UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

Bakalářská práce

Blanka Toufarová

Základní otázky vývoje matematiky ve starověku

Olomouc 2020 Vedoucí práce: Mgr. Jitka Hodaňová, Ph.D.

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně. Veškeré zdroje, prameny a literaturu, z nichž jsem při zpracování bakalářské práce čerpala, jsou řádně citovány a uvedeny v seznamu použité literatury.

V Olomouci dne:

……………………..

Podpis

PODĚKOVÁNÍ

Ráda bych poděkovala vedoucí své bakalářské práce Mgr. Jitce Hodaňové, PhD. za cenné rady a připomínky a čas strávený při konzultacích.

OBSAH

ÚVOD

Matematika je nezbytný základ všech přírodních věd a nedílnou součástí povinné školní docházky.

Díky historii poznáváme její počátky i vývoj. Vznik matematiky souvisel s praktickým využitím. S rozvíjejícími se potřebami lidstva, především v zemědělství nebo stavitelství, byla potřeba zdokonalovat také početní a geometrické znalosti.

Podle mnohých historiků dějiny začínají se vznikem písma. Písmo se postupně vyvíjelo a zdokonalovalo. Již na některých z prvních záznamů písma se objevovala matematika, nebo něco, co se matematice blíží. Lze tedy říci, že matematika má dlouho doloženou historii.

Mne matematika i historie vždy velmi zajímaly. Z obou předmětů jsem skládala maturitní zkoušku. Matematiku studuji a chtěla bych ji v budoucnu učit. Vzájemné propojení těchto dvou disciplín je nejen velmi zajímavé, ale i přínosné a motivující pro žáky na základních školách. Matematiku nemá řada z nich v oblibě, proto je znalost její historie a vědomí toho, co znali a uměli naši předkové, mohou motivovat. Občasné zařazení výkladu historie matematiky do vyučovacích hodin může výuku zpestřit a upoutat pozornost žáků.

Má bakalářská práce by měla čtenáře s tímto tématem seznámit a pomoci mu vytvořit přehled matematických dovedností ve starověkých státech.

V teoretické části se věnuji historickému vývoji matematiky ve starověkých státech, Egyptě, Mezopotámii a Řecku. Egypt a Mezopotámie jsou země, ve kterých se poprvé objevily záznamy matematiky. Ve starověkém Řecku ji později zdokonalili. Matematické znalosti starých Řeků byly velmi rozsáhlé. Ve své práci se blíže věnuji Milétské a Pythagorejské škole, které stojí za počátky matematiky v zemi, která je nazývána kolébkou Evropy. Znalost vývoje matematiky ve starověku může být přínosná nejen pro žáky a učitele, ale i pro celou zvídavou veřejnost.

V praktické části se věnuji několika příkladům, inspirovaných starověkým Řeckem. Jedná se o početní, ale především zábavné příklady, které by mohly žáky základních škol motivovat. Pokud takovéto příklady zvládli vypočítat již starověcí Řekové, zvládnou to dnešní žáci také a možná i projeví zájem o další náročnější příklady.

TEORETICKÁ ČÁST

1 EGYPT

1.1 HISTORICKÝ VÝVOJ

Egyptská společnost již od pravěku osidlovala úrodné okolí řeky Nil. Stát byl rozdělený na hornatý Horní Egypt, kde se věnovali převážně pastevectví, a v nížinách se rozpínající Dolní Egypt, v jehož úrodných oblastech se dařilo zemědělství. Tyto dvě země sjednotil v jeden stát kolem roku 3 000 př. n. l. (před naším letopočtem) vládce Meni. Stal se prvním egyptským faraonem a také zakladatelem sídelního města Mennofer (řecky Memfis).

Faraoni byli považováni za vtělené bohy a také byli jako bohové uctíváni. Měli neomezenou moc. Faraonovi sloužili královští úředníci: správci krajů (nazývaných nómy), správci financí (vezírové), výběrčí daní. Úředníci měli k dispozici písaře. Faraonům sloužili také kněží, kteří v chrámech šířili vzdělanost. Dále se obyvatelstvo dělilo na vojenské hodnostáře, řemeslníky, zemědělce, obchodníky a také otroky, jež byli majetkem státu.

