UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Sinus a kosinus

Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Jiří Fišer, Ph.D.**
Vypracoval(a): **Monika Launerová**
Studijní program: B1103 Aplikovaná matematika
Studijní obor Matematika–ekonomie se zaměřením na bankovnictví
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2015

BIBLIOGRAFICKÉ IDENTIFIKACE

Autor: Monika Launerová

Název práce: Sinus a kosinus

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikace matematiky

Vedoucí práce: RNDr. Jiří Fišer, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2015

Abstrakt: Tato práce pojednává o sinu a kosinu jakožto dvou základních goniometrických funkcích. Nahlíží na ně z různých úhlů pohledu a odvozuje je i jejich vlastnosti pomocí jednotkové kružnice, mocninných řad, diferenciálních rovnic a exponenciálních funkcí. Práce také uvádí vzorce a další goniometrické funkce, které se sinem a kosinem souvisí.

Klíčová slova: Sinus; Kosinus; Jednotková kružnice; Měření úhlů; Mocninné řady; Taylorova věta; Taylorova řada; Exponenciální funkce; Goniometrické funkce; Trigonometrické funkce; Eulerův vzorec; Komplexní čísla; Diferenciální rovnice; Sinové křivky; Vzorce se sinem a kosinem; Sinová věta; Kosinová věta; Tangens; Kotangens; Sekans; Kosekans

Počet stran: 39

Počet příloh: 0

Jazyk: Český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Monika Launerová

Title: Sine and Cosine

Type of thesis: Bachelor's

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: RNDr. Jiří Fišer, Ph.D.

The year of presentation: 2015

Abstract: This thesis discusses Sine and Cosine, two basic trigonometric functions. It explains them from different perspectives; deduces them and their properties by using unit circle, power series, differential equations and exponential functions. The thesis also talks about formulas and other trigonometric functions that are related to Sine and Cosine.

Key words: Sine; Cosine; Unit circle; Measuring angles; Power series; Taylor's theorem; Taylor's series; Exponential functions; Trigonometric functions; Euler's formula; Complex numbers; Differential equations; The sine curve; Formulas with sine and cosine; Law of Sines; Law of Cosines; Tangent; Cotangent; Secant; Cosecant

Number of pages: 39

Number of appendices: 0

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracovala samostatně pod vedením pana RNDr. Jiřího Fišera, Ph.D. s použitím uvedené literatury.

V Olomouci dne 5. května 2015

Obsah

Použité značení

$\mathbb{C}$	Komplexní čísla
$\mathbb{N}$	Přirozená čísla
$\mathbb{N}_0$	Přirozená čísla včetně nuly
$\mathbb{R}$	Reálná čísla
$\mathbb{R}^+$	Reálná čísla kladná
$\mathbb{R}_0^+$	Reálná čísla nezáporná
$\mathbb{Z}$	Celá čísla

Poděkování

Chtěla bych poděkovat panu RNDr. Jiřímu Fišerovi, Ph.D. za věnovaný čas a moudré rady, mým učitelům matematiky za získaní potřebných vědomostí a také mým blízkým, rodině a přátelům, za psychickou a morální podporu.

Úvod

Snad každý z nás se někdy setkal se sinem a kosinem. Neříká se snad, že život je jako na houpačce, jednou jsme nahoře a jednou dole? Když se člověk dostane na dno, vždy se může odrazit a začít novou etapu svého života, novou periodu. Na naší cílevědomosti a píli pak je, jak vysoko se ze dna odrazíme, jakou amplitudu bude náš život mít. A přesně tak probíhá i sinus a kosinus, vlní se s určitou amplitudou a periodou, až do nekonečna. Víte ale proč?

Někteří z nás si nejspíš vzpomenout na sinus a kosinus jako poměr dvou stran v pravoúhlém trojúhelníku. Když zapátráme v mysli ještě dál, vzpomeneme si na určení hodnot sinu a kosinu pomocí jednotkové kružnice. V této práci budeme na sinus a kosinus pohlížet z různých úhlů pohledu. Nejprve si tyto funkce přiblížíme pomocí jednotkové kružnice, avšak netradičním způsobem. Následně využijeme mocninných řad k určení derivací těchto funkcí. V neposlední řadě se pokusíme sinus a kosinus charakterizovat pomocí diferenciálních rovnic na základě charakteristik exponenciální funkce o základu e. Také si představíme vztah sinu a kosinu s exponenciálou pomocí Eulerova vzorce, a tím jejich realizaci rozšíříme i do komplexní roviny. Na závěr se podíváme na použití těchto funkcí ve vzorcích v goniometrii a rovinné trigonometrii a také uvedeme jejich vztah s dalšími goniometrickými funkcemi.

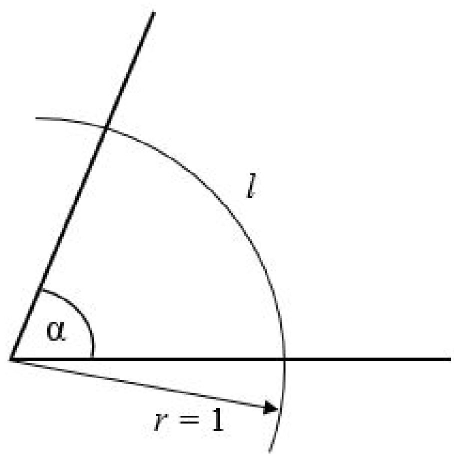
Hlavní inspirací pro sepsání bakalářské práce byla kapitola o goniometrických funkcí z knihy V. H. Molla [1]. Někeré myšlenky jsou převzaty od K. Rektoryse [2] a od Z. Došlé [4]. Dále jsem čerpala z [3] a internetové stránky [5].

1 Charakterizace sinu a kosinu pomocí úhlů

Tato kapitola se bude zabývat měřením úhlů. Nejprve si pomocí jednotkové kružnice připomeneme vztahy pro úhly, pomocí nichž následně sinus a kosinus definujeme.

1.1 Goniometrické funkce

Goniometrickými funkcemi se v matematice zabývá odvětví zvané goniometrie. Slovo „goniometrie“ pochází z řečtiny a znamená měření úhlů, slovo „trigon“ znamená trojúhelník. Goniometrické funkce můžeme snadno definovat pomocí jednotkové kružnice. Základní proměnnou je zde úhel α. Jeho velikost se vyjadřuje délkou oblouku l, který je vyťat rameny úhlu α na jednotkové kružnici se středem ve vrcholu úhlu, viz obrázek 1.



