

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Bc. Michaela Sukupová

2. ročník – prezenční studium

**Obor: Učitelství matematiky pro 2. stupeň základních škol v kombinaci
– Učitelství českého jazyka pro 2. stupeň základních škol v kombinaci**

Vybrané kapitoly z Mongeova promítání

Diplomová práce

Vedoucí práce: Mgr. Jitka Hodaňová, Ph.D.

Olomouc 2012

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracovala samostatně a že jsem použila jen prameny uvedené v seznamu literatury.

V Olomouci

Michaela Sukupová

.....

Podpis

Poděkování

Chtěla bych poděkovat Mgr. Jitce Hodaňové, PhD. za vedení mé diplomové práce a za užitečné připomínky a rady v průběhu jejího zpracování.

Obsah

Prohlášení:.....	2
Poděkování.....	3
1. Úvod	7
2. Základní pojmy Mongeova promítání	9
3. Mnohostěny.....	10
3.1. Hranol - základní pojmy	10
3.2. Zobrazení hranolu	11
Úloha 3.2.1	11
Úloha 3.2.2.....	12
Úloha 3.2.3.....	15
3.3. Řez hranolu rovinou	17
Osová afinita	17
Úloha 3.3.1	17
Úloha 3.3.2.....	18
Úloha 3.3.3.....	20
Úloha 3.3.4.....	22
3.4. Jehlan.....	24
Úloha 3.4.1	25
Úloha 3.4.2.....	26
Úloha 3.4.3.....	28
3.5. Řez jehlanu rovinou	30
Středová kolineace.....	30
Úloha 3.5.1	31
Úloha 3.5.2.....	33
Úloha 3.5.3.....	35

3.6.	Průsečík přímky s hranolem a jehlanem.....	37
	Úloha 3.6.1	37
	Úloha 3.6.2.....	39
	Úloha 3.6.3.....	40
	Úloha 3.6.4.....	42
	Úloha 3.6.5.....	43
4.	Rotační tělesa v Mongeově promítání	45
4.1.	Základní vlastnosti elipsy	45
	Úloha 4.1.1	45
4.2.	Tečna elipsy	48
	Úloha 4.2.1	48
4.3.	Zobrazení kružnice v Mongeově promítání.....	49
	Rytzova konstrukce	49
	Úloha 4.3.1	50
4.4.	Rotační válec.....	52
	Úloha 4.4.1	53
	Úloha 4.4.2.....	54
4.5.	Řez rotačního válce rovinou	56
	Tečna rotačního válce	56
	Úloha 4.5.1	56
	Průnik přímky s rotačním válcem.....	58
	Úloha 4.5.2.....	59
	Řez rotačního válce rovinou.....	60
	Úloha 4.5.3.....	61
	Úloha 4.5.4.....	62
	Úloha 4.5.6.....	67

5.	Výzkum.....	69
5.1.	Dotazník	69
5.2.	Vyhodnocení.....	73
	Šestý ročník.....	74
	Sedmý ročník.....	75
	Osmý ročník	75
	Devátý ročník	76
6.	Závěr	77
7.	Zdroje.....	78
8.	Anotace	80

1. Úvod

Gaspard Monge, vévoda z Péluse (1746-1818), byl francouzský přírodovědec, matematik a revoluční politik. Je považován za otce deskriptivní geometrie a je po něm pojmenováno Mongeovo promítání.

Ve své bakalářské práci¹ jsem se zabývala základními pojmy Mongeovy projekce, řešila jsem polohové a metrické úlohy a na závěr jsem se dotkla tématu zobrazení těles.

Toto téma – Mongeovo promítání – je nesmírně rozsáhlé a hlavně také velice zajímavé, a proto jsem se rozhodla, že v něm budu pokračovat i ve své diplomové práci. Uvedu příklady zobrazení mnohostěnů, zejména hranolu a jehlanu a jejich řezy. Budu se zabývat také zobrazením rotačního válce, okrajově kuželu, dále budu sestrojovat řez válce rovinou. Řezy rotačních těles jsou kuželosečky, já si však vyberu pouze jednu z nich, a sice elipsu. Pokud tedy budu řešit řez kuželu, vyberu jen takové případy rovin, jejichž řezem kuželu či válce bude právě elipsa.

K rýsování budu využívat program Cabri3D, jehož zkušební verze je k dispozici volně na internetu².

V rámci praktické části budu zkoumat, jaké mají žáci na základní škole přepoklady k řešení úloh z deskriptivní geometrie, i když k nim nemají teoretickou znalost – zajímám mě hlavně, zda jsou schopni rozpoznat půdorys, nárýs a bokorys, i když se s tím nikdy předtím v teoretické rovině nesetkali.

Nesoustředila jsem se na jeden ročník, ale pokusila jsem se udělat dotazník, který bude vhodný pro všechny ročníky. Předpokládám samozřejmě, že 9. ročník bude „test“ řešit s mnohem menšími obtížemi. Také z důvodu, že žáci 6. ročníku mají povědomí pouze o krychli, jsem nevolila jiná tělesa.

Očekávám, že výstupem tohoto průzkumu bude tvrzení, že čím jsou žáci starší, tím lépe jsou schopni vnímat 3D prostor a orientovat se v něm.

¹ Sukupová, M.: *Zobrazení a řezy těles v Mongeově promítání*. Bakalářská práce, Olomouc, 2010

² <http://www.cabri.com/download-cabri-3d.html>

Cílem mé práce je vytvořit učební materiál jako pomůcku pro žáky středních škol, kteří absolvují předmět deskriptivní geometrie. Ve své práci vždy uvádím teorii nutnou k vyřešení dané úlohy, zadání úlohy a její řešení a potom dva obrazy: zobrazuji situaci v prostoru (pro lepší uvědomění si dané situace – tzn. jak je těleso v prostoru orientováno, kudy prochází rovina, popř. přímka) a pak také samotný rys.

Úlohy, jež jsem volila, jsou většinou různých obtížností, od základních ukázkových až po tělesa ve zvláštních polohách. Některé úlohy je pak možno upravit či doplnit například o sestrojení skutečné velikosti řezu či zobrazení sítě dného tělesa.

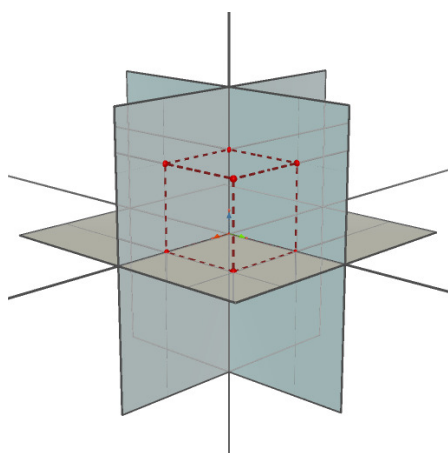
2. Základní pojmy Mongeova promítání

V krátkosti zopakujeme základní pojmy Mongeova promítání, kterými jsem se zabývala ve své předchozí práci a na něž budu nyní navazovat.

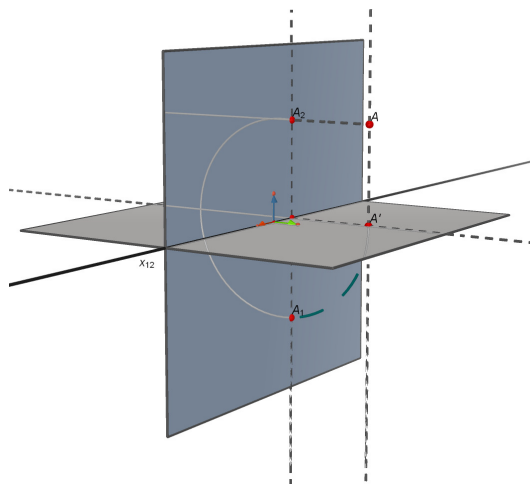
Mongeovo promítání je pravoúhlé promítání na dvě na sebe navzájem kolmé průmětny (π a ν). Průmětna π je první průmětna, *půdorysna*, průmětna ν je druhá průmětna, *nárysna*. Většinou předpokládáme, že průmětna ν je svislá. Průsečnice rovin π a ν je osa x_{12} , které říkáme *základnice*.

Libovolný bod A prostoru promítneme pravoúhle do roviny π do bodu A' a do roviny ν do bodu A_2 . Nalezené průměty pak sdružíme tak, že první průmětnu otočíme kolem osy x_{12} do druhé průmětny. Promítací přímky 1s a 2s bodu A určují rovinu kolmou k ose x_{12} , která je současně rovinou otáčení bodu A' . Bod A' se otočí do bodu, který značíme A_1 . Bod A jsme tak zobrazili na dvojici *sdružených průmětů* A_1 a A_2 , které leží na kolmici k ose x_{12} . (Obr. 2.1)

Sdružené průměty A_1 a A_2 tvoří *uspořádanou dvojici* (A_1, A_2) ; bod A_1 nazveme první průmět bodu A (*půdorys*) a bod A_2 nazveme druhý průmět bodu A (*nárys*). Kolmice sestrojené k základnici nazveme *ordinálami*. Sdružené body A_1 a A_2 tedy leží na ordinále. (Obr. 1 a Obr. 2)



Obr. 1

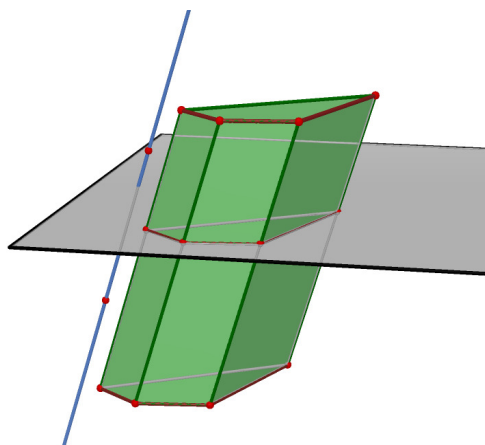


Obr. 2

3. Mnohostěny

3.1. Hranol - základní pojmy

V rovině ρ mějme dán n -úhelník $A_1A_2\dots A_n$ a přímku p různoběžnou s rovinou ρ . Pak přímky a_1, a_2, \dots, a_n rovnoběžné s přímkou p , které protínají obvod n -úhelníka, tvoří n -bokou hranolovou plochu. Přímky a_1, a_2, \dots, a_n , které protínají vrcholy A_1, A_2, \dots, A_n n -úhelníka se nazývají boční hrany. n -úhelník $A_1A_2\dots A_n$ se pak nazývá řídicí mnohoúhelník (Obr. 3).



Obr. 3

Vezme-li rovinu σ rovnoběžnou s rovinou ρ , protne tato rovina n -bokou hranolovou plochu v n -úhelníku $B_1B_2\dots B_n$, který je shodný s n -úhelníkem $A_1A_2\dots A_n$. Část prostoru vymezená těmito n -úhelníky se nazývá n -boký hranol. n -úhelníky $A_1A_2\dots A_n$ a $B_1B_2\dots B_n$ jsou podstavami tohoto hranolu, úsečky $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$ jsou boční hrany hranolu, rovnoběžníky $A_1A_2B_2B_1, A_2A_3B_3B_2, \dots, A_1A_nB_nB_1$ jsou boční stěny hranolu a vzdálenost rovin σ a ρ určuje výšku hranolu.

Spojením všech bočních stěn vzniká plášť hranolu, když k němu připojíme podstavy, dostaneme povrch hranolu. Povrch rozložený do roviny nazýváme síť hranolu.

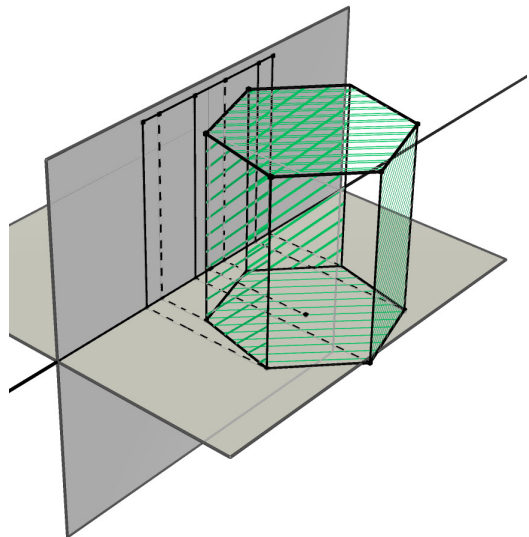
Druhy hranolů :

- Kolmý hranol – jeho boční hrany jsou kolmé k rovinám podstavy (\Rightarrow velikost výšky je rovna délce boční hrany)
- Kosý (šikmý) hranol – jeho boční hrany nejsou kolmé k rovinám podstavy
- Pravidelný hranol – kolmý hranol, jehož podstavy jsou pravidelné n -úhelníky
- Rovnoběžnostěn – jeho podstava je rovnoběžník

3.2. Zobrazení hranolu

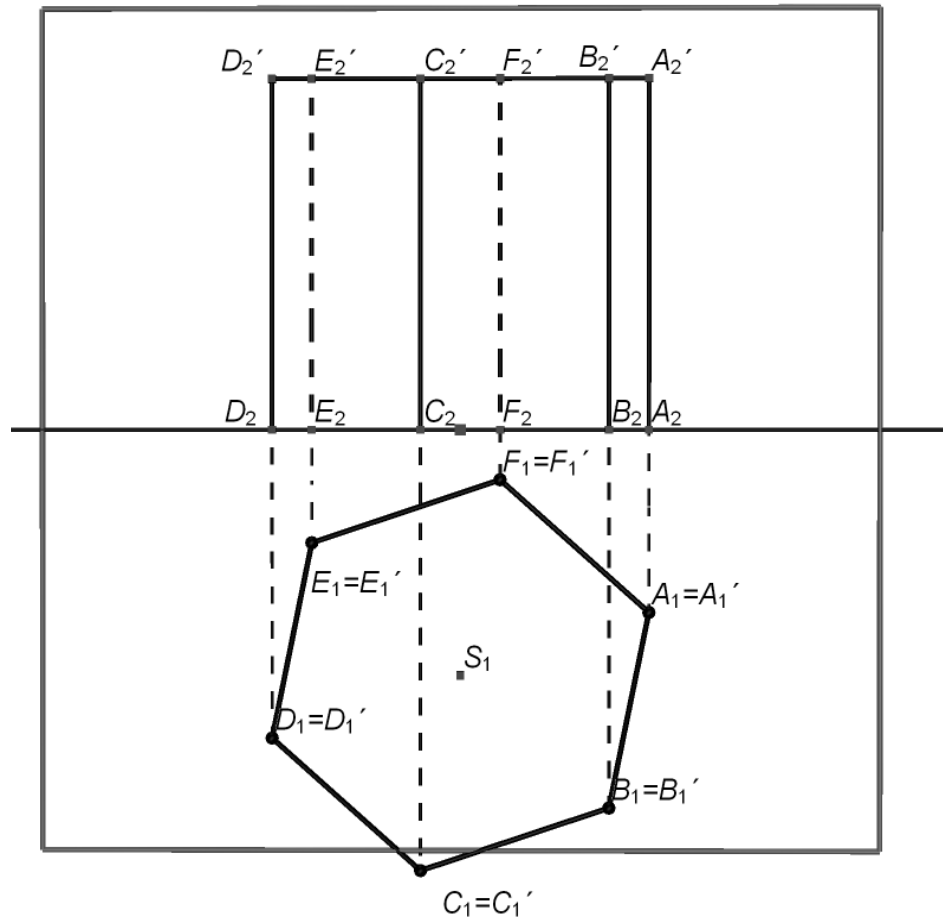
Úloha 3.2.1 Sestrojte průměty pravidelného šestibokého hranolu, jehož podstava leží v půdorysně. Hranol je dán středem $S[0; 35; 0]$, vrcholem dolní podstavy $A[27; 26; 0]$ a výška hranolu je $v = 90$.

Řešení: Protože střed podstavy leží v půdorysně, bude půdorysem pravidelný šestiúhelník a nárysem úsečka na ose x_{12} – obrazy vrcholů podstavy budou ležet na ordinálách na ose x_{12} (Obr. 4). Šestiúhelník v půdorysně můžeme jednoduše narýsovat dle základních pravidel konstrukce šestiúhelníka (tuto konstrukci zde nebudeme popisovat). Protože se jedná o kolmý hranol, budou se boční hrany v půdoryse zobrazovat jako body, totožné s vrcholy šestiúhelníka. Nárysem budou kolmice vedoucí nárysnými zobrazeními vrcholů k základnici (ose x_{12}). Také výška se v tomto případě v náryse zachovává, takže stačí nanést její délku na kolmici od základnice. Dostaneme tak nárys horní podstavy. Horní podstava se stejně jako dolní zobrazí jako úsečka rovnoběžná se základnicí.



Obr. 4 – Příklad 3.2.1

Jako poslední vyřešíme viditelnost. Víme, že boční hrany jsou vždy viditelné, ostatní odvodíme dle půdorysu. Viditelné budou tedy hrany AA' , BB' , CC' , DD' , ty zobrazíme plnou čarou, ostatní hrany (EE' , FF') jsou neviditelné, zobrazíme je čárkovaně (Obr. 5).



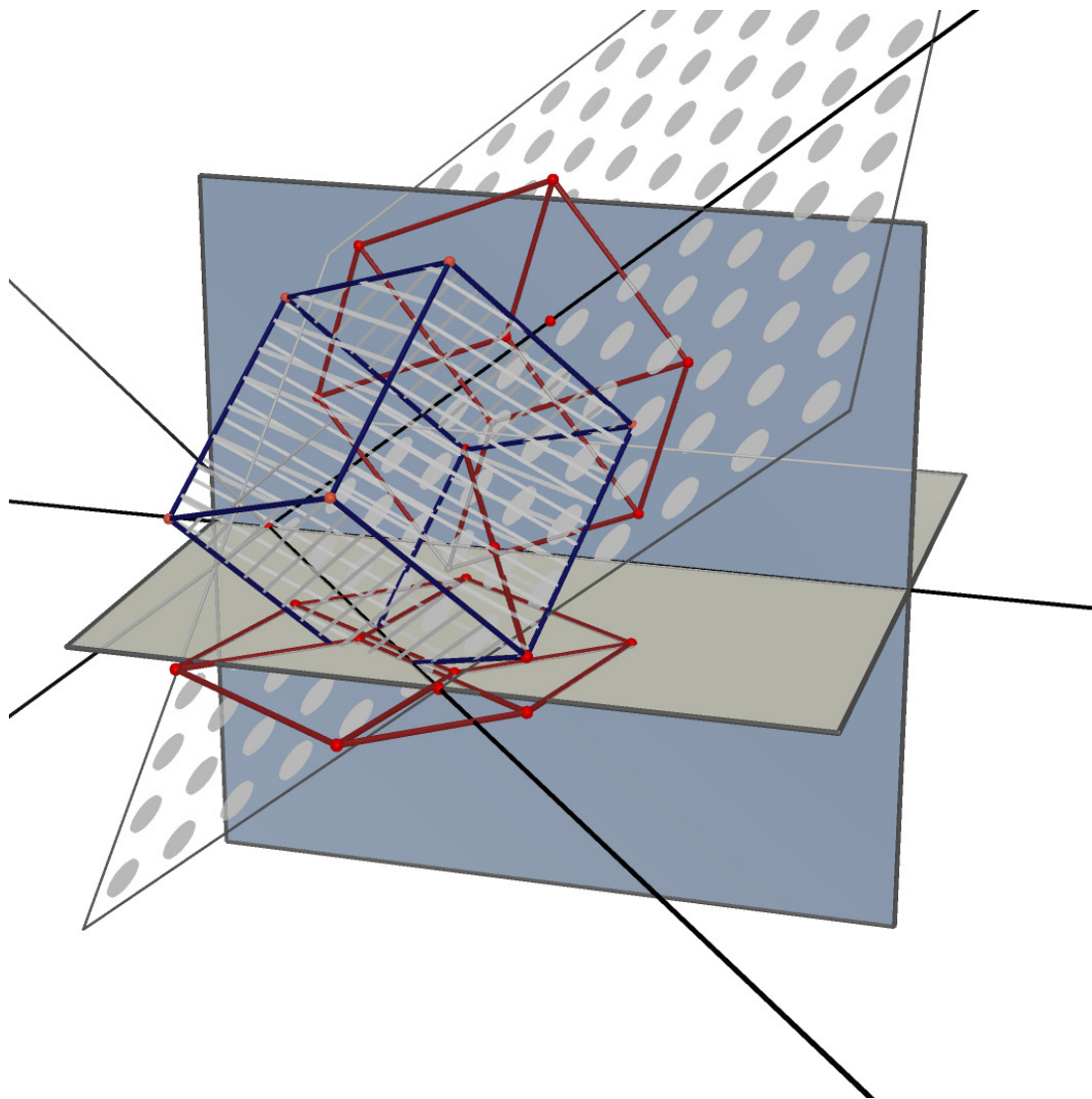
Obr. 5 – Příklad 3.2.1

Úloha 3.2.2 Sestrojte krychli $ABCD A'B'C'D'$, jejíž stěna $ABCD$ leží v rovině p a jsou dány vrcholy A a C' . Rovina $p(-5; 6; 4)$, $A[-1; 1,5; ?]$, $C'[1,5; 6,5; 6,5]$.

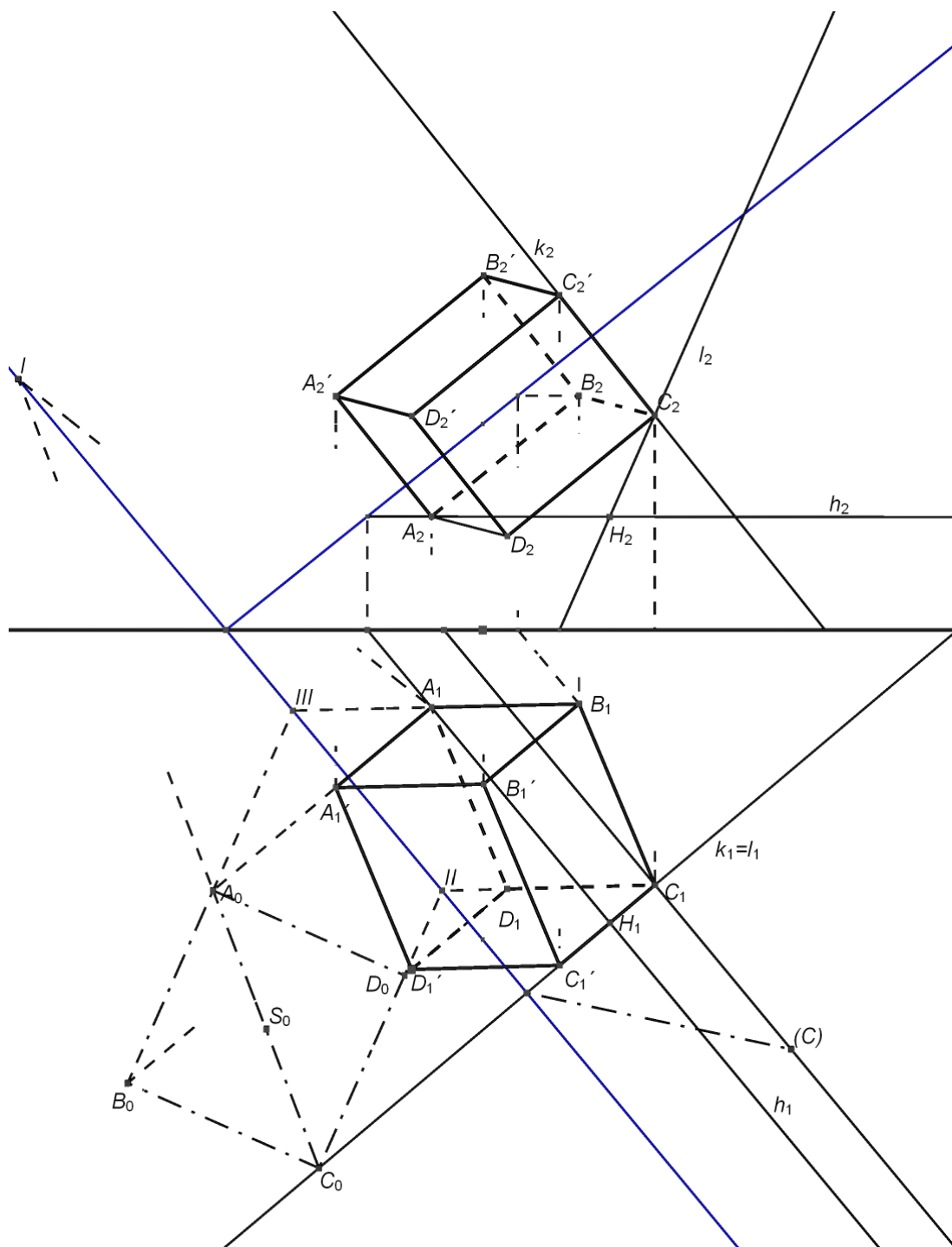
Řešení: Víme, že všechny sousední hrany krychle jsou navzájem kolmé a velikosti hran jsou stejné. Začneme tak, že sestrojíme sdružené obrazy bodu A . Užijeme k tomu hlavní přímky první osy. Bodem C' pak vedeme kolmici k rovině p . Sestrojíme průsečík C kolmice k s rovinou p jako druhý vrchol stěny $ABCD$ (krycí přímka l je určena jedním stopníkem a průsečíkem H s hlavní přímkou h vedenou bodem A). Následně otočíme rovinu p do půdorysny – otočíme bod C a pomocí afinity i bod A . Otočením

můžeme sestavit skutečný obraz čtverce $A_0B_0C_0D_0$. Otočením zpět (pomocí afinity) získáme půdorys a pomocí hlavních přímek najdeme nárys čtverce.

Další vrcholy krychle leží na kolmicích k rovině ρ z bodů ABCD ve vzdálenosti o velikosti délky hrany CC' od roviny ρ . Nakonec ještě určíme viditelnost (Obr. 6 a 7).



Obr. 6 – Příklad 3.2.2



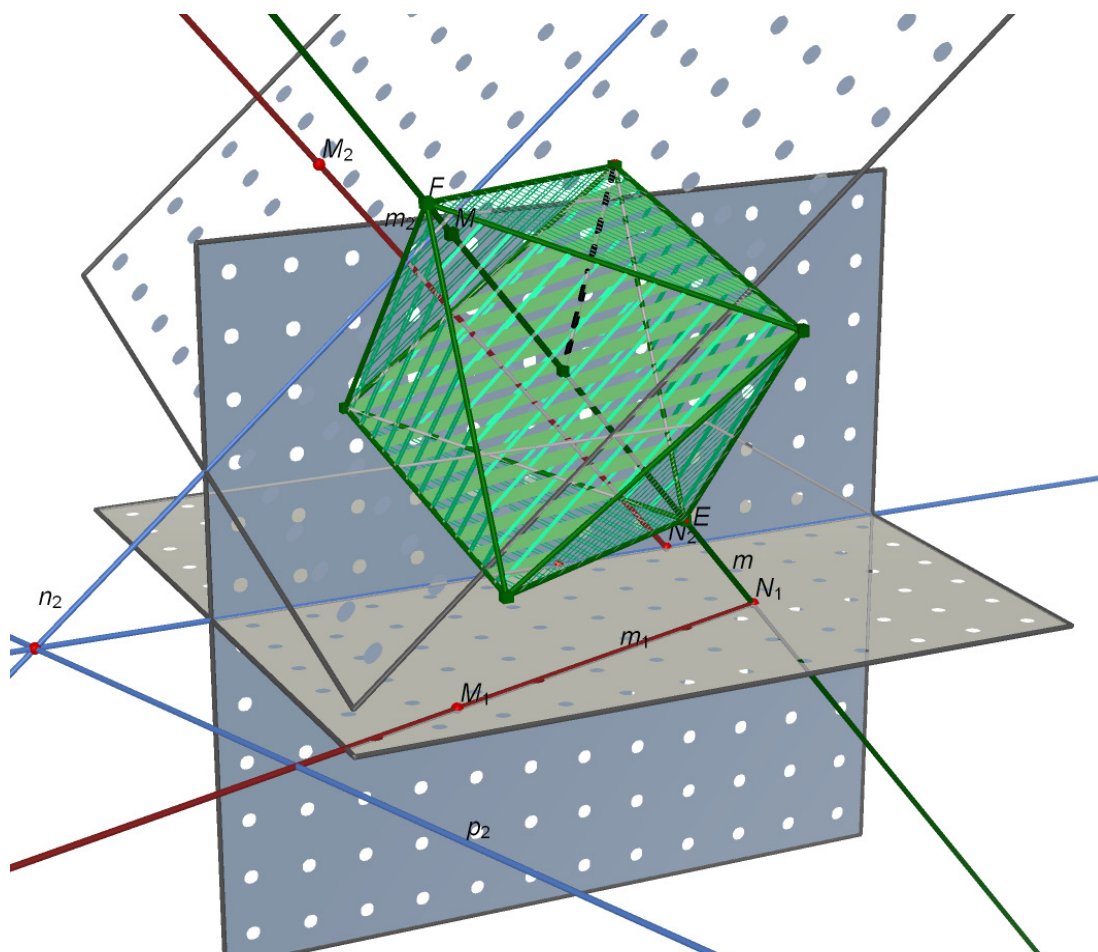
Obr. 7 – Příklad 3.2.2

Úloha 3.2.3 Sestrojte pravidelný osmistěn, jehož úhlopříčka leží na přímce $u = MN$ a je dán vrchol A . $M[-4; 7; 7]$, $N[5; 2; 0]$, $A[0; 2; 7]$.