Z období Staré říše (2700 – 2200 př. n. l.) jsou dochovány nejen monumentální hrobky faraonů, pyramidy, jež nám dokazují vysoké matematické znalosti Egypťanů, nýbrž i jméno jejich architekta, stavitele a matematika Imhotepa. Jedná se o první známou osobnost v historii matematiky. Pyramidy v Gíze jsou prvním ze sedmi divů starověkého světa.

V období Střední říše (2000 – 1800 př. n. l.) docházelo k centralizaci vlády, rozvoji řemesel, obchodu a písemnictví i rozkvětu kultury. V této době se obchodovalo převážně se zlatem, kořením a slonovinou. Hlavním městem se stává Veset (řecky Théby).

Období Nové říše (1600 – 1100 př. n. l.) bylo dobou největšího rozsahu říše, ale také dobou náboženských sporů. V tomto období vládl faraon Tutanchamon, jehož plně vybavená hrobka v Údolí králů byla v roce 1922 objevena Howardem Carterem.

Ve 4. stol. (století) př. n. l. byl Egypt ovládnut Alexandrem Makedonským a po jeho smrti zde vládli Ptolemaiovci. Díky této skutečnosti se v řecké matematice projevil egyptský vliv.

V 1. stol. př. n. l. se stal Egypt součástí Římské říše, později součástí Byzantské říše a v 7. stol. byl dobyt Araby.

Egypťané se věnovali převážně zemědělství. Díky teplému podnebí a úrodné půdě se zde velmi dařilo obilnářství. V zemědělství byli závislí na sezónních záplavách a zavlažovacích kanálech, s tím neodmyslitelně souviselo vyměřování polí, administrativa, vybírání a evidence daní, proto k tomu byly nutné znalosti z matematiky a geometrie.

1.2 PÍSMO A NEJSTARŠÍ ZÁZNAMY

Za vynálezce písma Egypťané považovali boha moudrosti, Thovta.

Nejstarší nalezené záznamy byly napsány již kolem 3100 př. n. l., což je téměř současně se sumerskými nálezy písma, ovšem nezávisle na sobě. Z doby před sjednocením Horního a Dolního Egypta jsou dochovány nápisy na tzv. (tak zvaný) paletách, které stručně informují o panovníkových vítězstvích. Z této doby také pocházejí letopisné tabulky.

Z období Staré říše se bohužel nezachovalo velké množství textů s matematickými údaji. Ty dochované nám alespoň umožnily určit číselné znaky, soustavu a jednotky měření.

Egypťané měli tři druhy písma: hieroglyfické, hieratické a démotické. Hieroglyfy byly posvátným písmem, jejichž hlavním účelem bylo hlásat slávu faraonů. Jedná se o obrázkové neboli ikonografické písmo, jehož každý obrázek označoval určitý předmět. Hieroglyfy byly vytesávány do kameny. Pro praktické, každodenní záznamy si písaři vytvořili jednodušší verzi hieroglyfů, písmo hieratické neboli kněžské písmo. Hieratické písmo se zaznamenávalo pomocí teček a čárek (rovných i obloukových) červeným nebo černým inkoustem na papyrus či kousky látek. Z hieratického písma se později oddělilo ještě jednodušší písmo démotické. Užívalo se pro administrativní a obchodní účely. Bylo psáno inkoustem na papyrus.

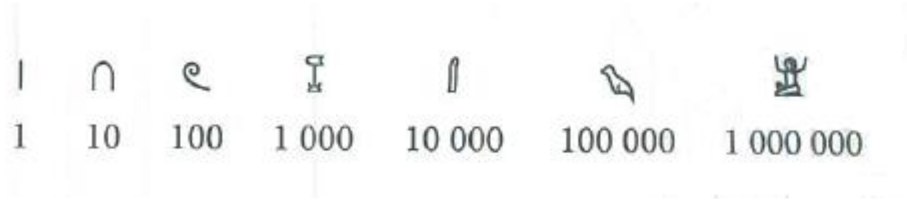
Egyptská čísla jsou známá už z hieroglyfických nápisů. Nejstarší dochovaný záznam čísla „oslavuje úspěch vojenské kořisti: 120 000 zajatců, 400 000 kusů dobytka, 422 000 koz.“[1] Slavnostní nápisy byly vytesávány do kamene, ale těchto pramenů se dochovalo pouze málo. Více se dozvídáme z běžných nápisů, psaných rákosovým stéblem na papyrus, střepy či kameny.

