Univerzita Palackého v Olomouci

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Radek Holman

3. ročník – prezenční studium

Obor: Matematika a výchova ke zdraví se zaměřením na vzdělávání

Určitý integrál ve stereometrii

Bakalářská práce

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.

Olomouc 2011

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma Určitý integrál ve stereometrii vypracoval samostatně a použil jen uvedených pramenů a literatury.

V Kostelci u Holešova dne 24.2.2011 ……………………

Děkuji paní doc. RNDr. Jitce Laitochové, CSc. za odborné vedení práce, poskytování rad a materiálových podkladů k práci a také všem ostatním, kteří poskytli některé další cenné informace a rady.

Obsah

Úvod

Vážení čtenáři,

předložená práce s názvem Určitý integrál ve stereometrii, která se Vám nyní dostává do rukou, je zaměřena na stereometrii rotačních těles takových, s nimiž se žáci seznamují v hodinách matematiky již na základní škole. Získané poznatky o těchto tělesech si později rozvíjejí a prohlubují v rámci učiva středoškolské matematiky, případně matematiky pro gymnázia či střední odborná učiliště.

První kapitola je věnována tématu určitého integrálu, který je součástí problematiky integrálního počtu. S určitým integrálem se někteří z nás setkali již na střední škole, ovšem většina studentů se s touto oblastí matematiky (oblastí integrálního počtu) poprvé střetne až na vysoké škole. V této první kapitole připomínám definici určitého integrálu, jeho geometrickou interpretaci a možnosti jeho matematických aplikací. Uvádím zde také základní integrační metody, některé základní vzorce pro integrování a hlavní pravidla pro počítání s integrály.

Úkolem druhé kapitoly je poskytnout v přehledu základní informace o základních rotačních tělesech, tj. válec, kužel, komolý kužel, koule a její části.

Ústředním cílem celé práce je ukázat, jak souvisí prostorová geometrie výše jmenovaných rotačních těles s integrálním počtem, konkrétně s určitým integrálem. Tuto souvislost jednoznačně prokazuje ta skutečnost, že jsme schopni pomocí jistých vzorců určit objem, obsah pláště a povrch libovolného rotačního tělesa.

V dalších několika kapitolách jsou tyto vzorce odvozeny a vysvětleny. Jednotlivé úvahy a některé dílčí kroky doplňuji obrázkovou ilustrací.

Při vytváření této práce mně šlo hlavně o to, aby čtenář po jejím prostudování porozuměl nejen daným vzorcům a principům jejich odvozování, ale aby dokázal tyto principy uplatnit a aplikovat především při řešení klasických školních úloh, jenž se týkají uvedených rotačních těles. A právě z tohoto důvodu zařazuji do téměř každého tématu konkrétní řešený příklad, tedy úlohu s „ konkrétními čísly."

Dalším cílem práce je, aby si čtenář v souvislosti s ústřední problematikou textu oživil, zopakoval a procvičil postupy integrování některých základních elementárních funkcí a tím poukázat na motivaci tyto postupy znát a umět. S ohledem na tento cíl jsou v textu některé určité integrály řešeny podrobně, avšak postup výpočtu, podrobně vysvětlený v předchozím řešeném příkladu, v dalších příkladech vždy neopakuji. Někdy uvádím pouze odvolávky na příklady s podrobným postupem řešení.

Tato moje bakalářská práce může sloužit například jako příručka pro studenty středních škol, pro vysokoškolské studenty matematických oborů, pro něž je toto téma přitažlivé a atraktivní, ale doporučil bych ji také učitelům matematiky na středních, ale i na základních školách a vůbec všem ostatním příznivcům a přátelům matematiky.

Autor

1 Určitý integrál

V tomto článku si připomeneme nám již známý nebo alespoň částečně známý pojem a základní vlastnosti určitého integrálu.

Určitý integrál představuje velmi důležitou součást integrálního počtu, což je matematická disciplína stará několik stovek let. Kořeny nacházíme již v 17. století, kdy anglický matematik Isaac Newton a německý matematik Gottfried Wilhelm Leibniz nezávisle na sobě zavedli diferenciální a integrální počet.

Avšak byl to právě Newton, kdo jako první z těchto zakladatelů objevil a ve své práci zformuloval základní vztah derivace a integrálu. Tuto práci bohužel nepublikoval.

Tolik k historii a pojďme se nyní na určitý integrál podívat o něco více očima současnosti.

1.1 Definice, geometrický význam

Při definování určitého integrálu se přidržíme Newtona, podle něhož je také následovně definovaný integrál nazván a sice jako Newtonův určitý integrál.

Definice 1.1 Nechť $f(x)$ je funkce definovaná v intervalu *I*. Každá funkce $F(x)$, která je diferencovatelná v intervalu *I* a splňuje v něm rovnost

$$F^{(1)}(x) = f(x),$$

se nazývá primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu *I*.

Definice 1.2 Nechť F je primitivní funkce k funkci f v intervalu *I*. Rozdíl funkčních hodnot funkce F v bodech *a, b* tohoto intervalu se nazývá určitý integrál funkce f v mezích od *a* do *b* a značí se $\int_a^b f(x)dx$.

Z definice pak plyne základní vztah pro výpočet určitého integrálu:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad , \tag{1.1}$$

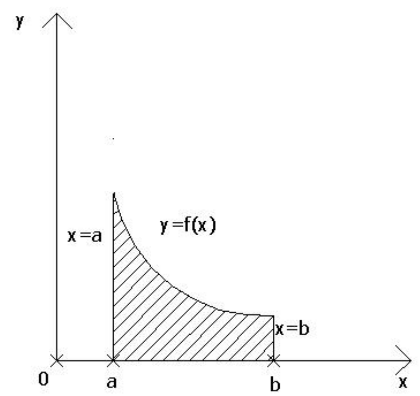
kde funkci f nazýváme integrandem, číslo *a* dolní mezí a číslo *b* horní mezí integrace.

Při samotném výpočtu tedy určíme primitivní funkci F k funkci f a dosadíme meze integrace do vztahu (1.1). Pro lepší orientaci a přehlednost je vhodné použít ještě před dosazením příslušných mezí zápis $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$.

Na základě pochopení definice si dále uvědomíme rozdíl mezi určitým integrálem a neurčitým integrálem. Zatímco pod neurčitým integrálem jsme rozuměli množinu všech primitivních funkcí k dané funkci $f(x)$, určitý integrál je reálné číslo dané funkcí f a mezemi a, b.

Geometrický význam určitého integrálu

Budeme předpokládat, že funkce f je na intervalu $\langle a,b \rangle$ spojitá a že $a < b$. Pak určitý integrál určuje obsah plochy omezené grafem funkce f, osou x ($y = 0$) a přímkami o rovnicích $x = a$, $x = b$, které jsou rovnoběžné s osou y ($x = 0$). Tyto přímky se někdy označují jako takzvané pořadnice. (Viz obr. 1.1)



obr.1.1

Poznámka V následujících kapitolách budeme uvažovat jen spojité funkce.

1.2 Způsoby výpočtu určitých integrálů

Při výpočtu vycházíme z definice tak, že najdeme primitivní funkci F k funkci f. Určitý integrál pak spočítáme odečtením funkční hodnoty funkce F v dolní mezi integrálu od funkční hodnoty této funkce v jeho horní mezi.

K určení primitivní funkce F využíváme některé základní vzorce, pomocí nichž nalezneme funkci F poměrně snadno, ale existují také funkce, ke kterým se funkce primitivní hledá obtížně.

V takových případech musíme zavést vhodnou substituci (viz substituční metoda), samozřejmě pokud nějaká taková substituce existuje, případně použít metodu per partes. Nemůžeme-li přímo zavést vhodnou substituci, musíme nejdříve funkci f

upravit tak, aby bylo možno substituční metodu použít (rozklad racionální funkce v parciální zlomky aj.).

Dále víme, že množina všech primitivních funkcí k funkci f je neurčitým integrálem k funkci *f*, což zapisujeme $\int f(x)dx = F(\mathrm{x}) + C$. Nejčastěji pro jednoduchost používáme tu primitivní funkci, kde $C = 0$.

Podobně jako u neurčitých integrálů platí i pro počítání s určitými integrály jistá pravidla, která si nyní uvedeme.

Věta 1.1 Nechť *f(x)* a *g(x)* jsou funkce definované na intervalu $\langle a, b \rangle$, které jsou na tomto intervalu integrovatelné a nechť $k \in R$ je libovolná konstanta. Pak platí:

$$\int_a^b kf(x)dx = \mathrm{k} \int_a^b f(x)dx \tag{1.2}$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \tag{1.3}$$

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \tag{1.4}$$

1.2.1 Základní vzorce

Pro potřeby našeho dalšího studia uveďme jen jeden vzorec pro určení primitivní funkce.

$$\int x^\beta dx = \frac{x^{\beta+1}}{\beta + 1} + C. \beta \neq -1, \beta \in R \tag{1.5}$$

Těchto vzorců existuje ještě více a lze je najít v jakékoliv učebnici o integrálním počtu, resp. o základech integrálního počtu.

1.2.2 Metoda per partes a substituční metoda

Podle vztahů uvedených ve větě 1.1 jsme schopni spočítat určitý integrál součtu dvou funkcí, rozdílu dvou funkcí a součinu konstanty s funkcí.

Problém ale nastane v momentu, kdy je potřeba integrovat součin dvou funkcí. K řešení takových určitých integrálů můžeme použít metodu integrování per partes, což v překladu znamená po částech.

Věta 1.2 Jsou-li u a v funkce proměnné x, které na intervalu $\langle a,b\rangle$ mají spojité derivace, pak platí $\int_a^b uv'\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'v\,dx$.

(Důkaz věty lze nalézt například v Matematická analýza 2 - Integrální počet (4)).

Poznámka Pro neurčité integrály je vzorec ve tvaru $\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx$

Lze tedy postupovat i tak, že touto metodou určíme nejprve primitivní funkci a pak jen dosadíme meze *a, b* do vztahu (1.1).

Substituční metoda

Věta 1.3 Jsou-li funkce $t = g(x)$ a její první derivace spojité v uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$ a je-li zároveň spojitá i funkce $f(t)$ pro všechna $t = g(x)$, kde $x \in \langle a,b\rangle$, pak platí

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt.$$

(Důkaz věty lze nalézt například v Matematická analýza 2 - Integrální počet (4)).

