do nádoby M. Bude pak víc procent mléka ve směsi v nádobě K, nebo více procent kávy ve směsi v nádobě M? Odpověď zdůvodněte.

Ukázka řešení, které je uvedeno v programu, je zobrazena na obr. 14. K této úloze je v programu přiloženo také video, které je zobrazeno na obr. 15.

Obrázek 14: Úloha 4 - směsi



Obrázek 15: Ukázka videa z úlohy č. 4 - směsi



5.4 Programátorský popis programu

Celá aplikace byla vytvořena v programech Adobe Flash Professional CS6 a Pinnacle Studio (verze 18). Obrázky byly upravovány v programech
Adobe Photoshop CS6 a CorelDRAW X6.

5.4.1 Adobe Flash Professional CS6

Uživatelské prostředí programu bylo vytvořeno v programu Adobe Flash. V tomto programu byly vytvořeny veškeré animace grafiky i textových prvků a prostředí bylo doplněno tlačítky zajišťující interaktivitu programu.

Při hledání vhodného programu pro můj multimediální studijní materiál jsem musel najít prostředí, které mi umožní vytvářet animace, ale současně i pracovat s textem a vkládat videa, aby nebylo nutné videosekvence spouštět v jiném přehrávači.

Nakonec jsem zvolil tuto aplikaci, která nabízí vývojové prostředí pro tvorbu interaktivních a datově náročných aplikací.

„Prostředí Adobe Flash Professional CS5 je komplexní vývojové prostředí obsahující nástroje pro práci s 2D a 3D animacemi, zvukem, vektorovou a bitmapovou grafikou, textem a videem. Jazyk Adobe ActionScript 3.0 je sofistikovaný programovací jazyk zcela začleněný do prostředí Flash CS5, s nímž lze vytvářet bohaté interaktivní projekty." (Adobe Creative Team, 2011)

Přestože se jedná o komplexní prostředí a tvorba aplikace dle mých představ v něm byla víceméně možná, tak vytváření programu bylo velmi zdlouhavé. Adobe Flash má totiž mnoho slabin a rozhodně nemohu říci, že by byl ideální pro tvorbu školních matematických interaktivních materiálů. Na některé slabiny programu Flash bych nyní rád upozornil, abych tak varoval budoucí programátory před možnými nesnázemi a aby se každý připravil na desítky a desítky hodin mravenčí práce.

Jedná se především o práci s textem a především pak s čísly, konkrétně s rovnicemi, zlomky apod. Tento program bohužel nemá integrovanou možnost tvorby matematických výrazů a ani nepodporuje import již vytvořených rovnic a zlomků z jiných programů např. MS Word. Bylo by možné provést import těchto prvků v podobě obrázků, které by již ale nebylo možné dále upravit.

Pokud chceme tyto prvky navíc animovat (což většinou chceme, když v tomto programu pracujeme), tak je nutné každý zlomek vytvářet zvlášť a složit ho z čitatele, jmenovatele a vodorovné čáry, jejíž délku musíme ručně upravit a která bude představovat zlomkovou čáru. Tyto části je pak nutné seskupit a převést na symbol. Naštěstí je možné tento symbol v budoucnu upravit. Každou úpravou se změní veškeré použití tohoto prvku v programu, což je často výhodou jindy velkou nevýhodou. Každopádně bylo nutné takto připravit v programu desítky zlomků a integrovat je do textu. Každý si jistě představí, že toto musíme udělat i při drobné změně např. pouze čísla v čitateli. I když prvek duplikujeme a práci tak urychlíme, přesto nám tento úkon zabere několik minut.

Na další nevýhodu jsem byl upozorněn již před mnoha lety, když jsem se tento program učil pod vedením Mgr. Jana Sedláčka, který mě kdysi do tajů tohoto programu (respektive jeho předchůdce Macromedia Flash) zasvěcoval a který mě pro tvorbu interaktivních materiálů nadchnul. Pan Mgr. Sedláček (pedagog na Fakultě informatiky a managmentu Univerzity Hradec Králové) mě tehdy upozorňoval na to, že tento program je silným animačním nástrojem a hodí se pro tvorbu aplikací, kde je neustále nebo velmi často něco v pohybu např. animace, které budeme vkládat na webové stránky. Základem je totiž časová osa (která je běžná např. u programů na editaci videa), na které veškerý obsah běží a pokud chceme animování zastavit, musíme tak učinit ručně např. pomocí napsání jednoduchého scriptu stop(), který jezdce na časové ose zastaví. Pokud ovšem potřebujeme, aby program více stál než „běžel", tak musíme neustále jezdce na ose zastavovat a kontrolovat správné naprogramování tlačítek na klíčových snímcích, aby bylo možné program znovu rozběhnout, pokud si to uživatel bude přát. A když vytvoříme odkaz na jiný snímek, tak na tomto snímku musíme znovu zajistit, aby jezdec stál, pokud nechceme animaci hned rozběhnout.

Při vytváření multimediálního studijního materiálu, který byl součástí mé bakalářské práce a zabýval se úlohami o pohybu, jsem proto často raději nechal jezdce běžet. Jenže toto se mi později při výuce ukázalo jako největší slabina. Přestože jsem zde vytvořil tlačítko stop na zastavení programu, tak jsem občas zapomněl toto tlačítko zmáčknout a řešení tak žáci viděli celé. Naopak se mi osvědčil systém otázek, kterými si ověřuji, zda žák postupu rozumí a toto si ověřuji u každého kroku. Proto jsem v novém programu trochu méně animoval obrázky a naopak častěji program zastavoval a doplňoval úlohy dalšími podotázkami.

Přestože je tedy možné, především díky jazyku Adobe Action Script 3.0, vytvářet sofistikované bohaté interaktivní projekty, jejich vytváření je poměrně pracné a zdlouhavé, což pro mě jako učitele není výhodné. Po 10 letech praxe vím, že pokud se již rozhodnu vytvořit nějaký interaktivní materiál, že potřebuji, aby byl vytvořený rychle a mohl jsem ho průběžně obměňovat. V tomto případě obměna jednoho příkladu trvá několik dní, což je pro běžnou pedagogickou praxi nepoužitelné. Avšak lepší prostředí, ve kterém bych měl vše, co jsem chtěl, jsem zatím neobjevil. Když jsem testoval v minulých letech svůj předchozí program na úlohy o pohybu a viděl jsem, jak žákům pomáhá, tak jsem se s novým elánem a novou chutí pustil do práce na této aplikaci.

Spouštěcí soubor celého programu se jmenuje *Start.exe*. Tento soubor odkazuje na další soubory formátu Flash: *smesi.swf a prace.swf* a dále odkazuje na 2 videosoubory ve formátu Flash, které jsou uloženy ve složce video, jedná se o tyto soubory: *jahody.swf a kava.swf.*

Program je zahájen vytvořeným krátkým intrem. Cílem úvodních animací je trochu odlehčit atmosféru, která je u žáků často napjatá, protože úlohy tohoto typu řeší často s menším či větším odporem. Proto jsem u úvodní animace porušil zásadu, že méně je někdy více a vložil jsem na toto místo více animovaných prvků. Cílem bylo, aby nás úvodní znělka nejen uvedla do problematiky, ale i trochu děti pobavila.

Okamžitě po spuštění programu se zobrazí nabídka Menu a lze tedy kliknutím na některé tlačítko intro přeskočit.

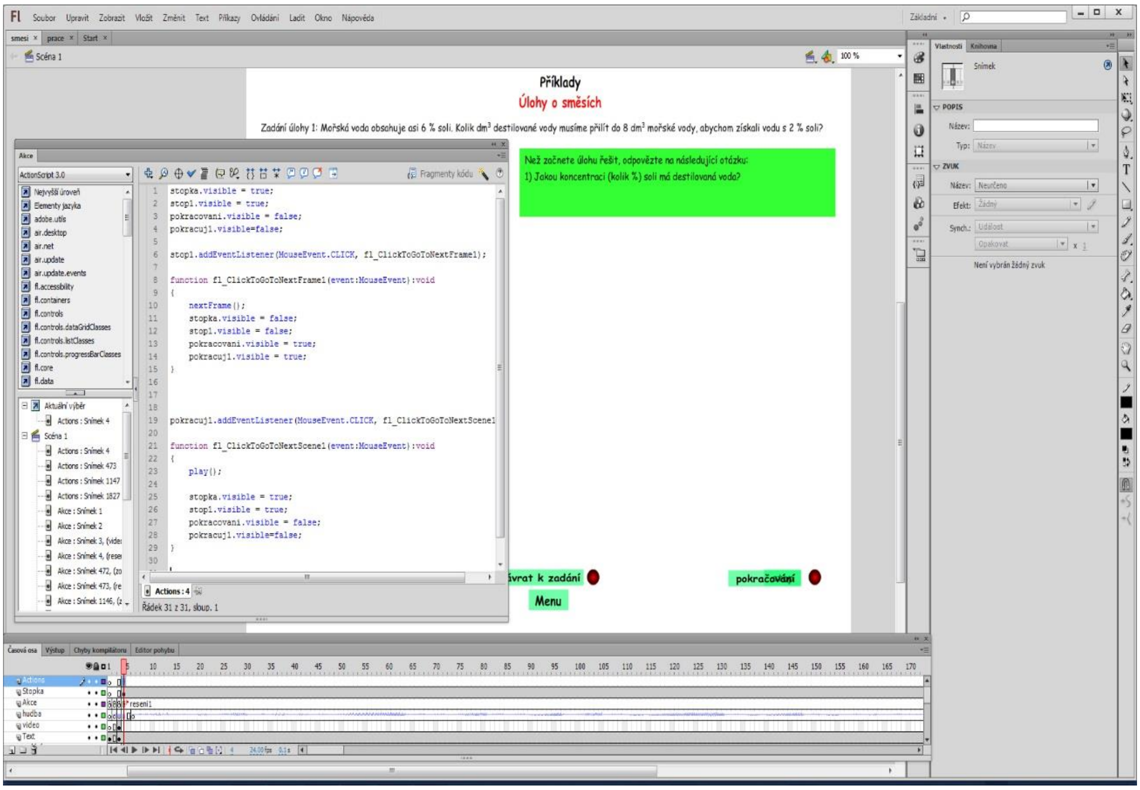
Po zvolení libovolné možnosti z menu (tlačítka O programu, Obecné řešení úloh a Typy úloh) se změní prostředí a nově zvolené pozadí nás provází po celou dobu používání aplikace. Jedná se o pozadí, které nás nemá rozptylovat při počítání úloh. Stejně tak hudbu jsem volil decentní, aby nebyla rušivá. Chtěl jsem původně na obrazovku umístit ještě další tlačítka např. tlačítko pro vypnutí zvuku, ale prioritou pro mě byla maximální přehlednost programu a např. zvuk je možné kdykoliv vypnout vypnutím reproduktorů případně v prostředí Windows apod.

Do úvodních textů byl vložen posuvník pomocí komponenty UIScrollBar, aby byla práce s textem více přehledná. Obecné řešení úloh je animováno a má žákům připomenout základní zásady při řešení úloh. Veškeré animace je možné i v příkladech přeskočit a zobrazit celé řešení pomocí tlačítka Zobrazit vše. Tato možnost je zde ponechána především pro případ, že si uživatel prohlíží příklad již poněkolikáté a nechce vidět jednotlivé kroky znovu.

Animace jsou v programu vytvořeny pomocí funkce Klasického doplnění případně Doplnění tvaru. Rychlost přehrávání je možné v programu nastavit. Ponechal jsem původní nastavení, které je 24 snímků za sekundu. Průměrnou délku animace jsem volil 4-5 sekund tedy přibližně okolo 100 snímků.

Interaktivitu jednotlivých tlačítek jsem zajistil vytvořením několika skriptů. Pomocí Adobe Action Script rovněž ovládám zvuk, skoky mezi jednotlivými snímky apod. Ukázka vývojového prostředí Adobe Flash je na obr. 16.

Obrázek 16: Vývojové prostředí programu Adobe Flash CS6



5.4.2 Pinnacle Studio

Do výsledné aplikace jsem se rozhodl zařadit také dvě videa a to především z toho důvodu, aby bylo ještě více vidět propojení s praxí.

Využil jsem toho, že se filmovému řemeslu věnuji přibližně stejnou dobu, jako pedagogické činnosti, tedy 10 let. V minulosti jsem natáčel dokumentární i hrané snímky a v současné době se věnuji především natáčení různých sportovních a společenských akcí a vzdělávání dalších, především amatérských, filmařů. V minulosti jsem vyučoval techniku natáčení a střihu videa učitele ze základních škol v Královéhradeckém a Pardubickém kraji. Současně jsem vyučoval předmět na základní škole s názvem Digitální video a fotografie a od nového školního roku 2015/2016 budu učit předmět Tvorby videa studenty Hotelové školy v Hradci Králové v rámci nového oboru Multimediální a propagační tvorba. Všechny tyto zkušenosti jsem mohl využít při tvorbě podpůrného videa.

Základní zásadou při natáčení i střihu videa je mít stále na paměti cíl filmu a ten zde nebyl vytvořit krásný a poutavý film, ale pouze krátce zprostředkovat žákům realitu dané úlohy pomocí několika videosekvencí. Proto jsou vytvořená videa krátká, stručná a jednoduchá. Držel jsem se při tvorbě zásady, že video má žákovi pomoci se v úloze orientovat a ne žáka rozptylovat příliš velkým počtem záběrů nebo velkým zahlcením doprovodného textu.

Zde si dovolím malou pedagogickou vsuvku. Během let jsem vypozoroval, že žák, který je u tabule a snaží si matematickou úlohu nějak znázornit, tak pokud dané úloze alespoň částečně rozumí a snaží se dosáhnout cíle, tedy vyřešení úlohy, tak si příklad stručně znázorní, např. město vyznačí křížkem apod. Zatímco žák, který vůbec netuší, jak by měl úlohu vyřešit, si úlohu znázorňuje často zdlouhavě a velmi detailně a tím se snaží získat čas a také odvádí pozornost od matematické podstaty úlohy. Např. místo stručného označení města začne kreslit domy ve městě, kreslí u stromu listí apod.

