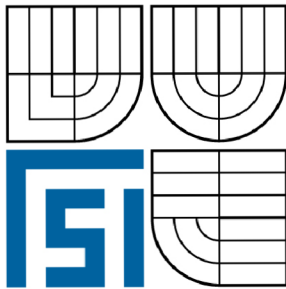


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
INSTITUTE OF MATHEMATICS

## PROBLEMATIKA KOMPLEXNÍCH POTENCIÁLŮ V IZOTROPNÍ ROVINNÉ PRUŽNOSTI

PROBLEMS OF THE COMPLEX POTENTIALS OF THE ISOTROPIC ELASTICITY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

PETR PADĚLEK

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. TOMÁŠ PROFANT, Ph.D.

BRNO 2010

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

Akademický rok: 2009/2010

## **ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE**

student(ka): Petr Padělek

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

### **Problematika komplexních potenciálů v izotropní rovinné pružnosti**

v anglickém jazyce:

#### **Problems of the complex potentials of the isotropic elasticity**

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Přes veškerý současný výpočetní potenciál má teorie komplexních potenciálů nezastupitelné místo v problematice rovinné pružnosti a vyplňuje mezeru mezi klasickým přístupem a mocnými numerickými nástroji současnosti, jako je např. MKP. Cílem práce je uchazečovo seznámení se s problematikou tzv. komplexních potenciálů a jejich aplikací na některé problémy rovinné pružnosti. Funkce komplexní proměnné, se svými specifickými vlastnosti, mohou značně zjednodušit popis řešení některých problémů matematické teorie rovinné pružnosti, zejména úloh, ve kterých se vyskytují geometrické singularity typu trhliny, vrub, dislokace nebo singularity v zatížení jako např. osamělá síla nebo moment.

Cíle bakalářské práce:

1. Seznámení se s teoretickými základy funkcí komplexní proměnné.
2. Seznámení se s tzv. Muschelišviliho popisem problémů rovinné pružnosti pomocí komplexních potenciálů.
3. Aplikace teorie komplexních potenciálů na některé úlohy rovinné pružnosti.

Seznam odborné literatury:

Muskhelishvili, N. I., Some basic problems of the mathematical theory of elasticity, Groningen, P. Noordhoff, 1953,

Druckmüller, M., Ženíšek, A., Funkce komplexní proměnné, PC-Dir Real, Brno, 2000,

Babuška, I., Rektorys, K., Vyčichlo, F., Matematická theorie rovinné pružnosti, Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1955.

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Tomáš Profant, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2009/2010.

V Brně, dne 16.10.2009

L.S.

---

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.  
Ředitel ústavu

---

doc. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.  
Děkan fakulty

## **ABSTRAKT**

Předkládaná bakalářská práce se zabývá problematikou komplexních potenciálů v izotropní rovinné pružnosti. Hlavním cílem práce je získat složky tenzoru napětí a vektoru posuvu, které popisují pružné chování tělesa. Tento problém je primárně řešen v matematické rovině pomocí Airyho funkce napětí a Muschelišviliho komplexních potenciálů. Práce je doplněna o potřebnou teorii pružnosti a na závěr je ukázáno konkrétní řešení úlohy hranové dislokace v nekonečném prostředí a porovnání jejich výsledků s výsledky získanými pomocí MKP (metody konečných prvků).

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

Muschelišviliho komplexní potenciál, Airyho funkce, dislokace, osamělá síla, biharmonická rovnice

## **ABSTRACT**

The presented Bachelor Thesis investigates the problem of the complex potentials in the isotropic elasticity. The objective of the work is acquiring the components of the stress tensor and the displacement vector which describe the elasticity of continuum. This problem is primarily solved on the mathematical level by means of the Airy stress function and the Muschelishvili's complex potentials. The thesis is supplemented with the necessary theory of the elasticity and finally the concrete solution of the edge dislocation in the infinite domain is demonstrated and compared with the results acquired by FEM method.

## **KEYWORDS**

Muschelishvili's complex potential, Airy function, dislocation, force alone, biharmonic equation

PADĚLEK, Petr *Problematika komplexních potenciálů v izotropní rovinné pružnosti* : bakalářská práce. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky, 2010. 37 s. Vedoucí práce byl Ing. Tomáš Profant, Ph.D.

## PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci „Problematika komplexních potenciálů v izotropní rovinné pružnosti“ vypracoval samostatně pod vedením Ing. Tomáše Profanta, Ph. D., s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Brno .....

.....

(podpis autora)

## PODĚKOVÁNÍ

Děkuji svému školiteli Ing. Tomáši Profantovi, Ph.D. za vedení mé bakalářské práce, mnohé rady a připomínky, které pomohly ke zlepšení této práce. Dále bych chtěl poděkovat panu Ing. Petru Vosynkovi, za jeho ochotu a dodání výsledků řešení pomocí MKP a všem, kteří mi pomohli při zhotovování této práce, ať už přímo či nepřímo.

# Obsah

Úvod	7
<b>1 Aplikace funkcí komplexní proměnné na teorii rovinné pružnosti</b>	<b>8</b>
1.1 Airyho funkce jako řešení rovnic rovnováhy a kompatibility . . . . .	8
1.2 Vyjádření Airyho funkce pomocí holomorfních funkcí . . . . .	9
1.3 Vyjádření různých výrazů pomocí funkcí napjatosti . . . . .	13
<b>2 Izolovaná síla a hranová dislokace</b>	<b>16</b>
2.1 Pravidlo pro posunutí Muschelišviliho komplexních potenciálů . . . . .	16
2.2 Muschelišviliho komplexní potenciály pro případ izolované síly . . . . .	16
2.3 Muschelišviliho komplexní potenciály pro hranovou dislokaci . . . . .	19
<b>3 Diskuse - hranová dislokace v nekonečném prostředí</b>	<b>22</b>
Formulace problému . . . . .	22
Řešení . . . . .	22
Grafy průběhu napětí . . . . .	24
<b>Závěr</b>	<b>26</b>
<b>Literatura</b>	<b>27</b>
<b>A Vybrané matematické pojmy</b>	<b>28</b>
<b>B Vybrané pojmy z pružnosti</b>	<b>31</b>

# Úvod

Teorie komplexních potenciálů je jedna z metod matematické teorie rovinné pružnosti využívající funkcí komplexní proměnné a jejich specifických vlastností, které popis daných problémů značně zjednodušují. Přestože se v dnešní době využívá k řešení úloh pružnosti převážně numerických metod, jako např. MKP (metoda konečných prvků), tak teorie komplexních potenciálů má své nezastupitelné místo v problematice rovinných úloh pružnosti a vyplňuje mezeru mezi klasickým a numerickým přístupem a to zejména při řešení úloh, ve kterých se vyskytuje singularita v zatížení (např. osamělá síla) nebo geometrická singularita (např. dislokace).

Ideu užití funkcí komplexní proměnné při řešení biharmonického problému poprvé popsal francouzský matematik E. Goursatem v roce 1896. Komplexní proměnou do matematické teorie rovinné pružnosti zavedli i mnozí další, uvedme např. Leviho, Kolosova a zejména N. I. Muschelišviliho.

Předkládaná bakalářská práce se zabývá popisem problematiky komplexních potenciálů a aplikací na některé úlohy rovinné pružnosti. Cílem pružnosti je popis chování tělesa při vnějším zatížení a k tomu potřebujeme znát složky tenzoru napětí, případně vektoru posuvu, které toto chování popisují. Najít složky tenzoru napětí a posuvy je tedy i cílem teorie komplexních potenciálů.

Struktura práce je následující. První kapitola popisuje problém řešení rovnic rovnováhy a kompatibility při daných okrajových podmínkách. Tato úloha je základním problémem pružnosti a je zde ukázán její převod na biharmonickou funkci a následné vyjádření této funkce pomocí komplexních potenciálů. Na konci kapitoly je odvozeno vyjádření složek tenzoru napětí a posuvů pomocí komplexních potenciálů. V druhé kapitole je ukázán jeden ze způsobů jakým lze nalézt komplexní potenciály. Tato úloha je obecně velmi náročná. Tvar komplexních potenciálů je dán charakterem úlohy a zde bude uvedeno odvození pro případ izolované síly a hranové dislokace. Poslední kapitola je věnována aplikaci teorie komplexních potenciálů na konkrétní úlohu a porovnání výsledků s výsledky získanými pomocí MKP. Práce obsahuje i dva dodatky. V dodatku A jsou připomenuty potřebné matematické pojmy a dodatek B obsahuje nutné minimum teorie pružnosti.

# Kapitola 1

## Aplikace funkcí komplexní proměnné na teorii rovinné pružnosti

V této kapitole vyjádříme vztah mezi biharmonickou funkcí (tzv. Airyho funkcí)  $U$  a složkami tenzoru napětí  $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$ , případně složkami vektoru posunutí  $u_x, u_y$ . Dále vyjádříme Airyho funkci  $U$  pomocí vhodných funkcí komplexně proměnné  $\varphi$  a  $\psi$ , tzv. Muschelišviliho komplexních potenciálů. Významem jednotlivých pojmů rovinné pružnosti se v této kapitole nebudeme zabývat, stručný popis, jejich fyzikální význam a související matematické vztahy jsou uvedeny v dodatku A a B. Veškeré definice, věty a jejich důkazy lze nalézt např. v [1],[2],[3].

### 1.1 Airyho funkce jako řešení rovnic rovnováhy a kompatibility

**Definice 1.1** *Tělesem  $T$  nazýváme otevřenou souvislou množinu, jejíž hranice je tvořena konečným počtem po částech hladkých, jednoduchých křivek konečných, uzavřených, nebo jednoduchých křivek nekonečných.*

Jako těleso  $T$  budeme dále uvažovat těleso jednoduše souvislé, což je těleso, jehož hranice je tvořena právě jednou křivkou vyhovující podmínkám definice 1.1.