Řešení: Pravidelný osmistěn je těleso, jehož stěny jsou tvořeny rovnostrannými trojúhelníky. Také je potřeba si uvědomit, že těleso je středově souměrné a každý jeho osový řez obsahující 4 vrcholy je čtverec. Na základě těchto vědomostí vedeme vrcholem A rovinu ρ kolmou na úhlopříčku u pomocí hlavní přímky h (najdeme stopník této přímky a víme, že stopa je kolmá na přímku u) Řez této roviny osmistěnem bude právě čtverec.

Průsečík přímky u s rovinou ρ je střed tělesa S – ten sestojíme pomocí krycí přímky l – její nárys určíme jedním stopníkem a průsečíkem H přímky l s hlavní přímkou h .

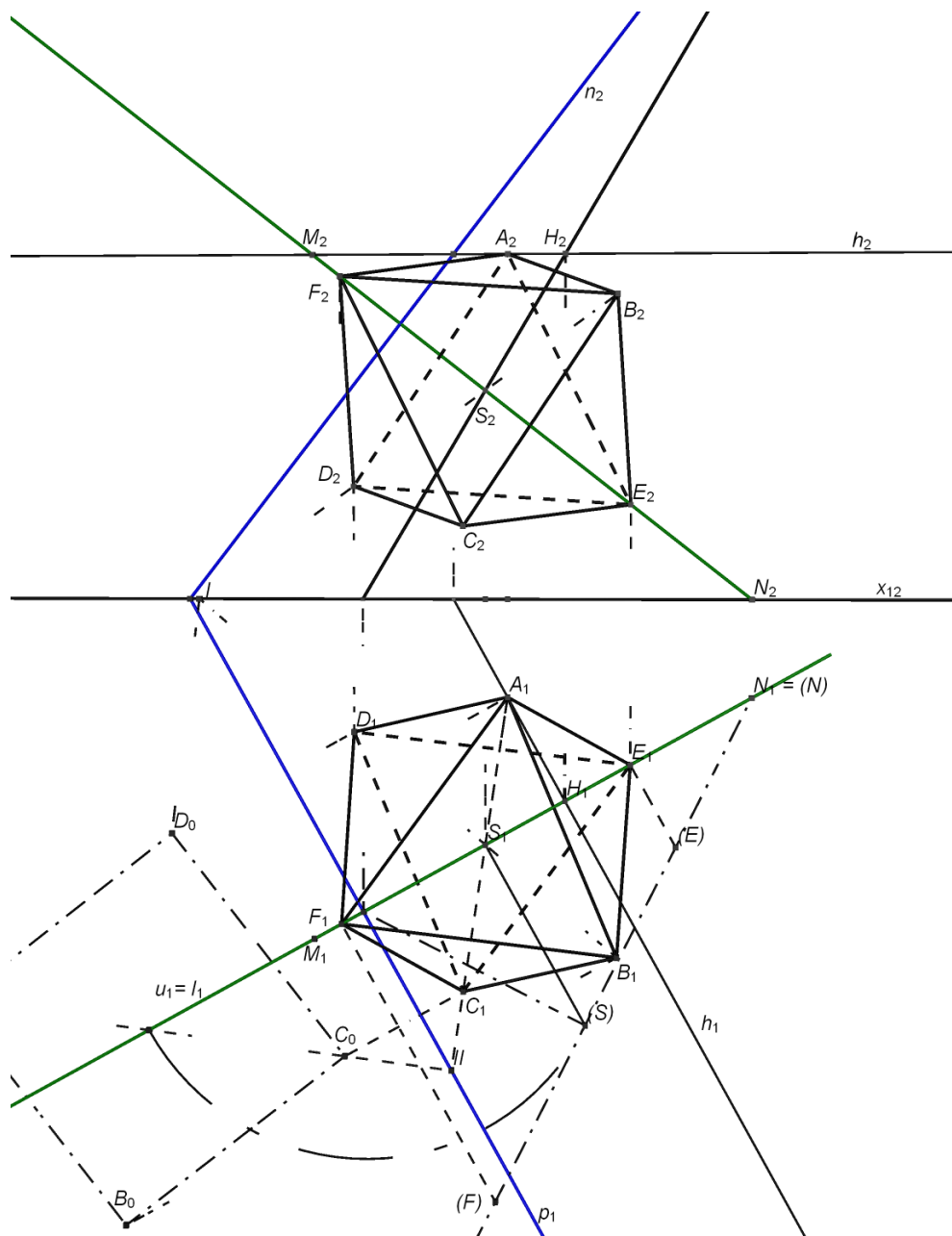
V rovině ρ sestojíme čtverec $ABCD$ podobně jako v předchozím příkladě – otočíme body A a S a v otočení sestojíme čtverec $A_0B_0C_0D_0$. Pomocí afinity otočíme zpět, najdeme nárys čtverce, který leží na hlavních přímkách a na ordinálách.



Obr. 8 – Příklad 3.2.3

Víme, že zbývající vrcholy E a F jsou ve stejné vzdálenosti od středu S jako bod A. Na sklopenou přímku u tedy nanese od bodu (S) na obě strany skutečnou velikost úsečky AS (která je rovna velikosti úsečky A_0S_0). Najdeme tak body (E) a (F), které zobrazíme zpět na přímku. Nárýsy těchto bodů leží na ordinálách.

Známe všechny vrcholy, takže můžeme dorýsovat osmistěn. Nakonec ještě vyřešíme viditelnost (Obr. 8 a 9).



Obr. 9 – Příklad 3.2.3

3.3. Řez hranolu rovinou

Osová afinita

Při sestřování řezu těles v Mongeově promítání užíváme zobrazení, které se nazývá osová afinita.

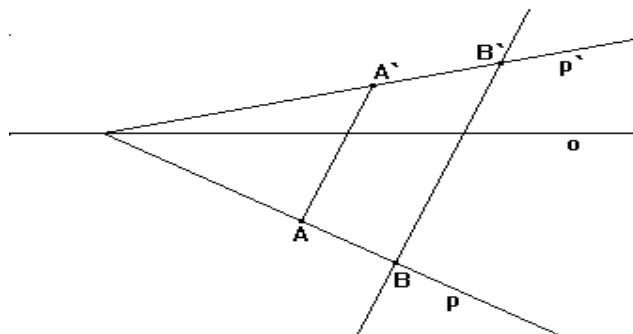
Mějme v rovině přímky o , s a necht' jsou tyto přímky různoběžné. Definujme zobrazení, pro které platí:

1. spojnice dvou sobě si odpovídajících bodů jsou rovnoběžné s přímkou s
2. každé dvě odpovídající si přímky se protínají na přímce o
3. zachovává se incidence bodů a přímek.

Tento vztah mezi body a přímkami nazveme osovou afinitou v rovině. Přímkou s nazveme směrem, přímku o osou této afinity. Zobrazení bodu v afinitě ukážeme na následující úloze.

Úloha 3.3.1 V afinitě dané dvojicí odpovídajících si bodů AA' a osou afinity o zobrazte k bodu B odpovídající bod B' .

Řešení: Spojnicí AA' je již určen směr s afinity. Přímce $p \equiv AB$ odpovídá v dané afinitě přímka p' . Tyto dvě přímky se protínají na ose o a bod A' leží na přímce p' . Bod B' je průsečík přímky p' a rovnoběžky bodem B se směrem s afinity (Obr. 3.3.1)



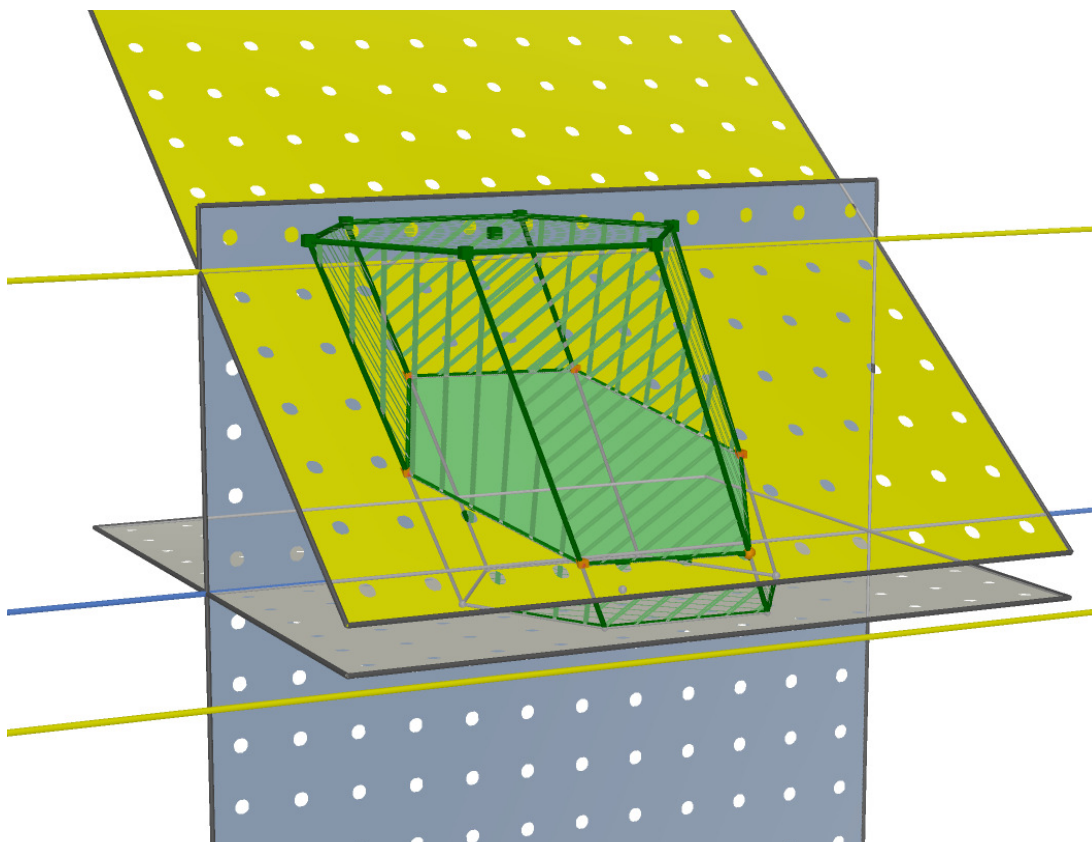
Obr. 3.3.1 – Osová afinita v rovině

Afinitu v rovině lze určit:

- osou afinity a jednou dvojicí odpovídajících si bodů;
- osou afinity, jednou dvojicí odpovídajících si přímek a směrem afinity;
- třemi dvojicemi odpovídajících si bodů takových, že odpovídající si body leží na navzájem různoběžných přímkách;
- dvěmi dvojicemi odpovídajících si různoběžných přímek;
- jednou dvojicí odpovídajících si bodů a jednou dvojicí odpovídajících si přímek, přičemž bod a přímka téže soustavy nejsou incidentní.

Úloha 3.3.2 Kosý šestiboký hranol s pravidelnou podstavou v půdorysně je určen středem $S[0; 3,5; 0]$, vrcholem $A[2,7; 2,6; 0]$, vrchol druhé podstavy je $A'[-1; 6; 6]$. Protněte tento hranol rovinou $\rho(\infty; 7; 5)$.

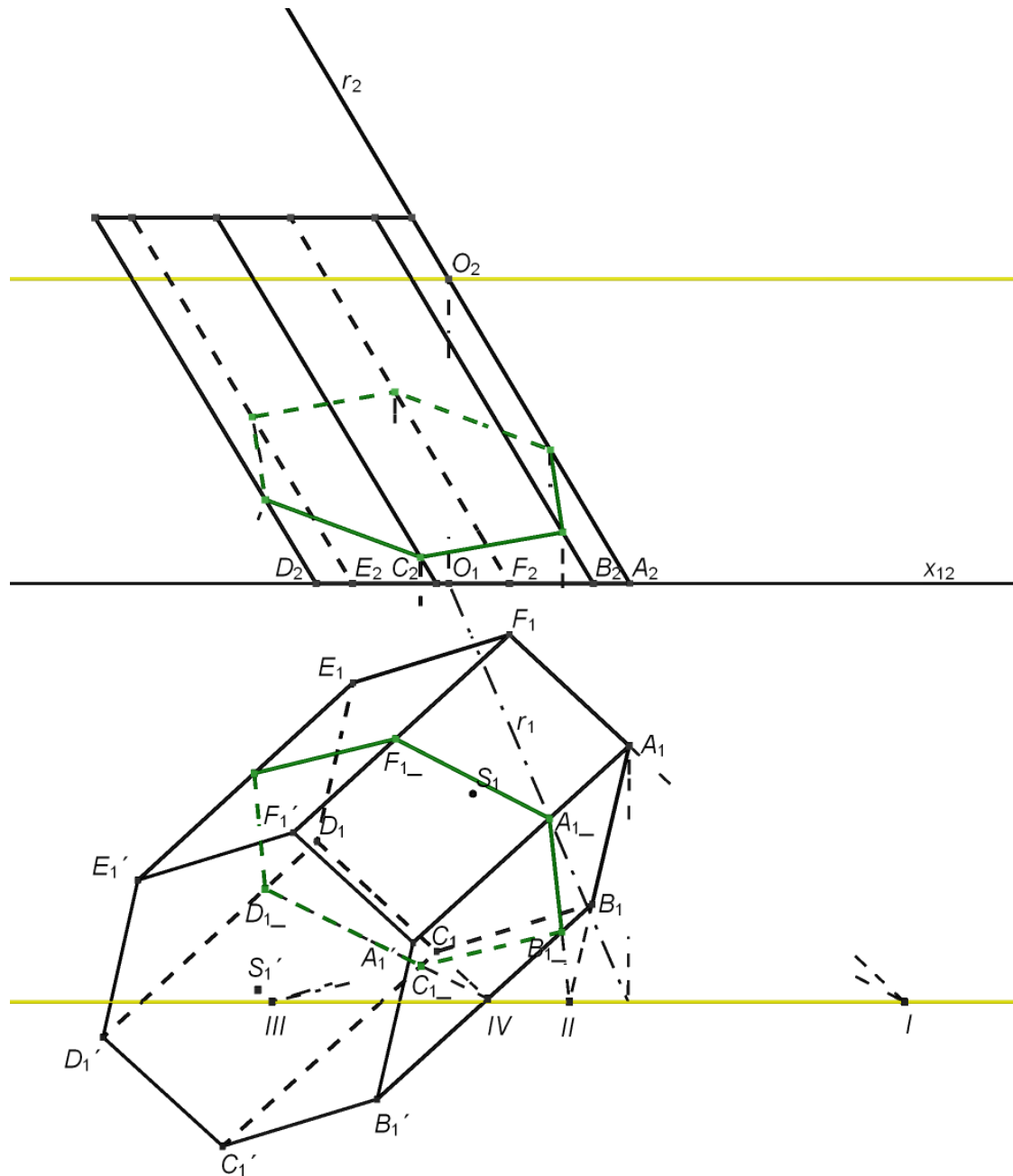
Řešení: Znáмым způsobem sestrojíme kosý šestiboký hranol. První bod řezu $A_{1_}$ najdeme užitím krycí přímky r , která prochází hranou A_2A_2' . Průnik prvního průmětu



Obr. 10 – Příklad 3.3.1

krycí přímky s hranou A_1A_1' je hledaný bod A_{1L} . Ostatní body řezu najdeme pomocí

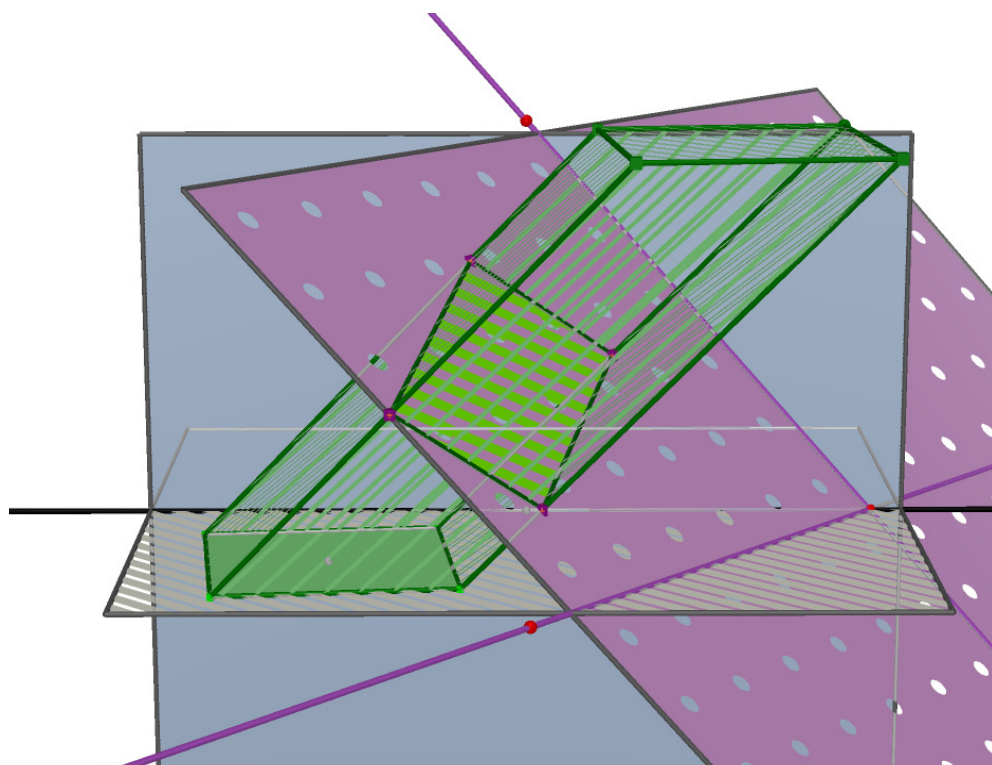
afinity. Afinity mezi křivkou řezu a křivkou podstavy je určena osou $o \equiv p^o$ a dvojicí odpovídajících si bodů A a A' . Osa afinity je průsečnice roviny řezu ρ s rovinou podstavy. Body I, II, III, IV jsou průsečíky odpovídajících si přímek afinity. (Obr. 10 a 11)



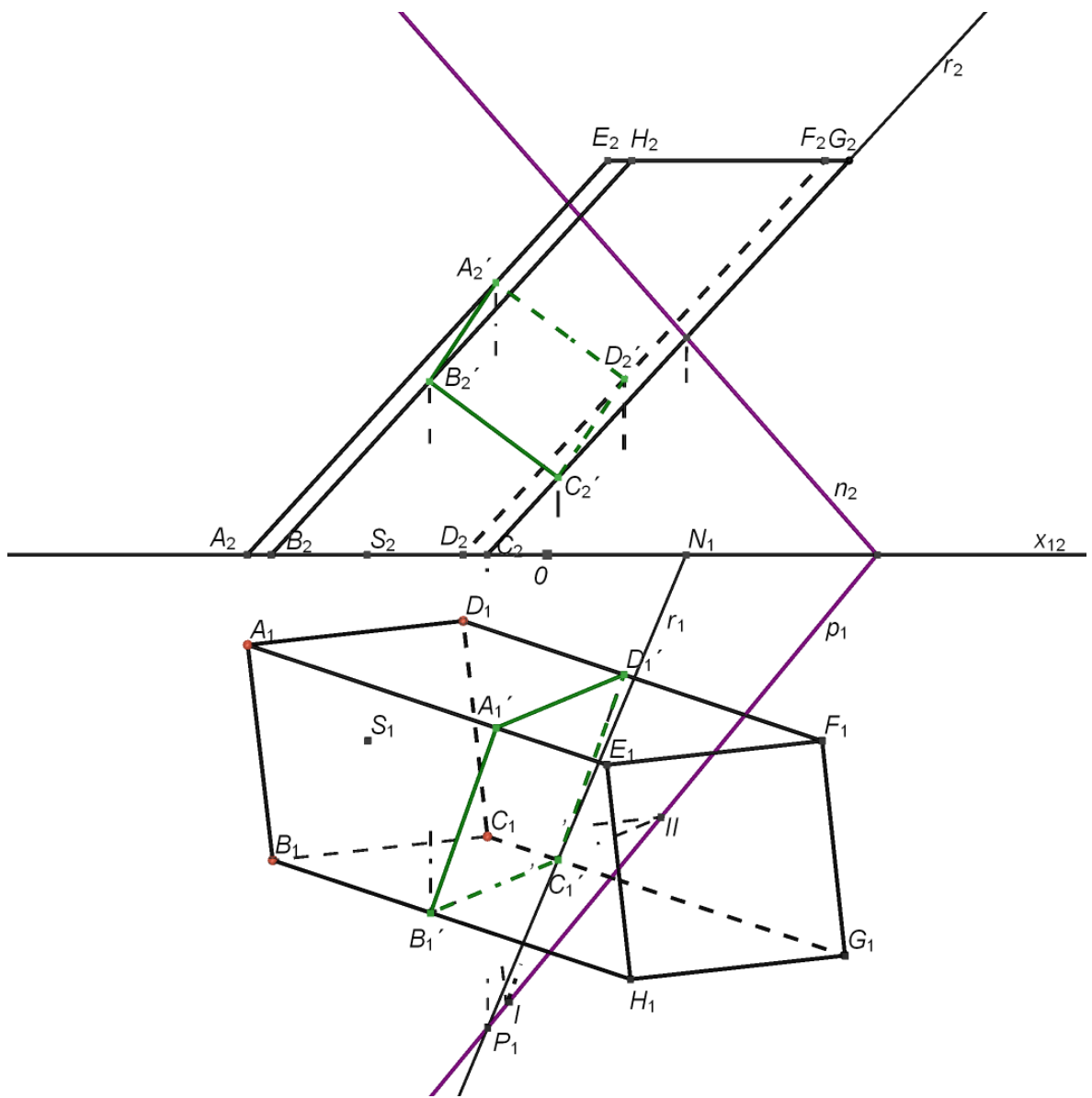
Obr. 11 – Příklad 3.3.1

Úloha 3.3.3 Kosý hranol se čtvercovou podstavou ležící v půdorysně (A[-5; 1,5; 0], C[-1; 4,7; 0]), jehož pobočná hrana je AE, (E[1; 3,5; 6,5]) řežte rovinou $\rho(5,5; 6,7; 6,2)$.

Řešení: Jeden vrchol řezu sestrojíme jako průsečík pobočné hrany CC' s rovinou ρ a najdeme jeho sdružené průměty. Ostatní body řezu najdeme pomocí afinity, jejíž osa je dána půdorysnou stopou roviny a směr je dán dvojicí bodů C_1C_1' . Konstrukce je zřejmá z obrázku (Obr. 12 a 13).



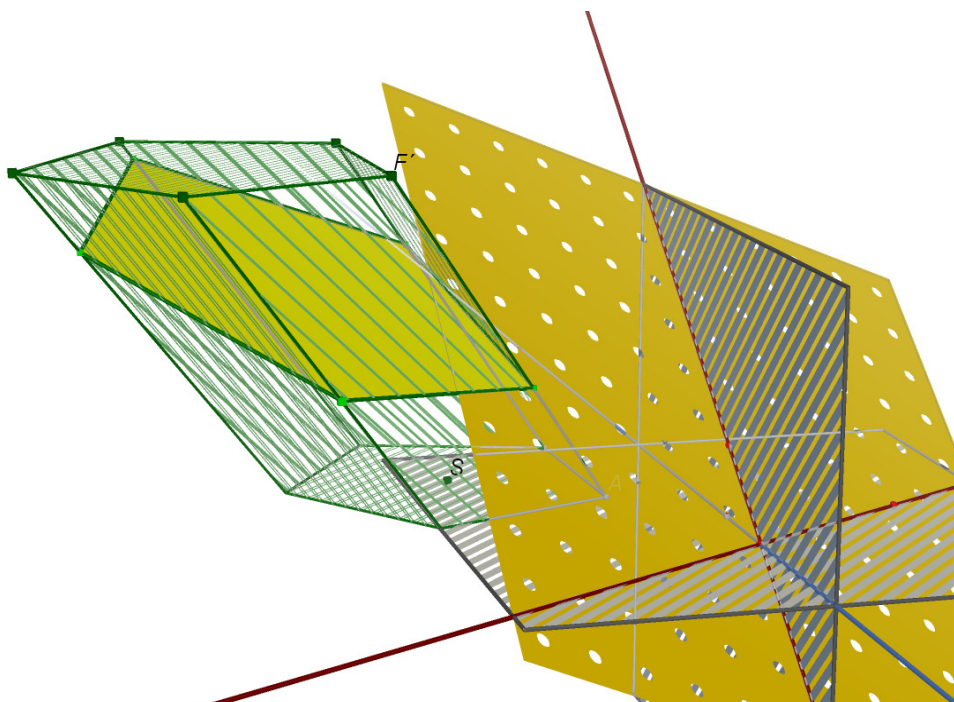
Obr. 12 – Příklad 3.3.2



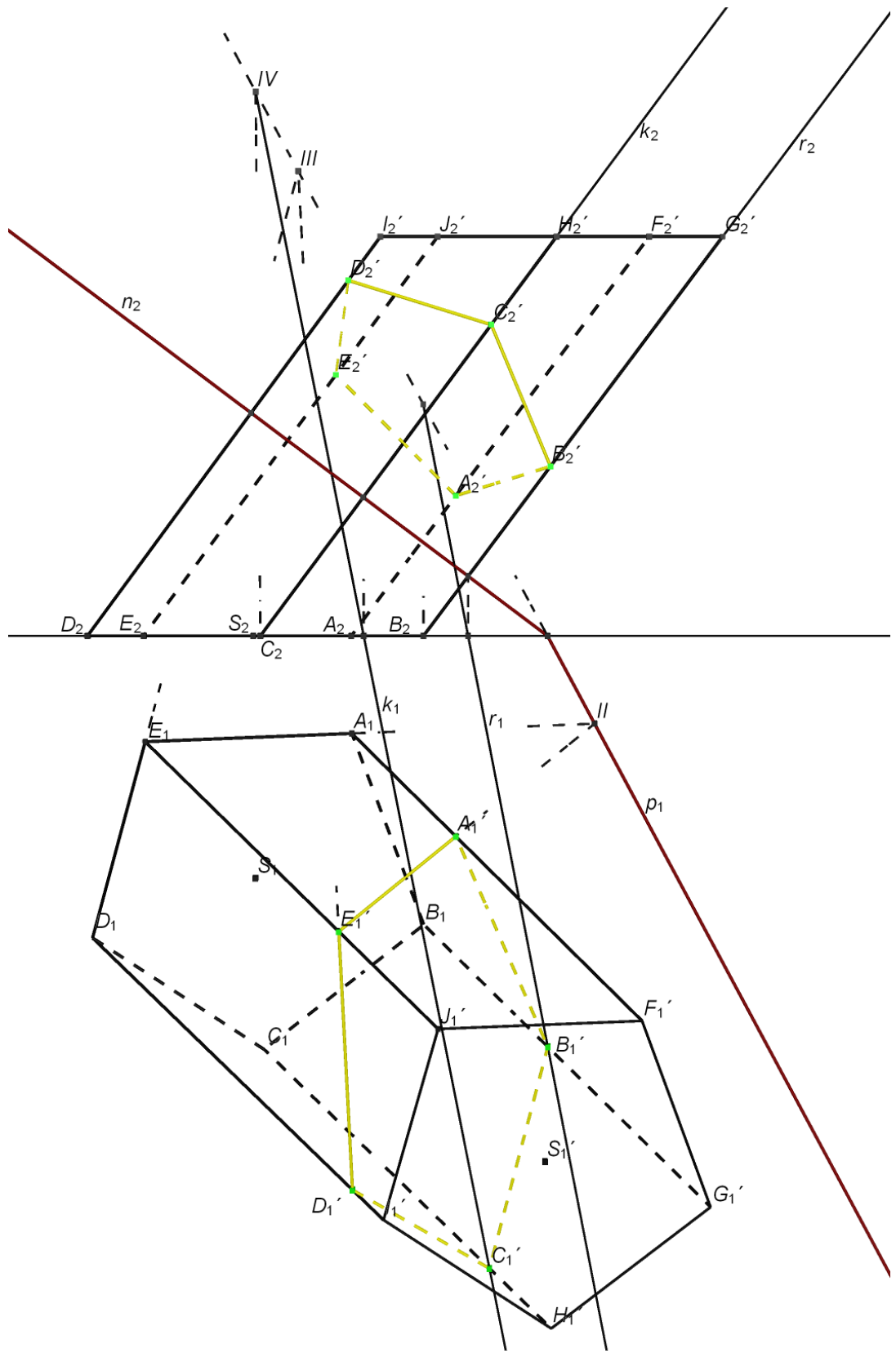
Obr. 13 – Příklad 3.3.2

Úloha 3.3.4 Kosý hranol s pravidelnou pětiúhelníkovou podstavou ABCDE ležící v půdorysně π (střed podstavy $S[-4; 5; 0]$, $A[-2; 2; 0]$, pobočná hrana AF' , $F[4; 8; 8]$) protněte rovinou $\rho(2; -3,7, 1,5)$.