I já tedy nebudu odvádět pozornost čtenáře a vrátím se nyní k videu. Video musí být natočeno stručně a názorně, aby v dominantním postavení bylo vidět to, co potřebujeme k vyřešení úlohy, a ostatní bylo potlačeno. O toto jsem se snažil a přínos jsem si na žácích několik týdnů ověřoval.

Video jsem natočil na poloprofesionální kameru Sony HDR FX1 a video sestříhal v programu Pinnacle Studio 18.

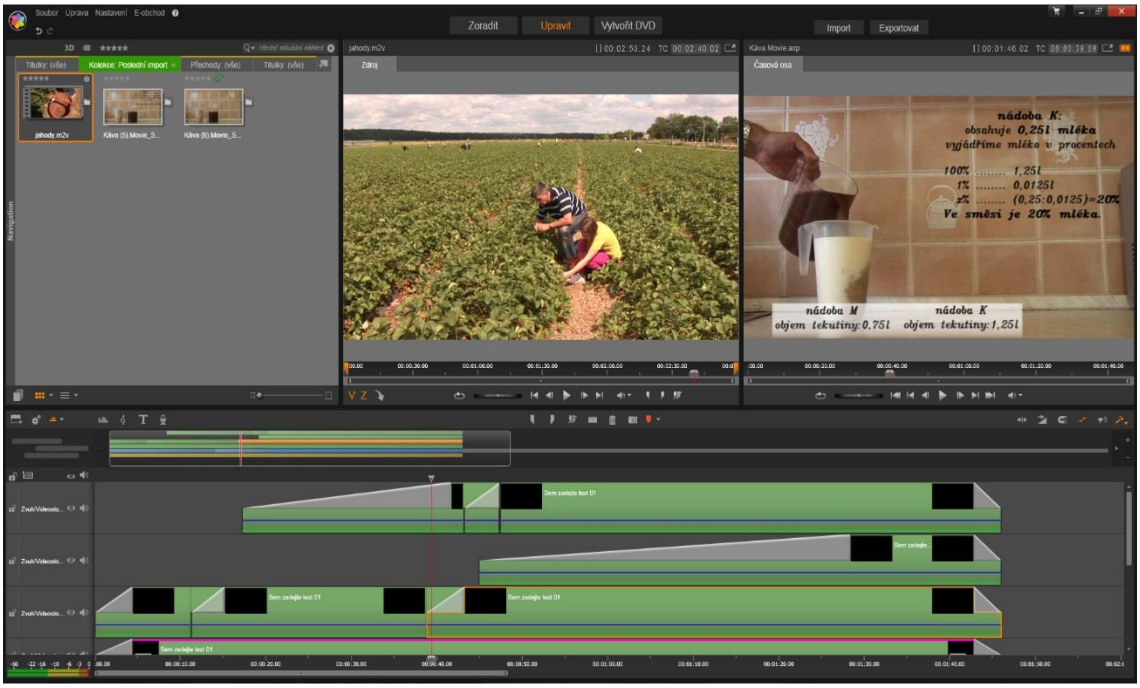
V programu Pinnacle Studio jsem přidal především krátké animované texty a vybral vhodné pasáže do výsledného filmu. Jsou zde voleny pouze základní efekty úpravy, které se týkají textu, žádné další videoefekty nebyly ve filmu použity.

Místo doprovodného slova jsem volil jako pozadí hudbu a řešení úlohy je zprostředkováno pouze textem. Tato možnost je vhodnější především z toho důvodu, že si video můžeme kdykoliv zastavit a promyslet si napsané řešení.

Video o jahodách má délku 2 minuty a 12 sekund a video o smíchání kávy a mléka trvá 1 minutu a 46 sekund. Nijak nás tedy ani při běžných hodinách matematiky výrazně nezdrží.

Prostředí Pinnacle Studio 18 je znázorněno na obr. 17.

Obrázek 17: Aplikace Pinnacle Studio 18



6 Sbírka slovních úloh

Nedílnou součástí multimediálního studijního programu je sbírka příkladů. Měl jsem možnost nahlédnout do více jak 20 učebnic a sbírek pro základní školu a u žádné jsem neměl pocit, že by obsahovala většinu typy úloh, které bych si zde přál mít. Proto jsem se rozhodl vytvořit rozsáhlou vlastní sbírku. Ne že bych se naivně domníval, že některý žák vyřeší více jak 60 příkladů z této sbírky, ale chtěl jsem, aby žáci i učitelé měli možnost širokého výběru úloh zaměřených čistě na problematiku společné práce a směsi.

Přestože řada těchto úloh je převzatých (v závorce je uveden autor) ze sbírek a učebnic pro základní školu, tak zdaleka ne všechny. Některé úlohy jsou mé vlastní. Také jsem chtěl, aby žáci měli i další motivaci úlohy řešit, proto jsem prošel řadu přijímacích zkoušek na střední školy za posledních 10 let a do této sbírky jsem některé tyto úlohy zařadil. Jako bonus zde uvádím úlohy z dalších dvou zdrojů.

Jedná se o úlohy ze státní maturity z matematiky z posledních let. Mnohého čtenáře jistě napadne, že tyto úlohy sem nepatří, když je budou řešit žáci základní školy, ale tyto úlohy jsem sem zařadil záměrně. K jejich řešení naprosto postačí učivo základní školy a nejsou nutné žádné další znalosti. Spíše je třeba se ptát, proč jsou tyto úlohy zařazeny do státní maturity z matematiky. Pravděpodobně proto, protože se autoři celkem správně domnívají, že maturant by látku základní školy měl znát. Co je pro mě ovšem poměrně nepochopitelné, v jak vysoké míře je u státní maturity látka základní školy zařazena. Není mým cílem ani v mé kompetenci tento krok autorů maturity hodnotit, každopádně této skutečnosti mohou učitelé na základní škole využít, aby žáka ještě více motivovali k řešení tohoto typu úloh, protože se jim stejně pravděpodobně nevyhnou.

Dalším zdrojem jsou úlohy historické. Jsou zde zastoupeny spíše pro zajímavost a pro doplnění. Prošel jsem si a spočítal přibližně 20 historických úloh. Některé si byly velmi podobné, proto jsem vybral 4 různé úlohy a zařadil je na závěr sbírky (úlohy 61-64). Úloha 61 je také jediná, která se řeší pomocí více rovnic o více neznámých, proto je určena pro žáky 9. tříd. Všechny ostatní úlohy lze vyřešit pomocí jedné rovnice o jedné neznámé (i když by bylo občas možné i řešení pomocí 2 rovnic o 2 neznámých).

Příklady ve sbírce jsem záměrně nijak neseřazoval. Ani podle obtížnosti, typu úloh nebo zdroje úloh. Sbírka je totiž určena především jako doplněk k multimediálnímu studijnímu materiálu a očekává se, že žák má již podrobně vyřešené úlohy z tohoto programu a nyní si chce látku pouze dostatečně procvičit. Z tohoto důvodu je zde většina úloh neřešených a uvádím zde jen výsledky. Pouze u některých (především složitějších) úloh, přikládám i řešení. Některé úlohy jsou použité v programu v nezměněné nebo mírně upravené podobě.

Příklady ve sbírce jsem sice neseřadil dle obtížnosti, ale uvádím zde počet hvězdiček, které obtížnost znázorňují, aby měl žák i učitel představu, jak složitou úlohu právě řeší. Počet hvězdiček jsem přiděloval nejen podle svého názoru, ale především podle úspěšnosti řešení u žáků. Většinu těchto úloh jsem v průběhu dvou let zadával žákům v hodinách matematiky a měl možnost tak jejich úspěšnost vyhodnotit.

Čím vyšší počet hvězdiček tím více náročná úloha je. Nejnáročnější úlohy mají 5 hvězdiček, nejméně náročné úlohy mají hvězdičku 1. Správná odpověď je znázorněna vždy na konci úlohy v hranaté závorce.

Příklady:

*1) Novákovi by po povodni odčerpali vodu ze sklepa jedním čerpadlem za 6 hodin, druhým za 3 hodiny a třetím za 4 hodiny. Za kolik hodin odčerpají vodu ze sklepa, když použijí všechna čerpadla najednou? (Palková, 2006)

a) Za 1 h 30 min b) za 1 h c) za 1 h 20 min d) za 50 min [c]

**2) Dva zaměstnanci pracovali na projektu. První by jej sám naplnil za 20 dnů, druhý za 24 dny. Kolik dní by trvalo oběma, jestliže prvních pět dnů pracovali společně, pak si první vzal dva dny dovolené (druhý pracoval sám) a po návratu spolu práci dokončili? (Palková, 2006)

a) 5 dní b) 11 dní c) 12 dní d) 6 dní [c]

***3) Vzorek látky o hmotnosti 120 g obsahuje 90 % vody. Po vysušení se hmotnost vzorku snížila na 48 g. Kolik procent vody je nyní ve vzorku? {Klvaňovo gymnázium, Přijimací zkoušky 2006} (Palková, 2006) [75 %]

**4) Jedna tuna mořské vody obsahuje 25 kg soli. Kolik tun mořské vody je třeba odpařit, aby se získaly 2 metrické centy soli? {Klvaňovo gymnázium, Přijímací zkoušky 2006} (Palková, 2006) [8 tun]

**5) Pavel nasbírá košík jahod za 45 minut. Petr pracuje pomaleji a tak naplní košík za 60 minut. Poté se rozhodli pracovat společně. Během práce, ale Petr nenápadně ujedl několik jahod, které představují 1/20 plného košíku. Za jak dlouho budou mít Petr a Pavel plný košík? (autorská úloha) [27 minut]

***6) Chemik smíchal kyselinu octovou ze tří nádob do jedné nádoby. V první nádobě jí bylo 10 litrů s koncentrací 15%, ve druhé nádobě 7 litrů s koncentrací 30 % a ve třetí nádobě 8 litrů s koncentrací 50 %. Jakou koncentraci měla vzniklá kyselina? {Obchodní akademie a střední odborná škola, Přijímací zkoušky, 2006} (Palková, 2006) [30,4 %]

**7) Bazén se naplní jedním přívodem za t hodin, druhým přívodem za s hodin. Zapiš výraz, který vyjadřuje, jaká část bazénu se naplní za 1 hodinu, budou-li oba přívody otevřeny současně. (Gymnázium Havlíčkův Brod, 2011)[$\frac{1}{t}+\frac{1}{s}$]

***8) Za každých 5 minut napíše Dana 10 pozvánek, zatímco Šárka 14 pozvánek. Za jak dlouho společně napíší 120 pozvánek?

a) za 25 minut b) za 26 minut c) za 30 minut

d) za 32 minut e) za delší dobu

(Cermat, 2015) [a]

*** 9) Do lékárny se dodává peroxid vodíku v litrových lahvích jako 30 % roztok. Magistr má podle předpisu lékaře připravit 250 cm^3 kloktadla, jímž je 3 % roztok peroxidu.

a) Kolik cm^3 odlije z lahve? [25 cm^3]
b) Kolik cm^3 destilované vody musí ještě dolít? {Gymnázium Botičská Praha, Přijímací zkoušky, 2005} (Havlínová, Slepička, 2006)[225 cm^3]

***10) Bazén tvaru válce o poloměru 5 m je hluboký 2 m. Bazén se napouští dvěma rourami. První rourou přitékají 4 hl vody za minutu, druhou rourou 5 litrů vody za sekundu. Za jak dlouho bude bazén naplněn tak, aby hladina vody byla 20 cm pod horním okrajem bazénu? {Gymnázium Litoměřičská Praha, Přijímací zkoušky, 2005} (Havlínová, Slepička, 2006) [asi za 3 h 22 min]

**11) Bazén lze naplnit třemi přítokovými rourami. První rourou se naplní za 10 hodin, druhou za 12 hodin a třetí za 15 hodin. Za jak dlouho se naplní 2/3 bazénu, budou-li otevřeny všechny přítokové roury současně? {Gymnázium Čakovice Praha, Přijímací zkoušky, 2005} (Havlínová, Slepička, 2006)

[2 hodiny a 40 minut]

**12) Tři modří papoušci sní 3 kg zrní za 3 dny. Pět zelených papoušků sní 5 kg zrní za 5 dní. 7 oranžových papoušků sní 7 kg zrní za 7 dní. Kteří papoušci jsou největší jedlíci? Zdůvodni. {Gymnázium Čakovice Praha, Přijímací zkoušky, 2005} (Havlínová, Slepička, 2006) [Největší jedlíci jsou modří papoušci, spotřebují 1/3 kg zrní za den]

**13) Bazén se naplní třemi stejnými přívody za 1,5 dne. Bude stačit jeden den na naplnění tohoto bazénu, bude-li těchto přívodů od počátku o jeden víc? {Evropská obchodní akademie Děčín, Přijímací zkoušky, 2005} (Havlínová, Slepička, 2006) [Jeden den nebude stačit (x=1,125)]

**14) Bazén o rozměrech 10 m, 6 m a výšce 2 m se napouští dvěma přítoky. Prvním přitéká 20 l/min, druhým 3 l/s. Za jak dlouho se napustí? Výsledek uveď v hodinách. {Obchodní akademie T. G.. Masaryka Kostelec nad Orlicí, Přijímací zkoušky, 2005} (Havlínová, Slepička, 2006)

[Bazén se napustí za 10 hodin.]

