UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Výnosová křivka

Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Eva Bohanesová, Ph.D.**
Vypracoval(a): **Olga Grulichová**
Studijní program: B1103 Aplikovaná matematika
Studijní obor Matematika–ekonomie se zaměřením na bankovnictví/pojišťovnictví
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2017

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Olga Grulichová

Název práce: Výnosová křivka

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: Mgr. Eva Bohanesová, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2017

Abstrakt: Tato práce je věnována výnosové křivce. V první části se věnuji dluhopisům. V druhé části je představena výnosová křivka a její možné tvary. Dále je na příkladu ukázána metoda bootstrapping pro její konstrukci. Uvedeny jsou též forwardové úrokové míry a vztah pro jejich výpočet. Sestrojeny jsou forwardové výnosové křivky pro doplnění celé časové struktury úrokových měr. Na konci práce je ukázána aplikace výnosové křivky při zjištění reálné hodnoty dluhopisu pro účely účetnictví.

Klíčová slova: dluhopis, úroková míra, výnosová křivka, reálná hodnota,výnos do splatnosti, bootstrapping, forwardová úroková míra

Počet stran: 50

Počet příloh: 1

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Olga Grulichová

Title: Yield curve

Type of thesis: Bachelor's

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: Mgr. Eva Bohanesová, Ph.D.

The year of presentation: 2017

Abstract: Yield curve is the subject of the bachelor thesis. In the first part bonds are described in detail. In the second part yield curve including its possible shapes is introduced. Further, bootstrapping, the method for its construction is demonstrated on the example. Forward interest rates as well as forward yield curves are mentioned too, namely for the completion of the term structure of interest rates. At the end of the thesis calculation of a bond real value for acoounting is shone as the practical application of the yield.

Key words: obligation, interest rate, yield curve, real price,yield to maturity, bootstrapping, forward interest rate

Number of pages: 50

Number of appendices: 1

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně pod vedením Mgr. Evy Bohanesové, Ph.D. a všechny použité zdroje jsem uvedla v seznamu literatury.

V Olomouci dne ....

podpis

Obsah

Seznam obrázků

Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala vedoucí mé práce Mgr. Evě Bohanesové, Ph.D. za její spolupráci, ochotu, cenné rady a čas, který mi během konzultací věnovala.

Úvod

Ve finanční praxi se často pracuje s dluhovými cennými papíry. Nejznámějším z nich jsou dluhopisy, které jsou emitovány z důvodu nedostatku finančních prostředků. Na druhou stranu jsou také nakupovány, protože se jedná o bezpečné cenné papíry. Ty, které mají pevný kupon, slibují pevný výnos. Pokud je vlastníkem dluhopisů firma, musí je mít zaevidované ve svém majetku, a tudíž o nich musí být evidence v účetnictví. Alespoň jedenkrát za rok se musí zjistit jejich hodnota. K tomu se využívá nástroj známý pod jménem výnosová křivka. Využívají ji také emitenti, aby věděli, jakou kuponovou sazbu mají stanovit. Na výnosovou křivku se obrací také kupující (investoři), kteří chtějí znát výnos z daného dluhopisu s různými dobami splatnosti.

V první části práce se věnuji dluhopisům, se kterými je výnosová křivka úzce spjata. Vysvětlím základní pojmy spojené s dluhopisem, představím jejich základní členění a nejznámější typy. Dále vysvětlím též jejich oceňování a různé druhy výnosnosti. Zmíním se také o duraci, která je významnou charakteristikou dluhopisu.

V druhé části se věnuji výnosové křivce. Představím, co to vlastně je a jaké existují druhy. Vysvětlím její jednotlivé tvary, se kterými se můžeme v praxi setkat. Dále ukážu, jak se výnosová křivka zkonstruuje pomocí metody bootstrapping. Protože z aktuálních výnosů do splatnosti dluhopisů lze vypočítat úrokové míry platné pro období začínající v budoucnosti, těmto úrokovým mírám se říká též forwardové, ukážu také, jak se vypočítají příslušné forwardové výnosové křivky.

Na závěr práce ukáži aplikaci výnosové křivky v praxi, a to zjištěním reálné hodnoty dluhopisu pro potřeby účetnictví.

Kapitola 1

Dluhopisy

1.1 Charakteristika dluhopisu

Dluhopis je rozšířený druh dluhového cenného papíru, jehož emisí získává emitent úvěrový kapitál. Vyjadřuje závazek emitenta vůči věřiteli. Jedná se o cenný papír, s nímž je spojeno právo na splacení dlužné částky, vyplacení stanovených výnosů a povinnost emitenta splnit veškeré závazky. Dluhopisy vydané dle českého práva se řídí zákonem č. 190/2004 Sb., o dluhopisech.[2] [4]

Dluhopisy vznikly z potřeby společnosti obchodovat s dluhy. Můžeme s nimi na rozdíl od úvěrů nebo vkladů obchodovat na sekundárním trhu To jsou takové obchody s cennými papíry, se kterými již jednou obchodováno bylo, tj. nejsou nově emitovány. Opakem tohoto trhu je trh primární, kde se obchoduje pouze s cennými papíry, se nimiž obchodujeme poprvé tj. jsou nově emitovány. Například pokud by se jednalo o státní dluhopisy, primárním trhem by byla centrální banka, která cenný papír emituje, a obchodní banky, které by tyto dluhopisy odkoupily. Běžnou praxí není jen obchodování na burzách, ale i na OTC trhu (trh mimo burzu, obchodníci spolu komunikují telefonicky nebo přes počítač). Na rozdíl od úvěrů, půjček, vkladů není věřitel na dluhopisu uveden.[2]
Obecně je věřitel ten, kdo má dluhopis v momentálním držení. Další odlišností je, že se obvykle jistina dluhopisu, na rozdíl od např. jistiny dlouhodobého úvěru, splácí najednou.[1]

Každý dluhopis se ve hmotné (listinné) podobě skládá z několika částí, a to z kuponového archu, kuponu a talonu.[1]

Kuponový arch je součástí dluhopisu a obsahuje kupony a talon. **Talon** se vyskytuje především u dlouhodobých dluhopisů a na jeho základě po odstřižení všech kuponů získá majitel další kuponový arch. **Kupon** je ústřižek z kuponového archu, při jehož předložení má držitel právo na vyplacení *kuponové platby*. To je platba, kterou dlužník vyplácí v pravidelných termínech věřiteli. Ve většině případů se jedná se o fixní procento nominální hodnoty dluhopisu – můžeme říct, že je to prakticky úrok z nominální hodnoty. Můžeme se setkat s pevnou i plovoucí kuponovou/úrokovou sazbou, která je navázána na jinou úrokovou míru, případně na inflaci. Plovoucí úrokovou sazbou může být LIBOR nebo PRIBOR, přičemž LIBOR se váže na zahraniční dluhopisy. Název kupon byl převzat z minulosti, kdy dluhopis obsahoval ústřižky – kupony, a s nimi chodil věřitel pro úrok do banky.[1][8] Hodnota kuponu by měla být atraktivní pro obě smluvní strany, tedy jak pro věřitele, tak pro dlužníka. Dlužník samozřejmě požaduje, aby hodnota kuponu byla co nejnižší a nemusel příliš platit, zatímco věřitel naopak chce mít hodnotu kuponu co nejvyšší, aby pro sebe získal co nejlepší finanční obnos.
U kuponu je také důležité zmínit pojem kuponová sazba, kterou značíme c. *Kuponová sazba* je úroková sazba, neboli procento z nominální hodnoty dluhopisu. Platí tedy vztah $C = cF$.[5]

Nyní je potřeba vysvětlit několik dalších základních pojmů, se kterými se v souvislosti s dluhopisem vždy setkáme.
Emitent dluhopisu je dlužník (může být stát, komunální orgán, banka, firma), na druhé straně stojí držitel dluhopisu (investor) neboli věřitel. Emitent emituje dluhopis s cílem získat finanční prostředek na určitou dobu a s určitou jistotou, že věřitel od svého rozhodnutí později neustoupí.[2]
Nominální hodnota dluhopisu je částka vytištěná přímo na cenném papíru nebo je uvedená v emisních náležitostech a vyjadřuje, jak vysoký je dluh. Bývá vyplacena na konci doby splatnosti (= doba životnosti dluhopisu). K nominální

hodnotě se vztahuje tzv. *"kurz dluhopisu"*. Je to tržní cena dluhopisu vyjádřená v procentech z nominální hodnoty, bez zohlednění alikvotního úrokového výnosu (AÚV viz. dále).[5]

Tržní cena dluhopisu obecně není stejná jako jeho nominální hodnota. Je výsledkem střetávání nabídky a poptávky investorů a měla by odrážet jejich názor na to, jak by měl být dluhopis správně ohodnocen. Tuto cenu známe, pokud je dluhopis veřejně obchodovatelný. Je závislá na různých faktorech, jako je např. makroekonomické prostředí, úrokové sazby centrální banky, rating emitenta apod. Tato cena však v sobě nemusí obsahovat alikvotní úrokový výnos. Potom rozlišujeme cenu čistou (clean) bez alikvotního úrokového výnosu a cenu hrubou (dirty), která tento výnos obsahuje.[8][10]

Doba splatnosti je doba životnosti dluhopisu. Někdy se užívá doba do splatnosti, potom myslíme dobu zbývající do posledního dne splatnosti dluhopisu. *Dnem splatnosti* je pak den, k němuž je ukončena životnost dluhopisu a je vyplacena nominální hodnota a případně poslední kuponová platba.[8][4]

Alikvotní úrokový výnos (AÚV) je úrok, který naběhne od poslední kuponové platby do dne prodeje dluhopisu. Týká se nominálního výnosu při obchodování s dluhopisy. Ve většině případů se dluhopis nakupuje a prodává v období mezi emisí a výplatou kuponu, nebo v době mezi výplatami dvou kuponů. Kupující prodávajícímu zaplatí nejen kupon samotný, ale i tento výnos. AÚV
v podstatě kompenzuje prodávajícímu ztrátu za to, že se zřekne dalšího kuponu. K tomu, abychom mohli AÚV vypočítat, potřebujeme znát jednoznačně vymezené *výnosové období*. To začíná v den výplaty kuponové platby a končí v den vypořádání obchodu. V praxi bývá často stanoveno tzv.*datum ex-kupon*. Je to první den, ve kterém ten, kdo kupuje dluhopis, již nezískává s nákupem dluhopisu právo na výplatu nejbližšího kuponu. Období mezi datem ex-kupon a dnem, který předchází dnu výplaty kuponu, nazýváme ex-období. Pokud nastane situace, kdy datum vypořádání obchodu připadne do ex-období, potom za počátek výnosového období bereme datum výplaty kuponu, které se vzahuje k danému ex-období. V tomto případě ja AÚV záporný, protože konečné datum výnosového

období předchází jeho počátek, a tím je výnosové období záporné. Vztah pro výpočet AÚV je:

$$A\acute{U}V = k \cdot \frac{C}{360},$$

kde k je počet dnů výnosového období,
C je hodnota kuponu.[10][5][12]

1.2 Druhy dluhopisů

Dluhopisy můžeme rozdělovat podle různých hledisek do několika skupin:

1. Podle **počtu kuponových plateb**

   Dle tohoto dělení rozlišujeme dluhopisy s konečným a nekonečným počtem plateb.