Řešení: Konstrukce bude podobná jako v předchozím příkladě. Podstava leží v půdorysně, známe její střed a vrchol, můžeme tedy známou konstrukcí sestavit pětiúhelníkovou podstavu. Protože známe hranu AF' , můžeme také sestavit obraz kosého hranolu. Řez rovinou ρ sestojíme užitím krycích přímek a afinity. Osou afinity je stopa roviny ρ , řezem je pětiúhelník. Nakonec vyřešíme viditelnost, jak je vidět na obrázku (Obr. 14 a 15).



Obr. 14 – Příklad 3.3.3



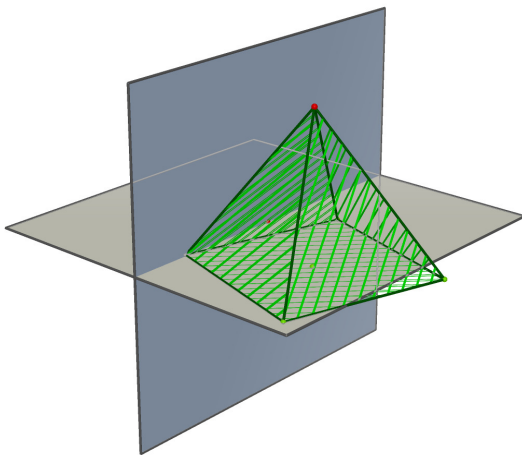
Obr. 15 – Příklad 3.3.3

3.4. Jehlan

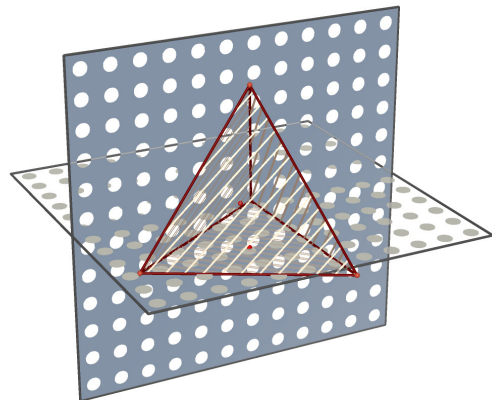
Mějme dán mnohoúhelník $AB\dots$ v rovině ρ a bod V , který v této rovině neleží. Pak všechny přímky, které procházejí bodem V a protínají obvod mnohoúhelníka $AB\dots$ tvoří plochu n -bokého jehlanu. Daný mnohoúhelník nazýváme stejně jako u hranolu řídicí mnohoúhelník a bod V se nazývá hlavní vrchol jehlanu.

Přímky spojující hlavní vrchol jehlanu a obvod mnohoúhelníka nazýváme povrchové přímky jehlanové plochy a tvoří stěnu plochy. Řídicí mnohoúhelník je pak podstavou jehlanu.

Jehlan, jehož podstavou je pravidelný n -úhelník a pata výšky je středem podstavy, se



Obr. 16 – Pravidelný jehlan

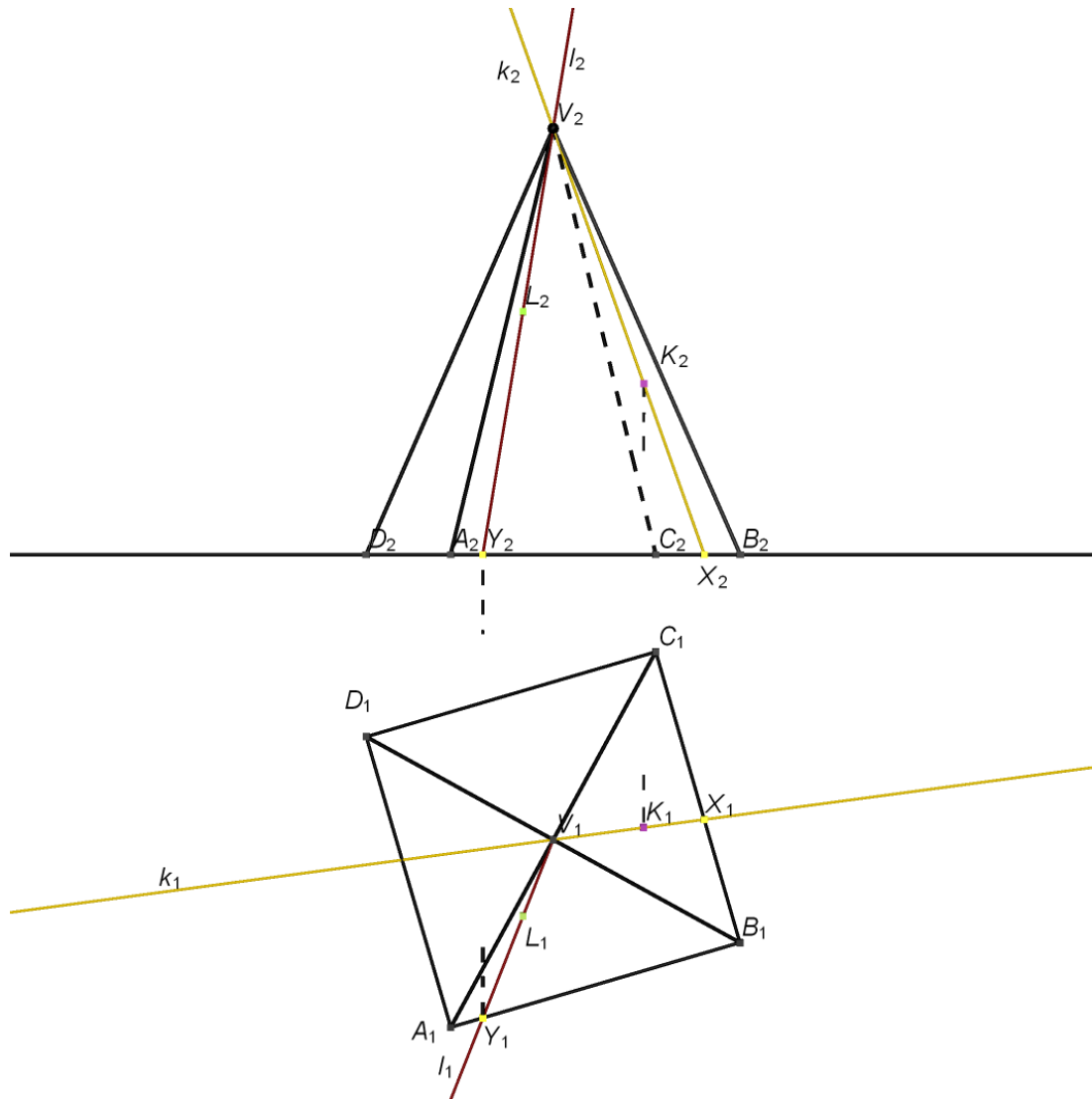


Obr. 17 - Čtyřstěn

nazývá *pravidelný jehlan*. Jeho pobočné stěny jsou rovnoramenné trojúhelníky. Jehlan, jehož podstavou je trojúhelník, se nazývá *trojboký jehlan*. Všechny stěny pravidelného čtyřstěnu jsou rovnostranné trojúhelníky.

Úloha 3.4.1 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan s podstavou ABCD ležící v půdorysně, jehož hlavním vrcholem je V. Sestrojte sdružené průměty jehlanu a zbylé průměty bodů K a L. $A[-1,7; 7,8; 0]$, $V[0; 4,7; 7]$, $K[1,5; 4,5; ?]$, $L[-0,5; ?; 4]$.

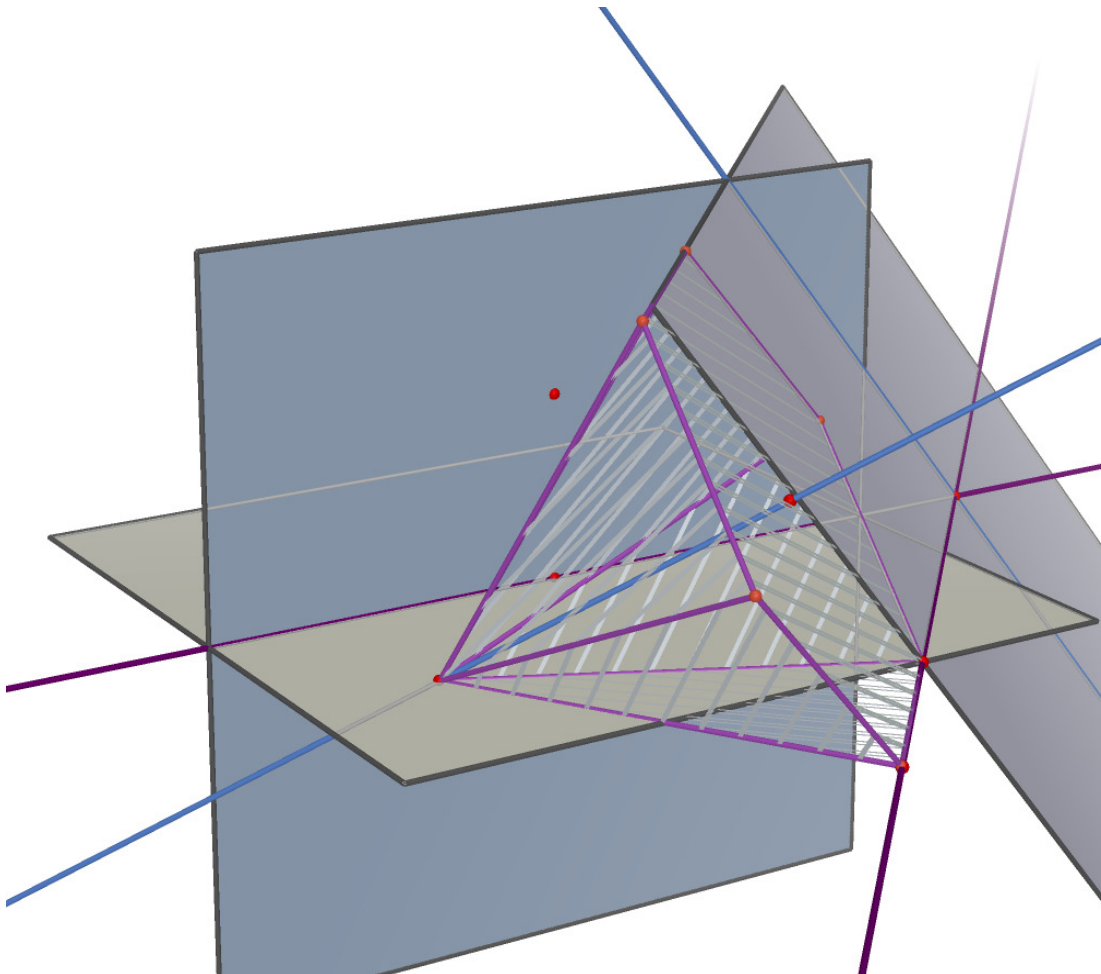
Řešení: Najdeme sdružené průměty hran a podstavy a tak najdeme sdružené průměty jehlanu. Víme, že půdorysem bude čtverec a polovinu jeho úhlopříčky tvoří úsečka $|AV|$. Zbývající průměty bodů K a L odvodíme užitím povrchových přímek. (Obr. 18)



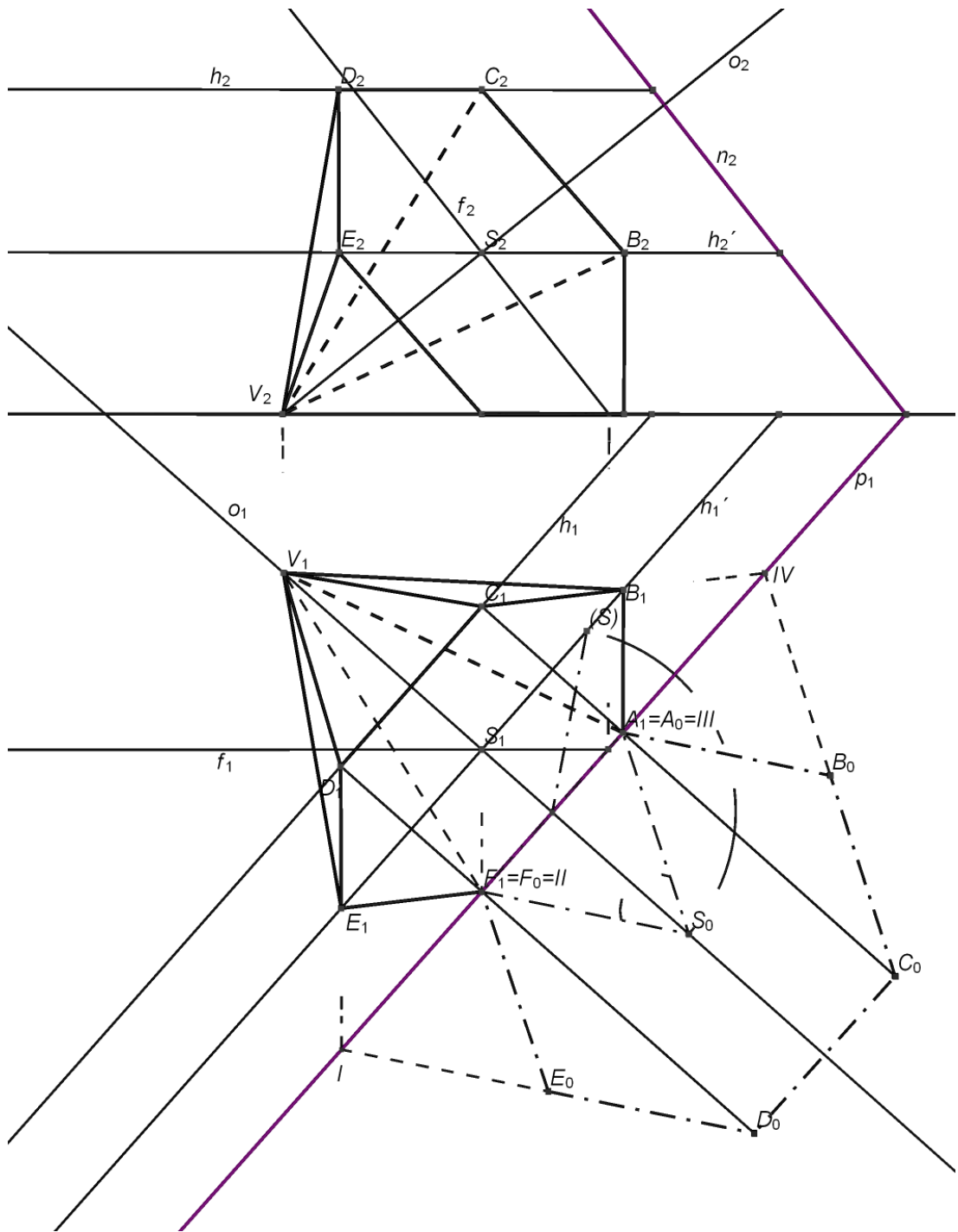
Obr. 18 – Sdružené obrazy bodů na povrchu jehlanu

Úloha 3.4.2 Zobrazte pravidelný šestiboký jehlan s odstavou o středu S v rovině ρ , jehož jedna stěna leží v půdorysně ($\rho(8; 9; 10)$, $S[0; ?; 3]$).

Řešení: Pomocí hlavních přímk najdeme sdružené obrazy bodu S . Střed S potom v půdorysně sklopíme a otočíme kolem stopy roviny ρ . Víme, že jedna stěna jehlanu leží v půdorysně, proto bude jedna hrana ležet na půdorysné stopě roviny ρ . Znamou konstrukcí sestrojíme v otočení pravidelný šestiúhelník a pomocí afinity zobrazíme zpět do půdorysny. Osa jehlanu je kolmá na stopu roviny, proto můžeme jednoduše sestrojit vrchol. Nárýs jehlanu sestrojíme užitím hlavních přímk první a druhé osnovy. Nakonec určíme viditelnost. (Obr. 19 a 20)



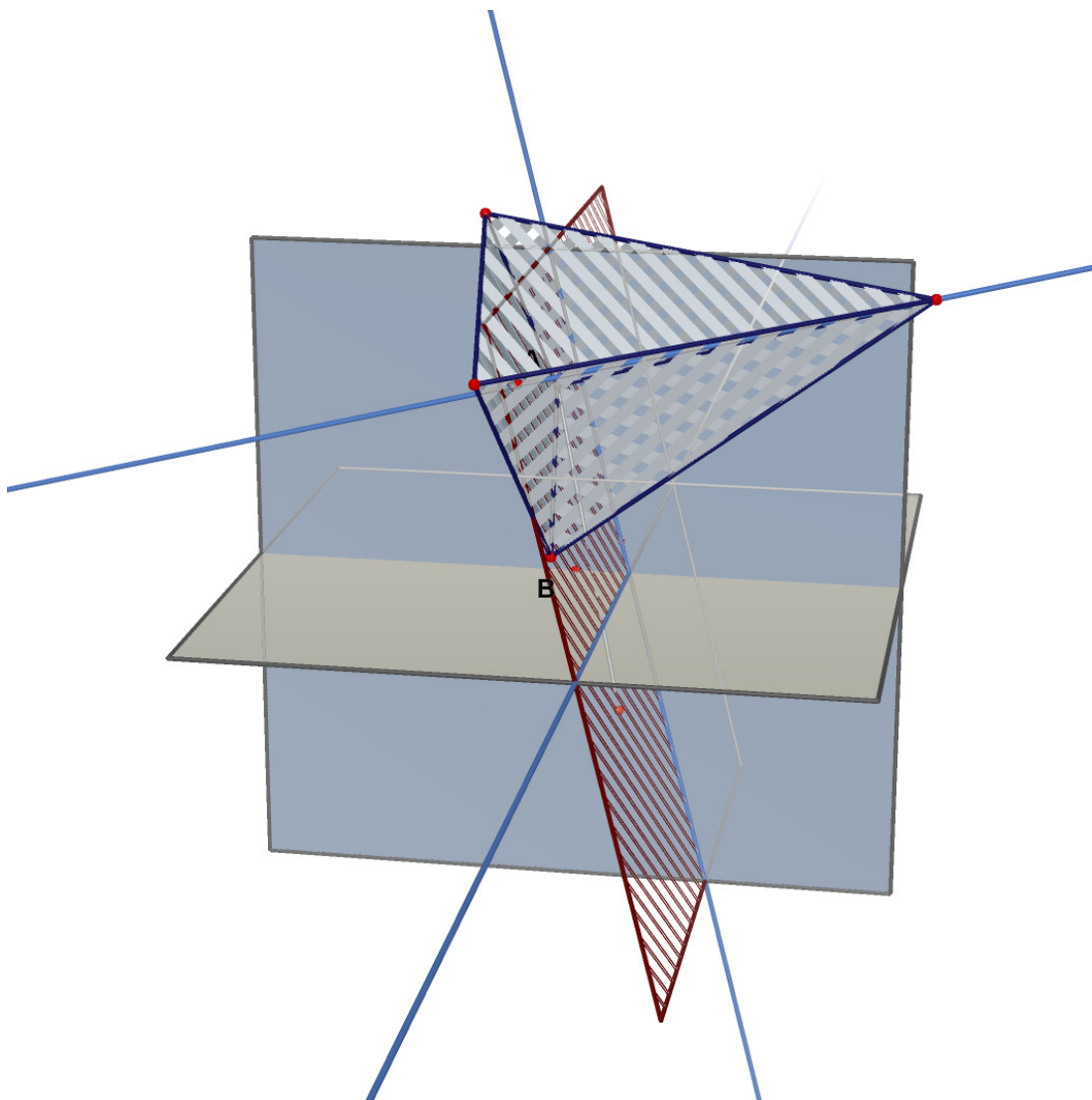
Obr. 19 – Příklad 3.4.2



Obr. 20 – Příklad 3.4.2

Úloha 3.4.3 Zobrazte pravidelný čtyřboký jehlan s podstavou ABCD v rovině kolmé k nárysně. $A[0; 2; 4]$, $B[0,5; 5,5; 2]$, $v = 7$, $z_V > z_A$.

Řešení: Body A a B leží na nárysné stopě kolmé roviny. Podstava se nám tedy v nárysu zobrazí jako úsečka. Body C a D získáme známým způsobem – otočíme půdorysy bodů A a B kolem půdorysné stopy, zobrazíme podstavu ve skutečné velikosti a pomocí afinity zobrazíme zpět. Protože $z_V > z_A$, naneseeme výšku na kolmici do příslušné poloroviny a sestrojíme nárys jehlanu. Půdorys vrcholu V jehlanu leží na kolmici k půdorysné stopě a na ordinále. (Obr. 21 a 22)



Obr. 21 – Příklad 3.4.3

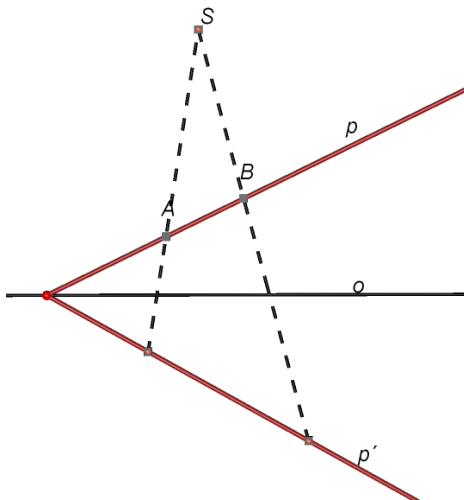
3.5.Řez jehlanu rovinou

Při sestrojování řezu jehlanu rovinou využíváme vztahu mezi mnohoúhelníky řezu a mnohoúhelníky podstavy. Tento vztah se nazývá středová kolineace.

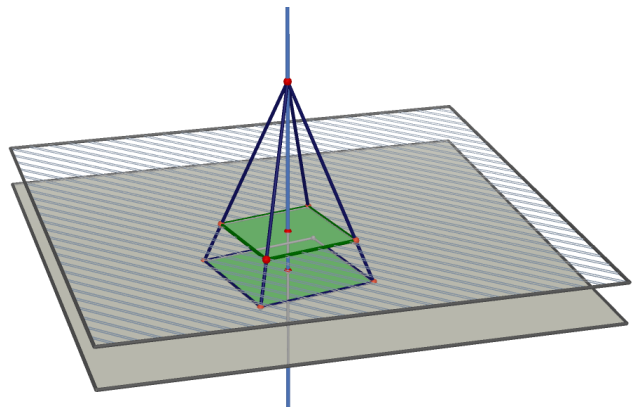
Středová kolineace

Základní vlastnosti:

- Bodu odpovídá bod a přímce přímka.
- Přímky, které si odpovídají ve středové kolineaci, se protínají na ose kolineace, nebo jsou s ní rovnoběžné.
- Body osy kolineace jsou samodružné, tj. vzor a obraz splývají.
- Středová kolineace zachovává incidenci.
- Body, které si odpovídají ve středové kolineaci, leží na přímce procházející středem kolineace (Obr. 23 a 24).



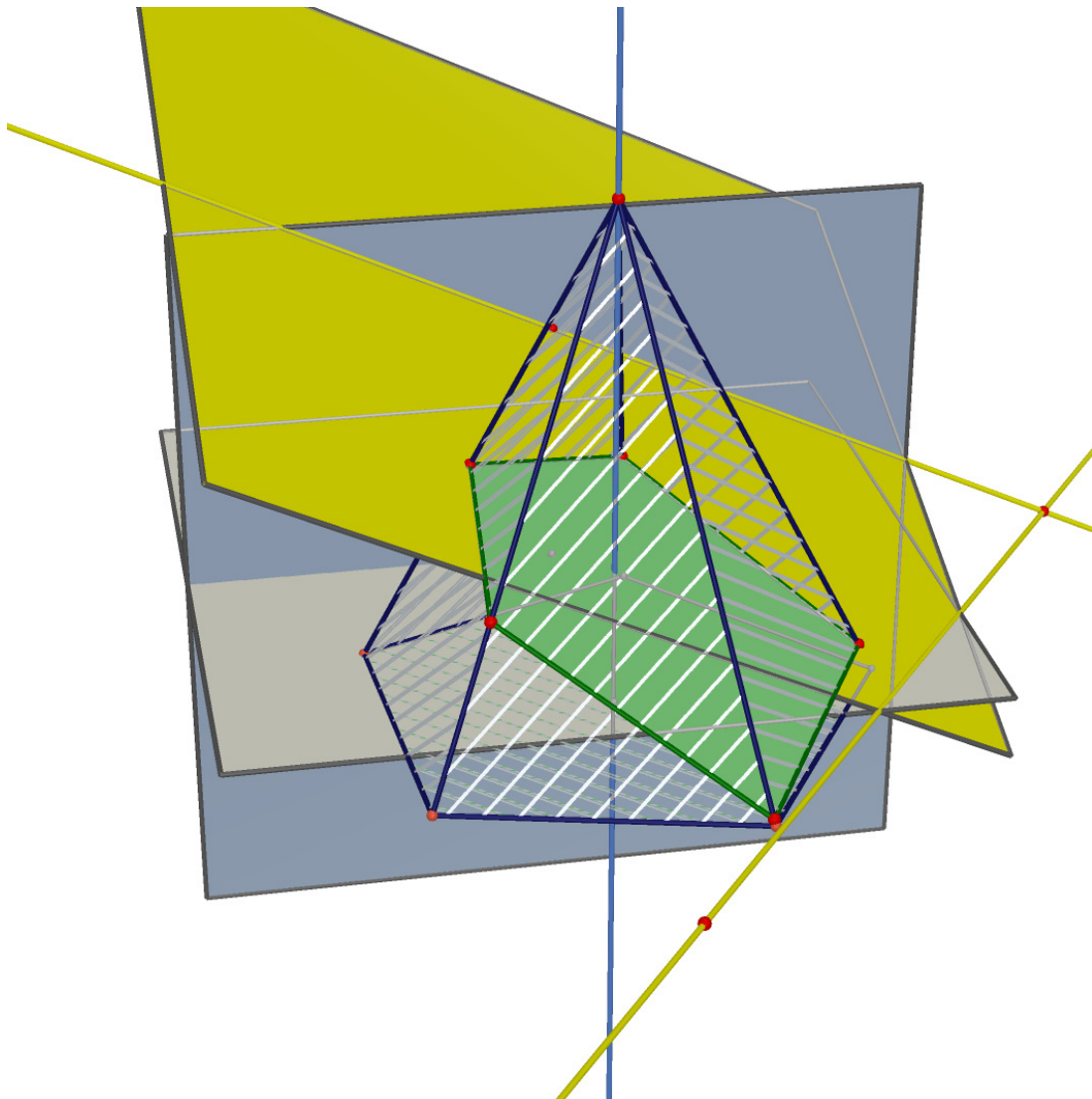
Obr. 23 – Středová kolineace v rovině



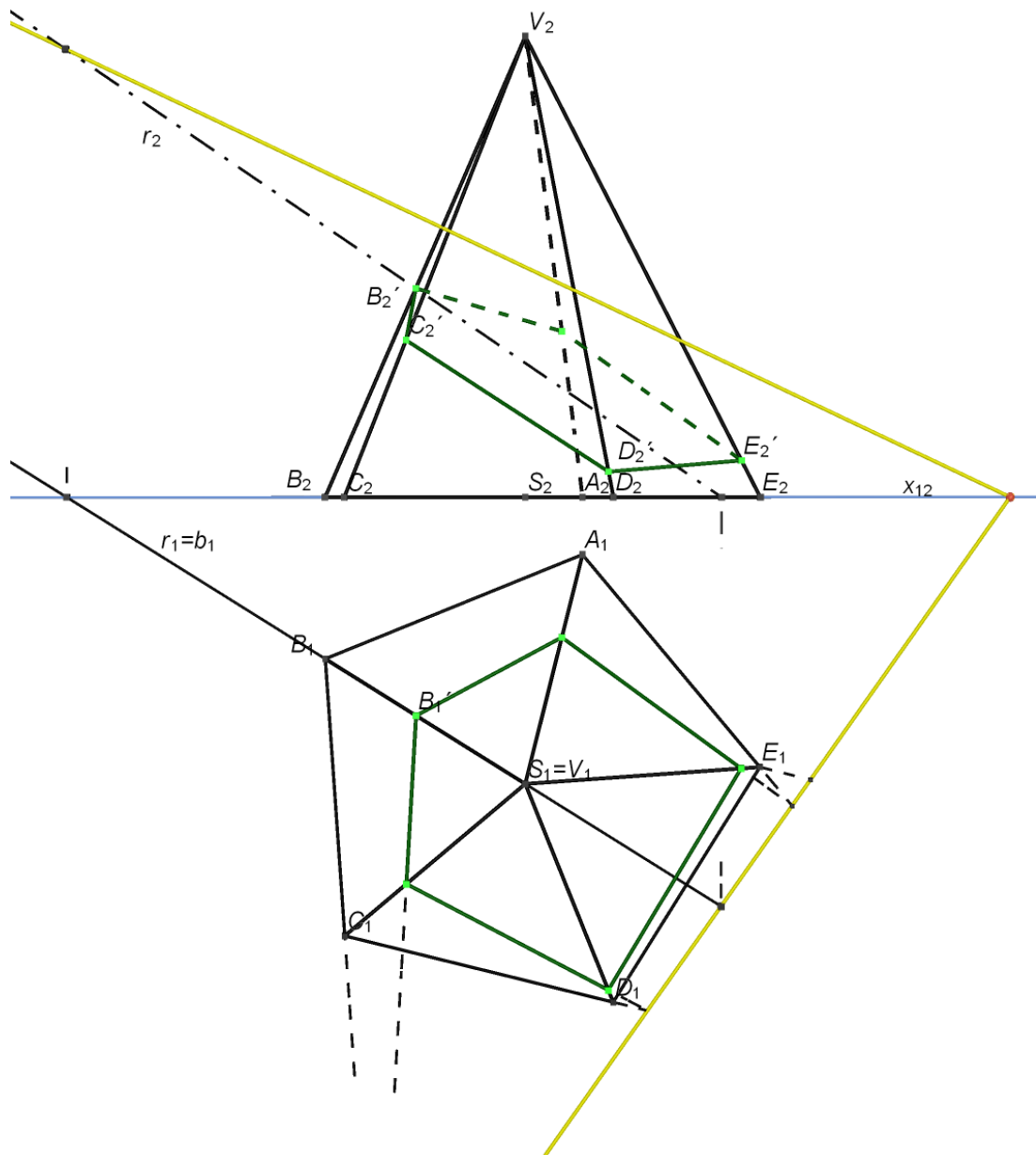
Obr. 24 – Středová kolineace v prostoru

Úloha 3.5.1 Sestrojte řez pravidelného pětibokého jehlanu s podstavou v půdorysně a středem $S[0; 5; 0]$, vrcholem $A[1; 1; 0]$ a výškou $v = 8$ rovinou $\rho(8,5; 11; 4)$.