*15) Soška z bronzu má hmotnost 0,5 kg. Bronz je slitina cínu a mědi v poměru 1 : 4. Kolik gramů cínu a kolik gramů mědi obsahuje soška? {Obchodní akademie Ústí nad Labem, Přijímací zkoušky, 2005} (Havlínová, Slepička, 2006)

[Soška obsahuje 100 g cínu a 400 g mědi]

*16) 9 dělníků vykonalo práci za 4 hodiny. Za jak dlouho by stejnou práci vykonalo 6 dělníků?

a) 6 h   b) 3 h   c) 10 h   d) jiný výsledek

{Střední odborná škola a střední zdravotnická škola Vyškov, Přijímací zkoušky, 2005} (Havlínová, Slepička, 2006) [a]

*17) Šest čisticích vozů uklidí ulice města za 12 hodin. Kolik vozů by bylo zapotřebí, aby byl úklid města hotov již za 5 hodin?

a) 16 b) 13 c) 14 d) 15

(Havlínová, Slepička, 2006) [d]

***18) V kavárně se specializují na různé druhy kávy nejen podle způsobu přípravy. Pro vytvoření nové chuti smíchal obchodník dva druhy kávy: 150 g Aromatic po 350,- Kč za kg a 250 g Excelent po 390,- Kč za kg. Kolik stojí 1 kg takovéto směsi?

a) 150,- Kč b) 300,- Kč c) 350,- Kč d) 375,- Kč

(autorská úloha) [d]

***19) Uprostřed bazénu je vodotrysk. Voda z něho vytéká 16 trubicemi o stejném průměru 0,5 cm. Bazén se vyprazdňuje otvorem o průměru 2 cm. Dozorce otevřel přívod vody do vodotrysku, ale zapomněl zavřít odtokový otvor. Za jak dlouho se bazén naplní vodou? (Kowal, 1986) [

Bazén se nikdy nenaplní vodou, protože 16 trubic o průměru 0,5 cm má dohromady průřez $16\pi 0{,}25^2 = \pi$ cm², tj. stejný jako odtokový otvor o průměru 2 cm: $\pi \cdot 1 = \pi$ cm².

****20) Vinař a jeho pomocník: Jeden obchodník měl pomocníka, který měl za povinnost přinášet víno ze sklepa do obchodu. Avšak pomocník měl víno velmi rád a tak každý den vypil z dvacetilitrového sudu vína čtyři sklenky, tedy jeden litr a hned ten den do sudu nalil stejné množství vody, aby obchodník nic nepoznal.

To udělal celkem čtyřikrát. Pátého dne byl sud s vínem prodán hostinskému. Zakrátko se však hostinský vrátil do obchodu a rozhořčeně žádal vrácení peněz, že prý zaplatil 48,- Kč za litr vína a ne vody.

Viník se přiznal, že dolil do sudu 4 litry čisté vody. Nakonec se obchodníci dohodli takto: Pomocník, který kradl víno, vrátí hostinskému peníze tak, aby hostinský zaplatil jen za skutečné množství vína v sudu. Kolik peněz mu musel pomocník vrátit? (Kowal, 1986) (úprava Pavel Nix)

První den vypil pomocník 1 l čistého vína, takže v sudu zůstalo 19 l vína a 1 l vody.

Druhý den vypil $\frac{19}{20}$ l čistého vína. V sudu zůstalo 19 - $\frac{19}{20} = \frac{19^2}{20}$ l čistého vína.

Třetí den vypil $\frac{19^2}{20^2}$ l čistého vína, v sudu zůstalo $\frac{19^2}{20} - \frac{19^2}{20^2} = \frac{19^3}{20^2}$ l čistého vína.

Čtvrtý den vypil $\frac{19^3}{20^3}$ l čistého vína. Dohromady tedy vypil $(1 + \frac{19}{20} + \frac{19^2}{20^2} + \frac{19^3}{20^3}) = 3{,}709$ 875 l.

Pomocník musel vrátit hostinskému 48,- Kč · 3,709875 = 178,074 ≐ 178,- Kč.

*****21)Úloha Lva Nikolajeviče Tolstého o sekáčích – L. N. Tolstoj (1838-1910) nebyl jen velkým spisovatelem, ale i pedagogem. Ve svém sídle ma statku Jasná Polana založil a vedl školu pro vesnické děti a sám pro ně psal učebnice. Mimo jiné sestavil např. tuto úlohu:

Skupině sekáčů bylo nařízeno pokosit dvě louky, z nichž jedna byla dvakrát větší než druhá. Půl dne kosila celá skupina sekáčů větší louku; v druhém půldnu se skupina rozdělila na dvě stejné části.

První část skupiny pokračovala v kosení větší louky a do konce dne ji celou pokosila. Druhá část šla kosit druhou, menší louku a kosila ji až do konce dne, ale práci nedokončila. Zbytek menší louky byl pokosen druhý den, a to tak, že ji pokosil jeden sekáč za celý den práce.

a) Kolik sekáčů bylo celkem?

b) Za kolik dnů by byl schopen posekat obě louky jeden sekáč?

(Kowal, 1986)

(bez použití rovnic): a) Po krátké úvaze dojdeme k závěru, že polovina skupiny sekáčů pokosí za půl dne třetinu větší louky.

Protože výkon sekáčů je stejný na větší i menší louce, je část pokosená polovinou skupiny na menší louce (za druhou polovinu prvního dne) rovna třetině větší louky. Nyní již můžeme vypočítatm jaká část louky zůstala na druhý den práce: polovina větší louky bez třetiny větší louky, což je sestina větší louky.

Jeiný sekáč pokosil šestinu velké louky za jeden den. Za první den byla celkem pokosena celá větší louka (tj. šest šestin) a část menší louky, rovná třetině větší louky (t. dvě šestiny). Dohromady je to osm šestin větší louky. Na její pokosení je třeba osmi sekáčů. Skupina měla osm sekáčů.

Řešení podle Trejbala: Součet výměr obou luk považujeme za 1 celek, malá louka zaujímá 1/3 celku, velká 2/3 celku. Označíme-li x sudý počet všech sekáčů a y část louky, kterou pokosí 1 sekáč za 1 den, platí:

1 sekáč pokosí za ½ dne ½ y louky

x sekáčů pokosí za ½ dne ½ xy louky

½ x sekáčů pokosí za ½ dne ¼ xy louky

Pro výměru velké louky platí: ½ xy + ¼ xy = 2/3; xy = 8/9

Pro výměru male louky platí: ¼ xy + y = 1/3, po dosazení 8/9 za xy dostaneme

¼ · 8/9 + y = 1/3; y = 1/9; ½ y = 1/18.

1 sekáč pokosí za 1 den 1/9 louky.

x · 1/9 = 8/9; x = 8; 8 sekáčů

Zkouška 8 sekáčů pokosí za ½ dne 4/9 (8 · 1/18) louky a po nich 4 sekáči za ½ dne 2/9 (4 · 1/18) louky; 4/9 + 2/9 = 2/3 (výměra velké louky). 4 sekáči pokosí za ½ dne 2/9 (4 · 1/18) louky a 1 sekáč za 1 den 1/9 louky; 2/9 + 1/9 = 1/3 (výměra male louky)

Výsledky: a) Obě louky sekalo 8 sekáčů. b) Jeden sekáč by obě louky posekal za 9 dnů.

*22) Vodní nádrž se vyprázdní jedním čerpadlem za 12 hodin, druhým za 9 hodin a třetím za 4 hodiny. Za kolik hodin se vyprázdní nádrž při současném zapnutí všech tří čerpadel? (Frýzek, Müllerová, 1992) [2,25 hodiny]

**23) Do průtokového zásobníku voda přitéká a současně je z něj odváděna. Kdyby voda pouze přitékala, naplnil by se prázdný zásobník za 18 minut. Kdyby voda pouze odtékala, vyprázdnil by se plný zásobník za 20 minut. Za kolik hodin se naplní prázdný zásobník, jestliže se současně otevře přívod i odvod vody? (Frýzek, Müllerová, 1992) [za 3 hodiny]

***24) Bazén se může plnit třemi přítoky. Prvním by se naplnil za 6 hodin, druhým za 8 hodin a třetím za 12 hodin. Přitéká-li voda současně všemi třemi přítoky, nateče do bazénu za 2 hodiny 435 l vody. Vypočtěte objem bazénu a dobu, za kterou se naplní prázdný bazén při současném otevření všech tří přítoků. (Frýzek, Müllerová, 1992) [580 litrů; 2h 40 min]

**25) Kůň sežere vůz sena za měsíc, koza sežere stejný vůz sena za 2 měsíce a ovce za 3 měsíce. Za jak dlouho sežere kůň, koza a ovce dohromady stejný vůz sena? {Historická úloha} (Frýzek, Müllerová, 1992) [$\frac{6}{11}$ měsíce]

***26) Dvě písařky dostaly za úkol přepsat na počítači článek z jednoho časopisu. Jedna z nich by tuto práci provedla sama za 2 hodiny, druhá za 3 hodiny. V jakém poměru si rozdělí práci, aby referát přepsaly společně v co nejkratší době? Jak dlouho jim bude práce trvat? (Frýzek, Müllerová, 1992) (úprava Pavel Nix) [3:2; 1 h 12 min.]

****27)Pět sekáčů poseká louku u lesa o 1 h dříve, než by to při stejném výkonu dokázali tři sekáči. Za jak dlouho při témže výkonu posekají louku čtyři sekáči? (Trejbal, 1996) [Autor doporučuje zkusit řešení pomocí trojčlenky.]

3 sekáči .... t h
5 sekáčů ..... $(t-1)$ h   nepřímá úměrnost

$$\frac{t}{t-1} = \frac{5}{3}; \quad t = 2{,}5 \text{ h}$$

3 sekáči .... 2,5 h
4 sekáči .... x h   nepřímá úměrnost

$$\frac{x}{2{,}5} = \frac{3}{4}; \quad x = 1\tfrac{7}{8}; \quad 1\tfrac{7}{8} \text{ h} = 1 \text{ h } 52\tfrac{1}{2} \text{ min}$$

Čtyři sekáči posekají louku za necelé 2 hodiny (1 h $52\frac{1}{2}$ min).

****28)V nádobě A bylo 18 l jablečného moštu. Polovina tohoto moštu byla přelita do nádoby B, která byla zčásti naplněna rybízovým moštem. Čtvrtina této směsi byla pak z nádoby B přelita do nádoby A. V tom okamžiku byl objem moštové směsi v obou nádobách stejný.

a) Kolik litrů rybízového moštu bylo v nádobě B před přeléváním?

a) V jakém poměru byl ve směsi jablečný a rybízový most v nádobě A v jakém v nádobě B? (Trejbal, 1996) Když objem rybízového moštu v nádobě B označíme x litrů, platí následující tabulka:

Stav	Množství moštu v l	
	v nádobě A	C nádobě B
před přeléváním	18	x
po 1. přelití	9	x + 9
po 2. přelití	$9 + \frac{x+9}{4}$	$x + 9 - \frac{x+9}{4}$

Platí: $9 + \frac{x+9}{4} = x + 9 - \frac{x+9}{4}$; x = 9; 9 l

Zkouška: množství moštu v nádobách A, B:

před přeléváním: 18 l, 9 l

po 1. přelití: 9 l, 18 l

po 2. přelití: 13,5 (9 + 4,5) l, 13,5 (18 – 4,5) l

b) V nádobě A: 9 + $\frac{x+9}{4}$ = 11,25 + 0,25x; 0,25 · 9 = 2,25

Jablečný most (j) měl objem 11,25 l, rybízový (r) měl objem 2,25 l; j:r=11,25 : 2,25 = 5:1.

V nádobě B: x + 9 - $\frac{x+9}{4}$ = 6,75 + 0,75x; 0,75x = 6,75;

j:r = 6,75:6,75=1 : 1

****29)Sekáč Pavel by pokosil 1 korec ječmene za 6 h, sekáč Petr by pokosil 3 korce ječmene za 16 h a sekáč Roman by pokosil 5 korců ječmene za 24 h. Za jak dlouho by při stejném výkonu pokosili společně 1 korec ječmene všichni tři sekáči?

Poznámka: 1 korec byl ve starověkém Římě pozemek tvaru obdélníku 240 obyčejných stop (1 obyčejná stopa ≐ 31,956 cm) a šířkou 120 obyčejných stop. V našich jednotkách platí: 1 korec ≐ 0,287 732 ha.

(Trejbal, 1996) (úprava Pavel Nix)

Pavel: 1 korec za 6 h, za 1 h $\frac{1}{6}$ korce

Petr: 3 korce za 16 h, 1 korec za $5\frac{1}{3}$ ($\frac{16}{3}$) h, za 1 h $\frac{3}{16}$ (1:$5\frac{1}{3}$) korce

Roman: 5 korců za 24 h, 1 korec za $4\frac{4}{5}$ ($\frac{24}{5}$) h, za 1 h $\frac{5}{24}$ (1:$4\frac{4}{5}$) korce

Označíme-li počet hodin společného kosení x, platí:

x = 1 : ($\frac{1}{6}$ + $\frac{3}{16}$ + $\frac{5}{24}$) = $1\frac{7}{9}$;] $1\frac{7}{9}$ h ≐ 1 h 47 min.

Tři sekáči by pokosili 1 korec ječmene přibližně za 1 h a 47 min.

***30) Ze stejné chemické látky a vody byly vytvořeny dva různé roztoky, jeden s koncentrací 20 %, druhý s koncentrací 70 %. Z obou roztoků bylo třeba vytvořit 6 l nového roztoku se čtyřicetiprocentní koncentrací dané chemické látky. Kolik litrů jednotlivých roztoků bylo k tomuto účelu použito?

(Trejbal, 1996)

Označíme-li *a* počet litrů roztoku s dvacetiprocentní koncentrací, pak platí vztah:

$\frac{20}{100}a$ + $\frac{70}{100}$ (6 – a) = $\frac{40}{100}$ · 6, odtud *a* = 3,6; 6 – 3,6 = 2,4

K vytvoření žádoucího roztoku bylo použito 3,6 l roztoku s koncentrací 20 % a 2,4 l roztoku s koncentrací 70 %.