Mějme v tělese  $T$  složky tenzoru napětí  $\sigma_{xx}, \sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \sigma_{yy}$  a nulové *objemové síly*, pak rovnice rovnováhy a kompatibility můžeme psát ve tvaru



$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= 0, \\
\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= 0, \\
\Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) &= 0.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Působí-li na hranici tělesa vnější síly, tak složky tenzoru napětí musí navíc splňovat nějaké podmínky na hranici tělesa, tzv. *okrajové podmínky*.

Řešení soustavy rovnic (1.1) splňující dané okrajové podmínky je obecně značný problém a to i u jednoduchých úloh, proto řešení hledáme pomocí tzv. *biharmonické funkce*  $U(x, y)$ , která splňuje rovnici

$$\Delta\Delta U \equiv \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0, \tag{1.2}$$

jejíž první derivace vyhovují předepsaným okrajovým podmínkám. Funkci  $U$  nazýváme *Airyho funkcí*.

Vztah mezi rovnicemi rovnováhy a kompatibility (1.1) a Airyho funkcí (1.2) popisuje následující věta.

**Věta 1.1** *Nechť  $T$  je jednoduše souvislé těleso. Pak nutná a postačující podmínka, aby v  $T$  existovaly funkce  $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$  se spojitými druhými derivacemi a vyhovující rovnicím*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= 0, \\
\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= 0, \\
\Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) &= 0
\end{aligned}$$

*je, aby v tělese  $T$  existovala Airyho funkce  $U(x, y)$ , pro kterou platí*

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \tag{1.3}$$

Věta 1.1 tedy tvrdí, že pokud je v tělese  $T$  nějaká *napjatost* (složky tenzoru napětí  $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$ ), tak jí odpovídá určitá Airyho funkce a naopak.

## 1.2 Vyjádření Airyho funkce pomocí holomorfních funkcí

**Definice 1.2** *Komplexní funkce  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , která je definovaná na nějaké oblasti  $G \subset \mathbb{C}$ , se nazývá holomorfní funkcí, pokud existují parciální derivace*

$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ , které jsou spojité a vyhovují vztahům

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1.4)$$

Vztahy (1.4) jsou tzv. *Cauchy-Riemannovy podmínky*. Pokud jsou všechny podmínky definice 1.2 splněny, tak derivace  $f'(z)$  může být vyjádřena v libovolném z těchto čtyř tvarů

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.5)$$

Holomorfní funkce  $f(z)$  má vlastnosti:

1. součet, součin a podíl dvou holomorfních funkcí je opět funkce holomorfní,
2. derivace holomorfní funkce je holomorfní funkce,
3. integrace holomorfní funkce je holomorfní funkce,
4. holomorfní funkci v oblasti  $C$  tvaru mezikruží se středem v  $z_0$  lze rozvinout v tzv. *Laurentovu řadu*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

kde

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial C} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dx,$$

kde  $\partial C$  je libovolná kružnice se středem v  $z_0$  ležící v  $C$ ,

5. Reálná část  $u(x, y)$  a imaginární část  $v(x, y)$  holomorfní funkce  $f(z)$  jsou *harmonické funkce*,

**Definice 1.3** Reálnou funkci  $u(x, y)$  nazveme *harmonickou funkcí* v nějaké oblasti  $G \subset \mathbb{R}^2$ , má-li  $u(x, y)$  v  $G$  spojité parciální derivace prvního a druhého řádu a vyhovuje tzv. *Laplaceově rovnici*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (1.6)$$

pro každý bod  $[x, y] \in G$ .

Rovnici (1.6) často zapisujeme pomocí tzv. *Laplaceova operátoru*  $\Delta$

$$\Delta u(x, y) = 0.$$

Harmonická funkce má tuto důležitou vlastnost: Máme-li harmonickou funkci  $u(x, y)$ , pak k ní můžeme snadno nalézt funkci *harmonicky sdruženou*  $v(x, y)$  vyhovující Cauchy-Riemannovým podmínkám (1.4) tak, že platí

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

kde  $f(z)$  je funkce holomorfní. Tedy platí

$$u(x, y) = \operatorname{Re}[f(z)], \quad (1.7)$$

kde  $u(x, y)$  je funkce harmonická a  $f(z)$  funkce holomorfní.

Problém řešení soustavy rovnic (1.1) jsme pomocí věty 1.1 převedli na jednodušší problém najít Airyho funkci  $U$ . Obecně je i tento problém velmi složitý a proto se jej opět snažíme převést na problém jednodušší a to zavedením komplexních funkcí  $\varphi(z)$  a  $\chi(z)$ , které musí splňovat dané okrajové podmínky.

**Poznámka:** Funkce  $\varphi(z)$  a  $\chi(z)$  se nazývají též *komplexními potenciály* nebo tzv. *Muschelišviliho komplexními potenciály*.

Vztah mezi Airyho funkcí  $U$  a komplexními potenciály  $\varphi(z)$  a  $\chi(z)$  vyjadřuje následující věta.

**Věta 1.2** *Nechť  $U(x, y)$  je biharmonická funkce (Airyho funkce) definovaná na jednoduše souvislém tělese  $T$ . Pak existují holomorfní funkce  $\varphi(z)$ ,  $\chi(z)$  v  $T$  takové, že*

$$U(x, y) = \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)]. \quad (1.8)$$

**Důkaz:** Položme  $P(x, y) = \Delta U(x, y)$ . Pak funkce  $P(x, y)$  je harmonická, protože platí  $\Delta P = \Delta \Delta U = 0$ . Podle vztahu (1.7) existuje funkce  $\kappa(z)$  holomorfní v  $T$  taková, že

$$P(x, y) = \operatorname{Re}[\kappa(z)].$$

Funkce  $\kappa(z)$  je tedy ve tvaru

$$\kappa(z) = P(x, y) + iQ(x, y).$$

Položme

$$\varphi(z) = \frac{1}{4} \int_{z_0}^z \kappa(z) \, dz, \quad (1.9)$$

kde  $z_0$  a  $z$  jsou body tělesa  $T$ . Funkce  $\varphi(z)$  je holomorfní v  $T$  ( $T$  je jednoduše souvislé těleso) a platí pro ni  $\varphi'(z) = \frac{1}{4}\kappa(z)$ . Dále nechť

$$\varphi(z) = p(x, y) + iq(x, y)$$

a tedy derivaci funkce  $\varphi'(z)$  můžeme vyjádřit podle (1.5) ve tvaru

$$\varphi'(z) = \frac{\partial p}{\partial x} + i \frac{\partial q}{\partial x}. \quad (1.10)$$

Zároveň však dle (1.9) platí

$$\varphi'(z) = \frac{1}{4}\kappa(z) = \frac{1}{4}(P(x, y) + iQ(x, y)). \quad (1.11)$$

Funkce  $\varphi(z)$  je holomorfní, takže splňuje Cauchy-Riemannovy podmínky (1.4) a porovnáním (1.10) a (1.11) dostáváme

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{1}{4}P, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{1}{4}Q. \quad (1.12)$$

Dále budeme hledat funkci  $U(x, y)$  ve tvaru

$$U(x, y) = xp(x, y) + yq(x, y) + r(x, y),$$

kde  $r(x, y)$  je harmonická funkce. Z vlastností holomorfní funkce  $\varphi(z)$  plyne harmoničnost funkcí  $p(x, y)$  a  $q(x, y)$  v  $T$  a ukážeme, že platí

$$\Delta[U(x, y) - xp(x, y) - yq(x, y)] = 0. \quad (1.13)$$

Podle předpokladu je  $P(x, y) = \Delta U(x, y)$ , takže výraz na levé straně rovnice (1.13) je roven

$$P - 2 \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \right) - x \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) - y \left( \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} \right),$$

což podle (1.12) a podle (1.6) je identicky rovno nule. Rovnice (1.13) je tedy splněna tehdy a jen tehdy, když

$$U(x, y) = xp(x, y) + yq(x, y) + r(x, y), \quad (1.14)$$

kde  $r(x, y)$  je harmonická funkce. Funkce  $U(x, y)$  je dle předpokladu biharmonická (Airyho). Toho jsme využili při konstrukci funkce  $\kappa(z)$ . Z (1.14) je přímo vidět, že  $\Delta\Delta U = 0$ . Protože  $r(x, y)$  je harmonická funkce, tak pro ni platí  $\Delta r = 0$  a i  $\Delta\Delta r = 0$ . Dále  $p$  i  $q$  jsou harmonické, takže

$$\Delta(xp + yq) = 2 \left[ \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \right]$$

a zároveň platí

$$\Delta \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\Delta p) = 0, \quad \Delta \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\Delta q) = 0.$$

Protože funkce  $r(x, y)$  je harmonická, tak podle (1.7) existuje v  $T$  holomorfní funkce  $\chi(z)$  taková, že

$$r(x, y) = \operatorname{Re}[\chi(z)].$$

Dále

$$xp + yq = \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi(z)],$$

neboť platí

$$\bar{z}\varphi(z) = (x - iy)(p + iq) = (xp + yq) + i(xq - yp).$$

Našli jsme tedy holomorfní funkce  $\varphi(z)$  a  $\chi(z)$  takové, že

$$U(x, y) = \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)],$$

což jsme chtěli dokázat.

## 1.3 Vyjádření různých výrazů pomocí funkcí napjatosti

**Definice 1.4** *Funkcemi napjatosti se rozumí funkce  $U(x, y)$ ,  $\varphi(z)$ ,  $\chi(z)$  a jejich derivace.*

Dále pro komplexní potenciály (Muschelišviliho komplexní potenciály) zavedeme značení

$$\Phi(z) = \varphi'(z), \quad \psi(z) = \chi'(z), \quad \Psi = \psi'(z). \quad (1.15)$$

Nyní vyjádříme vztahy pro výpočet složek tenzoru napětí  $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$ , posuvů  $u_x, u_y$  a složek výsledné síly  $F_x, F_y$  působící podél křivky s koncovými body  $a$  a  $b$  přímo pomocí funkcí napjatosti (bez nutnosti užití funkce  $U$ ).