   - *kuponové* – jsou spojeny s konečným počtem kuponových plateb a rozlišujeme je na dluhopisy s pevným a pohyblivým kuponem;
     - s *pevným* kuponem – dluhopis je spojen s pravidelným vyplácením stejné částky (fixní hodnota kuponu). S posledním kuponem je zaplacena i nominální hodnota dluhopisu;
     - s *pohyblivým* kuponem – narozdíl od dluhopisu s pevným kuponem se kuponová sazba pravidelně přizpůsobuje podle aktuální úrovně referenční úrokové míry (např. v ČR pololetní kupony podle šestiměsíčního PRIBORu, navýšeného o kreditní přirážku). Opět s posledním kuponem je zaplacena i nominální hodnota;
   - *bezkuponové*, tzv. zero coupon bonds – z těchto dluhopisů neplynou žádné kuponové platby. Ke dni splatnosti dluhopisu se pouze vyplácí jeho nominální hodnota;

- *konzoly* (věčné dluhopisy) – jsou spojeny s nekonečným počtem kuponových plateb a nominální hodnota na rozdíl od bezkuponového dluhopisu není vyplacena nikdy;

2. Podle **délky doby splatnosti**

   Dle tohoto dělení existují dluhopisy krátkodobé, střednědobé a dlouhodobé.

   - *krátkodobé* - doba splatnosti pro tyto dluhopisy je maximálně jeden rok (např. pokladniční poukázky);
   - *střednědobé* – doba splatnosti je vyšší než jeden rok a zároveň nižší než 5 let;
   - *dlouhodobé* – doba splatnosti je 5 let a výše;

3. Podle **emitenta**

   V tomto dělení rozlišujeme dluhopisy státní, komunální, podnikové a bankovní. U bankovních dluhopisů existují speciální dluhopisy zvané hypoteční zástavní listy.

   - *státní dluhopisy* – emitentem je státní orgán, a to Ministerstvo financí České republiky, případně ČNB. Ta ale emituje pouze své pokladniční poukázky, tj. velmi krátkodobé dluhopisy z důvodu momentálního nedostatku v peněžním oběhu. Jinak technicky zajišťuje emisi státních dluhopisů, tj. těch, jejichž emitentem je stát. Tyto dluhopisy jsou vydávány při deficitu státního rozpočtu nebo při zvýšené potřebě finančních prostředků (krytí neočekávaných výdajů obrovských škod způsobených katastrofami - např. povodňové dluhopisy);
   - *komunální dluhopisy* – jsou obdobou státních dluhopisů, ale na obecní úrovni;
   - *podnikové dluhopisy* – emtitent je určitá firma. Takto může získat další zdroje krytí v případě finančního nedostatku;
   - *bankovní (finanční) dluhopisy* - emitentem je jakákoliv obchodní banka.

Dluhopisy využívá jako celkem stabilní a dlouhodobý zdroj krytí svých poskytovaných úvěrů;

- *hypoteční zástavní listy* – jsou dluhopisy emitované hypotečními bankami s licencí primárně proto, aby získaly finanční prostředky pro krytí poskytovaných úvěrů. Respektive 70 % z jejich celkové výše je ke krytí využíváno. Jsou kryty pohledávkami z hypotečních úvěrů, ty jsou ještě navíc kryty reálně existující nemovitostí, proto poskytují vysoce kvalitní a stabilní krytí a jedná se o jeden z nejbezpečnějších dluhopisů vůbec;

V praxi existuje mnohem víc druhů dluhopisů, ve své práci jsem vyjmenovala jen ty základní a nejznámější. (viz. například T. Cipra, Matematika cenných papírů)[1][2][5]

1.3 Oceňování dluhopisu

V této kapitole představím různé typy oceňování dluhopisů. V praxi rozlišujeme několik cen. Například tržní cena dluhopisu je odvozena ze vztahu nabídky a poptávky na trhu. Reálná hodnota se stanovuje pro potřeby účetnictví (evidence majetku firmy) a její výpočet bude ukázán v podkapitole 2.6.

1.3.1 Vnitřní hodnota dluhopisu

V souvislosti s dluhopisy je potřeba porozumět pojmu vnitřní hodnota dluhopisu. Je to vlastně současná hodnota budoucích příjmů, které z dluhopisu přímo plynou. Hlavním faktorem ovlivňující vnitřní hodnotu dluhopisu a následně i cenu tržní, jsou **tržní úrokové sazby**. Na veřejnosti je známo, že vztah těchto dvou faktorů je protichůdný. S růstem tržních úrokových sazeb klesá teoretická cena dluhopisu. Platí to také naopak, pokud tyto sazby klesají, teoretická cena roste. Tento protichůdný vztah je vidět z následujích vzorců (např.1.2). Pohyb úrokových sazeb závisí na vývoji ekonomiky a reakcích vlády (fiskální politika) a centrální banky (měnová politika), na měnovém kurzu, inflaci atd.[4]

1.3.2 Vnitřní hodnota bezkuponového dluhopisu

Bezkuponový dluhopis (zero cupon bond) je takový dluhopis, který není spojen s kuponovými platbami. Emisí tohoto dluhopisu se emitent zavazuje k tomu, že k určitému datu v budoucnu splatí jeho nominální hodnotu. Můžeme také říct, že je to speciální případ kuponového dluhopisu, kdy hodnota kuponu (ozn. symbolem C) je nulová, tedy $C = 0$.

$$P = \frac{F}{(1+r)^n}, \tag{1.1}$$

kde P je vnitřní hodnota dluhopisu,
F je nominální hodnota dluhopisu,
r je tržní úroková míra, která představuje průměrnou tržní výnosnost dluhopisu,
n je doba splatnosti.
U tohoto typu dluhopisu je výnosnost vyjádřená pomocí hodnoty r. Vyjádříme si jej z předchozího vzorce:

$$r = \sqrt[n]{\frac{F}{P}} - 1.$$

Příklad: Vypočítejte vnitřní hodnotu bezkuponového dluhopisu $F = 10\,000$, $r = 2,3\,\%$, $n = 3$.
Řešení: $P = \frac{10\,000}{(1+0{,}023)^3} = 9\,340,56$ (Kč).

1.3.3 Vnitřní hodnota kuponového dluhopisu

Kuponové dluhopisy rozdělujeme na dluhopisy s pevným kuponem a dluhopisy s proměnlivým kuponem.

Dluhopis s pevným kuponem

Dluhopis s fixním kuponem (fixed cupon bonds) je spojený s pravidelnými výplatami sjednaného kuponu, který je po celou dobu neměnný. Doba mezi výplatami dvou kuponů je ve většině případů rok, někdy může být i pololetí.

Při jeho splatnosti je vyplacena nominální hodnota. Vnitřní hodnotu zjistíme pomocí vztahu:

$$P = \frac{C}{(1+r)^1} + \frac{C}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{C}{(1+r)^{(n-1)}} + \frac{C+F}{(1+r)^n}. \tag{1.2}$$

Zestručnění vztahu je možné díky využití současných hodnot perpetuit (důchod s nekonečným počtem plateb – tzv. věčné důchody):

$$P = \frac{C}{r} + \frac{1}{(1+r)^n}\left(F - \frac{C}{r}\right),$$

kde

P je vnitřní hodnota dluhopisu,

C je hodnota kuponu,

F je nominální hodnota dluhopisu,

n je doba splatnosti,

r je průměrná tržní míra investic do dluhopisu, která představuje průměrnou výnosnost dluhopisů stejného druhu.[5]

Příklad: Vypočítejte vnitřní cenu kuponového dluhopisu ST.DL.3,75/20, $F = 10\,000$, $c = 3,75\,\%$, $n = 4$, $r = 2,3\,\%$.

Řešení: $P = \frac{375}{0{,}023} + \frac{1}{(1+0{,}023)^4}\left(10\,000 - \frac{375}{0{,}023}\right) = 10\,548,12$ (Kč).