***31) Po smíchání červených a žlutých bonbonů v poměru 5 : 3 bude 1 kg směsi stát 100,- Kč. Smícháme-li tyto bonbony v opačném poměru, zvýší se cena 1 kg směsi o 2 Kč. Vypočítejte cenu 1 kilogramu červených a 1 kilogramu žlutých bonbonů. (Trejbal, 1996) (úprava Pavel Nix)

Podle podmínek úlohy lze vytvořit soustavu rovnic:

$5x + 3y = 8 \cdot 100$, $3x + 5y = 8 \cdot 102$, x = 97,- Kč, y = 105,- Kč; 1 kilogram červených bonbon stál 97,- Kč a žlutých 105,- Kč.

****32)V nádobě M je 1 l mléka, v nádobě K je 1 l kávy. Nejdříve přelejeme ¼ l mléka z nádoby M do nádoby K. Po důkladném promíchání pak přelejeme ¼ l směsi z nádoby K do nádoby M. Bude pak víc procent mléka ve směsi v nádobě K, nebo více procent kávy ve směsi v nádobě M? Odpověď zdůvodněte.
(Trejbal, 1996) (úprava Pavel Nix)

Po přelití ¼ l mléka z M do K bude objem směsi v K 1¼ l (v nádobě M zůstane ¾ l mléka). Objem mléka ve směsi, která je v nádobě K, vyjádříme v procentech:

100 % ……………………………………………………1¼ = 1,25 l
1 % …………………………………………………… 0,012 5 l
x % ……………………(0,25 : 0,012 5) % = 20 %

Ve směsi v nádobě K je 20 % mléka.

Po přelití ¼ l směsi z nádoby K do nádoby M bude objem směsi v nádobě M opět 1 l. V 0,25 l směsi, která se přelévá z nádoby K do nádoby M, je 80 % kávy (20 % mléka). Objem kávy ve směsi v nádobě M opět vyjádříme pomocí procent:

100 % ……………………………………………………1 l
1 % …………………………………………………… 0,01 l
y % ……………………(0,2 : 0,01) % = 20 %

Ve směsi v nádobě M je 20 % kávy.

****33)V nádobě je 1,2 hl vody 8°C teplé. Kolik litrů vody 48°C teplé je třeba do této nádoby přilít, aby vzniklá směs byla 24°C teplá? Řešte úlohu bez použití fyzikálního vzorce i s jeho použitím. (Trejbal, 1996)

Při ohřátí 1 kg vody o 1°C přijme voda 4,186 kJ tepla; 1 kg vody odpovídá 1 l vody. Řešení úlohy provedeme pomocí tabulky (A - množství vody v l, B – teplota vody ve °C, C – množství tepla ve vodě v kJ, D – označení tepla):

	A	B	C	D
1. voda	120	8	$120 \cdot 8 \cdot 4{,}2$	Q_1
2. voda	x	48	$x \cdot 48 \cdot 4{,}2$	Q_2
směs	120 + x	24	$(120 + x) \cdot 24 \cdot 4{,}2$	Q

Součet množství tepla v jednotlivých částech vody se rovná množství tepla ve směsi vody (tepelné ztráty nebereme v úvahu). Platí:

$120 \cdot 8 \cdot 4{,}2 + 48 \cdot 4{,}2x = 24 \cdot 4{,}2 \cdot (120 + x)$

$x = 80$; 80 l

Ve fyzice se používá vzorec $m_1(t - t_1) = m_2(t_2 - t)$,

kde m_1 je hmotnost vody s teplotou t_1, m_2 je hmotnost vody s teplotou

t_2 $(t_1 < t_2)$ a t je výsledná teplota smíchané vody. Platí:

$m_1 = 120$ kg — $m_1(t - t_1) = m_2(t_2 - t)$

$m_2 = \ldots$ kg — $120\,(24 - 8) = m_2\,(48 - 24)$

$t_1 = 8$°C — $1920 = m_2 \cdot 24$ / : 24

$t_2 = 48$°C — $m_2 = 80$; 80 kg

$t = 24$°C

Do nádoby je třeba přilít 80 litrů vody 48°C teplé.

****34) K učesání všech broskví v sadě pana Pecky se přihlásil určitý počet česáčů. Každý z nich dostal za úkol očesat stejný počet broskví. Před začátkem česání přešli 2 česáči na jinou práci, a tím se počet přidělených broskví pro 1 česáče zvýšil o 3. Současně 1 česáč onemocněl a každému ze zbývajících česáčů přibyly k očesání další 2 broskvoně.

a) Kolik bylo v sadě broskví?

b) Kolik česáčů se původně přihlásilo?

(Trejbal, 1992)

Označíme-li x počet původně přihlášených česáčů a y počet broskví, lze psát:

1 česáč měl původně očesat $\frac{y}{x}$ broskví. Po 1. změně platilo:

$\frac{y}{x-2} = \frac{y}{x} + 3$, po úpravě $3x^2 - 6x - 2y = 0$

Po 2. změně platilo

$\frac{y}{x-3} = \frac{y}{x} + 5$, po úpravě $5x^2 - 15x - 3y = 0$

Řešíme-li obě rovnice jako soustavu, dospějeme k rovnici $x(x - 12) = 0$, která má řešení $x_1 = 0$, $x_2 = 12$. Úloze vyhovuje pouze kořen $x_2 = 12$; $y_2 = 180$.

Zkouška: 180:12 = 15; 180:10 = 18; 180 : 9 = 20

18 – 15 = 3; 20 – 18 = 2

Výsledky: a) 180 broskvoní, b) 12 česáčů

***35) Pan učitel Bedlička vyprávěl dětem, jak se nadřel s vodou. Po dešti si vyšel do lesa na houby. Našel jich tolik, že je sotva unesl. Vždyť čerstvé houby obsahovaly 90% vody. Po rozkrájení a usušení obsahovaly už jen 12% vody. Pokles hmotnosti syrových hub sušením činil 19,5 kg.

a) Kolik kilogramů čerstvých hub si pan učitel Bedlička odnášel z lesa?

b) Kolik kilogramů sušených hub z nich získal? (Trejbal, 1992)

a,b) Označíme-li počet kilogramů sušených hub *x*, platí, že v syrových houbách je 0,9x vody a 0,1x sušiny (zcela bez vody). Toto množství sušiny se nezmění ani v usušených houbách, které obsahují ještě 12 % vody. Jestliže dále označíme hmotnost vody v kilogramech v usušených houbách y, pak celková hmotnost usušených hub (sušiny a vody) se rovná 0,1x + y.

Platí: x – (0,1x + y) = 19,5 $\frac{0{,}1x}{y} = \frac{88}{12}$

0,9x – y = 19,5 0,3x – 22y = 0

Obě rovnice v posledním řádku tvoří soustavu, která má řešení x = 22, y = 0,3;

0,1 · 22 + 0,3 = 2,5

Výsledky: a) 22 kg čerstvých hub, b) 2,5 kg sušených hub.

***36) Měď, zinek a nikl jsou ve slitině v postupném poměru 13:4:3. Vypočítejte hmotnost slitiny, víte-li, že do ní bylo dáno o 2,4 kg více mědi než niklu. (Trejbal, 1992)

Po označení hmotnosti mědi *m*, zinku *z* a niklu *n* můžeme psát:

m : z : n = 13 : 4 : 3, z toho

$\frac{m}{n} = \frac{13}{3}$, dale platí, že m – n = 2,4.

Tato soustava rovnic má řešení m = 3,12; n = 0,72. Z uvedeného postupného poměru vyplývá, že: $\frac{m}{z} = \frac{13}{4}$ (z ≠ 0), po dosažení hodnoty *m* dostáváme $\frac{3{,}12}{z} = \frac{13}{4}$, odtud z = 0,96;

m + z + n = 3,12 + 0,96 + 0,72 = 4,8; 4,8 kg

Zkouška: 3,12 : 0,96 : 0,72 = 312 : 96 :72 = 13 : 4 : 3

3,12 – 0,72 = 2,4

Slitina má hmotnost 4,8 kg.

****37) Úloha Isaaca Newtona: Tráva na celé louce roste stejně hustě a stejně rychle. Je známo, že 60 krav by spáslo trávu za 24 dní a 30 krav za 60 dní.

a) Kolik krav by spáslo trávu za 100 dní?

b) Kolik krav by se mohlo pást na louce, aby trávy neubývalo? (Trejbal, 1992)

Nazvěme porcí množství trávy, které spase 1 kráva za 1 den.

Platí: 1 kráva spase	za 1 den	1 porci trávy
60 krav spase	za 1 den	60 porcí trávy
60 krav spase	za 24 dní	1 440 (= 60 · 24) porcí trávy.

Obdobně spase 30 krav za 60 dní 1800 (= 30 · 60) porcí trávy. Za 36 (= 60 - 24) dní vyroste na louce 360 (= 1800 – 1440) porcí trávy. Za 1 den vyroste 36krát méně, tj. 10 (= 360 : 36) porcí trávy. Potom za 24 dní vyroste 240 (=24 · 10) porcí trávy a za 60 dní vyroste 600 (= 60 · 10) porcí trávy. Ověřme si, zda vstupní údaje byly správně zadány. V prvním případě bylo na začátku pasení 1 200 (= 1 440 – 240) porcí trávy. Ve druhém případě bylo od počátku pasení rovněž 1 200 (= 1 800 – 600) porcí trávy. Proto na konci stého dne pasení musí být spasená celá louka, která představuje původních 1 200 porcí trávy a 1 000 (= 100 · 10) porcí trávy, které přirostou v průběhu pasení. Celkem to představuje 2 200 porcí trávy. Označíme-li x neznámý počet krav a při stodenním pasení, pak lze psát:

$100x = 2\,200$

$x = 22$

a) Za 100 dní by vypáslo louku 22 krav.

b) Denně by se mohlo pást 10 krav, aniž by tráva z louky ubývala.

***38) Zorá-li každý traktor jedno pole, zůstane jedno pole neobděláno. Když byl jeden traktor vyřazen, pak každý zbývající traktor zoral dvě pole. Kolik bylo polí a kolik traktorů? (Houska, 1994) [3 traktory a 4 pole]

*39) Tankování paliva do lodi se provádí dvěma motory. Běží-li pouze větší motor, trvá tankování 3 hodiny. Běží-li pouze menší motor, trvá tankování 5 hodin. Jak dlouho bude tankování trvat, jestliže poběží oba motory? (Houska, 1994) [1 h 52,5 min.]

**40) Hmotnostní poměr sodíku a chloru v kuchyňské soli je 23 : 35,5.

a) Kolik gramů sodíku a kolik gramů chloru je ve 100 g kuchyňské soli?

Určete množství kuchyňské soli, v němž je

b) 100 g chloru, c) 100 g sodíku.

(Houska, 1994)

[a) 39,3 g Na, 60,7 g Cl, b) 164,8 g, c) 254,3 g]

**41) Česká dvacetikoruna se razí z ocelového jádra, které je po obou stranách potažené plátkem mosazi obsahující 750 dílů mědi a 250 dílů zinku. Mosaz tvoří 5 % hmotnosti mince. Určete postupný poměr hmotnosti mědi, zinku a oceli ve dvacetikoruně. (autorská úloha) [3 : 1 : 76]

**42) Dvě skupiny dělníků upravovaly železniční trať tak, že měly začít práci ve stejný den z obou konců trati proti sobě a každá skupina měla projít denně 120 m. Jedna skupina nastoupila o den později, protože musela dokončit předchozí práci. Zvýšila proto svůj výkon na 150 m denně, takže se obě skupiny přesto setkaly v původně stanoveném termínu na předem určeném místě. Na kolik dní byla práce rozvržena a kolik metrů měří opravený úsek trati? (Houska, 1994) [5 dní, 1 200 m]

***43) Kolik rozpouštědla je třeba přilít do 5 litrů 80 % roztoku, aby vznikl roztok 40 %? (Houska, 1994)[5 litrů]

**44) Součet nosností dvou nákladních aut odvážejících štěrk na stavbu dálnice je 7 t. Auto s větší nosností vykonalo při pondělní směně celkem 12 jízd, s menší nosností 15 jízd. Dohromady při těchto jízdách navozila obě auta 93 t štěrku. Vypočítejte:

a) nosnost jednotlivých nákladních aut
b) hmotnost odvezeného štěrku při úterní směně, kdy každé auto vykonalo 16 jízd

(Půlpán, Čihák, Trejbal, 2010) [a) 4 t, 3 t, b) 112 t]

***45) Cena 1 kg balených čokoládových bonbonů byla 360 Kč, nebalených 280 Kč. Kolik gramů balených a kolik gramů nebalených čokoládových bonbonů bylo v bonboniéře s hmotností 200 g ($\frac{1}{5}$ kg)? Víte –li, že 1 kg bonboniérové směsi měl hodnotu 300 korun. (Půlpán, Čihák, Trejbal, 2010)

[50 g balených a 150 g nebalených bonbonů]

***46) Bronz je slitina obsahující aspoň 78 % mědi, zbytek je cín. Obsahuje-li slitina 10 % cínu a 90 % mědi, nazývá se dělovina. Obsahuje-li 20 % cínu a 80 % mědi, nazývá se zvonovina. Za 2. světové války vyrábělo fašistické Německo z ukradených zvonů dělovinu. Kolik tun roztavené zvonoviny a kolik tun roztavené mědi muselo být slito, aby vzniklo 150 tun roztavené děloviny? (Půlpán, Čihák, Trejbal, 2010)

Hmotnost mědi ve zvonovině + hmotnost mědi = hmotnost mědi v dělovině: $0{,}8x + y = 0{,}9 \cdot 150$. Dále platí: Hmotnost zvonoviny + hmotnost mědi = hmotnost děloviny: $x + y = 150$. Na výrobu 150 t děloviny bylo použito 75 t zvonoviny a 75 t mědi. Zkouška: 80 % ze 75 t + 100 % ze 75 t = 60 t + 75 t = 135 t … 90 % ze 150 t = 135 t.