**Věta 1.3** *Mějme v tělese  $T$  definovány funkce napjatosti  $U(x, y)$ ,  $\varphi(z)$ ,  $\chi(z)$ . Pak platí následující vztahy*

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}, \quad (1.16)$$

$$F_x + iF_y = -i \left( [\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}]_a^b \right), \quad (1.17)$$

$$2\mu(u_x + iu_y) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}, \quad (1.18)$$

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \Delta U = 2(\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}) = 4\text{Re}[\Phi(z)], \quad (1.19)$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = 2(\overline{z}\varphi''(z) + \psi'(z)) = 2(\overline{z}\Phi'(z) + \Psi(z)), \quad (1.20)$$

kde  $\kappa$  splňuje vztah

$$\kappa = 3 - 4\sigma$$

pro rovinnou deformaci nebo

$$\kappa = \frac{3 - \sigma}{1 + \sigma}$$

pro rovinnou napjatost. Konstanta  $\sigma$  je materiálová konstanta a její fyzikální význam je stručně uveden v dodatku B.

**Důkaz:** Nechť  $U$  je Airyho funkce, pak podle (1.8) platí

$$U(x, y) = \text{Re}[\overline{z}\varphi(z) + \chi(z)].$$

Protože

$$2\text{Re}[\chi(z)] = \chi(z) + \overline{\chi(z)}, \quad 2\text{Re}[\overline{z}\varphi(z)] = \overline{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)},$$

tak můžeme funkci  $U$  vyjádřit takto

$$2U = \overline{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \chi(z) + \overline{\chi(z)}. \quad (1.21)$$

Derivujeme-li (1.21) podle  $x$  a  $y$  dostaneme

$$2\frac{\partial U}{\partial x} = \varphi + \bar{z}\varphi' + \bar{\varphi} + z\bar{\varphi}' + \chi' + \bar{\chi}', \quad (1.22)$$

$$2\frac{\partial U}{\partial y} = i(-\varphi + \bar{z}\varphi' + \bar{\varphi} - z\bar{\varphi}' + \chi' - \bar{\chi}'), \quad (1.23)$$

kde jsme využili vztahů pro derivaci

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \varphi', \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = i\varphi', \quad \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = \bar{\varphi}', \quad \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} = -i\bar{\varphi}'.$$

1) Sečtením rovnic (1.22) a (1.23) násobenou výrazem  $i$  a využitím vztahů (1.15) dostaneme snadno rovnici (1.16).

2) Rovnici (1.17) dostaneme dosazením (1.16) do věty 2.7.1<sup>1</sup> uvedenou v [1].

3) Rovnice (1.18) plyne až na lineární člen ze vztahu 1.16) a poznámky 3 k větě 2.6.1<sup>2</sup> uvedenou v [1].

4) Derivujeme-li (1.22) podle  $x$

$$2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2\varphi' + \bar{z}\varphi'' + 2\bar{\varphi}' + z\bar{\varphi}'' + \chi'' + \bar{\chi}'', \quad (1.24)$$

poté derivujeme (1.23) podle  $y$

$$2\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 2\varphi' - \bar{z}\varphi'' + 2\bar{\varphi}' - z\bar{\varphi}'' - \chi'' - \bar{\chi}'' \quad (1.25)$$

a následně tyto dvě rovnice (1.24) a (1.25) sečteme, dostaneme vztah (1.19), tedy

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 2(\varphi' + \bar{\varphi}') = 2(p' + iq' + p' - iq') = 4p' = 4\text{Re}[\varphi'] = 4\text{Re}[\Phi],$$

5) Poslední rovnici (1.20) dostaneme derivací rovnice (1.23) podle  $x$

$$2\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = i(\bar{z}\varphi'' - z\bar{\varphi}'' + \chi'' - \bar{\chi}''),$$

poté od této rovnice odečteme rovnici (1.24) násobenou výrazem  $i$ , tedy

$$-(\sigma_{xy} + i\sigma_{yy}) = -i(\varphi' + \bar{\varphi}' + z\bar{\varphi}'' + \bar{\chi}''). \quad (1.26)$$

Podobně derivací (1.22) podle  $y$  dostaneme

$$2\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = i(\bar{z}\varphi'' - z\bar{\varphi}'' + \chi'' - \bar{\chi}'').$$

---

<sup>1</sup> $F_x + iF_y = -i \left[ \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} \right]_a^b$   
<sup>2</sup> $2\mu(u_x + iu_y) = - \left( \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} \right)$

Tuto rovnici vynásobíme výrazem  $-i$  a přičteme rovnici (1.25), čímž dostaneme

$$\sigma_{xx} + i\sigma_{xy} = (\varphi' + \overline{\varphi'} - z\overline{\varphi''} - \overline{\chi''}). \quad (1.27)$$

Vynásobením rovnice (1.26) výrazem  $i$  a rovnice (1.27) výrazem  $(-1)$  a jejich sečtením dostaneme vztah

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} - 2i\sigma_{xy} = 2(z\overline{\varphi''} + \overline{\chi''}).$$

Přechodem ke komplexně sdruženým hodnotám a využitím vztahů (1.15) dostaneme ihned tvar (1.20).

**Poznámka:** V bodě 3) předchozího důkazu jsme řekli, že se v rovnici (1.18) neuvažuje lineární člen, který má tvar  $2\mu(i\varepsilon z + \alpha + i\beta)$ . Funkce napjatosti lze volit tak, že tento člen je již zahrnut ve výrazu  $\kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}$  a vztah (1.18) tedy platí přesně. Dále budeme uvažovat, že funkce napjatosti jsou vždy takové, že rovnice (1.18) platí.

# Kapitola 2

## Izolovaná síla a hranová dislokace

V této kapitole nejprve ukážeme, jak se změní tvar Muschelišviliho komplexních potenciálů při posunutí souřadného systému a poté odvodíme konkrétní tvar Muschelišviliho komplexních potenciálů pro dva případy, pro izolovanou sílu a pro hranovou dislokaci. Veškeré definice, věty a jejich důkazy lze nalézt např. v [2],[3],[6].

### 2.1 Pravidlo pro posunutí Muschelišviliho komplexních potenciálů

Mějme nějaký souřadný systém s počátkem  $O$ . Nechť je tento počátek přesunut do bodu  $z_0 = x_0 + iy_0$  a nechť bod  $z = x + iy$  a bod  $z_1 = x_1 + iy_1$  je označení jednoho a téhož bodu ve starém souřadném systému a v novém souřadném systému, pak pro bod  $z = x + iy$  starého souřadného systému platí vztah

$$z = z_1 + z_0.$$

Tvar Muschelišviliho komplexních potenciálů (1.15) bude při posunu počátku souřadnic  $O$  do bodu  $z_0 = x_0 + iy_0$  vypadat takto, viz [6]

$$\Phi(z) = \Phi_1(z - z_0), \quad \Psi(z) = \Psi_1(z - z_0) - \bar{z}_0 \Psi_1'(z - z_0), \quad (2.1)$$

kde Muschelišviliho komplexní potenciály  $\Phi_1(z_1), \Psi_1(z_1)$  mají stejnou funkci v novém souřadném systému jako  $\Phi(z), \Psi(z)$  ve starém souřadném systému.

### 2.2 Muschelišviliho komplexní potenciály pro případ izolované síly

Nyní odvodíme tvar Muschelišviliho komplexních potenciálů  $\varphi$  a  $\psi$  pro případ *izolované síly* působící na těleso.



Nechť v počátku souřadného systému působí izolovaná síla  $F_0 = F_{0x} + iF_{0y}$  a necht' jsou předepsány následující okrajové podmínky v počátku souřadnic  $O$  a v nekonečnu ( $z = \infty$ ), tedy:

1. v okolí počátku souřadnic  $O$  musí být pole napětí v rovnováze s  $F_{0x}$  a  $F_{0y}$ ,
2. v okolí počátku souřadnic  $O$  musí složky posunutí  $u_x, u_y$  splňovat podmínku spojitosti,
3. pro bod  $z$  jdoucí k nekonečnu ( $z = \infty$ ) musí pole napětí konvergovat k nule.

Nyní zavedeme *symbol* [ ] takto

$$[f(z)] = \int_L df = [f]_a^b = f(b) - f(a),$$

kde  $L$  je libovolně malá *smyčka* obklopující počátek souřadnic  $O$ .

S využitím symbolu [ ] pak můžeme bod 1 předepsaných okrajových podmínek vyjádřit takto

$$\begin{aligned} [F] &= \int_L dF = \int_L d(F_x + iF_y) = [F_x + iF_y]_a^b = \\ &= F_x(b) + iF_y(b) - F_x(a) - iF_y(a) = F_{0x} + iF_{0y}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

kde

$$[F] = [F_x + iF_y]$$

je výsledná síla působící podél smyčky  $L$ . Bod 2 předepsaných okrajových podmínek, posunutí  $u = u_x + iu_y$  musí splňovat podmínku spojitosti, nebo-li

$$2\mu[u_x + iu_y] = 0. \quad (2.3)$$

Bod 3, okrajovou podmínku v nekonečnu ( $z = \infty$ ), můžeme psát ve tvaru

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \sigma_{xx} = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \sigma_{xy} = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \sigma_{yy} = 0, \quad (2.4)$$

kde

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Muschelišviliho komplexní potenciály  $\varphi(z)$  a  $\psi(z)$  se hledají pomocí (1.17), (1.18), (2.2) a (2.4) ve tvaru

$$\varphi(z) = A \ln z, \quad \psi(z) = B \ln z, \quad (2.5)$$

kde  $A, B$  jsou obecně komplexní konstanty

$$A = A_1 + iA_2, \quad B = B_1 + iB_2.$$

**Poznámka:** Přítomnost osamělé síly způsobí skokovou změnu v průběhu napětí v místě jejího působení (jako příklad můžeme uvést přímý prut zatížený osamělou

silou). Toto nespojité chování se dá popsat právě funkcí logaritmus z důvodu svých vlastností v komplexním oboru.