Obrázek 1: Úhel jednotkové kružnice.

„Radián“ je úhel, jehož oblouková míra je 1. Plný úhel má v obloukové míře velikost 2πrad, což odpovídá $360°$.[1]

[1] Pro radiány a stupně platí vztahy $1° = \frac{\pi}{180}$, $1\text{rad} = \frac{180}{\pi} \doteq 57°17'45''$.

Nechť $m \in \mathbb{R}^+$. V prvním kvadrantu uvažujme průsečík přímky $y = mx$ s jednotkovou kružnicí $x^2 + y^2 = 1$ a označíme jej $(x(m), y(m))$. Potom platí

$$y(m) = mx(m)$$

a také

$$y^2(m) + x^2(m) = 1,$$

tedy dohromady

$$(x(m))^2 + (mx(m))^2 = 1, \qquad x^2(m) + m^2x^2(m) = 1, \qquad x^2(m) = \frac{1}{1+m^2},$$

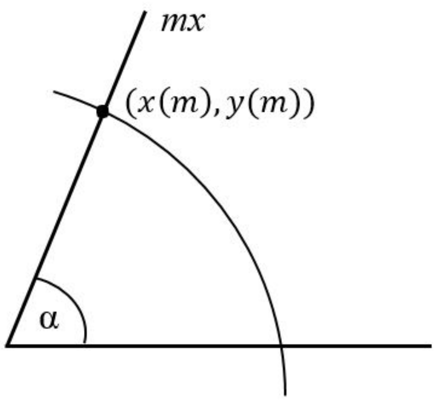
$$x(m) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}. \tag{1}$$

Podobně $x(m) = \frac{y(m)}{m}$,

$$\left(\frac{y(m)}{m}\right)^2 + y^2(m) = 1, \qquad y^2(m) = \frac{m^2}{1+m^2},$$

$$y(m) = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}. \tag{2}$$

Dále k m definujeme úhel α, viz obrázek 2.

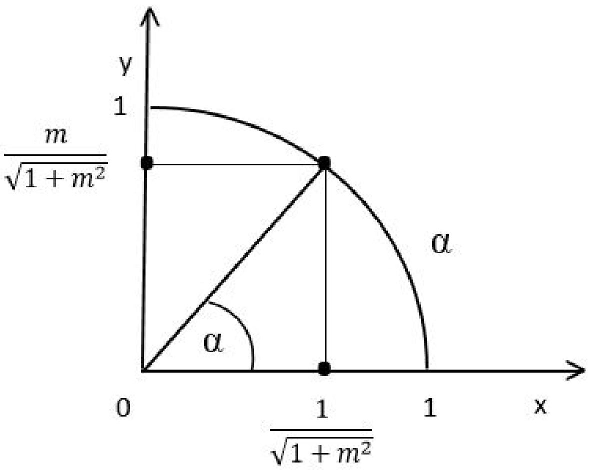


Obrázek 2: Úhel α.

Definice 1.1 [1] Nechť $m \in \mathbb{R}_0^+$. Úhel přidružený ke směrnici m je definován vztahem

$$\alpha(m) = \int_{(1+m^2)^{-1/2}}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}, \tag{3}$$

(viz obrázek 3). Pro $m = 0$ máme $\alpha(0) = 0$, zatímco pro $m < 0$ volíme $\alpha(m) := -\alpha(-m)$, tedy tak, aby funkce α byla lichá na $\mathbb{R}$, tedy $\alpha(-m) := -\alpha(m), m \in \mathbb{R}$.



Obrázek 3: Úhel přidružený k směrnici m.

Příklad 1.1 Dokažte, že pro funkci α platí

$$\alpha'(m) = \frac{1}{1+m^2}. \tag{4}$$

Nejprve dokažte, že α je spojitá.

Řešení: $\frac{\pi}{2}$ a $\arcsin \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$ jsou spojité funkce, tedy jejich rozdíl je také funkcí spojitou. Platnost výrazu dokážeme derivací výrazu (3).

$$\alpha'(m) = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\right)' = \frac{m(1+m^2)^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\right)^2}} = \frac{m}{\sqrt{\frac{m^2}{1+m^2}(1+m^2)^3}} =$$

$$= \frac{m}{\sqrt{m^2(1+m^2)^2}} = \frac{1}{1+m^2}.$$

○

Funkce α striktně roste z $\alpha(0) = 0$ do limitní hodnoty

$$\alpha(\infty) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}, \tag{5}$$

což odpovídá velikosti čtvrtkruhu.

Definice 1.2 [1] Číslo π je definováno jako

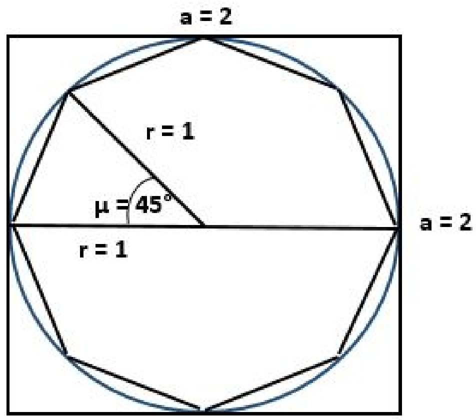
$$\pi = 2\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}. \tag{6}$$

Příklad 1.2 Použitím jednoduchých geometrických obrazců dokažte nerovnosti:

$$2\sqrt{2} < \pi < 4.$$

Řešení: Prostřední hodnotu π budeme geometricky reprezentovat pomocí obsahu kružnice o poloměru 1 ($S = \pi r^2 = \pi \cdot 1 = \pi$). Do kružnice je vepsán pravidelný osmiúheník o obsahu $S = 8\frac{r^2}{2}\sin\mu = 8\frac{1^2}{2}\sin 45^o = 4\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$. Kružnice je zase vepsána do čtverce o obsahu $S = a^2 = 2^2 = 4$ (viz obrázek 4). Tím máme uvedené nerovnosti dokázány.