1.3 ČÍSELNÁ SOUSTAVA

Egyptská soustava byla desítková, avšak nepoziční. Hodnota čísla se po zpřeházení číslic nijak nezměnila. Číslovky odpovídaly mocninám 10^0 - 10^6. Hieroglyfy menších čísel měly jednoduché tvary. Čím vyšší číslo hieroglyf označoval, tím složitější tvar měl. Číslo 1 mělo tvar svislé hole, číslo 10 tvar ohnuté hole, číslo 100 bylo zobrazováno symbolem provazce k měření polí, číslo 1 000 květem lotosu, číslo 10 000 ukazujícím prstem, číslo 100 000 pulcem a milion

[1] HVORECKÝ, Jozef, Lev BUKOVSKÝ, Milan HEJNÝ, Štefan ZNÁM a Beloslav RIEČAN. *Pohľad do dejín matematiky*. Bratislava: Alfa, 1986, 239 s. str.17

bohem Hh se zdviženýma rukama. Milion byl pro Egypťany tak velké číslo, že bylo ztotožňováno s nekonečnem.



Obrázek č. 1
Zápis čísel ve starověkém Egyptě [2]

Čísla se vyjadřovala opakováním a psala se zprava doleva, od nejnižších řádů k nejvyšším. Například číslo 134 se vyjádřilo symbolem pro 100, trojnásobným opakováním symbolu pro 10 a čtyřnásobným opakováním symbolu pro 1.

Také hieratické písmo mělo své číslovky. Každá číslice měla svůj symbol pro každý řád i každou hodnotu v desítkové soustavě. Díky tomu, že byla každá číslice jiná, mohla být čísla psány v jakémkoli pořadí, tudíž se nejedná o soustavu poziční. Navíc Egypťané neznali nulu, nejvyšší číslicí bylo 9 000.

1.4 VZDĚLÁVÁNÍ

Vzdělávání se uskutečňovalo v písařských školách. Ty se nacházely v blízkosti chrámů. Čtení, psaní a počítání se v nich učili studenti asi od deseti let. Studium trvalo mnoho let, aby si budoucí písaři dobře osvojili písmo i přípravu inkoustu a psacích potřeb. Učitelé byli oprávněni k používání tvrdých tělesných trestů, dokonce mohli studenty uvěznit ve školním vězení. Vzdělávali se v nich pouze synové bohatých otců, převážně písařů, jelikož se povolání dědilo z otce na syna.

Písaři byli v Egyptě váženými občany a patřili do privilegované společenské vrstvy. Znalost čtení, psaní a počítání byla nutná ke společenskému postavení, moci i bohatství. Gramotná byla pouze asi desetina obyvatelstva starověkého Egypta.

[2] MAZUR, Joseph. *Kde se vzaly symboly: stručná historie matematického zápisu od starověku k dnešku*. Přeložil Marek ČTRNÁCT. Praha: Knižní klub, 2017. Universum. ISBN 978-80-242-5820-1.

1.5 VÝZNAMNÉ DOCHOVANÉ PAPYRY

Z období Střední říše jsou dochovány hospodářské zápisy a výkazy obsahující matematické výpočty. Ovšem nejdůležitější z dochovaných papyrů jsou Rhindův a Moskevský papyrus. Oba jsou zhruba stejně staré. Vznikly kolem roku 1850 př. n. l.

Rhindův neboli Ahmesův papyrus se nedochoval v originále, ale v o dvě století mladším opisu, tedy asi kolem 1650 př. n. l. Písař tohoto dochovaného opisu uvedl své jméno, tak bývá rukopis nověji nazýván Ahmesův. Alexander Henry Rhind, skotský egyptolog, po kterém byl papyru dříve pojmenován, vlastnil papyrus v 19. stol. Nyní je uložen v Britském muzeu v Londýně. Papyrus je napsán hieroglyfy a má rozměry 534 cm x 33 cm. Obsahuje více než 80 vzorových úloh, konkrétních návodů. Úlohy jsou rozdělené do skupin podle vzájemných souvislostí a užití v praxi. Jedná se o aritmetické i geometrické úlohy, výpočty ploch a objemů a úlohy hospodářského rázu. Některé úlohy dokonce řeší aritmetickou a geometrickou posloupností.