***47) Mořská voda obsahuje asi 6 % soli. Kolik dm^3 destilované vody musíme přilít do 8 dm^3 mořské vody, abychom získali vodu s 2 % soli?
(Půlpán, Čihák, Trejbal, 2010) [16 dm^3]

***48) V továrně na zpracování ovoce přitéká jablečný mošt dvěma průtokovými ventily do nádrže s objemem 7 m^3. Prvním ventilem přiteče za 1 minutu 6 litrů moštu. Oběma ventily se nádrž zcela naplní moštem za 8 hodin a 20 minut. Kolik litrů moštu přiteče do nádrže druhým ventilem za 1 hodinu? (Půlpán, Čihák, Trejbal, 2010)

[$8\frac{1}{3}$ h převedeme na minuty … $(6 + x) \cdot 500 = ?$ litrů … výsledek: 480 litrů]

**49) Tři podlaháři by položili „plovoucí“ (nepřilepenou) podlahu za 3 hodiny. Nejšikovnější z nich by ji sám položil za 6 hodin, podlaháři po vyučení by to trvalo 9 hodin. Za kolik hodin by sám tuto podlahu položil třetí z nich, který se tomuto řemeslu teprve učí? (Půlpán, Čihák, Trejbal, 2010)

[za 18 hodin]

*****50) Olda má malou sestřičku. Pro její vykoupání napustila maminka do vaničky 18 litrů vody teplé 55°C. Kolik litrů vody s teplotou 10°C musela ještě přilít do vody ve vaničce, aby její výsledná teplota byla 37°C? Předpokládejte, že 1 litr vody na koupání má hmotnost 1 kg.

(Půlpán, Čihák, Trejbal, 2010) [Musela přilít 12 litrů vody teplé 10°C]

*51) Fasádní omítka byla prodávána v pytlích s obsahem 30 kg. Tato omítka byla směsí cementu, písku a prachového vápna. Složky omítky v pytli měly celkovou hodnotu 66 Kč. Jejich zastoupení ve směsi, kromě 2 položek, je uvedeno v následující tabulce:

Složky omítky	**Počet kg**	**Cena 1 kg (Kč)**	**Celková cena (Kč)**
cement	3	4	12
písek	18	1	18
vápno	9	x	9x

a) Vypočítejte cenu 1 kg prachového vápna.

1 pytel s obsahem 30 kg omítky prodával výrobce za 286 Kč. Vypočítejte výši jeho zisku, jestliže za prázdný pytel zaplatil 40 Kč a jeho výrobní náklady měly hodnotu 80 Kč. (Půlpán, Čihák, Trejbal, 2010)

[a) 4 Kč, b) 100 Kč]

*52) Dva stejně výkonní dělníci pracují na zadaném úkolu. Každý sám by daný úkol vykonal za 15 minut.

a) Za jak dlouho udělají zadanou práci společně?
b) Jak dlouho by tato práce trvala 3 dělníkům?

(autorská úloha) [a) 7,5 minut, b) 5 minut]

*53) Dva spolužáci jdou na brigádu trhat třešně. Dostali na starosti menší strom k otrhání. Pavel by sám celý strom otrhal za 6 hodin, Petr by celý strom sám otrhal za 4 hodiny.

a) Jak velkou část stromu bude mít Pavel otrhanou za 1 hodinu?
b) Jak velkou část stromu bude mít Pavel otrhanou za 2 hodiny?
c) Jak velkou část stromu bude mít Pavel otrhanou za 6 hodin?

d) Jak velkou část stromu bude mít Pavel otrhanou za x hodin?

e) Za jak dlouho splní zadaný úkol, budou-li pracovat oba společně? Výsledek uveďte v hodinách a minutách. (autorská úloha)

[a) $\frac{1}{6}$, b) $\frac{2}{6}$, c) $\frac{6}{6}$, d) $\frac{x}{6}$, e) 2h a 24 minut]

***54) Kolik litrů 60 % roztoku a kolik litrů 40 % roztoku je zapotřebí k vytvoření 2 litrů 55 % roztoku? (Bušek, Kubínová, Novotná, 1995)

[Je třeba 1,5 litru 60 % roztoku a 0,5 litru 40 % roztoku]

**55) Úklid pokoje zabere mamince 30 min. Když si pokoj uklízí Dalibor sám, zabere mu stejná činnost 90 min. Za jak dlouho by společně maminka a Dalibor uklidili 2 takové pokoje?

a) 22,5 min b) 45 min c) 90 min d) 30 min

(Kulhavá, Červinková, Cizlerová, Čelišová, 2013) [b) 45min]

***56) Vodní nádrž je plněna dvěma přívody. Prvním za 3 hodiny natekla třetina nádrže. Pak byl první přítok zastaven a puštěn byl druhý přítok po dobu 2 hodin. Natekla druhá třetina nádrže. Jak dlouho ještě musí být puštěny oba přítoky, aby se nádrž zcela naplnila? (Hejný, Sethlíková, 1995)

Za 1 hodinu nateče prvním přítokem $\frac{1}{9}$ nádrže, druhým přítokem $\frac{1}{6}$ nádrže. Tedy oběma přítoky současně nateče za hodinu $\frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{5}{18}$ nádrže. Třetina nádrže pak oběma přítoky nateče za $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{18}} = \frac{6}{5}$ hodiny , tj. 72 minut. Oba přítoky musí být puštěny ještě 72 minut.

***57) Když jsme smíchali 40 kg mořské vody se 60 kg dešťové vody, vznikla voda obsahující 2 % soli. Kolik procent soli obsahovala mořská voda?

(Trejbal, Kučinová, Vintera, 2000) [5 %]

***58) K desinfekci ran se používá roztok peroxidu vodíku, což je směs čistého peroxidu vodíku (H_2O_2) a vody (H_2O). Kolikaprocentní roztok peroxidu vodíku získáme smícháním 400 gramů tříprocentního roztoku peroxidu vodíku se 600 gramy osmiprocentního roztoku peroxidu vodíku?

(Trejbal, 2000) [6 % roztok]

***59) Čajové směsi jsou namíchané ze 2 druhů čaje. Ve standardní čajové směsi jsou hmotnosti obou druhů čaje v poměru 1 : 3 a 40gramové balení této směsi se prodává za 42 Kč. Ve výběrové čajové směsi jsou hmotnosti obou druhů čaje v poměru 1 : 1 a 50gramové balení této směsi se prodává za 60 Kč. Vypočtěte cenu 10 gramů dražšího druhu čaje. {Maturitní testy, jaro 2015} (Cermat, 2015) [15 Kč]

**60) Petr Dokáže udělat celou práci sám za 6 hodin. Martin dokáže udělat stejnou práci sám za 8 hodin. Ve skutečnosti pracoval nejdříve Petr a potom ho vystřídal Martin. Celou práci tak zvládli za 6,5 hodiny. (Žádný z chlapců neměnil své pracovní tempo a střídání chlapců proběhlo bez časové prodlevy.) Vypočtěte, jak dlouho pracoval Petr, než ho vystřídal Martin. {Maturitní testy, jaro 2014} (Cermat, 2015) [4,5 hodiny]

*****61) Ukovej mi korunu a smíchej dohromady zlato s mědí, vezmi k tomu také ještě cín a namáhavě připravené železo. Ať to váží šedesát min. Zlato a měď ať váží dvě třetiny celku, zlata s cínem ať jsou naopak tři čtvrtiny, ale zlato a železo dohromady ať váží tři pětiny. Nuže, nyní mi přesně řekni, kolik zlata musíš vzít a mědi, abys dosáhl oné směsi, jakou váhu cínu a jakou konečně železa, abys ukoval korunu přesně ze šedesáti min. {historická úloha} (Mačák, 2001)

Muselo se jednat o korunu vskutku královskou, protože 1 mina = 436 g. Úlohu lze zapsat pomocí soustavy 4 lineárních rovnic o 4 neznámých; ke zhotovení koruny je třeba vzít 30,5 miny zlata, 9,5 miny mědi, 14,5 miny cínu a 5,5 miny železa.

***62) Jsou čtyři fontány. První naplní nádrž za den, druhá za dva, třetí za tři a čtvrtá za čtyři dny. Jakpak dlouho to trvá, jsou-li všechny otevřené? *Poznámka: Bylo bráno, že 1 den = 12 hodin.* {historická úloha} (Mačák, 2001) [12/25 dne]

****63) Jsem bronzový lev. Z chodidla pravé nohy, z obou očí a z úst proudí ven voda. Za dva dny naplní nádrž pravé oko, levé pak za tři, ale noha za čtyři. Už šest hodin stačí ústům. Jakpak dlouho to trvá, jsou-li současně otevřeny oči a noha a ústa? *Poznámka: Bylo bráno, že 1 den = 12 hodin.*

{historická úloha} (Mačák, 2001) [3 a 33/37 hod.]

***64) Lev sežere ovci za 4 hodiny, leopard za 5 hodin a medvěd za 6 hodin. Za jak dlouho ji sežerou společně? {historická úloha: Úloha ze středověké Evropy – Leonardo Pisánský} [$1\frac{23}{37}$]

7 Ověření přínosu práce

7.1 Přípravná studie

Na základě předchozí zkušenosti se svým minulým multimediálním programem, jsem se rozhodl, že než začnu vytvářet program nový, ověřím si v přípravné studii, co dělá žákům největší obtíže při řešení slovních úloh o společné práci a úloh o směsích.

Zaměřil jsem se nejen na správnost výsledků, ale především na zvolený postup žáků a zkoumání, ve které fázi řešení úlohy se žáci dopouštěli nejčastěji chyb.

Studii jsem provedl na základní škole Sever v Hradci Králové v roce 2014 u žáků 8. a 9. tříd. Celkem se studie zúčastnilo 101 žáků.

Úmyslně jsem zadal příklady žákům v době, kdy již uplynula delší doba od probrání látky a výsledkem jsem byl poměrně šokován.

Žákům byly předloženy tyto úlohy:

1) Dva stejně výkonní dělníci pracují na zadaném úkolu. Každý sám by daný úkol vykonal za 15 minut.
   a) Za jak dlouho udělají zadanou práci společně?
   b) Jak dlouho by tato práce trvala 3 dělníkům?

2) Dva spolužáci jdou na brigádu trhat třešně. Dostali na starosti menší strom k otrhání. Pavel by sám celý strom otrhal za 6 hodin, Petr by celý strom sám otrhal za 4 hodiny.
   a) Jak velkou část stromu bude mít Pavel otrhanou za 1 hodinu?
   b) Jak velkou část stromu bude mít Pavel otrhanou za 2 hodiny?
   c) Jak velkou část stromu bude mít Pavel otrhanou za 6 hodin?
   d) Jak velkou část stromu bude mít Pavel otrhanou za x hodin?

e) Za jak dlouho splní zadaný úkol, budou-li pracovat oba společně? Výsledek uveďte v hodinách a minutách.

3) Odpověz na následující otázky:
   a) Co je to úměrnost?
   b) Co je to přímá úměrnost? Uveď jeden příklad přímé úměrnosti.
   c) Co je to nepřímá úměrnost? Uveď jeden příklad nepřímé úměrnosti.

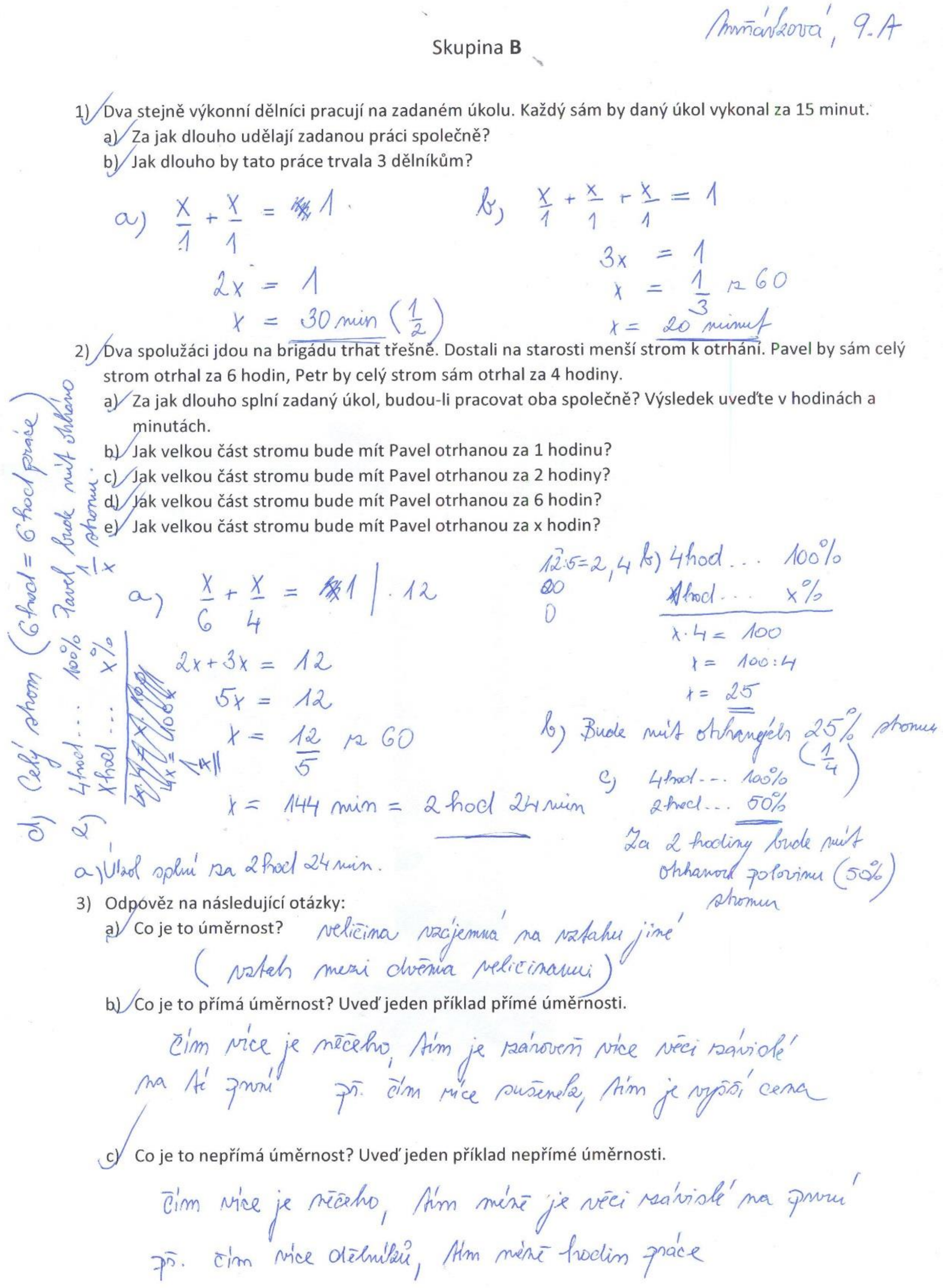
4) Mořská voda obsahuje asi 6 % soli. Kolik dm^3 destilované vody musíme přilít do 8 dm^3 mořské vody, abychom získali vodu s 2 % soli?