○



Obrázek 4: Vymezení kružnice.

1.2 Sinus a kosinus

Funkce sinus a kosinus jsou dvě základní goniometrické funkce.

Definice 1.3 [1] Nechť $x \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$. Sinus úhlu x definujeme jako

$$\sin x = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}, \tag{7}$$

Funkce kosinus úhlu x je definována jako

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}, \tag{8}$$

kde $m \in \mathbb{R}_0^+$ je kladné reálné číslo takové, že platí $\alpha(m) = x$ (víme, že pro $x \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$ je takové $m \geq 0$ právě jedno).

Poznámka 1.1 Všimněme si, že rovnice $m = \alpha^{-1}(x)$ a příklad 1.1 nám ukazují, že α je diferencovatelná funkce. Vlastnosti diferencovatelnosti goniometrických funkcí získáme z věty o inverzní funkci[2].

Definice těchto funkcí nám ukazují, že souřadnice bodu $(u, v) = (\cos x, \sin x)$ leží na jednotkové kružnici $u^2 + v^2 = 1$:

$$u^2 + v^2 = (\cos x)^2 + (\sin x)^2 = \frac{1}{1+m^2} + \frac{m^2}{1+m^2} = \frac{1+m^2}{1+m^2} = 1. \tag{9}$$

Speciální hodnoty funkcí sinus a kosinus hrají důležitou roli, a proto uvedeme některé známé příklady. Hodnota $\sin 0 = 0$ vychází přímo z $\alpha(0) = 0$. $\alpha(\infty) = \frac{\pi}{2}$ nám ukazuje, že $\sin \frac{\pi}{2} = 1$. Potom $\cos 0 = 1$ a $\cos \frac{\pi}{2} = 0$. Tyto a další známé hodnoty uvedeme v tabulce 1.

x	$0°(0)$	$30°(\pi/6)$	$45°(\pi/4)$	$60°(\pi/3)$	$90°(\pi/2)$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Tabulka 1: Známé hodnoty sinu a kosinu.

Racionální hodnoty pro sinus získáme u $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$ a pro kosinus u $0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$. Zajímavostí je, že toto je (samozřejmě až na periodické opakování) zcela ojedinělé. Zbylé hodnoty těchto goniometrických funkcí jsou iracionální.

Příklad 1.3 Dokažte platnost vzorce pro derivaci

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin x = \cos x$$

a z rovnice $\sin x^2 + \cos x^2 = 1$ vyvoďte vztah

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos x = -\sin x.$$

[2] Věta o inverzní funkci. Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$. Dále nechť je na tomto intervalu diferencovatelná a předpokládejme, že $f'(x) \neq 0$ na (a, b). Nechť $\langle m, M\rangle = f(\langle a, b\rangle)$. Potom je $f : \langle a, b\rangle \to \langle m, M\rangle$ invertovatelná a její inverze g je spojitá na $\langle m, M\rangle$, diferencovatelná na (m, M) a platí $g'(y) \neq 0$. Navíc platí $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}, m < y < M$.

Řešení: Využijeme vztah (7), do kterého za x dosadíme $\alpha(m)$, tedy

$$\sin\alpha(m) = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}. \tag{10}$$

Nyní tuto rovnici derivujeme podle m.

Nejprve levou stranu:

$$L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m}\sin\alpha(m) = \frac{\mathrm{d}\sin\alpha(m)}{d\alpha(m)}\cdot\frac{d\alpha(m)}{\mathrm{d}m} = \frac{\mathrm{d}\sin\alpha(m)}{d\alpha(m)}\cdot\frac{1}{1+m^2},$$

kde jsme využili rovnici (4).

Nyní budeme derivovat pravou stranu rovnice (10):

$$P = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m}\frac{m}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{\sqrt{1+m^2} - \frac{1}{2}2m^2(1+m^2)^{-\frac{1}{2}}}{1+m^2} = \frac{\frac{1+m^2-m^2}{\sqrt{1+m^2}}}{1+m^2}$$

$$= \frac{1}{(1+m^2)\sqrt{1+m^2}}.$$

Derivace obou stran dáme zpět do rovnice a současně vyvužijeme vztahu $\alpha(m) = x$:

$$\frac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{1}{1+m^2} = \frac{1}{(1+m^2)\sqrt{1+m^2}},$$

$$\frac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} = \cos x.$$

Tím jsme dokázali, že derivací funkce sinus je funkce kosinus.

Nyní máme s využitím vzorce $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ukázat, že $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = -\sin x$. Budeme opět derivovat rovnici, ale tentokrát rovnou podle x:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin^2 x + \cos^2 x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}1,$$

$$2\sin x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x + 2\cos x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = 0$$

$$2\sin x\cos x + 2\cos x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = 0,$$

$$2\cos x\Big(\sin x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x\Big) = 0,$$

Tedy

$$2\cos x = 0 \quad \text{a} \quad \sin x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = 0.$$

Odtud již $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = -\sin x$.

$\circ$

2 Charakterizace sinu a kosinu pomocí Taylorova polynomu

V této sekci využijeme Taylorova polynomu a vlastností mocninné řady pro výpočet derivací sinu a kosinu. Nejprve vyslovíme Taylorovu větu.

Věta 2.1 (Taylorova věta, [2]) *Nechť $f(x)$ má v $\langle a, a+h\rangle$ (resp. v $\langle a+h, a\rangle$ je-li h záporné) spojité derivace do n-tého řádu včetně a v $\langle a, a+h\rangle$ (resp. v $\langle a+h, a\rangle$) spojitou derivaci (n+1)-ho řádu. Pak*

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + R_{n+1}, \qquad (11)$$

(tzv. Taylorův vzorec), kde výraz pro zbytek R_{n+1} lze uvést jako jeden z těchto tvarů:

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(a+\vartheta h)}{(n+1)!}h^{n+1} \qquad (0 < \vartheta < 1) \qquad \textit{(Lagrangeův tvar)},$$

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(a+\eta h)}{n!}(1-\eta)^n h^{n+1} \qquad (0 < \eta < 1) \qquad \textit{(Cauchyův tvar)},$$

$$R_{n+1} = \int_a^{a+h} f^{(n+1)}(t)\frac{(a+h-t)^n}{n!}dt \qquad \textit{(integrální tvar)}.$$