Moskevský papyrus byl objeven v oblasti Luxoru v roce 1878 bratry Rassulovými, hledači památek. Papyrus vystřídal několik majitelů. Poslední majitel, sběratel V. S. Golenišev, jej v roce 1912 daroval moskevskému Muzeu umění, kde je uložen dodnes. Odtud pochází jeho název. Je napsán v hieratickém písmu s přepisy do hieroglyfů. Má rozměry 534 cm x 8 cm. Obsahuje 25 řešených příkladů bez tematického uspořádání. Opět se jedná o praktické úlohy, řešící např. (například) plochu lichoběžníku, objem komolého jehlanu a povrch válcovité střechy.

Dochované výpočty matematických úloh obsahují i papyry menšího rozsahu, Kahúnské papyry a Berlínský papyrus. Dalšími zdroji matematických znalostí Egypťanů jsou dřevěné tabulky a kožený svitek, které obsahují výpočty zlomků.

Tyto papyry sloužily jako základní učební pomůcky v písařských školách. Dnes nám slouží jako prameny k poznání egyptských matematických a geometrických znalostí.

1.6 ARITMETIKA, POČÍTÁNÍ

Egypťané neřešili obecné otázky a neměli vytvořenou obecnou teorii. Početní postupy se učili s konkrétními hodnotami, což nám dokazují již zmíněné papyry. Uměli sčítat i násobit, znali zlomky, řešili lineární rovnice, znali existenci odmocnin, ale neznali nulu a záporná čísla. Složité úlohy řešily postupnými kroky, ne přímo.

Díky desítkové soustavě jim sčítání a odčítání nedělalo potíže. Postupovali stejně jako my dnes. Sčítaly se jednotky stejných řádů a při přechodu přes desítku se přičetla jednička k řádu následujícímu. Sčítání a odčítání označovali hieroglyfy, které původně symbolizovaly chůzi vpřed a vzad.

Násobení nechápali abstraktně, ale předmětně, což vyplývá z praktického využití matematiky. Tak například první číslo označovalo dobytek a druhé číslo znamenalo, kolikrát se má daný počet dobytka vzít. Neznali poziční soustavu, takže nemohli znát násobení a dělení, tak jako známe my dnes. Násobení převáděli na sčítání a postupovali metodou zdvojnásobování (duplikace). Při násobení větších číslem používali desetinásobky čísel.

Například 15 x 14

1	15
/ 2	30
/ 4	60
/ 8	120
	210

Výsledek je 15 x 14 = 210.

Každý řádek je dvojnásobkem předchozího. Poslední číslo v levém sloupci nesmí být vyšší než násobitel (v našem případě 14). Poté se od spodu vyhledají taková čísla, jejichž součet se rovná násobiteli (14) a označí se šikmou čarou. Součet čísel na pravé straně odpovídající označeným číslům na řádku vlevo je výsledkem součinu a zapisuje se po čáru.

Stejného vzorce se užívalo i v případě dělení a výpočtů mocnin.

Například 210 : 14

/1	14
/ 2	28
/ 4	56
/ 8	112
	210

Výsledek je 210 : 14 = 15.

Při dělení se zdvojnásobuje dělitel (v našem případě 14). Takto postupujeme, dokud se součet čísel v pravém sloupci nerovná dělenci (210). Podíl je roven součtu čísel v levém sloupci. Při dělení se zbytkem se využívaly zlomky.

Ve stavitelství (při stavbách pyramid) se počítalo pouze s celými čísly, jelikož pyramidy byly budovány z celých kamenných bloků. Avšak v zeměměřičství (při měření a dělení plochy) se zlomky využívaly a udávaly část plochy. Nejstarší zlomky měly ve jmenovateli mocninu dvou, například $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ plochy. Takovéto zlomky se nazývají Horovy zlomky, podle boha Hora.

Později se používaly převážně kmenné zlomky ve tvaru $\frac{1}{n}$, které vyjadřoval hieroglyf „ra" (symbol úst), později byl nahrazen tečkou a pod něj se napsal symbol jmenovatele. Ostatní zlomky se převáděly na kmenné zlomky, nebo na zlomek $\frac{2}{3}$. Při dělení, které je, jak již bylo zmíněno, založeno na zdvojnásobování, bylo nutné vyjádřit zlomek $\frac{2}{n}$ pomocí kmenných zlomků. Pro n sudá se zlomek nahradil zlomkem zkráceným, pro n lichá byly vytvořeny tabulky. V Rhindově papyru je uvedena tabulka všech rozkladů až do n = 101.