Dluhopis s proměnlivým kuponem

Jedná se o dluhopis, který je spojen s pravidelnými výplatami různých kuponů C_i. Tyto kupony se pro následující úroková období (3 nebo 6 měsíců) odvozují od aktuální referenční míry (3 nebo 6 měsíční LIBOR). Při jeho splatnosti je vyplacena jeho nominální hodnota. Vnitřní hodnotu tohoto dluhopisu zjistíme pomocí vztahu:

$$P = \frac{C_1}{(1+r)^1} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{C_n+F}{(1+r)^n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{C_j}{(1+r)^j} + \frac{F}{(1+r)^n},$$

kde

P je vnitřní hodnota (spravedlivá hodnota) dluhopisu,

C_n je kuponová platba, která byla vyplacena v n-tém roce držby,

F je nominální hodnota (vyplacena vždy na konci doby splatnosti),

n je počet let do doby splatnosti,

r je průměrná tržní míra investic do dluhopisů, která představuje průměrnou výnosnost dluhopisů stejného druhu.[5]

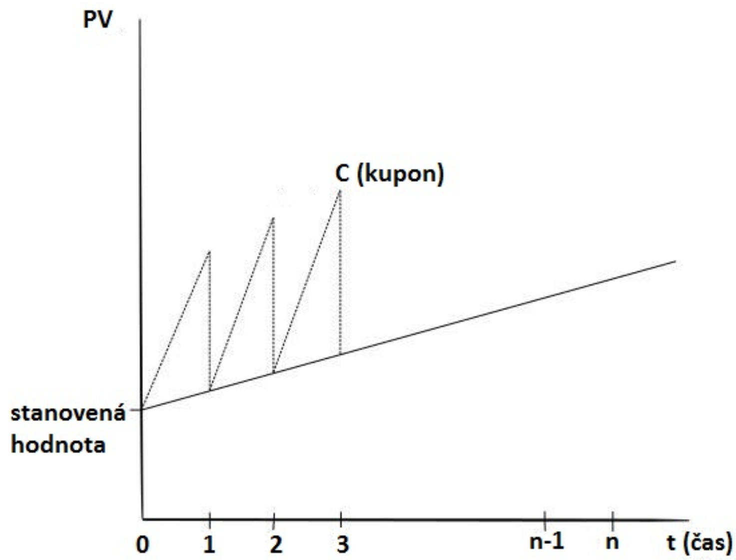
Zobecněním vzorce výše na nekonečný počet kuponových plateb získáme vztah pro výpočet vnitřní hodnoty konzoly:

$$P = \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \cdots = \frac{C}{r}. \tag{1.3}$$

Příklad: Uvažujme dluhopis, který nemá omezenou dobu splatnosti, jde tedy o konzolu. $F = 10\,000$ Kč, $r = 2,3\,\%$, $c = 3,75\%$. Vypočtěte jeho vnitřní hodnotu.
Řešení:$P = \frac{C}{r} = \frac{375}{0{,}023} = 16\,604,34$ (Kč).

1.3.4 Čistá/hrubá cena dluhopisu

Hrubá cena dluhopisu (full price) odpovídá součtu ceny dluhopisu a alikvotního úrokového výnosu, zatímco cena čistá (clean price) je shodná se samotnou cenou dluhopisu bez AÚV. Pokud bychom tyto ceny zobrazili graficky, čistá cena by měla téměř lineární (rostoucí nebo klesající) průběh, to by záleželo na vzájemné velikosti sazeb c a r, zatímco hrubá cena se pohybuje nahoru a dolů a připomíná zuby. (viz obrázek 1.1)



Obrázek 1.1: Grafické zobrazení čisté a hrubé ceny (vlastní nákres)

Pro výpočet čisté a hrubé ceny dluhopisu můžeme sestavit jednoduchý algoritmus.

1. Vypočítáme cenu dluhopisu k datu poslední výplaty kuponu P_1 a cenu k datu nejbližší výplaty v budoucnu P_2.

2. Tyto dvě ceny vzájemně lineárně interpolujeme k datu vypořádání obchodu. Tím získáme tzv. interpolovanou cenu dluhopisu (čistá cena). Při zjišťování interpolované ceny mohou nastat dvě situace, a to: $P_1 < P_2$ nebo $P_2 < P_1$. Pro každou z nich existuje jiný vztah pro výpočet interpolované ceny.

   (a) Pokud $P_1 < P_2$, použijeme vztah:
   $P_i = P_1 + \frac{360(R_2-R_1)+30(M_2-M_1)+D_2-D_1}{360}(P_2 - P_1)$,
   kde $D_1M_1R_1$ je datum poslední výplaty kuponu a $D_2M_2R_2$ datum vypořádání obchodu, k němuž cenu dluhopisu počítáme.

   (b) Pokud $P_2 < P_1$, použijeme vztah:
   $P_i = P_2 + \frac{360(R_3-R_2)+30(M_3-M_2)+D_3-D_2}{360}(P_1 - P_2)$,

kde $D_2M_2R_2$ je datum vypořádání obchodu a $D_3M_3R_3$ je datum nejbližší budoucí výplaty kuponu.[5]

3. Stanovíme datum ex-kupon a vypočítáme alikvotní úrokový výnos za dané výnosové období.

4. Zjistíme, jestli stanovujeme cenu dluhopisu před datem ex-kupon, alikvotní úrokový výnos k interpolované ceně přičteme. Pokud, naopak, stanovujeme cenu dluhopisu po datu ex-kupon, alikvotní úrokový výnos od interpolované odečteme. Tím získáme hrubou cenu dluhopisu.[5]

V následujícím příkladu si ukážeme, jak se určuje čistá a hrubá cena dluhopisu. Čistá cena je shodná s cenou interpolovanou. K jejímu výpočtu potřebujeme znát hodnoty P_1 a P_2. To jsou ceny k datu nejbližší minulé kuponové platby a nejbližší budoucí kuponové platby.

Příklad: Určete cenu pětiletého dluhopisu emitovaného dne 12. 9. 2015 s nominální hodnotou 10 000 Kč, ke dni 3. 11. 2016. Kuponové platby jsou vypláceny vždy k 12. 9. při kuponové sazbě 3,75 % p. a. Tržní úroková míra činí 2,3 % p.a. Datum ex-kupon je stanoveno na 11. 8. 2017.

Řešení: Výše kuponové platby bude činit:

$C = 10\,000 * 0,0375 = 375$ (Kč).

Vypočítáme ceny P_1, P_2 k datu poslední minulé výplaty kuponu, tj. k 12. 9. 2016, a k datu nejbližší budoucí výplaty kuponu, tj. k 12. 9. 2017:

$$P_1 = \frac{375}{0{,}023} + \frac{1}{(1+0{,}023)^2}\left(10\,000 - \frac{375}{0{,}023}\right) = 10\,280,29 \text{ (Kč)},$$

$$P_2 = \frac{375}{0{,}023} + \frac{1}{(1+0{,}023)^1}\left(10\,000 - \frac{375}{0{,}023}\right) = 10\,141,74 \text{ (Kč)}.$$

Vypočítáme interpolovanou cenu P_i, která je shodná s čistou cenou dluhopisu. K jejímu výpočtu používáme standard $\frac{30E}{360}$. Vidíme, že $P_1 > P_2$.

$P_i = 10\,141,74 + \frac{360(2017-2016)+30(9-11)+12-3}{360}(10\,280,29 - 7\,162,57) = 10\,260,66$ (Kč).

Alikvotní úrokový výnos dluhopisu vypočteme za období, které začíná dnem po-

slední kuponové platby, tj.12. 9. 2016, a končí dnem vypořádání obchodu tedy 3. 11. 2016. Vidíme, že cenu dluhopisu zjišťujeme před datem ex-kupon, neboť toto datum je stanoveno na 11. 8. 2017. Počet dní ve výnosovém období je dle standardu $\frac{30E}{360}$ roven 51 dnům:
$A\acute{U}V$=$375\frac{51}{360} = 53,13$ (Kč).
Výslednou cenu dluhopisu, tedy cenu hrubou, získáme součtem interpolované ceny a alikvotního úrokového výnosu:
$P = 10\,260,66 + 53,13 = 10\,313,79$ (Kč).

1.4 Měření výnosu dluhopisu

Dluhopisy jsou obvykle obchodovány v cenách (tzn. protistrany si je navzájem nabízejí za cenu, ne za výnos). Bohužel kvůli komplikovaným schématům splácení různých druhů dluhopisu je není možné navzájem porovnávat pouze na základě cen. Z tohoto důvodu jsou posuzovány podle jejich výnosu. Ten můžeme měřit několika více či méně dokonalými metodami.[1][2][10]

1.4.1 Běžný výnos

Nejjednodušší metodou, pro zjištění výnosnosti dluhopisu je *běžný výnos* (current yield), který definujeme vztahem

$$r_c = \frac{C}{P},$$

kde
r_c je běžný výnos,
C je kupon,
P je cena dluhopisu.

Tato metoda se užívá pouze pro odhadnutí nákladů nebo zisku z držení dluhopisu. Přesnější metody počítají s jeho hrubou cenou, nikoli s čistou, protože je to cena, kterou má dluhopis v daný okamžik. Hlavním nedostatkem běžného výnosu z dluhopisu je, že nezahrnuje možné kapitálové zisky nebo ztráty, které vzniknou z rozdílu mezi cenou aktuální a nominální hodnotou.[10]

Příklad: Určete běžný výnos z dluhopisu ST.DL.3,75/20, $F = 10\,000$ Kč, $n = 4$, $r = 2,3\,\%$. K 3. 11. 2016 je jeho cena 10 313,79 Kč.

Řešení: $r_c = \frac{375}{10\,313{,}79} = 0,036$, tj. 3,6 %.

1.4.2 Jednoduchý výnos do splatnosti

Tato metoda se snaží opravit nedostatky běžného výnosu tím, že zahrnuje kapitálové zisky a ztráty. Vztah pro tuto metodu je ve tvaru:

$$rms = \frac{C}{P} + \frac{PC - P}{nP},$$

kde

rms je jednoduchý výnos do splatnosti,

C je kupon,

PC je prodejní cena,

P je nákupní cena dluhopisu,

n je počet let do splatnosti.

Nedostatkem této metody je, že nepočítá se složeným úrokováním. Vlastník dluhopisu získává kupony, které mohou být reinvestovány – může z nich být získáván úrok, tím se zvyšuje celková výnosnost z držení dluhopisu.[10]

Příklad: Určete jednoduchý výnos do splatnosti pro dluhopis ST.DL.3,75/20, $PC = 10\,000$, $n = 4$. Cena dluhopisu je 10 313,79 Kč.

Řešení: $rms = \frac{375}{10\,313{,}79} + \frac{10\,000 - 10\,313{,}79}{4 * 10\,313{,}79} = 0,029$, tj. 2,9 %.