Při použití substituční metody pro určitý integrál tedy zavádíme novou proměnnou *t*. Současně s tím se mění dolní i horní mez integrálu. Podle věty o substituci (věta 1.3) určíme nové meze jako funkční hodnoty *g(a) a g(b).*

I zde však můžeme tento poměrně snadno „pokazitelný" postup obejít tím, že substituční metodou určíme nejdříve primitivní funkci a pak, dosazením příslušných mezí *a, b* do vztahu (1.1), spočítáme hodnotu určitého integrálu.

Doplňující pasáž: Vhodnou aplikací a účelnou kombinací těchto dvou metod (per partes, subst. metoda) můžeme dokázat platnost následujících tvrzení (vzorců), které nám mohou občas usnadnit námahu a urychlit výpočet:

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{a-x^2}} = \left[\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}}\right]_a^b \tag{1.9}$$

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}} = \left[\ln\left|x+\sqrt{a+x^2}\right|\right]_a^b, a>0 \tag{1.10}$$

$$\int_a^b \sqrt{a-x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{1}{2}a\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}}\right]_a^b, a>0 \tag{1.11}$$

$$\int_a^b \sqrt{a+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}x\sqrt{a+x^2} + \frac{1}{2}a\ln\left|x+\sqrt{a+x^2}\right|\right]_a^b \tag{1.12}$$

(Provedení důkazů těchto, mohli bychom říci „dalších základních vzorců", je ponecháno na vůli, aktivitě, zvídavosti a potřebách čtenáře).

1.3 Využití v matematice

Užitečnost určitého integrálu spočívá v jeho aplikacích. Určitý integrál se již v dobách svého zrodu stal důležitým váženým pojmem, poněvadž našel široké uplatnění v matematických disciplínách, ve fyzice, chemii a jiných přírodních vědách. Stal se také významným pomocným nástrojem mnohých technických oborů, jímž je i dnes.

My si však v této kapitole ukážeme pouze možnosti jeho použití v matematice. Určitým integrálem můžeme spočítat například obsah rovinného útvaru, určit objem nebo obsah pláště rotačního tělesa a další.

1.3.1 Výpočet obsahu rovinného útvaru

Základní úvahu a postup výpočtu popisuje následující příklad.

Příklad 1

Určete obsah obrazce ohraničeného křivkami $y = x^2 + 3$, $y = 2x^2 - 1$

Řešení: Obsah křivkami ohraničené plochy určíme jako rozdíl určitých integrálů $\int_{-2}^{2}(x^2+3)dx - \int_{-2}^{2}(2x^2-1)dx$, neboť funkce $y = x^2 + 3$ nabývá na intervalu $\langle -2, 2 \rangle$ větších hodnot.

(Horní a dolní meze těchto integrálů můžeme určit také jako *x*-ové souřadnice průsečíků zadaných funkcí).

Výpočet: Ze vzorce (1.4) plyne: $\int_{-2}^{2}(x^2+3)dx - \int_{-2}^{2}(2x^2-1)dx = \int_{-2}^{2}\left[(x^2+3)-(2x^2-1)\right]dx$

Dostáváme tak $\int_{-2}^{2}(-x^2+4)dx$. Nyní určíme primitivní funkci *F(x)* k funkci

$y = (-x^2+4)$: $\quad \int(-x^2+4)dx = -\int x^2 dx + 4\int 1 dx = \frac{-x^3}{3} + 4x + C = \frac{-x^3+12x}{3} + C$,

odtud $F(x) = \frac{-x^3+12x}{3}$ a tedy $\int_{-2}^{2}(-x^2+4)dx = \left[\frac{-x^3+12x}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{16}{3} - \left(-\frac{16}{3}\right) = \frac{32}{3}$

Odpověď: Obsah rovinného obrazce ohraničeného danými křivkami je $\frac{32}{3} j^2$.

(Symbol j^2 značí obecně jednotku obsahu).

1.3.2 Určení objemu a obsahu pláště rotačního tělesa

Věta 1.4 Objem V_x rotačního tělesa, jehož plášť vznikne rotací grafu spojité funkce *y=f(x)* definované na intervalu $\langle a,b\rangle$ kolem osy *x,* se vypočte podle vzorce

$$V_x = \pi\int_a^b f^2(x)dx\,. \tag{1.13}$$

(Důkaz věty lze nalézt například v Matematická analýza 2 - Integrální počet (4)).

Věta 1.5 Obsah S_x pláště rotačního tělesa, který vznikne rotací křivky *y = f(x)* kolem osy *x*, je dán vztahem $S_x = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$. (1.14)

(Důkaz věty lze nalézt například v Matematická analýza 2 - Integrální počet (4)).

1.3.3 Ostatní matematické aplikace

Zde připomeneme pouze jeden vztah a sice vztah pro výpočet délky rovinné křivky.

Věta 1.6 Je-li křivka *l* grafem funkce *y = f(x)*, kde $x\in\langle a,b\rangle$ a má-li funkce *f* na tomto intervalu spojitou derivaci, je schopná rektifikace a pro délku *d* oblouku jejího grafu na intervalu $\langle a,b\rangle$ platí $d = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$. (1.15)

(Důkaz věty lze nalézt například v Matematická analýza 2 - Integrální počet (4)).

Úkol pro zájemce:

Z matematiky ZŠ všichni velmi dobře známe vztah pro výpočet délky kružnice. Víme, že platí $o = 2\pi r$.

Zkuste si nyní sami s použitím vzorce (1.15) a efektivní aplikací poznatků o určitém integrálu tento vztah odvodit. V souvislosti s tím rovněž zdůvodněte pozici konstanty π *ve vztahu, tzn. odpovězte na otázku: Jak se konstanta* π *do tohoto vztahu dostala, odkud se vzala?*

2 Základní rotační tělesa

Rotačním tělesem obecně rozumíme takové těleso, které získáme rotací rovinného obrazce kolem přímky. Danou přímku nazýváme osou rotačního tělesa.

Některá rotační tělesa jsme již důvěrně poznali při našem dřívějším studiu matematiky, ať už na základní nebo střední škole. Zde si zopakujeme jejich názvy a stručně uvedeme některé základní charakteristiky.

2.1 Rotační válec

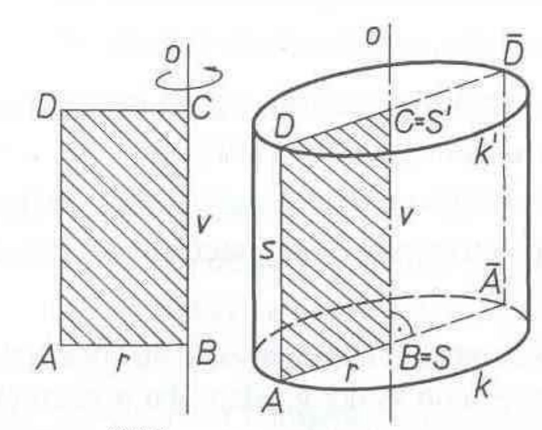
Těleso lze získat rotací jistého obdélníku kolem osy *o*, na níž leží jedna jeho strana.

Mějme dán obdélník *ABCD*, kde osa *o* = *BC* (viz obr.2.1). Rotací úseček *AB* a *CD* kolem osy *o* vzniknou kruhové podstavy a rotací úsečky *AD* vznikne plášť válce.

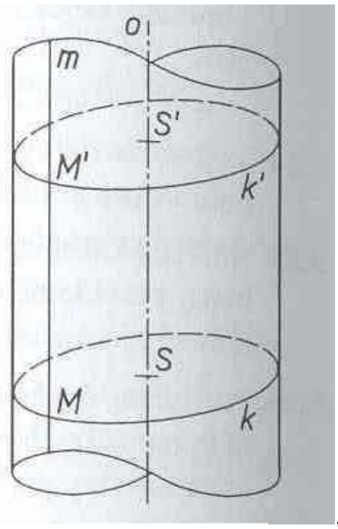
Délka úsečky, která náleží ose *o* a jejímiž krajními body jsou středy podstav , je výška válce. Polohy, které při rotaci zaujímá úsečka *AD*, nazýváme stranami válce. Pokud každou takovouto stranu prodloužíme v přímku, dostaneme útvar zvaný <u>rotační válcová plocha</u> (viz obr.2.2) a prostor, který tato plocha vymezuje, se nazývá <u>rotační válcový prostor.</u> (*Matematika pro gymnázia – Stereometrie (1)).*

Osovým řezem válce, jenž vznikl rotací obdélníku kolem osy *o*, je obdélník. Speciálním případem rotačního válce je rovnostranný válec vzniklý rotací čtverce kolem osy *o*, jehož osovým řezem je pochopitelně čtverec.

S rotačním válcem se běžně setkáváme v našem každodenním životě - některé nádoby, lahve, konzervy, ale i školní pomůcky, dětské hračky a jiné předměty mají tento tvar. Válec má však široké uplatnění i v technické praxi, kde tvoří například základ některých strojních součástek atp.



Obr. 2.1



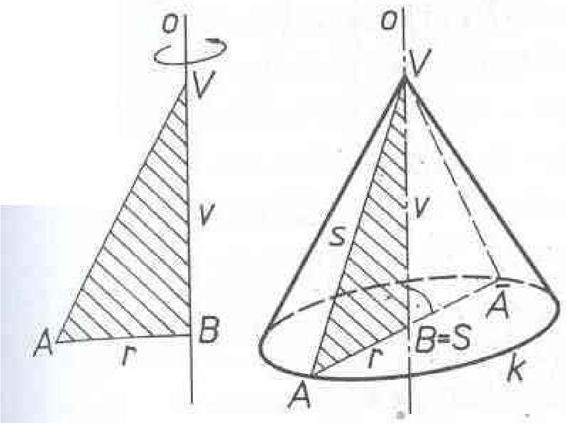
Obr. 2.2

2.2 Rotační kužel

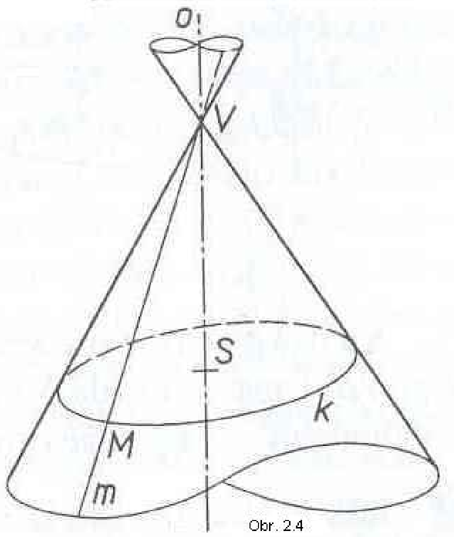
Rotací pravoúhlého trojúhelníku kolem osy *o*, která obsahuje jeho jednu odvěsnu, vznikne těleso, které se nazývá rotační kužel.