Při počítání se zlomky museli egyptští počtáři znát identity, které udávají součty zlomků. To se učili memorováním v písařských školách a později v praxi.
Například $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

Zlomky byly využívány také ke kalendářním výpočtům. „Egypťané dělili rok na 12 měsíců po 30 dnech, když uplynuly, přidávali 5 dalších dnů." [3] První den měsíce byla $\frac{1}{30}$, třetí $\frac{1}{10}$, desátý $\frac{1}{3}$, další dny byly vyjadřovány pomocí součtu, tedy čtrnáctý den v měsíci se vyjádřil $\frac{1}{30} + \frac{1}{10} + \frac{1}{3}$.

Vytvoření kalendáře je důkazem vysoké úrovně egyptské astronomické znalosti pohybu hvězd. Egypťané užívali lunární a později solární kalendář, podle kterých se organizovalo zemědělství, hospodářství i náboženské slavnosti. Události jsou ovšem datovány podle vlády panovníků a dynastií.

„Ačkoliv Egypťané neznali algebraické vzorce, existovalo několik druhů obecných postupů na řešení úloh stejného typu a plným právem je můžeme považovat za nesmělé začátky algebraické metody" [4] Některé matematické úlohy lze totiž řešit lineárními rovnicemi. Jedná se

[3] KOLMAN, Arnošt. *Dějiny matematiky ve starověku*. Přeložil Marcela HEDRLÍNOVÁ. Praha: Academia, nakladatelství Československé akademie věd, 1968, str. 37
[4] KOLMAN, Arnošt. *Dějiny matematiky ve starověku*. Přeložil Marcela HEDRLÍNOVÁ. Praha: Academia, nakladatelství Československé akademie věd, 1968, str. 42

o příklady na výpočty neznámého množství, abstraktního čísla. Na rozdíl od většiny egyptských příkladů tyto příklady nemají praktický kontext. Příklady z Rhindova papyru takovéto úlohy řeší přímým dělením a u většiny se nachází i následná zkouška.

Objevují se i příklady obsahující neznámou ve druhé odmocnině. Dalo by se říci, že tyto příklady vedou na kvadratické rovnice. Egypťané to ovšem řešili pomocí odmocnin.

Vyskytovaly se i příklady vedoucí na aritmetické či geometrické posloupnosti. Na geometrickou posloupnost vede tento příklad z Rhindova papyru:

Je 7 domů, v každém je 7 koček, každá sní 7 myší, každá myš by snědla 7 klasů, nichž by se urodilo 7 měr zrní. Kolik je všeho dohromady?

$X = 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5$

$X = 7 + 49 + 343 + 2\,401 + 16\,807$

$X = 19\,607$

Všeho dohromady je 19 607, z toho je 7 domů, 49 koček, 343 myší, 2 401 klasů a 16 807 měr zrní.

1.7 GEOMETRIE

Geometrické znalosti Egypťanů byly využívány převážně ve stavitelství a zeměměřičství, což dokazují velkolepé stavby pyramid a chrámů. Před zahájením stavby museli zeměměřiči vytyčit vodorovnou rovinu a na ní narýsovat půdorys stavby. „Vytyčování půdorysů chrámů bylo náboženským ceremoniálem, slavnostním obřadem, o kterém nalézáme obrazová i textová svědectví na stěnách různých chrámů, např. v Karnaku.“ [5] Dále se načrtly plány a zhotovily modely stavby. Obřad se nazýval zatloukání kolíků. S užitím čtvercové sítě se také rýsovaly nárysy a bokorysy. Čtvercové sítě se využívalo nejen při projektování staveb, ale také v umění, převážně v sochařství.