1.4.3 Výnos do doby splatnosti

Nejčastějším způsobem při měření výnosu dluhopisu je *výnos do doby splatnosti* (yield to maturity). Bere v potaz rozložení a výši úrokových plateb, dobu splatnosti a kapitálové zisky a ztráty pro celou dobu životnosti dluhopisu.[10][2]

Vztah pro výpočet výnosu do doby splatnosti je ve tvaru:

$$P_d = \frac{C}{(1+rm)^1} + \frac{C}{(1+rm)^2} + \cdots + \frac{C+F}{(1+rm)^n} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{C}{(1+rm)^j} + \frac{F}{(1+rm)^n},$$

kde

P_d je tržní hodnota dluhopisu,

F je nominální hodnota dluhopisu,

n je počet úrokovacích období dluhopisu,

C je kupon,

rm je roční výnos do splatnosti (yield to maturity).

Příklad: Určete výnos do doby splatnosti pro dluhopis ST.DL.3,75/20, $F = 10\,000$, $r = 2,3\,\%$, $n = 4$. Tržní hodnota dluhopisu je 10 375 Kč.

Řešení: Výpočet byl proveden v Excelu pomocí funkce XIRR. Celý výpočet je v příloze A.

$r_m = 0,0599$, tj. 5,99 %.

1.4.4 Vztahy mezi veličinami dluhopisu

Při oceňování dluhopisů je také důležité zohlednit, zda jsou tzv. v pari, nad pari nebo pod pari. Ideální situace nastává, pokud je dluhopis v pari. To znamená, že nominální hodnota je stejná jako tržní hodnota, tudíž při nákupu nebo prodeji tohoto dluhopisu ani nevyděláme, ani neproděláme. Zohledňují se pouze kuponové výnosy, které většinou nebývají záporné. [1][2] Pro dluhopis v pari platí ekvivalence:

$$P = F \iff c = r.$$

To znamená, že nominální hodnota dluhopisu je shodná s tržní hodnotou právě tehdy, když se hodnota kuponu rovná tržní úrokové míře. V tomto případě řekneme, že dluhopis je v pari. Důkaz tohoto tvrzení provedeme následovně:

Protože se jedná o ekvivalenci, musíme provést důkaz oboustranně. Nejdříve dokážeme, že opravdu $P = F \Rightarrow c = r$, tedy předpokládáme, že $P = F$.

$$F = \frac{cF}{1+r} + \frac{cF}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{cF+F}{(1+r)^n}.$$

Celou rovnici vydělíme F, vytkneme $\frac{c}{1+r}$ a využijeme vztahu pro geometrickou řadu.

$$1 = \frac{c}{1+r}\frac{1-\frac{1}{(1+r)^n}}{1-\frac{1}{1+r}} + \frac{1}{(1+r)^n} = c\frac{1-\frac{1}{(1+r)^n}}{r} + \frac{1}{(1+r)^n}.$$

Z celé rovnice odečteme hodnotu $\frac{1}{(1+r)^n}$ a levou stranu přeskládáme.

$$1 - \frac{1}{(1+r)^n} = \frac{c}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right).$$

Celou rovnici vydělíme $1 - \frac{1}{(1+r)^n}$ a dostaneme:

$$1 = \frac{c}{r}.$$

Z tohoto vztahu jasně vidíme, že aby se zlomek rovnal 1 musí být $r = c$.
Nyní dokážeme opačný směr ekvivalence, a to $P = F \Leftarrow c = r$, tady předpokládáme, že $F = P$. Při tom využijeme znalosti o součtu geometrické řady:

$$P = \frac{cF}{1+c} + \frac{cF}{(1+c)^2} + \ldots + \frac{cF+F}{(1+c)^n} = \frac{cF}{1+c}\frac{1-\frac{1}{(1+c)^n}}{1-\frac{1}{1+c}} + \frac{F}{(1+c)^n}.$$

Dále výraz upravíme tak, aby byla na první pohled vidět rovnost s F.

$$P = F\left(1 - \frac{1}{(1+c)^n}\right) + \frac{F}{(1+c)^n} = F.$$

Tím jsme dokázali vztah dluhopisu v pari.

Pro dluhopis, který je nad pari platí $P > F \Leftrightarrow c > r$ a pro dluhopis, který je pod pari platí $P < F \Leftrightarrow c < r$. (viz. T. Cipra - Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou)

1.5 Durace

Nyní se zmíním o charakteristice dluhopisu durace. Durace je jednou z důležitých veličin, které dluhopisy charakterizují. Je to vlastně průměrná doba, během níž můžeme získat zpět svůj investovaný kapitál. Vyjadřuje citlivost ceny dluhopisu na změny úrokových měr. Můžeme dokázat, že dluhopis v době odpovídající duraci je méně citlivý na pohyby úrokových měr. Durace je jeden z nejhlídanějších ukazatelů při problematice studující dluhopisy. Je jedním z hlavních nástrojů při řízení portfolia dluhopisů a je měřítkem citlivosti ceny na změnu úrokové sazby. Existuje několik druhů durací, z nichž nejznámější je tzv. Macaulayho durace. (F. Macaulay zavedl tuto duraci v r. 1938)[7][8]

Macalayho durace je váženým průměrem jednotlivých kuponových období, v nichž teprve dojde k vyplacení kuponů a v posledním období i nominální hodnoty (můžeme říct, že je střední dobou životnosti dluhopisu), ve kterých došlo k vyplacení kuponových plateb. Vypočítáme ji podle vzorce:

$$D_{mac} = \frac{\frac{C}{1+r} + \frac{2C}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{n(C+F)}{(1+r)^n}}{\frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{C+F}{(1+r)^n}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{jC}{(1+r)^j} + \frac{nF}{(1+r)^n}}{PV(r)},$$

kde PV je teoretická cena. Vidíme, že Macaulayho durace je skutečně střední doba životnosti dluhopisu.

Při výpočtech změn ceny dluhopisu v závislosti na změně tržní úrokové míry využíváme přibližný vztah tzv. *modifikovanou Macalayho duraci.*

$$D_{mod} = \frac{1}{1+r} D_{mac} = \frac{1}{PV(r)} \left(\sum_{j=1}^{n} r \frac{C}{(1+r)^{j+1}} + \frac{nF}{(1+r)^{n+1}} \right).$$

Pokud chceme zjišťovat změnu ceny dluhopisu na změnách úrokových měr, potom používáme přibližný vztah:

$$\frac{\triangle PV(r)}{PV(r)} \approx -D_{mac} \frac{\triangle r}{1+r} \left(= -D_{mod} \triangle i \right),$$

kde $\triangle\ r$ je změna úrokové míry r,
$\triangle\ PV$ je změna ceny dluhopisu.

Odvození vychází z Taylorova rozvoje funkce $PV(r)$, do členu prvního řádu má tvar (1.2), popisuje tedy počáteční cenu dluhopisu.
Taylorův rozvoj funkce *PV(r)* v bodě r:

$$PV(r+\triangle r) \approx PV(r) + \frac{1}{1!}\frac{dPV(r)}{dr} \triangle r.$$

Označme $PV(r + \triangle\ r)$-$PV(r)$=$\triangle PV(r)$.
Potom získáme vztah:

$$\triangle PV(r) \approx \frac{dPV(r)}{dr} \triangle i.$$

Vypočítáme derivaci: $\frac{dPV(r)}{dr}$

$$\frac{dPV(r)}{dr} = \frac{-C}{(1+r)^2} + \frac{-2C}{(1+r)^3} + \ldots + \frac{-n(C+F)}{(1+r)^{n+1}},$$

$$\frac{dPV(r)}{dr} = \frac{-1}{1+r}\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{jC}{(1+r)^j} + \frac{nF}{(1+r)^n}\right].$$

Dosadíme derivaci do přibližného tvaru:

$$\triangle PV(r) \approx \frac{-1}{1+r}\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{jC}{(1+r)^j} + \frac{nF}{(1+r)^n}\right] \triangle r.$$

Celou rovnici vydělíme $PV(r)$ (z tohoto kroku již bude patrná Macalayho durace):

$$\frac{\triangle PV(r)}{PV(r)} \approx (-1)\left[\overbrace{\frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{jC}{(1+r)^j} + \frac{nF}{(1+r)^n}}{PV(r)}}^{D_{mac}}\right]\frac{\triangle r}{1+r} = -D_{mac}\frac{\triangle r}{1+r}.$$

[3][5][6]

Příklad: Určete střední dobu dluhopisu s nominální hodnotou 10 000 Kč, dobou splatnosti 4 roky a ročními kuponovými platbami 375 Kč. Tržní úroková míra je 2,3 % p. a. Jak se cena dluhopisu změní, pokud se tržní úroková míra zvýší o půl procentního bodu?

Řešení:

$D_{mac} = \frac{1\cdot\frac{375}{1{,}023}+2\cdot\frac{375}{1{,}023^2}+3\cdot\frac{375}{1{,}023^3}+4\cdot\frac{375}{1{,}023^4}}{\frac{375}{1{,}023}+\frac{375}{1{,}023^2}+\frac{375}{1{,}023^2}+\frac{375}{1{,}023^4}} = 2,47$ (roku), tj. 2 roky a 6 měsíců.

$\frac{\triangle PV}{PV} \approx -2,47\frac{0{,}005}{1{,}023} \approx -0,012,$

tj. cena dluhopisu přibližně klesne o 1,2 %.

Kapitola 2

Výnosová křivka

V úvodu jsme se zmínili o výnosové křivce jako nástroji k ocenění dluhopisu. V této kapitole si tento pojem blíže představíme a ukážeme jednoduchou metodu využívanou k jeho konstrukci. Ukážeme si konstrukci spotové výnosové křivky, která vychází ze spotových úrokových měr, a také forwardových výnosových křivek, které vychází z forwardových úrokových měr. Tyto úrokové míry jsou blíže uvedeny v následujících odstavcích.

2.1 Úrokové míry

Spotová úroková míra je okamžitě platná úroková míra. Pokud je sjednána na danou dobu v rámci nějakého finančního obchodu (spotový kontrakt), platí po sjednané období od současného okamžiku. Někdy mluvíme o spotové míře zisku, spotové výnosnosti do splatnosti aj.