Konstanty  $A, B$  získáme užitím rovnic (1.17), (1.18), (2.2), (2.3) a (2.5), kde navíc využijeme vlastností logaritmu a symbolu  $[\ ]$ , tedy

$$\begin{aligned} [\ln z] &= [\ln r + i\varphi]_0^{2\pi} = 2\pi i, \\ \left[\overline{\ln z}\right] &= [\ln r - i\varphi]_0^{2\pi} = -2\pi i. \end{aligned}$$

Dosazením předchozích vztahů do rovnic (1.17), (1.18) získáme

$$\begin{aligned} 2\mu[u_x + iu_y] &= \left[\kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}\right] = \kappa A[\ln z] - \overline{A} \left[\frac{z}{z}\right] - \overline{B}[\overline{\ln z}] \\ &= \kappa A 2\pi i + \overline{B} 2\pi i = 0, \\ [F_x + iF_y] &= \left[-i \left(\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}\right)\right] \\ &= -i \left(A[\ln z] + \overline{A} \left[\frac{z}{z}\right] + \overline{B}[\overline{\ln z}]\right) \\ &= -i (A 2\pi i - \overline{B} 2\pi i) = A 2\pi - \overline{B} 2\pi = F_{0x} + iF_{0y}, \end{aligned}$$

kde

$$\overline{A} \left[\frac{z}{z}\right] = \overline{A} \left[\frac{re^{i\varphi}}{re^{-i\varphi}}\right]_0^{2\pi} = \overline{A} [e^{2i\varphi}]_0^{2\pi} = [\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi]_0^{2\pi} = 0.$$

Odtud pak soustava 4 rovnic o 4 neznámých

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [\kappa A 2\pi i + \overline{B} 2\pi i] &= 0, & \operatorname{Im} [\kappa A 2\pi i + \overline{B} 2\pi i] &= 0 \\ \operatorname{Re} [A 2\pi i + \overline{B} 2\pi] &= F_{0x} + iF_{0y}, & \operatorname{Im} [A 2\pi i + \overline{B} 2\pi] &= F_{0x} + iF_{0y}, \end{aligned}$$

jejímž řešení je

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{F_{0x}}{2\pi(1+\kappa)}, & A_2 &= \frac{F_{0y}}{2\pi(1+\kappa)}, \\ B_1 &= -\frac{\kappa F_{0x}}{2\pi(1+\kappa)}, & B_2 &= \frac{\kappa F_{0y}}{2\pi(1+\kappa)}. \end{aligned}$$

Konstanty  $A$  a  $B$  dosadíme do předpokládaného řešení (2.5) a získáme hledané Muschelišviliho komplexní potenciály  $\varphi$  a  $\psi$  pro izolovanou sílu působící v počátku souřadnic  $O$

$$\varphi(z; F_0, 0) = \frac{F_0}{2\pi(1+\kappa)} \ln z, \quad \psi(z; F_0, 0) = -\frac{\kappa \overline{F_0}}{2\pi(1+\kappa)} \ln z. \quad (2.6)$$

Zápis  $\varphi(z; F_0, 0)$  a  $\psi(z; F_0, 0)$  značí, že izolovaná síla  $F$  má působíště v počátku souřadnic  $O$ . Pomocí (1.15) a (2.6) dostaneme

$$\Phi(z; F_0, 0) = \frac{F_0}{2\pi(1+\kappa)z}, \quad \Psi(z; F_0, 0) = -\frac{\kappa \overline{F_0}}{2\pi(1+\kappa)z}. \quad (2.7)$$

Pokud bude izolovaná síla působit v bodě  $z_0 = x_0 + iy_0$ , tak musíme vztahy díky (2.7) transformovat pomocí (2.1)

$$\Phi(z; F_0, z_0) = \frac{F_0}{2\pi(1+\kappa)} \frac{1}{z-z_0}, \quad (2.8)$$

$$\Psi(z; F_0, z_0) = -\frac{\kappa F_0}{2\pi(1+\kappa)} \frac{1}{z-z_0} - \frac{\kappa \overline{F_0}}{2\pi(1+\kappa)} \frac{\overline{z_0}}{(z-z_0)^2}. \quad (2.9)$$

Nyní máme hledané Muschelišviliho komplexní potenciály pro případ izolované síly působící v bodě  $z_0 = x_0 + iy_0$ . Pro získání složek tenzoru napětí  $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$  a posuvů  $u_x$  a  $u_y$  stačí dosadit vztahy (2.8) a (2.9) do rovnic (1.18)-(1.20), které po úpravě můžeme psát ve tvaru

$$\begin{aligned} u_x &= \operatorname{Re} \left[ \frac{\kappa\varphi(z) - z\overline{\Phi(z)} - \overline{\psi(z)}}{2\mu} \right], \\ u_y &= \operatorname{Im} \left[ \frac{\kappa\varphi(z) - z\overline{\Phi(z)} - \overline{\psi(z)}}{2\mu} \right], \\ \sigma_{xx} &= \operatorname{Re}[2\Phi(z) - \overline{z}\Phi'(z) - \Psi(z)], \\ \sigma_{yy} &= \operatorname{Re}[2\Phi(z) + \overline{z}\Phi'(z) + \Psi(z)], \\ \sigma_{xy} &= \operatorname{Im}[\overline{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]. \end{aligned}$$

## 2.3 Muschelišviliho komplexní potenciály pro hranovou dislokaci

Nyní odvodíme tvar Muschelišviliho komplexních potenciálů  $\varphi$  a  $\psi$  pro nespojitost vektoru posunutí  $u = u_x + iu_y$  (*hranovou dislokaci*), který je z hlediska modelování trhlin často výhodnější.

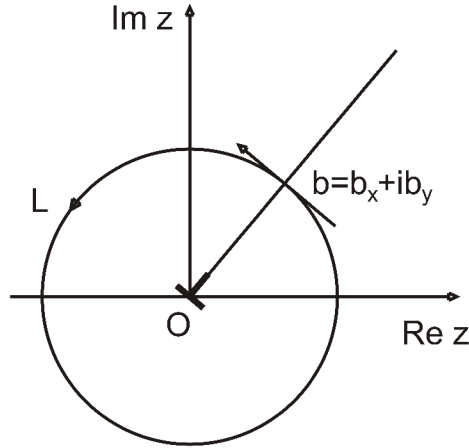
Nechť  $u$  je vektor posunutí pro jehož nespojitost podél určité polopřímky (pro tzv. rovinnou hranovou dislokaci) platí

$$[u] = [u_x + iu_y] = b = b_x + ib_y,$$

kde  $b = b_x + ib_y$  je tzv. *Burgersův vektor*, který určuje velikost a směr posunutí  $u$  na určité polopřímce, kterou budeme dále nazývat *dislokační polopřímkou*. Symbol  $[ ]$  zde má stejný význam jako v případě izolované síly (část 2.2) s tím rozdílem, že smyčka  $L$  obklopuje nyní krajní bod polopřímky.

Okrajové podmínky pro hranovou dislokaci můžeme formulovat následovně:

1. výslednice pole napětí podél uzavřené křivky obklopující koncový bod dislokační polopřímky musí být nulová,
2. výsledné posunutí  $u$  podél uzavřené křivky obklopující koncový bod dislokační polopřímky musí být rovno Burgersovu vektoru dislokace  $b = b_x + ib_y$ ,



Obrázek 2.3.1: Dislokace s Burgersovým vektorem  $b = b_x + ib_y$ , na dislokační polopřímce s koncovým bodem v počátku souřadnic.

3. pro bod  $z$  jdoucí k nekonečnu ( $z = \infty$ ) musí pole napětí konvergovat k nule.

Nechť koncový bod dislokační polopřímky je umístěn v počátku souřadnic  $O$ , pak bod 1 předepsaných okrajových podmínek lze vyjádřit s využitím symbolu  $[ ]$  takto

$$[F] = [F_x + iF_y] = 0.$$

Obdobně vyjádříme i druhou okrajovou podmínku

$$[u] = [u_x + iu_y] = b = b_x + ib_y.$$

Bod 3 okrajových podmínek je stejný jako v případě izolované síly (část 2.2) a tedy pro něj platí podmínky (2.4).

Nyní zavedeme *symbol*  $\lambda$  takto

$$\lambda = \frac{E}{8(1 - \sigma^2)\pi}, \quad (2.10)$$

kde  $E$  a  $\sigma$  jsou materiálové konstanty, jejichž fyzikální význam je stručně podán v dodatku B.

Formálně je úloha pro hranovou dislokaci totožná s úlohou izolované síly. Budeme-li tedy sledovat stejný postup jako v případě úlohy pro izolovanou sílu (část 2.2), tak komplexní potenciály  $\varphi$  a  $\psi$  budeme hledat ve tvaru

$$\varphi(z; b, 0) = -i\lambda b \ln z, \quad \psi(z; b, 0) = i\lambda \bar{b} \ln z, \quad (2.11)$$

Zápis  $\varphi(z; b, 0)$  a  $\psi(z; b, 0)$  označuje, že Burgersův vektor  $b$  náleží dislokační polopřímce, jejíž koncový bod leží v počátku souřadnic  $O$ . Pomocí (1.15) a (2.11) získáme

$$\Phi(z; b, 0) = -i\lambda b \frac{1}{z}, \quad \Psi(z; b, 0) = i\lambda \bar{b} \frac{1}{z}. \quad (2.12)$$

Pokud přesuneme koncový bod dislokační polopřímky z počátku souřadnic  $O$  do bodu  $z_0 = x_0 + iy_0$  tak pomocí transformačního pravidla (2.1) a (2.12) dostaneme následující tvar Muschelišviliho komplexních potenciálů  $\varphi$  a  $\psi$  pro dislokaci v bodě  $z_0$  s Burgersovým vektorem  $b = b_x + ib_y$

$$\Phi(z; b, z_0) = -i\lambda \frac{b}{z - z_0}, \quad \Psi(z; b, z_0) = i\lambda \frac{\bar{b}}{z - z_0} + i\lambda \bar{b} \frac{\bar{z}_0}{(z - z_0)^2}. \quad (2.13)$$

Nyní máme hledané Muschelišviliho komplexní potenciály pro případ hranové dislokace s koncovým bodem dislokační polopřímky v bodě  $z_0 = x_0 + iy_0$ . Pro získání složek tenzoru napětí  $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$  a posuvů  $u_x$  a  $u_y$  stačí jako v předcházející úloze (část 2.2) dosadit (2.13) do těchto rovnic

$$\begin{aligned} u_x &= \operatorname{Re} \left[ \frac{\kappa\varphi(z) - z\overline{\Phi(z)} - \overline{\psi(z)}}{2\mu} \right], \\ u_y &= \operatorname{Im} \left[ \frac{\kappa\varphi(z) - z\overline{\Phi(z)} - \overline{\psi(z)}}{2\mu} \right], \\ \sigma_{xx} &= \operatorname{Re}[2\Phi(z) - \bar{z}\Phi'(z) - \Psi(z)], \\ \sigma_{yy} &= \operatorname{Re}[2\Phi(z) + \bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)], \\ \sigma_{xy} &= \operatorname{Im}[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]. \end{aligned}$$

# Kapitola 3

## Diskuse - hranová dislokace v nekonečném prostředí

V této kapitole aplikujeme dosažené výsledky z předchozích kapitol na konkrétní úlohu. Konkrétně tedy Muschelišviliho komplexní potenciály pro hranovou dislokaci (část 2.3) na úlohu hranové dislokace. Uvedeme formulaci úlohy, její analytické řešení a srovnání s výsledky dosažených pomocí MKP (Metody konečných prvků).