Představme si pravoúhlý trojúhelník *ABV* (viz obr.2.3), kde osa $o = BV$. Rotací jeho odvěsny *AB* kolem osy *o* vzniká kruhová podstava. Plášť kužele vznikne rotací přepony *AV*. Výškou *v* tělesa rozumíme délku úsečky náležící ose *o*, jejímž jedním krajním bodem je vrchol *V* a druhým krajním bodem je střed *S* podstavy.

Úsečky, jejichž jedním bodem je vrchol *V* a druhým bodem je libovolný bod hranice podstavy, se nazývají strany kužele a my je většinou označujeme písmenem *s*. Je tedy zřejmé, že plášť rotačního kužele je sjednocením všech stran *s* kužele. A opět, prodloužíme-li každou stranu kužele v přímku, dostaneme rotační kuželovou plochu.(viz obr.2.4) Prostor omezený touto plochou je rotační kuželový prostor. (*Matematika pro gymnázia – Stereometrie (1)).*



Obr. 2.3

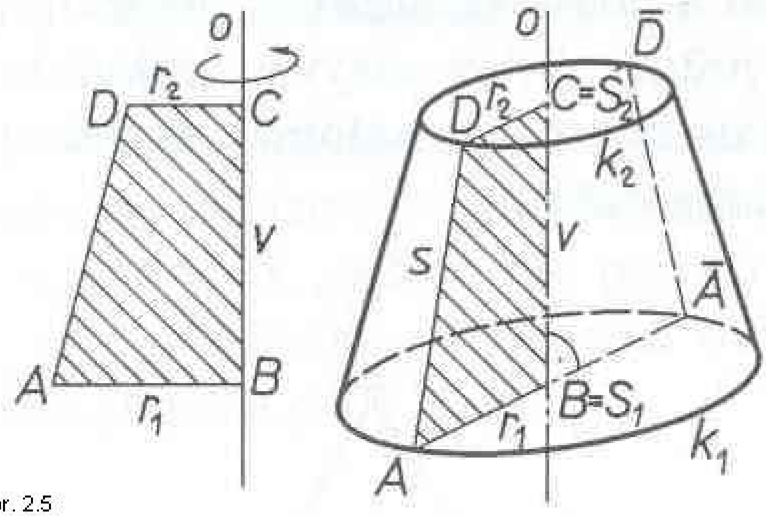


Obr. 2.4

V případě rotace pravoúhlého lichoběžníku *ABCD* (viz obr.2.5) kolem osy *o*, na které leží jeho kratší rameno, vzniká **komolý rotační kužel**.

Rotací základen tohoto lichoběžníku vzniknou kruhové podstavy komolého kužele o poloměrech r_1, r_2, kde zpravidla $r_1 > r_2$. Výška komolého kužele je délka kratšího ramena rotujícího pravoúhlého lichoběžníku. Strany *s* jsou zde určeny jednotlivými polohami delšího ramena.

I na tato dvě tělesa často v životě narážíme a stejně jako válec mají velký význam pro techniku, průmysl, ale i pro matematiku, geometrii, rozvíjení prostorové představivosti a jiné oblasti lidské činnosti.



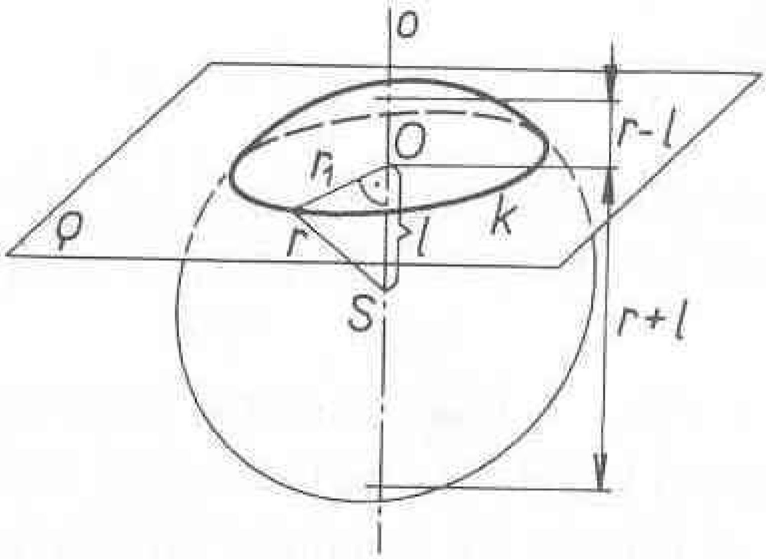
Obr. 2.5

2.3 Koule

Mějme dánu přímku o a půlkruh k, jehož průměr d leží na přímce o. Necháme-li půlkruh k rotovat kolem přímky o, dostaneme rotační těleso zvané koule, které je jednoznačně určeno svým poloměrem r a středem S. Středem koule je střed půlkruhu k a její poloměr je dán jako $r = \frac{d}{2}$. Hranice koule je většinou označována pojmem kulová plocha.

2.3.1 Části koule a kulové plochy

a) Kulový vrchlík- je část kulové plochy omezená kružnicí k, která je hranou kulového vrchlíku. Kulový vrchlík vznikne jako průnik kulové plochy a poloprostoru s rovinou, jejíž vzdálenost l od středu S kulové plochy je menší než poloměr r kulové plochy. Rovina rozdělí kulovou plochu na dva kulové vrchlíky s výškami v_1, v_2 a platí $v_1 = r - l; v_2 = r + l$ (viz obr.2.6)

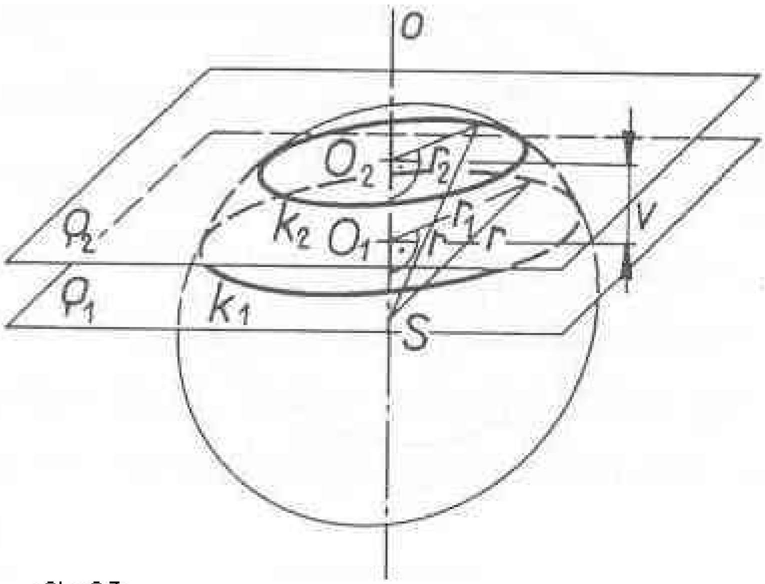


Obr. 2.6

b) Část koule, kterou ohraničuje kulový vrchlík a kruh, se nazývá kulová úseč. Povrchem kulové úseče je tedy součet obsahu kulového vrchlíku a kruhové podstavy.

c) Průnikem kulové plochy a vrstvy s rovinami σ_1, σ_2, které mají vzdálenosti od středu menší než poloměr, je kulový pás. (viz obr. 2.7)

Výška pásu je dána vzdáleností rovin σ_1, σ_2.



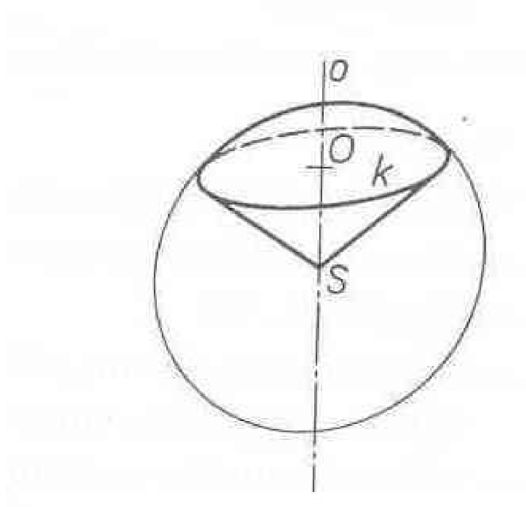
Obr. 2.7

d) Kulová vrstva

Za kulovou vrstvu považujeme tu část koule, kterou ohraničuje kulový pás společně se dvěma kruhy. Tyto kruhy jsou podstavami kulové vrstvy. Povrch kulové vrstvy je potom představován součtem obsahů obou podstav a kulového pásu.

e) <u>Kulová výseč</u> je sloučením kulové úseče a rotačního kužele, jehož vrchol S je zároveň středem příslušné koule a jehož podstava je společná s podstavou dané kulové úseče. (viz obr. 2.8)

Hranici kulové výseče reprezentuje plášť kužele a kulový vrchlík.
Z tohoto pohledu si můžeme kulovou výseč představovat jako takovou část koule, která je sjednocením všech úseček SY, kde bod S je středem koule a bod Y je bodem kulového vrchlíku.



Obr. 2.8

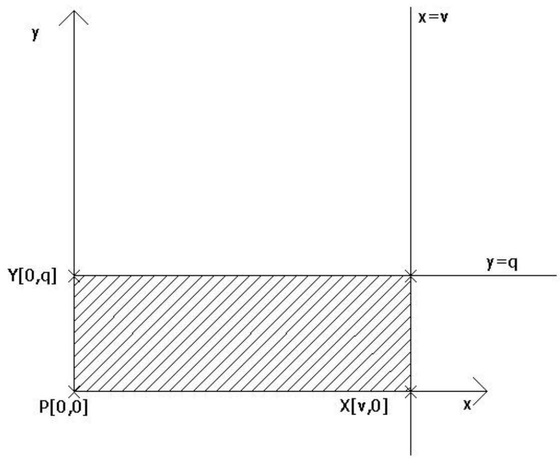
3 Rotační válec

Nyní se dostáváme k prvnímu a současně nejznámějšímu rotačnímu tělesu - válci. V předešlém článku jsme získali nejdůležitější informace o tom, jak rotační válec vzniká, jak vypadá, z jakých částí se skládá a jaký má význam pro praktický život.