Řešení: Kolineace mezi křivkou řezu a křivkou podstavy je určena středem, osou a dvojicí odpovídajících si bodů E a E' . Střed kolineace splývá s vrcholem jehlanu, osa kolineace je průsečnicí roviny řezu s rovinou podstavy $o \equiv p^o$. Bod E' jsme získali jako průsečík paprsku kolineace EV s rovinou řezu pomocí krycí přímky r přímky EV vzhledem k půdorysně. Body I, II, III... jsou průsečíky odpovídajících si přímek na ose kolineace (Obr. 25, 26).



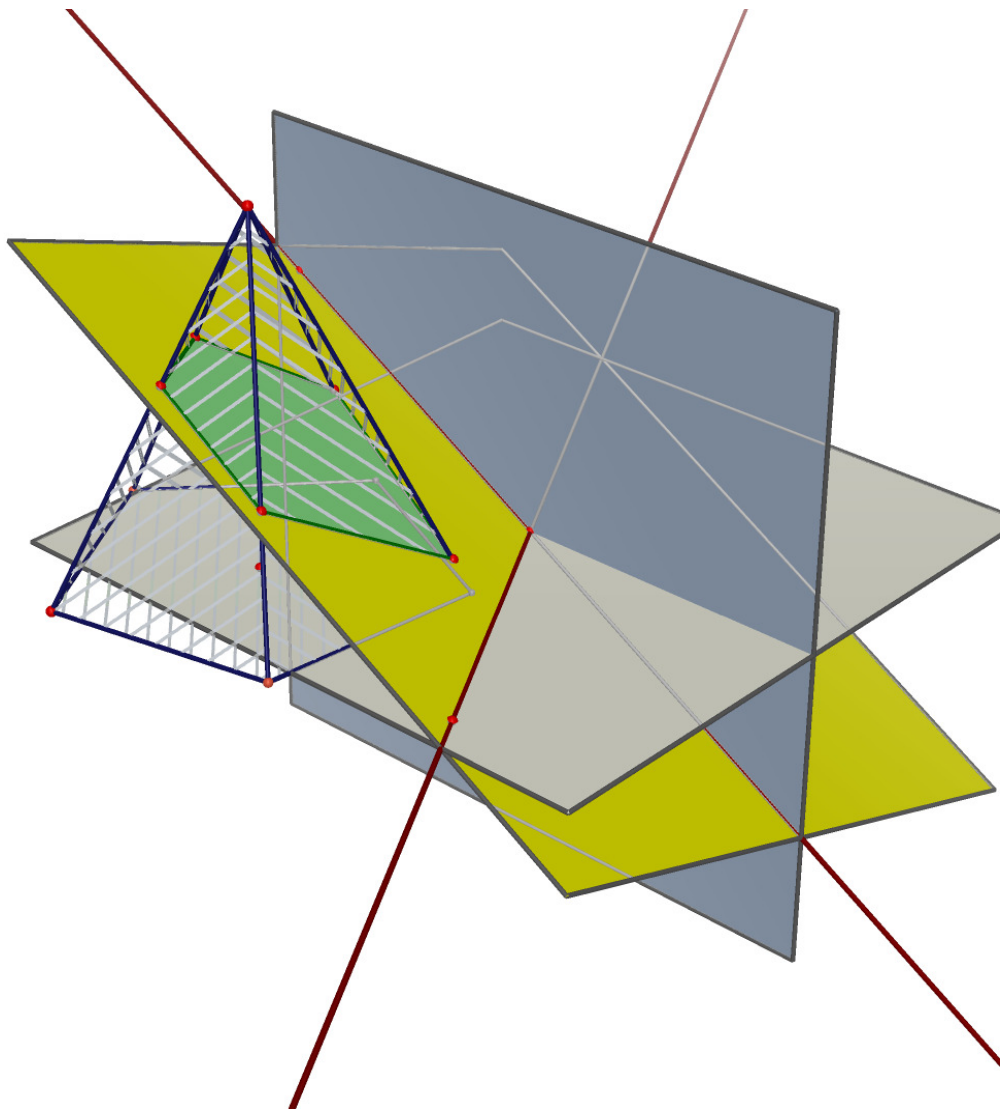
Obr. 25 – Příklad 3.5.1



Obr. 26 – Příklad 3.5.1

Úloha 3.5.2 Pravidelný pětiboký jehlan ABCDE s podstavou v půdorysně protněte rovinou $\rho(0, 60^\circ, 150^\circ)$. Zobrazte řez tohoto jehlanu danou rovinou a vyznačte viditelnou té části, která je mezi podstavou a rovinou ρ . $A[-4; 7,3; 0]$, $V[-2,5; 4; 6,5]$.

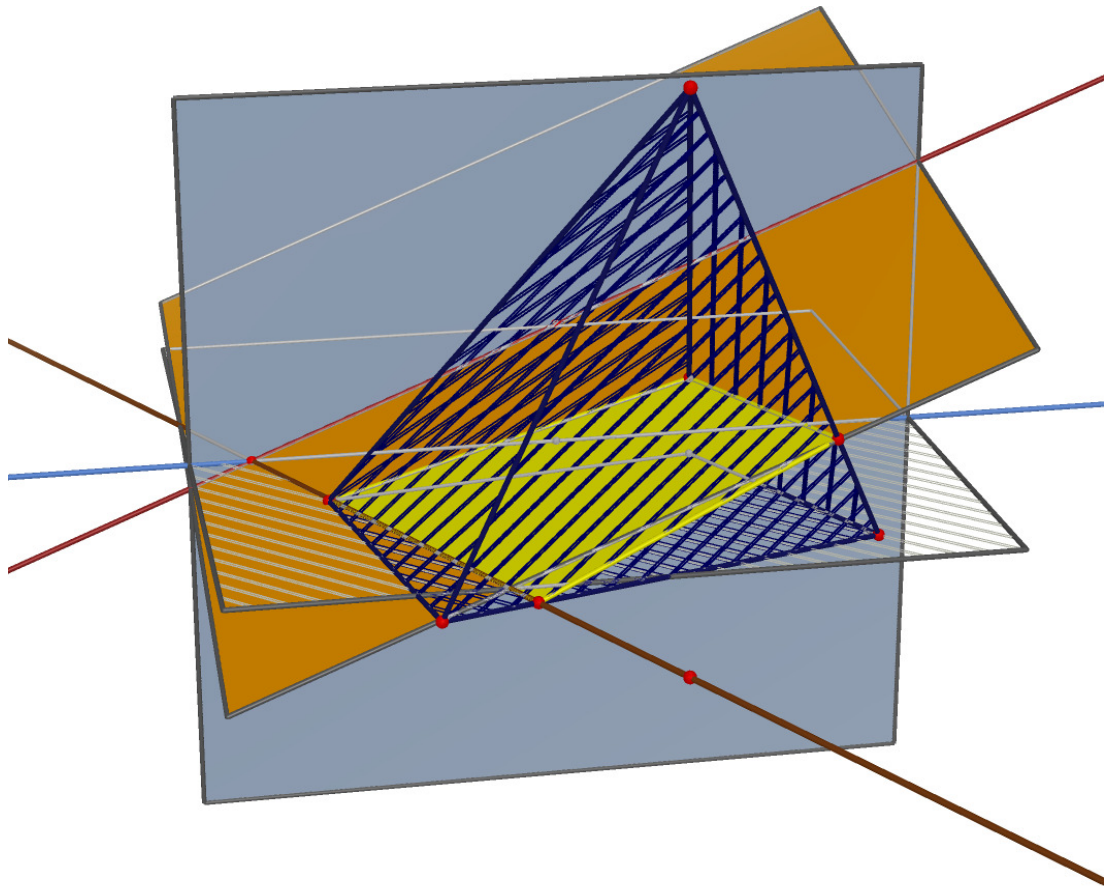
Řešení: Sestrojíme obrazy průsečíku s rovinou ρ - např. C' hrany CV - užitím krycí přímky r . Pomocí středové kolineace pak sestrojíme ostatní průsečíky roviny ρ s jehlanem. Osou středové kolineace bude půdorysná stopa p_1^p roviny ρ , středem kolineace bod V_1 a párem sdružených bodů C_1C_1' . Narys získáme známým způsobem, konstrukce je zřejmá z obrázku. Můžeme užít ordinál či hlavních přímek první a druhé osnovy. (Obr. 27 a 28)



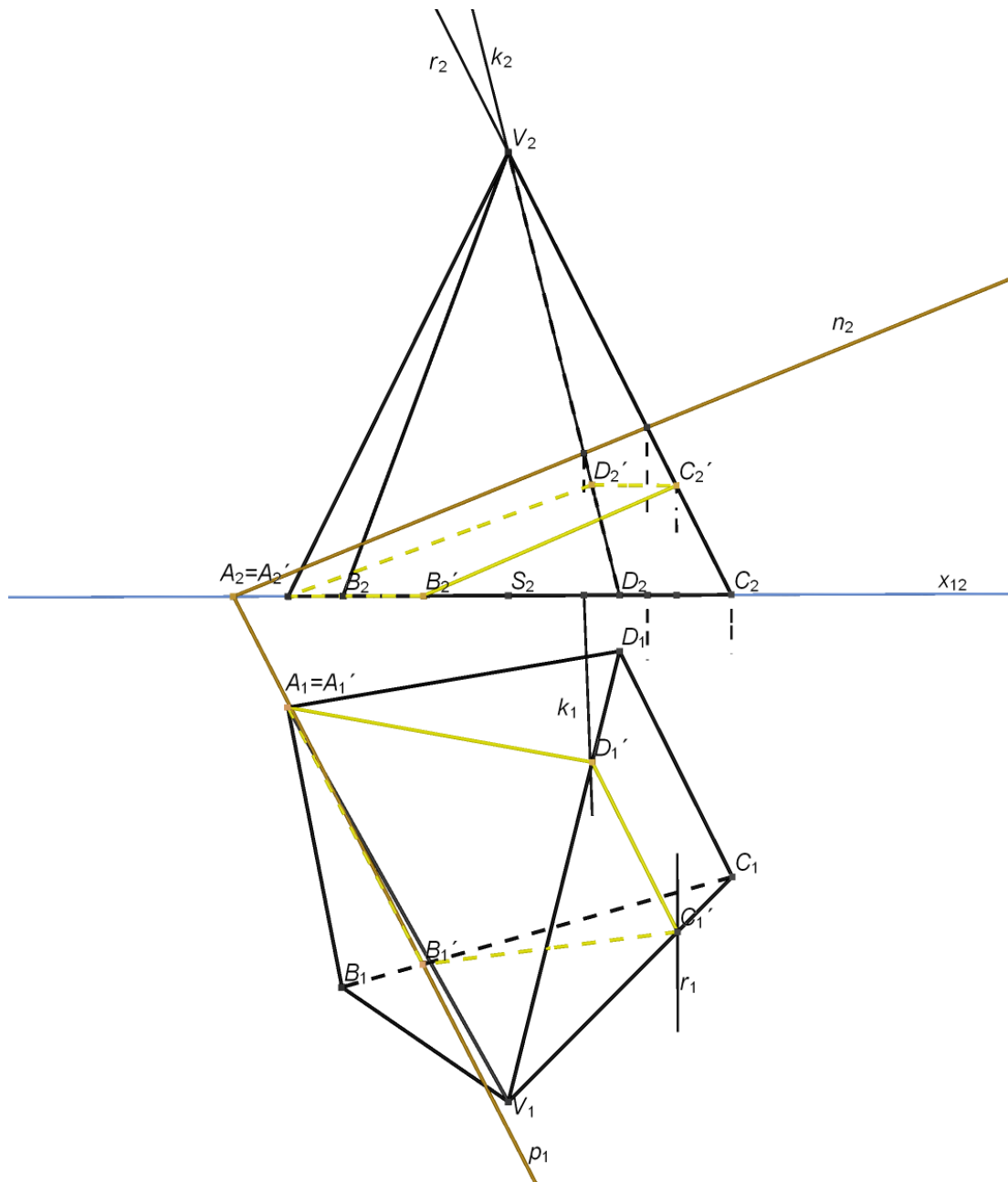
Obr. 27 – Příklad 3.5.2

Úloha 3.5.3. Zobrazte řez roviny $\rho(-5; 9,5; 2)$ kosým čtyřbokým jehlanem ABCDV. $A[-4; 2; 0]$, $B[-3; 7; 0]$, $C[4; 5; 0]$, $D[2; 1; 0]$ $V[0; 9; 8]$.

Řešení: Známým způsobem sestrojíme půdorys a nárys jehlanu a stopy roviny ρ . Dva body řezu jsou známy – $A_1' = A_1$ a bod B_1' , který leží na hraně B_1C_1 a je průsečíkem této hrany se stopou roviny ρ . Ostatní body řezu sestrojíme užitím krycích přímek. Nárys řezu pak sestrojíme pomocí hlavních přímek či ordinál. (Obr. 29 a 30)



Obr. 29 – Příklad 3.5.3



Obr. 30 – Příklad 3.5.3

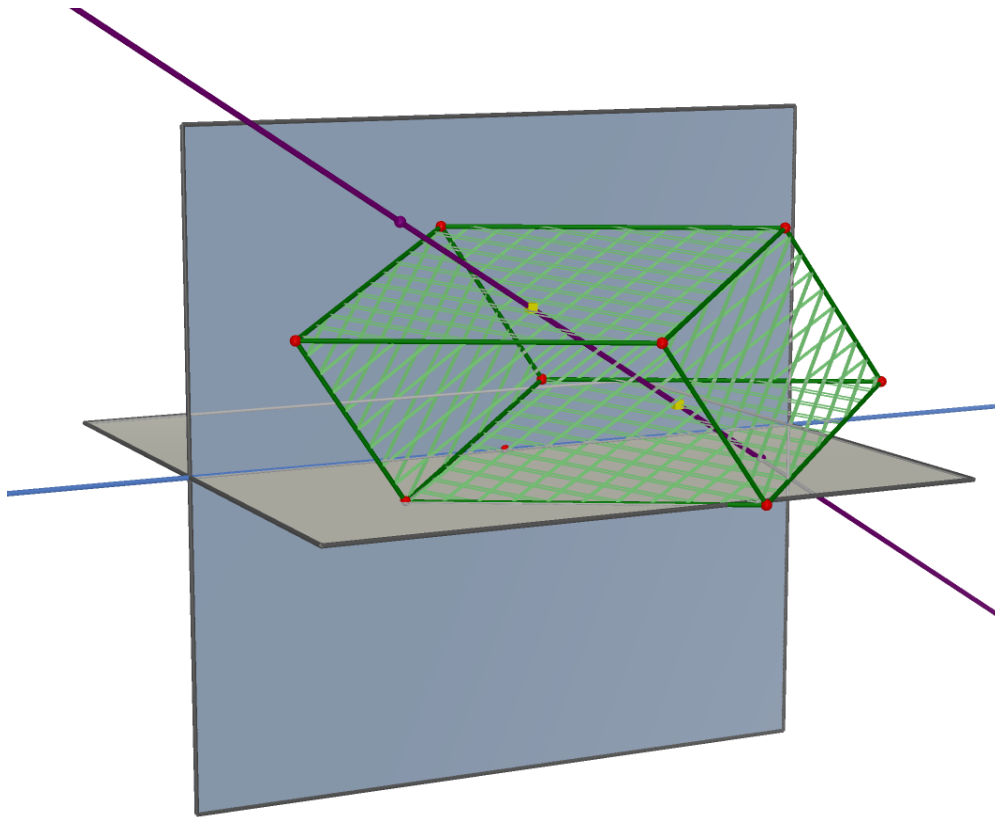
3.6. Průsečík přímky s hranolem a jehlanem

Průsečíky přímky s tělesem rozumíme ty body, které má přímka společné s povrchem tělesa. Tyto průsečíky sestojíme tak, že přímkou proložíme libovolnou rovinu, najdeme řez této roviny hranolem a pak body, v nichž přímka protíná obvod řezu, jsou hledané průsečíky přímky s tělesem.

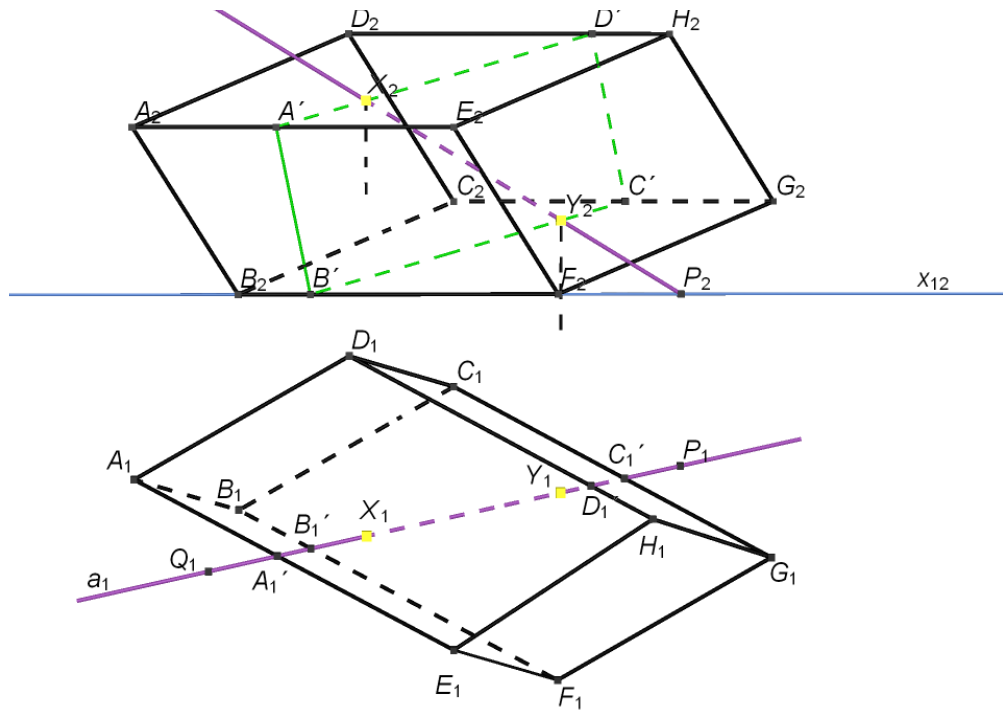
Podrobněji si tuto konstrukci ukážeme na příkladech.

Úloha 3.6.1 Zobrazte průsečíky přímky $a \equiv PQ$ ($P[3,7; 2,8; 0]$, $Q[-4; 4,5; 4,7]$) s kosým hranolem, jehož podstavou je rovnoběžník ABCD a pobočná hrana je AE. $A[-5,2; 3; 2,7]$, $B[-3,5; 3,5; 0]$, $C[0; 1,5; 1,5]$, $E[0; 5,8; 2,7]$.

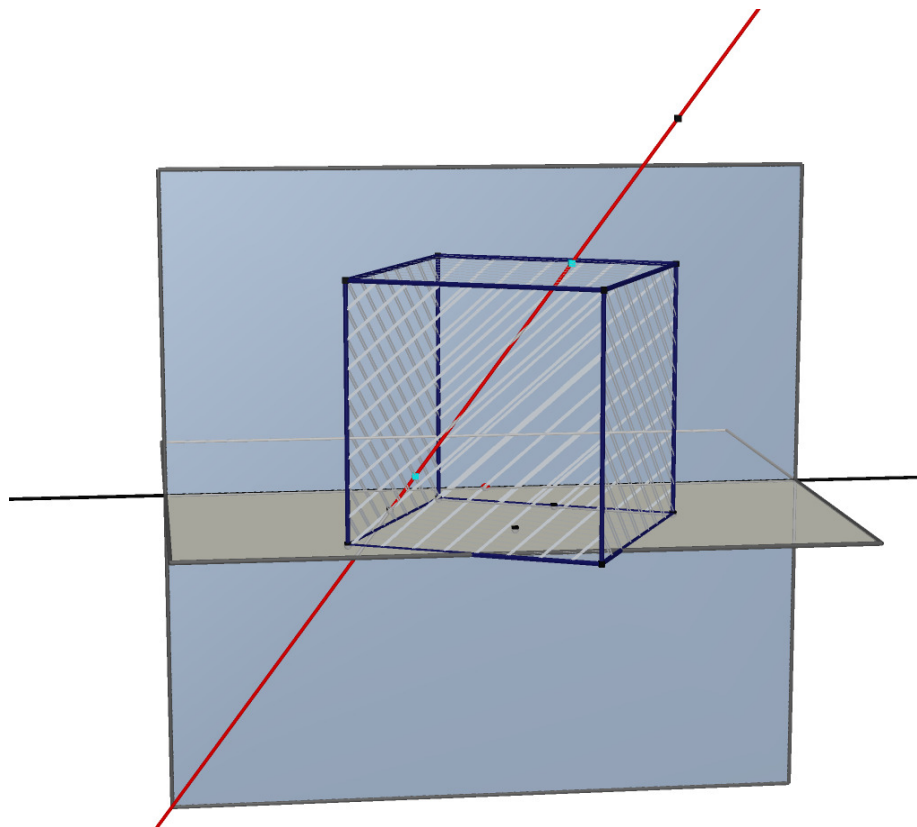
Řešení: První promítací rovina přímky protne hranol v rovnoběžníku KLMN. Jeho půdorysem je úsečka, nárysem je rovnoběžník. Průsečíky přímky s obvodem tohoto rovnoběžníka jsou body X, Y, které jsou hledanými průsečíky. (Obr. 31 a 32)



Obr. 31 – Příklad 3.6.1



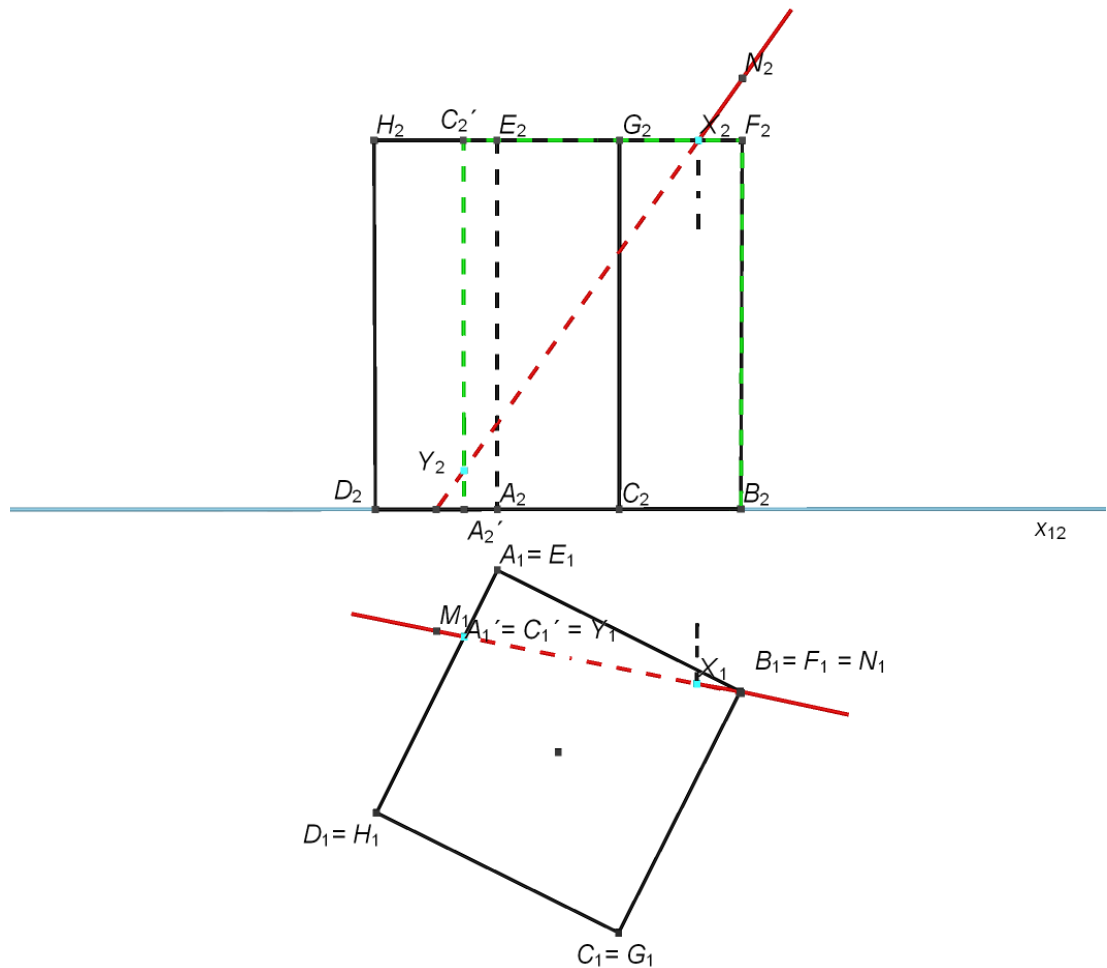
Obr. 32 – Příklad 3.6.1



Obr. 33 – Příklad 3.6.2

Úloha 3.6.2 Sestrojte průsečík přímky MN s krychlí ABCD, jejíž podstava leží v půdorysně. $M[-2; 2; 0]$, $N[3; 3; 7]$, $A[-1; 1; 0]$, $B[3; 3; 0]$, $y_c > y_a$.