Poznámka 2.1 Často se využívá tvar, kdy za h dosadíme $x-a$,

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}, \quad (12)$$

Poznámka 2.2 Pro $a = 0$ se věta nazývá Maclaurinova,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}. \qquad (13)$$

Věta 2.2 (Taylorova řada, [2]) *Má-li $f(x)$ v intervalu $\langle a, x\rangle$ (resp. $\langle x, a\rangle$, je-li $x < a$) derivace všech řádů, pak nutná a postačující podmínka, aby řada (tzv. Taylorova)*

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \tag{14}$$

byla v uvažovaném bodě x konvergentní a její součet byl roven $f(x)$, je, aby

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0. \tag{15}$$

Poznámka 2.3 Pro $a = 0$ se řada nazývá Maclaurinova,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots. \tag{16}$$

Věta 2.3 ([5]) *Nechť funkce f má na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ derivace všech řádů a nechť posloupnost $(f^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ je stejnoměrně ohraničená na I. Pak Taylorova řada funkce f v libovolném bodě $x_0 \in I$ konverguje na I k f.*

Důkaz: Viz [5].

Věta 2.4 ([4]) *Buď $(f_n(x))$ posloupnost funkcí majících na množině $\mathbb{R}$ derivaci. Nechť $\sum f_n(x)$ konverguje na $\mathbb{R}$ a $\sum f'_n(x)$ konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$. Pak funkce $s(x) = \sum f_n(x)$ má na $\mathbb{R}$ derivaci a platí*

$$s'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x). \tag{17}$$

Důkaz: Viz [4].

Příklad 2.1 Spočítejte derivaci všech řádů funkce sinus a vytvořte pro ni Maclaurinovu řadu.

Řešení: Z příkladu 1.3 již víme, že

$$(\sin x)' = \cos x \quad \text{a} \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

Toho využijeme při výpočtu derivací vyšších řádů:

$$(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\sin x)''' = (-\sin x)' = -\cos x,$$

$$(\sin x)^{(4)} = (-\cos x)' = \sin x.$$

Vidíme, že derivace se periodicky opakují s periodou 4. Pro $k \in \mathbb{N}_0$ můžeme psát:

$$(\sin x)^{(4k)} = \sin x,$$

$$(\sin x)^{(4k+1)} = \cos x,$$

$$(\sin x)^{(4k+2)} = -\sin x,$$

$$(\sin x)^{(4k+3)} = -\cos x.$$

Toto se dá zapsat úsporněji jako

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Podle (16) sestavíme Maclaurinovu řadu funkce sinus:

$$\sin x = \sin 0 + \frac{\cos 0}{1!}x - \frac{\sin 0}{2!}x^2 - \frac{\cos 0}{3!}x^3 + \ldots = 0 + x + 0 - \frac{1}{3!}x^3 + \ldots$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{18}$$

Podle věty 2.3 tato řada konverguje k $\sin x$ v libovolném $x \in \mathbb{R}$, neboť na $\mathbb{R}$ existují derivace všech řádů a posloupnost těchto derivací je na $\mathbb{R}$ stejnoměrně ohraničená, pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ a $x \in \mathbb{R}$ totiž platí $|(\sin x)^{(n)}| \leq 1$.

○

Příklad 2.2 Najděte Maclaurinovu řadu funkce kosinus pomocí derivace Maclaurinovy řady funkce sinus.

Řešení: Přímo vypočteme

$$\cos x = (\sin x)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{2k+1}{(2k+1)!}x^{2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Zde jsme využili větu 2.4.

○

3 Charakterizace sinu a kosinu pomocí diferenciálních rovnic

V této kapitole budeme charakterizovat goniometrické funkce pomocí diferenciálních rovnic. Nejprve diferenciálními rovnicemi charakterizujeme exponenciální funkci o základu e a následně podobné charakteristiky vyslovíme pro funkce goniometrické.

Exponenciální funkce o základu e se obvykle definuje pomocí mocninné řady

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \tag{19}$$

Věta 3.1 ([1]) *Exponenciální funkce $f(x) = e^x$ je jedinnou funkcí, pro kterou platí:*

$$\begin{cases} f'(x) = f(x), \\ f(0) = 1, \end{cases} \tag{20}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Důkaz: Důkaz pro derivaci získáme použitím věty 2.4.

$$f'(x) = (e^x)' = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \right)' = \sum_{j=1}^{\infty} j \frac{x^{j-1}}{j!} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^{j-1}}{(j-1)!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = f(x). \tag{21}$$

Dále dokážeme, že neexistuje jiná funkce, pro kterou by platil vztah (20).
Nechť $h(x)$ je další řešení počáteční úlohy (20), tj. $h'(x) = h(x), h(0) = 1$. Definujme na $\mathbb{R}$ pomocnou funkci $h_1(x) = h(x)e^{-x}$. Potom

$$h_1'(x) = h'(x)e^{-x} - h(x)e^{-x} = h(x)e^{-x} - h(x)e^{-x} = 0.$$

To ukazuje, že $h_1(x)$ je konstantní funkce. Existuje tedy takové $k \in \mathbb{R}$, že $h_1(x) \equiv k$ pro $x \in \mathbb{R}$. Pro určení konstanty k využijeme toho, že $h(0) = 1$. To nám umožní vypočíst hodnotu h_1 v nule

$$h_1(0) = h(0)e^{-0} = 1 \cdot 1 = 1,$$

čímž máme určenou hodnotu $h_1(x) \equiv k = 1$ pro $x \in \mathbb{R}$. Máme tedy $h_1(x) = h(x)e^{-x} = \frac{h(x)}{e^x} \equiv 1$, tudíž $h(x) = e^x$ na $\mathbb{R}$, tzn. jiné řešení neexistuje.

Nyní si představíme podobné charakteristiky pro goniometrické funkce.

