UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
Katedra algebry a geometrie

Projektivní geometrie v úlohách

Diplomová práce

Vedoucí práce:
RNDr. Marek Jukl, Ph.D.
Rok odevzdání: 2012

Vypracovala:
Bc. Barbora Bartošová
M-DG, 2. ročník

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně pod vedením RNDr. Marka Jukla, Ph.D., a že jsem uvedla veškerou použitou literaturu.

V Olomoouci dne . . . .

Ráda bych poděkovala RNDr. Marku Juklovi, Ph.D., za spolupráci, cenné rady a pomoc při zpracovávání práce.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Tato diplomová práce se zabývá řešením příkladů z projektivní geometrie. Zaměřuje se na zavedení projektivního prostoru a kolineace projektivních prostorů. Kromě příkladů práce obsahuje také nezbytné teoretické poznatky. U čtenáře se předpokládají základní znalosti lineárí algebry a analytické geometrie. Obrázky jsou nakresleny v programu QCad, text byl vysázen pomocí typografického systému LaTeX.

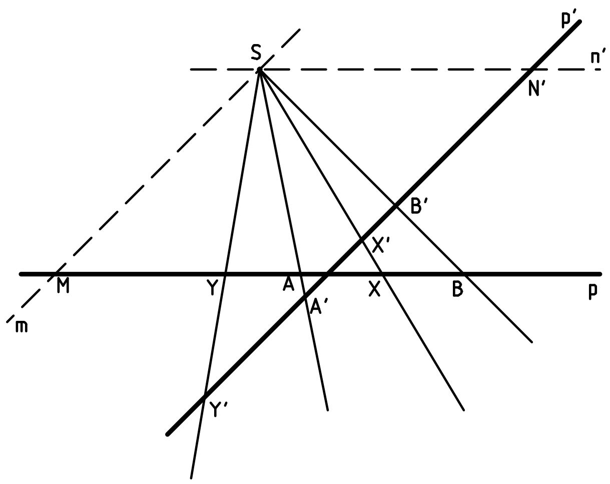
Práce je rozdělena do dvou částí. První je teoretická (kapitoly č. 2, 3 a 4). Zavádí se zde pojmy jako projektivní prostor, jeho báze a homogenní soustavy souřadnic, podprostory a jejich vyjádření rovnicemi. Dále se věnuje kolineárním zobrazením, kolineacím a na závěr klasifikaci kolineací na projektivní přímce, v projektivní rovině a v projektivím prostoru. Vzhledem k rozsahu práce jsou věty uváděny bez důkazu či odvození.

Kapitola č. 5 obsahuje různé řešené příklady. Důraz je kladen hlavně na kolineace, ale je zde i dostatek příkladů ke kapitolám č. 3. a 4.

Kapitola 2

Motivace

Pojem projektivní prostor, resp. projektivní rovina historicky vznikl jako výsledek úsilí o odstranění nejednotnosti v popisu těch vlastností objektů eukleidovské roviny, resp. eukleidovského prostoru, které se týkaly vzájemné polohy útvarů. Podstatný rozdíl mezi rovnoběžností a různoběžností přímek a rovin jednak komplikuje klasifikaci vzájemné polohy konečného počtu těchto útvarů, jednak v jistých situacích způsobuje rozdílné postavení některých objektů, které jsou jinak rovnocennými prvky určitých množin.



Obrázek 2.1: Přímky v eukleidovské rovině

Například když v eukleidovské rovině promítáme z bodu S množinu všech bodů přímky p na přímku p', průměty bodů $A, B, \dots$ přímky p jsou body $A' = SA \cap p', B' = SB \cap p', \dots$ a obráceně k bodům $X', Y', \dots$ přímky p' existují body $X = SX' \cap p, Y = SY' \cap p, \dots$ přímky p, jejichž průměty jsou body $X', Y', \dots$ (viz. obrázek 2.1). Toto vzájemně jednoznačné přiřazení bodů přímky p jako vzorů a bodů přímky p' jako průmětů je narušeno ve dvou případech:

1. Bod M, který je průsečíkem přímky p s přímkou m jdoucí bodem S rovnoběžně s přímkou p', nemá průmět, neboť rovnoběžky $m = SM$ a p' nemají průsečík.

2. Bod N', který je průsečíkem přímky p' s přímkou n' jdoucí bodem S rovnoběžně s přímkou p, není průmětem žádného bodu přímky p, protože přímka $n' = SN'$ nemá s rovnoběžnou přímkou p žádný společný bod.

Bod M, resp. N' není nijak význačným bodem přímky p, resp. p'.Výjimečnost těchto bodů vhledem k promítání je způsobena pouze vztahy polohy mezi prvky trojice S, p, p'. Postavení bodů M, N' by zaniklo, pokud bychom množinu všech bodů přímky p, resp. p' doplnili jediným bodem $\bar{N}$, resp. $\bar{M}'$ tak, že bychom bod $\bar{N}$ pokládali za společný bod všech různých rovnoběžných přímek p a n', bod $\bar{M}'$ za společný bod všech různých rovnoběžných přímek p' a m. Takovým doplněním se získává jeden z modelů tzv. projektivní přímky.

Analogické úvahy o polohových vztazích mezi všemi přímkami v eukleidovské rovině a o rozmanitých možnostech polohových vztahů mezi všemi přímkami a všemi rovinami v trojrozměrném eukleidovském prostoru vedou k přesvědčení o potřebě a užitečnosti doplnění každé přímky jedním bodem, každé roviny jednou přímkou a prostoru jednou rovinou. Takto doplněné útvary se nazývají rozšířenými (doplněnými) eukleidovskými útvary - přímkou, rovinou a prostorem. Vznikly historicky jako první modely projektivní přímky, projektivní roviny a projektivního prostoru a projektivní geometrie se po celá desetiletí rozvíjela při studiu jejich vlastností. Hlubší prozkoumání logické stavby projektivní geometrie odhalilo omezenost těchto modelů a dalo podnět k rozpracování exaktních a účinných syntetických i analytických metod, jejichž pomocí se vytvořila všeobecná teorie projektivních prostorů libovolného konečného rozměru.

Přednostmi analytické metody jsou její přesvědčivost založená na exaktnosti používaných algebraických prostředků, přehlednost odvozená z jasnosti struktury algebry a úplnost opírající se o klasifikace v algebře. Jejím nedostatkem, narozdíl od metody syntetické, je zpravidla malá názornost a v některých případech komplikovanost vyjádření.

Cílem této práce je podat stručný přehled základních teoretických poznatků a ukázat jejich praktické použití na příkladech.

Kapitola 3

Projektivní prostor

3.1 Projektivní prostor a podprostor

V této sekci zadefinujeme základní pojmy, se kterými budeme nadále pracovat, a uvedeme některé jejich důležité vlastnosti.

Definice 3.1.1 *Nechť* $\mathbf{P}$ *je množina,* $\mathbf{V}_{n+1}$ *je vektorový prostor nad tělesem* $\mathbf{T}$ *(dimenze* $n+1$*) a bijekce* $\varphi : \{[\underline{u}] \subseteq \mathbf{V}_{n+1}, \underline{u} \neq \underline{o}\} \to \mathbf{P}$. *Pak trojici* $\mathcal{P}_n = (\mathbf{P}, \mathbf{V}_{n+1}, \varphi)$ *nazýváme n-rozměrný projektivní prostor nad* $\mathbf{T}$.
$\mathbf{V}_{n+1}$ *se nazývá aritmetický základ prostoru* $\mathcal{P}_n$.
$\mathbf{P}$ *se nazývá nosič nebo množina bodů prostoru* $\mathcal{P}_n$.

Pro projektivní prostory určité dimenze užíváme obvyklé pojmenování - projektivní prostor dimenze 0, resp. 1, resp. 2 nazýváme bod, resp. přímka, resp. rovina

Aritmetickým zástupcem bodu X rozumíme vektor $\underline{x}$, který splňuje podmínku: $X \in \mathbf{P} \Leftrightarrow \exists \underline{x} \in \mathbf{V}, \underline{x} \neq \underline{o} : X = \varphi([\underline{x}])$
Existuje více aritmetických zástupců bodu X. Předpokládejme, že bod X má aritmetické zástupce x, y.

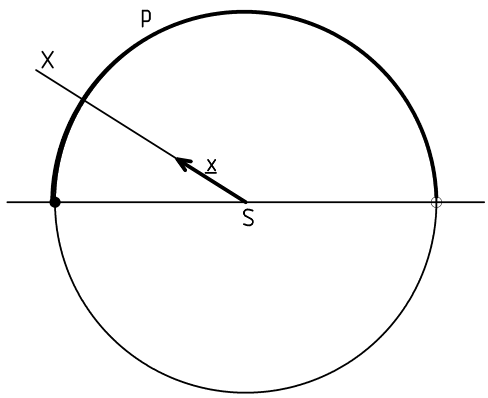
$$\begin{aligned} \varphi([\underline{x}]) &= \varphi([\underline{y}]) \\ [\underline{x}] &= [\underline{y}] \\ \exists t \neq 0 : \underline{y} &= t\underline{x} \end{aligned}$$

Věta 3.1.1 *Dva vektory jsou aritmetickými zástupci téhož bodu právě tehdy, když jsou úměrné.*

Poznámka 1 $\underline{o}$ *není aritmetickým zástupcem žádného bodu.*

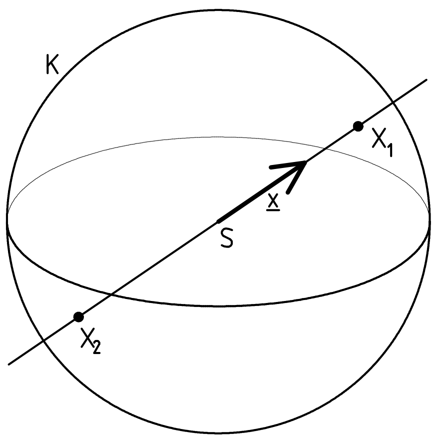
Příklad

1. V $\mathcal{E}_2$:
   nosičem $\mathbf{P}$ je vyznačená půlkružnice
   aritmetickým základem je $\mathbf{V}_2$
   $\varphi : \{[\underline{x}] \subseteq \mathbf{V}_2, \underline{x} \neq \underline{o}\} \to \mathbf{P}, [\underline{x}] \to \{S, \underline{x}\} \cap \mathbf{P}$
   $\mathcal{P}_1 = (\mathbf{P}, \mathbf{V}_2, \varphi)$ se nazývá projektivní přímka



Obrázek 3.1: Projektivní přímka

2. V $\mathcal{E}_3$:
   $\mathbf{P} : \{\{X_1, X_2\} \subset K, S \in (X_1, X_2)\}$
   aritmetickým základem je $\mathbf{V}_3$
   $\varphi : \{[\underline{x}] \subseteq \mathbf{V}_3, \underline{x} \neq \underline{o}\} \to \mathbf{P}, [\underline{x}] \to \{S, \underline{x}\} \cap K$
   $\mathcal{P}_2 = (\mathbf{P}, \mathbf{V}_3, \varphi)$ se nazývá projektivní rovina



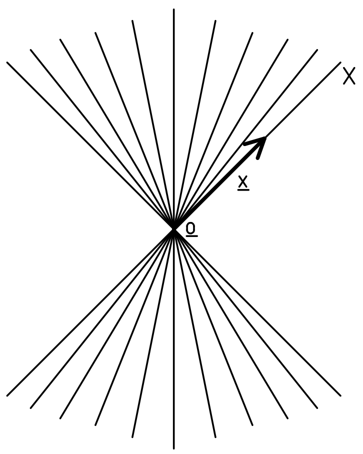
Obrázek 3.2: Projektivní rovina

3. V $\mathcal{A}_2$:
   $\mathbf{P} = p \cup \{[\underline{b}]\}, p = \{B, \underline{b}\}$
   aritmetickým základem je $\mathbf{V}_2$
   $\varphi : \{[\underline{x}] \subseteq \mathbf{V}_2, \underline{x} \neq \underline{o}\} \to \mathbf{P}$:

   - $\underline{x} \notin \mathbf{V}(p) : [\underline{x}] \to \{S, \underline{x}\} \cap p, S \notin p$
   - $\underline{x} \in \mathbf{V}(p) : [\underline{x}] \to [\underline{b}]$

   $\bar{p} = (\mathbf{P}, \mathbf{V}_2, \varphi)$ je projektivní přímka, tzv. projektivní rozšíření afinní přímky

4. Nechť $\mathbf{T}$ je libovolné komutativní těleso:
   $\mathbf{P} = \{[\underline{x}] \subseteq \mathbf{T}^{n+1}, \underline{x} \neq \underline{o}\}$
   $\mathbf{V} = \mathbf{T}^{n+1}$
   $\varphi = id.$
   Pak $TP_n = \{\mathbf{P}, \mathbf{T}^{n+1}, id.\}$ je tzv. n-rozměrný souřadnicový projektivní prostor nad tělesem $\mathbf{T}$.



Obrázek 3.3: Souřadnicový projektivní prostor

Definice 3.1.2 *Nechť* $\mathcal{P} = (\mathbf{P}, \mathbf{V}, \varphi)$ *je projektivní prostor. Množina* $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{P}$ *se nazývá projektivní podprostor v* $\mathcal{P}$*, jestliže existuje* $\mathbf{W} \subseteq\subseteq \mathbf{V}$:
$X \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \exists\ \underline{x} \in \mathbf{W}, \underline{x} \neq \underline{o} : X = \varphi([\underline{x}])$.
$\mathbf{W}$*je aritmetický základ podprostoru* $\mathcal{R}$.

Pro dimenzi projektivního podprostoru klademe: dim $\mathcal{R}$=dim$\mathbf{W} - 1$

Věta 3.1.2 *Každý projektivní podporstor $\mathcal{R}$ je sám o sobě projektivním prostorem $(\mathbf{R}, \mathbf{W}, \varphi|_{\{[\underline{x}]\subseteq \mathbf{W}, \underline{x}\neq \underline{o}]\}})$.*

Definice 3.1.3 *Nechť $\mathcal{P}_n$ je projektivní prostor. Nadrovinou v $\mathcal{P}_n$ rozumíme libovolný $(n-1)$ rozměrný podprostor v $\mathcal{P}_n$.*

Úmluva: Nadále budeme projektivním prostorem o aritmetickém základu $\mathbf{V}$ rozumět projektivní prostor $\mathcal{P}(\mathbf{V}) = (\{[\underline{x}], \underline{x} \neq \underline{o}\}, \mathbf{V}, id)$.

Definice 3.1.4 *Nechť $\mathcal{R}, \mathcal{U} \subseteq\subseteq \mathcal{P}$.*

1. *Spojením (součtem) podprostorů $\mathcal{R}, \mathcal{U}$ rozumíme podprostor $\mathcal{R} + \mathcal{U} = \mathcal{S} \subseteq\subseteq \mathcal{P}$:*
   - $\mathcal{R} \subseteq\subseteq \mathcal{S}, \mathcal{U} \subseteq\subseteq \mathcal{S}$
   - $\forall \mathcal{T}, \mathcal{T} \subseteq\subseteq \mathcal{P} : \mathcal{R} \subseteq \mathcal{T} \wedge \mathcal{U} \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$
2. *Spojení podprostorů se nazývá přímé, právě když $\mathcal{R} \cap \mathcal{U} = \emptyset$; značíme $\mathcal{R} \oplus \mathcal{U}$*
3. *Řekneme, že $\mathcal{R}$ je doplňkem podporstoru $\mathcal{U}$, jestliže*
   - $\mathcal{R} + \mathcal{U} = \mathcal{P}$
   - $\mathcal{R} \cap \mathcal{U} = \emptyset$

Věta 3.1.3 *Nechť $\mathcal{R}, \mathcal{U} \subseteq\subseteq \mathcal{P}; \mathcal{R} = \mathcal{P}(\mathbf{R}), \mathcal{U} = \mathcal{P}(\mathbf{U})$. Potom platí:*

1. $\mathcal{U} + \mathcal{R} = \mathcal{P}(\mathbf{U} + \mathbf{R})$
2. $\mathcal{U} \cap \mathcal{R} = \mathcal{P}(\mathbf{U} \cap \mathbf{R})$
3. $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{R} \Leftrightarrow \mathbf{U} \subseteq \mathbf{R}$
4. $\dim(\mathcal{R} + \mathcal{U}) = \dim \mathcal{R} + \dim \mathcal{U} - \dim(\mathcal{R} \cap \mathcal{U})$

Důsledek

1. Podprostor $\mathcal{R}_k, k \neq 0$ neležící v nadrovině $\mathcal{N}$ ji protíná v podprostoru $\dim(k-1)$.
2. Přímka neležící v nadrovině ji protíná v jednom bodě.
3. Každé dvě různé přímky projektivní roviny se protínají v jednom bodě.