Forwardová úroková míra je úroková míra, která bude platit v nějakém termínu v budoucnu. Pokud je vyjednána na danou dobu v rámci finančního obchodu (forwardový kontrakt), platí po sjednanou dobu od sjednaného budoucího okamžiku. Výnosnost platná v současnosti je spotová, výnosnost, která bude platná např. za půl roku je ze současného pohledu forwardová.[2][12]

Vztah spotové a forwardové úrokové míry:

$$(1 + r_{0,x})^x (1 + r_{x,t})^{t-x} = (1 + r_{0,t})^t, \tag{2.1}$$

kde $r_{0,x}$ je spotová úroková míra na x let,
$r_{x,t}$ ... forwardová úroková míra od roku x do roku $x + t$.

2.2 Výnosová křivka a její druhy

Výnosová křivka je základním nástrojem pro stanovení reálné hodnoty dluhových cenných papírů a jiných dluhových finančních instrumentů. Vypovídá pravdivě o závislosti výnosu na době do splatnosti pouze tehdy, je-li zkonstruována na základě konkrétních dluhopisů, které mají stejné vlastnosti jako: rizikovost, emitent apod. Křivka se může sestavovat také z úrokových swapů, které jsou dostupné na trhu. V praxi jsou pro konstrukci ideální bezkuponové dluhopisy ($C = 0$). Musí jich ale být dostatečné množství, což může být u těchto dluhopisů problém, proto se v praxi pracuje spíše s kuponovými dluhopisy.[1]

Výnosová křivka graficky znázorňuje časovou strukturu úrokových měr/sazeb v dané ekonomice (většinou dluhopisů). Ukazuje závislost výnosu do doby splatnosti (na svislé ose) na době do splatnosti dluhopisu (na vodorovné ose). Nejčastěji se konstruují na bázi státních dluhopisů, protože na trhu jsou obchodovány tyto dluhopisy s různými dobami do splatnosti.[7]

Výnosová křivka (yield curve, term structure of interest rates) v praktické podobě znamená závislost výnosnosti do splatnosti dluhových instrumentů státu (státní/bezriziková výnosová křivka) nebo bank (bankovní výnosová křivka) nebo podniků na jejich splatnosti.[1]

V praxi rozlišujeme několik druhů výnosových křivek:

- *Výnosová křivka bezkuponových dluhopisů* (zero cupon yield curve) nám ukazuje vzájemnou závislost mezi spotovými výnosy do splatnosti a dobu do splatnosti bezkuponových dluhopsů. V praxi tuto křivku odhadujeme na základě informací o kupónových dluhopisech, protože trhy s bezkupónovými dluhopisy nejsou dostatečně aktivní.

- *Výnosová křivka kuponových dluhopisů* (cupon-bearing yield curve) ukazuje závislost mezi spotovými výnosy do splatnosti a dobou do splatnosti kuponových nebo bezkuponových dluhopisů. Často se pro konstrukci této křivky užívají dluhopisy v pari. (Dluhopisy, u kterých se jejich tržní cena shoduje s nominální hodnotou viz výše)

- *Forwardová výnosová křivka* (forward yield curve) ukazuje závislost mezi forwardovými výnosy do splatnosti a dobou do splatnosti.

Někdy se křivky neforwardového typu hromadně označují jako *spotové výnosové křivky.* Ze spotové výnosové křivky se odvozuje diskontní faktor a forwardový diskontní faktor.[1]

2.3 Tvary výnosové křivky

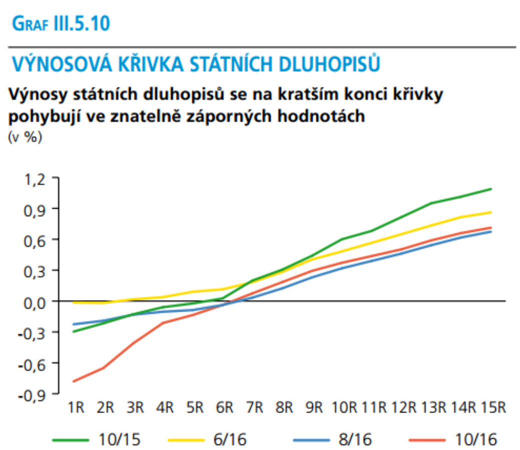
Obvykle má výnosová křivka rostoucí tvar, ale není to pravidlem. Vlivem různých faktorů může docházet k obměnám ve tvaru křivky a v čase se mění. Obecně lze říct, že s delším časovým obdobím dochází k větším změnám ve tvaru křivky. Může též nastat situace, kdy dojde k náhlé, prudké změně tvaru výnosové křivky během krátkého časového úseku. Za tím může stát centrální banka.[1]
U výnosové křivky rozlišujeme několik částí:

- *krátký konec* – začátek křivky. Tato část je tvořena převážně základní úrokovou sazbou centrální banky (v ČR 2T reposazba) nebo jinými *krátkodobými* úrokovými měrami. (období je kratší než 1 rok!) Proto na tuto část má bezprostřední dopad rozhodování centrální banky. Můžeme také říct, že tato část odpovídá krátkým splatnostem.[1]

- *dlouhý konec* – konec křivky. Tato část je tvořena úrokovou mírou prodelší splatnost např. 5, 10, 15 let apod. Je ovlivňována například očekáváním zlepšení ekonomické situace v budoucnosti.[1]

- *sklon křivky* (spread) – je dán jako rozdíl mezi dlouhodobými a krátkodobými sazbami (dlouhým a krátkým koncem). Sklon je ovlivněn několika faktory, z nichž nejvýznamější vliv má měnová politika centrální banky – ovlivňuje hlavně krátký konec, a očekávání subjektů v souvislosti se sazbami v budoucnosti – ovlivnění dlouhého konce.[1]

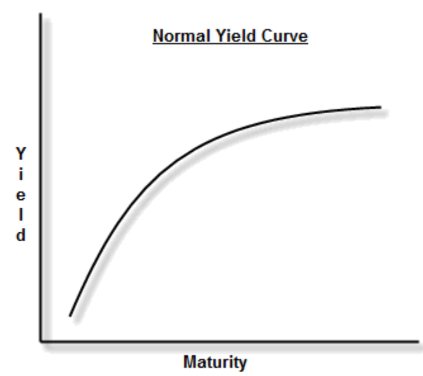
U výnosových křivek sledujeme jejich tvar (průběh). Ten může ovlivnit inflační očekávání, ale to se týká především dlouhého konce křivky. Zakřivení křivky nám ukazuje, že výnos a doba do splatnosti nejsou ve vzájemně lineární závislosti, proto nemá křivka tvar přímky.[2][12]



Obrázek 2.1: Výnosová křivka ČR za 4. čtvrtletí 2016
[11]

2.3.1 Rostoucí výnosová křivka

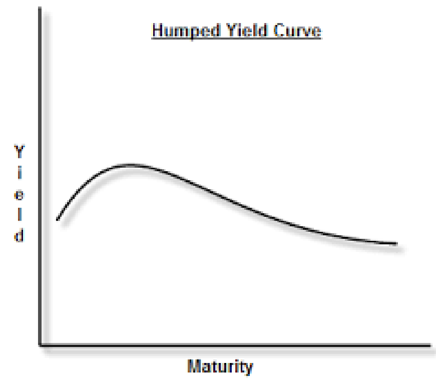
Rostoucí křivka (normal yield curve, pozitivně skloněná výnosová křivka) se v praxi objevuje ze všech tvarů nejčastěji a vychází ze situace, kdy trh nepředpokládá zásadní změny. V ekonomice nastává nebo již je rozběhnutá konjunktura, je tedy očekáváno obvyklé chování úrokových sazeb. To znamená, s delší dobou splatnosti se zvyšuje výše úrokové sazby. Tento typ křivky interpretuje přirozenou reakci trhu na ochotu investorů podstoupit s dlouhodobější investicí vyšší riziko, za což jsou odměněni vyšším výnosem. Někdy říkáme, že se jedná o tzv. prémii za riziko. Pokud je očekáván růst úrokových sazeb, výnosů nebo inflace, je křivka strmějšího tvaru. Obecně pak platí, že čím je sklon křivky vyšší, tím jsou větší prémie za riziko spojené s delší dobou do splatnosti.[1][7][12]



Obrázek 2.2: Ukázka rostoucí výnosové křivky
[9]

2.3.2 Vyboulená výnosová křivka

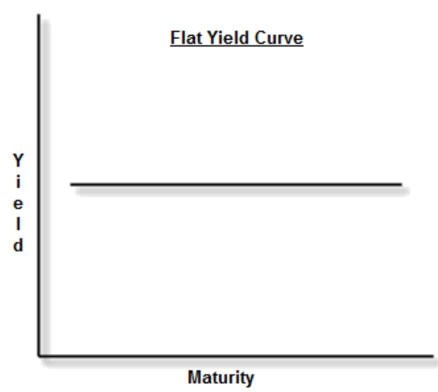
Vyboulená výnosová křivka (hrbolová výnosová křivka, humped yield curve) se vyskytuje jen velmi málo. Vyboulený tvar se objevuje tehdy, je-li VK rostoucí a očekává v dlouhodobém horizontu pokles úrokových měr, případně inflace. Zpravidla emitenti dlouhodobých dluhopisů dokáží zareagovat dříve než emitenti krátkodobých dluhopisů. Jedná se o přechodný stav.[1][7]



Obrázek 2.3: Ukázka vyboulené výnosové křivky
[9]

2.3.3 Plochá výnosová křivka

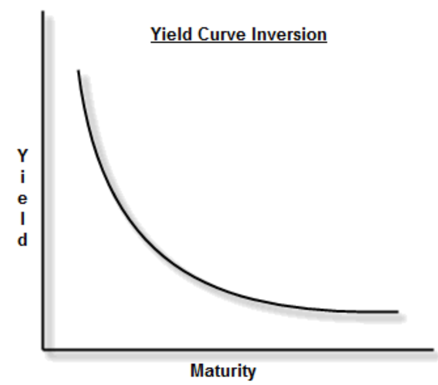
Plochá výnosová křivka (flat yield curve) se vyskytuje v situacích, kdy se úrokové sazby vyvíjí nezávisle na době do splatnosti – tzn. že i když se doba splatnosti zvyšuje, výnosnost dluhopisu zůstává konstantní. Často je předzvěstí očekávaného poklesu sazeb a určité nejistoty trhu. Tato křivka se objevuje jen velmi vzácně.[1] [12]



Obrázek 2.4: Ukázka ploché výnosové křivky
[9]

2.3.4 Klesající výnosová křivka

Klesající křivka (inverzní křivka, negative yield curve, inverted yield curve) se vyskytuje především v situacích, kdy trh očekává další pokles úrokových sazeb (inflace). Obvykle tato situace nastane, když centrální banka z nějakého důvodu krátkodobě zvýší úrokové sazby na nezvykle vysoké hodnoty – například při boji proti inflaci nebo měnové krizi. Tato křivka může také signalizovat očekávané zpomalení ekonomiky nebo snížení budoucí výkonnosti ekonomiky. Objevuje se jen velmi vzácně.[1]



Obrázek 2.5: Ukázka negativně skloněné výnosové křivky [9]

2.4 Konstrukce výnosové křivky

Pro konstrukci výnosové křivky se v praxi nejčastěji používají bezkuponové nebo kuponové dluhopisy. Jak už bylo uvedeno dříve, častým problémem bývá jejich nedostatečné množství a hrozí, že sestrojená křivka bude příliš krátká.