Věta 3.2 *Funkce $f(x) = a\cos x + b\sin x$ je na $\mathbb{R}$ jedinným řešením počáteční úlohy:*

$$\begin{cases} f''(x) = -f(x), \\ f(0) = a, \\ f'(0) = b. \end{cases} \tag{22}$$

Důkaz: Neprve ukážeme, že $f(x) = a\cos x + b\sin x$ je skutečně řešením počáteční úlohy (22):

$$f'(x) = -a\sin x + b\cos x,$$

$$f''(x) = -a\cos x - b\sin x = -(a\cos x + b\sin x) = -f(x),$$

$$f(0) = a\cos 0 + b\sin 0 = a,$$

$$f'(0) = -a\sin 0 + b\cos 0 = b.$$

Abychom ukázali jednoznačnost tohoto řešení, pro $a, b \in \mathbb{R}$ definujeme na $\mathbb{R}$ pomocnou funkci

$$E(x) = (f(x) - a\cos x - b\sin x)^2 + (f'(x) + a\sin x - b\cos x)^2.$$

Pomocí její derivace ukážeme, že je konstantní na $\mathbb{R}$:

$$E'(x) = 2(f(x) - a\cos x - b\sin x)(f'(x) + a\sin x - b\cos x) + 2(f'(x) + a\sin x - b\cos x)$$

$$(f''(x) + a\cos x + b\sin x) = 2(f'(x) + a\sin x - b\cos x)(f(x) - a\cos x - b\sin x +$$

$$+f''(x) + a\cos x + b\sin x) = 2(f'(x) + a\sin x - b\cos x)(f''(x) + f(x)) =$$

$$= 2\underbrace{(-a\sin x + b\cos x + a\sin x - b\cos x)}_{0}\underbrace{(-f(x) + f(x))}_{0} = 0.$$

Je tedy $E(x) \equiv k, x \in \mathbb{R}$. Na základě počátečních podmínek z (22), známe hodnoty funkcí $f(x)$ a $f'(x)$ v 0. Dosazením nuly zjistíme, že

$$E(0) = (f(0) - a\cos 0 - b\sin 0)^2 + (f'(0) + a\sin 0 - b\cos 0)^2$$

$$= (a - a - 0)^2 + (b + 0 - b)^2 = 0 = k.$$

Nyní si uvědomme, že $E(x)$ je tvořena součtem čtverců dvou výrazů. Aby $E(x) \equiv 0$ na $\mathbb{R}$, musí být oba tyto výrazy na $\mathbb{R}$ nulové. Tedy dostáváme

$$f(x) - a\cos x - b\sin x = 0 \quad \wedge \quad f'(x) + a\sin x - b\cos x = 0.$$

Odtud již dostáváme na $\mathbb{R}$ jednoznačně

$$f(x) = a\cos x + b\sin x, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

4 Vztah sinu a kosinu s exponenciálou, Eulerův vzorec

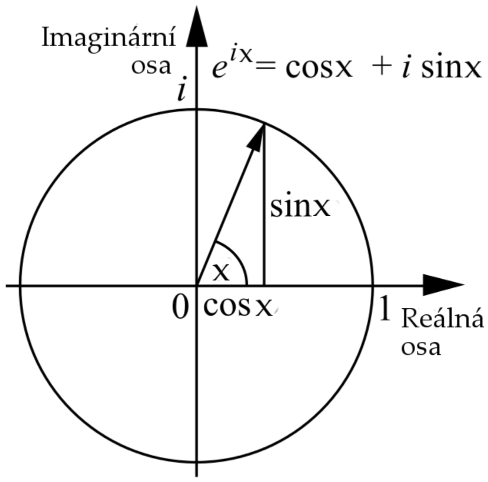
V této kapitole popíšeme významný vztah mezi exponenciální funkcí a goniometrickými funkcemi. K tomu využijeme předpis exponenciální funkce ve tvaru mocninné řady

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \tag{23}$$

Věta 4.1 (Eulerův vzorec, [1]) *Nechť $x \in \mathbb{R}$ a nechť i je imaginární jednotka. Potom*

$$e^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x. \tag{24}$$

Vztah (24) se nazývá Eulerův vzorec, který je znázorněn na obrázku 5.



Obrázek 5: Eulerův vzorec.

Důkaz: Důkaz věty 4.1 získáme ze vztahů, které platí pro imaginární jednotku i:

$$\mathrm{i}^{4k} = 1, \mathrm{i}^{4k+1} = \mathrm{i}, \mathrm{i}^{4k+2} = -1, \mathrm{i}^{4k+3} = -\mathrm{i}. \tag{25}$$

$$
\begin{aligned}
e^{\mathrm{i}x} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{i}^k \frac{x^k}{k!} = \mathrm{i}^0 \frac{x^0}{0!} + \mathrm{i}^1 \frac{x^1}{1!} + \mathrm{i}^2 \frac{x^2}{2!} + \mathrm{i}^3 \frac{x^3}{3!} + \mathrm{i}^4 \frac{x^4}{4!} + \mathrm{i}^5 \frac{x^5}{5!} + \dots \\
&= \left(\mathrm{i}^0 \frac{x^0}{0!} + \mathrm{i}^2 \frac{x^2}{2!} + \mathrm{i}^4 \frac{x^4}{4!} + \dots \right) + \left(\mathrm{i}^1 \frac{x^1}{1!} + \mathrm{i}^3 \frac{x^3}{3!} + \mathrm{i}^5 \frac{x^5}{5!} + \dots \right) \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right) + \left(\mathrm{i} \frac{x}{1!} - \mathrm{i} \frac{x^3}{3!} + \mathrm{i} \frac{x^5}{5!} - \dots \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{i} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos x + \mathrm{i} \sin x.
\end{aligned}
$$

Při výpočtu jsme použili Maclaurinovy řady funkcí sinus a kosinus z příkladů 2.1 a 2.2.

Příklad 4.1 Ověřte, že $e^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0$ je pravdivý vztah mezi pěti fundamentálními konstantami $0, 1, \mathrm{i}, e$ a π.

Řešení: Využijeme Eulerova vzorece (24), kde za x dosadíme π:

$$e^{\mathrm{i}\pi} + 1 = \cos \pi + \mathrm{i} \sin \pi + 1 = -1 + \mathrm{i} \cdot 0 + 1 = 0.$$

$\circ$

Příklad 4.2 Vyjádřete $\sin x$ a $\cos x$ z Eulerova vzorce jen pomocí exponenciálních funkcí.