Definice 3.1.5 *Nechť* $V_0, \ldots, V_k \in \mathbf{P}$ *jsou body projektivního prostoru,* $\underline{n_0}, \ldots, \underline{n_k}$ *jejich aritmetičtí zástupci. Řekneme, že body* $V_0, \ldots, V_k$ *jsou lineárně nezávislé, jestliže* $\underline{n_0}, \ldots, \underline{n_k}$ *jsou lineárně nezávislé.*

Věta 3.1.4 *Ke každé lineárně nezávislé (k+1)-tici bodů* $U_0, \ldots, U_k$ *existuje právě jeden podprostor* $\mathcal{R}$ *dimenze k, který je obsahuje. Bod* X *je bodem podprostoru* $\mathcal{R}$ *právě tehdy, když body* $X, U_0, \ldots, U_k$ *jsou lineárně závislé.*

Lze jednoduše vyvodit, že body $U_0, \ldots, U_k$ projektivního prostoru jsou lineárně nezávislé, jestliže pro každý bod dané k-tice platí, že neleží v podprostoru určeném zbylými body.

3.2 Aritmetická a geometrická báze projektivního prostoru, homogenní soustava souřadnic

Definice 3.2.1 *Nechť* $\mathcal{P}_n$ *je projektivní prostor.*

1. *Aritmetickou bází* $\mathcal{P}_n$ *rozumíme libovolnou bázi jeho aritmetického základu.*

2. *Geometrickou bází* $\mathcal{P}_n$ *rozumíme libovolnou (n+2)-tici bodů* $\mathcal{P}_n$ *takovou, že žádných (n+1) bodů neleží v jedné nadrovině.*

Poznámka 2 *Prvky geometrické báze jsou vždy lineárně závislé.*

Definice 3.2.2 *Nechť* $A = \langle \underline{a_0}, \ldots, \underline{a_n} \rangle$ *je aritmetická báze* $\mathcal{P}_n$*.*

1. *Nechť* $X \in \mathcal{P}_n$*. Libovolná uspořádaná* $(n+1)$*-tice* $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{T}^{n+1}$ *se nazývá homogenní souřadnice* X*, jestliže* $X = [(x_0\overrightarrow{a_0} + x_1\overrightarrow{a_1} + \ldots + x_n\overrightarrow{a_n})]$.

2. *Relace* $H_A \subseteq \mathcal{P} \times \mathbf{T}^{n+1}$ *definovaná vztahem* $(X, (x_0, x_1, \ldots, x_n)) \in H_A \Leftrightarrow X = [(x_0a_0 + x_1a_1 + \ldots + x_na_n)]$ *se jmenuje homogenní soustava souřadnic v* $\mathcal{P}_n$ *určená aritmetickou bází* A*.*

Poznámka 3 *Souřadnice bodu jsou v* H_A *určeny jednoznačně až na nenulový násobek.*

Definice 3.2.3 *Nechť* A, A' *jsou báze v* $\mathcal{P}_n$*.* A, A' *se nazývají úměrné, jestliže* $\exists c \in \mathbf{T}, c \neq 0 : A = \langle \underline{a_0}, \ldots \underline{a_n} \rangle, A' = \langle c\underline{a_0}, \ldots, c\underline{a_n} \rangle$*. Značíme* $A \sim A'$*.*

Věta 3.2.1 *Relace býti úměrný je relace ekvivalence na množině bází* $\mathcal{P}_n$.

Věta 3.2.2 *Každá homogenní soustava souřadnic je určena jedinou třídou úměrných aritmetických bází.* $H_A = H_{A'} \Leftrightarrow A \sim A'$

Věta 3.2.3 *Buď* $A = \langle a_0, a_1, \dots a_n \rangle$ *libovolná aritmetická báze* $\mathcal{P}_n$. *Pak množina* $R = \{A_0, A_1, \dots, A_{n+1}\}$*:*

$$\begin{aligned} A_0 &= [\underline{a_0}] \\ A_1 &= [\underline{a_1}] \\ &\dots \\ A_n &= [\underline{a_n}] \\ A_{n+1} &= [\underline{a_0} + \dots + \underline{a_n}] \end{aligned}$$

je geometrickou bází $\mathcal{P}_n$.

Definice 3.2.4 *Geometrická báze z věty 3.2.3 se nazývá geometrická báze určená aritmetickou bází A.*

Věta 3.2.4 *Každá geometrická báze je určena právě jednou třídou úměrných aritmetických bází.*

Věta 3.2.5 *Každá homogenní soustava souřadnic je určena právě jednou geometrickou bází.*

Transformace homogenní soustavy souřadnic

Lemma 3.2.6 *Dvě geometrické báze určují matici přechodu mezi příslušnými aritmetickými bázemi jednoznačně až na nenulový násobek.*

Věta 3.2.7 R_1, R_2 *jsou geometrické báze;* A_1, A_2 *jsou libovolné aritmetické báze určující* R_1, R_2*;* H_1, H_2 *homogenní soustavy souřadnic určené* A_1, A_2*;* $A = (A_1, A_2)$.
Nechť $X \in \mathcal{P}$, *pak platí, že* $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ *jsou jeho homogenní souřadnice v* H_1, $(y_0, y_1, \dots, y_n)$ *jsou jeho homogenní souřadnice v* H_2 *právě tehdy, když* $\exists c \in \mathbf{T}, c \neq 0 : c(x_0, x_1, \dots, x_n) = (y_0, y_1, \dots, y_n)A$

3.3 Vyjádření podprostoru rovnicemi

Nechť je dán podprostor $\mathcal{R}_k$ svými body $U_0, \ldots, U_k$. Bod $X = [\underline{x}] = [(x_0, \ldots, x_k)]$ náleží podprostoru $\mathcal{R}_k$ právě tehdy, když $\underline{x} = (x_0, \ldots, x_k) \in \mathbf{W}_{k+1} = [\underline{u_0}, \ldots, \underline{u_k}]$ takový, že

$$
\begin{array}{rcl}
\underline{x} & = & \sum t_i \underline{u_i} \\
& \Updownarrow & \\
x_0 & = & \sum t_i u_{i0} \\
x_1 & = & \sum t_i u_{i1} \\
& \vdots & \\
x_k & = & \sum t_i u_{ik}
\end{array}
$$

Věta 3.3.1 *Nechť* $\mathcal{R}_k \subseteq\subseteq \mathcal{P}_n$ *je určený lineárně nezávislými body* $U_0, \ldots, U_k$,

$$
\begin{array}{rcl}
U_0 & = & (u_{00}, \ldots, u_{0n}) \\
& \vdots & \\
U_k & = & (u_{k0}, \ldots, u_{kn}).
\end{array}
$$

Pak pro libovolný bod $X = (x_0, \ldots, x_n)$ *platí:*

$$X \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \exists t_0, \ldots, t_k \in \mathbf{T} : x_j = \sum t_i u_{ij}$$

.

Definice 3.3.1 *Soustavu rovností z předchozí věty nazveme parametrickým vyjádřením* $\mathcal{R}$.

Definice 3.3.2 *Soustavou obecných rovnic podprostoru* $\mathcal{R} \subseteq\subseteq \mathcal{P}_\backslash$ *ve zvolené homogenní soustavě souřadnic rozumíme libovolnou soustavu lineárních homogenních rovnic takovou, že* $\mathcal{R}$ *je tvořen právě těmi body z* $\mathcal{P}_n$, *jejichž souřadnice tuto soustavu řeší. Požadujeme, aby soustava obecných rovnic byla lineárně nezávislá.*

Věta 3.3.2 *Ke každému* $\mathcal{R} \subseteq\subseteq \mathcal{P}_n$ *existuje v libovolné homogenní soustavě souřadnic alespoň jedna soustava obecných rovnic. Přitom* $\dim \mathcal{R} = n - h$, *kde* h *je počet rovnic soustavy obecných rovnic.*

3.4 Dvojpoměr čtyř bodů

Definice 3.4.1 *Nechť A, B, C, D jsou čtyři navzájem různé kolineární body (ležící v přímce). Nechť $A = [\underline{a}], B = [\underline{b}], C = [\underline{c}], D = [\underline{d}]$. Jestliže*

$$\begin{aligned} \underline{c} &= u_1\underline{a} + u_2\underline{b}, \\ \underline{d} &= v_1\underline{a} + v_2\underline{b}, \end{aligned}$$

pak číslo $\delta = \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{v_1}{v_2}$ nazveme dvojpoměr uspořádané čtveřice bodů A, B, C, D a značí se $(ABCD)$.

Věta 3.4.1 *Ke každým třem různým kolineárním bodům A, B, C a libovolnému $\delta \in \mathbf{T} \setminus \{0; 1\}$ existuje právě jeden bod D takový, že $(ABCD) = \delta$.*

Dvojpoměr čtveřice bodů záleží na pořadí. Následující vzorce ukazují, jak se změní dvojpoměr čtveřice, jestliže změníme jejich pořadí.

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA) = \delta \tag{3.1}$$

$$(ACBD) = (BDAC) = (CADB) = (DBCA) = 1 - \delta \tag{3.2}$$

$$(ABDC) = (BACD) = (CDBA) = (DCAB) = \frac{1}{\delta} \tag{3.3}$$

$$(ACDB) = (BDCA) = (CABD) = (DBAC) = \frac{1}{1-\delta} \tag{3.4}$$

$$(ADBC) = (BCAD) = (CBDA) = (DACB) = \frac{\delta - 1}{\delta} \tag{3.5}$$

$$(ADCB) = (BCDA) = (CBAD) = (DABC) = \frac{\delta}{\delta - 1} \tag{3.6}$$

Definice 3.4.2 *Řekneme, že body tvoří harmonickou čtveřici tehdy, když je jejich dvojpoměr roven -1.*

Poznámka 4 *Je zřejmé, že je-li čtveřice bodů harmonická při některém pořadí, je harmonická právě při osmi ze všech 24 možných pořadí bodů ve čtveřici.*

3.5 Princip duality v projektivních prostorech

Nechť $\mathcal{P}_n = (\mathbf{P}, \mathbf{V}_{n+1}, \varphi)$ je projektivní prostor nad tělesem $\mathbf{T}$. Označme $\tilde{\mathbf{P}}$ množinu všech nadrovin prostoru $\mathbf{P}_n$. Každou nadrovinu prostrou $\mathbf{P}_n$ můžeme určit rovnicí

$$\tilde{g}(\underline{x}) = 0, \tag{3.7}$$

kde $\tilde{g}$ je lineární forma ve vektorovém prostrou $\mathbf{V}_{n+1}$. Množina všech lineárních forem na vektorovém prostoru $\mathbf{V}_{n+1}$ tvoří s obvyklými operacemi sčítání lineárních forem a násobení lineární formy skalárem z $\mathbf{T}$ vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$ dimenze $n+1$. Tento vektorový prostor se nazývá *duální vektorový prostor* k $\mathbf{V}_{n+1}$ a značí se $\tilde{\mathbf{V}}_{n+1}$. Máme tedy ke každé nenulové lineární formě $\tilde{g} \in \tilde{\mathbf{V}}_{n+1}$ přiřazenu nadrovinu prostoru $\mathbf{P}_n$, která má rovnici (3.7). Zřejmě dvěma lineárním formám je přiřazena stejná nadrovina právě tehdy, jsou-li tyto formy lineárně závislé. Zobrazení, které každé nenulové lineární formě $\tilde{g} \in \tilde{\mathbf{V}}_{n+1}$ přiřadí nadrovinu prostoru $\mathbf{P}_n$ danou rovnicí (3.7), označíme $\tilde{\varphi}$. Zřejmě potom trojice $\tilde{\mathbf{P}}_n = (\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{V}}_{n+1}, \tilde{\varphi})$ je projektivní prostor dimenze n nad tělesem $\mathbf{T}$.

Definice 3.5.1 *Projektivní prostor $\tilde{\mathbf{P}}_n = (\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{V}}_{n+1}, \tilde{\varphi})$ se nazývá duální projektivní prostor k prostoru $\mathbf{P}_n$.*

Zjistíme ještě, jaká je situace s podprostory duálního prostoru $\tilde{\mathcal{P}}_n$.
Máme-li dán podprostor $\mathcal{R}_k \subseteq\subseteq \tilde{\mathcal{P}}$, který určují lineární formy $[f_0, \ldots, f_k]$: $\mathcal{R}_k = \varphi([f_0, \ldots, f_k]) = \{\mathcal{N} = \mathcal{P}(Ker f); f = c_0 f_0 + \ldots + c_k f_k\} = \{\{X \in \mathcal{P}, X = [\underline{x}]; (c_0 f_0 + \ldots + c_k f_k)(\underline{x}) = 0\}, c_0, \ldots, c_k \neq 0\}$. Potom platí, že

$$X \in \bigcap \mathcal{N} \Leftrightarrow X = [\underline{x}], (c_0 f_0 + \ldots + c_k f_k)(\underline{x}) = 0 \ \forall c_0, \ldots c_k \in \mathbf{T}, \{c_0, \ldots c_k\} \neq \{0\}$$

.

Věta 3.5.1 *Nechť $\mathcal{R}_k \subseteq\subseteq \tilde{\mathcal{P}}_n, \mathcal{R}_k = \tilde{\mathcal{P}}([f_0, \ldots f_k])$. Pak $\mathcal{R}_k$ je množina právě všech nadrovin prostoru $\mathcal{P}$ takových, že jejich obecné rovnice jsou ve tvaru $(c_0 f_0 + \ldots + c_k f_k)(\underline{x}) = 0$, kde $c_0, \ldots c_k \in \mathbf{T}, \{c_0, \ldots c_k\} \neq \{0\}$. Tyto nadroviny se protínají v podprostoru $\mathcal{R}^* \subseteq\subseteq \mathcal{P}$ dimenze $n-k-1$, který je dán soustavou obecných rovnic*

$$\begin{aligned} f_0(\underline{x}) &= 0 \\ f_1(\underline{x}) &= 0 \\ &\vdots \\ f_k(\underline{x}) &= 0. \end{aligned}$$

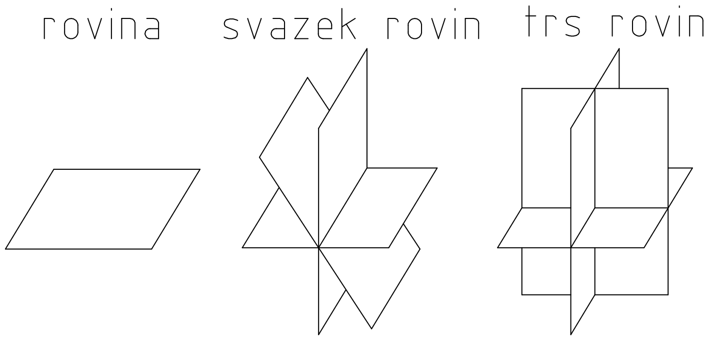
Definice 3.5.2 *Nechť $\mathcal{R}_k \subseteq\subseteq \mathcal{P}_n$. Průnik všech nadrovin tvořících $\mathcal{R}$ se nazývá jádro podprostoru $\mathcal{R}$ a značí se $\mathcal{R}^*$.*

Platí, že $\mathcal{R} \subseteq\subseteq \tilde{\mathcal{P}}, \mathcal{R}^* \subseteq\subseteq \mathcal{P}$.