Už v 8. třídě základní školy, kdy jsme se s válcem potkali poprvé, nás pan učitel či paní učitelka naučil(a) jisté vzorce, které i dnes umíme používat k výpočtu objemu válce, obsahu jeho pláště a povrchu. A právě na ně se teď společně zaměříme, více je poznáme a prozkoumáme z pohledu matematické analýzy.

3.1 Objem válce

Jak jsme již zjistili, válec získáme rotací obdélníku (čtverce) kolem dané přímky. Za osu rotačního válce (stejně i u dalších těles) budeme považovat osu x kartézské souřadnicové soustavy $0xy$. Plocha rotujícího obdélníku je potom omezena osou x, grafem lineární funkce $y = q$ definované na intervalu $\langle 0, v \rangle$, kde v je výška válce, osou y a samozřejmě přímkou o rovnici $x = v$. (Viz obr. 3.1)



obr.3.1

Za těchto podmínek plyne ze vzorce (1.13) vztah pro objem válce $V = \pi \int_0^v q^2 dx = \pi q^2 [x]_0^v = \pi q^2 v$. Položíme-li $q = r$, dostaneme vzorec v konečné podobě

$$V = \pi r^2 v. \tag{3.1}$$

Důležité: Ze vzorce (3.1) je zřejmé, že objem libovolného rotačního válce závisí na jeho výšce v a poloměru r jeho kruhových podstav, tzn.: změní-li se velikost r

a výšky *v*, změní se také jeho objem. Zvětšením či zmenšením výšky se změní horní mez integrálu funkce $y = q$.

Tuto skutečnost si lépe uvědomíme při řešení následujícího příkladu.

Příklad 1

O kolik procent se zvětší objem válce, jestliže se jeho poloměr zvětší o 10% a jeho výška o 20%?

Řešení: Máme dán původní válec o výšce *v*, jehož kruhové podstavy mají poloměr *r*. Zvětšíme-li parametry *r,v* v souladu s podmínkami zadání, budou mít podstavy nového válce poloměr $s = 1{,}1r$ a výška válce $h = 1{,}2v$. Takový válec vznikne rotací obdélníku ohraničeného osami *x, y*, grafem funkce $y = 1{,}1r$ a přímkou $x = 1{,}2v$ kolem osy *x*.

Pro jeho objem V_n platí $V_n = \pi \int_0^{1{,}2v} (1{,}1r)^2 dx$

Výpočet: $\pi \int_0^{1{,}2v} (1{,}1r)^2 dx = 1{,}21\pi r^2 [x]_0^{1{,}2v} = 1{,}21\pi r^2 \cdot 1{,}2v = 1{,}452\pi r^2 v$

Objem V_p původního válce byl pochopitelně $V_p = \pi r^2 v$. V_n tak představuje 145,2% V_p, a proto je $145{,}2\% - 100\% = 45{,}2\%$

Odpověď: Objem válce se zvětší o 45,2%.

Postupem, kterým jsme odvodili vzorec (3.1), můžeme kromě klasických školních úloh řešit i různé příklady z technické praxe, které se někdy prolínají s fyzikou nebo s některou z jejich oblastí.

Příklad 2

Určete hmotnost 5 *m* dlouhé roury, jejíž vnější průměr je 35 *mm*, vnitřní průměr 26 *mm* a hustota ρ materiálu, z něhož je zhotovena, je 7800 $kg \cdot m^{-3}$.

Řešení: Daná roura je tvořena 2 válci, které mají společnou výšku $v = 5$ *m*, ale různé poloměry podstav. Abychom mohli určit hmotnost *m* roury, potřebujeme znát její objem *V*. Hodnotu objemu pak dosadíme do vztahu pro výpočet hmotnosti $m = \rho \cdot V$. Objem *V* spočítáme odečtením objemu V_2 užšího válce od objemu V_1 širšího válce.

Vztahy pro určení V_1, V_2: $\begin{aligned} V_1 &= \pi\int_0^5 \frac{49}{160000}dx \\ V_2 &= \pi\int_0^5 \frac{169}{1000000}dx \end{aligned}$ vycházejí z úvahy v předchozí části textu.

<u>Výpočet:</u> *1.způsob:*

$$V_1 = \pi\int_0^5 \frac{49}{160000}dx = \pi\frac{49}{160000}\left[x\right]_0^5 = \frac{5\cdot 49\pi}{160000} = \frac{245\pi}{160000}\ m^3$$

$$V_2 = \pi\int_0^5 \frac{169}{10^6}dx = \pi\frac{169}{10^6}\left[x\right]_0^5 = \frac{5\cdot 169\pi}{10^6} = \frac{845\pi}{10^6}m^3$$

$$V = V_1 - V_2 = \frac{245\pi}{16\cdot 10^4} - \frac{845\pi}{10^6} = \frac{24500\pi - 13520\pi}{16\cdot 10^6} = \frac{10980\pi}{16\cdot 10^6}m^3$$

$$m = 7800\cdot\frac{10980\pi}{16\cdot 10^6} = 16{,}816kg$$

2.způsob:

$$V = \pi\int_0^5 \frac{49}{16\cdot 10^4}dx - \pi\int_0^5 \frac{169}{10^6}dx = \pi\left(\int_0^5 \frac{49}{16\cdot 10^4}dx - \int_0^5 \frac{169}{10^6}dx\right) = \pi\int_0^5\left(\frac{49}{16\cdot 10^4} - \frac{169}{10^6}\right)dx =$$

$$= \pi\cdot\frac{2196}{16\cdot 10^6}\cdot\left[x\right]_0^5 = \frac{10980\pi}{16\cdot 10^6}m^3$$

$$m = 7800\cdot\frac{10980\pi}{16\cdot 10^6} = 16{,}816kg$$

<u>Odpověď:</u> Hmotnost roury je přibližně 16,816 *kg*.

3.2 Obsah pláště

Obsah pláště rotačního válce můžeme určit poměrně snadno jako obsah obdélníku, jehož jedna strana je rovna velikosti obvodu podstavy a druhá velikosti výšky tělesa. Obsah pláště je potom $S_{pl} = o\cdot v$. V první kapitole jsme si uvedli vztah pro výpočet obvodu kruhu ($o = 2\pi r$). Lze tedy psát $S_{pl} = 2\pi rv$. (3.2)

K hodnotě S_{pl} jsme s to dospět, i když si v danou chvíli na $o = 2\pi r$ nevzpomeneme. Podle věty 1.5 je totiž obsah pláště libovolného rotačního tělesa $S_x = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$.

Pro válec máme $S_{pl} = 2\pi\int_0^v q\cdot\sqrt{1+0^2}\,dx = 2\pi q\cdot[x]_0^v = 2\pi qv$ a opět, je-li $q = r$, je $S_{pl} = 2\pi rv$.

Příklad 3

Osovým řezem válce je čtverec o obsahu $56{,}25\,cm^2$. Vypočítejte obsah jeho pláště.

Řešení: Jedná se o rovnostranný válec vzniklý rotací čtverce kolem osy *x*. Protože u rovnostranného válce je $2r = v$ a protože v našem případě $2r = v = \sqrt{56{,}25} = 7{,}5\,cm$, je daný čtverec omezen přímkou $y = 3{,}75$, osami *x,y* a přímkou $x = 7{,}5$.

$$S_{pl} = 2\pi\int_0^{7,5} 3{,}75\cdot\sqrt{1+0^2}\,dx$$

Výpočet: $S_{pl} = 2\pi\int_0^{7,5} 3{,}75\cdot\sqrt{1+0^2}\,dx = 2\pi\cdot 3{,}75\cdot[x]_0^{7,5} \doteq 176{,}715\,cm^2$

Odpověď: Obsah pláště daného válce je zaokrouhleně $176{,}715\,cm^2$.

3.3 Povrch

Tvrzení 3.1 Pro výpočet povrchu *P* rotačního válce platí

$$P = 2\pi r\cdot(v + r). \tag{3.3}$$

Chápeme-li povrch rotačního válce jako součet obsahů obou jeho kruhových podstav s obsahem pláště, můžeme pravdivost tvrzení ověřit důkazem. Konstrukci důkazu pak provedeme ve třech krocích:

(1) Nejdříve musíme určit obsah jedné kruhové podstavy. Při určování obsahu kruhu $k(S;r)$ je vhodné rozlišit 2 případy: a) $S = [0,0]$

b) $S = [m,n]$

ad a) Plochu kruhu omezují křivky $y=\sqrt{r^2-x^2}$, $y=-\sqrt{r^2-x^2}$ a jeho obsah je (dle1.11)

$$|S|=2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx=2\left[\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{r^2-x^2}+\frac{1}{2}r^2\cdot\arcsin\frac{x}{r}\right]_{-r}^{r}=$$

$$=2\left[\left(\frac{r^2}{2}\cdot\arcsin 1\right)-\left(\frac{r^2}{2}\cdot\arcsin(-1)\right)\right]=2\left[\left(\frac{r^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)-\left(\frac{r^2}{2}\cdot\frac{(-\pi)}{2}\right)\right]=2\cdot\frac{\pi r^2}{2}=\pi r^2$$

ad b) V tomto případě je plocha půlkruhu omezena jednak křivkou $y=\sqrt{r^2-(x-m)^2}+n$ a jednak grafem konstantní funkce $y=n$ na intervalu $\langle m-r, m+r\rangle$. Obsah S je tedy

$$S=2\left[\left(\int_{m-r}^{m+r}\sqrt{r^2-(x-m)^2}+n\right)dx-\left(\int_{m-r}^{m+r}n\right)dx\right]=2\left(\frac{\pi r^2}{2}+2nr-2nr\right)=\pi r^2$$

(Analogicky jako u ad a)

Tím jsme jednoznačně prokázali, že obsah kruhu závisí pouze na jeho poloměru, konstantě π a nikoliv na středu *S*.

(2) Odvození výpočtu obsahu pláště($S_{pl}=2\pi rv$) jsme již ukázali v článku 3.2.

(3) $P=S_{pl}+2S=2\pi rv+2\pi r^2=2\pi r\cdot(v+r)$, což dokazuje platnost tvrzení.