Řešení: Vyjádříme si

$$
\begin{aligned}
e^{\mathrm{i}x} &= \cos x + \mathrm{i} \sin x, \\
e^{-\mathrm{i}x} &= \cos(-x) + \mathrm{i} \sin(-x).
\end{aligned}
$$

Na základě lichosti funkce sinus, $\sin(-x) = -\sin x$, a sudosti funkce kosinus, $\cos(-x) = \cos x$, platí

$$e^{-\mathrm{i}x} = \cos x - \mathrm{i} \sin x.$$

Pro získání předpisu pro $\sin x$ rovnice odečteme:

$$e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x - \cos x + \mathrm{i} \sin x = 2\mathrm{i} \sin x \quad \Rightarrow \quad \sin x = \frac{1}{2\mathrm{i}} (e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}).$$

Pro $\cos x$ je sečteme:

$$e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x + \cos x - \mathrm{i} \sin x = 2 \cos x \quad \Rightarrow \quad \cos x = \frac{1}{2} (e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}).$$

$\circ$

5 Vybrané vzorce a příklady se sinem a kosinem

V této sekci uvedeme vybrané vzorce a školské příklady se sinem a kosinem.

5.1 Využití v goniometrii

Věta 5.1 ([3]) *Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ platí*

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \tag{26}$$

Důkaz: Dokázeli jsme v kapitole 1.2 rovnicí (9).

Příklad 5.1 Zjednodušte výraz $\frac{\sin^2 x - \sin^4 x}{\cos^2 x - \cos^4 x}$.

Řešení:

$$\frac{\sin^2 x - \sin^4 x}{\cos^2 x - \cos^4 x} = \frac{\sin^2 x(1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x(1 - \sin^2 x)} = 1,$$

$$\cos x \neq 0, \sin x \neq 0, x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

$\circ$

Věta 5.2 ([3]) *Pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí*

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta, \tag{27}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta. \tag{28}$$

Důkaz: [3]

Příklad 5.2 Zjednodušte výraz $\frac{\cos\beta\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha-\beta)\sin\beta}{\sin(\gamma-\beta)\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha-\beta)\cos(\gamma-\beta)}$.

Řešení:

$$\frac{\cos\beta\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha-\beta)\sin\beta}{\sin(\gamma-\beta)\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha-\beta)\cos(\gamma-\beta)} = \frac{\cos(\beta+\alpha-\beta)}{\sin(\gamma-\beta-\alpha+\beta)}$$
$$= \frac{\cos\alpha}{\sin(\gamma-\alpha)},$$

$$\text{kde} \qquad \alpha-\beta \neq \frac{\pi}{2}k, \qquad \gamma-\beta \neq \frac{\pi}{2}k, \qquad \gamma-\alpha \neq \pi k \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

○

Věta 5.3 ([3]) *Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ platí*

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \tag{29}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha. \tag{30}$$

Důkaz: Důkaz provedeme s využitím součtových vzorců z věty 5.2.

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Věta 5.4 ([2]) *Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a $k \in \mathbb{Z}$ platí*

$$\cos n\alpha + \mathrm{i}\sin n\alpha = (\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^k\alpha(\mathrm{i}\sin\alpha)^{n-k}. \tag{31}$$

Důkaz: První rovnost platí podle Moivreovy věty[3]. Druhá rovnost vychází z věty binomické[4].

[3]Moivreova věta. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + \mathrm{i}\sin n\alpha$.
[4]Binomická věta. Pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ platí $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k$.

Věta 5.5 ([3]) *Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ platí*

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \tag{32}$$

$$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}. \tag{33}$$

Důkaz: Využijeme vzorce pro dvojnásobný argument z věty 5.3.

$$\cos\alpha = \cos\left(2\frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \left(1 - \cos^2\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 + \cos^2\frac{\alpha}{2}, \qquad 1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

Analogicky pro $\sin\frac{\alpha}{2}$.

Příklad 5.3 Vyřešte rovnici $\sqrt{5}\sin\frac{x}{2} - \sin x = 0$.

Řešení:

$$\sqrt{5}\sin\frac{x}{2} - \sin x = 0, \qquad \sqrt{5}\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = \sin x,$$

$$\frac{5}{2}(1-\cos x) = 1 - \cos^2 x, \qquad 2\cos^2 x - 5\cos x + 3 = 0,$$

$$D = 25 - 24 = 1, \qquad \cos x_{1,2} = \frac{-5 \pm 1}{4},$$

$$\cos x_1 = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{nemá smysl},$$

$$\cos x_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0.$$

$\circ$

Věta 5.6 ([3]) *Pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí*

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{34}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{35}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{36}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \tag{37}$$

Důkaz: Dokážeme pomocí součtových vzorců z věty 5.2.

$$\begin{aligned}
\sin\alpha + \sin\beta &= \sin\left(\frac{\alpha+\beta+\alpha-\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha+\beta-\alpha+\beta}{2}\right) \\
&= \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\
&= \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\
&+ \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\
&= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.
\end{aligned}$$

Analogicky pro zbylé vzorce.

Příklad 5.4 Pomocí vzorců pro součet a rozdíl upravte výraz $\sin x + \sin 2x + \sin 3x$.

Řešení:

$$\begin{aligned}
\sin x + \sin 2x + \sin 3x &= 2\sin\frac{x+3x}{2}\cos\frac{x-3x}{2} + \sin 2x \\
&= 2\sin 2x\cos x + \sin 2x = \sin 2x(2\cos x + 1).
\end{aligned}$$

○

Zobecnění tohoto příkladu popisuje následující věta:

Věta 5.7 ([2]) *Pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$, libovolné $x \in \mathbb{R}$, pro které platí $x \neq 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$, a $n \in \mathbb{N}$, platí*

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin \frac{1}{2}nx}{\sin \frac{1}{2}x} \sin \frac{1}{2}(n+1)x, \tag{38}$$

$$\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin \frac{1}{2}nx}{\sin \frac{1}{2}x} \cos \frac{1}{2}(n+1)x, \tag{39}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sin(\alpha + jx) = \frac{\sin \frac{1}{2}nx}{\sin \frac{1}{2}x} \sin \Big(\alpha + \frac{1}{2}(n+1)x\Big), \tag{40}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \cos(\alpha + jx) = \frac{\sin \frac{1}{2}nx}{\sin \frac{1}{2}x} \cos \Big(\alpha + \frac{1}{2}(n+1)x\Big). \tag{41}$$