Věta 3.5.2 *Každý podprostor v $\mathcal{P}$ je jádrem právě jednoho podprostoru $\tilde{\mathcal{P}}$.*

Příklad

1. Prostor duální k projektivnímu prostoru $\tilde{\mathcal{P}}_2$:
   - body... přímky v $\mathcal{P}_2$
   - přímky... svazky přímek v $\mathcal{P}_2$
2. Prostor duální k projektivnímu prostoru $\tilde{\mathcal{P}}_3$:
   - body... roviny v $\mathcal{P}_3$
   - přímky... svazky rovin v $\mathcal{P}_2$
   - roviny... trsy rovin v $\mathcal{P}_2$



Obrázek 3.4: $\tilde{\mathcal{P}}_3$

3. Obecně v prostoru $\tilde{\mathcal{P}}_n$:
   - přímky... svazek nadrovin prostoru $\mathcal{P}_n$
   - nadrovina... množina všech nadrovin prostoru $\mathcal{P}_n$ procházejících daným bodem prostoru $\mathcal{P}_n$

Věta 3.5.3 *Pro libovolné $\mathcal{K}, \mathcal{L} \subseteq\subseteq \tilde{\mathcal{P}}$ platí:*

1. $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L} \Leftrightarrow \mathcal{K}^* \supseteq \mathcal{L}^*$

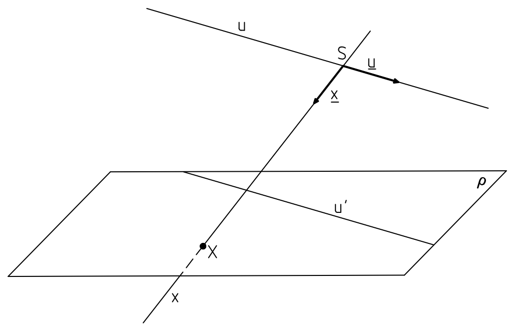
2. $(\mathcal{K} + \mathcal{L})^* = \mathcal{K}^* \cap \mathcal{L}^*$

3. $(\mathcal{K} \cap \mathcal{L})^* = \mathcal{K}^* + \mathcal{L}^*$

Princip duality v projektivních prostorech. Jestliže v projektivním prostoru platí věta V, v níž vystupují jen podprostory projektivního prostoru, jejich dimenze, operace $\cap, +$ a relace $\subset, \supset$, platí v projektivním prostoru také věta $\tilde{\mathsf{V}}$, kterou z věty V dostaneme tak, že každý prostor dimenze k ve větě V nahradíme podprostorem dimenze $n-k-1$, operační znaménka $\cap$ a $+$ zaměníme a relační znaménka $\subset$ a $\supset$ zaměníme.

3.6 Projektivní rozšíření afinního prostoru

Zavedení projektivního rozšíření provedeme pro názornost nejprve pro rovinu v trojrozměrném prostoru. Předpokládejme nyní, že v trojrozměrném prostoru máme zvolenou rovinu ρ a bod $S \notin \rho$. Každá přímka x procházející bodem S, která není rovnoběžná s rovinou ρ, protíná rovinu ρ v bodě X (viz. obrázek 3.5). Přímka $u \parallel \rho$ rovinu ρ neprotíná. Protože potřebujeme,



Obrázek 3.5: Trojrozměrný fyzikální prostor

aby na každé přímce procházející bodem S ležel právě jeden bod roviny ρ, zavedeme tzv. nevlastní body. Jednorozměrný podprostor zaměření $\mathbf{V}_2$ roviny ρ nazveme *nevlastním bodem* a množinu ν všech nevlastních bodů, které takto získáme, přidáme k bodům roviny ρ. Množinu $\rho \cup \nu$ nazveme *projektivní rozšíření roviny* ρ a označíme $\bar{\rho}$. Buď U nevlastní bod určený nenulovým vektorem $\underline{u} \in \mathbf{V}_2$, tj. U je jednorozměrný prostor generovaný vektorem $\underline{u}$. Budeme předpokládat, že každou přímku a se zaměřením U doplníme o tento nevlastní bod. Přímku, kterou dostaneme, označíme $\bar{a}$. Nyní již na každé přímce procházející bodem S bude ležet právě jeden bod roviny $\bar{\rho}$. Označme $\mathbf{V}'_3$ zaměření trojrozměrného prostoru. Protože každá přímka procházející bodem S je jednoznačně určena libovolným nenulovým vektorem ze svého zaměření, můžeme sestrojit zobrazení f prostoru $\mathbf{V}'_3$ na rovinu $\bar{\rho}$, které každému vektoru $\underline{x}$ přiřadí bod $X = \bar{x} \cap \bar{\rho}$, kde $\bar{x}$ je přímka procházející bodem S a mající zaměření $[\{\underline{x}\}]$.

Toto zobrazení nám umožňuje převést práci s body roviny $\bar{\rho}$ na práci s vektory prostoru $\mathbf{V}_3'$ a využít tak algebraický aparát vektorových prostorů. Musíme si však uvědomit, že toto zobrazení není prosté, neboť k bodu $X \in \bar{\rho}$ najdeme celý jednorozměrný podprostor vektorů $\underline{x}$, pro něž $f(\underline{x}) = X$. Budeme tedy zkoumat jen ty vlastnosti vektorů z prostoru $\mathbf{V}_3'$, které se nemění, vezmeme-li místo vektorů jejich nenulové násobky.

Stejný postup nyní použijeme i pro afinní prostor $\mathbf{A}_n$. Narazíme ovšem na problém. V případě rozšířené projektivní roviny jsme využívali vektorový prostor $\mathbf{V}_3'$. Analogický vektorový prostor ovšem pro prostor $\mathbf{A}_n$ nemáme. Tento vektorový prostor proto budeme sestrojovat pouze pomocí prvků (bodů a vektorů) z $\mathbf{A}_n$. Vrátíme-li se do trojrozměrného prostoru, zřejmě existuje číslo $k \in \mathbf{R}$ tak, že $\underline{x} = k(X - S)$. Každý vektor z prostoru $\mathbf{V}_3'$ je buď vektor ze zaměření $\mathbf{V}_2$ roviny ρ, nebo vektor tvaru $k(X - S)$, kde $k \neq 0$ a $X \in \rho$. Místo vektoru $k(X - S)$ tedy budeme psát (k, S) a definujeme operace takto:

Definice 3.6.1 *Nechť je dán afinní prostor $\mathcal{A}_n = (\mathbf{A}, \mathbf{V}_n, -)$ nad tělesem $\mathbf{T}$. Nadále budeme symbolem $\mathbf{W}$ rozumět $\mathbf{W} = ((\mathbf{T} \setminus \{o\}) \times \mathcal{A}_n) \cup \mathbf{V}_n$ spolu se zobrazeními $+ : \mathbf{W} \times \mathbf{W} \to \mathbf{W}$ a $\cdot : \mathbf{T} \times \mathbf{W} \to \mathbf{W}$ definovanými takto:*

1. $(k, X) + (l, Y) = (k + l, \frac{k}{k+l}X + \frac{l}{k+l}Y)$ *pro* $k + l \neq 0$
2. $(k, X) + (l, Y) = k(X - Y)$ *pro* $k + l = 0$
3. $(k, X) + \underline{y} = (k, X + \frac{1}{k}\underline{y}), \underline{y} \in \mathbf{V}_n$
4. $\underline{x} + \underline{y}$ *je definováno stejně jako ve* $\mathbf{V}_n$
5. $t(k, X) = (tk, X)$
6. *pro* $\underline{x} \in \mathbf{V}_n$ *definujeme* $t\underline{x}$ *stejně jako ve* $\mathbf{V}_n$
7. $0(k, X) = o$

Lze dokázat, že platí následující věta:

Věta 3.6.1 $\mathbf{W}_{n+1} = ((\mathbf{T} \setminus \{o\}) \times \mathcal{A}_n \cup \mathbf{V}_n)$ *je (n+1)rozměrný vektorový prostor nad* $\mathbf{T}$.

Definice 3.6.2 *Buď $\mathcal{A}_n = (\mathbf{A}, \mathbf{V}_n, -)$ afinní prostor nad tělesem $\mathbf{T}$, množina $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \cup \nu$. Pak projektivní prostor $\mathcal{P} = (\bar{\mathbf{A}}, \mathbf{W}_{n+1})$ nazýváme projektivní rozšíření afinního prostoru $\mathcal{A}_n$ a značíme $\bar{\mathcal{A}}_n$. Body z množiny $\mathbf{A}$ se nazývají vlastní body prostoru $\bar{\mathcal{A}}_n$, body z množiny ν se nazývají nevlastní body prostoru $\bar{\mathcal{A}}_n$. Vektorový prostor $\mathbf{W}_{n+1}$ se nazývá aritmetický základ prostoru $\bar{\mathcal{A}}_n$, báze prostoru $\mathbf{W}_{n+1}$ se nazývá aritmetická báze prostoru $\bar{\mathcal{A}}_n$.*

Zvolme nyní v prostoru $\mathbf{A}_n$ repér $B = \langle P, \underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n \rangle$. Vektory $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ jsou lineárně nezávislé i v prostoru $\mathbf{W}_{n+1}$,$(1, P) \notin \mathbf{V}_n$, a proto též vektory $(1, P), \underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n \in \mathbf{W}_{n+1}$ jsou lineárně nezávislé. Protože je jich $n+1$, tvoří bázi prostoru $\mathbf{W}_{n+1}$. Každý vektor $\underline{x} \in \mathbf{W}_{n+1}$ můžeme vyjádřit v této bázi

$$\underline{x} = x_0(1, P) + x_1\underline{e}_1 + \ldots + x_n\underline{e}_n. \tag{3.8}$$

Definice 3.6.3 $\bar{B} = \langle (1, P), \underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n \rangle \in \mathbf{W}_{n+1}$ *se nazývá aritmetická báze indukovaná afinní bází* B.

Bod $X = [\underline{x}] \in \bar{\mathbf{A}}_n$ je nevlastní právě tehdy, je-li $\underline{x} \in \mathbf{V}_n$, což platí právě tehdy, je-li $x_0 = 0$. A tedy $X = 0(1, P) + x_1\underline{e}_1 + \ldots + x_n\underline{e}_n$. Je-li bod X vlastní, je $x_0 \neq 0$. Dostaneme tedy $X = [(1, X)], (1, X) = (1, P + x_1\underline{e}_1 + \ldots + x_n\underline{e}_n) = (1, P) + x_1\underline{e}_1 + \ldots + x_n\underline{e}_n$.

Věta 3.6.2 *Nechť B je báze prostoru $\mathcal{A}_n$, bod $X = [\underline{x}], \underline{x} = (x_1 \ldots, x_n)_B$, B' je aritmetická báze indukovaná afinní bází B. Pak pro $X \in \bar{\mathcal{A}}_n$ platí:*

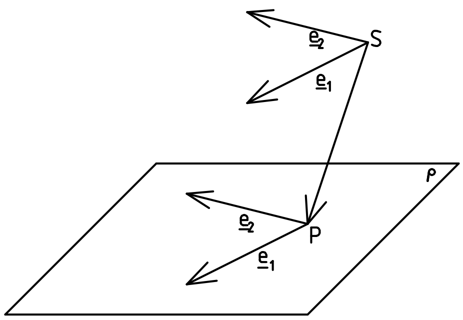
$$\begin{aligned} X &= (1, x_1, \ldots, x_n)_{\bar{B}} \quad \ldots \quad \text{pro vlastní body} \\ X &= (0, x_1, \ldots, x_n)_{\bar{B}} \quad \ldots \quad \text{pro nevlastní body} \end{aligned}$$

Také obráceně platí:

Věta 3.6.3 *Nechť $X = (x_0, x_1, \ldots, x_n)_{\bar{B}}$. Potom*

$$\begin{aligned} \underline{x} &= (x_1, \ldots, x_n)_B \quad \ldots \quad \text{pro } x_0 = 0, X = [\underline{x}] \subseteq \mathbf{V}_n \\ X &= \left[\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right]_B \quad \ldots \quad \text{pro } x_0 \neq 0. \end{aligned}$$

Ukážeme si ještě názorný význam vektorů $(1, P), \underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$. Na obrázku 3.6



Obrázek 3.6: Homogenní souřadnice

je vyznačen repér $\langle P, \underline{e}_1, \underline{e}_2 \rangle$ v rovině ρ. Aritmetický základ $\mathbf{W}_3$ roviny ρ

jsme sestrojili tak, aby byl izomorfní se zaměřením $\mathbf{V}_3'$ trojrozměrného fyzikálního prostoru. Při tomto izomorfismu odpovídají vektorům $(1, P), \underline{e}_1, \underline{e}_2$ vektory $P - S, \underline{e}_1, \underline{e}_2$. Na obrázku 3.6 je znázorněno ještě umístění vektorů $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ s počátečním bodem v bodě S.

Definice 3.6.4 *Říkáme, že podprostor $\mathcal{M}_k'$ prostoru $\bar{\mathcal{A}}_n$ je nevlastní, je-li každý bod $X \in \mathcal{M}_k'$ nevlastní bod prostoru $\bar{\mathcal{A}}_n$. Říkáme, že podprostor $\mathcal{M}_k'$ prostoru $\bar{\mathcal{A}}_n$ je vlastní, jestliže není nevlastní.*

Věta 3.6.4 *Nechť $\mathcal{M} \subseteq\subseteq \bar{\mathcal{A}}_n$. Potom $\mathcal{M}$ je vlastní právě tehdy, existuje-li $\mathcal{S} \subseteq\subseteq \bar{\mathcal{A}}_n$ tak, že $\bar{\mathcal{S}} = \mathcal{M}$.*

Na závěr tohoto odstavce vyslovíme důležité tvrzení.

Věta 3.6.5 *Nechť $\mathcal{P}$ je libovolný projektivní prostor, ρ libovolná jeho nadrovina. Pak $(\mathcal{P} \setminus \rho)$ je afinní prostor, jehož projektivním rozšířením je $\mathcal{P}$.*

Důsledek
Neexistují jiné projektivní prostory, než projektivní prostory vzniklé projektivním rozšířením afinních prostorů.

Kapitola 4

Kolineární zobrazení projektivních prostorů

V této kapitole se budeme věnovat teorii zobrazení projektivních prostorů, které jsou zobecněním většiny zobrazení známých z elementární geometrie. Tomuto zobecnění se sice nebudeme věnovat podrobně, nicméně určité společné vlastnosti budou jasné.

4.1 Kolineární zobrazení

Definice 4.1.1 *Buďte $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}(\mathbf{V}_{n+1}), \mathcal{R}_m = \mathcal{P}(\mathbf{W}_{m+1})$ projektivní prostory nad stejným tělesem $\mathbf{T}$. Nechť dále $\xi : \mathbf{V}_{n+1} \to \mathbf{W}_{m+1}$ je monomorfismus (injektivní homomorfismus). Pak zobrazení $K : \mathcal{P}_n \to \mathcal{R}_m$ takové, že $\forall X \in \mathcal{P}_n, X = [\underline{x}] : K(X) = [\xi(\underline{x})]$ nazveme kolineární zobrazení $\mathcal{P}_n$ do $\mathcal{R}_m$ vytvořené monomorfismem ξ a značíme $K = K(\xi)$.*

Je zřejmé, že kolineární zobrazení je nezávislé na volbě aritmetického zástupce bodu. Má-li bod X dva různé aritmetické zástupce $\underline{x}, \underline{y}$, pak zřejmě existuje $t \neq 0 : \underline{y} = t\underline{x}$ a tedy $K(X) = [\xi(\underline{x})] = [\xi(\underline{y})]$, kdy $\xi(\underline{y}) = \xi(t\underline{x}) = t\xi(\underline{x})$. Také následující věty lze snadno vyvodit přímo z definice kolineárního zobrazení.