### Formulace problému

Uvažujme hranovou dislokaci v komplexní rovině zadanou dle obrázku 3.1. Velikost hranové dislokace popisuje Burgesův vektor  $b = b_x + ib_y$  (viz část 2.3), který v tomto případě má velikost  $b = 0, 2i$ . Dále uvažujme nekonečné těleso, které je tvořeno homogenním, isotropním, lineárně elastickým materiálem s těmito charakteristikami:

$$E = 200 \text{ GPa}, \quad \sigma = 0,3,$$

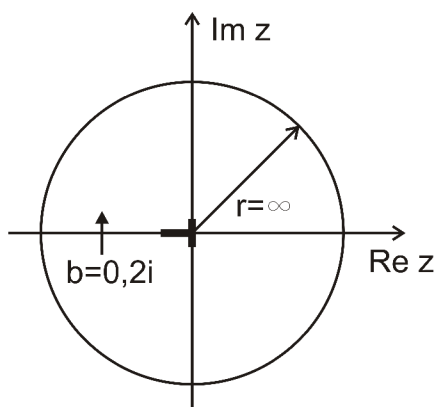
kde  $E$  je tzv. Youngův modul pružnosti a  $\sigma$  je Poissonovo číslo.

Naším cílem je nalézt průběhy pro složky tenzoru napětí podél kladné osy  $x$  a  $y$  ( $\sigma_{xx}$  a  $\sigma_{yy}$ ) pomocí Muschelišviliho komplexních potenciálů a následně je porovnat s hodnotami napětí získaných pomocí MKP. Hodnoty složek tenzoru napětí budeme hledat v řezu, který je veden ve směru kladné osy  $x$  (viz obr. 3.1).

### Řešení

Hodnoty  $E$  a  $\sigma$  dosadíme do vztahu pro  $\lambda$  (2.10) a tu následně dosadíme do vztahů pro komplexní potenciály (2.12). Takto získané tvary Muschelišviliho komplexních potenciálů již jen dosadíme do rovnic pro  $\sigma_{xx}$  a  $\sigma_{yy}$ .

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \operatorname{Re}[2\Phi(z) - \bar{z}\Phi'(z) - \Psi(z)], \\ \sigma_{yy} &= \operatorname{Re}[2\Phi(z) + \bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)].\end{aligned}$$



Obrázek 3.1: Hranová dislokace v nekonečném prostředí s kořenem dislokace v počátku souřadnic.

Hodnoty  $z$  těchto výrazů vyneseme do grafů společně s příslušnými hodnotami získaných pomocí MKP. Pro  $\sigma_{yy}$  je průběh napětí zaznamenán v grafu 3.2 a pro  $\sigma_{xx}$  v grafu 3.3.

**Srovnání výsledků:** Z grafu 3.2 popisující průběh napětí  $\sigma_{yy}$  podél osy  $y$  je patrné, že v oblasti blízké kořenu dislokace (počátek souřadnic) se numerické řešení začíná značně lišit od řešení analytického a to z důvodu singularity v kořenu dislokace, která nejde pomocí MKP namodelovat (v tomto bodě by hodnota napětí měla být v nekonečnu). Naopak ve vzdálenosti 8 – 25 mm od počátku souřadnic jsou výsledky získané analyticky i numericky téměř shodné. Ve vzdálenosti větší než 25 mm začínají být hodnoty získané numericky značně nepřesné, dokonce v dostatečné vzdálenosti od počátku souřadnic (cca 50 mm) dostáváme zaporné hodnoty napětí. Tato chyba je způsobena modelem, který na hranici tělesa musí mít předepsanou okrajovou podmínku oproti našemu předpokladu nekonečného tělesa. Pro průběh napětí  $\sigma_{xx}$  podél osy  $x$  (graf 3.3) platí stejné závěry s tím rozdílem, že zde oblast ve které se hodnoty získané analyticky a numericky příliš neliší je větší (cca 8 – 55 mm).

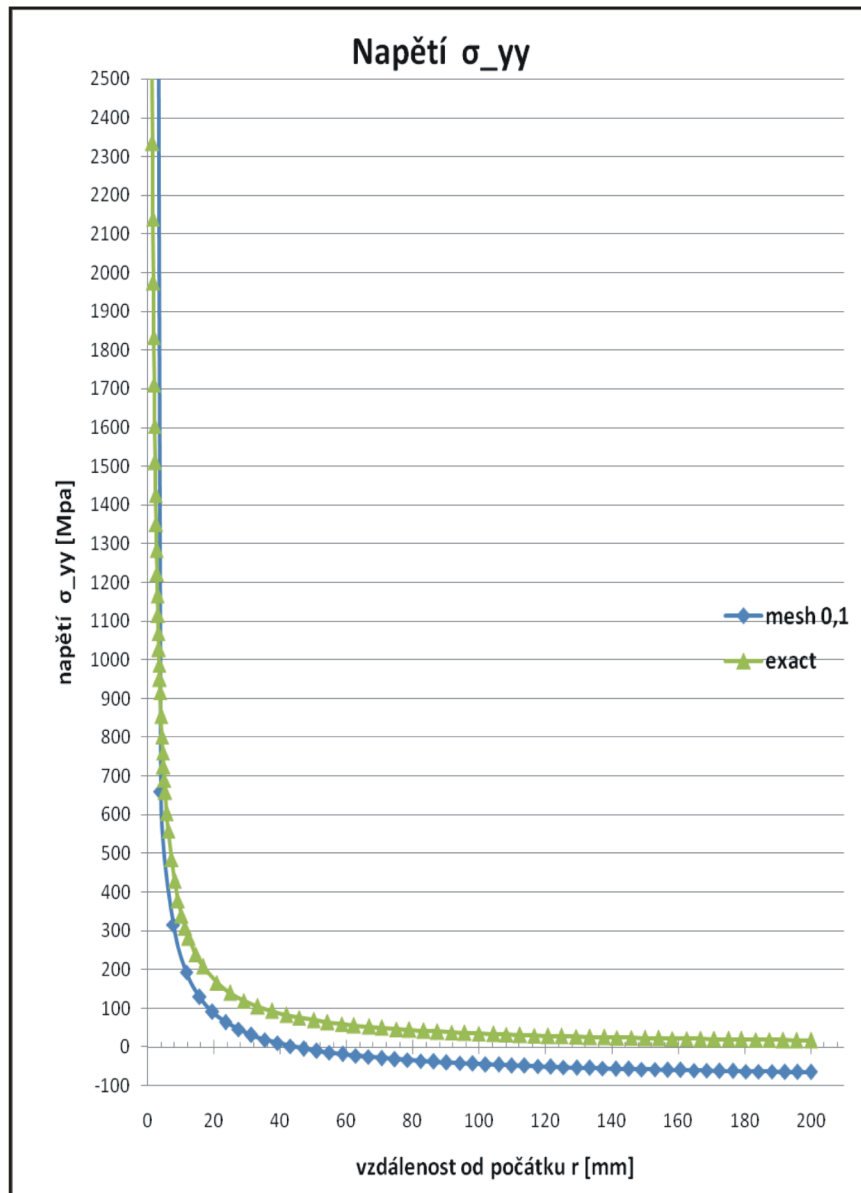
**Poznámka:** Analyticky získané hodnoty napětí byly vypočítány za pomoci programu MAPLE a pro srovnání byly použity hodnoty získané numericky pomocí MKP. Tyto hodnoty byly převzaty z opor volitelného předmětu *Výpočtové modelování metodou konečných prvků v programovém systému ANSYS*, který je vyučován na fakultě strojního inženýrství VUT Brno. Popis modelu:

- model geometrie: dvourozměrná úloha (rovinná napjatost), těleso o poloměru  $r = 200$  mm,
- model materiálu: isotropní, homogenní, lineárně elastické kontinuum s ma-

teriálovými charakteristikami  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0,3$ ,