Příklad 5.5 Ukažte, že výsledek v příkladu 5.4 je ve shodě se vzorcem (38).
Řešení: Pro $n = 3$ dostáváme z (38) výraz

$$\frac{\sin \frac{3}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \sin 2x.$$

Ten by se měl rovnat výsledku z příkladu 5.4. Má tedy platit

$$\sin 2x(2\cos x + 1) = \frac{\sin \frac{3}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \sin 2x, \tag{42}$$

přičemž podle předpokladů věty 5.7 je $x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{R}$. Postupnými úpravami ukážeme, že

$$2\cos x + 1 = \frac{\sin \frac{3}{2}x}{\sin \frac{x}{2}},$$

respektive

$$\sin \frac{3}{2}x = \sin \frac{x}{2}\Big(2\cos x + 1\Big) :$$

$$\begin{aligned}
\sin\frac{3}{2}x &= \sin\left(x+\frac{x}{2}\right) = \sin x\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\cos x \\
&= \left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) \\
&= \sin\frac{x}{2}\left(2\cos^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) \\
&= \sin\frac{x}{2}\left(2\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right) \\
&= \sin\frac{x}{2}\left(2\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) + 1\right) = \sin\frac{x}{2}\left(2\cos x + 1\right).
\end{aligned}$$

Při úpravách jsme použili vzorce (26), (27), (29) a (30).

○

5.2 Využití v rovinné trigonometrii

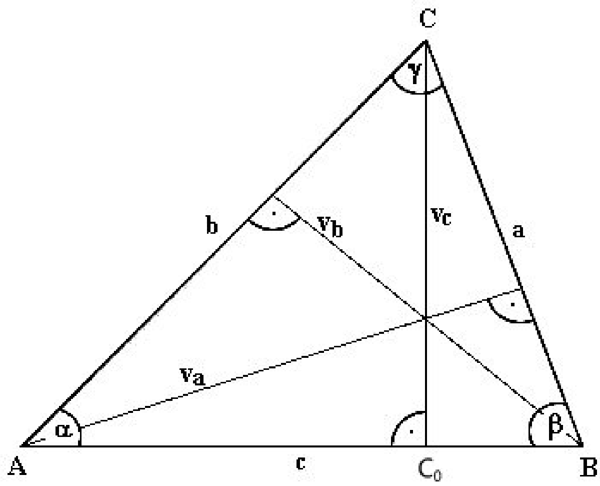
Trigonometrie se zabývá početním řešením trojúhelníku.

Věta 5.8 (Kosinová věta, [3]) *Pro každý trojúhelník ABC s vnitřními úhly α, β, γ a stranami a, b, c platí*

$$\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \\
b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \\
c^2 &= b^2 + a^2 - 2ab\cos\gamma.
\end{aligned} \tag{43}$$

Důkaz: Budeme vycházet z obrázku 6, tedy důkaz provedeme pro ostroúhlý trojúhelník. Označíme si C_0 patu výšky v_c. S využitím Pythagorovy věty platí

$$\cos\alpha = \frac{|AC_0|}{b} \Rightarrow |AC_0| = b\cos\alpha \Rightarrow |BC_0| = c - b\cos\alpha,$$



Obrázek 6: Ostroúhlý trojúhelník.

$$\sin\alpha = \frac{|CC_0|}{b} \Rightarrow |CC_0| = b\sin\alpha,$$

$$\begin{aligned} a^2 &= |CC_0|^2 + |BC_0|^2 = (b\sin\alpha)^2 + (c - b\cos\alpha)^2 \\ &= b^2\sin\alpha^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha \\ &= b^2(\sin\alpha^2 + \cos^2\alpha) + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha. \end{aligned}$$

Tím jsme dokázali první z rovnic:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Druhá a třetí rovnice se dokazují analogicky.

Příklad 5.6 Určete největší úhel θ v trojúhelníku ABC, který má strany $a, \frac{4}{3}a$ a $2a$ $(a > 0)$.

Řešení: Největší úhel je proti největší straně, tedy proti $2a$.

$$(2a)^2 = a^2 + \left(\frac{4}{3}a\right)^2 - 2a\frac{4}{3}a\cos\theta,$$

$$4 = 1 + \frac{16}{9} - \frac{8}{3}\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = -\frac{11}{24},$$

$$\theta = \arccos\left(-\frac{11}{24}\right) \doteq 117^o 17'.$$

○

Věta 5.9 (Sinová věta, [3]) *Poměr strany a sinu protilehlého úhlu je v daném trojúhelníku konstantní:*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}, \tag{44}$$

kde a, b, c jsou strany trojúheníka a úhly α, β, γ jsou vnitřní úhly trojúhelníka přivrcholech A, B, C.

Důkaz: Větu opět dokážeme pro ostroúhlý trojúhelník ABC (viz obrázek 6). Platí, že

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\frac{v_c}{b}}{\frac{v_c}{a}} = \frac{a}{b}, \qquad \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{\frac{v_b}{c}}{\frac{v_b}{a}} = \frac{a}{c}, \qquad \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{\frac{v_a}{c}}{\frac{v_a}{b}} = \frac{b}{c}.$$

Odtud postupně dostáváme

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}, \quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}, \quad \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma},$$

což dohromady dává tvrzení věty 5.9:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Příklad 5.7 Určete úhly v trojúhelníku ABC, je-li dán poměr stran $a : b = 4 : 7$ a platí $\beta = 2\alpha$.

Řešení: V důkazu věty 5.9 jsme odvodili vztah

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}.$$

Po dosazení dostáváme

$$\frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{4}{7}, \qquad\qquad \frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha\sin\alpha} = \frac{4}{7}.$$

Odtud

$$\cos\alpha = \frac{7}{8}, \qquad\qquad \alpha = 28^o57',$$

$$\beta = 2\alpha = 2\cdot 28^o57' = 57^o54',$$

$$\gamma = 180^o - (\alpha+\beta) = 180^o - (28^o57' + 57^o54') = 93^o09'.$$

Úhly v daném trojúhelníku jsou tedy

$$\alpha = 28^o57' \quad \beta = 57^o54' \quad \gamma = 93^o09'.$$

○

Poznámka 5.1 Sinus a kosins se v rovinné trigonometrii využívají i pro další výpočty, například se objevují ve vzorci pro obsah trojúhelníku či pro poloměr kružnice opsané, více v [3].