Věta 4.1.1 *Nechť ξ, μ jsou dva monomorfismy prostoru $\mathbf{V} \to \mathbf{W}$. Pak platí $K(\xi) = K(\mu) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbf{T}, t \neq 0 : \mu = t\xi$.*

Předchozí větu můžeme slovně přeformulovat tak, že každé kolineární zobrazení je až na nenulový násobek určeno jedním monomorfismem.

Věta 4.1.2 *Dvě kolineární zobrazení se rovnají, právě když se rovnají na prvcích některé geometrické báze.*

Věta 4.1.3 *Kolineární zobrazení zachovává lineární nezávislost bodů a incidenci bodů s podprostorem.*

Definice 4.1.2 *Řekneme, že dva projektivní prostory $\mathcal{P}, \mathcal{R}$ jsou izomorfní, existuje-li bijektivní kolineární zobrazení $\mathcal{P} \to \mathcal{R}$. Značíme $\mathcal{P} \simeq \mathcal{R}$.*

Věta 4.1.4 (O určenosti kolineárního zobrazení) *Ke každé geometrické bázi $R = \langle U_0, \dots, U_{n+1} \rangle$ projektivního prostoru $\mathcal{P}_n$ a každé $(n+2)$tici bodů $\langle V_0, \dots, V_{n+1} \rangle$ projektivního prostoru $\mathcal{R}_m$, z nichž každých (n+1) je lineárně nezávislých, existuje právě jedno kolineární zobrazení K takové, že: $U_0 \mapsto V_0, \dots, U_{n+1} \mapsto V_{n+1}$.*

Definice 4.1.3 *Nechť R je geometrická báze prostoru $\mathcal{P}$, S je geometrická báze prostoru $\mathcal{Q}$. Nechť dále $K : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ je kolineární zobrazení. Označme $A_R = (\underline{a}_0, \dots, \underline{a}_n)$ aritmetickou bázi v $\mathcal{P}$ určenou R. Dále označme $\xi(u_i) = (a_{i0}, \dots, a_{in})_S, 0 \leq i \leq n$. Pak matice $(K, R, S) = (a_{ij})$ se nazývá matice kolineárního zobrazení K vzhledem k homogenním soustavám souřadnic určených R, S.*

Věta 4.1.5 *Matice kolieárního zobrazení ve zvolených homogenních soustavách souřadnic je určena jednoznačně až na nenulový násobek.*

Věta 4.1.6 *Buď $K : \mathcal{P} \to \mathcal{R}$ kolineární zobrazení, (a_{ij}) jeho matice ve zvolených homogenních soustavách souřadnic. Buď $X = (x_0, \dots, x_n) \in \mathcal{P}$. Pak bod $(y_0, \dots, y_n)$ daný následující relací je bodem $K(X)$:*

$$\begin{aligned}
y_0 &= a_{00}x_0 + a_{10}x_1 + \dots + a_{n0}x_n \\
y_1 &= a_{01}x_0 + a_{11}x_1 + \dots + a_{n1}x_n \\
&\vdots \\
y_m &= a_{0m}x_0 + a_{1m}x_1 + \dots + a_{nm}x_n
\end{aligned}$$

Věta 4.1.7 *Buď $K = K(\xi) : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ kolineární zobrazení. Buďte dále $A, B, C, D \in \mathcal{P}_n$ ležící na přímce, $\delta = (ABCD)$. Pak také pro jejich obrazy platí: $\delta = (K(A), K(B), K(C), K(D))$, neboli kolineace zachovává dvojpoměr.*

4.2 Kolineace

Definice 4.2.1 *Kolineární zobrazení prostoru na sebe je kolineace.*

Lemma 4.2.1 *Kolineace je bijekce bodů prostoru na sebe.*

Věta 4.2.2 *Kolineace prostoru $\mathcal{P}$ spolu se skládáním $\circ$ tvoří grupu.*

Věta 4.2.3 *Buďte $\mathcal{A}_n(\mathbf{V}_n), \mathcal{A}'_n(\mathbf{V}_n)$ afinní prostory, $f : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_n$ bijektivní afinní zobrazení, φ asociovaný homomorfismus f. Pak existuje právě jedno kolineární zobrazení $F : \bar{\mathcal{A}}_n \to \bar{\mathcal{A}}'_n$ tak, že $F \mid \mathcal{A} = f$.*

Definice 4.2.2 *Kolineární zobrazení z věty 4.2.3 se nazývá projektivní rozšíření afinního zobrazení f a značí se $\bar{f}$.*

Věta 4.2.4 *Buď f afinita $\mathcal{A}_n$. Pak nadrovina nevlastních bodů se v projektivním rozšíření $\bar{f}$ zobrazí na sebe.*

Jedním z nejdůležitějších pojmů při zkoumání kolineací jsou tzv. samodružné prvky, neboť tvoří základ klasifikace kolineací v různých prostorech.

Definice 4.2.3 *Nechť K je kolineace $\mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$. Bod $X \in \mathcal{P}_n$ se nazývá samodružný, právě když platí $X = K(X)$. Množina M se nazývá silně samodružná, platí-li $M = K(M) \wedge \forall X \in M : X = K(X)$. Množina M se nazývá slabě samodružná, právě když $M = K(M) \wedge \{\exists X \in M : X \neq K(X)$.*

Věta 4.2.5 *Bod $X \in \mathcal{P}_n$ je samodružný bod kolineace $K \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbf{T}, \lambda \neq 0 :$*

$$(\mathbf{A}^T - \lambda\mathbf{E}) \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{A}$ je matice kolineace a $(x_0, \ldots, x_n)$ homogenní souřadnice bodu X.

4.3 Zobrazení podprostoru

Věta 4.3.1 *Buď K kolineace, $\mathbf{A}$ její matice v libovolné bázi. Nechť je dále $\mathcal{C} \subseteq\subseteq \mathcal{P}_n$, jeho matice $\mathbf{C}$ (matice soustavy obecných rovnic). Pak $K(\mathcal{C})$ má matici $\mathbf{C}' = \mathbf{C}(\mathbf{A}^{-1})^T$.*

Věta 4.3.2 *Nadrovina $c_0x_0 + \ldots + c_nx_n = 0$ je samodružná právě tehdy, když $\exists\lambda \neq 0 :$*

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Věta 4.3.3 *Buď $\mathbf{A}$ matice kolienace K v libovolné bázi A, $\mathbf{P}$ matice přechodu od $\mathbf{A}$ do $\mathbf{A}'$. Pak $\mathbf{PAP}^{-1}$ je matice kolineace K v A'.*

Definice 4.3.1 *Nechť je K kolineace, $\mathbf{A}$ její matice. Potom determinant $\mathbf{A}(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}|$ nazveme charakteristickým determinantem kolineace, polynom proměnné λ se nazývá charakteristický polynom kolineace. Rovnice $\mathbf{A}(\lambda) = 0$ se nazývá charakteristická rovnice kolineace a její kořeny se nazývají vlastní čísla kolineace (někdy charakteristické hodnoty kolineace).*

Věta 4.3.4 *Počet kořenů charakteristické rovnice včetně jejich násobnosti je kolineací určen jednoznačně.*

Věta 4.3.5 *Charakteristická rovnice má včetně násobností n+1 kořenů, z nichž žádný není roven nule.*

Věta 4.3.6 *Každý kořen charakteristické rovnice určuje alespoň jednu samodružnou nadrovinu a alespoň jeden samodružný bod.*

Lemma 4.3.7

1. *λ je k-násobným kořenem charakteristického polynomu* $\mathrm{ch}(X) \Leftrightarrow 0 = \mathrm{ch}(\lambda) = \mathrm{ch}'(\lambda) = \ldots = \mathrm{ch}^{(k-1)} \wedge \mathrm{ch}^{(k)} \neq 0$.
2. $\mathrm{ch}^{(k)}(\lambda) = (-1)^k k! S_{n-k+1}$*, kde S_{n-k+1} je součet všech hlavních subdeterminantů matice $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ stupně n-k+1.*

Věta 4.3.8 *Mezi násobností r_α kořene α charakteristické rovnice kolineace o matici A a hodností $h_\alpha = h(\mathbf{A} - \alpha\mathbf{E})$ exituje následující vztah: $h_\alpha + r_\alpha \geq n+1$.*

Důsledek

1. Pro jednoduchý kořen α je $h(A - \alpha E) = n$.
2. Každému jednoduchému kořenu odpovídá právě jeden samodružný bod a právě jedna samodružná nadrovina.

4.4 Incidence samodružných bodů a samodružných nadrovin

Počet kořenů charakteristické rovnice kolineace, jejich násobnost a hodnost matice $\mathbf{A}(\lambda)$ pro každý kořen λ podstatným způsobem determinuje jak existenci samodružných bodů a samodružných nadrovin kolineace, tak vztahy incidence mezi těmito objekty. Tuto závislost popisují následující věty.

Věta 4.4.1 *Různým vlastním číslům téže kolineace odpovídají různé samodružné body a různé samodružné nadroviny.*

Věta 4.4.2 *Samodružný bod a samodružná nadrovina odpovídající různým vlastním číslům téže kolineace spolu incidují.*

Věta 4.4.3 *Samodružný bod a samodružná nadrovina odpovídající témuž jednoduchému kořenu charakteristické rovnice spolu neincidují. Odpovídá-li témuž násobnému kořenu jediný samodružný bod a jediná samodružná nadrovina, pak spolu incidují.*

4.5 Klasifikace kolineací

Zjištění všech typů kolineací projektivního prostoru je základem, ze kterého se odvozují všechny běžně známé geometrické transformace rozmanitých prostorů. Nejprve vyslovíme potřebné věty a vlastnosti a poté provedeme klasifikaci kolineací projektivní přímky, projektivní roviny a projektivního prostoru nad tělesem komplexních čísel.

Lemma 4.5.1 *Nechť K je kolineace, $\mathbf{A}$ její matice. Potom platí:*

1. *Bod $O_i = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0), i = 1, 2, \ldots, n$ je samodružným bodem kolineace K právě tehdy, když i-tý řádek matice $\mathbf{A}$ má tvar*

$$(0\ 0\ \ldots a_{ii}\ 0 \ldots 0), a_{ii} \neq 0.$$

2. *Nadrovina $x_i = 0, i = 1, 2, \ldots, n$ je samodružná nadrovina kolineace K právě tehdy, když i-tý sloupec matice $\mathbf{A}$ má tvar*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_{ii} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, a_{ii} \neq 0.$$

Definice 4.5.1 *Dvě matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ téhož řádu jsou podobné právě tehdy, když existuje matice $\mathbf{Q}$ stejného řádu taková, že $\mathbf{B} = \mathbf{Q}AQ^{-1}$. Značíme $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B}$.*

Definice 4.5.2 *Nechť K, L jsou kolineace prostoru $\mathcal{P}$. Řekneme, že kolineace K, L jsou ekvivalentní, jestliže existuje soustava souřadnic tak, že příslušné matice kolineací jsou podobné. Značíme $K \sim L$.*

Věta 4.5.2 *Jsou-li $K \sim L$, pak jsou jejich matice podobné v libovolné soustavě souřadnic.*

Věta 4.5.3 *Relace ekvivalence kolineací je relací ekvivalence na množině kolineací daného projektivního prostoru.*

Věta 4.5.4 *Počet kořenů charakteristické rovnice kolineace a jejich násobnost je invariantem relace ekvivalence kolineací.*

Věta 4.5.5 *Dvě kolineace jsou ekvivalentní tehdy a jen tehdy, když množiny jejich samodružných bodů a samodružných nadrovin jsou izomorfní.*

Definice 4.5.3 *Třída rozkladu množiny kolineací daného projektivního prostoru podle relace ekvivalence kolineací se nazývá typ kolineace.*

Definice 4.5.4 *Stanovení všech typů kolineací v prostoru $\mathcal{P}_n$ se nazývá klasifikace kolineací v $\mathcal{P}_n$.*

Algebraickým základem klasifikace kolineací je roztřídění všech matic kolineací

- podle počtu kořenů charakteristické rovnice a jejich násobností a
- podle hodnosti matice $\mathbf{A}(\lambda)$ pro každou regulární matici $\mathbf{A}$ a každý kořen λ charakteristické rovnice.

Úplné roztřídění množiny všech regulárních matic daného stupně podle uvedených kritérií dává jako nejjednodušší reprezentanty tříd tzv. Jordanovy kanonické tvary matic. Kolineace určené těmito maticemi ve standardní soustavě souřadnic se nazývají kanonické tvary kolineací.

Pro hodnoty $n = 1, 2, 3$ rozměrů prostoru se kanonické tvary kolineací zjistí pomocí převážně geometrického přístupu, který se zakládá hlavně na Lemmatu 4.5.1.

Klasifikaci kolineací v projektivním prostoru $\mathcal{P}_n$ provedeme podle následujícího algoritmu:

1. Určíme všechny možnosti pro počet a násobnost kořenů charakteristické rovnice libovolné kolineace v $\mathcal{P}_n$. (Charakteristická rovnice má stupeň n+1).

2. Pro každý kořen λ charakteristické rovnice libovolné kolineace stanovíme všechny možné hodnosti matice $\mathbf{A}(\lambda)$.

3. Pro každou hodnost matice $A(\lambda)$ zjistíme množinu všech samodružných bodů a samodružných nadrovin přináležících kořenu λ.

4. Zjistíme všechny vztahy incidence mezi samodružnými body a samodružnými nadrovinami kolineace.

5. Pomocí výběru vhodné soustavy souřadnic vyjádříme kolineaci v nejjednodušším algebraickém tvaru, který je určený kanonickým tvarem matice kolineace.

Přitom použijeme poznatky uvedené v předchozích větách. Vzhledem k rozsahu práce zde nebudeme dopodrobna uvádět celý postup klasifikace, uvedeme pouze výsledky.

Klasifikace kolineací projektivní přímky nad tělesem komplexních čísel.

Věta 4.5.6 *Každá kolineace projektivní přímky nad tělesem komplexních čísel patří právě k jednomu z následujících typů:*

1. *Hyperbolická projektivita* $\Leftrightarrow$ *kolineace má dva různé samodružné body. Kanonická matice kolineace má tvar*

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

2. *Parabolická projektivita* $\Leftrightarrow$ *kolineace má právě jeden samodružný bod. Kanonická matice kolineace má tvar*

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

3. *Identická projektivita* $\Leftrightarrow$ *všechny body v kolineaci jsou samodružné. Kanonická matice kolineace má tvar*

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

Důsledek
Má-li projektivita na přímce tři samodružné body, z nichž každé dva jsou různé, je identickou projektivitou.

Definice 4.5.5 *Neidentická kolineace* $K : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ *se nazývá involuce (involutorní kolineace) právě tehdy, když* $K^2 = K \circ K = \mathrm{id}$.