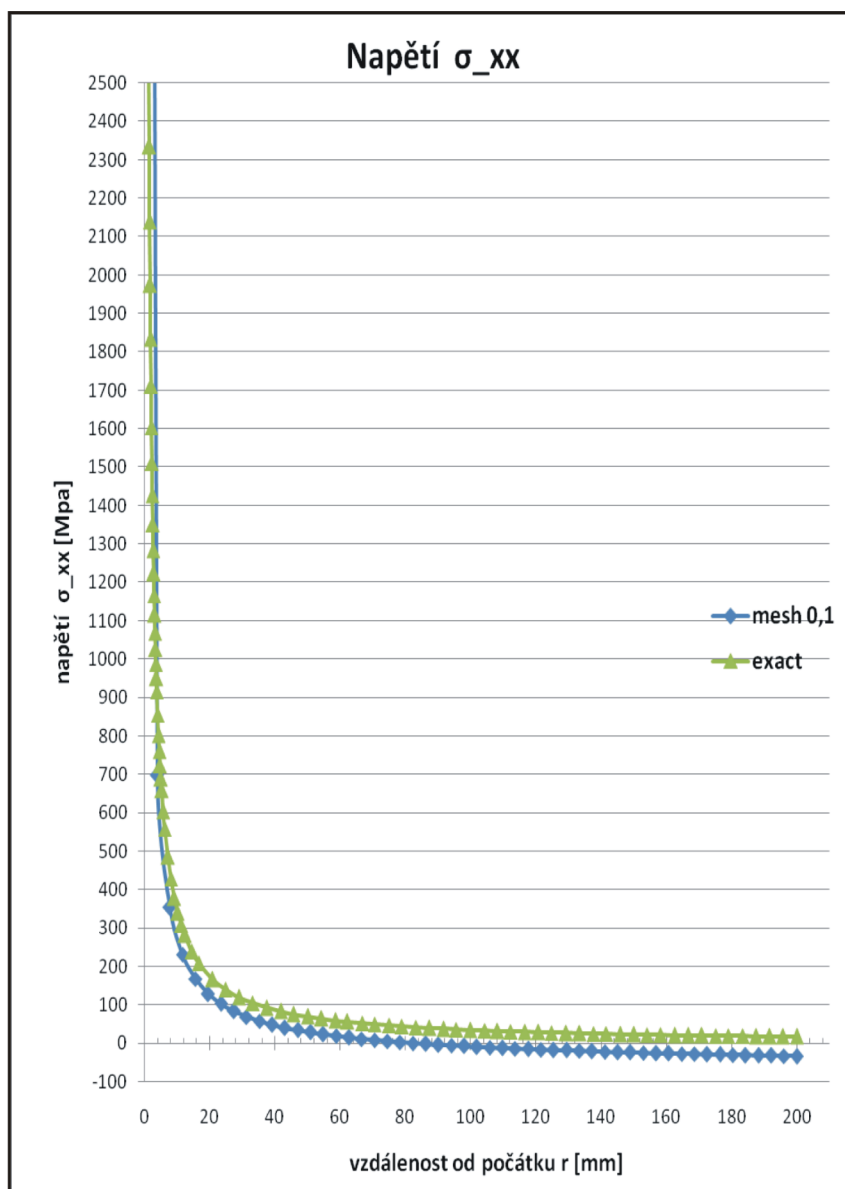
- okrajové podmínky: na hranici tělesa byl omezen kolmý posuv,
- dislokace byla simulována rozevřením tělesa o  $0,2 \text{ mm}$ ,
- hustota konečnoprvkové sítě v okolí singularity byla  $0,1 \text{ mm}$ .

## Grafy průběhu napětí



Graf 3.2: Průběh napětí  $\sigma_{yy}$  podél osy  $y$ .





Graf 3.3: Průběh napětí  $\sigma_{xx}$  podél osy  $x$ .

# Závěr

Bakalářská práce si kladla za cíl seznámení se s teoretickými základy funkcí komplexní proměnné a tzv. Muschelišviliho popisem problémů rovinné pružnosti pomocí komplexních potenciálů a následně aplikovat teorii komplexních potenciálů na některé úlohy rovinné pružnosti - hranová dislokace, osamělá síla.

Těchto cílů bylo dosaženo následovně. V první kapitole bylo popsáno řešení rovnic rovnováhy a kompatibility při daných okrajových podmínkách a to pomocí tzv. Airyho funkce, kterou jsme následně vyjádřili pomocí komplexních potenciálů a na konci kapitoly bylo odvozeno vyjádření různých výrazů pomocí komplexních potenciálů. Druhá kapitola se zabývala konkrétním hledáním tvarů komplexních potenciálů pro případ izolované síly a hranové dislokace. Ve třetí, poslední kapitole byla pak na konkrétní úloze hranové dislokace ukázána aplikace komplexních potenciálů. Výsledné hodnoty složek tenzoru napětí  $\sigma_{xx}$  a  $\sigma_{yy}$  získané analytickým výpočtem byly společně s výsledky získanými pomocí metody MKP zaneseny do grafů a srovnány. Srovnání ukázalo, že metoda konečných prvků byla dle očekávání nepřesná v blízkém okolí singularity v počátku souřadnic, kde byl umístěn kořen dislokace a dále docházelo k nepřesnostem pokud jsme se blížili k okraji tělesa a to z důvodu předepsaných okrajových podmínek ve výpočtovém modelu (pro analytický výpočet jsme uvažovali nekonečné těleso).

# Literatura

- [1] BABUŠKA, I., REKTORYS, K. VYČICHLO F.: *Matematická teorie rovinné pružnosti*, 1. vydání, Praha: NČAD, 1955.
- [2] DRUCKÜLLER M., ŽENÍŠEK A.: *Funkce komplexní proměnné*, 1. vydání, Brno: PC-DIR, 2000, skripta, ISBN 80-214-1788-9.
- [3] PROFANT T.: *Interakce mikrotrhlíny s hlavní trhlínou přemostěnou plastickými můstky*, Brno, 1998. Diplomová práce na FSI VUT BRNO na ústavu mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí diplomové práce prof. RNDr. Michal Kotoul, DrSc.
- [4] NEČAS J., HLAVÁČEK I.: *Úvod do matematické teorie pružných a pružně plastických těles*, 1. vydání, Praha: SNTL, 1983.
- [5] JANÍČEK, P., ONDRÁČEK, E., VRBKA, J.: *Mechanika těles - pružnost a pevnost I*, 1. vydání, Praha: SNTL, 1987, skripta.
- [6] MUSCHELIŠVILI N. I.: *Někotoryje osnovnyje zadači matěmaticeskoj těorii uprugosti*, 1. vydání, Moskva: NAUKA ,1949, v ruštině.
- [7] REKTORYS, K. a kol.: *Přehled užité matematiky*, 1. vydání, Praha: SNTL, 1968.

# Příloha A

## Vybrané matematické pojmy

V této příloze je stručně podán doplňující výklad matematických pojmů, které byly použity v předchozích kapitolách. Uvedené definice lze nalézt např. v [1],[2],[4],[7].

**Otevřená množina:** Množina  $M$  obsahující pouze vnitřní body  $M = \text{int}M$ . To znamená, že náleží-li nějaký bod  $A$  množině  $M$ , pak do ní spadá i celé okolí bodu  $A$  neboli

$M$  je otevřená, pokud pro  $\forall A \in M, \exists O(A, r)$  takové, že  $O(A, r) \subseteq M$ .

**Souvislá množina:** Množinu nazveme souvislou, když každé dva její body můžeme spojit lomenou čarou ležící v této množině.

**Hranice množiny:** Množina všech hraničních bodů množiny  $M$ , což jsou body pro které platí, že každé jejich okolí obsahuje alespoň jeden bod patřící do  $M$  a alespoň jeden bod nepatřící do  $M$  nebo-li

$A$  je hraniční bod, pokud  $A \in M : \forall O(A, r)$  platí, že  $\exists$  bod  $a \in O(A, r)$  takový, že  $a \in M$  a současně  $\exists$  bod  $b \in O(A, r)$  takový, že  $b \notin M$ .

**Laplaceův operátor  $\Delta$ :** Je diferenciální operátor pro který platí

$$\Delta = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2},$$

pro  $n$ -rozměrný prostor, speciálně pak pro dvojrozměrný prostor

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

**Jednoduchá, konečná, po částech hladká, uzavřená křivka :** Je souhrn bodů o souřadnicích  $x, y$  vyjádřených rovnicemi v parametrickém tvaru

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

kde  $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$  a současně  $-\infty < \alpha < \beta < \infty$ . Navíc pro funkce  $x(t)$  a  $y(t)$  platí:

1. Funkce  $x(t), y(t)$  jsou v  $\langle \alpha, \beta \rangle$  spojité a mají zde po částech spojitou derivaci,
2. Derivace  $x'(t), y'(t)$  nejsou nikde současně rovny nule (platí i pro body, kde existuje jen derivace zprava či zleva),
3.  $x(\alpha) = x(\beta), y(\alpha) = y(\beta)$ ,
4. Pokud současně platí

$$x(t_1) = x(t_2), \quad y(t_1) = y(t_2),$$

pak  $t_1, t_2$  jsou krajní body intervalu  $\langle \alpha, \beta \rangle$ .

Vlastnost 1 a 2 vyjadřuje po částech hladkost křivky, vlastnost 3 poukazuje na uzavřenost a poslední vlastnost 4 vyjadřuje jednoduchost (křivka se neprotíná).

**Nekonečná křivka:** Je to souhrn bodů o souřadnicích  $x, y$  vyjádřených rovnicemi ve tvaru

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

kde  $t \in (-\infty, \infty)$ , přičemž funkce  $x(t)$  a  $y(t)$  mají následující vlastnost:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} [x^2(t) + y^2(t)] = \infty.$$

Pokud budeme navíc požadovat jednoduchost a po částech hladkost, tak platí vlastnosti 1, 2 a 4 stejně jako u křivky konečné.

**Podtěleso:** Podtělesem tělesa  $T$  nazýváme otevřenou podmnožinu tělesa  $T$ , která vyhovuje podmínkám definice tělesa (část 1.1, definice 1.1).

**Smyčka:** Smyčka je jednoduchá, konečná, po částech hladká, uzavřená křivka, která obklopuje nějaký bod.

**Tenzor:** K zavedení pojmu tenzor budeme potřebovat následující transformaci: Uvažujme  $n$ -dimenzionální euklidovský prostor  $\mathbb{R}^n$  a ortogonální transformaci  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}'$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_n)$ . Pak platí

$$x'_i = a_{ij}x_j + c'_i \quad (i = 1, \dots, n), \tag{A.1}$$

kde matice  $(a_{ij})$  je ortogonální a  $n$ -tice  $\mathbf{c}' = (c'_1, \dots, c'_n)$  udává souřadnice počátku nečárkovane soustavy souřadnic v čárkované soustavě souřadnic.