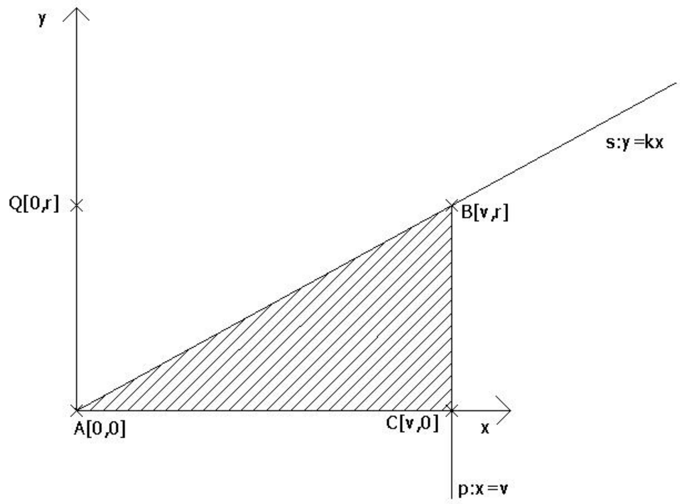
4 Rotační kužel

Dalším tělesem, kterým se budeme zabývat, je rotační kužel. Možná si někteří z vás, podobně jako kdysi já, položili otázku: „Proč je objem rotačního kužele o poloměru r jeho podstavy a o výšce v roven zrovna $\frac{1}{3}$ objemu válce o stejné výšce a o stejném poloměru podstav?“ Taková otázka je zcela oprávněná, je naprosto logická a nabízí se již při prvním střetnutí se vzorcem pro určení objemu kužele. Odpověď na tuto otázku a stejně tak i na některé další získáte prostudováním následujících řádků této kapitoly.

4.1 Objem kužele

Z kapitoly 2.2 víme, jak toto těleso vzniká.

Uvažovaný trojúhelník je tvořen 2 odvěsnami a 1 přeponou. Jednou jeho odvěsnou je úsečka o délce v, jenž náleží ose x, kde v představuje výšku rotací vznikajícího kužele. Druhou odvěsnou je úsečka o délce r, kde r je poloměr vznikajícího kužele, jejímiž krajními body jsou $C = [v,0], B = [v,r]$, které náleží přímce $p: x = v$. Přeponou je pak úsečka AB, kde $A = [0,0], B = [v,r]$. Tato úsečka náleží přímce s, která je grafem lineární funkce $y = kx$ definované na intervalu $I = \langle 0, v \rangle$. (Viz obr. 4.1).



obr.4.1

Dále víme, že objem libovolného rotačního tělesa je dán vztahem (1.13).

Nezbývá nám tedy nic jiného, než do tohoto vztahu dosadit potřebné údaje. Po dosazení pak máme: $V = \pi \int_0^v \left(\frac{r}{v} \cdot x \right)^2 dx = \pi \cdot \left[\frac{r^2}{v^2} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^v = \pi \cdot \frac{r^2 v^3}{3v^2} - 0 = \frac{\pi r^2 \cdot v}{3}$

a tedy $V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot v$ (4.1)

Poznámka na dokreslení

Rovnici přímky lze vyjádřit ve směrnicovém tvaru $y = kx + q$, kde *k* je tzv. směrnice, pro níž platí $k = tg\varphi$ (φ je úhel, který svírá daná přímka s kladnou poloosou *x*), a proto je v našem případě $k = \frac{r}{v}$. A protože přímka *s* prochází počátkem KSS, je $q = 0$.

Uvedenou úvahou se nyní pokusíme vyřešit klasickou úlohu pro ZŠ.

Příklad 1

Vypočítejte objem rotačního kužele, je-li obvod jeho podstavy 125,6 *cm*
a strana *s* má délku 25 *cm*.

<u>Řešení:</u> Daný kužel získáme rotací takového pravoúhlého trojúhelníku *ABC*, jehož odvěsna *BC* má délku $r = \frac{125{,}6}{2\pi}$, což je přibližně 20 *cm* a odvěsna *AC* je délky $v = \sqrt{25^2 - 20^2}$, tedy $|AC| = 15\,cm$ a jehož přeponou je strana $c = AB$ o délce 25 *cm*, přičemž $c \subset s$.

Přímku *s* lze za těchto okolností popsat rovnicí $y = \frac{4}{3}x$.

Hodnotu objemu *V* již snadno zjistíme dosazením do vzorce 1.13 a vyřešením daného integrálu.

<u>Výpočet:</u> $V = \pi \int_0^{15} \left(\frac{4}{3} x \right)^2 dx = \pi \cdot \left[\frac{16}{9} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^{15} = \pi \cdot \frac{16 \cdot 15^3}{27} = 6283 cm^3$

<u>Odpověď:</u> Objem rotačního kužele je přibližně 6283 cm^3.

4.2 Obsah pláště

Při odvozování vzorce pro výpočet budeme uvažovat tak, že se na celé těleso rotačního kužele podíváme jako na objekt vzniklý rotací pravoúhlého trojúhelníku kolem osy *x* (viz předchozí úvaha v kap. 4.1). Dosazením do vzorce (1.14), který je univerzálním vztahem pro výpočet obsahu pláště rotačních těles, a vyřešením integrálu dostaneme vzorec, kterým lze spočítat obsah pláště rotačního kužele. Dosazením dostáváme $S_{pl} = 2\pi \int_0^v \frac{r}{v} x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{r}{v}\right)^2} dx = 2\pi \int_0^v \frac{r}{v} x \cdot \sqrt{\frac{v^2 + r^2}{v^2}}$ a protože $\sqrt{v^2 + r^2} = s$,je

$$S_{pl} = 2\pi \cdot \left[\frac{r \cdot s}{v^2} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^v = 2\pi \cdot \left(\frac{r \cdot s}{v^2} \cdot \frac{v^2}{2} - 0 \right) = \frac{2\pi rs}{2} = \pi r \cdot s \qquad (4.2)$$

Výhodou tohoto pohledu je získání vztahu (4.2), pomocí něhož můžeme spočítat obsah pláště rotačního kužele, jenž závisí přímo úměrně na délce strany *s* a na poloměru *r* podstavy, rychle a snadno.

V následujícím příkladu, resp. při jeho řešení, si více přiblížíme praktické využití výše uvedeného postupu.

Příklad 2

Vypočítejte obsah pláště rotačního kužele o výšce $v = 10\,cm$, jehož strana *s* má od roviny podstavy odchylku 30°.

Řešení: Tento kužel vznikne rotací pravoúhlého trojúhelníku, jehož plocha je ohraničena odvěsnou $v = 10\,cm$, odvěsnou r a přeponou s (stejná úvaha jako u objemu). Přeponu *s* můžeme popsat rovnicí $y = kx$, kde $k = \frac{r}{v}$.

Dále platí :

(1) $\sin 30^\circ = \frac{10}{s}$, odtud $s = \frac{10}{\sin 30^\circ} = 20\,cm$

(2) $r = \sqrt{20^2 - 10^2}$, odtud $r = 10\sqrt{3}\ cm$

Přepona *s* je tedy grafem lineární funkce $y = \sqrt{3}x$ definované na intervalu $I = \langle 0,10 \rangle$.

Pro obsah pláště pak platí:

$$S_{pl} = 2\pi \int_0^{10} \sqrt{3}x \cdot \sqrt{1+3}dx$$

Výpočet: $S_{pl} = 2\pi \int_0^{10} \sqrt{3}x \cdot \sqrt{1+3}dx = 2\pi \cdot \left[2\sqrt{3} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^{10} = 2\pi \cdot \frac{200\sqrt{3}}{2} = \pi \cdot 200\sqrt{3}cm^2$

Odpověď: Obsah pláště daného rotačního kužele je $\pi \cdot 200\sqrt{3}cm^2$, tj. přibližně $1088{,}28\,cm^2$

4.3 Povrch

Povrchem P rotačního kužele rozumíme součet hodnoty obsahu jeho pláště a obsahu jeho kruhové podstavy.

Pro povrch P potom platí

$$P = \pi r^2 + \pi r s = \pi r \cdot (r + s) \qquad (4.3)$$

5 Komolý rotační kužel

Jestliže jsme v předešlé kapitole popisovali vznik tělesa rotačního kužele, strategii odvozování vzorců pro výpočet jeho objemu, obsahu pláště a povrchu, pak musíme hovořit i o komolém rotačním kuželu a ve stejném duchu jej prozkoumat.

S tímto tělesem již máme poměrně bohaté zkušenosti, které jsme získali při řešení různých matematických, respektive různých matematických stereometrických úloh na SŠ, přičemž mnohé z těchto zkušeností máme draze zaplacené – například špatnými známkami z písemek a testů na toto téma, a to jen díky nedostatkům a chybám, kterých jsme se při řešení dopustili někdy jen z pouhé nepozornosti, ale častěji a více v důsledku nepochopení některých zásadních principů řešení či postupů výpočtů a nepřesností při dosazení do vzorců, jež jsme si mnohdy i špatně zapamatovali nebo se je naučili chybně. Ovšem je to velice individuální, každý máme s touto problematikou jiné zkušenosti a i vztah k ní je u studentů, učitelů a fanoušků matematiky odlišný.

Jsem však toho názoru, a možná i někteří z vás - čtenářů se mnou budou souhlasit, že komolý rotační kužel je těleso přece jen trochu jiné a náročnější než předchozí rotační tělesa, stejně tak i úlohy, které se k němu vztahují a vzorce užívané při jejich řešení.

Pevně věřím v to, že Vám vyšší matematika obsažená i v tomto textu poslouží jako dobrý pomocník a rádce pro hlubší a lepší pochopení jak podstaty řešení takovýchto úloh, tak postupů nutných výpočtů a hlavně podstaty vzniku potřebných vzorců.

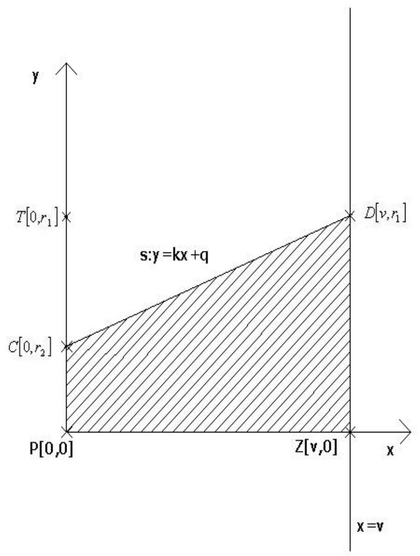
5.1 Objem tělesa

Víme, že pro objem libovolného rotačního tělesa platí:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx .$$

Dále víme, že komolý rotační kužel vznikne rotací pravoúhlého lichoběžníku kolem osy *x*. Daný lichoběžník pak ohraničuje osa x $(y = 0)$, osa y $(x = 0)$, přímka o rovnici $x = v$ a hlavně úsečka $s: y = kx + q$, která prochází body $C = [0, r_2]; D = [v, r_1]$ (viz obr.5.1), přičemž funkce $y = kx + q$ je definována na intervalu $\langle 0, v \rangle$.