Věta 4.5.7 *Každá involuce projektivní přímky nad tělesem komplexních čísel má dva různé samodružné body.*

Věta 4.5.8 *Kanonický tvar involuce na přímce je*

$$
\begin{aligned}
x_0' &= x_0 \\
x_1' &= \quad -x_1
\end{aligned}
$$

V následujících odstavcích při klasifikaci kolineací v rovině a v prostoru přidáme pro názornost i obrázky znázorňující vztahy samodružných prvků. Přitom se budeme držet následujícího označení:

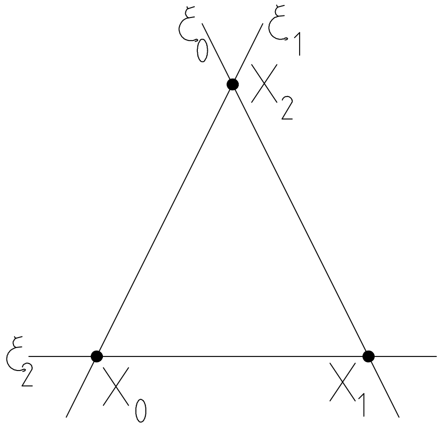
- Samodružný bod odpovídající vlastnímu číslu λ_n budeme značit X_n.
- Nastane-li situace, že jednomu vlastnímu číslu λ_n odpovídá přímka či rovina samodružných bodů, tento útvar budeme značit x_n.
- Samodružnou nadrovinu odpovídající vlastnímu číslu λ_n označíme ξ_n.
- Svazek či trs samodružných nadrovin odpovídající číslu λ_n označíme χ_n.

Klasifikace kolineací v rovině nad tělesem komplexních čísel.

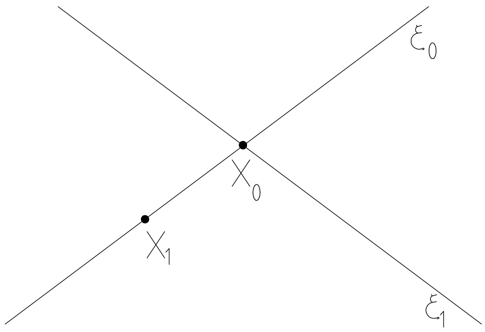
Věta 4.5.9 *V projektivní rovině nad tělesem komplexních čísel existuje právě šest typů kolineací:*

1. *existují právě 3 samodružné body a 3 samodružné přímky. Kanonický tvar matice je*
$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \lambda_0 \neq \lambda_1 \neq \lambda_2,$$

2. *existují právě 2 samodružné body a 2 samodružné přímky. Kanonický tvar matice je*
$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$



Obrázek 4.1: Věta č. 4.5.9-1.



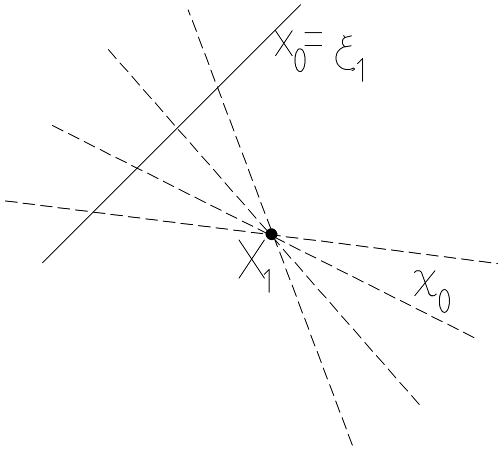
Obrázek 4.2: Věta č. 4.5.9-2.

3. existuje právě jeden samodružný bod (střed svazku samodružných přímek) neležící na samodružné přímce. Tato kolineace se nazývá homologie (nebo perspektivní kolineace). Kanonický tvar matice je

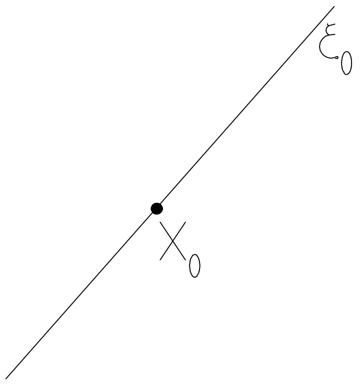
$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

4. existuje právě jeden samodružný bod ležící na samodružné přímce. Kanonický tvar matice je

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_0 \end{pmatrix},$$



Obrázek 4.3: Věta č. 4.5.9-3.



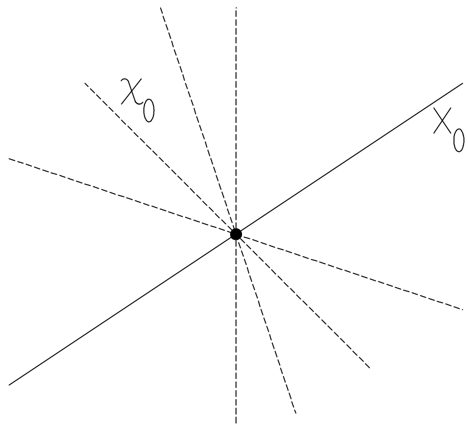
Obrázek 4.4: Věta č. 4.5.9-4.

5. *existuje přímka samodružných bodů p a svazek samodružných přímek se středem na přímce p. Tento typ kolineace se nazývá elace. Kanonický tvar matice je*

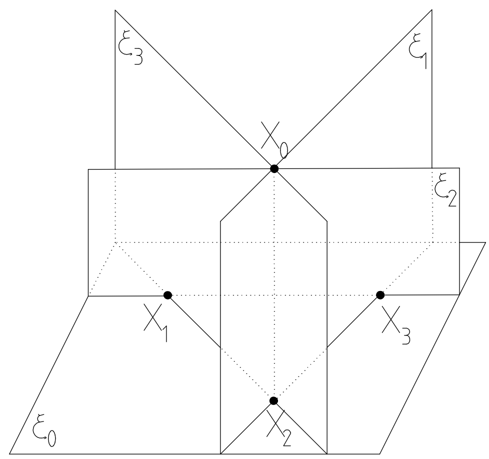
$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_0 \end{pmatrix},$$

6. *identita s maticí v kanonickém tvaru*

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$



Obrázek 4.5: Věta č. 4.5.9-5.



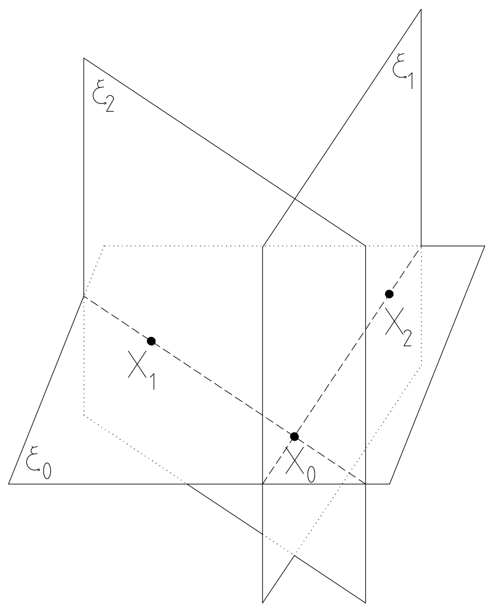
Obrázek 4.6: Věta č. 4.5.10-1.

Klasifikace kolineací v prostoru nad tělesem komplexních čísel.

Věta 4.5.10 *V projektivním prostoru nad tělesem komplexních čísel existuje právě 14 typů kolineací:*

1. *existují právě 4 samodružné body a 4 samodružné roviny. Matice kolineace má kanonický tvar*

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$



Obrázek 4.7: Věta č. 4.5.10-2.

2. *existují právě 3 samodružné body a 3 samodružné roviny. Kanonický tvar matice je*

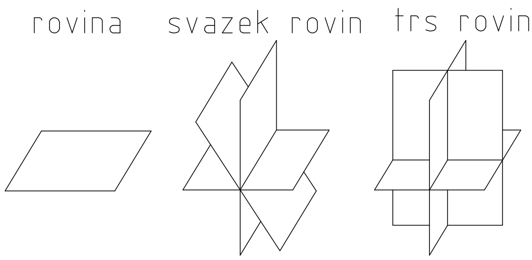
$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

3. *existuje přímka samodružných bodů a svazek samodružných rovin. Matice má kanonický tvar*

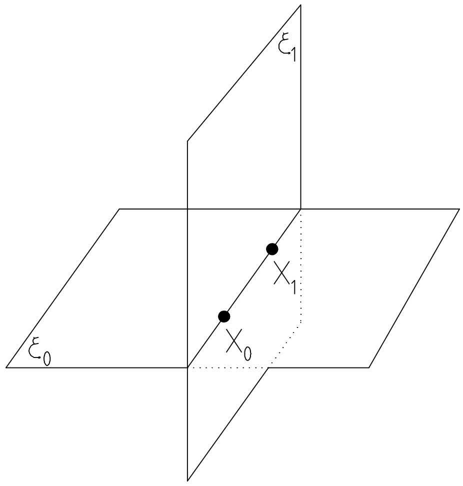
$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

4. *existují dvě samodružné roviny a dva samodružné body ležící na průsečnici samodružných rovin. Kanonický tvar matice kolineace je*

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$



Obrázek 4.8: Věta č. 4.5.10-3.



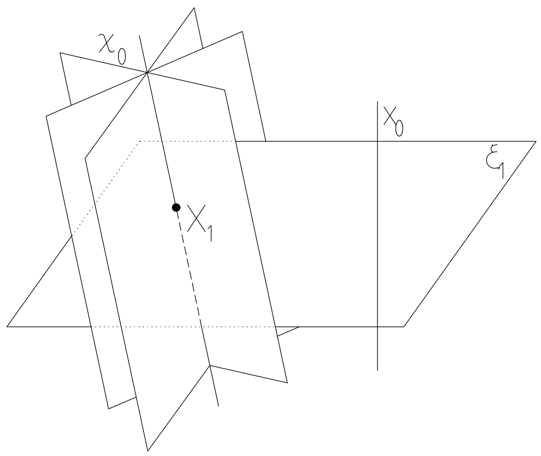
Obrázek 4.9: Věta č. 4.5.10-4.

5. *existuje přímka samodružných bodů a svazek samodružných rovin, jehož osa inciduje s dalším samodružným bodem, neležícím na již zmíněné přímce. Matice kolineace má kanonický tvar*

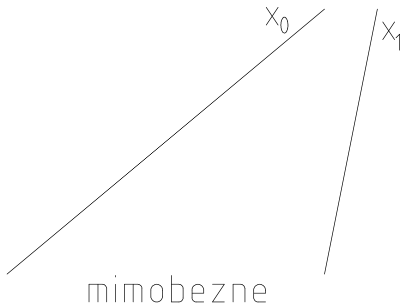
$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

6. *existují dvě mimoběžné přímky samodružných bodů. Tato kolineace se nazývá dvojosá kolineace a její matice má kanonický tvar*

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$



Obrázek 4.10: Věta č. 4.5.10-5.



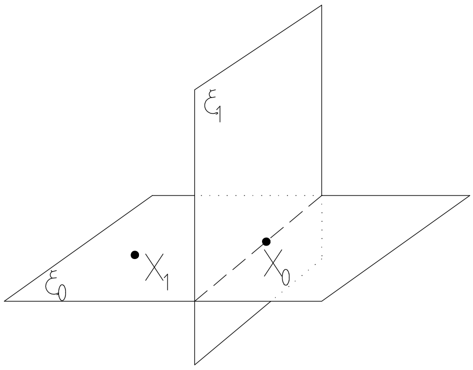
Obrázek 4.11: Věta č. 4.5.10-6.

7. *existují dvě samodružné roviny a dva samodružné body, z nichž jeden leží na průsečnici samodružných rovin a druhý v jedné ze samodružných rovin. Kanonický tvar matice kolineace je*

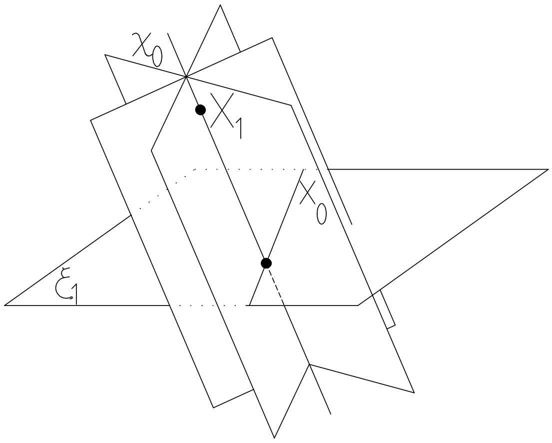
$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

8. *existuje přímka samodružných bodů a svazek samodružných rovin, přičemž existuje samodružná rovina incidující s osou svazku a přímkou samodružných bodů. Matice této kolineace má kanonický tvar*

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$



Obrázek 4.12: Věta č. 4.5.10-7.

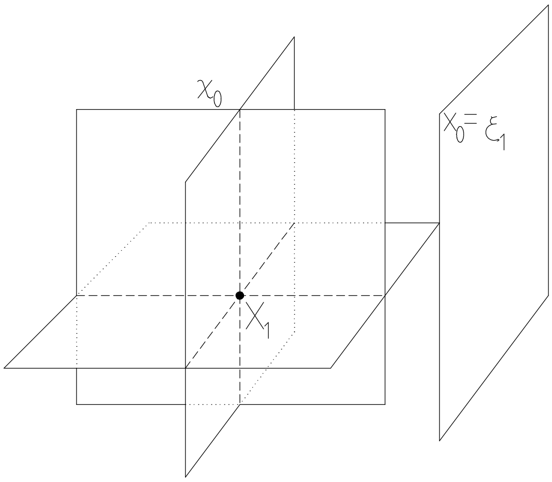


Obrázek 4.13: Věta č. 4.5.10-8.

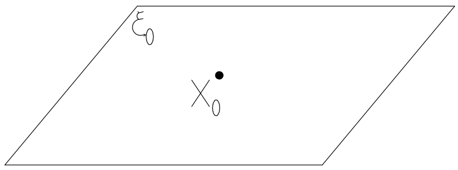
9. *existuje rovina samodružných bodů a trs samodružných rovin se středem, který neleží v rovině samodružných bodů. Tato kolineace se nazývá prostorová homologie nebo také perspektivní kolineace. Její matice má kanonický tvar*

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

10. *existuje jediný samodružný bod a jediná samodružná rovina, které spolu*



Obrázek 4.14: Věta č. 4.5.10-9.



Obrázek 4.15: Věta č. 4.5.10-10.

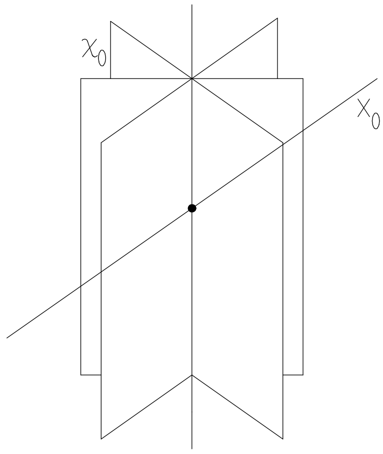
incidují. Matice kolineace má kanonický tvar

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_0 \end{pmatrix},$$

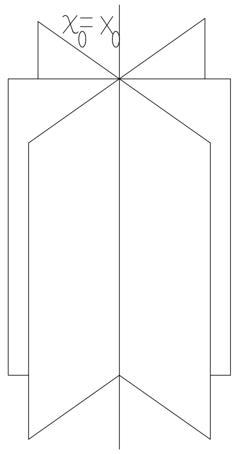
11. *existuje přímka samodružných bodů a svazek samodružných rovin, přičemž osa svazku je různá od přímky samodružných bodů. Tato kolineace má matici*

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_0 \end{pmatrix},$$

12. *exituje přímka samodružných bodů a svazek samodružných rovin, přičemž osa tohoto svazku je právě přímka samodružných bodů. Kanonický*



Obrázek 4.16: Věta č. 4.5.10-11.