V následujícím textu nastíním velmi jednoduchou metodu pro hledání časové struktury úrokových měr potřebných ke konstrukci. Tato metoda se nazývá **bootstrapping** (metoda postupného výpočtu) a je ze všech metod pro ruční výpočet nejjednoduší. V této metodě se předpokládá, že je na trhu k dispozici aspoň jeden dluhopis pro každou dobu do splatnosti. Postupně dopočítáváme jednotlivé úrokové míry pro splatnosti (r_n).[1]

Pokud by se jednalo o konstrukci z *bezkuponových* dluhopisů, je postup následující: Vyjdeme ze vztahu (1.1) (s rozdílem, že zde uvažujeme pro každý rok jinou úrokovou míru r_n) a tuto úrokovou míru si vyjádříme:

$$PV = \frac{F}{(1+r_n)^n},$$

$$r_n = \sqrt[n]{\frac{F}{PV}} - 1,$$

kde $n = 1, 2, 3, \ldots, 10$ (15) (konečný počet let může být různý) a jedná se o dobu splatnosti. Tímto postupem vypočteme jednotlivé úrokové míry.

Pokud by se jednalo o *kuponové* dluhopisy je postup stejný jako u bezkuponových dluhopisů, jen vycházíme ze vztahu (1.2) pro kuponové dluhopisy. Pokud máme dluhopisy pro každou dobu splatnosti, tj. n = 1, 2, 3, ... postupujeme takto:

Pro jednoletou dobu splatnosti $n = 1$ máme dvě možnosti. Můžeme dluhopis uvažovat jako bezkuponový s dobou splatnosti 1 rok. Potom vycházíme ze vztahu (1.1).

$$PV = \frac{F}{1+r_1} \Rightarrow r_1 = \frac{F}{PV} - 1$$

Nebo uvažujeme kuponový dluhopis a vycházíme ze vztahu (1.2) pro $n = 1$:

$$PV = \frac{F+C}{1+r_1} \Rightarrow r_1 = \frac{F+C}{PV} - 1$$

Pro dvouletou dobu splatnosti $n = 2$:

$$PV = \frac{C}{1+r_1} + \frac{C+F}{(1+r_2)^2}$$

Vidíme, že ve vzorci se objevují hodnoty r_1 i r_2. Hodnotu r_1 jsme vyjádřili v předchozím kroku, proto budeme nyní vyjadřovat hodnotu r_2 i s pomocí hodnoty r_1. Dostaneme:

$$r_2 = \sqrt{\frac{C+F}{PV - \frac{C}{1+r_1}}} - 1$$

Pro tříletou dobu splatnosti $n = 3$:

$$PV = \frac{C}{1+r_1} + \frac{C}{(1+r_2)^2} + \frac{C+F}{(1+r_3)^3}$$

Opět se ve vzorci objevují hodnoty r_1 a r_2, které už máme vyjádřené, nyní vyjádříme r_3 s jejich pomocí.

$$r_3 = \sqrt[3]{\frac{C+F}{PV - \frac{C}{1+r_1} - \frac{C}{(1+r_2)^2}}} - 1$$

Tímto způsobem pokračujeme až do posledního roku splatnosti. Obecně tedy můžeme vzorec napsat takto:

$$r_n = \sqrt[n]{\frac{C+F}{PV - \frac{C}{1+r_1} - \frac{C}{(1+r_2)^2} - \cdots - \frac{C}{(1+r_{n-1})^{n-1}}}} - 1 \qquad (2.2)$$

Může ale také nastat situace, kdy máme kupon zadaný jako variabilní. To znamená, že při každe výplatě kuponu se vyplácí jiná částka, protože procentuální podíl kuponu na nominální hodnotě se mění. V takovém případě musíme užít vzorec:

$$r_n = \sqrt[n]{\frac{C_i+F}{PV - \frac{C_i}{1+r_1} - \frac{C_i}{(1+r_2)^2} - \cdots - \frac{C_i}{(1+r_{n-1})^{n-1}}}} - 1 \qquad (2.3)$$

Tyto vztahy však můžeme použít pouze v případě, kdy máme informace o všech rocích, které jdou postupně za sebou. V praxi se můžeme velmi často setkat s tím, že máme k dispozici pouze jedno a tříleté dluhopisy, zatímco dvouleté chybí. V takovém případě použijeme lineární interpolaci úrokových měr pro jednoletou a tříletou splatnost, kdy položíme $r_2 = \frac{r_1+r_3}{2}$.

Potom tedy pro $n = 3$ dostaneme vztah:

$$PV = \frac{C}{1+r_1} + \frac{C}{(1+\frac{r_1+r_3}{2})^2} + \frac{C+F}{(1+r_3)^3}$$

Vidíme, že hodnota r_3 se objevuje ve dvou zlomcích. To je pro ruční výpočet hodnoty r_3 velmi složité. V takovéto situaci je vhodné využít některého z matematických softwarů.

Tento postup vede ke konstrukci spotových výnosových křivek. Ty sestrojujeme na základě spotových úrokových měr (úrokové míry, které platí odteď do budoucího okamžiku). V textu budou tyto míry/sazby značeny symbolem $r_{0,x}$.[1]

Příklad: Sestrojte spotovou výnosovou křivku státních dluhopisů, které jsou k dispozici na stránkách Burzy cenných papírů Praha. Všechny výpočty vycházejí z tabulky 2.1:

Nominální hodnota všech uvedených dluhopisů je 10 000 Kč.

Všechny výpočty jsou uvedeny v příloze A.

Název dluhopisu	Počet (ks)	Tržní cena (Kč)	Kupon (Kč)	Doba do splatnosti (roky)
ST. DL. 0,00/17	7 000 000	70 322 000 000,00	0	1
ST. DL. VAR/17	4 807 000	48 135 428 611,11	847 000 000	1
ST. DL. 0,00/18	6 000 000	60 174 000 000,00	0	2
ST. DL. 0,85/18	5 000 000	50 286 805 555,56	425 000 000	2
ST. DL. 4,60/18	7 500 000	75 418 750 000,00	3 450 000 000	2
ST. DL. 0,00/19	7 000 000	70 091 000 000,00	0	3
ST. DL. 1,50/19	8 000 000	80 053 333 333,33	1 200 000 000	3
ST. DL. 5,00/19	8 910 000	90 589 950 000,00	4 455 000 000	3
ST. DL. 3,75/20	7 500 000	70 148 437 500,00	2 812 500 000	4
ST. DL. VAR/20	3 597 337	35 681 985 703,00	21 584 022	4
ST. DL. 3,85/21	7 763 500	78 173 484 986,11	2 988 947 500	5
ST. DL. 4,70/22	7 711 674	73 774 371 960,50	3 624 486 780	6
ST. DL. 0,45/23	2 583 188	26 066 950 108,00	116 243 460	7
ST. DL. VAR/23	8 700 000	89 188 775 000,00	957 000 000	7
ST. DL. 5,70/24	9 000 000	95 842 500 000,00	5 130 000 000	8
ST. DL. 2,40/25	6 066 635	60 470 195 468,33	1 455 992 400	9
ST. DL. 1,00/26	3 566 254	34 429 606 742,11	356 625 400	10

Tabulka 2.1: Charakteristiky státních dluhopisů ke dni 31. 10. 2016

Řešení: Postupným dosazováním do vztahu (2.2) získáme spotové úrokové míry pro jednotlivé doby splatnosti:

Pro $n = 1$. Vidíme, že v tabulce máme dva jednoleté dluhopisy. Pokud nastane situace, kdy pro danou dobu splatnosti máme více než jeden dluhopis, musíme nejdřív sečíst kupony, nominální hodnoty a tržní ceny obou dluhopisů. Tyto hodnoty však musí být vynásobeny počtem emitovaných kusů.

$C = (0 * 10\,000 * 7\,000\,000) + (0,0121 * 10000 * 4\,807\,000) = 581\,647\,000;$

$F = (10\,000 * 7\,000\,000) + (10\,000 * \ 807\,000) = 70\,000\,000\,000 + 48\,070\,000\,000 = 118\,070\,000\,000;$

$PV = (10\,046,00 * 7\,000\,000) + (10\,029,00 * 4\,807\,000) =$

$= 70\,322\,000\,000 + 48\,135\,428\,611,11 = 118\,457\,428\,611,11.$

Nyní můžeme dosadit do vztahu (2.2):

$$r_1 = \frac{581\,647\,000 + 118\,070\,000\,000}{118\,457\,428\,611,11} - 1 = 0,0016$$

Pro $n = 2$: V tabulce vidíme, že pro dvouletou dobu splatnosti máme tři dluhopisy.