5) Cena 1 kg balených čokoládových bonbonů byla 360 Kč, nebalených 280 Kč. Kolik gramů balených a kolik gramů nebalených čokoládových bonbonů bylo v bonboniéře s hmotností 200 g ($\frac{1}{5}$ kg)? Víte –li, že 1 kg bonboniérové směsi měl hodnotu 300 korun.

Žáci si s většinou úloh nevěděli rady, přestože jsem volil věsměs příklady s nízkou obtížností.

Řešení se velmi často podobala, proto je demonstruji na následujících dvou testech zobrazených na obr. 18, 19, 20 a 21.
Přestože jsou testy označeny skupinami A, B, tak zadání obou skupin testů bylo stejné, jen měli žáci přeházené otázky.

Obrázek 18: Test1, strana1



Amrožková, 9.A

Skupina **B**

1) Dva stejně výkonní dělníci pracují na zadaném úkolu. Každý sám by daný úkol vykonal za 15 minut.
   a) Za jak dlouho udělají zadanou práci společně?
   b) Jak dlouho by tato práce trvala 3 dělníkům?

a) $\frac{x}{1} + \frac{x}{1} = 1$

$2x = 1$

$x = 30\,min \left(\frac{1}{2}\right)$

b) $\frac{x}{1} + \frac{x}{1} + \frac{x}{1} = 1$

$3x = 1$

$x = \frac{1}{3}$ · 60

$x = 20$ minut

2) Dva spolužáci jdou na brigádu trhat třešně. Dostali na starosti menší strom k otrhání. Pavel by sám celý strom otrhal za 6 hodin, Petr by celý strom sám otrhal za 4 hodiny.
   a) Za jak dlouho splní zadaný úkol, budou-li pracovat oba společně? Výsledek uveďte v hodinách a minutách.
   b) Jak velkou část stromu bude mít Pavel otrhanou za 1 hodinu?
   c) Jak velkou část stromu bude mít Pavel otrhanou za 2 hodiny?
   d) Jak velkou část stromu bude mít Pavel otrhanou za 6 hodin?
   e) Jak velkou část stromu bude mít Pavel otrhanou za x hodin?

a) $\frac{x}{6} + \frac{x}{4} = 1 \quad | \cdot 12$

$2x + 3x = 12$

$5x = 12$

$x = \frac{12}{5}$ · 60

$x = 144\,min = 2\,hod\ 24\,min$

$12 : 5 = 2{,}4$

a) Úkol splní za 2 hod 24 min.

b) 4 hod … 100 %
1 hod … x %

$x \cdot 4 = 100$

$x = 100 : 4$

$x = 25$

b) Bude mít otrhaných 25 % stromu $\left(\frac{1}{4}\right)$

c) 4 hod … 100 %
2 hod … 50 %

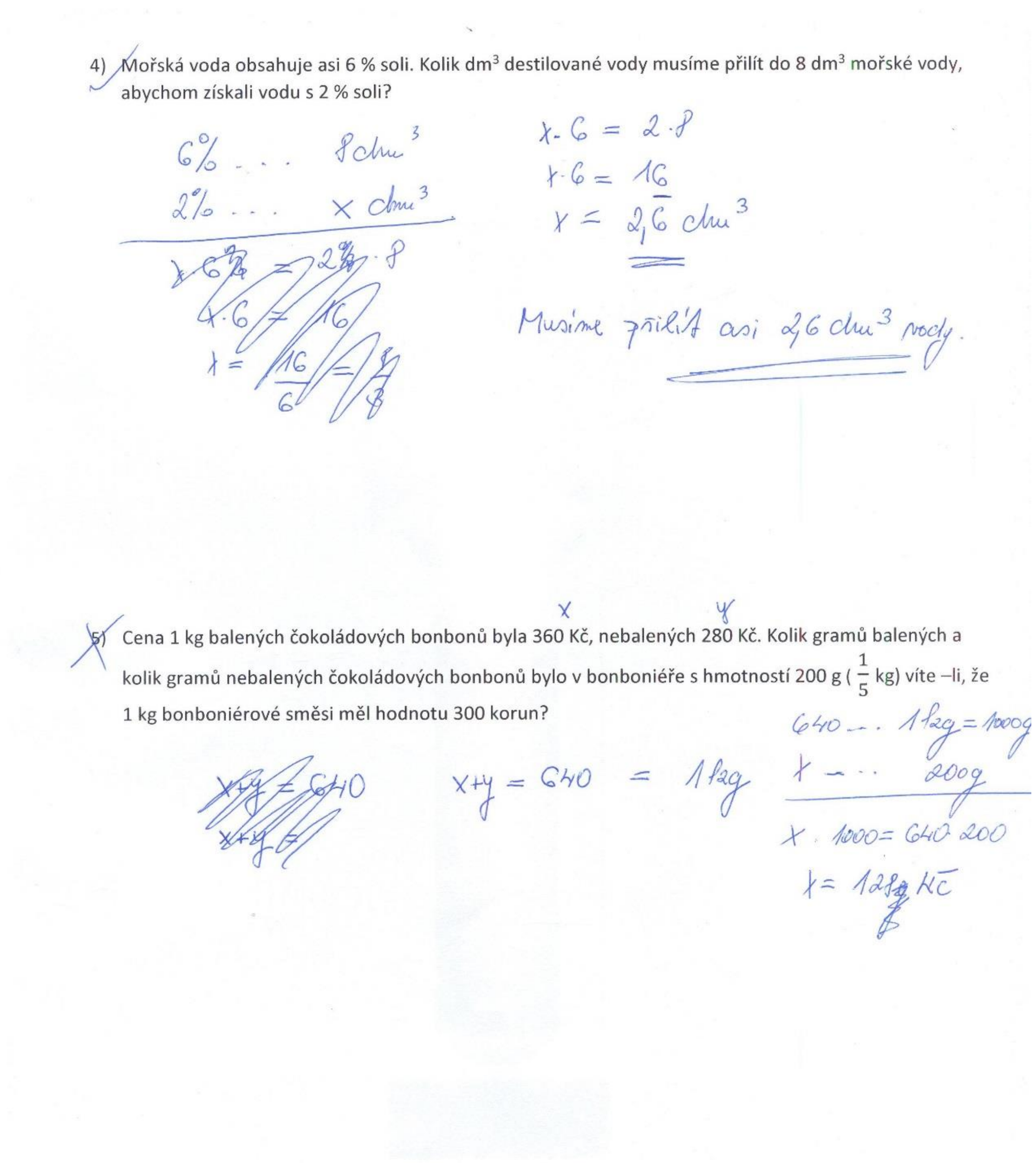
Za 2 hodiny bude mít otrhanou polovinu (50 %) stromu

d) Celý strom (6 hod = 6 hod práce) Pavel bude mít otrhaný strom.

e) 4 hod … 100 %
x hod … x %

3) Odpověz na následující otázky:
   a) Co je to úměrnost?
   veličina vzájemná na vztahu jiné (vztah mezi dvěma veličinami)
   b) Co je to přímá úměrnost? Uveď jeden příklad přímé úměrnosti.
   Čím více je něčeho, tím je zároveň více věcí závislé na té první. př. čím více sušenek, tím je vyšší cena
   c) Co je to nepřímá úměrnost? Uveď jeden příklad nepřímé úměrnosti.
   Čím více je něčeho, tím méně je věcí závislé na první. př. čím více dělníků, tím méně hodin práce

Obrázek 19: Test1, strana2



4) Mořská voda obsahuje asi 6 % soli. Kolik dm^3 destilované vody musíme přilít do 8 dm^3 mořské vody, abychom získali vodu s 2 % soli?

6% ... 8 dm^3

2% ... x dm^3

$\cancel{x \cdot 6\% = 2\% \cdot 8}$

$\cancel{x \cdot 6 = 16}$

$\cancel{x = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}}$

$x \cdot 6 = 2 \cdot 8$

$x \cdot 6 = 16$

$x = 2,\overline{6}$ dm^3

Musíme přilít asi 2,6 dm^3 vody.

5) Cena 1 kg balených čokoládových bonbonů byla 360 Kč, nebalených 280 Kč. Kolik gramů balených a kolik gramů nebalených čokoládových bonbonů bylo v bonboniéře s hmotností 200 g ($\frac{1}{5}$ kg) víte –li, že 1 kg bonboniérové směsi měl hodnotu 300 korun?

x y

$\cancel{x+y = 640}$

$\cancel{x+y =}$

$x+y = 640 = 1$ kg

640 ... 1 kg = 1000 g

x ... 200 g

$x \cdot 1000 = 640 \cdot 200$

x = 128 Kč

Obrázek 20: Test2 strana1

Kohoutová, 8.A.

Skupina **B**

1) Dva stejně výkonní dělníci pracují na zadaném úkolu. Každý sám by daný úkol vykonal za 15 minut.
   a) Za jak dlouho udělají zadanou práci společně? Udělali by to za 30 min
   b) Jak dlouho by tato práce trvala 3 dělníkům? Trvalo by jim to 45 min.

1. 15 min $\frac{x}{15}$

2. 15 min $\frac{x}{15}$

$$\frac{x}{15}+\frac{x}{15}=1 \,|\cdot 15$$
$$x+x=15$$
$$2x=15\,|:2$$
$$x=\frac{2}{15}$$

2) Dva spolužáci jdou na brigádu trhat třešně. Dostali na starosti menší strom k otrhání. Pavel by sám celý strom otrhal za 6 hodin, Petr by celý strom sám otrhal za 4 hodiny.
   a) Za jak dlouho splní zadaný úkol, budou-li pracovat oba společně? Výsledek uveďte v hodinách a minutách. 25 min, 0,25 h.
   b) Jak velkou část stromu bude mít Pavel otrhanou za 1 hodinu? Jednu šestinu
   c) Jak velkou část stromu bude mít Pavel otrhanou za 2 hodiny? ~~Polovinu~~ Dvě šestiny
   d) Jak velkou část stromu bude mít Pavel otrhanou za 6 hodin? Celý strom
   e) Jak velkou část stromu bude mít Pavel otrhanou za x hodin? $\frac{x}{6}$

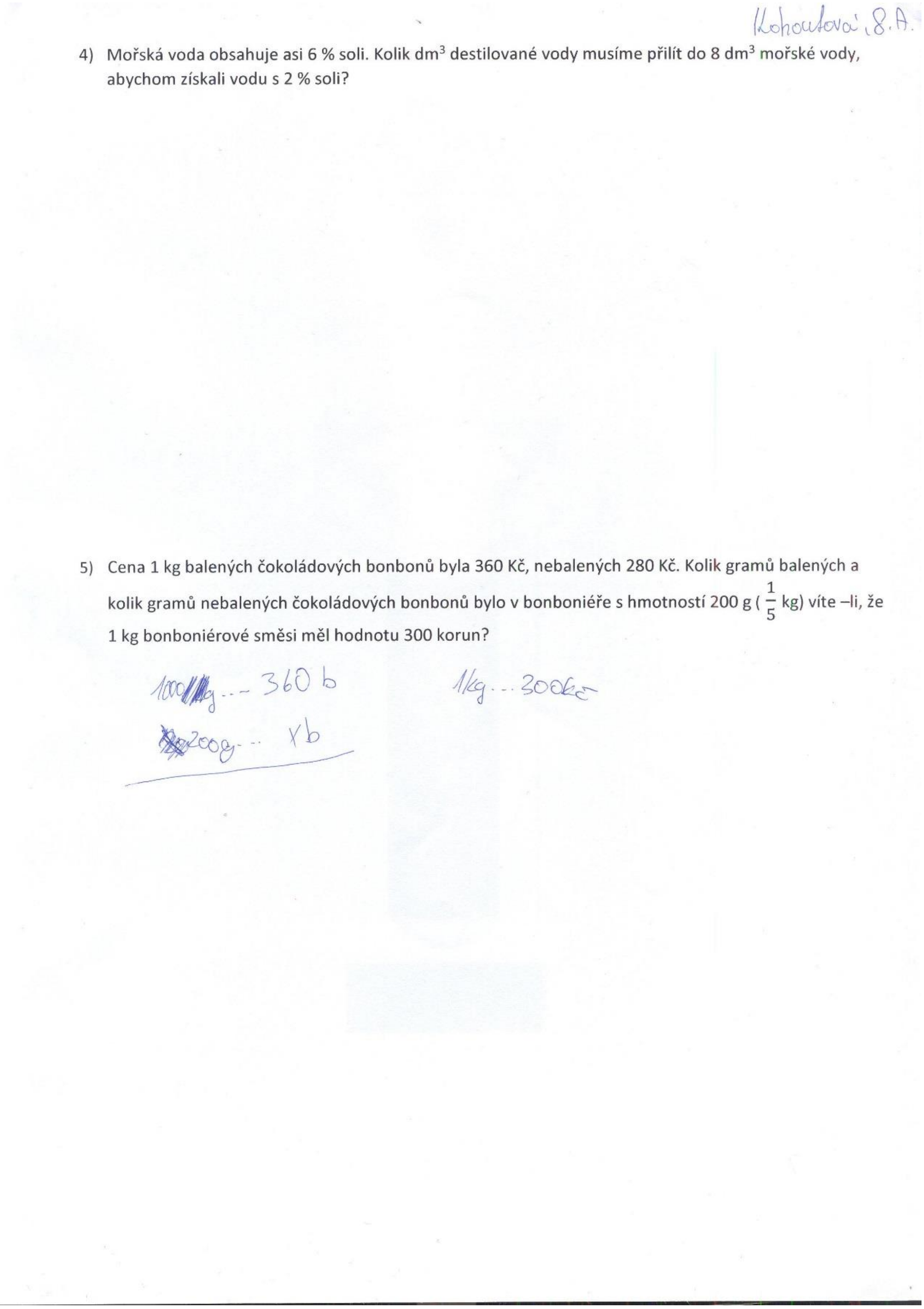
Pavel … 6 h $\frac{x}{6}$

Petr … 4 h $\frac{x}{4}$

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{4}=1\,|\cdot 12$$
$$2x+3x=12$$
$$5x=12\,|:5$$
$$x=\frac{5}{12} : 25\,min$$

3) Odpověz na následující otázky:
   a) Co je to úměrnost?
      používáme ji v počítání procent
   b) Co je to přímá úměrnost? Uveď jeden příklad přímé úměrnosti.
      ~~v procentech~~
   c) Co je to nepřímá úměrnost? Uveď jeden příklad nepřímé úměrnosti.