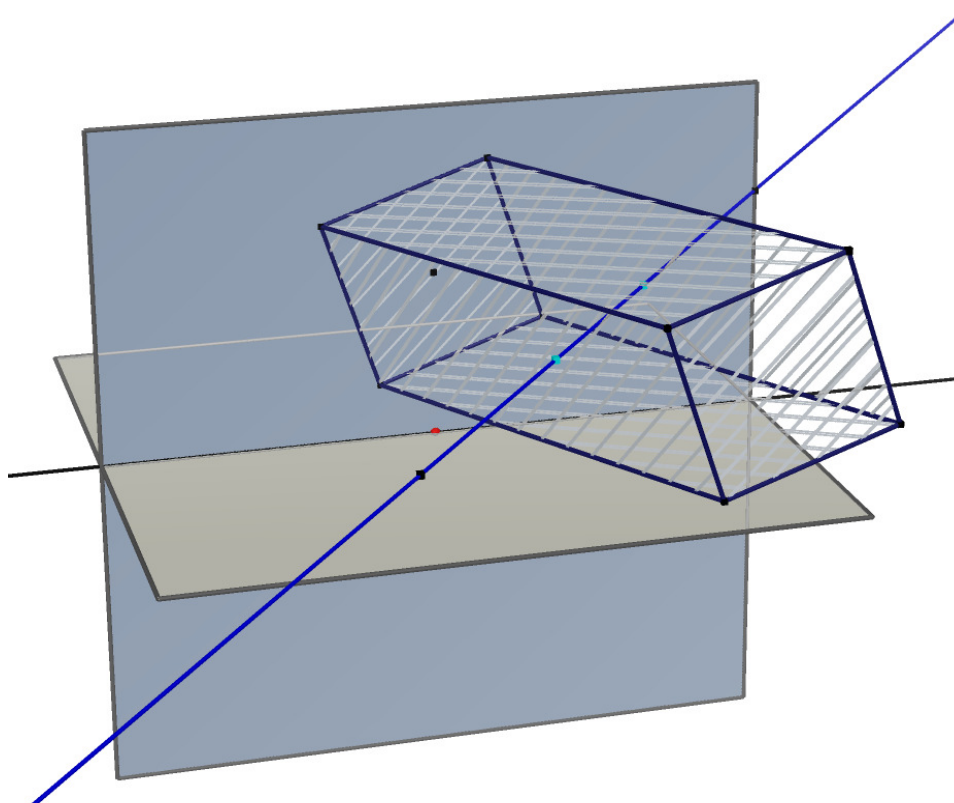
Řešení: Postupujeme podobně jako v předchozím příkladě. Půdorysem i nárysem krychle je čtverec. Přímku proložíme kolmou rovinou. Její první průmět se zobrazí jako úsečka, druhým průmětem je čtverec $A_2'B_2F_2C_2'$. Průsečíky tohoto čtverce s přímkou MN jsou hledanými průsečíky X, Y přímky a krychle. Nakonec určíme viditelnost, viditelná je pouze ta část přímky, která leží vně krychle. (Obr. 33 a 34)



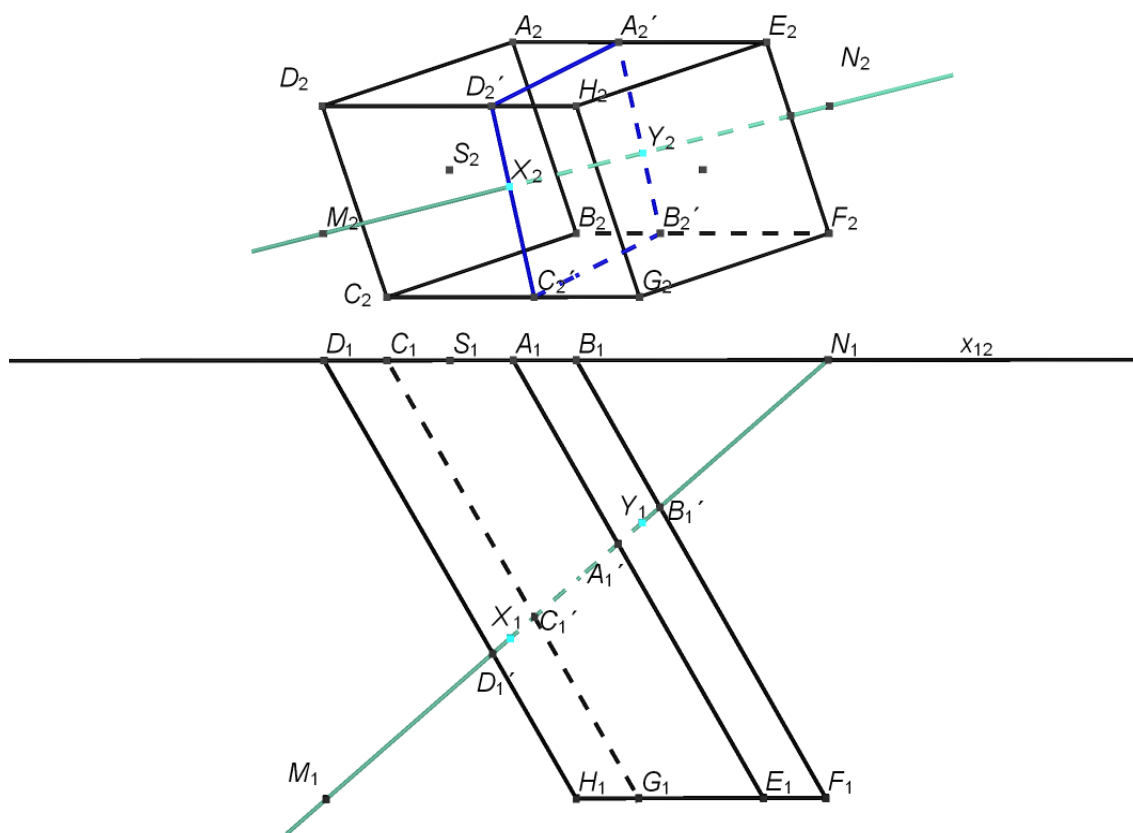
Obr. 34 – Příklad 3.6.2

Úloha 3.6.3 Podstavou kosého hranolu je čtverec ABCD ležící v druhé průmětně. Středem je bod $S[0; 0; 3]$, je dán vrchol $A[1; 0; 5]$ a pobočná hrana AE , $E[5; 7; 5]$. Zobrazte průsečíky přímky MN s tímto hranolem. $M[-2; 7; 2]$, $N[6; 0; 4]$.

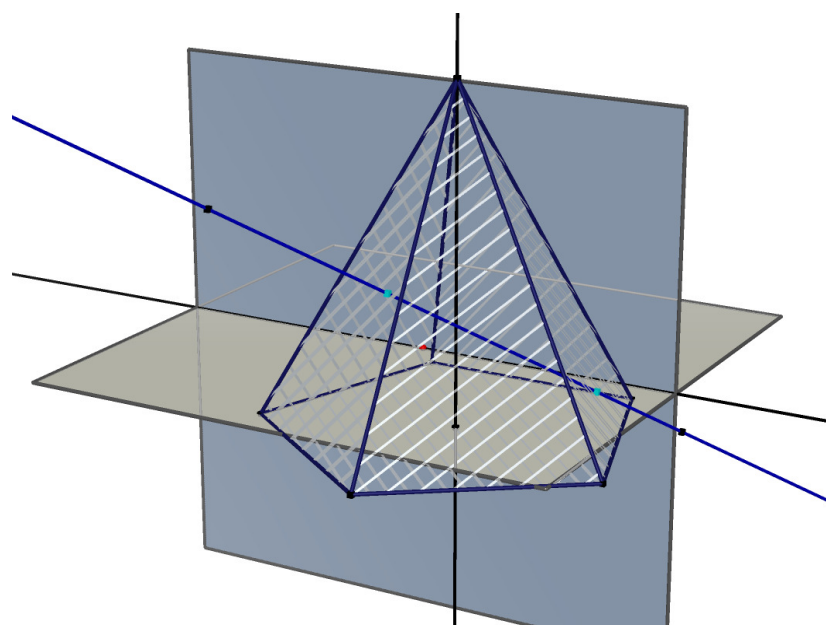
Řešení: Postupujeme známým způsobem. Promítací rovina přímky MN protne hranol v rovnoběžníku $A'B'C'D'$, prvním průmětem rovnoběžníku bude úsečka, druhým rovnoběžník. Průsečíky tohoto rovnoběžníku s přímkou MN jsou hledané průsečíky přímky s tělesem. (Obr. 35 a 36)



Obr. 35 – Příklad 3.6.3



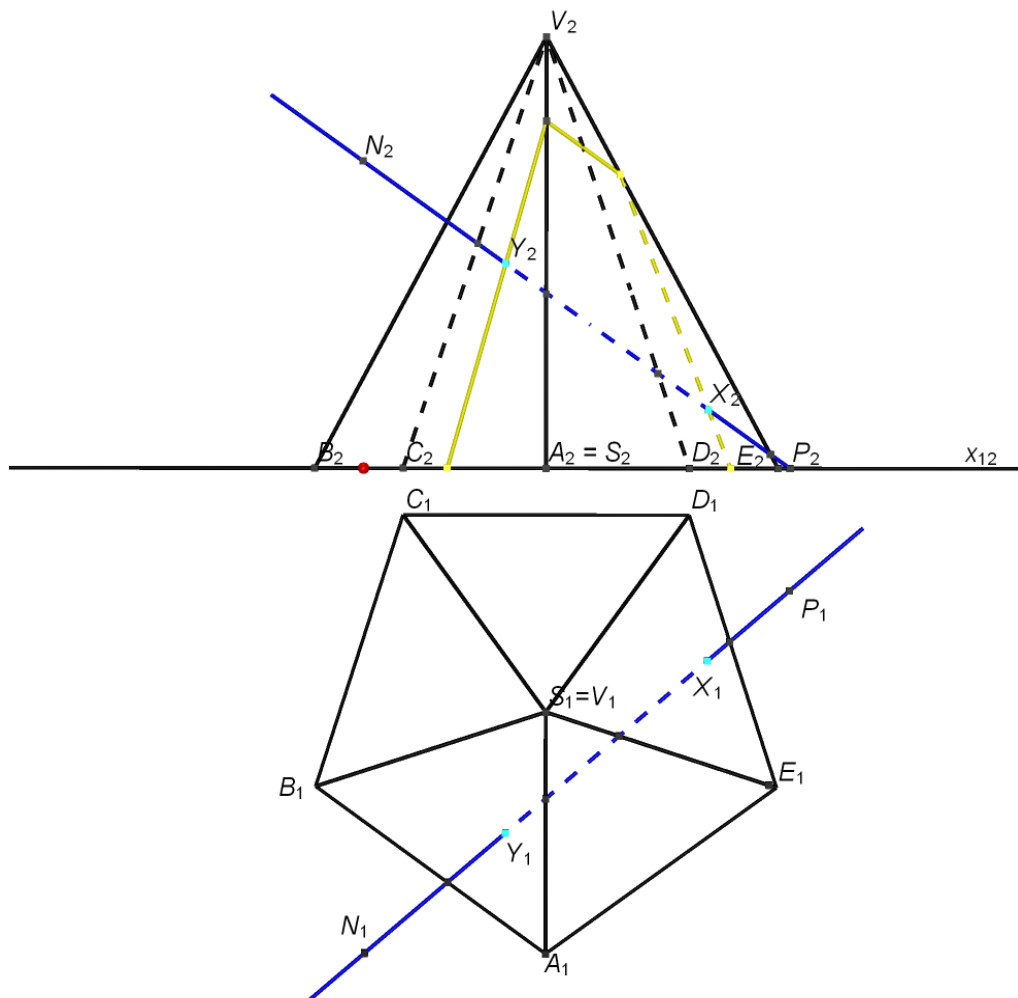
Obr. 36 – Příklad 3.6.3



Obr. 37 – Příklad 3.6.4

Úloha 3.6.4 Sestrojte průsečíky přímky PN s pravidelným pětibokým jehlanem s podstavou v π s vrcholem A a hlavním vrcholem V. $P[7; 2; 0]$, $N[0; 8; 5]$, $A[3; 8; 0]$, $V[3; 4; 7]$.

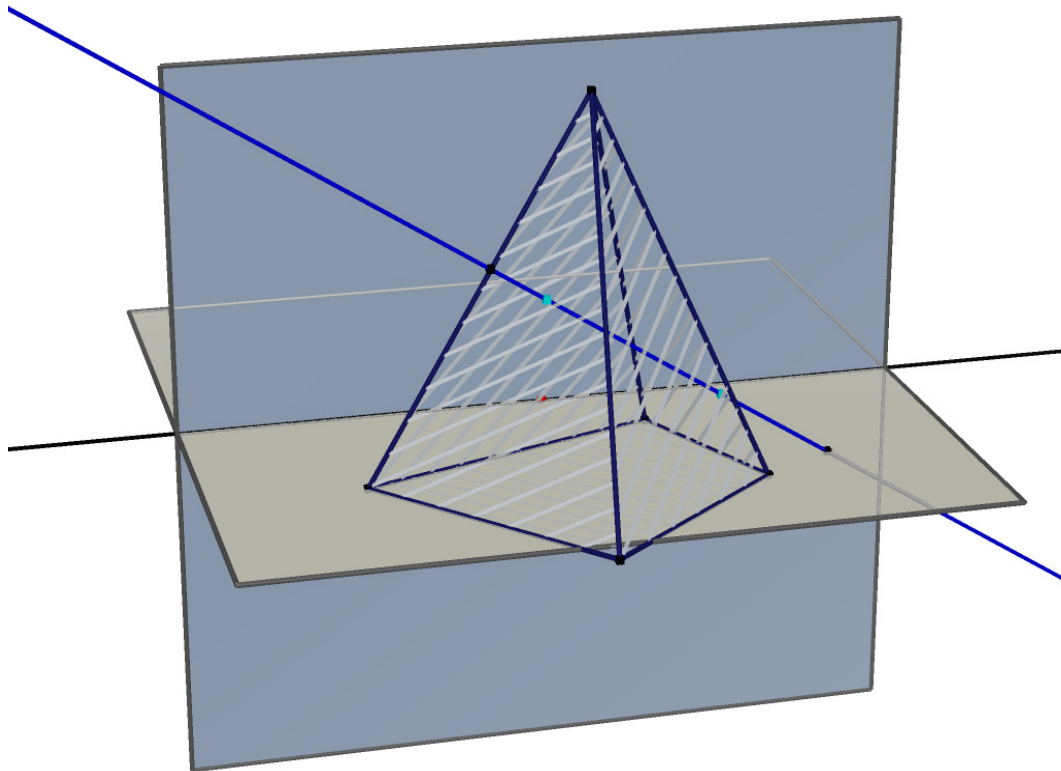
Řešení: Průsečík přímky s jehlanem sestojíme obdobně jako u hranolu. Půdorysem promítací roviny přímky PN je úsečka, narysem čtyřúhelník. Průsečíky čtyřúhelníka a přímky PN jsou hledanými průsečíky přímky s tělesem. (Obr. 37 a 38)



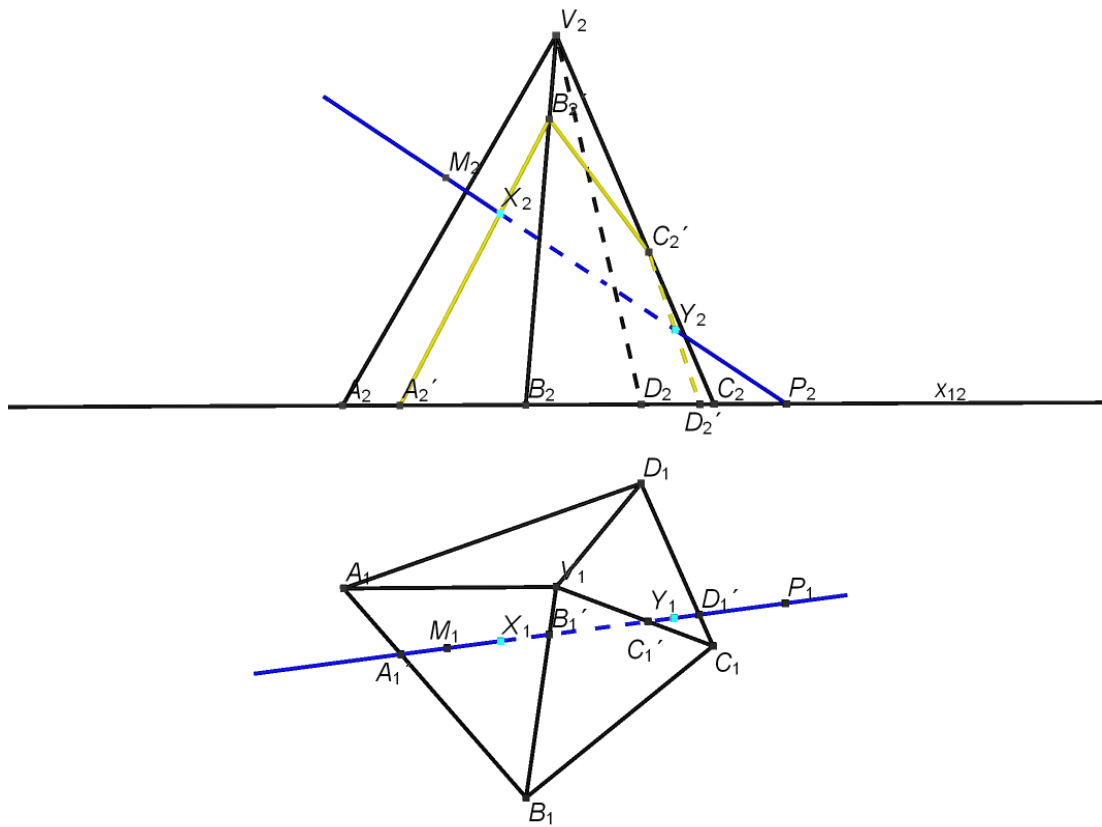
Obr. 38 –Příklad 3.6.4

Úloha 3.6.5 Zobrazte průsečíky přímky MP s jehlanem, jehož podstava je ABCD a vrchol V. $M[-1,8; 4; 3,7]$, $P[3,8; 3,3; 0]$, $A[-3,5; 3; 0]$, $B[-0,5; 6,5; 0]$, $C[2,6; 4; 0]$, $D[1,4; 1,3; 0]$, $V[0; 3; 6]$.

Řešení: Známým způsobem zobrazíme sružené průměty jehlanu. Stejně jako v předchozích příkladech, půdorysem promítací roviny přímky MP je úsečka, nárysem čtyřúhelník. Průsečíky čtyřúhelníka a přímky jsou hledanými průsečíky přímky s jehlanem. (Obr. 39 a 40)



Obr. 39 – Příklad 3.6.5



Obr. 40 – Příklad 3.6.5

4. Rotační tělesa v Mongeově promítání

4.1. Základní vlastnosti elipsy

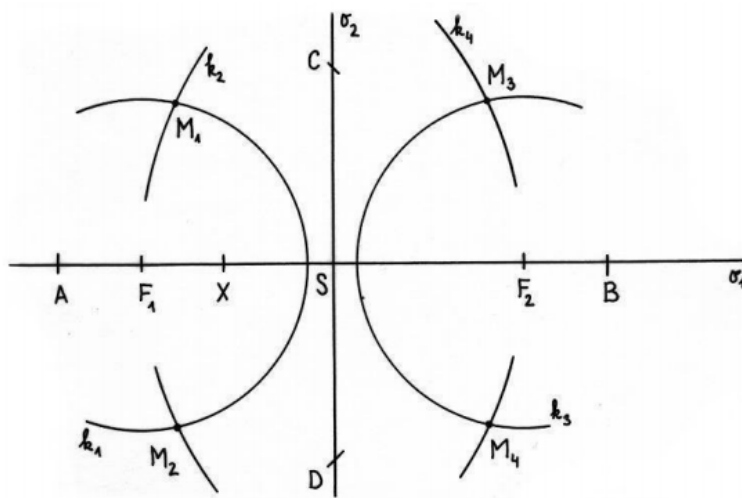
Průmětem kružnice je elipsa, a proto je jednou z nejdůležitějších křivek. Definice říká, že elipsa je množina všech bodů, které mají od dvou různých bodů stejný součet vzdáleností. Tato vzdálenost je větší než vzdálenost daných bodů.

Dané dva body se nazývají ohniska elipsy, většinou se značí F_1 a F_2 , vzdálenost bodu elipsy od ohniska se nazývá průvodič. Další vlastnosti elipsy si ukážeme na příkladu.

Úloha 4.1.1 Sestrojte body elipsy, znáte-li ohniska F_1 , F_2 a součet průvodičů PQ . $F_1F_2 = 6,5$. $PQ = 10$.

Řešení: Tento typ konstrukce se nazývá bodový, postupujeme tak, že nejprve zvolíme libovolný bod na úsečce PQ , který nám ji rozdělí na části $PR = r_1$ a $RQ = r_2$. Hledané body M elipsy pak leží v průsečíku kružnic $k_1(F_1, PR)$ a $k_2(F_2, RQ)$, nebo $k_3(F_2, PR)$ a $k_4(F_1, RQ)$.

Naneseme-li od středu úsečky F_1F_2 polovinu velikosti PQ , dostaneme *hlavní vrcholy* A, B elipsy. Body C, D , jejichž průvodiče jsou rovny polovině úsečky PQ (a které proto leží v průsečíku kružnic $k(F_1, \frac{1}{2} PQ)$ a $k(F_2, \frac{1}{2} PQ)$) nazýváme *vedlejší vrcholy elipsy* (Obr. 41).

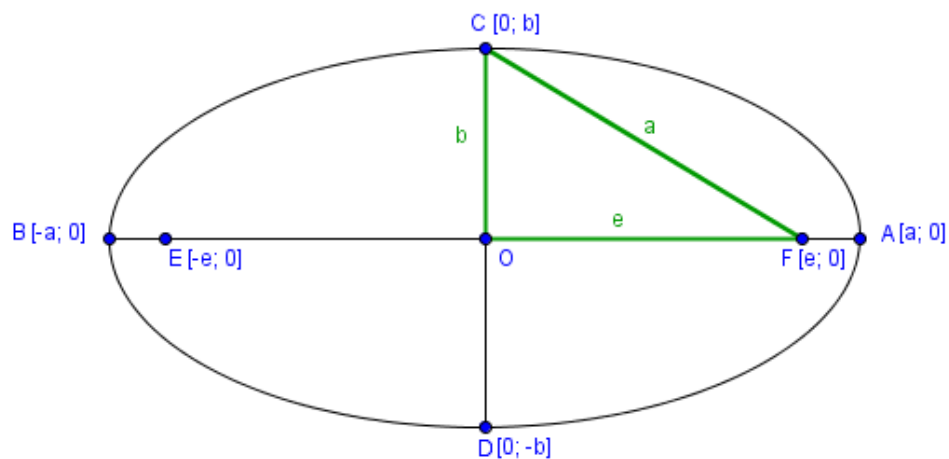


Obr. 41 – Bodová konstrukce elipsy

Z konstrukce bodů elipsy je zřejmé, že ke každému bodu M_1 existuje bod M_2 souměrně sdružený s bodem M_1 dle přímky AB. Tato přímka je tedy osou souměrnosti elipsy a nazýváme ji *hlavní osou elipsy*. Podobně lze sestrojít bod M_3 souměrný s bodem M_1 podle osy CD. Víme tedy, že elipsa je souměrná také podle této přímky. Nazýváme ji *vedlejší osou elipsy*.

Další důležité pojmy jsou:

- hlavní poloosa elipsy – vzdálenost středu elipsy a hlavního vrcholu, značíme ji a
- vedlejší poloosa elipsy – vzdálenost středu elipsy a vedlejšího vrcholu, značíme ji b
- excentricita (výstřednost) elipsy – vzdálenost středu elipsy a ohniska, značíme ji e



Obr. 42 - Elipsa

Z definice také bezprostředně plyne, že $a > e$ a $r_1 + r_2 = 2a$. Užitím Pythagorovy věty pak odvodíme důležitý vztah:

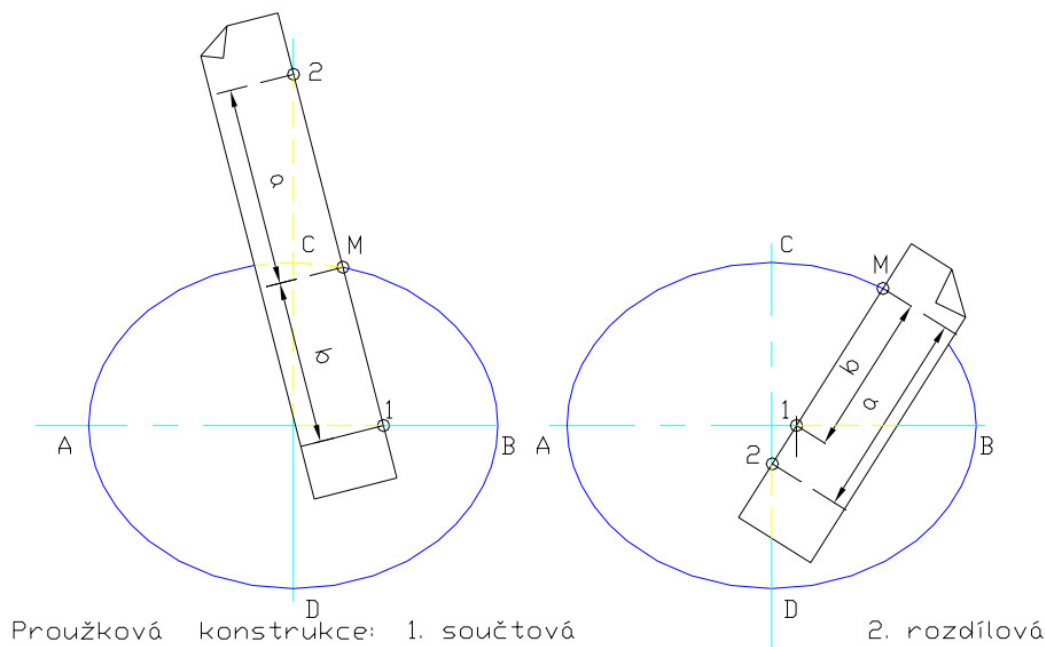
$$a^2 = b^2 + e^2 \quad (\text{Obr. 42})$$

Bodová konstrukce je ale příliš zdlouhavá, a proto ke konstrukci elipsy můžeme také využít tzv. proužkovou metodu. Umožňuje nám to věta:

„Nechť jsou dány osy elipsy $AB = 2a$ a $CD = 2b$. Na úsečce $M2 = a$ sestrojíme bod 1 tak, aby $M1 = b$. Pohybuje-li se úsečka $M2$ tak, že se její krajní bod 2 pohybuje po vedlejší ose elipsy a bod 1 po hlavní ose elipsy, pak druhý krajní bod M opisuje elipsu o osách $AS = 2a$ a $CD = 2b$.“

Při rýsování elipsy podle této metody můžeme k rýsování využít proužku papíru, odtud ten název. Protože $12 = a - b$, říkáme této metodě také rozdílová proužková konstrukce.

Obdobně lze pak elipsu sestrojít užitím součtové proužkové konstrukce. (Obr. 43)



Obr. 43 – Proužková konstrukce elipsy

4.2. Tečna elipsy

Elipsa dělí rovinu na dvě části. Bodům, které leží v téže části roviny jako ohniska elipsy, říkáme vnitřní body elipsy, ostatním bodům, pokud nejsou body elipsy, říkáme vnější body elipsy. Přitom se dá dokázat, že velikost průvodičů vnitřních bodů elipsy je menší než $2a$, zatímco velikost průvodičů vnějších bodů je větší než $2a$.

Je-li M bod elipsy, pak vrcholový úhel F_1MF_2 se nazývá vnitřní úhel průvodičů. Úhly, které nejsou vrcholové, nazýváme vnější úhly průvodičů.

Je také zřejmé, že přímka může mít vzhledem k elipse 3 různé polohy. Pokud má s elipsou právě 2 společné body, nazýváme ji *sečnou elipsy*, pokud má přímka s elipsou právě jeden společný bod, nazýváme přímku *tečnou* a pokud nemá přímka a elipsa žádný společný bod, jedná se o *vnější přímku*.

Tečna elipsy má jednu důležitou vlastnost, a sice že půlí vnější úhly průvodičů. V každém bodě elipsy existuje právě jedna tečna, kolmice na tečnu vedená bodem dotyku se nazývá *normála* elipsy a půlí vnitřní úhly průvodičů.

Úloha 4.2.1 Sestrojte elipsu, jsou-li dána její ohniska a tečna t . Přičemž ohniska leží v téže polorovině určité přímkou t .

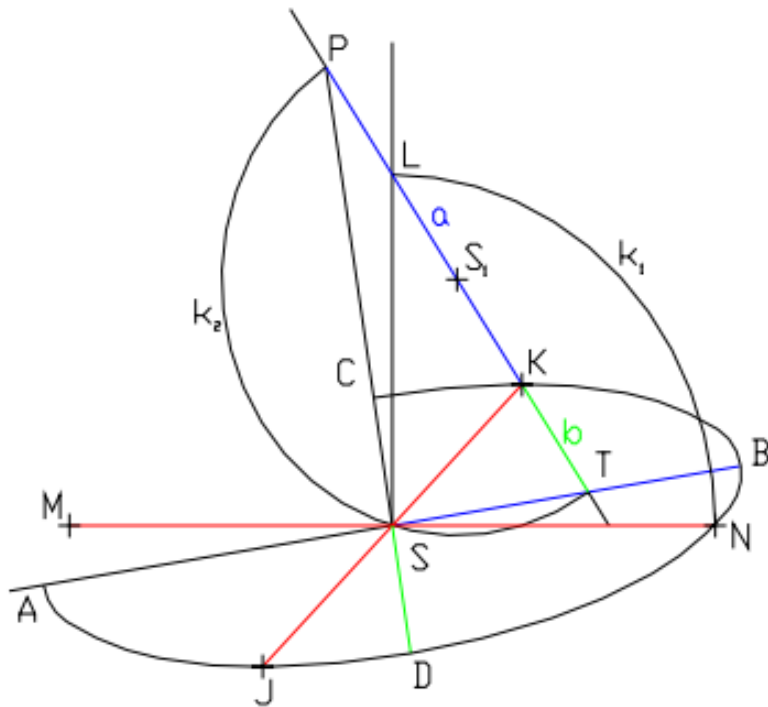
Řešení: Vyhledáme dotkový bod M tečny t a elipsy. Jak víme, tečna půlí vnější úhly průvodičů, a proto průvodič F_1M prochází bodem Q , který je souměrně sružený s ohniskem F_2 podle tečny t . Z toho nám vyplyne konstrukce. K ohnisku F_2 sestrojíme sružený bod Q podle tečny t . Přímka F_1Q pak protíná tečnu v bodě dotyku M . Velikost hlavní osy je $2a = F_1Q$.