Poznámka 5.2 Sinu a kosinu se taktéž využívá v dalších matematických odvětvích, například ve sférické trigonometrii, ale také v jiných oborech, například ve statistice pro modelování periodické složky časové řady nebo ve fyzice pro vyjádření hodnoty harmonického střídavého proudu.

6 Vztah sinu a kosinu s dalšími goniometrickými funkcemi

Na závěr si připomeneme další klasické goniometrické funkce a jejich vztahy k sinu a kosinu.

6.1 Funkce tangens

Definice 6.1 ([1]) Tangens úhlu α je definován jako

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{R}. \tag{45}$$

Poznámka 6.1 Všimněme si, že z rovnic (7) a (8) vyvodíme vztah

$$\operatorname{tg}\alpha(m) = m. \tag{46}$$

Z toho vyvozujeme, že $\alpha(m)$ je inverzní funkcí k funkci $\operatorname{tg}\alpha$, kterou označme arkustangens x. Podle příkladu 1.1 víme, že platí vztah

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}. \tag{47}$$

Příklad 6.1 Ověřte platnost rovnice

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Řešení: Nejprve spočítáme několik prvních derivací pro $\operatorname{arctg} x$.

$$(\operatorname{arctg} x)'' = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = -1(1+x^2)2x = \frac{-2x}{(1+x^2)^2},$$

$$\begin{aligned}
(\operatorname{arctg} x)''' &= \left(\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right)' = \frac{-2(1+x^2)^2 + 2x(1+x^2)4x}{(1+x^2)^4} = \frac{-2(1+x^2)+8x^2}{(1+x^2)^3} \\
&= \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}, \\
(\operatorname{arctg} x)^{(4)} &= \left(\frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}\right)' = \frac{12x(1+x^2)^3 - 3(6x^2-2)2x(1+x^2)^2}{(1+x^2)^6} \\
&= \frac{-24x(x^2-1)}{(1+x^2)^3}, \\
(\operatorname{arctg} x)^{(5)} &= \left(\frac{-24x(x^2-1)}{(1+x^2)^3}\right)' = \frac{(-72x^2+24)(1+x^2)-(24x-24x^3)6x}{(1+x^2)^4} \\
&= \frac{24(3x^4-8x^2+1)}{(1+x^2)^4}, \\
(\operatorname{arctg} x)^{(6)} &= \left(\frac{24(3x^4-8x^2+1)}{(1+x^2)^4}\right)' \\
&= \frac{(288x^3-384x)(1+x^2)-8x(72x^4-192x^2+24)}{(1+x^2)^5} \\
&= \frac{-288x(x^4-5x^2+2)}{(1+x^2)^5}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

S využitím Maclaurinovy řady (13) rovnost dokážeme:

$$\begin{aligned}
\arctan x &= \arctan 0 + \frac{(\arctan 0)'}{1!}x + \frac{(\arctan 0)''}{2!}x^2 + \frac{(\arctan 0)'''}{3!}x^3 + \dots \\
&= 0 + \frac{1}{1!}x + 0 - \frac{2}{3!}x^3 + 0 + \frac{24}{5!}x^5 + 0 = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.
\end{aligned}$$

Dosazením $x = 1$ získáme tzv. Leibnizovu řadu pro π :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \qquad \circ$$

6.2 Funkce kotangens

Definice 6.2 ([1]) Kotangens úhlu α je definován jako

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad \alpha \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{R}. \tag{48}$$

Poznámka 6.2 Z definice vyplývá, že $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.

6.3 Funkce sekans a kosekans

Definice 6.3 ([1]) Funkce sekans a kosekans jsou definovány jako

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \qquad\qquad \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}. \tag{49}$$

Poznámka 6.3 Sekans a kosekans doplňují tradiční seznam šesti goniometrických funkcí.

Závěr

Cílem práce bylo nahlédnout na sinus a kosinus z jiných než obvyklých úhlů pohledu a dokázat, že všeobecně známé vlastnosti těchto funkcí platí. Nejprve jsme měřením úhlů na jednotkové kružnici potvrdili platnost hodnot, kterých sinus a kosinus nabývají. Dále jsme vzorce pro jejich derivaci potvrdili nejen využitím jednotkové kružnice, ale i pomocí vlastností mocninných řad. Přiblížili jsme si jejich vztahy s exponenciální funkcí a rozšířili naše vědomosti o náhled na sinus a kosinus v komplexní rovině pomocí Eulerova vzorce. Práce taktéž poskytuje přehled nejznámějších vzorců, které obsahují sinus a kosinus, a okrajově jsme zmínili další goniometrické funkce a jejich vztahy se sinem a kosinem.

Tato práce mi přinesla širší pohled na dvě velice známé goniometrické funkce. Provedla mě nejrůznější matematikou, od základní školy po vysokou. Po „oprášení“ matematických teorií, jako je například měření úhlů, derivování či počítání s mocninnými řadami a komplexními čísly, jsem do problematiky složitějších náhledů na sinus a kosinus pronikla a věřím, že tato práce je přínosem nejen pro mě, ale i pro lidi, kteří se o těchto funkcích chtějí dozvědět více.

Literatura

[1] Moll, Victor H. Numbers and functions: from a classical-experimental mathematician's point of view. Providence, R.I: American Mathematical Society, 2012.

[2] Rektorys, Karel. Přehled užité matematiky I. 6. přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 1995, xxxii, 720 s.

[3] Gymnázium F. X. Šaldy. Elementární goniometrické a trigonometrické věty [online]. Liberec, 2008 [cit. 2015-02-10]. Dostupné z: http://jan.gfxs.cz/studium/files/funkce/gonio.pdf.

[4] Došlá, Zuzana. Nekonečné řady. 2. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2007, 120 s.

[5] Kříž, Pavel. Taylorova a Maclaurinova řada. Mocninné řady s Maple [online]. [cit. 2015-04-03]. Dostupné z: https://cgi.math.muni.cz/kriz/pseries/teorie.htm.