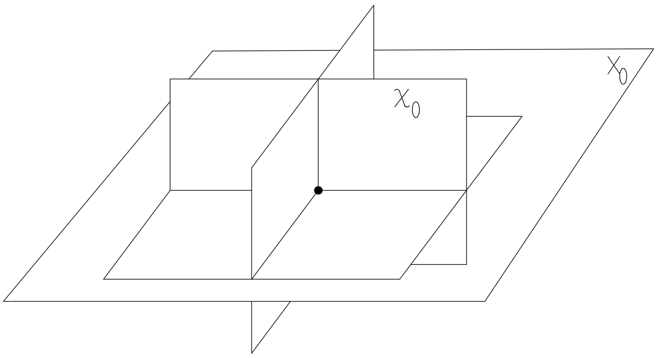


Obrázek 4.17: Věta č. 4.5.10-12.

tvar matice kolineace je

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_0 \end{pmatrix},$$

13. *existuje rovina samodružných bodů a trs samodružných rovin se středem v rovině samodružných bodů. Tato kolineace se nazývá prostorová elace*



Obrázek 4.18: Věta č. 4.5.10-13.

a její matice má kanonický tvar

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix},$$

14. *každý bod je samodružný, jedná se tedy o identitu. Matice kolineace má tvar*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kapitola 5

Příklady

Příklad 1 *K dané geometrické bázi* $R = \langle U_0, U_1, U_2, U_3\rangle$ *nalezněte bázi aritmetickou.* $U_0 = [(2;0;0)]$, $U_1 = [(3;3;0)]$, $U_2 = [(0;0;-1)]$, $U_3 = [(2;1;1)]$.

Řešení
Libovolný bod dané geometrické báze, např. U_3, vyjádříme jako lineární kombinaci zbylých tří bodů:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right),$$

tedy $(2;1;1) = \frac{1}{2}(2;0;0) + \frac{1}{3}(3;3;0) - (0;0;-1)$. Za vektory aritmetické báze vezmeme souřadnice bodů U_0, U_1, U_2 vynásobené příslušným koeficientem, tedy $A = \langle(1;0;0),(1;1;0),(0;0;1)\rangle$.

Příklad 2 *Najdětě transformační rovnice pro přechod od soustavy souřadnic dané gometrickou bází* $\mathcal{S} = \langle U_0, U_1, U_2, U_3\rangle$ *k soustavě dané geometrickou bází* $\mathcal{S}' = \langle V_0, V_1, V_2, V_3\rangle$ *v* $\mathcal{P}_2$. $U_0 = [(1;0;2)], U_1 = [(0;1;1)], U_2 = [(2;0;0)], U_3 = [(3;-1;3)], V_0 = [(1;1;0)], V_1 = [(-1;1;1)], V_2 = [(2;0;1)], V_3 = [(8;2;-1)]$.

Řešení
Ověříme, že se skutečně jedná o geometrické báze. Snadno zjistíme, že každé tři body z bodů $U_0, \ldots U_3$, resp. $V_0, \ldots V_3$ jsou lineárně nezávislé. Stejně jako v Příkladu 1 najdeme příslušné aritmetické báze:

$$(3;1;-3) = 2(1;0;2) - (0;1;1) + \frac{1}{2}(2;0;0),$$

aritmetická báze $A_1 = \langle(2;0;4),(0;-1;-1),(1;0;0)\rangle$. A dále

$$(8;2;-1) = 4(1;1;0) - 2(-1;1;1) + (2;0;1),$$

aritmetická báze $A_2 = \langle(4;4;0),(2;-2;-2),(2;0;1)\rangle$. Nyní podle Věty 3.2.7 již můžeme určit matici přechodu.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -8 & -6 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -12 & -4 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 12 & 4 & 3 \end{array}\right).$$

Matice přechodu vypadá následovně:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Rovnice přechodu tedy mají tvar

$$\begin{aligned} kx_0 &= -y_0 - 4y_1 + 6y_2 \\ kx_1 &= \phantom{-y_0 - {}} 2y_1 + 2y_2 \\ kx_2 &= \frac{1}{4}y_0 + \frac{3}{2}y_2 \end{aligned}$$

nebo ekvivalentně

$$\begin{aligned} cx_0 &= -4y_0 - 16y_1 + 24y_2 \\ cx_1 &= \phantom{-4y_0 - {}} 8y_1 + 8y_2 \\ cx_2 &= y_0 + 6y_2. \end{aligned}$$

Příklad 3 *Geometrickou bázi soustavy souřadic $\mathcal{S}'$ tvoří body $O_0' = [(2;1;-1)], O_1' = [(0;3;1)]$, $O_2' = [(1;-1;0)], O_3' = [(-3;1;2)]$.*

a) Najděte souřadice bodu X[4;1;-2] v této soustavě souřadnic.

b) Najděte rovnice přechodu mezi danou sousatavou $\mathcal{S}'$ a soustavou $\mathcal{S} = \langle [(1;0;0)],[(0;1;0)],[(0;0;1)],[(1;1;1)]\rangle$.

Řešení

a) Snadno ověříme, že každé tři body z báze $\mathcal{S}'$ jsou lineárně nezávislé. Jedná se tedy o geometrickou bázi. Pro zvolené reprezentanty bodů platí:

$$(-3\lambda, \lambda, 2\lambda) = (2\rho, \rho, -\rho) + (0, 3\sigma, \sigma) + (\tau, -\tau, 0).$$

To pro souřadnice znamená

$$\begin{aligned} -3\lambda &= 2\rho + \tau \\ \lambda &= \rho + 3\sigma - \tau \\ 2\lambda &= -\rho + \sigma. \end{aligned}$$

Všechny kořeny těchto rovnic splňují podmínky $\rho = -\frac{4}{3}\lambda, \sigma = \frac{2}{3}\lambda, \tau = -\frac{1}{3}\lambda$. Pro $\lambda = 3$ má bod $[(-3\lambda, \lambda, 2\lambda)]$ reprezentanta $(-9;3;6)$ a zadané body mají reprezentanty $O'_0 = (-8;-4;4), O'_1 = (0;6;2), O'_2 = (-1;1;0)$. Pro souřadnice (x'_0, x'_1, x'_2) bodu [(4;1;-2)] vzhledem k soustavě $\langle O'_0, O'_1, O'_2, O'_3\rangle$ platí:

$$\begin{aligned} 4\lambda &= -8x'_0 - x'_2 \\ \lambda &= -4x'_0 + 6x'_1 + x'_2 \\ -2\lambda &= 4x'_0 + 2x'_1. \end{aligned}$$

Vyřešením této soustavy rovnic dostaneme podmínky $x'_0 = -\frac{11}{24}\lambda, x'_1 = -\frac{1}{12}\lambda, x'_2 = -\frac{1}{3}\lambda$. Pro $\lambda = -24$ má bod [(4;1;-2)] vzhledem k soustavě souřadnic $\mathcal{S}'$ nejjednoduššího reprezentanta (11;2;8).

b) Přechod mezi soustavami $\mathcal{S}$ a $\mathcal{S}'$ je vyjádřen rovnicemi

$$\begin{aligned} cx_0 &= -8x'_0 - x'_2 \\ cx_1 &= -4x'_0 + 6x'_1 + x'_2 \\ cx_2 &= 4x'_0 + 2x'_1, \end{aligned}$$

nebo ekvivalentně

$$\begin{aligned} kx'_0 &= -\frac{1}{24}x_0 - \frac{1}{24}x_1 + \frac{1}{8}x_2 \\ kx'_1 &= \frac{1}{12}x_0 + \frac{1}{12}x_1 + \frac{1}{4}x_2 \\ kx'_2 &= -\frac{2}{3}x_0 + \frac{1}{3}x_1 - x_2. \end{aligned}$$

Příklad 4 *Ukažte, že body s reprezentanty* $A = (2; 3; -2), B = (1; 2; -4)$, $C = (0; 1; -6)$ *incidují s jednou přímkou. Určete* λ, μ *tak, aby* $A = \lambda B + \mu C$. *Určete* x_2 *v trojici* $(4; -1; x_2)$ *tak, aby bod s tímto reprezentantem incidoval s přímkou* $\overleftrightarrow{AB}$ *a najděte* σ, τ *tak, aby* $(4; -1; x_2) = \sigma A + \tau B$.

Řešení
Pro libovolný bod X přímky $\overleftrightarrow{AB}$ platí:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

pro body A, B, C platí

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -6 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

tedy bod C inciduje s přímkou $\overleftrightarrow{AB}$.

Dále chceme určit λ, μ tak, aby $(2; 3; -2) = \lambda(1; 2; -4) + \mu(0; 1; -6)$. Ze zadaného je zřejmé, že $\lambda = 2$ a $\mu = -1$.
K dourčení třetí souřadice bodu $(4; -1; x_2)$ opět využijeme determinant:

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & x_2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0, x_2 = 38.$$

Nakonec nalezeme σ, τ tak, aby $(4; -1; 38) = \sigma(2; 3; -2) + \tau(1; 2; -4)$. Řešíme tedy soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 4 &= 2\sigma + \tau \\ -1 &= 3\sigma + 2\tau \\ 38 &= -2\sigma - 4\tau. \end{aligned}$$

Ta má jediné řešení $\sigma = 9, \tau = -14$.

Příklad 5 *a) Ukažte„ že body* $A = (3; -1; 4; 2), B = (2; 4; -1; -3)$, $C = (8; 2; 7; 1), D = (1; -5; 5; 5)$ *projektivního prosoru* $\mathcal{P}_3$ *nad tělesem* $\mathcal{R}$ *jsou lineárně závislé.*

b) Najděte vyjádření lineární závislosti bodů A, B, C, D.

c) Určete bod K *tak, aby s body* A, B, C *tvořil harmonickou čtveřici.*

Řešení

a) Zkoumáme hodnost matice

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & -3 \\ 8 & 2 & 7 & 1 \\ 1 & -5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 14 & -11 & -13 \\ 0 & -14 & 11 & 13 \\ 0 & 14 & -11 & -13 \end{pmatrix},$$

ta je 2, body A, B, C, D jsou tedy lineárně závislé.

b) Hledáme koeficienty u_1, u_2, v_1, v_2 tak, aby platilo $C = u_1A + u_2B$, $D = v_1A + v_2B$. Řešíme dvě soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} 8 &= 3u_1 + 2u_2 \\ 2 &= -u_1 + 4u_2 \\ 7 &= 4u_1 - u_2 \\ 1 &= 2u_1 - 3u_2, \end{aligned}$$

jejímž řešením je $(u_1, u_2) = (2, 1)$ a

$$\begin{aligned} 1 &= 3v_1 + 2v_2 \\ -5 &= -v_1 + 4v_2 \\ 5 &= 4v_1 - v_2 \\ 5 &= 2v_1 - 3v_2, \end{aligned}$$

jejímž řešením je $(v_1, v_2) = (1, -1)$.

c) Platí $C = u_1A + u_2B$, kde $u_1 = 2, u_2 = 1$ a dále musí existovat koeficienty $w_1, w_2 \in \mathcal{R}$ takové, že $k = w_1A + w_2B$. Nechť na přímce AB mají body následující souřadnice: $A = (1; 0), B = (0; 1)$, pak $C = (2; 1), K = (w_1; w_2)$. Body A, B, C, K mají tvořit harmonickou čtveřici, tedy jejich dvojpoměr $(ABCK) = -1$. Dvojpoměr je definován jako $\delta = \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{w_1}{w_2}$. V našem případě tedy

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{w_1}{w_2} = -1.$$

To splňují například $(w_1, w_2) = (-2; 1)$ a zástupce bodu $K = (-4; 6; -9; -7)$.

Příklad 6 *V rovině $\bar{\mathcal{E}}_2$ je dána přímka $2x + 5y + 7 = 0$. Určete homogennní souřadnice jejího nevlastního bodu.*

Řešení
Nevlastní bod určuje směr přímky. Směrový vektor zadané přímky je $\underline{u} = (5; -2)$ a proto nevlastní bod přímky má souřadnice $x = (0; 5; -2)$.

Příklad 7 *V rovině $\bar{\mathcal{E}}_2$ jsou dány body $A = (0; 3; 2), B = (2; 8; 2)$. Napište obecnou rovnici přímky $\overleftrightarrow{AB}$ a určete její nevlastní bod.*

Řešení
Obecná rovnice přímky je určena determinantem

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

tedy $p : 5x - 0 - 2x_1 + 3x_2 = 0$. Nevlastní bod přímky je přímo zadaný bod $A = (0; 3; 2)$.

Příklad 8 *V prostoru $\bar{\mathcal{E}}_3$ je přímka popsána v homogenních souřadicích rovnicemi*

$$\begin{aligned} 2x_0 + 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 7x_0 - 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Určete její nevlastní bod.

Řešení
Pro homogenní souřadnice nevlastního bodu platí, že $x_0 = 0$. Řešíme proto pouze rovnice

$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= 0 \\ -4x_1 + 4x_2 - 4x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Pro homogenní souřadnice hledaného nevlastního bodu tedy musí platit $x_0 = 0$, $x_2 = 2x_1 = 2x_3$. Řešením je tedy bod $X = [(0; 1; 2; 1)]$.

Příklad 9 *Napište rovnici roviny ρ, která v prostoru $\mathcal{P}_3$ prochází body $A = (2, -1, 1, 2)$, $B = (1; 0; 0; -1)$, $C = (3; 2; 2; -3)$.*

Řešení
Obecná rovnice nadroviny procházející body $A = (a_0, a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_0, b_1, b_2, b_3)$, $C = (c_0, c_1, c_2, c_3)$ je určena determinantem

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

V našem případě tedy

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\rho : x_0 + 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0.$$

Příklad 10 *V prostoru $\mathcal{P}_4$ najděte společný bod M nadrovin*

$$\begin{aligned} x_0 - x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 &= 0 \\ 2x_0 + x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 10x_4 &= 0 \\ -6x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_0 + 10x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 6x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Řešení
Řešíme homogenní soustavu rovnic.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & -10 \\ 0 & -6 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 10 & -2 & -4 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že musí platit $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = x_4$, řešením je tedy bod $M = (1; 1; 1; 1; 1)$.

Příklad 11 *V prostoru $\bar{\mathcal{A}}_3$ určete průsečík P přímky $\overleftrightarrow{AB}$ s rovinou CDE. V dané aritmetické bázi je $A = (1; 0; 1; 0), B = (0; -1; 1; 2), C = (1; 0; 0; 0)$, $D = (1; 2; 0; 1), E = (1; 0; 2; -5)$.*

Řešení
Přímku $\overleftrightarrow{AB}$ vyjádříme parametricky:

$$\begin{aligned} x_0 &= t_0 \\ x_1 &= \quad\; -t_1 \\ x_2 &= t_0 + \; t_1 \\ x_3 &= \quad\;\; 2t_1. \end{aligned}$$

Nalezneme obecnou rovnici roviny CDE :

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -5 \end{vmatrix} = (-1)^{(1+2)} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 2x_1 - 10x_2 - 4x_3.$$

Tedy rovnice dané roviny je $CDE : 2x_1 - 10x_2 - 4x_3 = 0$. Nyní už dosazením nalezneme průsečík P:

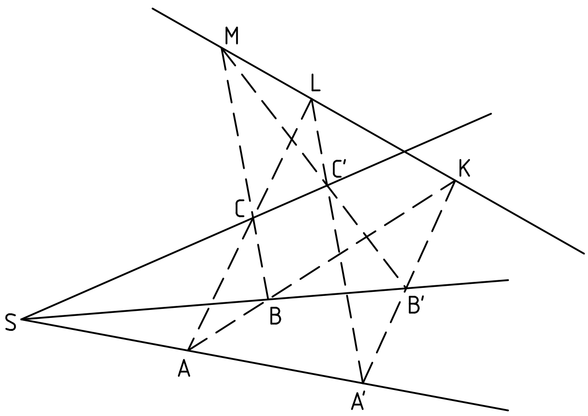
$$\begin{aligned} -2t_1 - 10t_0 - 10t_1 - 8t_1 &= 0 \\ t_0 &= -2t_1, \end{aligned}$$

řešením je např. $t_0 = 1, t_1 = -\frac{1}{2}$ a bod P má v dané aritmetické bázi souřadnice $P = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1) = (2; 1; 1; -2)$.