Platí, že množina všech bodů, které jsou souměrně sružené s ohniskem F podle tečny t , je kružnice se středem v druhém ohnisku a poloměrem rovném velikosti hlavní osy elipsy.

Podobný význam jako bod Q mají také paty kolmic spuštěných z ohnisek na tečny elipsy. Pro ně platí, že množina všech těchto pat kolmic je kružnice opsaná kolem elipsy se středem ve středu elipsy a poloměrem rovným hlavní poloose elipsy. (Obr. 44)

1868), sice konstrukci vymyslel, ale důkaz k ní již nedoložil. Konstrukce byla dokázána později, a to Leopoldem Mossbrugem Rytzovým kolegou. Konstrukce je z roku 1845.

Jsou dány sdružené omezené průměry KL a MN . Jejich průnik, označme ho S , je středem elipsy. Zvolíme jeden z koncových bodů průměrů, např. K , otočíme ho okolo středu S o 90° . Vzniklým otočeným bodem K° vedeme přímkou p , která též prochází bodem N - koncovým bodem průměru sdruženého. Dále najdeme střed S_{NK° úsečky NK° a sestrojíme kružnici k (S_{NK° , $|SS_{NK^\circ}|$), která protne přímkou p ve dvou bodech I a II . Jsou to body, jimiž prochází osy elipsy. Velikost hlavní a vedlejší poloosy nalezneme na přímce p , platí: $|IN| = a$, $|NII| = b$. Stačí už jen vynést vzdálenosti a , b ve správném pořadí na osy o_1, o_2 . (Obr. 45)



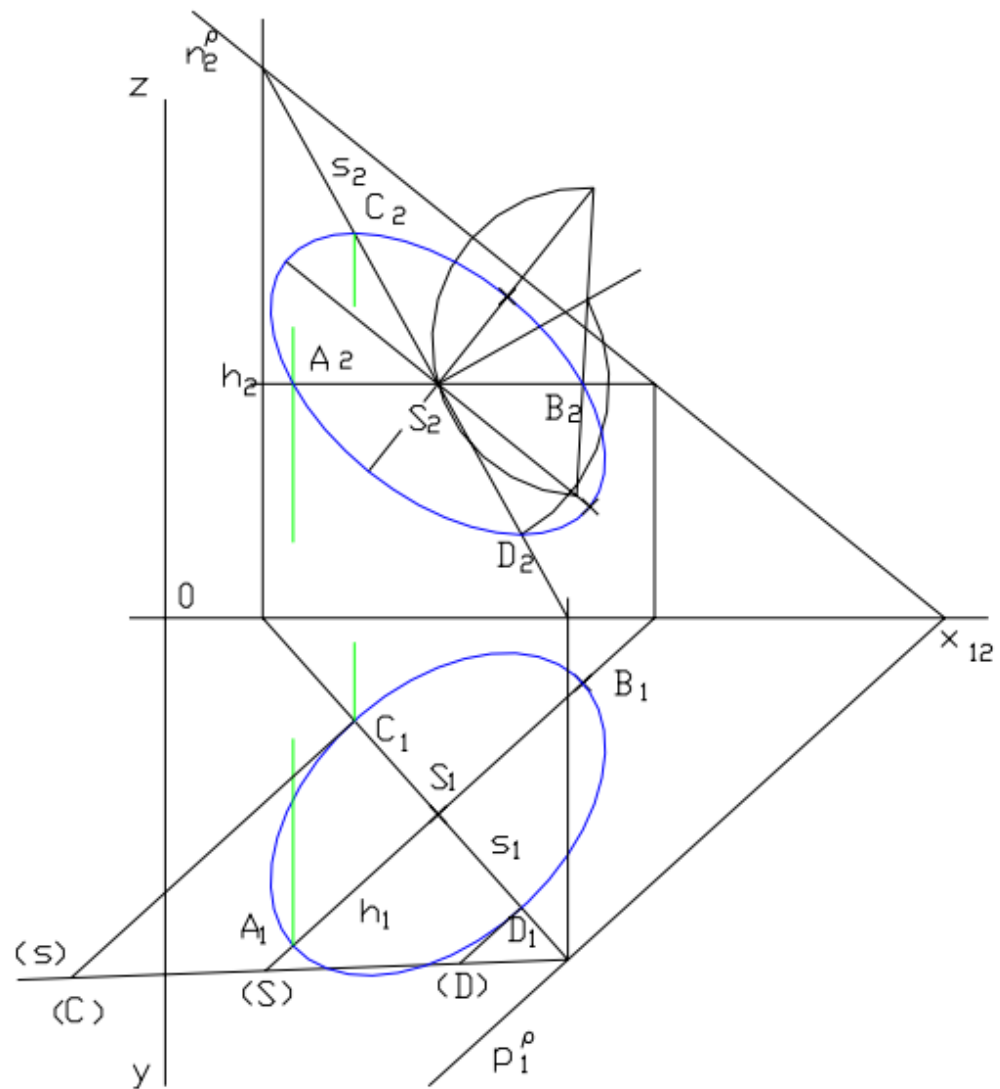
Obr. 45 – Rytzova konstrukce

Úloha 4.3.1 Zobrazte kružnici v rovině σ ($10; 9; 8$) se středem S ($3,5; 2,5; ?$) a poloměru $r = 2,5$.

Řešení: Je několik způsobů řešení, které závisí na možnostech z hlediska přesnosti, rychlosti konstrukce, přehlednosti a znalostech. Sestrojíme střed kružnice v jednotlivých průmětech - k přenesení do druhého průmětu použijeme

hlavní přímkou h . V prvním průmětu je hlavní přímka ve skutečné velikosti a můžeme na ni nanést velikost poloměru a dostaneme osu elipsy A_1B_1 .

Středem kružnice S vedeme spádovou přímkou s a sestrojíme sklopením její skutečnou velikost. Na sklopenou spádovou přímkou nanese velikost poloměru a sklopíme zpátky. Tím dostaneme vedlejší osu C_1D_1 . V druhém průmětu sestrojíme body A_2, B_2, C_2, D_2 a dostaneme sdružené průměry elipsy. Pomocí Rytzovy konstrukce sestrojíme osy elips. (Obr. 46)



Obr. 46 – Příklad 4.3.1

4.4. Rotační válec

Rotační válec je těleso, které vznikne otáčením obdélníku kolem přímky, která prochází jeho stranou nebo střední příčkou. Velmi často však definujeme válec pomocí rotační válcové plochy.

Na rotační válcové ploše leží nekonečně mnoho přímek, které jsou navzájem rovnoběžné a mají stejnou vzdálenost od osy plochy. Tyto přímky nazýváme *povrchovými přímkami plochy*.

Všechny body přímky při své rotaci opisují kružnici, která má stejný střed a poloměr, nazýváme je povrchovými kružnicemi.

Je tedy zřejmé, že rotační válcová plocha je určena osou a poloměrem.

Z vlastností povrchových kružnic především plyne, že každá rovina kolmá k ose (nebo k povrchové přímce válcové plochy) protíná plochu v kružnici. Pak je rotační válcová plocha množinou všech přímek kolmých na tuto kružnici, říkáme jí řídicí kružnice rotační válcové plochy.

Každým bodem rotační válcové plochy prochází právě jedna povrchová přímka a právě jedna povrchová kružnice. Těchto vlastností můžeme využít k vyslovení definice rotačního válce:

„Rotační válec je potom část prostoru ohraničená rotační válcovou plochou a dvěma různými rovinami kolnými na osu plochy.“³

Kružnicím válcové plochy v rovinách ρ a ρ' říkáme podstavné kružnice nebo také podstavné kruhové hrany, Část válcové plochy ohraničená rovinami ρ a ρ' se nazývá plášť rotačního válce, plášť a podstavy válce tvoří povrch válce. Vzdálenost rovin válce se nazývá výška válce.

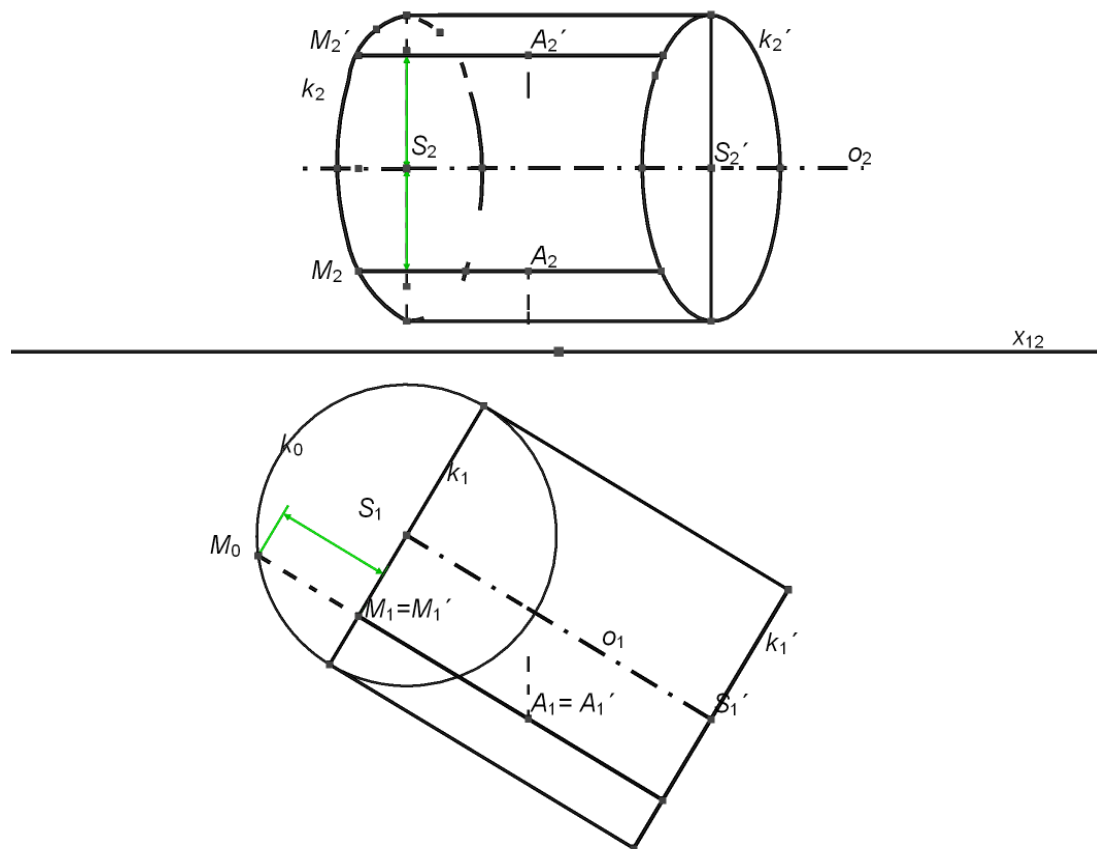
³ URBAN, A.: *Deskriptivní geometrie I.* 2. vydání. Praha: 1977, SNTL – Nakladatelství technické literatury, ALFA – Vydavatel'stvo technickém a ekonomickém literatúry. ISBN 04-001-78

Rotační válec, jehož výška je stejná jako průměr válce (průměr válce je průměr jeho podstavy, tedy průměr jeho podstavné kružnice).

Pokud válec zobrazujeme v základní poloze, tedy s podstavou ležící v jedné z průmětn, je jedním jeho obrazem obdélník, jehož jedna strana má délku rovnu $2r$ a druhá rovnu výšce v , a druhým kružnice se středem S a poloměrem r .

Úloha 4.4.1 Sestrojte sdružené obrazy rotačního válce, jehož osa je rovnoběžná s prvou průmětnou. $S[-2,5; 3; 3]$, $S'[2,5; 6; 3]$, $r = 2,5$. Zobrazte bod A jeho pláště. $A[-0,5; 6; ?]$.

Řešení: Rovina podstavy je první průmětna, takže půdorysem daného rotačního válce bude obdélník o rozměrech $2r$ a v . Nárys válce je ohraničen oblouky elips k_1 a k_2 a jejich

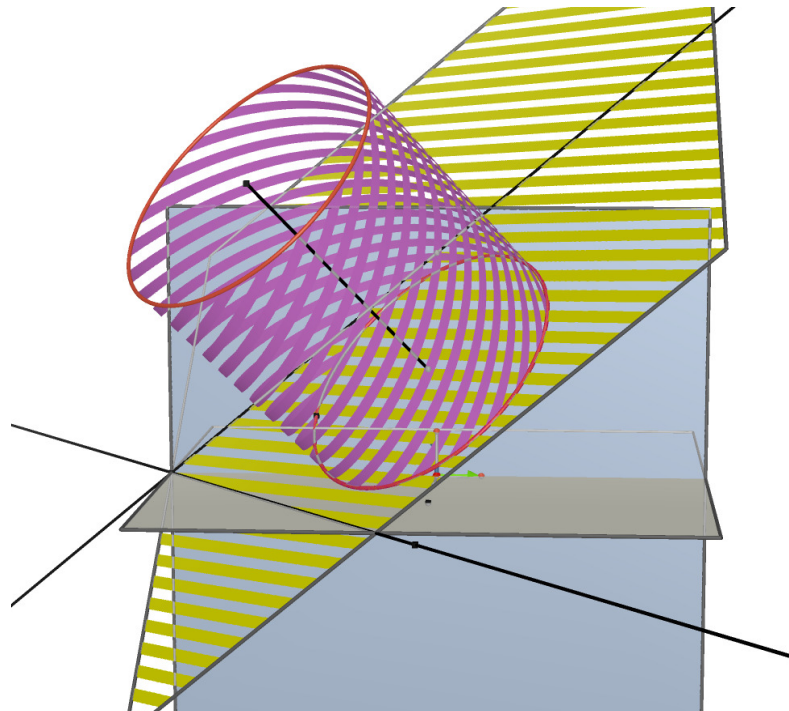


Obr. 48 – Příklad 4.4.1

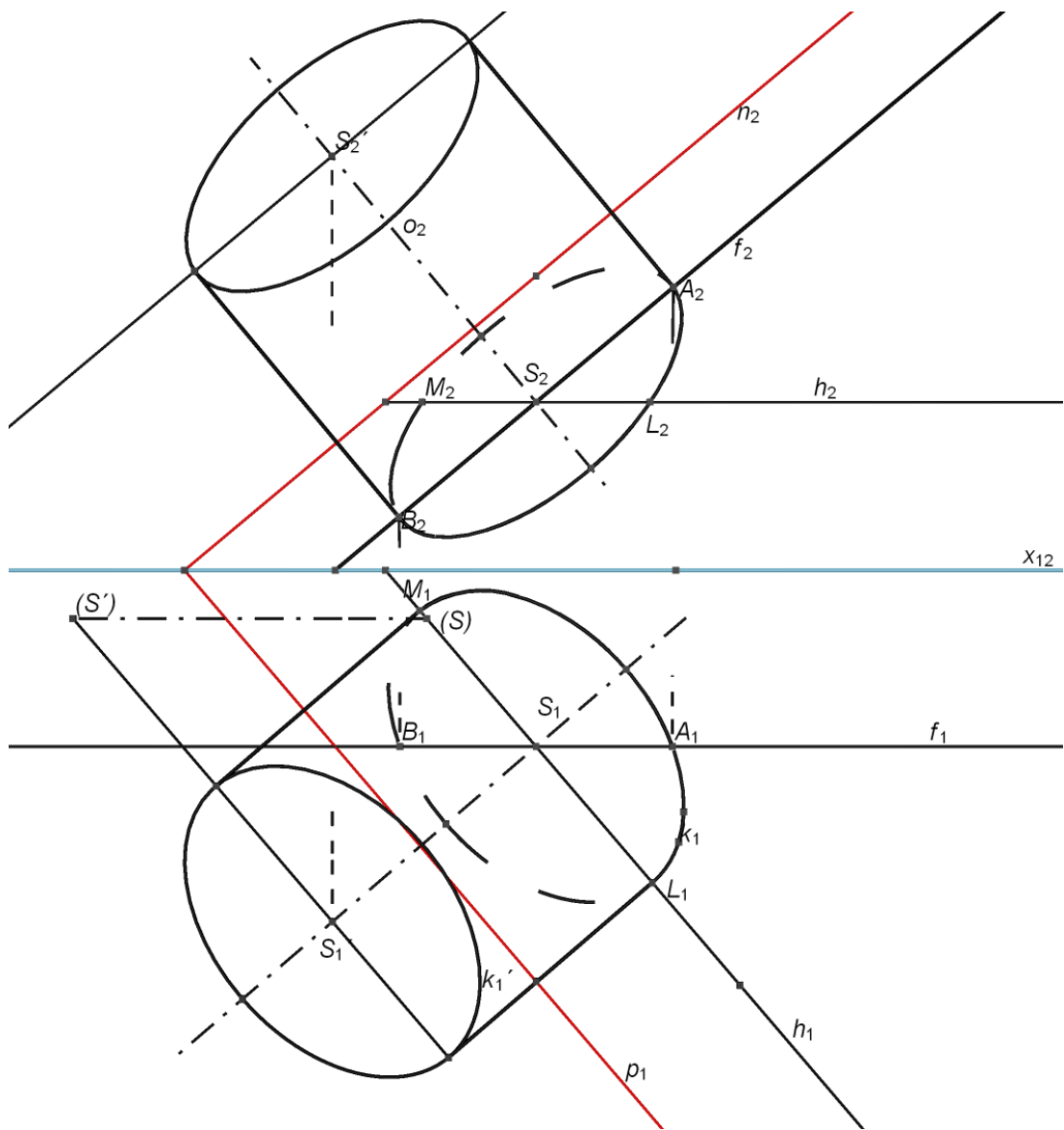
společnými tečnami rovnoběžnými se základnicí. Bod A narýsujeme pomocí povrchové přímky. Povrchová přímka p , která prochází bodem A, protíná podstavnou kružnici v bodě M. Sestrojíme-li tedy jeho sdružené obrazy M_1 a M_2 , můžeme narýsovat p_2 , na které leží nárys bodu A_2 . Průmět bodu M_2 můžeme sestrojít například tak, že sklopíme kružnici k a s ní i bod M do roviny rovnoběžné s první průmětnou. Získáme bod M_0 jehož vzdálenost od bodu M_1 pak udává vzdálenost osy o a přímky p . (Obr. 48)

Úloha 4.4.2 Sestrojte sdružené obrazy rotačního válce, jehož podstava leží v dané rovině ρ . $\rho(-6; 7; 5)$, $S[0; 3; ?]$, $r = 3$, $v = 6$.

Řešení: Sdržené obrazy podstavné kružnice jsou elipsy k_1, k_2 , které sestrojíme známým způsobem. Průměty osy o (o_1, o_2) jsou kolmé k p_1^p a p_2^p a prochází průměty S_1 a S_2 středu S; leží tedy na průmětech vedlejších os elipsy. Výšku válce narýsujeme například tak, že bod S sklopíme do první průmětny, od bodu (S) pak nanese výšku v . Dostaneme bod (S'), který otočíme zpět. Bod S_2 leží na ordinále na ose o_2 . Druhou podstavu zobrazíme tak, že posuneme elipsy k_1 a k_2 do elips k_1' a k_2' , jejichž středy jsou body S_1' a S_2' . Společné tečny elips k_1, k_1' a k_2, k_2' rovnoběžné s osami o_1, o_2 určují první a druhý obrys povrchu pláště. (Obr. 49 a 50)



Obr. 49 – Příklad 4.4.2



Obr. 50 – Příklad 4.4.2

4.5. Řez rotačního válce rovinou

Když chceme sestrojít řez rotačního válce s rovinou, mohou nastat tyto případy:

- rovina řezu je rovnoběžná s podstavou rovinou – řezem bude kružnice. Rotační válec taková rovina protíná v kruhu, nebo s ní nemá žádný společný bod
- rovina řezu je kolmá na podstavou rovinou
- rovina řezu je různoběžná s rovinou podstavy – řezem je elipsa. Mezi rovinou podstavy a rovinou řezu platí afinita.

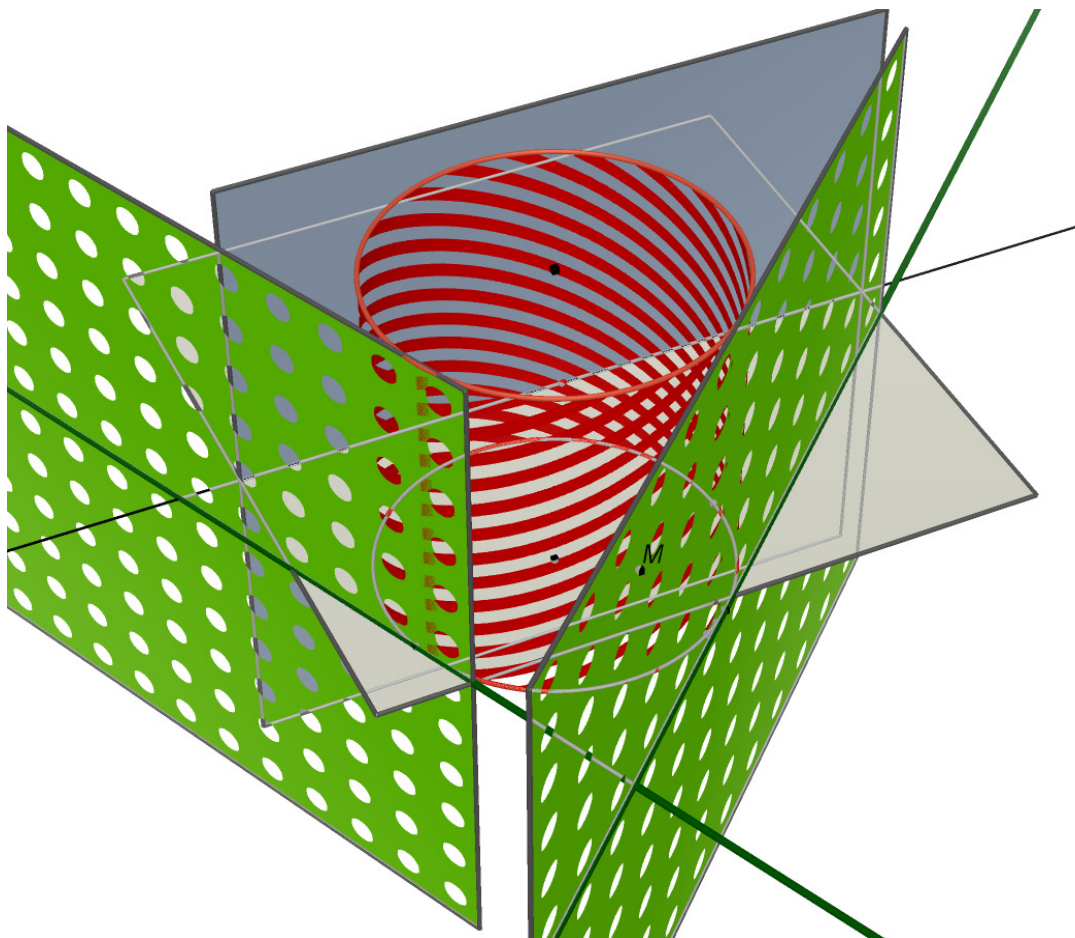
Pokud je rovina řezu kolmá na podstavou rovinu, tedy rovnoběžná s osou válcové plochy, mohou nastat následující případy: směřová rovina protíná válcovou plochu ve dvou povrchových přímkách, nebo se jí dotýká podél jedné povrchové přímky, nebo s ní nemá žádný společný bod.

Tečna rotačního válce

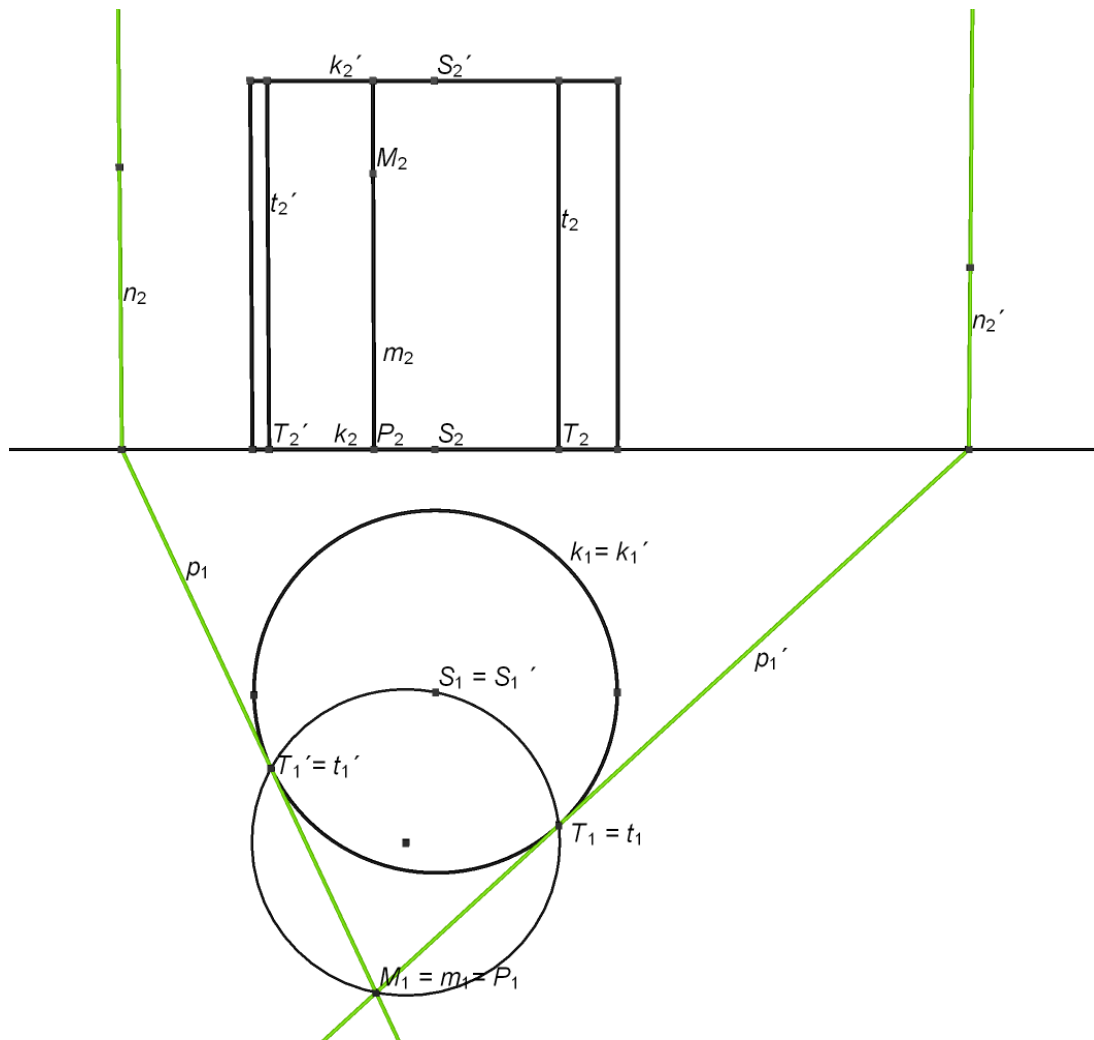
Úloha 4.5.1 Daným bodem $M [-3; 9; 4,5]$ veďte tečné roviny k danému válci, jehož jedna podstava leží v první průmětně. $S [-2; 4; 0]$, $r = 3$, $v = 6$.

Řešení: Pro hledanou tečnou rovinu τ najdeme stopy v rovině libovolné povrchové kružnice k válcové plochy. Směřová přímka m , která prochází daným bodem M rovnoběžně s povrchovými přímkami válce, musí nutně ležet v rovině τ . Proto v ní leží i průsečík P přímky m s rovinou libovolné povrchové kružnice. Rovina τ protíná tuto rovinu v tečně dané povrchové kružnici, a tato tečna taktéž prochází bodem P . Za povrchovou kružnici je vhodné zvolit podstavou kružnici.