$C = (0 * 10\,000 * 6\,000\,000) + (0,0081 * 10\,000 * 5\,000\,000) + (0,046 * 10\,000 * 7\,500\,000) = 0 + 425\,000\,000 + 3\,450\,000\,000 = 3\,875\,000\,000;$

$F = (10\,000*6\,000\,000)+(10\,000*5\,000\,000)+(10\,000*7\,500\,000) = 60\,000\,000\,000+ 50\,000\,000\,000 + 75\,000\,000\,000 = 185\,000\,000\,000;$

$PV = (6\,000\,000 * 10\,029) + (5\,000\,000 * 10\,057,36) + (7\,500\,000 * 10\,055,83) = 60\,174\,000\,000 + 50\,286\,805\,555,56 + 75\,418\,750\,000 = 185\,879\,555\,555,56.$

$$r_2 = \sqrt{\frac{3\,875\,000\,000 + 185\,000\,000\,000}{185\,879\,555\,555,56 - \frac{3\,875\,000\,000}{1+0,0016}}} - 1 = 0,0187$$

Pro $n = 3$: Pro tříletou dobu splatnosti máme opět tři dluhopisy (hodnoty jsou získány stejným způsobem jako u předchozích dob splatnosti).

$C = 0 + 1\,200\,000\,000 + 4\,455\,000\,000 = 5\,655\,000\,000;$

$F = 70\,000\,000\,000 + 80\,000\,000\,000 + 89\,100\,000\,000 = 239\,100\,000\,000;$

$PV = 70\,091\,000\,000 + 80\,053\,333\,333,33 + 90\,589\,950\,000 = 240\,734\,283\,333,33.$

$$r_3 = \sqrt[3]{\frac{5\,655\,000\,000 + 239\,100\,000\,000}{240\,734\,283\,333,33 - \frac{5\,655\,000\,000}{1+0.0016} - \frac{5\,655\,000\,000}{(1+0,0187)^2}}} - 1 = 0,0215$$

atd...

Všechny výpočty jsou uvedeny v příloze A.

Jakmile máme vypočtené všechny spotové úrokové míry, v tomto příkladu pro dobu splatnosti $n = 10$, můžeme přistoupit ke konstrukci výnosové křivky ze státních dluhopisů. V následující tabulce jsou uvedeny spotové úrokové míry pro jednotlivé doby splatnosti.

Doba do splatnosti	1 rok	2 roky	3 roky	4 roky	5 let
$r_{0,x}$	0,0016	0,0187	0,0215	0,0391	0,0379
Doba do splatnosti	6 let	7 let	8 let	9 let	10 let
$r_{0,x}$	0,0593	0,0056	0,0513	0,0235	0,0130

Tabulka 2.2: Spotové úrokové míry

Obrázek 2.6: Výnosová křivka státních dluhopisů ČR

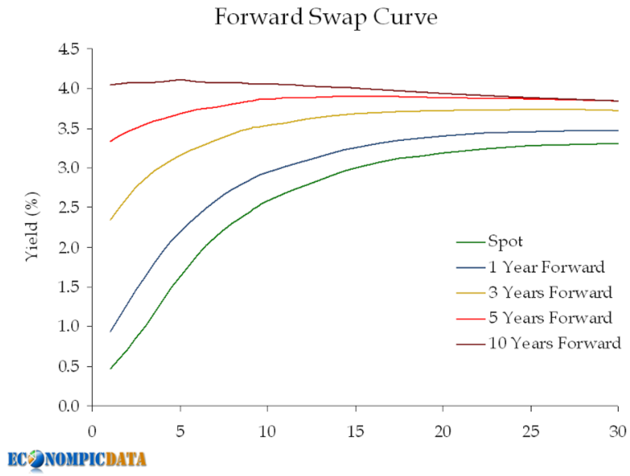
Bývá zvykem získanou křivku vyhladit, proto jsou data proložena polynomickým trendem z nabídky v Excelu. Naši křivku nejlépe aproximoval kvadratický trend, který je ve tvaru $-0,0016x^2 + 0,0189x - 0,016$. Krásně ukazuje, že se jedná o vyboulenou výnosovou křivku, která jak je uvedeno dříve, se objevuje vzácně. Z grafu můžeme vidět, že výnosová křivka má pro jednoletou až šestiletou dobu splatnosti rostoucí trend. Zlom nastává mezi šestiletou a sedmiletou dobou splatnosti, kdy je vidět prudký pokles. Mezi sedmiletou a osmiletou dobou splatnosti křivka opět roste, avšak po osmileté době splatnosti dochází k poklesu. Poklesy ve výnosové křivce jsou způsobeny tím, že dluhopisy příslušné k těmto dobám splatnosti mají nízké kupony a na trhu jsou prodávány nad par.

2.5 Forwardová výnosová křivka

Forwardová výnosová křivka je grafické znázornění závislosti forwardových výnosů na době do splatnosti.[12] Jak už bylo zmíněno na začátku kapitoly o výnosových křivkách, dokážeme forwardové úrokové míry, které jsou potřebné konstrukci výnosové křivky, získat ze spotové výnosové křivky. K výpočtu využijeme vztahu (2.1), ze kterého vyjádříme forwardovou úrokovou míru.

$$r_{x,t} = \sqrt[t-x]{\frac{(1+r_{0,t})^t}{(1+r_{0,x})^x}} - 1. \tag{2.4}$$

Výpočty forwardových úrokových měr jsou založeny na principu, že výnosnost investice do dluhového instrumentu na dané období je rovno výnosnosti časově na sebe navazujících investic do dluhových instrumentů na stejné období.[1] Forwardových úrokových měr je vždy víc, než spotových. Například zatímco pro jednoletou dobu splatnosti máme pouze jednu spotovou úrokovou míru $r_{0,1}$, forwardových úrokových měr máme několik. A to $r_{1,2}, r_{2,3}, r_{3,4}$ atd. Lze dokázat, že pokud je spotová výnosová křivka rostoucí, potom jsou k ní příslušné forwardové úrokové míry vyšší než ty spotové (viz obr. 2.7). To platí také naopak, pokud je výnosová křivka spotových úrokových měr klesající, potom jsou příslušné forwardové úrokové míry nižší než spotové (viz J. Radová – Finanční matematika pro každého).



Obrázek 2.7: Spotová výnosová křivka a forwardové výnosové křivky [13]

Nyní si ukážeme příklad na sestrojení forwardových výnosových křivek získaných ze spotové výnosové křivky státních dluhopisů. Všechny výpočty jsou provedeny v příloze A.

Forwardové úrokové míry vypočteme ze spotových úrokových měr, které leží na vyhlazující křívce (trendu), viz tabulka 2.3.

Doba do splatnosti	1 rok	2 roky	3 roky	4 roky	5 let
$r_{0,x}$	0,0023	0,0164	0,0273	0,0350	0,0395
Doba do splatnosti	6 let	7 let	8 let	9 let	10 let
$r_{0,x}$	0,0408	0,0389	0,0338	0,0255	0,0140

Tabulka 2.3: Spotové úrokové míry přepočtené dle trendu

Nyní můžeme přistoupit k výpočtu jednotlivých forwardových úrokových měr. K tomu využijeme vztah (2.4).

1leté forwardové úrokové míry:

$$r_{1,2} = \frac{(1+r_{0,2})^2}{1+r_{0,1}} - 1 = \frac{(1+0{,}0164)^2}{1+0{,}0023} - 1 = 0,0307$$

$$r_{2,3} = \frac{(1+r_{0,3})^3}{(1+r_{0,2})^2} - 1 = \frac{(1+0{,}0273)^3}{(1+0{,}0164)^2} - 1 = 0,0495$$

atd...

2leté forwardové úrokové míry:

$$r_{1,3} = \sqrt{\frac{(1+r_{0,3})^3}{1+r_{0,1}}} - 1 = \sqrt{\frac{(1+0{,}0273)^3}{1+0{,}0016}} - 1 = 0,0400$$

atd...

3leté forwardové úrokové míry:

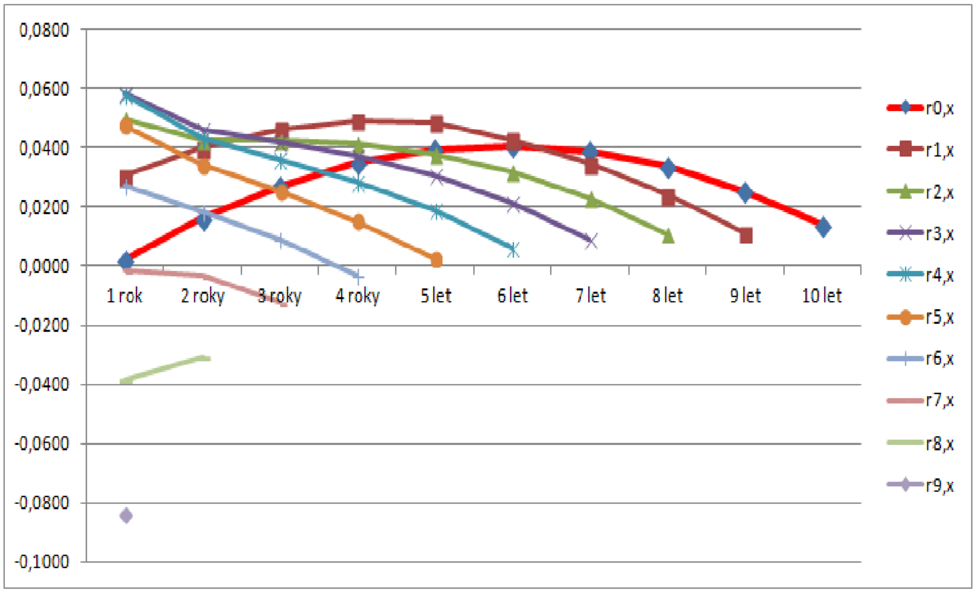
$$r_{1,4} = \sqrt[3]{\frac{(1+r_{0,4})^4}{1+r_{0,1}}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{(1+0{,}0395)^4}{1+0{,}0016}} - 1 = 0,0461$$

atd...

Takto postupujeme dokud nezískáme všechny forwardové úrokové míry. Výpočty všech forwardových úrokových měr jsou uvedeny v Příloze A. V následující tabulce jsou uvedeny jejich hodnoty.