Obrázek 21: Test2 strana2



Kohoutová, 8.A.

4) Mořská voda obsahuje asi 6 % soli. Kolik dm^3 destilované vody musíme přilít do 8 dm^3 mořské vody, abychom získali vodu s 2 % soli?

5) Cena 1 kg balených čokoládových bonbonů byla 360 Kč, nebalených 280 Kč. Kolik gramů balených a kolik gramů nebalených čokoládových bonbonů bylo v bonboniéře s hmotností 200 g ($\frac{1}{5}$ kg) víte –li, že 1 kg bonboniérové směsi měl hodnotu 300 korun?

1000g ... 360 b

200g ... x b

1kg ... 300kč

Hned u prvního příkladu můžeme z obou testů vyčíst cenné informace. Příklad je zvolený tak jednoduše, že jsem si jistý, že by si s ním žáci nižších ročníků poradili a vyřešili jej jednoduchou logickou úvahou.

Obě žákyně (stejně jako mnoho dalších žáků) se ale snažily úlohu „napasovat“ na zapamatované postupy. Pamatovaly si, že je třeba vytvořit nějakou rovnici, kde na pravé straně je číslo 1 a vlevo jsou zlomky, v jejichž čitateli je neznámá x.

Žákyně z 8. třídy Kamila Kohoutová sice rovnici správně sestavila, ale chybně ji vyřešila a žákyně 9. třídy Nikola Mrňávková rovnici chybně sestavila.

Pouze 5 % žáků napadlo, že by tuto úlohu bylo možné řešit také jinak, než naučenou rovnicí.

Zásadní závěry jsem si udělal z těchto řešení tyto:

1) Žákům nabídnout automatické postupy, ale neustále si ověřovat, zda u nich alespoň trochu přemýšlí a nepoužívají je jen mechanicky.
2) Více jak 2/3 žáků z obou ročníků uvedlo, že 2 dělníci budou pracovat 30 minut, tedy déle než jen 1 dělník. Z toho plyne, že se nad výsledkem vůbec nezamysleli. Úloha mě natolik zaujala, že jsem ji použil v programu a položil hned na začátku žákům 2 otázky:

- O jakou úměrnost se zde jedná?
- Budou 2 dělníci pracovat delší nebo kratší dobu než 1 dělník?

Hlavně druhá otázka je proměrně triviální a žáci na ni většinou odpověděli správně a přesto úlohu špatně vyřešili. Proto nutím žáky, aby si již na začátku úlohy promysleli, jaké bude asi, řešení a na konci si tuto úvahu ověřili. Tím se snažím předejít pouze mechanickému vyřešení úlohy.

Druhý příklad byl trochu náročnější, protože každý spolužák (míněno spolužák z této úlohy tedy Pavel a Petr) pracoval jiným tempem. Přesto dopadl asi nejlépe.

Kamila Kohoutová zde ukázala, že poslední řádek rovnice skutečně řešit neumí a že první příklad nebyl náhoda. Schopnost řešit lineární rovnice je pro daný typ úloh klíčová a je třeba ji neustále procvičovat.
Nikola Mrňávková z 9. třídy opět volila náročnější způsob a počítala části b) – e) pomocí procent a nebyla ve třídě jediná. Opět se ukazuje, že žáci hledají naučené postupy a nevolí jako první řešení logickou úvahu. Zadal jsem části b) – d) žákům 5. třídy a většina mi správně otázky odpověděla! Zde si navíc žákyně nepřečetla pořádně zadání a část b), c) řešila u Petra a ne u Pavla, na kterého se autor příkladu ptal.

V programu se proto snažím, aby se žáci zamýšleli nad tím, co právě počítají a kontrolovali si, zda odpovídají na zadanou otázku. Kdyby Nikola napsala přesnou slovní odpověď, tak by ji pravděpodobně napadlo, že spočítala část stromu pro jiného žáka.

U otázky 3 jsem si ověřoval teoretickou připravenost žáků. Na otázku co je to úměrnost odpověděli víceméně správně pouze 3 žáci (ze 101). Co je to přímá a nepřímá úměrnost, vědělo správně 43% řešitelů.

Úlohy na směsi dopadly katastrofálně a z řešení se dalo vyčíst snad pouze to, že si s ním žáci nevědí absolutně rady. Čtvrtý příklad nevyřešil správně nikdo a 5. příklad vyřešilo správně 5 žáků ze 101 tedy 5 % ze všech žáků.

Závěr z úloh na směsi jsem si udělal takový, že je zde potřeba maximální názornost, aby žáci dané úloze správně porozuměli a dokázali si s ní poradit. Toho využívám především důslednou tvorbou tabulky.

7.2 Vyhodnocení interaktivního programu

7.2.1 Průběh experimentu

Program byl testován na základní škole Sever v Hradci Králové. Do studie byli zapojeni žáci ze dvou tříd. V 8. B byla látka vyložena i s pomocí mé multimediální pomůcky a v 8. A bylo učivo probráno klasickým způsobem. Poté byly oběma třídám zadány totožné úlohy na společnou práci a směsi.

Při hodnocení jsem si zvolil několik hodnotících znaků a ty jsem obodoval. Žáci dostali z obou okruhů úloh 2 příklady. Uvádím zde přehled hodnotících údajů. V závorce je maximální počet bodů v jednom příkladu.

- **Pochopení úlohy** (3 body)

  Posuzoval jsem, jaký postup žák zvolil, zda si úlohu nějakým způsobem znázornil, jestli vytvořil zkoušku a zda a jak zformuloval slovní odpověď.
- **Jednotky** (2 body)

  Hodnocena byla práce s jednotkami. Bylo zkoumáno, zda se vyskytuje správná jednotka ve výsledku a zda byly jednotky správně převedeny, pokud bylo třeba je převést.
- **Tabulka** (3 body)

  Žáci byli seznámeni s tím, že jim tento krok bude hodnocen, proto tabulku museli vytvořit všichni. Měli tímto způsobem prokázat porozumění zadání a schopnost vytvořit tabulku využitelnou pro sestavení rovnice.
- **Sestavení rovnice** (3 body)

  Hodnoceno bylo správné sestavení rovnice.
- **Řešení rovnice** (2 body)

  V tomto kroku bylo hodnoceno numerické vyřešení rovnice. Kdo rovnici ani nesestavil, dostal 0 bodů.
- **Celkové hodnocení** (5 bodů)

  Příklad nebyl oznámkován, ale ohodnocen pomocí bodové škály, aby bylo možné použít korelaci tzn. čím lepší známka tím více bodů (známka 1 = 5 bodů, známka 2 = 4 body atd.).

Žáci z obou skupin dostali 2 úlohy na dané téma. Body v každé hodnotící oblasti byly sečteny a zprůměrovány na jednoho žáka. Poté byl vytvořen v každé kategorii průměr celé třídy. Jelikož byl počet žáků v obou třídách jiný, vylosoval jsem 20 testů z každé třídy, které jsem zde vyhodnotil.

7.2.2 Hodnocení úloh na společnou práci

Žákům byly zadány tyto slovní úlohy:

1) Bazén tvaru válce o poloměru 5 m je hluboký 2 m. Bazén se napouští dvěma rourami. První rourou přitékají 4 hl vody za minutu, druhou rourou 5 litrů vody za sekundu. Za jak dlouho bude bazén naplněn tak, aby hladina vody byla 20 cm pod horním okrajem bazénu? (Havlínová, Slepička, 2006)
2) Tankování paliva do lodi se provádí dvěma motory. Běží-li pouze větší motor, trvá tankování 3 hodiny. Běží-li pouze menší motor, trvá tankování 5 hodin. Jak dlouho bude tankování trvat, jestliže poběží oba motory? (Houska, 1994)

Samozřejmě žádnou z těchto úloh žáci ani z jedné třídy předem ve výuce neřešili.

V experimentu jsem se zaměřil především na to, zda došlo k nějakému výraznému zlepšení u žáků, kteří využili interaktivní program.

Dále bylo take zkoumáno, zda existuje vztah mezi jednotlivými třídami. Tedy do jaké míry došlo či nedošlo k celkovému posunu. Tento vztah byl zjišťován statistickou korelací, která je založena na lineární závislosti veličin x, y.

Pro upřesnění je třeba uvést, co se míní korelací ve statistice. Jde o vztah mezi znaky či veličinami x a y. Může být kladný, pokud přibližně platí $y = k \cdot x$, nebo záporný ($y = -k \cdot x$).

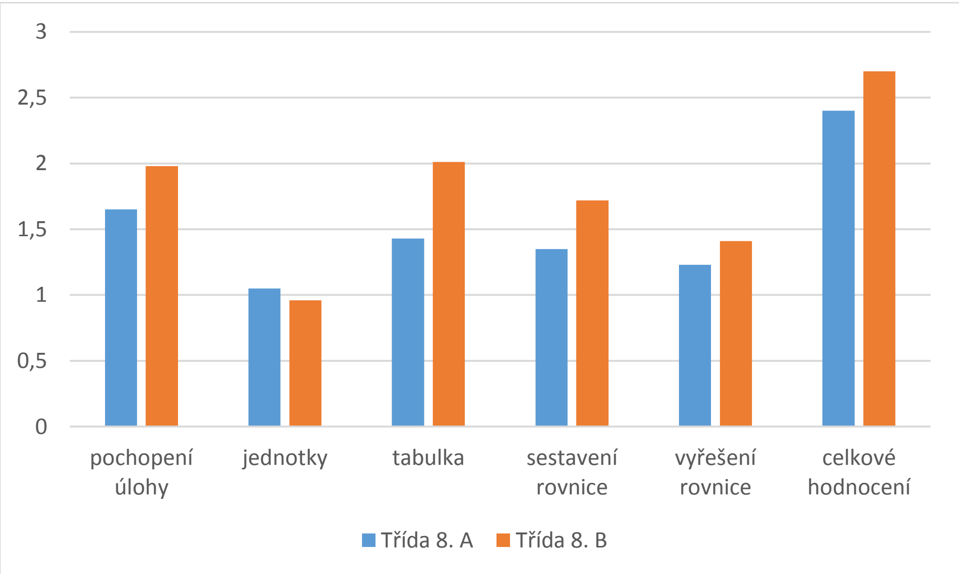
Když se hodnota blíží k hodnotě -1, jedná se o nepřímou závislost (antikorelaci), pokud se hodnota korelačního koeficientu blíží k 1, značí to přímou závislost.
Pohybuje-li se hodnota korelačního koeficientu kolem 0, pak mezi znaky není žádná statisticky zjistitelná lineární závislost.
Je dobré si uvědomit, že i při nulovém korelačním koeficientu na sobě mohou jednotky záviset, pouze tento vztah nelze (ani přibližně) vyjádřit lineární funkcí.

Výsledek experiment je zobrazen na obr. 22, 23 a 24.