Ta základní úvaha je naprosto stejná jako u předchozích těles.



obr.5.1

Do vztahu $V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$ dosadíme za $f(x): y = kx + q$, přičemž $q = r_2$ a $k = \frac{r_1 - r_2}{v}$

Po tomto dosazení dostáváme:

$$V = \pi\int_0^v \left(\frac{r_1 - r_2}{v}x + r_2\right)^2 dx = \pi\int_0^v \left[\frac{(r_1 - r_2)^2}{v^2}x^2 + 2r_2x\cdot\frac{(r_1 - r_2)}{v} + r_2{}^2\right]dx,$$

odtud

$$V = \pi\cdot\left[\frac{(r_1 - r_2)^2}{v^2}\cdot\frac{x^3}{3} + 2r_2\cdot\frac{(r_1 - r_2)}{v}\cdot\frac{x^2}{2} + r_2{}^2x\right]_0^v = \pi\cdot\left[\frac{(r_1 - r_2)^2}{3}\cdot v + r_2\cdot(r_1 - r_2)\cdot v + r_2{}^2v\right] =$$

$$\frac{1}{3}\pi v\cdot(r_1{}^2 - 2r_1r_2 + r_2{}^2 + +3r_2r_1 - 3r_2{}^2 + 3r_2{}^2) = \frac{1}{3}\pi v\cdot(r_1{}^2 + r_1r_2 + r_2{}^2)$$

(5.1)

Příklad 1

Na základě získaných poznatků určete objem komolého rotačního kužele, který má podstavy s průměry $d_1 = 250\,cm$ a $d_2 = 86\,cm$. Odchylka strany s od roviny podstavy je $53^\circ 18'$.

Řešení: Daný komolý kužel vznikne rotací lichoběžníku ohraničeného souřadnicovými osami, přímkou $x = v$ a úsečkou $y = kx + q$, kde $k = \frac{r_1 - r_2}{v}$ a kde $q = r_2$. Je tedy potřeba určit v a k. :

a)Výšku v určíme jako $tg53^\circ\,18'\cdot 82$, odtud $v = 110\,cm$ (zaokrouhleno na celé číslo)

b) $k = \dfrac{125-43}{110} = 0{,}745$(zaokrouhleno na 3 desetinná místa)

c) Daný lichoběžník je tedy ohraničen jednak těmi souřadnicovými osami, jednak přímkou $x = 110$ a také úsečkou $y = 0{,}745x + 43$, která prochází body $C = [0{,}43]$a $D = [110{,}125]$

Vše potřebné již máme a můžeme tedy přejít k samotnému výpočtu objemu.

<u>Výpočet:</u> $V = \pi \int\limits_0^{110} (0{,}745x + 43)^2 dx = \pi \int\limits_0^{110} 0{,}555025x^2 + 64{,}07x + 1849dx =$

$$= \pi \cdot \left[0{,}555025 \cdot \frac{x^3}{3} + 64{,}07 \cdot \frac{x^2}{2} + 1849x \right]_0^{110} =$$

$$= \pi \cdot \left(0{,}555025 \cdot \frac{110^3}{3} + 64{,}07 \cdot \frac{110^2}{2} + 1849 \cdot 110 \right) - 0 =$$

$$= \pi \cdot 837259{,}5917 = 2630328{,}582 cm^3$$

<u>Odpověď:</u> Objem daného komolého rotačního kužele je přibližně $2630328{,}582\,cm^3$.

5.2 Obsah pláště

Pro obsah pláště rotačního tělesa platí: $S_{pl} = 2\pi \int\limits_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + \left[f^{(1)}(x)\right]^2}\, dx$ a stejným stylem, kterým jsme odvodili vzorec (5.1), odvodíme:

$$S_{pl} = 2\pi \int\limits_0^v \left[\left(\frac{r_1 - r_2}{v} \right) x + r_2 \right] \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{r_1 - r_2}{v} \right)^2} dx = 2\pi \int\limits_0^v \left[\left(\frac{r_1 - r_2}{v} \right) x + r_2 \right] \cdot \sqrt{\frac{v^2 + (r_1 - r_2)^2}{v^2}} dx =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^v \left(\frac{r_1 - r_2}{v} x + r_2 \right) \cdot \frac{s}{v} dx = 2\pi \int\limits_0^v \frac{s}{v} \cdot \frac{r_1 - r_2}{v} x + \frac{r_2 \cdot s}{v} dx = 2\pi \cdot \left[\frac{x^2}{2} \cdot \frac{s \cdot (r_1 - r_2)}{v^2} + \frac{r_2 s}{v} x \right]_0^v =$$

$$2\pi \cdot \left[\left(\frac{v^2}{2} \cdot \frac{s \cdot (r_1 - r_2)}{v^2} + \frac{r_2 s}{v} \cdot v \right) - 0 \right] = 2\pi \cdot \left(\frac{s \cdot (r_1 - r_2)}{2} + r_2 s \right) = 2\pi \cdot \left(\frac{s r_1 - s r_2}{2} + r_2 s \right) =$$

$$2\pi \cdot \frac{s r_1 + s r_2}{2} = \pi \cdot (s r_1 + s r_2) = \pi s \cdot (r_1 + r_2) \tag{5.2}$$

Příklad 2

U příkladu 1 kap. 5.1 určete obsah pláště komolého rotačního kužele a délku jeho strany *s*.

<u>Řešení: (</u>Viz **Příklad 1)**

Výpočet: $S_{pl} = 2\pi \int_0^{110} \left(\frac{41}{55} x + 43 \right) \cdot \sqrt{1 + \frac{1681}{3025}} dx = 2\pi \int_0^{110} \sqrt{1 + \frac{1681}{3025}} \cdot \frac{41}{55} x + \sqrt{1 + \frac{1681}{3025}} \cdot 43 dx =$

$$= 2\pi \cdot \left[0{,}929789075 \cdot \frac{x^2}{2} + 53{,}63295521 x \right]_0^{110} = 72412{,}76176 cm^2$$

Délka strany s: $s = \sqrt{110^2 + (125 - 43)^2} = 137{,}2005831 cm$

Odpověď: Obsah pláště je zhruba $72412{,}76176 cm^2$ a délka strany s je přibližně $137{,}2005831 cm$.

5.3 Povrch

Pro povrch P komolého rotačního kužele platí:
$P = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + S_{pl}$ a protože $S_{pl} = \pi s \cdot (r_1 + r_2)$, je

$$P = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi s \cdot (r_1 + r_2) \tag{5.3}$$

6 Koule

Koule, to je poslední rotační těleso, kterým se ve své práci zabývám. Kromě toho, že se jedná o poslední těleso ze skupiny základních rotačních těles, tak je to také těleso ze všech těles této skupiny nejzajímavější.

Koule je zajímavá nejen pro svůj dokonale zaoblený tvar bez vrcholů, hran a podstav, ale i pro některé další zvláštnosti zejména při určování jejich parametrů – hlavně objemu a povrchu. Těchto zvláštností si všimneme už při čtení zápisů oněch vzorců, a nejen my, studenti matematiky, ale i někteří bystří žáci SŠ. A právě to mohu doložit jednou skutečnou příhodou:

Při výuce matematiky, někdy ke konci druhého pololetí ve druhém ročníku na jedné nejmenované SŠ, probíral vyučující v rámci tématu stereometrie kouli.

Po tom, co vyložil obecné informace a vysvětlil odlišnosti od ostatních těles, zmínil dva vzorce, a sice vzorec pro výpočet objemu a vzorec pro výpočet povrchu koule. Jako první napsal na tabuli $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ (vzorec pro výpočet objemu). V tom okamžiku zvedl ruku žák sedící v první lavici a poté, co mu bylo učitelem dáno slovo, vznesl dotaz: „Pane profesore, (tehdy ještě běžné oslovení tamního středoškolského učitele) nemáte v tom vzorci chybu? Nemá tam být místo $\frac{4}{3}\pi r^3$ náhodou $\frac{3}{4}\pi r^3$?“

Učitel odpověděl: „Ne, ten vzorec je napsán správně, opravdu jsou tam $\frac{4}{3}$.“

Na to žák reagoval: „To je nějaké divné, $\frac{4}{3}$, takové zvláštní číslo ve vzorečku, $\frac{3}{4}$ by vypadaly lépe. Proč tam jsou zrovna ty $\frac{4}{3}$?“

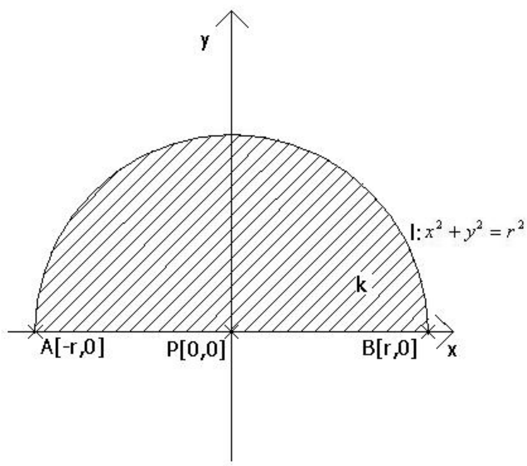
Po této žákově otázce se učitel na dobrých třicet sekund odmlčel, ale nakonec popadl dech a odpověděl: „No, totiž celá ta problematika odvozování těch vzorců je poměrně složitá. Abych mohl na tu otázku jednoznačně a přesně odpovědět, museli byste umět počítat derivace a hlavně pak integrály, což samo o sobě je dost těžké. Zde jsme to neprobírali a do konce vašeho studia ani probírat nebudeme. Takže nemá význam se tímto až tak podrobně zabývat. Po vás chci jen to, abyste se ten vzorec naučili a uměli jej použít při řešení příkladů, což si ukážeme za chvíli.“ Dále pokračoval učitel slovy: „Stejně tak by jste se mohli ptát i na ten další vzorec $P = 4\pi r^2$. Jak to, že povrch koule představuje 4 - násobek plochy kruhu o poloměru r dané koule? Ale i na takový dotaz bych musel odpovědět stejně.“

Tolik příhoda a nyní si zkusme jen na okamžik představit, že by ten žák na konci druhého ročníku uměl derivovat a počítat jednoduché integrály (určité i neurčité). Ta představa, myslím, není nereálná. Vždyť po úspěšném absolvování prvního ročníku a prvního pololetí druhého ročníku žáci znají celou lineární i kvadratickou funkci, umí upravovat výrazy s logaritmy, řešit logaritmické, exponenciální i goniometrické rovnice a nerovnice. Znají tedy všechny důležité funkce, a dokonce mají i základní znalosti z planimetrie. Proč tedy na to nenavázat limitami, derivacemi a integrály? Zvládli by to? Pochopili by to? Osobně věřím, že ano, ale to je možná odvážné tvrzení a položené otázky jsou nepochybně předmětem dlouhé diskuse.