	1 rok	2 roky	3 roky	4 roky	5 let	6 let	7 let	8 let	9 let	10 let
$r_{0,x}$	0,0023	0,0164	0,0273	0,0350	0,0395	0,0408	0,0389	0,0338	0,0255	0,0140
$r_{1,x}$	0,0307	0,0400	0,0461	0,0490	0,0487	0,0427	0,0347	0,0243	0,0112	
$r_{2,x}$	0,0495	0,0428	0,0425	0,0415	0,0381	0,0321	0,0231	0,0111		
$r_{3,x}$	0,0584	0,0463	0,0421	0,0375	0,0308	0,0214	0,0091			
$r_{4,x}$	0,0577	0,0434	0,0364	0,0287	0,0189	0,0064				
$r_{5,x}$	0,0473	0,0342	0,0254	0,0152	0,0026					
$r_{6,x}$	0,0276	0,0186	0,0091	-0,0030						
$r_{7,x}$	-0,0012	-0,0030	-0,0123							
$r_{8,x}$	-0,0385	-0,0307								
$r_{9,x}$	-0,0839									

Tabulka 2.4: Úrokové míry



Obrázek 2.8: Spotová výnosová křivka a forwardové výnosové křivky

Na obrázku 2.8 vidíme jak spotovou výnosovou křivku (červenou) tak všechny forwardové. Jak bylo řečeno v textu dříve, pokud je spotová výnosová křivka rostoucí, jsou rostoucí též příslušné forwardové úrokové míry a jsou položeny nad spotovou výnosovou křivkou a to tím výše, čím dále je forwardová úroková míra odsunuta do budoucnosti. Naopak, pokud je spotová výnosová křivka klesající, jsou k ní příslušné forwardové míry klesající a jsou položeny níže než spotová výnosová křivka.

2.6 Aplikace výnosové křivky

V této kapitole si ukážeme, jak se výnosová křivka využívá v praxi. Konkrétně si představíme stanovení reálné hodnoty dluhopisu. Jak už bylo v předchozím textu řečeno, u dluhopisu rozlišujeme několik cen. Kromě tržní nebo spravedlivé ceny existuje reálná hodnota, která se využívá firmami či bankami pro potřeby účetnictví. Minimálně jedenkrát za rok, k poslednímu dni v roce, se zjišťuje hodnota jednotlivých položek majetku do výroční závěrky. Jsou-li v majetku firmy nakoupené dluhopisy, je nutné stanovit jejich hodnotu. Ta se stanovuje právě jako reálná hodnota. Z výnosové křivky se použijí příslušné úrokové míry pro diskontování jednotlivých finančních toků plynoucích z dluhopisu. Lze očekávat, že tržní cena dluhopisu a jeho reálná hodnota se budou lišit. Reálnou cenu zjišťujeme pomocí vzorce:

$$RH = \frac{C}{(1+r_1)^{n_1}} + \frac{C}{(1+r_2)^{n_2}} + \frac{C}{(1+r_3)^{n_3}} + \ldots + \frac{C+F}{(1+r_k)^{n_k}}, \qquad (2.5)$$

kde

n_i, $i = 1, \ldots, k$, jsou doby, přes které diskontujeme jednotlivé finanční toky,

r_i, $i = 1, \ldots, k$, jsou příslušné úrokové míry získané z výnosové křivky.[1][12]

Příklad: Firma XY má v držení čtyřletý státní dluhopis ST.DL.3,75/20 s nominální hodnotou 10 000 Kč a kuponovou sazbou 3,75 %. Splatnost kuponu je vždy k 12. 9. Pro výpočet počtu dnů použijeme standard $\frac{ACT}{360}$. Je konec roku, a tudíž je povinna provést účetní uzávěrku. K této příležitosti musí stanovit reálnou hodnotu daného dluhopisu. Zjistěte, s jakou částkou jednotka tento dluhopis zaúčtuje k 31. 12. 2016.

Řešení: Nejprve musíme zjistit úrokové míry pro jednotlivé doby splatnosti. Vzhledem k tomu, že mezi datem 31. 12. 2016 a daty výplat kuponů nejsou celé roky, budeme příslušné úrokové míry hledat pomocí lineárních interpolací. Potřebujeme tedy znát počty dní mezi daty. V případě určení úrokové míry r_1 pro diskontování prvního kuponu, vyplaceného k 12. 9. 2017 je počet dní $31 + 28 + 31 + 30 + 31 + +30 + 31 + 31 + 11 = 254$, neboli $t_1 = 0,706$ roku.

$$r_1 = 0,0023 * 0,706 = 0,0016$$

r_2: pro dobu splatnosti 31.12. 2016 do 12.9. 2018, tj. $360 + 254 = 614$ dní, $t_2 = 1,706$ roku.

$$r_2 = 0,0023 + (0,0164 - 0,0023) * 0,706 = 0,0123$$

r_3: pro dobu splatnosti od 31. 12. 2016 do 12. 9. 2019, tj. $360 + 360 + 254 = 974$

dní.

$t_3 = 2,706$ roku.

$$r_3 = 0,0164 + (0,0273 - 0,0164) * 0,706 = 0,0241$$

r_4: pro dobu splatnosti od 31. 12. 2016 do 12. 9. 2020, tj. $360+360+360+254 = 1334$ dní.

$t_4 = 3,706$ roku.

$$r_4 = 0,0273 + (0,035 - 0,0273) * 0,706 = 0,0327$$

$RH = \frac{375}{(1+0{,}0016)^{0{,}706}} + \frac{375}{(1+0{,}0123)^{1{,}706}} + \frac{375}{(1+0{,}0241)^{2{,}706}} + \frac{10\,375}{(1+0{,}0327)^{3{,}706}} =$

$= 10\,302,16517$ (Kč)

Reálná hodnota státního dluhopisu je 10 302,16517 Kč a s touto částkou bude firma účtovat.

Pro zajímavost porovnáme reálnou cenu s cenou tržní. Tržní cena tohoto dluhopisu při kurzu 93 % je:

$P = 10\,000 \cdot 0,93 = 9\,300$ (Kč).

Vidíme tedy, že je nižší než cena reálná.

Závěr

Cílem mé bakalářské práce bylo základní seznámení s výnosovou křivkou, ukázat konstrukci spotové výnosové křivky na základě státních dluhopisů, které jsou obchodovány na Pražské burze a ukázka jejího využití v praxi. V rámci konstrukce spotové výnosové křivky bylo také sestrojení k ní příslušných forwardových křivek. Dále byla předvedena ukázka využití výnosové křivky v praxi, kdy jsme hledali reálnou hodnotu dluhopisu. Navštěvovala jsem předmět Bankovní účetnictví, ve které jsme o reálné hodnotě dluhopisu hovořili a jsem ráda, že jsem si prostřednictvím této práce mohla vyzkoušet její výpočet. Rozšířila jsem si znalosti o dluhopisech, o kterých jsme si řekli v rámci jak Finanční matematiky 1 tak Bankovnictví a peněžní ekonomie.

Téma mojí bakalářské práce se mi líbilo, a proto se mi i dobře psala a bavila mě. Mohla jsem využít svých znalostí z předchozího studia a zároveň jsem se dozvěděla mnoho nových a užitečných informací. Po dopsání své práce si myslím, že výnosová křivka je užitečným nástrojem pro zjišťování jak reálné hodnoty dluhopisu, tak ke zjištění aktuální výnosnosti pro danou dobu splatnosti na dluhovém trhu.

Literatura

[1] JÍLEK, Josef. Finanční trhy a investování. 1. vyd. Praha: Grada, 2009, 648 s. Finanční trhy a instituce. ISBN 978-80-247-1653-4.

[2] CIPRA, Tomáš. Matematika cenných papírů. Praha: HZ, 2000. ISBN 80-86009-35-1.

[3] CIPRA, Tomáš. Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou. Praha: Ekopress, 2005. ISBN 80-86119-91-2.

[4] Chování cen dluhopisu. peníze.cz. [online]. 20.9.2016 [cit. 2016-09-20]. Dostupné z: http://www.penize.cz/investice/16920-urokove-sazby-nahoru-ceny-dluhopisu-dolu

[5] BOHANESOVÁ, Eva. Finanční matematika. 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2013. ISBN 978-80-244-3400-1.

[6] SVOBODOVÁ, M. Durace a její využití při imunizaci dluhopisového portfolia. Olomouc, 2010. Bakalářská práce. Přírodovědecká fakulta Univerzity Palackého v Olomouci. Vedoucí bakalářské práce Mgr. Eva Bohanesová Ph.D.

[7] PEČINKOVÁ, L. Výnosové křivky a jejich využití ve finanční praxi. Brno, 2012. Bakalářská práce. Přírodovědecká fakulta Univerzity Masarykovi v Brně. Vedoucí bakalářské práce Mgr. Petr Červinek.

[8] Dluhopis. SAXOBANK. [online]. 11.10.2016 [cit. 2016-10-11]. Dostupné z: http://cz.saxobank.com/support/slovnik-pojmu/dluhopisy

[9] What Is the Yield Curve Telling Us About the Future? FINANCIAL SENSE [online]. San Diego: MATTHEW KERKHOFF, 2015 [cit. 2017-02-16]. Dostupné z: http://www.financialsense.com/contributors/matthew-kerkhoff/what-is-yield-curve

[10] BLAKE, David. Analýza finančních trhů. Praha: Grada, 1995. ISBN 8071692018.

[11] Zpráva o inflaci – IV/2016. ČESKÁ NÁRODNÍ BANKA [online]. Praha: ČNB, c2003-2017 [cit. 2017-02-23]. Dostupné z: http://www.cnb.cz/miranda2/export/sites/www.cnb.cz/cs/menova_politika/zpravy_o_inflaci/2016/2016_IV/download/zoi_IV_2016.pdf

[12] RADOVÁ, Jarmila, Petr DVOŘÁK a Jiří MÁLEK. Finanční matematika pro každého. 7., aktualiz. vyd. Praha: Grada, 2009. Finance (Grada). ISBN 978-80-247-3291-6.

[13] Swap Curve Whacked. ECONOMPICDATA [online]. Jake, 2010 [cit. 2017-04-05]. Dostupné z: http://economicdata.blogspot.cz/$2010/08$/swap-curve-whacked.html

Seznam příloh

Příloha A