Příklad 12 *V rovině $\bar{\mathcal{A}}_2$ jsou dány dvě trojice různých bodů A, B, C, A', B', C' tak, že existuje bod S různý od všech těchto bodů a pro který platí $A' \in \overleftrightarrow{SA}$, $B' \in \overleftrightarrow{SB}, C' \in \overleftrightarrow{SC}$.*
Dokažte, že existuje přímka $p \subset \bar{\mathcal{A}}_2$ tak, že $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} \cap p \neq \emptyset$, $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'} \cap p \neq \emptyset$, $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'} \cap p \neq \emptyset$.

Řešení
Důkaz provedeme výpočtem. Vhodně zvolíme aritmetickou bázi: nechť tedy bez újmy na obecnosti mají body následující suřadnice:
$S = (1; 0; 0), A = (0; 1; 0), B = (0; 0; 1), C = (1; 1; 1)$. Přímka $\overleftrightarrow{SA}$ má rovnici $x_2 = 0$ a tedy bod $A' = (a_0; a_1; 0)$, přímka $\overleftrightarrow{SB}$ má rovnici $x_1 = 0$ a tedy bod $B' = (b_0; 0; b_2)$, přímka $\overleftrightarrow{SC}$ má rovnici $x_1 - x_2 = 0$ a tedy bod $C' = (c_0, c_1, c_1)$.

- $$\overleftrightarrow{AB} : \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$



Obrázek 5.1: Desarguesova věta

$$\overleftrightarrow{A'B'} : \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ a_0 & a_1 & 0 \\ b_0 & 0 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Rovnice přímek

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{AB} &: \quad x_0 = 0, \\ \overleftrightarrow{A'B'} &: \quad a_1 b_2 x_0 - a_0 b_2 x_1 - a_1 b_0 x_2 = 0, \\ \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} &: \quad -a_0 b_2 x_1 = a_1 b_0 x_2. \end{aligned}$$

Tedy průsečík přímek $\overleftrightarrow{AB}$ a $\overleftrightarrow{A'B'}$ $K = (0; a_1 b_0; -a_0 b_2)$.

•

$$\overleftrightarrow{AC} : \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\overleftrightarrow{A'C'} : \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ a_0 & a_1 & 0 \\ c_0 & c_1 & c_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Rovnice přímek

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{AC} &: \quad x_0 - x_2 = 0, \\ \overleftrightarrow{A'C'} &: \quad a_1 c_1 x_0 - a_0 c_1 x_1 + (a_0 c_1 - a_1 c_0) x_2 = 0, \\ \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'} &: \quad -a_0 c_1 x_1 + (a_1 c_1 + a_0 c_1 - a_1 c_0) x_2 = 0. \end{aligned}$$

Tedy průsečík přímek $\overleftrightarrow{AC}$ a $\overleftrightarrow{A'C'}$ $L = (a_0 c_1; a_1 c_1 + a_0 c_1 - a_1 c_0; a_0 c_1)$.

•

$$\overleftrightarrow{BC}:\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$\overleftrightarrow{B'C'}:\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ b_0 & 0 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_1 \end{vmatrix}=0.$$

Rovnice přímek

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{BC} &: \; x_0 - x_1 = 0, \\ \overleftrightarrow{B'C'} &: \; -c_1b_2x_0 + (c_0b_2 - b_0c_1)x_1 + b_0c_1x_2 = 0, \\ \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'} &: \; (c_0b_2 - b_0c_1 - c_1b_2)x_1 + b_0c_1x_2 = 0. \end{aligned}$$

Tedy průsečík přímek $\overleftrightarrow{BC}$ a $\overleftrightarrow{B'C'}$ $M = (b_0c_1; b_0c_1; -c_0b_2 + b_0c_1 + c_1b_2)$.

• Body K, L, M jsou kolineární, právě když platí:

$$\begin{vmatrix} K \\ L \\ M \end{vmatrix} = 0,$$

tedy

$$\begin{vmatrix} 0 & a_1b_0 & -a_0b_2 \\ a_0c_1 & a_0c_1 + a_1c_1 - a_1c_0 & a_0c_1 \\ b_0c_1 & b_0c_1 & -c_0b_2 + b_0c_1 - c_1b_2 \end{vmatrix} =$$

$= a_0a_1b_0^2c_1^2 - a_0^2b_0b_2c_1^2 + a_0^2b_0b_2c_1^2 + a_0a_1b_0b_2c_1^2 - a_0a_1b_0b_2c_0c_1 + a_0a_1b_0b_2c_0c_1 - a_0a_1b_0^2c_1^2 - a_0a_1b_0b_2c_1^2 = 0.$

Věta, kterou jsme právě dokázali, se nazývá Desarguesova věta.

Příklad 13 *Napište rovnice kolineace $K : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$, která bodům přiřadí jejich obrazy:* $A = (0; 1; 0) \mapsto A' = (-2; -1; 1)$, $B = (1; -1; 0) \mapsto B' = (5; 3; -3)$, $C = (1; 0; -1) \mapsto C' = (1; -1; 0)$, $D = (0; 0; -1) \mapsto D' = (-2; -3; 2)$.

Řešení

Rovnice kolineace mají obecný tvar

$$\begin{aligned} x_0' &= a_{00}x_0 + a_{10}x_1 + a_{20}x_2 \\ x_1' &= a_{01}x_0 + a_{11}x_1 + a_{21}x_2 \\ x_2' &= a_{02}x_0 + a_{12}x_1 + a_{22}x_2. \end{aligned}$$

Dosazením zadaných bodů získáme podmíky pro koeficienty.

1. Dosazením souřadnic bodů A, A' :

$$\begin{aligned} -2c_1 &= a_{10} \\ -c_1 &= a_{11} \\ c_1 &= a_{12} \end{aligned}$$

2. Dosazením souřadnic bodů B, B' :

$$\begin{aligned} 5c_2 &= a_{00} - a_{10} \\ 3c_2 &= a_{01} - a_{11} \\ -3c_2 &= a_{02} - a_{12} \end{aligned}$$

3. Dosazením souřadnic bodů C, C' :

$$\begin{aligned} c_3 &= a_{00} - a_{20} \\ -c_3 &= a_{01} - a_{21} \\ 0 &= a_{02} - a_{22} \end{aligned}$$

4. Dosazením souřadnic bodů D, D' :

$$\begin{aligned} -2c_4 &= -a_{20} \\ -3c_4 &= -a_{21} \\ 2c_4 &= -a_{22} \end{aligned}$$

Z bodů 1,2,3 dostáváme

$$\begin{array}{lllllllll} a_{00} & = & 5c_2 - 2c_1 & a_{10} & = & -2c_1 & a_{20} & = & 5c_2 - 2c_1 - c_3 \\ a_{01} & = & 3c_2 - c_1 & a_{11} & = & -c_1 & a_{21} & = & 3c_2 - c_1 + c_3 \\ a_{02} & = & c_1 - 3c_2 & a_{12} & = & c_1 & a_{22} & = & c_1 - 3c_2 \end{array}$$

a dosazaním do 4 získáme

$$\begin{aligned} -2c_4 &= 2c_1 - 5c_2 + c_3 \\ -3c_4 &= c_1 - 3c_2 - c_3 \\ 2c_4 &= -c_1 + 3c_2. \end{aligned}$$

Odtud dostaneme, že $c_4 = c_1 = c_2 = c_3$, zvolíme tedy např. 1. Rovnice zadané kolineace potom mají tvar

$$\begin{aligned} x'_0 &= 3x_0 - 2x_1 + 2x_2 \\ x'_1 &= 2x_0 - x_1 + 3x_2 \\ x'_2 &= -2x_0 + x_1 - 2x_2. \end{aligned}$$

V následujícím příkladě ukážeme druhou metodu.

Příklad 14 *Napište rovnice kolineace* $K : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$, *která bodům přiřadí jejich obrazy:* $A = (0;1;0) \mapsto A' = (-2;-1;1)$, $B = (1;-1;0) \mapsto B' = (5;3;-3)$, $C = (1;0;-1) \mapsto C' = (1;-1;0)$, $D = (0;0;-1) \mapsto D' = (-2;-3;2)$.

Řešení
Body A, B, C, D i $A'B'C'D'$jsou po třech nezávislé, tvoří tedy geometrické báze. Stejně jako v Příkladu 1 nelezneme příslušné aritmetické báze:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right),$$

aritmetická báze $A = \langle (0;-1;0), (1;0;-1), (0;0;1) \rangle$. Dále platí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -2 & 5 \\ -1 & -1 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right),$$

proto aritmetická báze $A' = \langle (2;1;-1), (1;-1;0), (2;3;-2) \rangle$. Najdeme-li izomorfismus $\xi : A \to A'$, pak matice tohoto izomorfismu bude i maticí kolineace $K(\xi) : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right).$$

Rovnice kolineace jsou tedy

$$\begin{aligned} x'_0 &= 3x_0 - 2x_1 + 2x_2 \\ x'_1 &= 2x_0 - x_1 + x_2 \\ x'_2 &= -2x_0 + x_1 - 2x_2. \end{aligned}$$

Příklad 15 *Kolineace $K : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$ je dána rovnicemi*

$$\begin{aligned} x'_0 &= x_0 + 2x_1 \qquad + x_3 \\ x'_1 &= \quad 2x_1 - x_2 \\ x'_2 &= \qquad -x_2 + 3x_3 \\ x'_3 &= \qquad\qquad 3x_3. \end{aligned}$$

a) *Najděte všechny charakteristické hodnoty kolineace.*

b) *Určete všechny samodružné body a samodružné roviny kolineace.*

c) *Vyšetřete vztahy incidence mezi všemi samodružnými body a všemi samodružnými rovinami.*

Řešení

Matice kolineace má tvar

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

a charakteristický determinant je tedy

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 3-\lambda \end{vmatrix}.$$

a) Charakteristický polnom je $(1-\lambda)\cdot(2-\lambda)\cdot(-1-\lambda)\cdot(3-\lambda)$, tato kolinace má tedy čtyři jednonásobná vlastní čísla $\lambda_0 = -1, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$.

b) Samodružné body a samodružné roviny odpovídající jednotlivým vlastním číslům určíme podle Věty 4.2.5 a Věty 4.3.2. Souřadnice samodružného bodu musí splňovat

$$(\mathbf{A}^T - \lambda\mathbf{E}) \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Koeficienty v rovnici samodružné nadroviny musí splňovat podmínku

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pro samodužný bod odpovídající vlastnímu číslu λ_0 to tedy znamená řešit homogenní soustavu rovnic

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right).$$

Samodružný bod $X_0 = (-1; 1; 3; 0)$. Pro samodružnou rovinu odpovídající vlastnímu číslu λ_0 řešíme homogenní soustavu rovnic

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right).$$

Samodružná rovina má rovnici $\rho_0 : 4x_2 - 3x_3 = 0$.
Pro samodružný bod a samodružnou rovinu odpovídající vlastnímu číslu λ_1 dostáváme soustavy

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad X_1 = (1; 0; 0; 0)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \rho_1 : x_0 - 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0.$$

Pro samodružný bod a samodružnou rovinu odpovídající vlastnímu číslu λ_2 dostáváme soustavy

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad X_2 = (2; 1; 0; 0)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \rho_2 : 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 0.$$

Pro samodružný bod a samodružnou rovinu odpovídající vlastnímu číslu λ_3 dostáváme soustavy

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad X_3 = (-1; -3; 3; 4)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \rho_3 : x_3 = 0.$$

c) Pokud budeme zkoumat incidenci samodružných bodů a samodružných rovin, zjistíme, že samodružné body a samodružné nadroviny odpovídající témuž vlastnímu číslu spolu neincidují, zatímco samodružné body a samodružné roviny odpovídající různým vlastním číslům spolu incidují.

Příklad 16 *V matici* $\mathbf{A}$ *kolineace* $K : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ *dané vztahy*

$$\begin{aligned} x_0' &= 2x_0 \\ x_1' &= x_0 + x_1 + ax_2 \\ x_2' &= -x_0 + 3x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

určete číslo a tak, aby charakteristická rovnice měla dvojnásobný kořen. Najděte všechny samodružné body a samodružné přímky kolineace.

Řešení
Matice kolineace

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix},$$

charakteristický determinant zadané kolineace je

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & a & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

a charakteristická rovnice $(2-\lambda)\cdot(1-\lambda)\cdot(2-\lambda)-3a(2-\lambda)=0$. Je-li $a=0$, pak má rovnice jeden dvojnásobý kořen $\lambda_0=2$ a jeden jednoduchý kořen $\lambda_1=1$.

Samodružný bod a samodružnou přímku odpovídající vlastnímu číslu λ_0 zjistíme vyřešením soustavy rovnic

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad X_0=(0;0;1)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad p_0: x_0=0.$$

Samodružný bod a samodružnou přímku odpovídající vlastnímu číslu λ_1 zjistíme vyřešením soustavy rovnic

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad X_1=(0;1;-3)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad p_1: x_0-x_1=0.$$

Příklad 17 *Množina kolineací $K:\mathcal{P}_2\to\mathcal{P}_2$ je dána rovnicemi*

$$\begin{aligned} x_0' &= x_0 \\ x_1' &= x_1\cdot\cos\alpha - x_2\cdot\sin\alpha \\ x_2' &= x_1\cdot\sin\alpha + x_2\cdot\cos\alpha, \end{aligned}$$

kde $\alpha\in\mathcal{R}$. Pro které hodnoty α je množinou všech samodružných bodů kolineace sjednocení přímky a bodu, který s přímkou neinciduje?

Řešení
Charakteristický determinant kolineace je

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha-\lambda & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha-\lambda \end{vmatrix}$$

a charakteristická rovnice tedy zní $(1-\lambda)\cdot(\cos\alpha-\lambda)^2+\sin^2\alpha(1-\lambda)=0$.

Pokud má charakteristická rovnice jeden dvojnásobný kořen λ_0, pro který má matice $\mathbf{A}(\lambda_0)$ hodnost 1, množina všech samodružných bodů určených touto jednou rovicí tvoří přímku. Zbývající kořen λ_1 musí být jednoduchý, hodnost matice $\mathbf{A}(\lambda_1)$ je rovna 2, určuje tedy jediný bod, který neleží na přímce samodružných bodů.

Potřebujeme tedy určit α tak aby charakterstická rovnice měla jeden dvojnásobý a jeden jednoduchý kořen. To je splněno, pokud $\alpha=\pi+2k\pi, k\in\mathcal{Z}$. Potom $\lambda_0=-1, \lambda_1=1$.

Příklad 18 *Kolineace K má vyjádření:*

$$\begin{aligned} x_0' &= 3x_0+4x_1 \\ x_1' &= 2x_0+3x_1. \end{aligned}$$

a) Najděte vyjádření inverzní kolineace K^{-1}.

b) Najděte obrazy bodů $(1;0),(0;1),(1;1)$ v kolineaci K.

c) Najděte vzory bodů $(1;0),(0;1),(1;1)$ v kolinaci K.

Řešení

a) Matice kolineace má tvar

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Matice inverzní je

$$\mathbf{A^{-1}}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Inverzní kolineace K^{-1} má tedy vyjádření

$$\begin{aligned} x_0 &= 3x_0'-4x_1' \\ x_1 &= -2x_0'+3x_1'. \end{aligned}$$

b) Zadané body se zobrazí:

$$\begin{array}{rcl}(1;0) & \mapsto & (3;2)\\ (0;1) & \mapsto & (4;3)\\ (1;1) & \mapsto & (7;5).\end{array}$$

c) Vzorem bodu (1;0) je bod (3;-2), vzorem bodu (0;1) je bod (-4;3) a vzorem bodu (1;1) je bod (-1;1).