Ať už to je, nebo není možné, představme si, že by to žák z naší příhody uměl. Pak by ta jednoznačná přesná odpověď pana učitele mohla vypadat například takto:

6.1 Objem koule

Mějme dán souřadnicový systém *Oxy* a půlkruh *k*. Pro jednoduchost budeme uvažovat půlkruh *k* se středem v počátku $P = [0,0]$ souřadnicového systému a s poloměrem *r*. Plochu půlkruhu pak ohraničuje úsečka $AB \in x$, kde $A = [-r,0]$, $B = [r,0]$, přičemž $|AB| = 2r$ a křivka $l : x^2 + y^2 = r^2$ neboli $l : y = \sqrt{r^2 - x^2}$. (Viz obr. 6.1)



obr.6.1

Samotná koule pak vznikne rotací tohoto půlkruhu kolem osy *x*.

Objem V jakéhokoliv rotačního tělesa, tedy i koule, je dán jako $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$.

Mluvíme - li o objemu koule, pak *f(x)* je $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ definovaná na intervalu $I = \langle -r, r \rangle$, proto je $a = -r, b = r$. Pro objem

V potom platí:

$$V = \pi \cdot \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \cdot \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx = \pi \cdot \left(\int_{-r}^{r} r^2 dx - \int_{-r}^{r} x^2 dx \right)$$

$$= \pi \cdot \left(\left[r^2 x\right]_{-r}^{r} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} \right) = \pi \cdot \left(2r^3 - \frac{2r^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad (6.1)$$

Poznámka Ze vzorce (6.1) je patrná závislost objemu koule na jejím poloměru. Pouze na poloměru *r* závisí objem koule a to přímo úměrně. Objem koule nezávisí na jejím prostorovém umístění, resp. na prostorovém umístění jejího středu.

Při řešení úloh na toto téma je výhodné odvozený vzorec (6.1) znát. V opačném případě bychom museli uplatnit stejný postup jako při jeho odvozování, tentokrát však již s dosazením konkrétních čísel a následným vyřešením integrálu.

A právě jeden takový příklad si nyní ukážeme:

Příklad 1

Ozdobná žulová koule má obvod svého největšího průřezu $1{,}57\,m$. Jaká je hmotnost koule?

Řešení: 1. Nejdříve určíme objem dané koule:

a) Zjistíme poloměr *r* ze vzorce pro obvod kruhu $o = 2\pi r$. Je-li $o = 1{,}57$, potom je $r = 0{,}25$ (zaokrouhleno)

b) Danou kouli získáme rotací půlkruhu *k* se středem například v počátku KSS a poloměrem $r = 0{,}25$, jehož plocha je ohraničena úsečkou $AB \in x$, kde $A = [-0{,}25{,}0], B = [0{,}25{,}0]$ a křivkou $l: y = \sqrt{0{,}25^2 - x^2}$ kolem osy *x*.

c) $V = \pi \int_{-0{,}25}^{0{,}25} \left(\sqrt{0{,}25^2 - x^2}\right)^2 dx$

2. Určíme hmotnost koule podle vztahu $m = \rho \cdot V$, kde ρ je hustota materiálu.

V našem případě je $\rho = 2800 kg \cdot m^{-3}$

Výpočet:

1. $V = \pi \int\limits_{-0,25}^{0,25} \left(\sqrt{0,25^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int\limits_{-0,25}^{0,25} \left(0,0625 - x^2\right) dx = \pi \cdot 0,020833333 = 0,065449846 m^3$

2. $m = 2800 \cdot 0,065449846 = 183,26\, kg$ (zaokrouhleno na 2 desetinná místa).

Odpověď: Hmotnost koule je přibližně 183,26 *kg*.

6.2 Povrch

V případě koule není potřeba rozlišovat pojmy - obsah pláště a povrch, neboť jde o těleso bez podstav. Obsah pláště je zároveň povrchem.

Aplikovat budeme tutéž úvahu jako u odvození výpočtu objemu. Rozdíl je jen v použitém vztahu. Zatímco byl pro odvození vzorce (6.1) použit vztah $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x) dx$, pro odvození výpočtu povrchu použijeme vztah $S_{pl} = 2\pi \int\limits_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + \left[f^{(1)}(x)\right]^2} dx$, kde $f^{(1)}(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$.

Po dosazení máme:

$$S_{pl} = P = 2\pi \int\limits_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left[\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right]^2} dx =$$

$$= 2\pi \int\limits_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 2\pi \int\limits_{-r}^{r} r dx = 2\pi \cdot [rx]_{-r}^{r} = 2\pi \cdot \left(r^2 + r^2\right) = 4\pi r^2 \qquad (6.2)$$

Poznámka I hodnota povrchu koule je přímo úměrně závislá na poloměru *r* a i při řešení těchto úloh je výhodné si vzorec (6.2) zapamatovat. Pakliže se tak nestane, můžeme úlohy vyřešit tím samým způsobem, jakým jsme vzorec (6.2) odvodili.

Tímto způsobem jsme schopni řešit i komplikovanější úlohy, ve kterých je potřeba povrch koule vypočítat.

Jedno z takových možných zadání může znít:

Příklad 2

Je dána koule o poloměru $r = 6\ dm.$ Určete poloměr podstavy rotačního kužele, jehož výška je r a jehož povrch se rovná povrchu dané koule.

Řešení: 1. Určíme povrch P koule pomocí výše uvedeného postupu

2. Zjistíme poloměr u rotačního kužele z rovnosti $P = \pi u \cdot (u + s)$, kde pravá strana rovnice představuje povrch rotačního kužele o poloměru u podstavy. Celá rovnost je matematickým zápisem první podmínky zadání: „Povrch kužele je roven povrchu dané koule“.

Z 2. podmínky: „výška kužele je r“ plyne $s = \sqrt{36 + u^2}$, odtud je pak $P = \pi u \cdot \left(u + \sqrt{36 + u^2}\right)$

Výpočet:

1.

$$P = 2\pi \int_{-6}^{6} \sqrt{36 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left[\frac{-x}{\sqrt{36 - x^2}}\right]^2}\, dx = 2\pi \int_{-6}^{6} \sqrt{36 - x^2} \cdot \frac{6}{\sqrt{36 - x^2}}\, dx = 2\pi \cdot [6x]_{-6}^{6} = 2\pi \cdot 72 = 144\pi$$

2. $144\pi = \pi u \cdot \left(u + \sqrt{36 + u^2}\right)$ po úpravě $\frac{20736}{u^2} = 324$ a odtud $u = 8\ dm$

Odpověď: Poloměr podstavy rotačního kužele je 8 dm.

To je vše k problematice objemu a povrchu koule.

Vrátím-li se k našemu žákovi z úvodní příhody, pak jsem toho mínění, že by mu text obsažený v kapitolách 6.1 a 6.2 při základních znalostech derivování a integrování, jako odpověď na jeho otázky, stačil.

6.3 Části koule a kulové plochy

Zde si povíme ještě něco o částech koule a kulové plochy, resp. o určování jejich objemů a obsahů. Stručný přehled jsme si nastínili již v kapitole 2.3.1, kde jsme si je definovali a vysvětlili, jak vznikají.

Na části koule se můžeme také dívat jako na samostatná rotační tělesa, neboť je dostaneme, kromě řezů koule rovinami, i rotací jistých ohraničených rovinných útvarů kolem osy x.

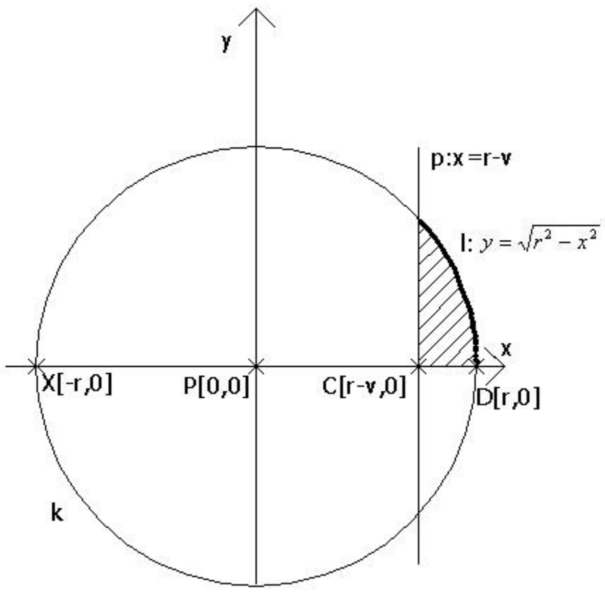
Stejně jako u celé koule můžeme i u jejich částí počítat objem a obsah pláště (ten je zároveň obsahem příslušné části kulové plochy) podle vzorců.

Nedá se však říct, že jsou to samostatná rotační tělesa jako např. kužel nebo válec. Jsou to jen části toho hlavního tělesa, kterým je koule, a proto si je nebudeme rozebírat úplně všechny. Pro zajímavost uvedeme a rozebereme jen jednu z nich a sice kulovou úseč.

6.3.1 Objem kulové úseče

Na obrázku 6.2 vidíme vyšrafovanou část plochy kruhu $k(P,r)$, kde P je počátek souřadnicového systému. Plocha obrazce je ohraničena přímkou $p: x = r - v$, úsečkou $CD \in x,$ kde $C = [r - v, 0], D = [r, 0]$, přičemž $|CD| = v$ představuje výšku rotací vznikajícího tělesa a křivkou *l*, která je grafem funkce $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ definované na intervalu $I = \langle r - v, r \rangle$.

Rotací vyšrafované oblasti kolem osy *x* získáme kulovou úseč, která je částí koule o poloměru *r*.



obr.6.2

Objem *V* úseče je pak:

$$V = \pi \int_{r-v}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \cdot \left(\left[r^2 x\right]_{r-v}^{r} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{r-v}^{r} \right) = \pi \cdot \left(r^2 v - \frac{3r^2 v - 3rv^2 + v^3}{3} \right) = \pi r v^2 - \frac{\pi v^3}{3} =$$

$$= \frac{1}{3}\pi v^2 \cdot (3r - v) \tag{6.3}$$

Poznámka K tomu, abychom mohli určit objem kulové úseče, potřebujeme znát poloměr koule, ze které je „uříznuta“ a výšku úseče. Dosazením do vzorce (6.3) a následným výpočtem získáme hodnotu objemu.