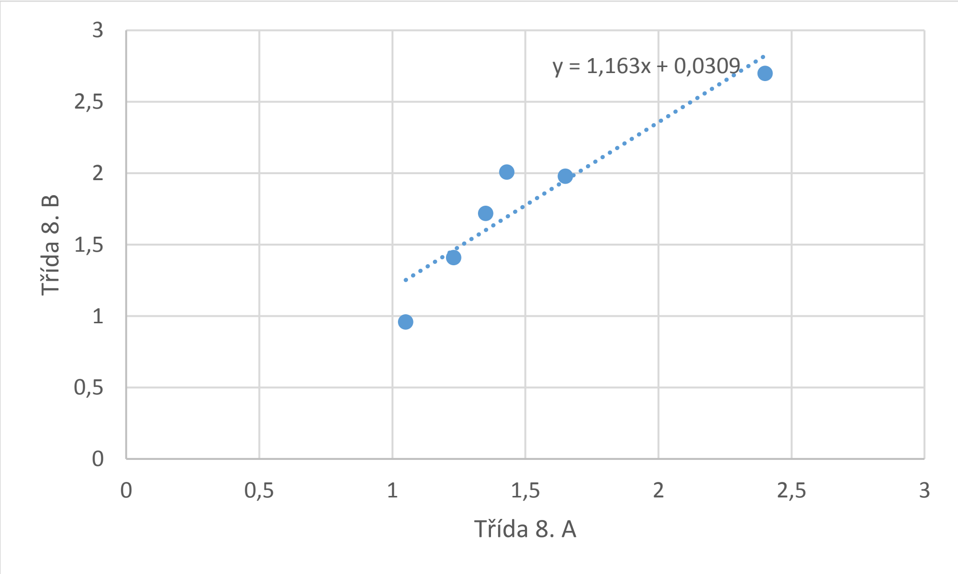
Obrázek 22: Vyhodnocení Úloh o společné práci

hodnotící prvek	Třída 8. A	Třída 8. B
pochopení úlohy	1,65	1,98
jednotky	1,05	0,96
tabulka	1,43	2,01
sestavení rovnice	1,35	1,72
vyřešení rovnice	1,23	1,41
celkové hodnocení	2,40	2,70
korelační koeficient	0,935728771	

Obrázek 23: Grafické porovnání hodnotících veličin – společná práce



Obrázek 24: Úlohy o společné práci - Graf závislosti tříd



Z obr. 23 celkem zřetelně plyne, že došlo ke zlepšení téměř ve všech atributech (mimo práce s jednotkami) a z obr. 24 lze jednoznačně vyčíst, že existuje závislost mezi srovnávanými třídami, kterou lze popsat pomocí lineární regresní funkce $y = 1{,}163\,x + 0{,}0309$ a korelačního koeficientu 0,935728771.

7.2.3 Hodnocení úloh o směsích

Žákům byly zadány tyto slovní úlohy:

1) Do lékárny se dodává peroxid vodíku v litrových lahvích jako 30 % roztok. Magistr má podle předpisu lékaře připravit 250 cm^3 kloktadla, jímž je 3 % roztok peroxidu.
   a) Kolik cm^3 odlije z lahve?

   b) Kolik cm^3 destilované vody musí ještě dolít?

   (Havlínová, Slepička, 2006)

2) V kavárně se specializují na různé druhy kávy nejen podle způsobu přípravy. Pro vytvoření nové chuti smíchal obchodník dva druhy kávy: 150 g Aromatic po 350,- Kč za kg a 250 g Excelent po 390,- Kč za kg. Kolik stojí 1 kg takovéto směsi?

   a) 150,- Kč b) 300,- Kč c) 350,- Kč d) 375,- Kč

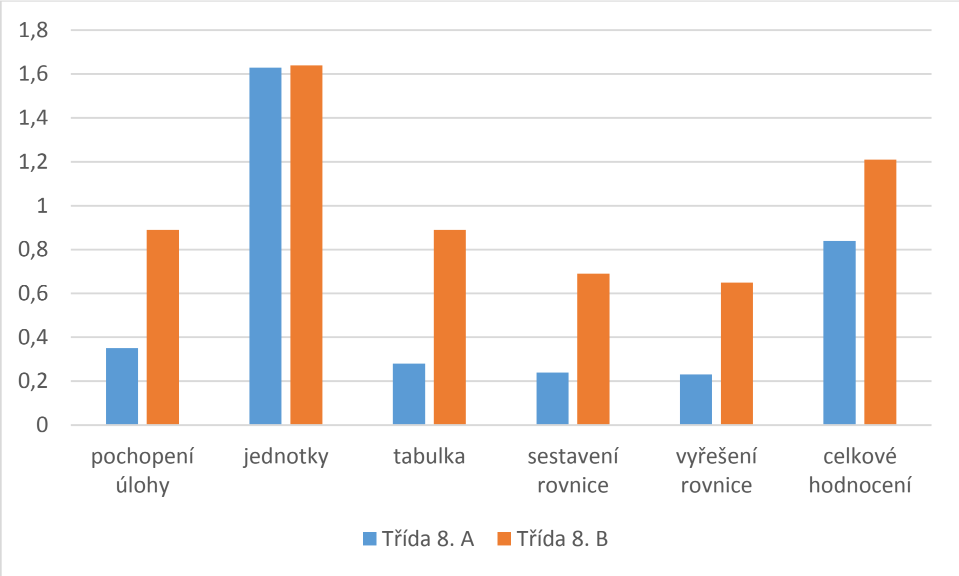
   (autorská úloha)

Experiment probíhal obdobně jako u úloh o společné práci. Výsledky jsou zobrazeny na obr.25, 26 a obr. 27.

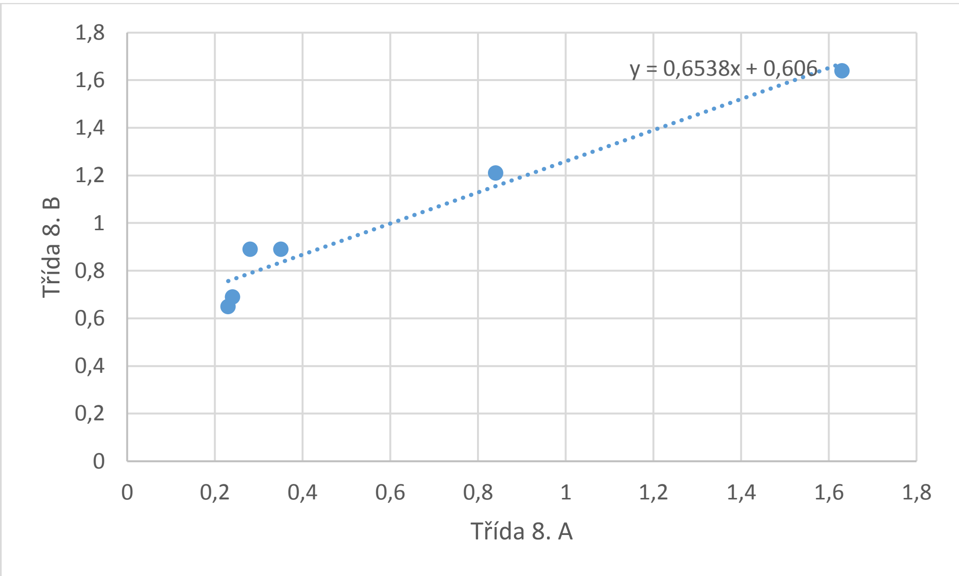
Obrázek 25: Vyhodnocení Úloh o směsích

hodnotící prvek	Třída 8. A	Třída 8. B
pochopení úlohy	0,35	0,89
jednotky	1,63	1,64
tabulka	0,28	0,89
sestavení rovnice	0,24	0,69
vyřešení rovnice	0,23	0,65
celkové hodnocení	0,84	1,21
korelační koeficient	0,975375853	

Obrázek 26:Grafické porovnání hodnotících veličin - směsi



Obrázek 27: Úlohy o směsích - Graf závislosti tříd



U těchto úloh došlo k ještě znatelnějšímu posunu, přestože je třeba přiznat, že celkové hodnocení i další hodnotící prvky jsou u obou tříd nízké, což dokládá, že úlohy o směsích dělají žákům velké problémy.

I zde můžeme z grafu vyčíst závislost mezi srovnávanými třídami, která je ještě výraznější než u předchozích úloh. Lze ji popsat pomocí lineární regresní funkce
$y = 0{,}6538\,x + 0{,}606.$ Hodnota korelačního koeficientu je 0,975375853.

Závěrem této kapitoly musím říci, že třída na které byl program testován, je prospěchově výrazně v matematice slabší (dle vysvědčení v průměru o 0,6 stupně), než třída ve které bylo učivo probráno bez použití programu. Přesto byly výsledky u této zkoumané třídy téměř ve všech ohledech lepší než ve druhé třídě. Domnívám se, že kdyby bylo testování programu provedeno v opačné třídě, tak by pozitivní posun byl ještě výraznější.

Závěr

Cílem mé diplomové práce bylo především pomocí multimediální pomůcky přispět k větší názornosti úloh o společné práci a úloh o směsích, které jsou probírány na základní škole v osmých a devátých třídách.

Domnívám se, že tento cíl mé práce byl splněn. Dokládají mi to nejen data z provedeného experimentu, ale také žáci, kteří projevili při hodinách mnohem větší zájem. Pevně doufám a věřím, že jejich získané znalosti budou trvalejšího charakteru a jistě by bylo zajímavé s odstupem času porovnat u obou tříd, co si z dané látky žáci pamatují.

Multimediální pomůcku již také úspěšně využívám při doučování studentů, kteří mají s těmito úlohami problém. Práci si odnesou domů a mohou tak pracovat na příkladech samostatně.

Interaktivní program nabízím spolu s předchozí aplikací volně k dispozici a budu rád, pokud se bude mezi učiteli i žáky šířit a bude prospěšný při studiu slovních úloh tohoto typu.

Seznam použité literatury

1. ADOBE CREATIVE TEAM. *ActionScript 3.0-Oficiální výukový kurz.* Překlad Kristýna konopková. Brno: Computer Press, 2011. 381 s. ISBN 978-80-251-3335-4

2. BUŠEK I., KUBÍNOVÁ M., NOVOTNÁ J. *Sbírka úloh z matematiky pro 9. ročník základní školy.* Praha: Prometheus, 1995. 191 s. ISBN 80-7196-132-9

3. CERMAT. *Přijímací řízení SŠ 2015, Ilustrační testy - čtyřleté obory vzdělávání* [online]. Cermat, © 2010 [cit. 20.5. 2015]. Dostupné z: http://www.cermat.cz/ilustracni-testy-ctyrlete-obory-vzdelavani-1404035119.html

4. CERMAT. *Státní maturita - testy* [online]. Cermat, © 2010 [cit.15.6.2015]. Dostupné z: http://www.novamaturita.cz/testy-a-zadani-1404035305.html

5. FEDERIČOVÁ, M. a MÜNICH D. (2014). *Učení mučení, nebo škola hrou? Srovnání obliby školy a matematiky pohledem mezinárodních šetření.* CERGE - EI Discussion Paper, 2014-227

6. FRÝZEK Miloslav, MÜLLEROVÁ Jana. *Sbírka úloh z matematiky pro bystré hlavy.* Praha: Fortuna, 1992. 151 s. ISBN 80-85298-51-1

7. GYMNÁZIUM HAVLÍČKŮV BROD. *Přijímací zkoušky na čtyřleté studium. 1. kolo, 2011* [online]. GHB, © 2014 [cit. 21.5. 2015]. Dostupné z: http://www.ghb.cz/showpage.php?name=prij_g4_ma11

8. HAVLÍNOVÁ A., SLEPIČKA P. *Testy z matematiky 2006*. Brno: Didaktis, 2005. 136 s. ISBN 80-7358-026-8

9. HEJNÝ Milan, KUŘINA František. *Dítě, škola a matematika. Konstruktivistické přístupy k vyučování.* Druhé, aktualizované vydání. Praha: Portál, 2009. 240 s. ISBN 978-80-7367-397-0

10. HEJNÝ Milan, STEHLÍKOVÁ Naďa. *Elementární matematika (rovnice, teorie čísel, kombinatorika, planimetrie).* Praha: Karolinum, 1995. 93 s. ISBN 80-7184-103-X

11. HOUSKA Jan. *Sbírka úloh z matematiky pro 7. a 8. ročník základní školy.* Praha: Fortuna, 1994. 243 s. ISBN 80-7168-131-8

12. KOWAL, S. *Matematika pro volné chvíle.* Přeložil JARNÍK Jiří. Praha: SNTL, 1986. 323 s.

13. KULHAVÁ M., ČERVINKOVÁ P., CIZLEROVÁ M., ČELIŠOVÁ O. *Testy - příprava na střední školy*. Brno: Didaktis, 2013. 142 s. ISBN 978-80-7358-226-5

14. MAČÁK Karel. *Tři středověké sbírky matematických úloh. Alkuin, Métrodóros, Abú Kámil*. Praha: Prometheus, 2001. ISBN 80-7196-215-5

15. MÜLLEROVÁ, J. *Matematika pro 8. ročník základní školy: Algebra.* 1. vyd. Praha: Kvarta, 2002, 198 s., ISBN 80-7196-167-1

16. PALKOVÁ, Martina. *Testy z matematiky 2007.* Brno: Didaktis, 2006. 144 s. ISBN 80-7358-061-6

17. PŮLPÁN Zdeněk, ČIHÁK Michal, TREJBAL Josef. *Matematika pro 8. ročník ZŠ - algebra.* Praha: SPN, 2009. 166 s. ISBN 978-80-7235-419-1

18. PŮLPÁN Zdeněk, ČIHÁK Michal, TREJBAL Josef. *Matematika pro 9. ročník ZŠ - algebra.* Praha: SPN, 2010. 156 s. ISBN 978-80-7235-487-0

19. STRAKOVÁ, J., TOMÁŠEK, V., PALEČKOVÁ, J. *Třetí mezinárodní výzkum matematického a přírodovědného vzdělávání. Souhrnné výsledky žáků posledních ročníků středních škol.* Praha: Výzkumný ústav pedagogický, 1996.

20. TREJBAL J. *Matematika pro 8. ročník základní školy*. 2. díl. Praha: SPN, 2000.86 s. ISBN 80-7235-043-9

21. TREJBAL J., KUČINOVÁ E., VINTERA F. *Sbírka úloh z matematiky II pro 8. a 9. ročník ZŠ.* Praha: SPN, 2000. 255 s. ISBN 80-7235-111-7

22. TREJBAL Josef. *Matematika pro mladé labužníky.* 2 díl. Nový Bydžov: Základní škola Nový Bydžov, 1992. 168 s.

23. TREJBAL Josef. *Sbírka zajímavých úloh z matematiky*. Praha: Prometheus, 1996. 220 s. ISBN 80-7196-084-5

Přílohy

DVD – Program Úlohy o společné práci a směsích