Příklad 19 *Najděte samodružné body kolineace* $K : \mathcal{P}_1(\mathcal{C}) \to \mathcal{P}_1(\mathcal{C})$:

a)

$$\begin{array}{rcl}x_0' & = & x_0 + 2x_1\\ x_1' & = & 4x_0 - x_1,\end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcl}x_0' & = & 2x_0 - x_1\\ x_1' & = & x_0 + 4x_1.\end{array}$$

Řešení

a) Charakteristický determinant dané kolineace je

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}.$$

Charakteristický polynom je $\lambda^2 - 9 = 0$ a vlastní čísla jsou tedy $\lambda_0 = 3$, $\lambda_1 = -3$. Při hledání samodružných bodů tedy řešíme rovnice

$$\begin{array}{rcl}3x_0 & = & x_0 + 2x_1\\ 3x_1 & = & 4x_0 - x_1.\end{array}$$

Řešením je bod se zástupcem $(1;1)$. Druhý samodružný bod je řešením rovnic

$$\begin{array}{rcl}-3x_0 & = & x_0 + 2x_1\\ -3x_1 & = & 4x_0 - x_1\end{array}$$

a tedy bod se zástupcem $(1;-2)$. Daná kolineace má dva samodružné body, jedná se o hyperbolickou projektivitu.

b) Charakteristický determinant dané kolineace je

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix}.$$

Charakteristický polynom je $(\lambda-3)^2 = 0$ a vlastní číslo je tedy jediné $\lambda = 3$. Při hledání samodružného bodu tedy řešíme rovnice

$$\begin{aligned} 3x_0 &= 2x_0 - x_1 \\ 3x_1 &= x_0 + 4x_1. \end{aligned}$$

Řešením je jediný bod se zástupcem $(1;-1)$. Daná kolineace je parabolická projektivita.

Příklad 20 *Najděte vyjádření parabolické projektivity* $K : \mathcal{P}_1(\mathcal{C}) \to \mathcal{P}_1(\mathcal{C})$*, ve které je bod* $m = (2;1)$ *samodružný a obrazem bodu* $x = (2;3)$ *je bod* $x' = (1;0)$.

Řešení
Obecné vyjádření projektivity na přímce je

$$\begin{aligned} x_0' &= a_{00}x_0 + a_{01}x_1 \\ x_1' &= a_{10}x_0 + a_{11}x_1. \end{aligned}$$

Charakteristická rovnice kolineace je

$$\begin{vmatrix} a_{00}-\lambda & a_{10} \\ a_{01} & a_{11}-\lambda \end{vmatrix} = 0,\ tj. \lambda^2 - (a_{00}+a_{11})\lambda + a_{00}a_{11} - a_{01}a_{10} = 0.$$

Diskriminant této kvadratické rovnice je

$$D = (a_{00}+a_{11})^2 - 4(a_{00}a_{11} - a_{01}a_{10}).$$

V závislosti na tom, zda je tento diskriminant kladný, resp. nulový, resp. záporný má rovnice dvě, resp. jedno, resp. žádné řešení (odpovídající počtu samodružných bodů) a jedná se tedy o hyperbolickou, resp. parabolickou, resp. eliptickou projektivitu.
Ze zadaných bodů musí pro koeficinty ve vyjádření kolineace platit:

$$\begin{aligned} k &= 2a_{00} + 3a_{01} \\ 0 &= 2a_{10} + 3a_{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2l &= 2a_{00} + a_{01} \\ l &= 2a_{10} + a_{11}. \end{aligned}$$

Řešením těchto soustav zjistíme, že musí platit:

$$a_{00} = \frac{6l-k}{4},\ a_{01} = \frac{k-2l}{2},\ a_{10} = \frac{3l}{4},\ a_{11} = -\frac{l}{2}.$$

Jelikož chceme vyjádření parabolické projektivity, výše zmíněný determinant musí být nulový :

$$\left(\frac{6l-k}{4} - \frac{l}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{l}{2}\cdot\frac{6l-k}{4} - \frac{3l}{4}\cdot\frac{k-2l}{2}\right) = 0.$$

To je splněno právě tehdy, když $k = -4l$, zvolíme tedy např. $k = 4, l = -1$. Daná koklineace má potom vyjádření

$$\begin{aligned} x_0' &= -\frac{5}{2}x_0 + 3x_1 \\ x_1' &= -\frac{3}{4}x_0 + \frac{1}{2}x_1. \end{aligned}$$

Příklad 21 *Najděte vyjádření involuce* $\varphi : \mathcal{P}_1(\mathcal{C}) \to \mathcal{P}_1(\mathcal{C})$, *ve které je obrazem bodu* $(c) = (1;2)$ *bod* $(c') = (1;0)$ *a obrazem bodu* $(d) = (2;3)$ *bod* $(d') = (8;1)$.

Řešení

Jelikož se jedná o involuci, platí nejenom $(1;2) \to (1;0)$ a $(2;3) \to (8;1)$, ale také $(1;0) \to (1;2)$ a $(8;1) \to (2;3)$. Rovnice kolineace mají obecný tvar

$$\begin{aligned} x_0' &= a_{00}x_0 + a_{10}x_1 \\ x_1' &= a_{01}x_0 + a_{11}x_1. \end{aligned}$$

Ze zadaných bodů musí platit:

$$\begin{aligned} c_1 &= a_{00} + 2a_{10} \\ 0 &= a_{01} + 2a_{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2 &= a_{00} \\ 2c_2 &= a_{01} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8c_3 &= 2a_{00} + 3a_{10} \\ c_3 &= 2a_{01} + 3a_{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2c_4 &= 8a_{00} + a_{10} \\ 3c_4 &= 8a_{01} + a_{11} \end{aligned}$$

Řešením těchto soustav získáme podmínky $c_2 = c_3, c_1 = c_4, 5c_2 = c_1$. Nechť tedy např. $c_2 = 1, c_1 = 5$. Potom vyjádření zadané involuce je

$$\begin{aligned} x'_0 &= x_0 + 2x_1 \\ x'_1 &= 2x_0 - x_1. \end{aligned}$$

Příklad 22 *Najděte vyjádření involuce $\varphi : \mathcal{P}_1(\mathcal{C}) \to \mathcal{P}_1(\mathcal{C})$, která má samodružné body $m = (-2; 1), n = (4; 1)$.*

Řešení
Pro koeficienty ve vyjádření kolineace musí platit:

$$\begin{aligned} -2k &= -2a_{00} + a_{01} \\ k &= -2a_{10} + a_{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4l &= 4a_{00} + a_{01} \\ l &= 4a + 10 + a_{11}. \end{aligned}$$

Z výše uvedených rovnic vypočteme, že koeficienty musí splňovat:

$$a_{00} = \frac{4l + 2k}{6},\ a_{01} = \frac{4l - 4k}{3},\ a_{10} = \frac{l - k}{6},\ a_{11} = \frac{l + 2k}{3}.$$

Jelikož se jedná o involuci, musí navíc platit, že $a_{00} = -a_{11}$, v našem případě

$$\frac{4l + 2k}{6} = -\frac{l + 2k}{3}.$$

To je splněno pokud $l = -k$. Zvolíme tedy např. $k = 1, l = -1$ a daná involuce má potom vyjádření

$$\begin{aligned} x_0' &= -\frac{1}{3}x_0 - \frac{8}{3}x_1 \\ x_1' &= -\frac{1}{3}x_0 + \frac{1}{3}x_1. \end{aligned}$$

Příklad 23 *Kolineace $K : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ je dána vyjádřením*

$$\begin{aligned} x_0' &= \phantom{2x_0 +{}} x_1 - x_2 \\ x_1' &= x_0 + \phantom{2x_1 +{}} x_2 \\ x_2' &= 2x_0 - 2x_1 + 3x_2. \end{aligned}$$

a) Najděte všechny kořeny charakteristické rovnice.

b) Najděte všechny samodružné body a samodružné přímky.

c) Zjistěte typ kolineace.

Řešení

a) Charakteristický determinant této kolineace je

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 1 & -\lambda & -2 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

a charakterstický polynom $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$. Jediným kořenem tohoto polynomu je trojnásobný kořen $\lambda = 1$.

b) Pro trojnásobý kořen $\lambda = 1$ má matice $\mathbf{A}^T - \lambda\mathbf{E}$ hodnost 1 a má tvar:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Množina všech samodružných bodů je tedy přímka $p : x_0 - x_1 + x_2 = 0$. Pro trojnásobý kořen $\lambda = 1$ má matice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ hodnost 1 a má tvar:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Množina všech samodružných přímek je tedy svazek přímek se středem v bodě $P = [(-1; 1; 2)]$.

c) Z výše zjištěného můžeme říct, že se jedná o středovou kolineaci se středem P na ose p, neboli elaci.

Příklad 24 *Kolineace* $K : \mathcal{P}_2(\mathcal{C}) \to \mathcal{P}_2(\mathcal{C})$ *zobrazuje bod* O_2 *na bod* O_0, *bod* O_0 *na bod* O_2, *bod* O_1 *na bod* J *a bod* J *na bod* O_1. $O_0 = (1; 0; 0)$, $O_1 = (0; 1; 0)$, $O_2 = (0; 0; 1)$, $J = (1; 1; 1)$.

a) Najděte vyjádření kolineace.

b) Zjistěte všechny kořeny charakteristické rovnice.

c) Najděte všechny samodružné body a samodružné přímky kolineace.

d) Zjistěte typ kolineace.

Řešení

a) Při zjišťování vyjádření kolineace budeme postupovat stejně jako v obdobých příkladech dříve. Dosazením bodů a vyřešením rovnic zjistíme, že vyjádření této kolineace je

$$\begin{aligned} x_0' &= x_1 - x_2 \\ x_1' &= x_1 \\ x_2' &= -x_0 + x_1. \end{aligned}$$

b) Charakteristický determinant této kolineace je

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix},$$

charakteristický polynom $(1-\lambda)(\lambda^2 - 1) = 0$ a tedy vlastní čísla jsou dvojnásobné $\lambda_0 = 1$, jednoduché $\lambda_1 = -1$.

c) Stejně jako v předchozím příkladě budeme hledat samodružné body a samodružné přímky. Zjistíme, že pro dvojnásobný kořen charakteristické rovnice $\lambda_0 = 1$ je množina všech samodružných bodů přímka $p : x_0 - x_1 + x_2 = 0$ a množina všech samodružých přímek je svazek přímek se středem v bodě $P = [(1; 0; -1)]$. Samodružný bod příslušný jednoduchému kořenu charakteristické rovnice $\lambda_1 = -1$ je bod $X = [(1; 0; -1)]$ a samodružná přímka $x : x_0 - x_1 + x_2 = 0$.

d) Z výše uvedeného vidíme, že se jedá o tzv. perspektivní kolineaci, neboli homologii.

Příklad 25 *Kolineace $K : \mathcal{P}_3(\mathcal{C}) \to \mathcal{P}_3(\mathcal{C})$ je dána vyjádřením*

$$\begin{aligned} x'_0 &= 2x_0 - 18x_2 \\ x'_1 &= -6x_0 + 14x_1 - 9x_2 \\ x'_2 &= -6x_0 + 5x_2 \\ x'_3 &= -3x_0 + 6x_2 - 7x_3. \end{aligned}$$

Určete typ kolineace a její kanonický tvar.

Řešení
Charakteristický determinant kolineace má tvar

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -6 & -6 & -3 \\ 0 & 14-\lambda & 0 & 0 \\ -18 & -9 & 5-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -7-\lambda \end{vmatrix},$$

charakteristický polynom je $(-7-\lambda)\cdot(14-\lambda)\cdot(\lambda^2-7\lambda-98)=0$. Ten má právě dva kořeny, oba dvojnásobné, vlastní čísla jsou tedy $\lambda_0=-7, \lambda_1=14$. Množina samodružných bodů odpovídajících vlastnímu číslu λ_0 je přímka p_0, jejíž parametrické vyjádření je

$$x_0 = t_0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = t_1, \quad x_3 = 3t_0 + 2t_1.$$

Množina samodružných bodů odpovídajících vlastnímu číslu λ_1 je přímka p_1, jejíž parametrické vyjádření je

$$x_0 = s_0, \quad x_1 = s_1, \quad x_2 = -2s_0 - s_1, \quad x_3 = 0.$$

Přímky p_0 a p_1 jsou mimoběžné, tato kolineace tedy odpovídá možnosti 6 z Věty 4.5.10.
Kanonický tvar zadané kolineace je

$$\begin{aligned} x'_0 &= -x_0 \\ x'_1 &= -x_1 \\ x'_2 &= 2x_2 \\ x'_3 &= 2x_3. \end{aligned}$$

Příklad 26 *Nechť* $\alpha_0 = a + b\,\mathrm{i}, \alpha_2 = c + d\,\mathrm{i},\ a, b, c, d, \in \mathcal{R}, bd \neq 0$. *Ukažte, že kolineace* $K_1, K_2 : \mathcal{P}_3(\mathcal{C}) \to \mathcal{P}_3(\mathcal{C})$ *s vyjádřením*

$$
\begin{array}{rrcllll}
K_1: & x'_0 & = & \alpha_0 x_0 & & & \\
& x'_1 & = & & \bar{\alpha}_0 x_1 & & \\
& x'_2 & = & & & \alpha_2 x_2 & \\
& x'_3 & = & & & & \bar{\alpha}_2 x_3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrcrcrcrcr}
K_2: & x'_0 & = & a x_0 & + & b x_1 & & & & \\
& x'_1 & = & -b x_0 & + & a x_1 & & & & \\
& x'_2 & = & & & & & c x_2 & + & d x_3 \\
& x'_3 & = & & & & & -d x_2 & + & c x_3
\end{array}
$$

mají v oboru komplexních čísel stejnou množinu všech vlastních čísel.

Řešení
Charakteristický determinant kolineace K_1 je

$$
\begin{vmatrix}
\alpha_0 - \lambda & 0 & 0 & 0 \\
0 & \bar{\alpha}_0 - \lambda & 0 & 0 \\
0 & 0 & \alpha_2 - \lambda & 0 \\
0 & 0 & 0 & \bar{\alpha}_2 - \lambda
\end{vmatrix},
$$

charakteristický polynom

$$(a{+}b\,\mathrm{i}{-}\lambda)\cdot(a{-}b\,\mathrm{i}{-}\lambda)\cdot(c{+}d\,\mathrm{i}{-}\lambda)\cdot(c{-}d\,\mathrm{i}{-}\lambda) = \left[(a-\lambda)^2 + b^2\right]\cdot\left[(c-\lambda)^2 + d^2\right].$$

Charakteristický determinant kolineace K_2 je

$$
\begin{vmatrix}
a - \lambda & b & 0 & 0 \\
-b & a - \lambda & 0 & 0 \\
0 & 0 & c - \lambda & d \\
0 & 0 & -d & c - \lambda
\end{vmatrix},
$$

charakteristický polynom

$$(a{-}\lambda)\cdot(a{-}\lambda)\cdot\left[(c-\lambda)^2 + d^2\right]{+}b^2\cdot\left[(c-\lambda)^2 + d^2\right] = \left[(a-\lambda)^2 + b^2\right]\cdot\left[(c-\lambda)^2 + d^2\right].$$

Zadané kolineace mají stejný charakteristický polynom a tedy stejná vlastní čísla.

Kapitola 6

Závěr

Cílem této diplomové práce bylo vypracovat soubor řešených příkladů z analytické projektivní geometrie zaměřených na projektivní prostor a jeho podprostory a kolineace projektivních prostorů. Součástí práce je také veškerá potřebná teorie projektivní geometrie. Některé věty a příklady jsou pro názornost doplněny ilustračními obrázky.
Tuto práci mohou využít studenti zabývající se analytickou projektivní geometrií jako doplňující materiál a inspiraci pro další samostatnou práci.

Kapitola 7

Použitá literatura

1. SEKANINA, M. et al.: *Geometrie II*, Praha, SPN, 1988
2. ČIŽMÁR, J.: *Grupy geometrických transformácií*, Bratislava, Alfa, 1984
3. ČECH, E.: *Základy analytické geometrie II*, Praha, Přírodovědecké vydavatelství, 1952
4. BICAN, L.: *Lineární algebra a geometrie*, Praha, Academia, 2009