V úlohách však nemíváme často zadán poloměr r koule, ale poloměr r_1 podstavy úseče. Pro tyto případy najdeme v literatuře jiný vzorec a sice

$$V = \frac{\pi v}{6} \cdot \left(3r_1^2 + v^2\right), \tag{6.4}$$

který můžeme přímo, pokud si jej pamatujeme, použít.

Není to ale nutné. I k tomuto vzorci jsme s to dojít pomocí vzorce (6.3), který buď známe, nebo odvodíme. Tohle tvrzení je však vhodné podložit důkazem:

Důkaz: (1) Pro *r, v* a r_1 platí: $r^2 - (r - v)^2 = r_1^2$. Rovnost je zřejmá již z obr. 6.2

(2) Vyjádřením r z rovnice je $r = \dfrac{r_1^2 + v^2}{2v}$

(3) Výraz $\dfrac{r_1^2 + v^2}{2v}$ dosadíme do vzorce (6.3)

Objem je potom $V = \dfrac{1}{3}\pi v^2 \cdot \left(3 \cdot \dfrac{r_1^2 + v^2}{2v} - v\right) = \dfrac{\pi v^2}{3} \cdot \dfrac{3r_1^2 + v^2}{2v} = \dfrac{\pi v}{6} \cdot \left(3r_1^2 + v^2\right)$

Provedený důkaz i předešlé odvození vzorce (6.3) lze chápat jako návod k řešení příkladů, v nichž nemáme zadán poloměr r koule, ale poloměr r_1 podstavy úseče pro případ neznalosti vzorce (6.4).

Řešení takové úlohy je pak velmi jednoduché, jedná se jen o dosazení parametrů r_1, v do odvozeného vzorce (6.4), a proto zde nebudeme uvádět žádný řešený příklad.

6.3.2 Obsah kulového vrchlíku

Kulový vrchlík je, jak víme, částí kulové plochy s poloměrem r. Jeho obsah S je zároveň obsahem pláště úseče koule o stejném poloměru r.

Aplikujeme-li stejnou úvahu jako v kap.6.3.1 a použijeme-li univerzální vztah (1.14), dostaneme:

$$S = 2\pi \int_{r-v}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx \text{ (viz kap. 6.2)} = 2\pi \cdot [rx]_{r-v}^{r} = 2\pi r v \qquad (6.5)$$

Funkčnost a pravdivost odvození vzorce (6.5) si můžeme ověřit vyřešením následující úlohy:

Příklad 3

Rovina protne kouli o poloměru $r = 9{,}8\, dm$ v kruhu o poloměru $r_1 = 7{,}9\, dm$. Vypočtěte povrch příslušné kulové úseče.

<u>Řešení:</u> Povrch úseče určíme jako součet obsahu jejího pláště a obsahu kruhové podstavy.

1. Obsah pláště určíme jako obsah kulového vrchlíku. K tomu potřebujeme znát výšku úseče, kterou zjistíme z rovnosti $r^2 - r_1^2 = (r - v)^2$ (viz důkaz v kap. 6.3.1)

   Odtud je pak $v = r - \sqrt{r^2 - r_1^2}$

2. Určíme obsah S pláště úseče dosazením $f(x): y = \sqrt{r^2 - x^2}$ a příslušných mezí do vztahu (1.14)
3. Určíme obsah S_k podstavy úseče jako $S_k = \pi \cdot r_1^2$
4. Dopočítáme povrch P úseče jako $P = S + S_k$

<u>Výpočet:</u> 1. $v = 9{,}8 - \sqrt{9{,}8^2 - 7{,}9^2} = 4 dm$ (se zaokrouhlením)

2. $S = 2\pi \int_{5,8}^{9,8} \sqrt{9{,}8^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{9{,}8^2 - x^2}}\, dx = 2\pi \cdot [9{,}8x]_{5,8}^{9,8} = 2\pi \cdot 39{,}2 = 246{,}3 dm^2$ (se zaokrouhlením)

3. $S_k = \pi \cdot 7{,}9^2 = 196{,}1 dm^2$

4. $P = 246{,}3 + 196{,}1 = 442{,}4 dm^2$

<u>Odpověď:</u> Povrch příslušné kulové úseče je $442{,}4 dm^2$.

Závěr

A to je, vážení čtenáři, z mé strany už vše. V práci jsem se snažil představit Vám integrální počet nikoliv jako něco náročného a složitého, co je potřeba ovládat, chceme – li rozumět matematice lépe než jiní, ale spíše představit jej jako zajímavou matematickou disciplínu, kterou má smysl studovat a zabývat se jí. Zajímavou z hlediska využití hlavně ve školské matematice, konkrétně z hlediska využití ve stereometrii rotačních těles, kterou budeme několikrát, jakožto budoucí učitelé matematiky, v rámci učiva 8. – 9. třídy základní školy a někteří třeba i v rámci učiva 2. ročníku střední školy vyučovat.

Jak jsme zjistili, úlohy na téma objem, obsah pláště a povrch rotačního tělesa, které mimochodem nepatří u žáků k nejvíce oblíbeným, nejsou ve skutečnosti tak obtížné a zákeřné, jak se bohužel mnohým žákům a studentům jeví. Jak jsme ukázali, stačí jen umět pracovat se základními elementárními funkcemi, být schopni počítat derivace těchto funkcí a dokázat je integrovat alespoň na té nezbytně základní úrovni. Za tohoto předpokladu jsme schopni nějakou takovou stereometrickou úlohu vyřešit vždy správně a s přehledem, přičemž ani nepotřebujeme mít nám dobře známou vědomostní výbavu v podobě cca 15 vzorečků pro objemy, obsahy plášťů a povrchy. Výhodou je právě redukce oněch patnácti vzorců na pouhé dva vzorce, s jejichž pomocí určíme požadovaný parametr (objem, obsah pláště) rotačního tělesa poměrně snadno, jak ostatně dokumentují jednotlivé řešené příklady, obrázky a úvahy.

Vždy je důležité uvědomit si, jak dané těleso vzniká, které údaje při tom hrají důležitou roli a samozřejmě znát dva univerzální vztahy pro výpočet, v nichž figuruje právě ten určitý integrál. Vše ostatní, tedy dosazení, úpravy a samotný výpočet, je již rutinní technickou záležitostí, ale opakuji, je třeba to umět, jinak se výsledku nedobereme. Pakliže to však umíme, pak nebudeme mít s řešením vůbec žádný problém.

Realita je ale taková, že se žáci především na SŠ seznamují nejdříve s rotačními tělesy, vzorci pro výpočet, jež se jim mnohdy motají a pletou, a teprve až ve 4. ročníku se dozví něco o limitách, derivacích a integrálech a to jen na některých školách. Někde dokonce ukončí matematiku kombinatorikou, pravděpodobností, základy statistiky a dál nepokračují. Výsledkem toho je pak nepopularita stereometrie, nechuť k tomuto tématu, neuspokojivé znalosti žáků v této partii a s tím související jejich špatné vzpomínky na dobu, kdy se tělesa, objemy a povrchy těles v matematice probíraly. A to je velká škoda. Možná některé z Vás, kteří jste měli na střední škole stereometrii rádi tak jako já, moje práce inspirovala k tomu, abyste vztah žáků ke stereometrii rotačních těles chtěli změnit k lepšímu a snažili se najít k tomu vhodné metody. Pokud se tak stalo, pak ta krátká práce splnila svůj účel nad rámec vytyčených cílů.

Seznam použité literatury

(1) Pomykalová, E. *Matematika pro gymnázia – Stereometrie.* Praha: Prometheus, 2008.

(2) Hrubý, D., Kubát, J. *Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet.* Praha: Prometheus, 2006.

(3) Jirásek, F., Benda, J. *Matematika pro bakalářské studium.* Praha: Ekopress, 2006.

(4) Laitochová, J. *Matematická analýza 2 – Integrální počet.* Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2003.

(5) Polák, J. *Přehled středoškolské matematiky.* Praha: Prometheus, 2005.

(6) Petáková, J. *Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy.* Praha: Prometheus, 2008.

(7) Fuchs, E., Procházka, F., kolektiv. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro střední odborné školy.* Praha: Prometheus, 2002.

(8) Běloun, F., kolektiv. *Sbírka úloh z matematiky pro základní školu.* Praha: Prometheus, 2001.

(9) Kubát, J. *Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na vysoké školy.* Praha: Prometheus, 2004.

ANOTACE

Jméno a příjmení:	Radek Holman
Katedra:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.
Rok obhajoby:	2011

Název práce:	Určitý integrál ve stereometrii
Název v angličtině:	Definite integral at solid geometry
Anotace práce:	Ústředním tématem práce jsou aplikace určitého integrálu ve stereometrii. Hlavní náplň představuje odvození a vysvětlení vzorců pro výpočet objemů, obsahů plášťů a povrchů rotačních těles, k čemuž využívám určitý integrál jakožto kvalitní a efektivní nástroj. Rovněž poukazuji na možnosti jeho použití při řešení úloh, které souvisejí s danou problematikou. Cílem práce je ukázat význam integrálního počtu, zejména určitého integrálu jak pro odvození zmíněných vzorců, řešení a výpočty příkladů, tak i pro efektivnější výuku stereometrie jako matematické disciplíny, a tím i pro pozitivní zpětnou vazbu učitele od jeho žáků.
Klíčová slova:	Funkce, určitý integrál, rotace, stereometrie, rotační těleso, vzorec, odvození
Anotace v angličtině:	The main topic of this thesis is the application of definite integral at solid geometry. The main content is derivation and explanation of the formulas for calculation of volume, content of the surface of rotating bodies using definite integral as a qualitative and effective tool. I also point out the posibility of its application in solving tasks related to this topic. The goal of this thesis is to show the importance of the integral, especially definite integral both for the derivation of these formulas, solving and calculations of the tasks, and for more effective teaching of solid geometry as a mathematical discipline and thus the positive feedback from the students.

Klíčová slova v angličtině:	Function, definite integral, rotation, solid geometry, rotating body, formula, derivation
Přílohy vázané v práci:	
Rozsah práce:	40 stran
Jazyk práce:	Český