Tenzorem  $N$ -tého řádu ( $N = 1, 2, 3, \dots$ ) rozumíme zobrazení z množiny všech kartézských soustav souřadnic do množiny  $N$ -dimenzionálních matic  $\mathbf{T}$

$$\mathbf{T} = (T_{i_1, \dots, i_N}) \quad (i_k = 1, 2, \dots, n; \forall k = 1, 2, \dots, N),$$

kteřé při transformaci (A.1) vyhovuje vztahům

$$T'_{i_1, \dots, i_N} = a_{i_1 j_1} \dots a_{i_N j_N} T_{j_1, \dots, j_N}.$$

Tenzor 2. řádu má pak v  $n$ -dimenzionálním prostoru  $\mathbb{R}^n$  tvar

$$\mathbf{T} = (T_{i_1, i_2}) \quad (i_k = 1, 2, \dots, n)$$

a s výhodou lze k jeho vyjádření využít maticový zápis

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} T_{11} & \dots & T_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ T_{n1} & \dots & T_{nn} \end{vmatrix}.$$

Tenzor  $\mathbf{T}$  při transformaci (A.1) vyhovuje vztahům

$$T'_{i_1, i_2} = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} T_{j_1, j_2}.$$

Tenzor 2. řádu  $\mathbf{T} = (T_{i,j})$  nazveme symetrickým, pokud platí  $T_{i,j} = T_{j,i}$ . Pokud platí  $T_{i,j} = -T_{j,i}$  tak ho označujeme jako tenzor antisymetrický.

**Totální diferenciál:** Necht' má funkce  $f(x_1, \dots, x_n)$  v okolí bodu  $A = [a_1, \dots, a_n]$  spojitě parciální derivace, pak totálním (úplným) diferenciálem funkce  $f$  v bodě  $A$  označujeme výraz

$$df(A) = \frac{\partial f(A)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(A)}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f(A)}{\partial x_n} dx_n,$$

kde diferenciál  $dx_i = x_i - a_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Totální diferenciál funkce v bodě  $A = [a_1, \dots, a_n]$  představuje rozdíl mezi hodnotou funkce a její tečnou rovinou v bodě  $A$ , pokud přejdeme do bodu  $A = [a_1 + dx_1, \dots, a_n + dx_n]$ .

Diferenciály vyšších řádů získáme jako diferenciály z diferenciálů tedy platí

$$df^m(A) = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^f (A),$$

kde  $m$  je řád diferenciálu.

**Taylorův rozvoj (fce více proměnných):** Má-li funkce  $f(x_1, \dots, x_n)$  v bodě  $A = [a_1, \dots, a_n]$  derivace až do řádu  $n$ , pak lze Taylorův rozvoj řádu  $n$  funkce  $f$  v okolí bodu  $A$  zapsat pomocí totálních diferenciálů  $df$  takto

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(A) + \frac{df(A)}{1!} + \frac{df^2(A)}{2!} + \dots + \frac{df^n(A)}{n!} + R_{n+1},$$

kde  $R_{n+1}$  je Taylorův zbytek. Pokud nás zajímá pouze lineární část Taylorova rozvoje, pak má tvar

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(A) + \frac{df(A)}{1!}.$$

# Příloha B

## Vybrané pojmy z pružnosti

Pružnost se zabývá tělesy a jejich chováním při jejich vnějším zatežování. K tomu, abychom mohli předpovídat chování tělesa (např. zda dojde k porušení tělesa) potřebujeme znát tzv. pole napětí a deformace v tomto tělese (téměř ve všech případech). Fyzikální význam těchto pojmů a pojmů s nimi souvisejících stručně popíšeme v následujícím dodatku. Veškeré definice, věty a jejich důkazy lze nalézt např. v [1],[4],[5].

**Obecné napětí:** Obecné napětí  $\mathbf{f}_A$  je silové působení (na základě principu akce a reakce) v bodě  $A$  řezu  $\omega$  tělesa  $T$ , které je nějakým způsobem zatížené vnějšími silami a ve statické rovnováze (nepohybuje se). Obecné napětí  $\mathbf{f}_A$  má tyto vlastnosti:

1.  $\mathbf{f}_A$  závisí na:
  - tvaru tělesa  $T$ , řezu  $\omega$  a poloze bodu  $A$  v tělese,
  - vlastnostech soustavy vnějších sil  $\Pi$  (vnějšího zatížení),
  - vlastnostech materiálu tělesa,
2. pokud mají řezy  $\omega_i$ , které procházejí bodem  $A$  stejnou normálu, tak obecná napětí  $\mathbf{f}_A$  jsou stejná,
3. obecné napětí  $\mathbf{f}_A$  je lineární kombinací jednotkových vektorů  $\mathbf{e}_n$  v bodě  $A$ , tj.

$$\mathbf{f}_A = T_\sigma \mathbf{e}_n,$$

kde  $T_\sigma$  je tenzor napětí (tenzor 2. řádu),

4. nahradíme-li silovou soustavu  $\Pi$  jinou silovou soustavou staticky ekvivalentní  $\Pi_E$ , potom je obecné napětí (tím i napjatost) pro oba případy obecně různé.

Z vlastnosti 3 plyne, že pokud známe tenzor napětí  $T_\sigma$  v bodě tělesa, tak známe obecné napětí pro všechny řezy, které lze daným bodem vést.

Vlastnost 4 by prakticky znemožnila řešení napjatosti (i deformace) u většiny úloh. Ukazuje se však, že nahrazení silové soustavy  $\Pi$  silovou soustavou staticky ekvivalentní  $\Pi_E$  je možné, protože napjatost je porušena jen v určité oblasti okolo

místa statické náhrady. Tuto skutečnost vyjadřuje tzv. Saint-Venantův princip (viz níže).

**Napjatost v bodě tělesa<sup>1</sup>:** Množina obecných napětí ve všech řezech  $\omega$ , které lze tímto bodem vést. Napjatost v bodě tělesa je určena tenzorem napětí  $T_\sigma$  v tomto bodě.

**Napjatost tělesa:** Množina napjatostí ve všech bodech tělesa. Je určena tenzorovým polem napětí (tj. množina tenzorů napětí pro všechny body tělesa).

**Homogenní napjatost tělesa:** Nastává tehdy, pokud napjatost ve všech bodech tělesa je shodná, nebo-li tenzory napětí ve všech bodech jsou shodné.

**Tenzor napětí:** Je symetrický tenzor 2. řádu (viz příloha A, tenzor), který je vztažen na těleso po deformaci. Lze ho zapisovat jako matici symetrickou vzhledem k hlavní diagonále, tedy platí  $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \sigma_{xz} = \sigma_{zx}, \sigma_{yz} = \sigma_{zy}$

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}.$$

Složky  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$  nazýváme normálové složky napětí a  $\sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$  nazýváme tečné složky napětí. Uvedený tenzor je pro případ obecné napjatosti, v případě rovinné napjatosti má tenzor tvar

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{vmatrix},$$

kde ostatní složky tenzoru jsou nulové.

**Saint-Venantův princip:** Nahradíme-li silovou soustavu  $\Pi$  soustavou staticky ekvivalentní  $\Pi_E$  v okolí bodu  $A$  tělesa, pak napjatost tělesa bude prakticky stejná pro obě zatěžovací soustavy s výjimkou jisté oblasti  $T_S$  obsahující bod  $A$  (viz obr. B.1).

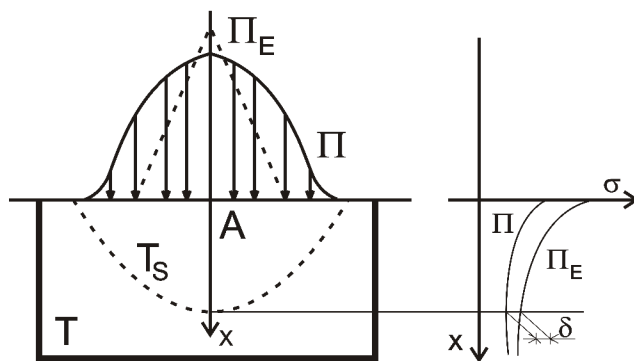
To znamená, že pokud pro posouzení chování tělesa není rozhodující oblast  $T_S$ , kde je napjatost porušena, pak můžeme použít staticky ekvivalentní silovou soustavu  $\Pi_E$  namísto původní silové soustavy  $\Pi$ . Saint-Venantův princip tedy umožňuje:

1. zavedení tzv. osamělé síly,
2. zavádět výpočtové modely styku těles,
3. řešit napjatost a deformaci vázaného tělesa ve dvou krocích a to řešením rovnováhy tělesa jako celku a pak řešením napjatosti a deformace uvolněného tělesa.

---

<sup>1</sup>Napjatost= stav vnitřních sil v bodě tělesa





Obrázek B.1: Saint-Venantův princip. Mimo oblast  $T_S$  je rozdíl v napětí  $\sigma$  od původního zatížení  $\Pi$  a jeho staticky ekvivalentní náhrady  $\Pi_E$  menší než stanovená přesnost  $\delta$ .

**Deformace tělesa:** Deformace v tělese  $T$  je (obdobně jako u napjatosti tělesa) určena tenzorovým polem deformací (tj. množinou tenzorů deformací pro všechny body tělesa). Deformace v bodě  $A$  tělesa  $T$  (obdobně jako obecné napětí) závisí na:

- tvaru tělesa  $T$ , řezu  $\omega$  a poloze bodu  $A$  v tělese,
- vlastnostech soustavy vnějších sil  $\Pi$  (vnějšího zatížení),
- vlastnostech materiálu tělesa.

K popisu se používá tzv. tenzor deformace.

**Homogenní deformace tělesa:** Nastává tehdy, pokud deformace ve všech bodech tělesa je shodná, nebo-li tenzory deformací jsou ve všech bodech shodné.

**Tenzor deformace:** Je dvojího typu podle toho o jakou deformaci se jedná. Pokud zkoumáme nelineární deformaci tělesa  $T$ , tak ji popíšeme pomocí tzv. tenzoru konečné deformace a pokud se jedná o lineární deformaci, tak ji popíšeme pomocí tzv. tenzoru ryzí (malé) deformace. Protože se tato práce zabývá pouze ryzí deformací, tak tenzor konečné deformace uvedeme bez odvození.