Bodem M tedy vedeme směrovou přímkou m a najdeme její průsečík P s rovinou podstavné kružnice k . V našem případě je P půdorysný stopník přímkou m . Protože leží vně kružnice k , existují dvě tečné roviny τ a τ' , určené přímkami p a p' procházející dotykovými body T a T' . (Obr. 51 a 52)



Obr. 51 – Příklad 4.5.1



Obr. 52 – Příklad 4.5.1

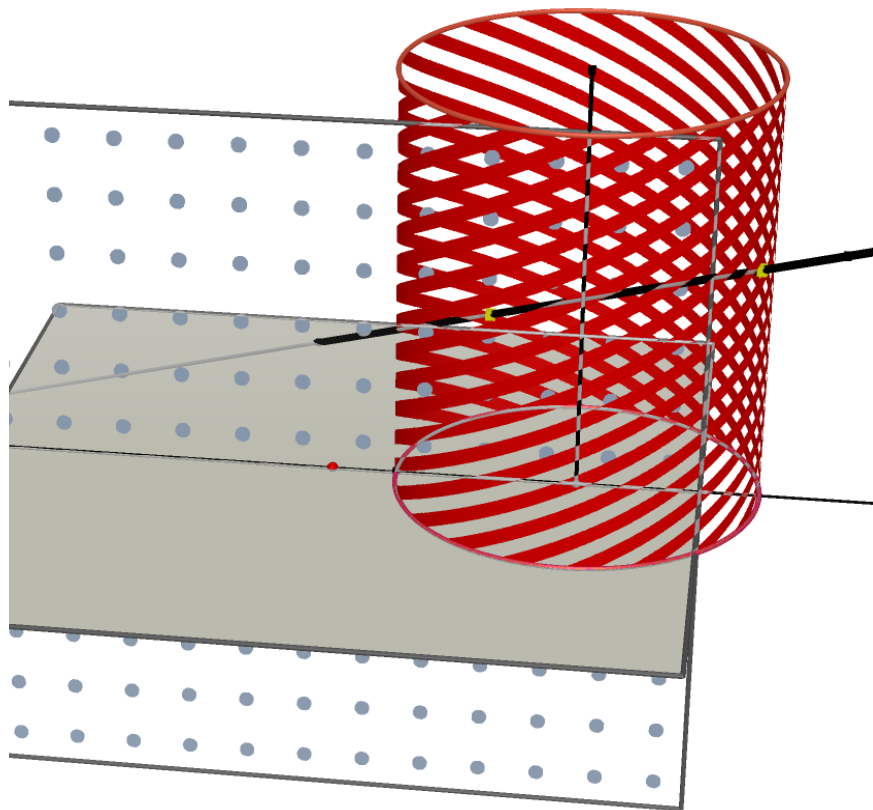
Průnik přímky s rotačním válcem

Směrových rovin užíváme při hledání průsečíku válcové plechy a přímky, respektive při hledání jejich vzájemné polohy. Danou přímkou proložíme rovinu a najdeme její řez válcové plochy. Ze vzájemné polohy řezu a přímky pak určíme vzájemnou polohu přímky a řezu.

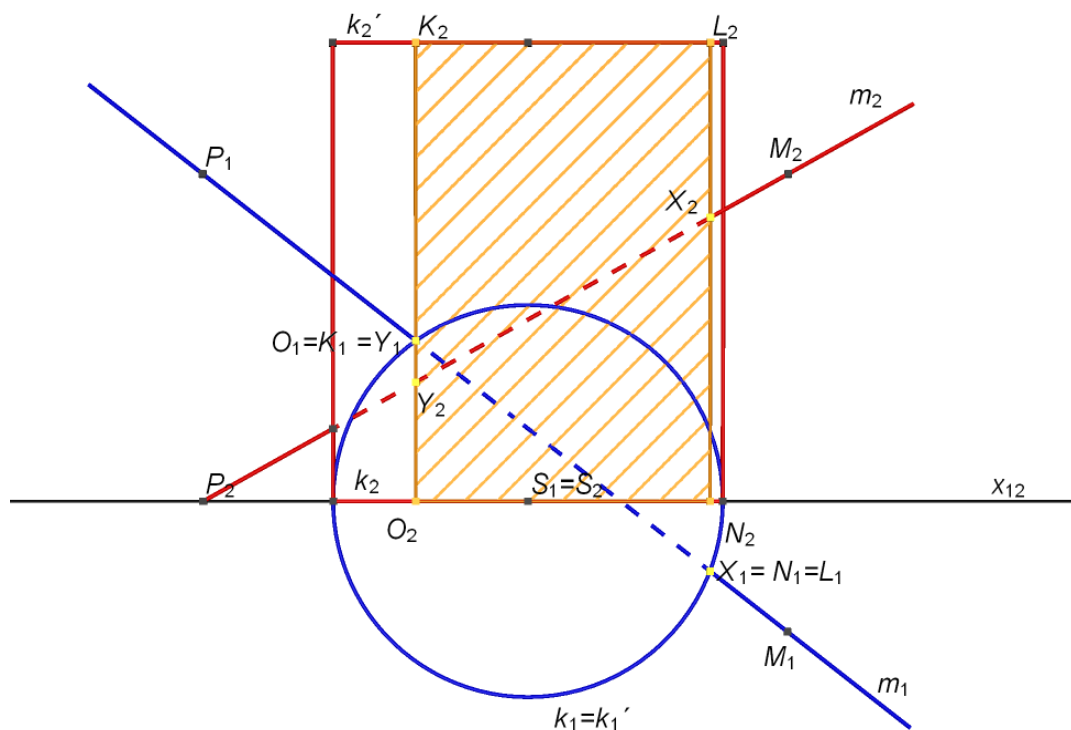
Jak bychom jistě dokázali odvodit, mohou nastat následující případy: pokud je přímka směrová, tak v ní buď leží, nebo nemá s válcovou plochou žádný společný bod. Pokud není směrová, může ji protínat ve dvou bodech, v jednom, nebo v žádném. Pokud přímka válcovou plochu protíná v jednom (dotykovém) bodě, říkáme, že je to tečna. To může nastat třeba v případě, že se přímka dotýká jedné z podstavních hran.

Úloha 4.5.2 Zobrazte průsečíky přímky $m = MP$; $M [8; 2; 5]$, $P [-1; -5; 0]$, s povrchem rotačního válce s podstavou v půdorysně. $S [4; 0; 0]$, $r = 3$, $v = 7$.

Řešení: Přímkou m proložíme směrovou rovinu, která je kolmá k půdorysně ($\rho_1 = p_1^p = m_1$, $n_2^p = x_{12}$). Řezem tělesa je obdélník $KLMN$. Jeho půdorysem je úsečka K_1L_1 a nárysem obdélník $K_2L_2M_2N_2$. Průsečíky přímky s obvodem řezu jsou body XY . Nakonec vyřešíme viditelnost – bod X vidíme, zatímco bod Y nikoli. Pro větší přehlednost je v Obr. 54 půdorys (modrá) a nárys (červená) barevně odlišen. (Obr. 53 a 54)



Obr. 53 – Příklad 4.5.2



Obr. 54 –Příklad 4.5.2

Řez rotačního válce rovinou

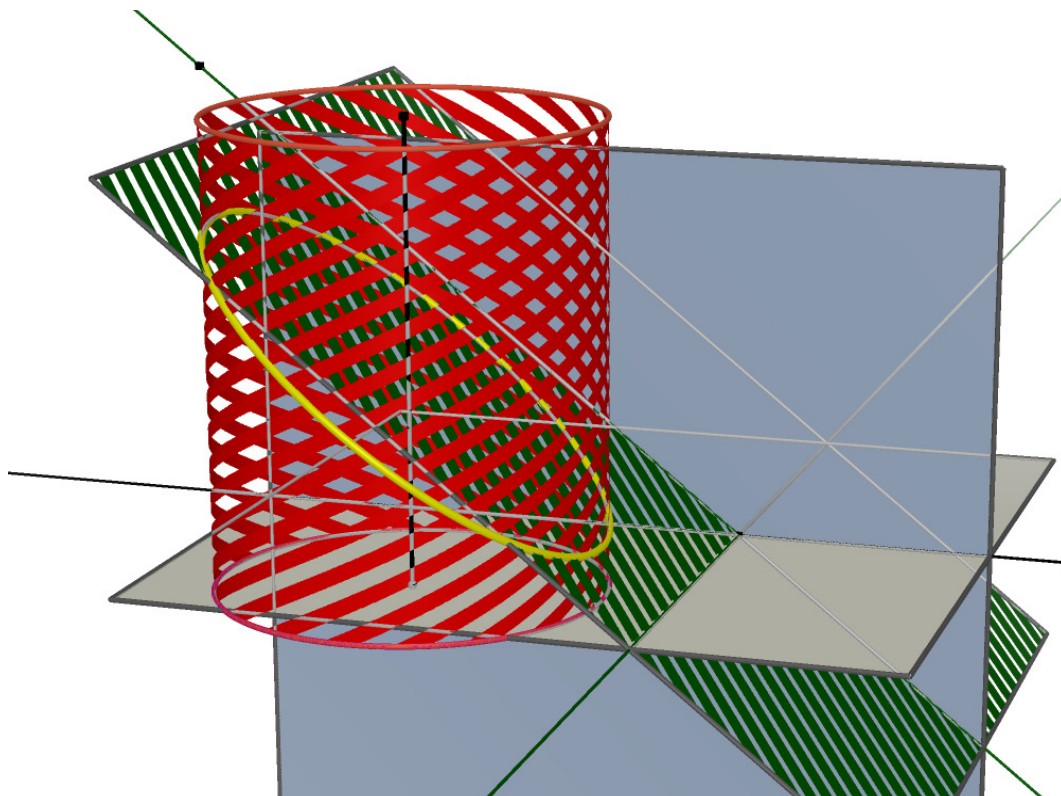
Při sestrování řezu rotačního válce budeme postupovat tak, jak jsme popsali výše. Daná pravidla shrnuje následující věta:

VĚTA QUÉTELETOVA-DANDELINOVA: Řezem rotační válcové plochy rovinou, která je kosá k ose plochy, je elipsa. Jejími ohnisky jsou dotykové body kulových ploch vepsaných válcové ploše tak, že se dotýkají roviny řezu. Střed elipsy leží na ose válcové plochy, délka její vedlejší poloosy je rovna poloměru válcové plochy.

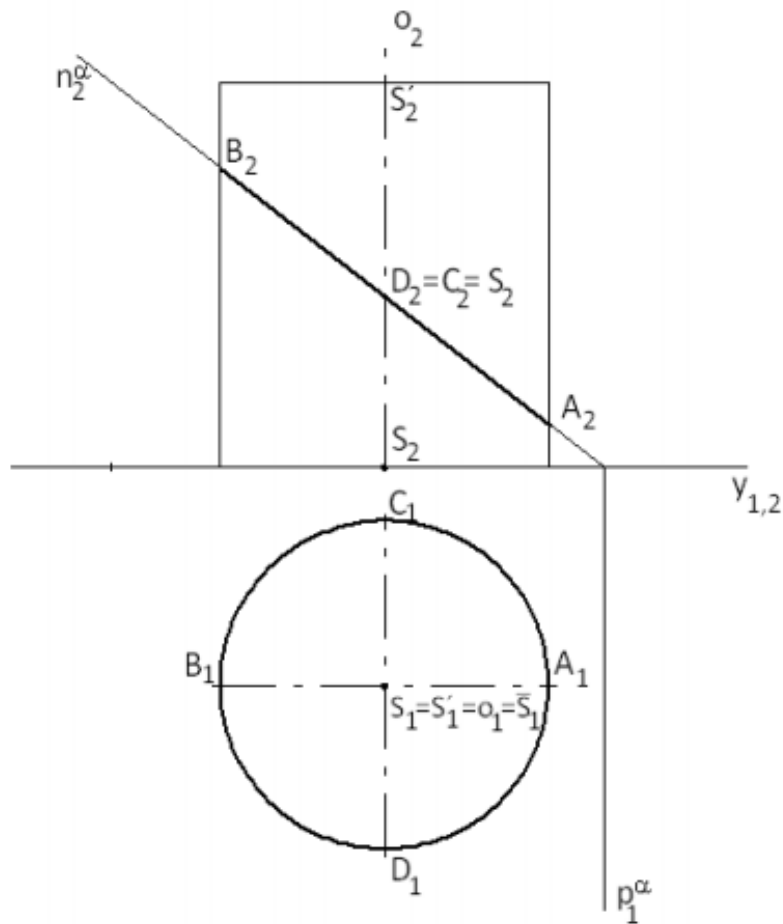
Úloha 4.5.3 Zobrazte řez rotačního válce s podstavou v půdorysně, $S[5, 4, 0]$, $r = 3$, $v = 7$, rovinou $\rho(9; \infty, 7)$.

Řešení: Protože rovina řezu je různoběžná s osou válce, je řezem elipsa. Rovina řezu nemá s podstavou válce žádný společný bod, elipsa proto tvoří celou hranici řezu. Kdyby rovina řezu protínala podstavu válce, byl by řez ohraničen oblouky elipsy a tětivami, které na podstavných hranách vytínají průsečnice roviny řezu s rovinami podstavu.

Rovina ρ je kolmá k nárysně, proto nárysem řezu je úsečka A_2B_2 a půdorys řezu splývá s půdorysem válce. (Obr. 55 a 56)



Obr. 55 –Příklad 4.5.3



Obr. 56 – Příklad 4.5.3

Úloha 4.5.4 Zobrazte řez rotačního válce s podstavou v půdorysně, $S [0; 3,5; 0]$, $r = 3$, $v = 7$, rovinou $\alpha (-9; 9; 6)$.

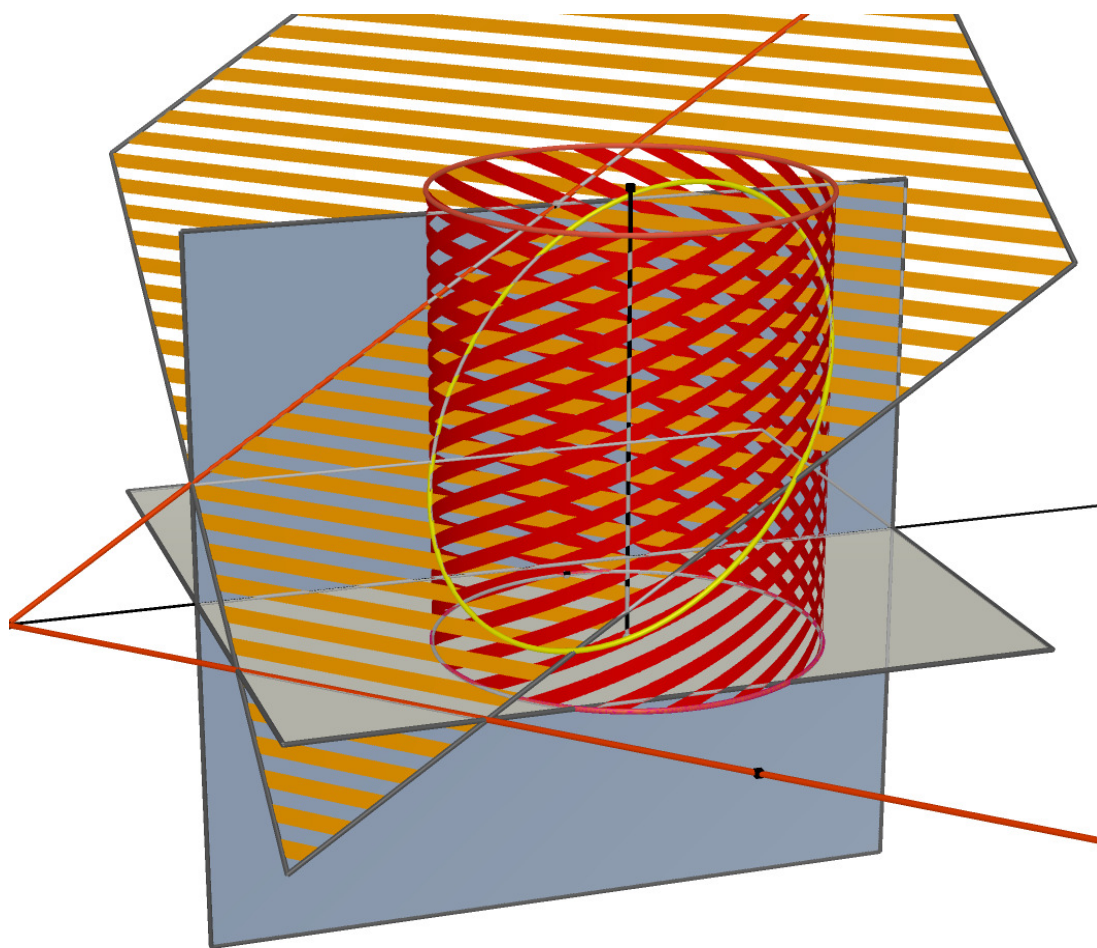
Řešení: Protože je rovina řezu různoběžná s osou válce, bude řezem elipsa. Protože ale podstava leží v půdorysně, bude půdorysem kružnice splývající s podstavou kružnicí válce a nárysem bude úsečka.

K určení nárysu řezu proložíme rovinou α kolmou rovinu π . Průsečnice s rovin ρ a π , která je spádovou přímkou roviny řezu, je také hlavní osou elipsy řezu. Přímka s protíná osu válce ve středu elipsy řezu a plášť válce v hlavních vrcholech elipsy A, B. Vedlejší osa elipsy leží v rovině řezu na horizontální hlavní přímce h procházející středem elipsy kolmo k přímce s . Přímka h protíná plášť válce ve vedlejších vrcholech C, D elipsy.

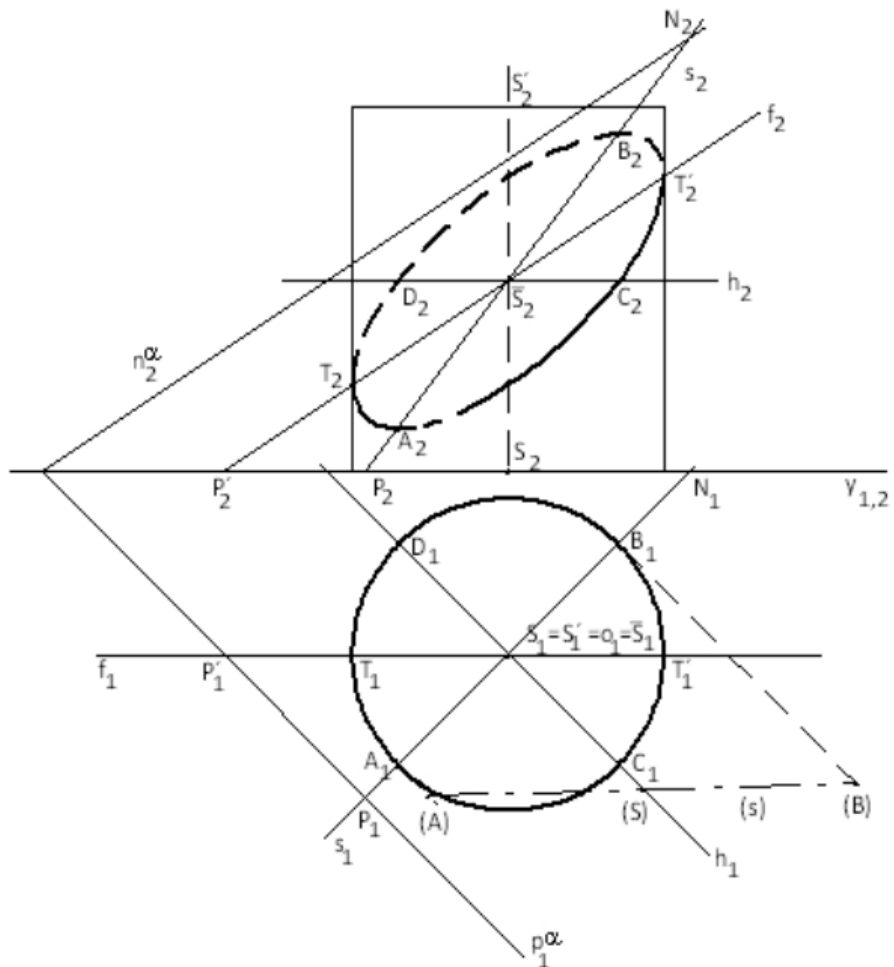
Úsečky A_2B_2 , C_2D_2 jsou pro nárys elipsy jejími sdruženými průměry, z nich pomocí Rytzovy konstrukce sestrojíme elipsu.

Body T_2 , T'_2 v nárysu řezu zjistíme pomocí hlavní přímky f . Tyto body určují viditelnost nárysu řezu. Viditelný v nárysu je oblouk elipsy na přední polovině válce, tedy oblouk TT' obsahující body A a C.

Délku hlavní osy AB pro elipsu ve skutečné velikosti určíme sklopením např. půdorysu této úsečky do půdorysny. Délka vedlejší osy CD je $2r$. (Obr. 57 a 58)



Obr. 57 – Příklad 4.5.4

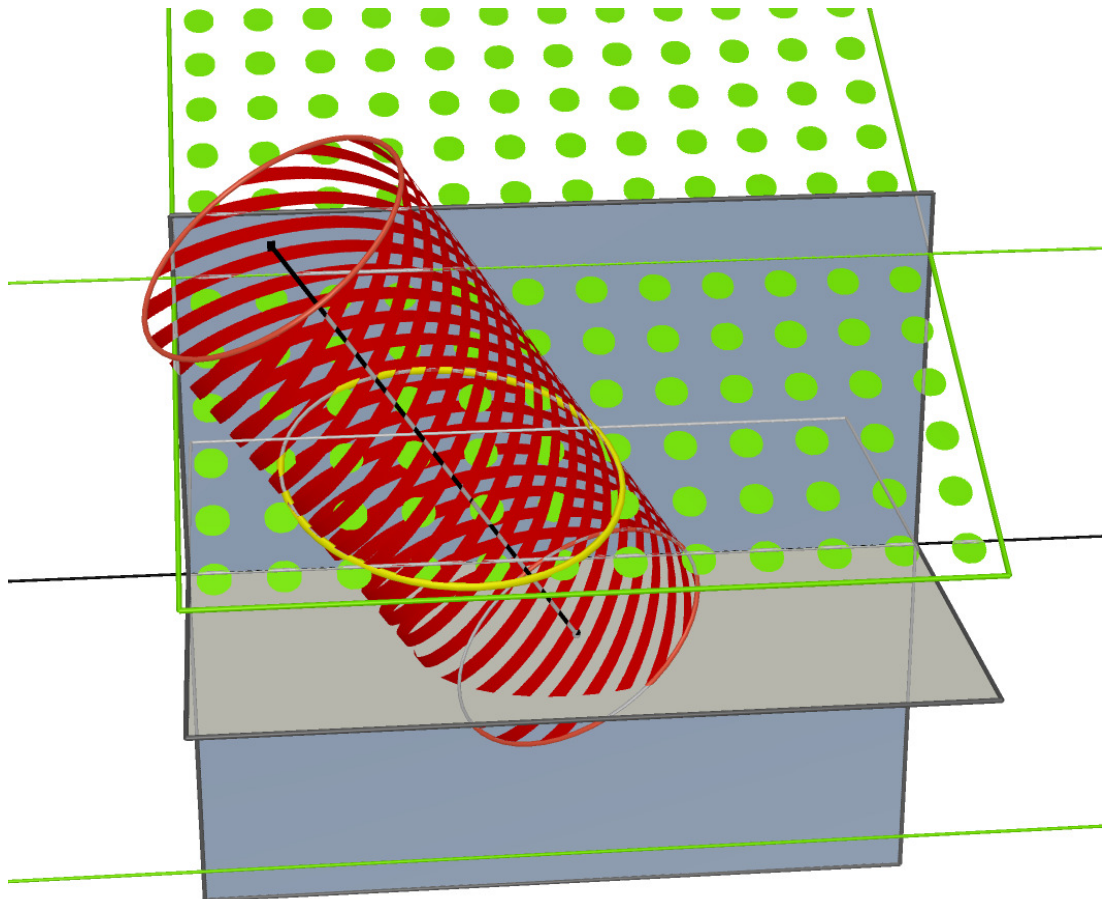


Obr. 58 – Příklad 4.5.4

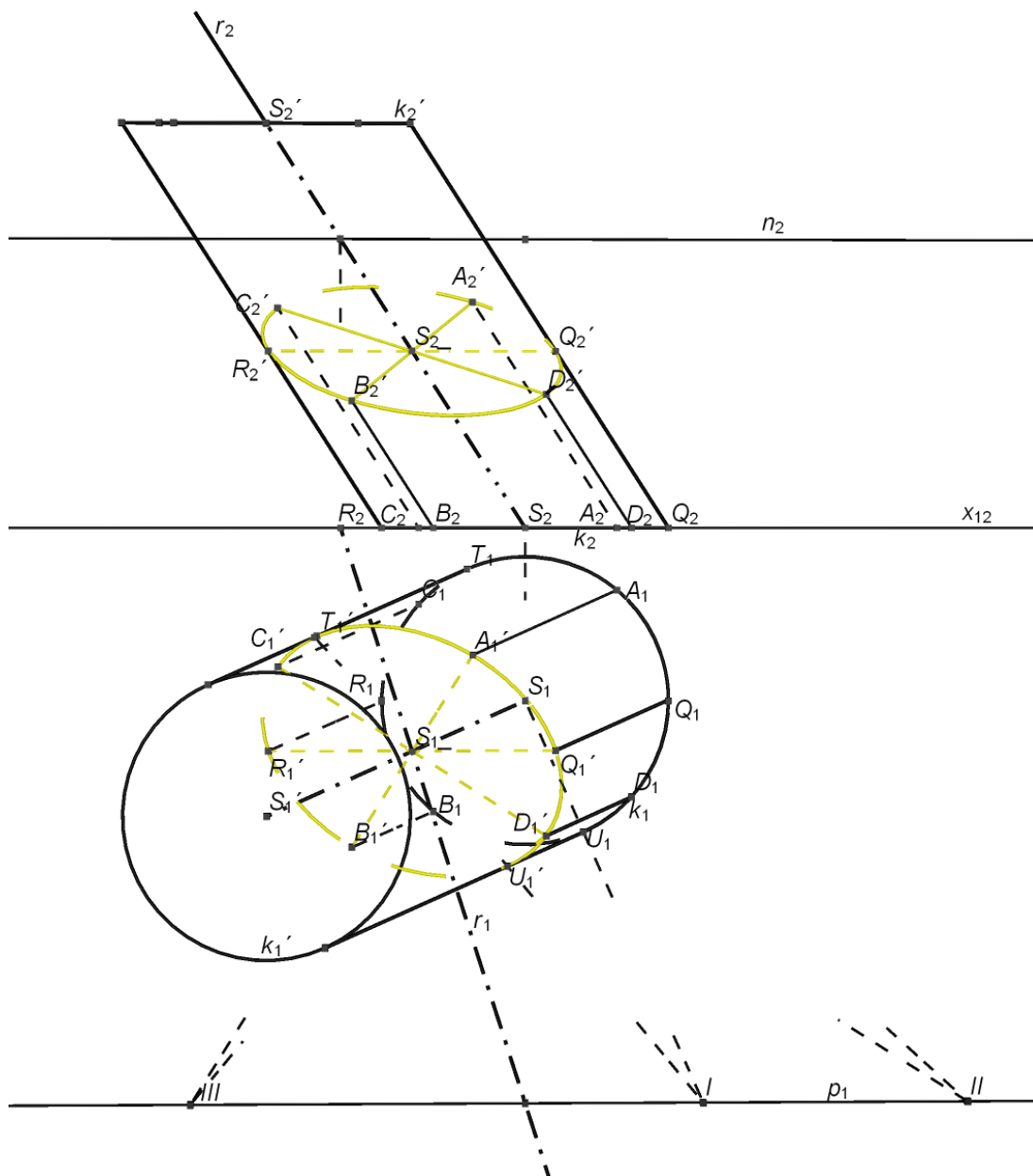
Úloha 4.5.5. Rotační válec s podstavou v půdorysně, $S [0; 3; 0]$, $r = 2,5$ a druhou podstavou v bodě $S' [-4,5; 5; 7]$, protněte rovinou $\rho (\infty; 10; 5)$.

Řešení: Sestrojíme půdorysnou stopu roviny řezu, pak sestrojíme průsečík S^- této roviny a přímky SS' . V afinitě pak sestrojíme elipsu, která je sdružená s kružnicí $k (S, r)$. Nakonec určíme body T_1 a U_1 , ve kterých se bude měnit viditelnost řezu.

Nárys sestrojíme tak, že vyhledáme sdružené průměry A_2', B_2', C_2', D_2' a Rytzovou konstrukcí určíme osy. Body U_1' a T_1' křivky řezu odpovídají v afinitě bodům U_1 a T_1 křivky podstavy, stejně jako odpovídají body R_1 a Q_1 bodům R_1' a Q_1' . V bodech R_2' a Q_2' se mění viditelnost nárysu křivky řezu. (Obr. 59 a 60).