Tenzor konečné deformace je symetrický tenzor 2. řádu (viz příloha A, tenzor), který je vztažen na těleso před deformací. Lze ho zapisovat jako matici symetrickou vzhledem k hlavní diagonále, tedy platí  $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ ,  $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$ ,  $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}.$$

Pro jednotlivé složky platí vztah

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \right) \quad (k, i, j = x, y, z), \quad (\text{B.1})$$

kde  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$  je vektor posunutí.

Tensor ryzí deformace dostaneme jako lineární část Taylorova rozvoje tenzoru konečné deformace  $\mathbf{T}_\varepsilon$  daného vztahem (B.1)

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\partial u_x/\partial x, \partial u_x/\partial y, \dots, \partial u_z/\partial z).$$

Označíme ho jako tenzor ryzí deformace  $\mathbf{T}_e$ , tedy

$$\mathbf{T}_e = \begin{vmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{yz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{vmatrix},$$

kde pro jednotlivé složky platí

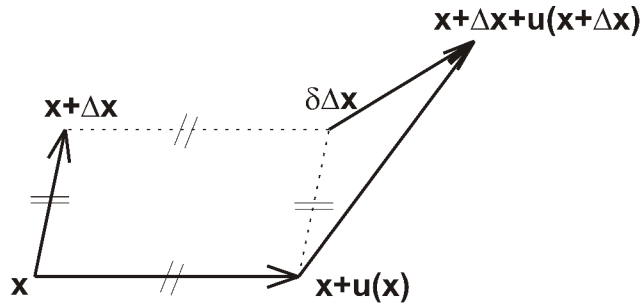
$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \right) \quad (i, j = x, y, z), \quad (\text{B.2})$$

kde  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$  je opět vektor posunutí. V případě rovinné deformace má tenzor ryzí deformace tvar

$$\mathbf{T}_e = \begin{vmatrix} e_{xx} & e_{xy} \\ e_{yx} & e_{yy} \end{vmatrix},$$

kde zbývající složky jsou nulové.

Uvažujme ještě deformaci úsečky dle obrázku (B.2)



Obrázek B.2: Deformace úsečky.

Definujme přírůstek vektoru  $\Delta \mathbf{x}$  následovně

$$\delta \Delta \mathbf{x} = \Delta \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) - [\mathbf{u}(\mathbf{x}) + \Delta \mathbf{x}] = \mathbf{u}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}).$$

Vezmeme lineární část Taylorova rozvoje přírůstku  $\delta \Delta \mathbf{x}$  a dostaneme

$$(\delta \Delta \mathbf{x})_i \approx \frac{\partial u_i}{\partial j}(\mathbf{x}) \Delta j \quad (i, j = x, y, z).$$

Rozdělíme  $\partial u_i/\partial j$  na symetrickou a antisymetrickou část

$$(\delta \Delta \mathbf{x})_i \approx e_{ij} \Delta j + \omega_{ij} \Delta j,$$

kde  $e_{ij}$  jsou složky tenzoru ryzí deformace (B.2) a vektor  $\omega_{ij}\Delta j$  představuje malé natočení vektoru  $\Delta\mathbf{x}$  a platí pro něj

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial j} - \frac{\partial u_j}{\partial i} \right) \quad (i, j = x, y, z).$$

**Objemová síla:** Je to síla, která působí v bodech tělesa  $T$  a je v malém přímo úměrná objemu tělesa. Příkladem je tíhová síla nebo odstředivá síla při rotaci. Velikost této síly je pro případ rovinného tělesa dána vztahem

$$F_x = \iint_{\overline{T}_1} g_x \, dx dy, \quad F_y = \iint_{\overline{T}_1} g_y \, dx dy,$$

kde  $\overline{T}_1$  je podtěleso s hranicí a dvojice  $(g_x, g_y)$  je vektor objemové síly pro každý bod podtělesa.

**Rovnováha tělesa:** Rovinné těleso je v rovnováze (statické) jestliže platí, že součet všech  $x$ -ových sil  $F_{x_i}$  i  $y$ -ových sil  $F_{y_i}$  je roven nule a součet všech momentů  $M_{A_i}$  k nějakému bodu  $A$  je nulový, nebo-li

$$\sum_i F_{x_i} = 0, \quad \sum_i F_{y_i} = 0, \quad \sum_i M_{A_i} = 0.$$

V definici obecného napětí se předpokládá, že rovinné těleso  $T$  je v rovnováze. Tuto rovnováhu musí splňovat i složky tenzoru napětí  $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$ . Tedy platí tzv. rovnice rovnováhy.

**Rovnice rovnováhy:** Mějme rovinné těleso  $T$ , které je v rovnováze a na které působí vnější zatížení a objemová síla  $\mathbf{q}$ . Potom složky tenzoru napětí  $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$  vyhovují následujícím rovnicím (rovnici rovnováhy)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + g_x &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + g_y &= 0. \end{aligned}$$

**Rovnice kompatibility:** Mějme jednoduše souvislé rovinné těleso  $T$  a tři funkce  $e_{xx}, e_{xy}, e_{yy}$  se spojitými parciálními derivacemi do druhého řádu. Potom nutná a postačující podmínka, aby byly složkami ryzí deformace tělesa  $T$  je, aby vyhovovaly následující rovnici (rovnici kompatibility deformací)

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = 0.$$

Pomocí Hookova zákona a rovnic rovnováhy můžeme rovnici kompatibility vyjádřit pomocí složek tenzoru napětí takto

$$\Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -\frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right),$$

kde  $\lambda, \mu$  jsou materiálové konstanty a  $\Delta$  je Laplaceův operátor. Pro případ nulových objemových sil nabývá tvaru

$$\Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0.$$

**Hookeův zákon:** Popisuje vztah mezi napětím a deformací (tzv. konstitutivní vztahy) v tělese  $T$ . V obecné formě pro případ rovinné deformace/napjatosti v homogenním tělese má tvar

$$\sigma_{xx} = c_{11}e_{xx} + c_{12}e_{yy} + c_{13}e_{xy},$$

$$\sigma_{yy} = c_{21}e_{xx} + c_{22}e_{yy} + c_{23}e_{xy},$$

$$\sigma_{xy} = c_{31}e_{xx} + c_{32}e_{yy} + c_{33}e_{xy},$$

kde  $e_{xx}, e_{yy}, e_{xy}$  jsou složky ryzí deformace,  $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$  jsou složky tenzoru napětí a konstanty  $c_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) jsou materiálové konstanty pro které platí  $c_{ij} = c_{ji}$ .

Obecně, pro případ trojosé napjatosti, obsahuje Hookeův zákon 21 nezávislých materiálových konstant  $c_{ij}$ , které popisují homogenní materiál tělesa. V případě izotropního materiálu se tyto konstanty redukuje pouze na dvě tzv. elastické Laméovy konstanty  $\lambda, \mu$  a Hookeův zákon pak nabývá tvaru

$$\sigma_{xx} = \lambda\Theta + 2\mu e_{xx},$$

$$\sigma_{yy} = \lambda\Theta + 2\mu e_{yy},$$

$$\sigma_{xy} = 2\mu e_{xy},$$

kde symbol  $\Theta$  znamená

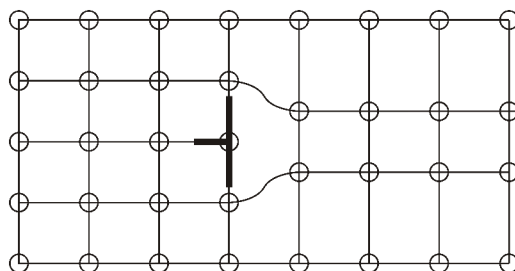
$$\Theta = e_{xx} + e_{yy} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2(\lambda + \mu)}.$$

Konstanty  $\lambda, \mu$  vyjadřují určité vlastnosti daného materiálu (nemůžou být libovolné) a platí pro ně  $\lambda, \mu > 0$ . V pružnosti se často místo Laméových konstant používá modul pružnosti  $E$  a Poissonova konstanta  $\sigma$ , přičemž

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Pokud chceme vyjádřit Hookeův zákon pro složky tenzoru deformace  $e_{xx}, e_{xy}, e_{yy}$ , dostaneme

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{2\mu} \left[ \sigma_{xx} - \frac{\lambda(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{2(\lambda + \mu)} \right], \\ e_{yy} &= \frac{1}{2\mu} \left[ \sigma_{yy} - \frac{\lambda(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{2(\lambda + \mu)} \right], \\ e_{xy} &= \frac{1}{2\mu} \sigma_{xy}. \end{aligned}$$



Obrázek B.3: Hranová dislokace.

**Hranová dislokace:** Je typ čárové poruchy mřížky, kdy chybí určitá souvislá část atomů a tím dojde k deformaci mřížky v jejím okolí. Pro představu si můžeme představit např. čtverec atomů  $8 \times 8$ , kde uprostřed chybí např. 5 atomů v řadě. Vlivem toho dojde k posunu okolních atomů do mezery (viz obr. B.3). V pružnosti však fyzikální podstata hranové dislokace nemá takový význam jako její matematický popis. Jedná se totiž o tzv. Greenovu funkci úloh typu modelování trhlin v nějakém kontinuu. Pak již nehovoříme o jedné hranové dislokaci, ale o spojitém poli dislokací, které však má opodstatnění pouze v teoretické rovině nemající žádný reálný ekvivalent.

**Izolovaná (osamělá) síla:** je síla působící pouze v jednom daném bodě tělesa. Podobně jako v případě hranové dislokace nemá fyzikální význam osamělé síly v pružnosti takový význam jako její matematický popis<sup>2</sup>, kde se jedná o tzv. Greenovu funkci pro jistý typ úloh.

---

<sup>2</sup>Osamělá síla ve skutečnosti nemá reálný ekvivalent, jde pouze o teoretickou idealizaci skutečného zatížení na základě Saint-Venantova principu.