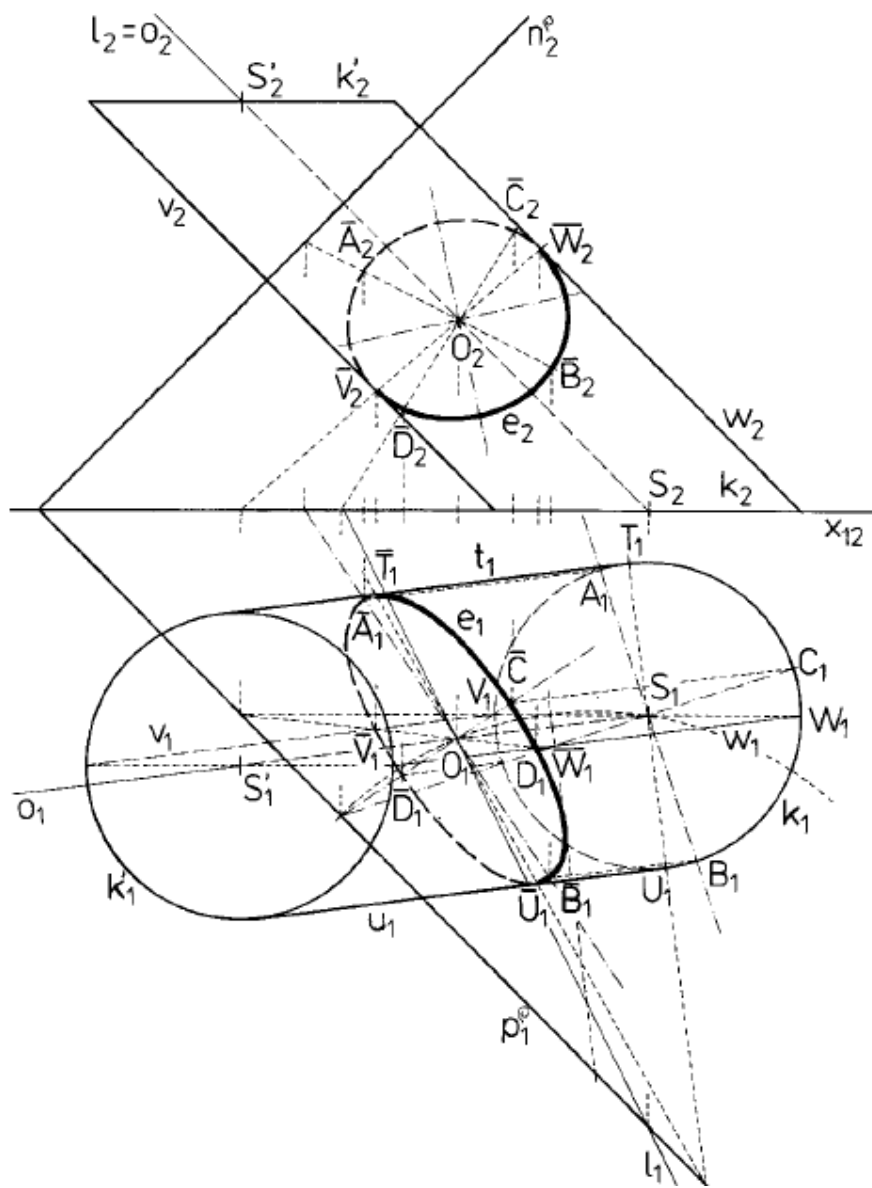
Obr. 59 – Příklad 4.5.5



Obr. 60 – Příklad 4.5.5

Úloha 4.5.6 Je dán šikmý kruhový válec, jehož jedna podstava se středem $S[4;4;0]$ leží v půdorysně, druhá podstava má střed v bodě $S'[-4; 5; 8]$ a poloměr podstav je $r = 3$. Zobrazte řez tohoto válce rovinou $\rho(-8; 8; 8)$.

Řešení: Rovina řezu p není směrová, tedy protíná válec v oblasti ohraničené elipsou e nebo její částí. Střed elipsy e leží v průsečíku osy $o = SS'$ válce a roviny řezu ρ ; sestrojíme ho pomocí krycí přímky l . První průmět e_1 elipsy e sestrojíme pomocí osové afinity mezi půdorysem řezu a půdorysem dolní podstavy. Osou afinity je první průmět p_1 půdorysné stopy roviny řezu, směr afinity je dán směrem půdorysů povrchových přímek válce a



Obr. 61 – Příklad 4.5.6

párem odpovídajících si bodů jsou první průměty S_1, O_1 středů S, O podstavy a řezu.

Osy $A_1^- B_1^-, C_1^- D_1^-$ prvního průmětu e_1 řezu sestrojíme známou konstrukcí. Jejich druhé obrazy $A_2^- B_2^-, C_2^- D_2^-$ jsou dvojicí sdružených průměrů druhého průmětu e_2 řezu. Osy a hlavní a vedlejší vrcholy elipsy e_2 sestrojíme Rytzovou konstrukcí podobně jako v předchozím příkladě.

5. Výzkum

5.1. Dotazník

Předmět Konstrukční či Deskriptivní geometrie se vyučuje většinou až na středních školách, na základních školách se setkáme pouze s technickým kreslením, ve kterém se žáci učí základní vlastnosti kosoúhlého promítání, a to ještě velmi zřídka, ne-li vůbec.

Žáci na 2. stupni ZŠ jsou ale schopni rozlišovat základní kolmá a rotační tělesa a také je narýsovat v kosoúhlém promítání. Což je částečně průprava na stereometrii na střední škole, kde žáci řeší pokročilejší úlohy jako řez krychle, kvádrů a jehlanu.

Rozhodla jsem se tedy v rámci výzkumné části své diplomové práce prozkoumat, jaké mají žáci k řešení těchto úloh předpoklady – zda jsou schopni vidět trojrozměrná tělesa (nebo soubor těles) a pracovat s nimi. Nesoustředila jsem se na jeden ročník, ale pokusila jsem se udělat dotazník, který bude vhodný pro všechny ročníky. Předpokládám samozřejmě, že 9. ročník bude „test“ řešit s mnohem menšími obtížemi. Také z důvodu, že žáci 6. ročníku mají povědomí pouze o krychli, jsem nevolila jiná tělesa.

V úvodní otázce zkoumám, zda jsou žáci schopni pochopit půdorys, nárys, popřípadě bokorys, i když nemají teoretickou znalost z Mongeova promítání. Využila jsem k tomu příkladu krychle, která je pomalovaná barevnou čarou. Žáci mají za úkol brát krychli jako průhlednou, zkoumám tedy, jestli si uvědomí, že v bokorysu uvidí obě čáry – nejen tu čelní, ale i tu zadní. Také mě zajímá, jestli jsou schopni uvědomit si „přední“ a „zadní“ část krychle (příklad 1C), což je předpoklad pro pozdější určování viditelnosti těles.

Otázka číslo 2 zkoumá představivost. Žáci většinou namají problém sestavit dohromady rovinný útvar, zajímá mě ale, nakolik je bude prostorové zobrazení mást.

Otázka číslo 3 je podobná jako otázka 1, je tu rozdíl v tom, že máme skupinu těles (místo jednoho) a nejsou už průhledná. Opět mě zajímá, zda jsou žáci schopni určit půdorys, nárys a bokorys, zda mají odhad velikostí a vzdáleností, když jsou zkreslené zobrazením.

Poslední otázka je tradiční síť a krychle, se kterou se žáci později setkají i u přijímacích zkoušek na střední školu. Zkoumám, zda jsou si žáci schopni uvědomit těleso prostorově, když dostanou k dispozici pouze jeho rovinné zobrazení. Jejich úkolem je také určit, které strany budou v krychli následně u sebe, či naproti sebe.

V dotazníku je vždy pouze jedna správná odpověď, přikládám zadání s vyznačeným řešením i s průvodním textem tak, jak jej obdrželi žáci.

Vážení studenti,

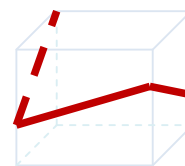
dostává se vám do rukou výzkumný dotazník, na jehož základě vyhodnocuji schopnost žáků na ZŠ vidět 3D prostor a pracovat s ním.

Prosím vás tedy o pečlivé vyplnění tohoto dotazníku, jehož výsledky budou součástí diplomové práce.

Děkuji za spolupráci! ☺

Michaela Sukupová

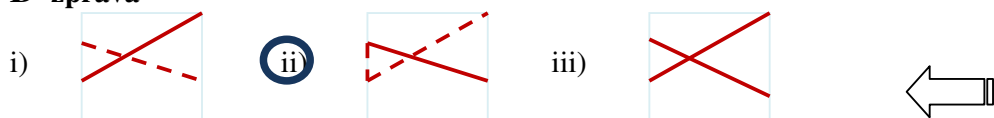
1. Je dána skleněná (průhledná) krychle. Na stěny této krychle nakreslíme červenou čáru. Určete, jak se čára zobrazí, pokud se na krychli budeme dívat:



A zepředu



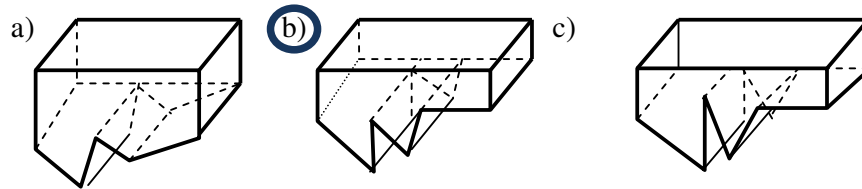
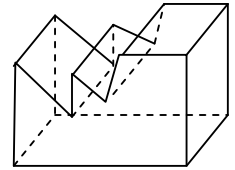
B zprava



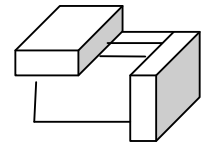
C shora



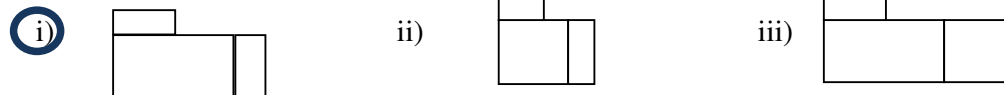
2. Od krychle jsme odřezali horní část a zbyla spodní část, kterou vidíte na obrázku. Určete, který horní díl bychom měli přiložit, aby krychle byla zase kompletní.



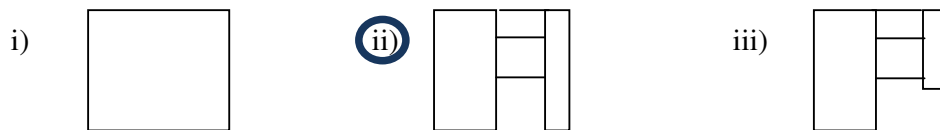
3. Určete, jak uvidíte tyto 4 stejné kvádry, pokud se na ně budete dívat:



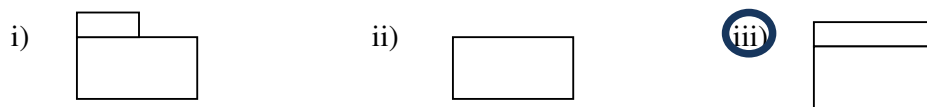
A zepředu



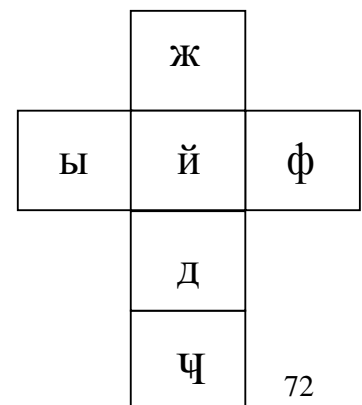
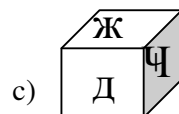
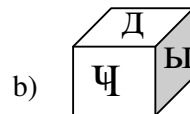
B shora



C zprava



4. Určete, jak bude vypadat krychle, kterou sestavíme z dané sítě.



5.2. Vyhodnocení

Výzkum jsem prováděla na Základní škole v Brně, v každém ročníku jsem oslovila jednu třídu.

Předpokládala jsem, že čím vyšší ročník to bude, tím víc bude správných odpovědí. Má domněnka se ale úplně nepotvrdila. Rozebereme si tedy jednotlivé otázky.

Otázka číslo jedna se týkala půdorysu, nárysu a bokorysu, žáci měli na průhledné krychli určit, jak uvidí danou čáru nakreslenou na povrchu dané krychle.

Předpokládané chyby byly, že žáci u jednotlivých promítání nebudou brát v potaz čáry, které se budou jevit jako umístěné vzadu. Má domněnka se nepotvrdila pouze u příkladu 1A, s ostatními opravdu měli žáci problém. U půdorysu to bylo nejen s viditelností, ale také s otočením daného tělesa, u bokorysu byla největším problémem nejspíš viditelnost.

Překvapující ale je, že šestý ročník v příkladu 1A dopadl naprosto stejně jako ročník devátý. Z oslovených 16 respondentů v šestém ročníku správně odpovědělo 16, v devátém ročníku to bylo deset ze sedmnácti. V osmém ročníku naopak správně odpověděli pouze čtyři žáci.

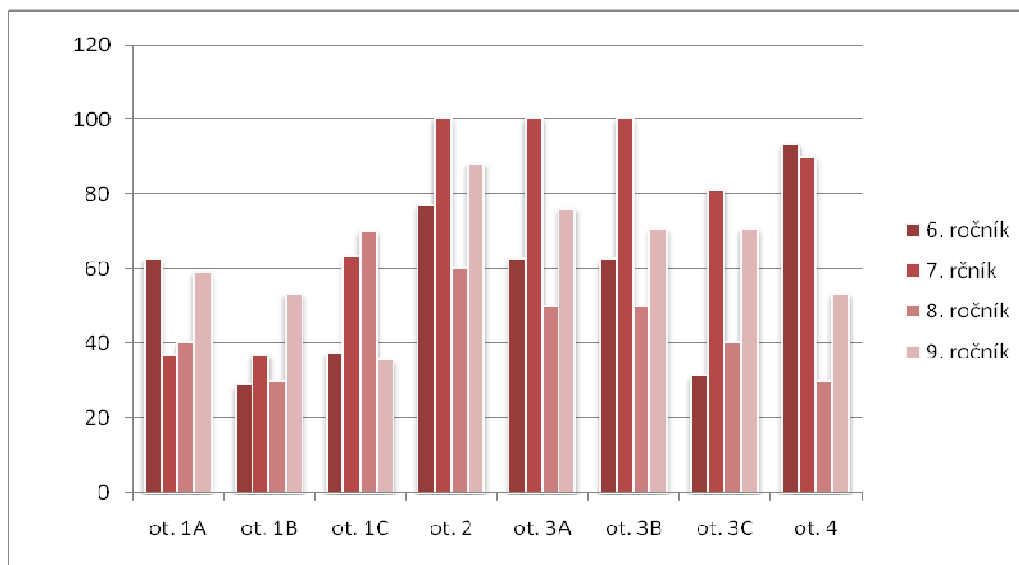
Nejlépe dopadl osmý ročník v příkladu 1C, kde správně odpovědělo 9 respondentů z 16.

Otázka číslo 2 byla velmi jednoduchá, správně ji zodpověděla většina studentů ze všech ročníků, v sedmém ročníku to bylo dokonce 100 % dotazovaných žáků.

Otázka číslo 3 zkoumala prostorovou představivost. V zadání bylo přímo napsáno, že se jedná o stejné kvádry, většina z žáků tomu však nevěnovala pozornost. Nevíce studentů správně odpovědělo v části 3A a 3B, žáci sedmého ročníku zde opět excelovali a část 3A a 3B mělo správně 100 % žáků.

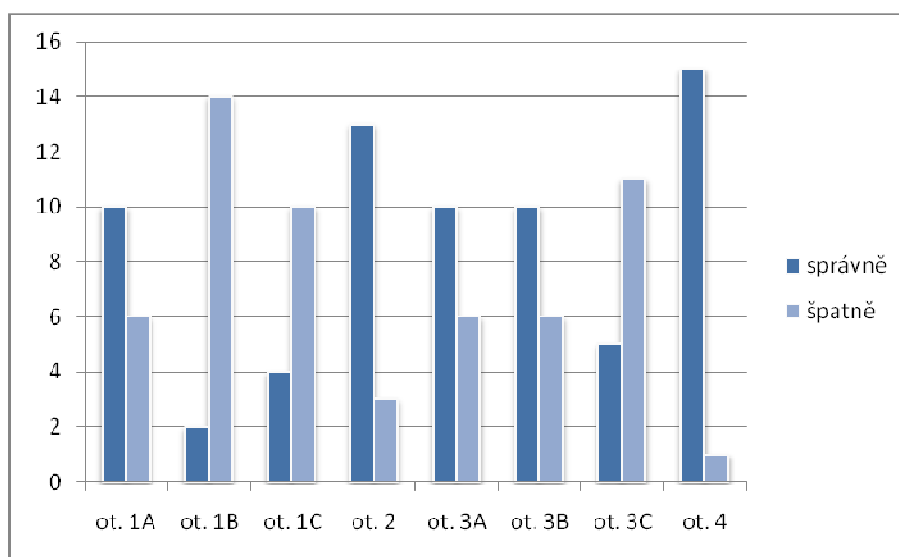
Otázka číslo 4 se týkala sítě krychle, devátý ročník na tento typ příkladu jistě narazí v přípravě na přijímací zkoušky na střední školy, každopádně úspěšnost řešení tohoto příkladu o jejich přípravě moc nenasvědčuje. Nejvíce správných odpovědí bylo v šestém ročníku, kde správně odpovědělo 15 z 16 dotazovaných. V devátém ročníku správně odpovědělo pouze 9 respondentů.

Přehled správných odpovědí v jednotlivých ročnících můžete vidět v Grafu 1, celkový přehled poměru správných a špatných odpovědí pro jednotlivé ročníky a přehled všech odpovědí můžete vyčíst z následujících grafů.



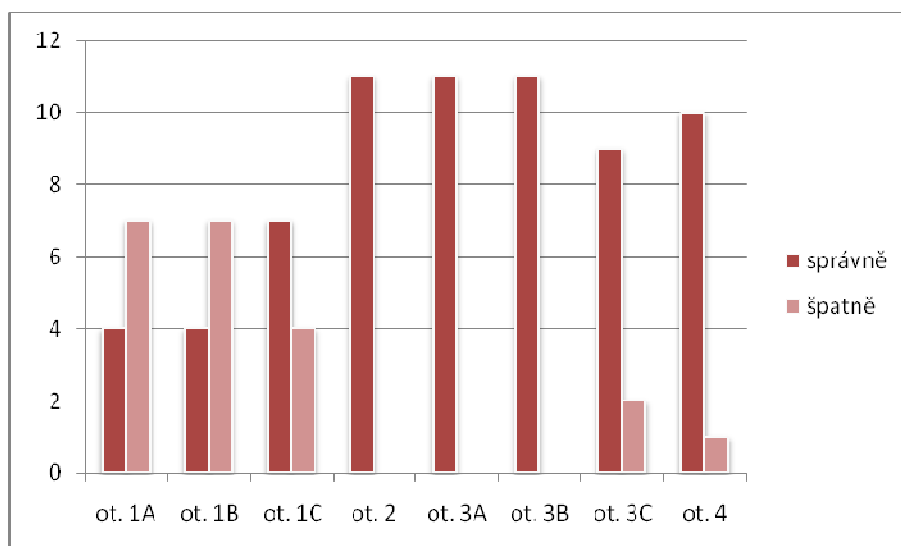
Graf 1

Šestý ročník



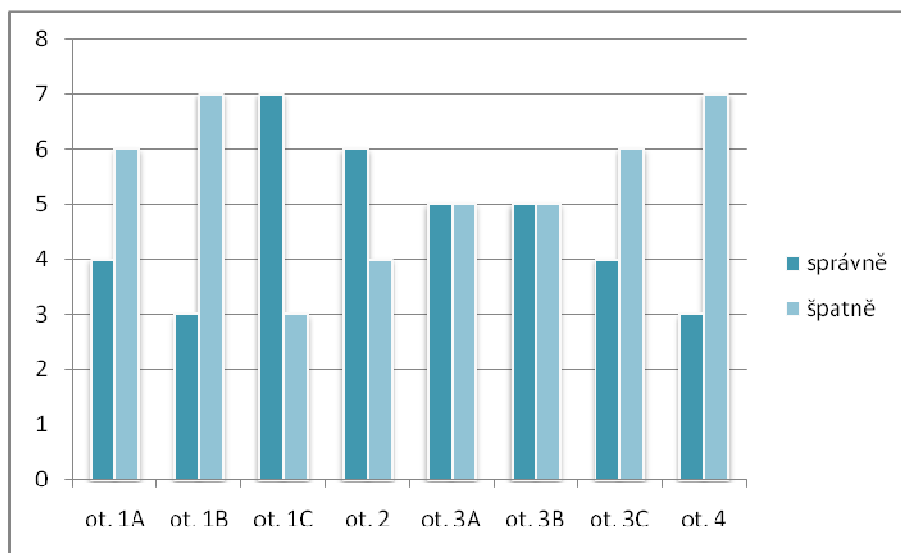
Graf 2

Sedmý ročník



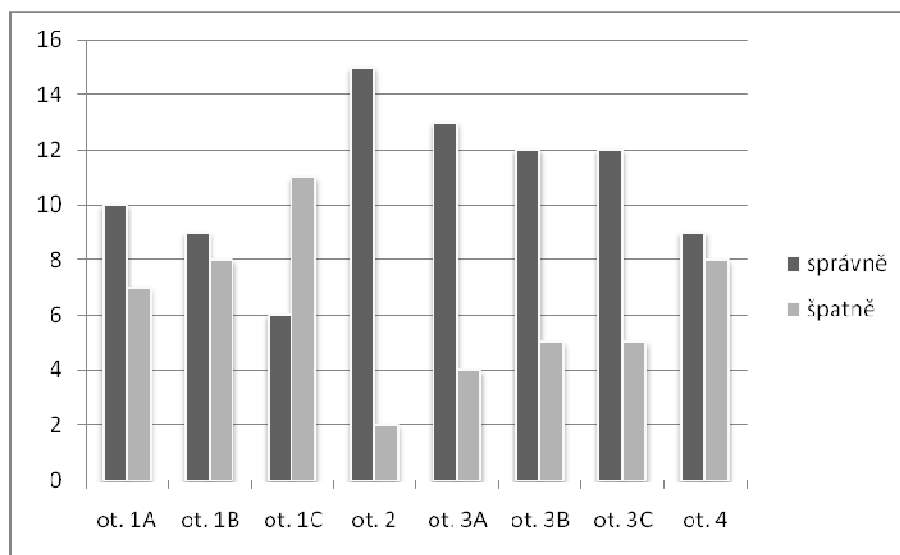
Graf 3

Osmý ročník



Graf 4

Devátý ročník



Graf 5

Z příložených grafů můžeme vidět, že moje domněnka se nepotvrdila. Žáci mají předpoklady pro řešení prostorových úloh naprosto nezávisle na věku, což potvrzuje to, že osmý ročník dopadl ve výzkumu nejhůř, zatímco šestý velmi dobře. V šestém ročníku převládaly špatné odpovědi nad dobrými pouze u tří otázek z osmi, zatímco v osmém ročníku převládaly u čtyř otázek a u dvou jich bylo stejně jako správných odpovědí.

Sedmý ročník dopadl nejlépe ze všech, v několika otázkách bylo dokonce 100 % správných odpovědí.

Devátý ročník, který by se touto dobou měl připravovat na obdobné příklady u přijímacích zkoušek, dopadl nejlíp, špatné odpovědi převažovali pouze v jedné otázce.

Z daného průzkumu tedy vyplývá, že žáci předpoklady pro řešení prostorových úloh mají, nespoisí to však s věkem, nýbrž s jejich kognitivními znalostmi a schopnostmi.

6. Závěr

Mongeovo promítání je velmi rozsáhlá a zajímavá oblast konstrukční geometrie. Ve své diplomové práci jsem se pokusila zpracovat alespoň část úloh, se kterými se můžeme setkat. Vyrýsováním příkladů, které jsem uvedla, si žáci mohou upevnit či prohloubit své teoretické a praktické znalosti z Mongeovy projekce. Příklady je možné ještě doplnit o konstrukci sítě daných těles, či zobrazením skutečné velikosti řezu.

K narýsování příkladů ve své práci jsem využívala programu Cabri3D, který umožňuje zobrazit těleso ve 3D prostoru, proto si žáci mohou lépe toto těleso v prostoru představit a promyslet si řešení. Může jim také pomoci ke zlepšení prostorového vidění jednotlivých těles.

V závěru své práce zkoumám předpoklady žáků na základní škole pro rýsování úloh v prostoru. Mé poznatky z tohoto výzkumu jsou následující: tyto předpoklady nesouvisí s věkem, nýbrž se schopnostmi jednotlivých žáků. Nejsou ani závislé na teoretických znalostech, což dokazuje fakt, že žáci 6. a 7. ročníku měli mnohem lepší znalosti než žáci z 8. a 9. ročníku, kteří už by měli mít teoretické znalosti z oblasti stereometrie.

7. Zdroje

- [1] KUPČÁKOVÁ, M.: *Základní úlohy deskriptivní geometrie v modelech*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 2002, ISBN 80-719-6244-9.
- [2] MAŇÁSKOVÁ, E.: *Sbírka úloh z deskriptivní geometrie*. 1. vydání. Praha: 2001, Prometheus. ISBN 80-7196-160-4
- [3] MACHALA, F.; SEDLÁŘOVÁ, M.; SROVNAL, J.: *Konstrukční geometrie*. 1. vydání. Olomouc: 2002, Univerzita Palackého v Olomouci. ISBN 80-244-0399-4
- [4] URBAN, A.: *Deskriptivní geometrie I*. 2. vydání. Praha: 1977, SNTL – Nakladatelství technické literatury, ALFA – Vydavatelství technickém a ekonomickém literatury. ISBN 04-001-78
- [5] DRÁBEK, K.; HARANT, F.; SETZER, O.: *Deskriptivní geometrie I*. 1. vydání. Praha: 1978, SNTL – Nakladatelství technické literatury, ALFA – Vydavatelství technickém a ekonomickém literatury. ISBN 04-011-78
- [6] JALŮVKA, V.: *Cvičení z deskriptivní geometrie pro dálkové studium strojního a elektronického inženýrství. Díl 1*. Dotisk [1.] vydání. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1964.
- [7] MEDEK, V.: *Deskriptívna geometria*. 1. vydání, Bratislava: Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, 1962.
- [8] KOUNOVSKÝ, J.: *Deskriptivní geometrie*. 4. vydání. Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1956.
- [9] MENŠÍK, M., SETZER, O.: *Deskriptivní geometrie*. 3. vydání. Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1981.
- [10] MEDEK, V., ŠEDIVÝ, O.: *Deskriptivní geometrie pro gymnázia*. 1. vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1987.
- [11] DRS, L.: *Deskriptivní geometrie pro střední školy I*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1995. ISBN: 8085849666.
- [12] POMYKALOVÁ, E.: *Deskriptivní geometrie pro střední školy*, 1. vydání, Praha: Prometheus, 2010, ISBN: 978-80-7196-400-1.

[13] HOLÁŇ Š., HOLÁŇOVÁ L.: *Cvičení z deskriptivní geometrie II: Promítací metody*.
Brno: CERM Brno, 1998. ISBN: 80-214-0648-8.

[13] DOLEŽAL, M.: *Základy deskriptivní a konstruktivní geometrie: Díl 3. Mongeovo
promítání*. 2. vydání, Ostrava: VŠB – Technická Univerzita Ostrava, 2006. ISBN 80-248-
1140-5

8. Anotace

Jméno a příjmení:	Michaela Sukupová
Katedra:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	Mgr. Jitka Hodaňová, Ph.D
Rok obhajoby:	2012

Název práce:	Vybrané kapitoly z Mongeova promítání
Název v angličtině:	Selected chapters of Monge projection
Anotace práce:	V práci řeším vybrané příklady z Mongeova promítání, zabývám se hlavně konstrukcí těles jako jsou hranol, jehlan a rotační válec, sestrojuji řezy těchto těles a jejich průniky s přímkami.
Klíčová slova:	Přímka; rovina; těleso; kvádr, jehlan, krychle, hranol, elipsa, kružnice.
Anotace v angličtině:	The paper deals with selected examples of Monge projection, mainly dealing with design elements such as prism, pyramid and right circular cylinder, cuts constructs these bodies and their intersections with straight lines.
Klíčová slova v angličtině:	Line; plane; solid, lines, cube, cuboid, ellipse, pyramid, circular cylinder
Přílohy vázané v práci:	
Rozsah práce:	79 stran
Jazyk práce:	Český