Egypťanům nedělaly problémy konstrukce kružnic, trojúhelníků, os úseček a úhlů, kolmice ani rovnoběžky. Geometrické nákresy jsou dochovány na papyrech a obsahují i výpočty obsahů, objemů a počítání s úhly. „Často se uvádí, že pravý úhel vytyčovali staří

[5] BEČVÁŘ, Jindřich, Martina BEČVÁŘOVÁ a Hana VYMAZALOVÁ. *Matematika ve starověku: Egypt a Mezopotámie*. Praha: Prometheus, 2003. Dějiny matematiky. ISBN 80-7196-255-4., str. 125

Egypťané pomocí smyčky provazce rozdělené dvanácti uzly na dvanáct stejných dílů (egyptská šňůra), napnutím smyčky bylo možno vyznačit pravoúhlý trojúhelník s délkami stran v poměru 3: 4 :5 (nejznámější pythagorejský trojúhelník).“ [6] Mnohé úlohy na papyrech jsou ztíženy o převody jednotek a doplněny o jednoduché nákresy.

Obsah obecných čtyřúhelníků počítali stejně jako obsah obdélníku. A to součinem délek jeho stran. Vzorec na výpočet obsahu trojúhelníku se shoduje se vzorcem, který používáme i dnes, a to $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$. „Nemůžeme si však být zcela jisti tím, zda údaj, který v egyptských textech chápeme jako výšku, není ve skutečnosti délkou jedné ze stran“. [7]

Obdobně počítali i obsah lichoběžníku.

Obsah kruhu se počítal podle vzorce $S = (\frac{8}{9}d)^2$, kde d je průměr kruhu. Srovnáme-li egyptský vzorec s naším, získáme přibližnou hodnotu $\pi = \frac{256}{81} \doteq 3{,}16$, tedy s přesností 0,63 %.

$(\frac{8}{9}d)^2 = \frac{\pi\, d^2}{4}$

$\frac{64}{81}d^2 = \frac{1}{4}\pi\, d^2$

$\pi = \frac{256}{81}$

K tomuto vzorci egyptští matematici došli pravděpodobně z kruhu opsanému čtverci při využití čtvercové sítě. Tento čtverec rozdělili na devět dílů tvaru čtverce. Rohové čtverce se následně rozdělily úhlopříčkou a takto vzniklou krajní část odstranili. Obsah takto vzniklé části je roven $\frac{7}{9}$. Po rozšíření zlomku dostáváme $\frac{63}{81}$, což se velmi blíží vzorci $S = \frac{64}{81} d^2$, pro výpočet obsahu kruhu o průměru d. Jiné teorie předpokládají odvození vzorce stejným postupem, avšak rozdělením čtverce na 324 stejných částí, tedy 18 x 18 čtverců.

Několik příkladů ze zmíněných papyrů se věnuje nakloněným rovinám, tedy stavbám pyramid. Sklon pyramid se podle návodů řešil dělením poloviny základny výškou.

---

[6] BEČVÁŘ, Jindřich, Martina BEČVÁŘOVÁ a Hana VYMAZALOVÁ. *Matematika ve starověku: Egypt a Mezopotámie*. Praha: Prometheus, 2003. Dějiny matematiky. ISBN 80-7196-255-4., str. 129-130

[7] BEČVÁŘ, Jindřich, Martina BEČVÁŘOVÁ a Hana VYMAZALOVÁ. *Matematika ve starověku: Egypt a Mezopotámie*. Praha: Prometheus, 2003. Dějiny matematiky. ISBN 80-7196-255-4., str. 81

Na Moskevském papyru je dochován příklad na výpočet objemu komolého čtyřbokého jehlanu, což odpovídá rozestavěné pyramidě, pomocí vzorce $V=\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2)$, kde h je výška, a je délka dolní základny a b je délka horní základny.

Dále počítali objemy krychle a válce, tyto příklady měly praktické využití, protože řešily kolik pytlů obilí se vejde do krychlové nebo válcové obilnice.

2 MEZOPOTÁMIE

2.1 HISTORICKÝ VÝVOJ

Mezopotámie se nacházela v oblasti úrodného půlměsíce a její název je složen ze slov mezos (uprostřed) a potámos (řeka), což v překladu znamená meziříčí, neboť se nacházela v nížině mezi řekami Eufrat a Tigris.

Úrodné půdy a teplé podnebí zapříčinilo přísun obyvatelstva a rozvoj zemědělství již kolem roku 8000 př. n. l. Lidé zde vyšlechtili obilí a pro jeho pěstování museli vytvořit systém zavlažovaní polí a také řídící organizaci, která by z něj vybírala naturální daně, toto by nebylo možné bez znalostí z geometrie a matematiky. V této době zatím neexistovalo písmo. Údaje byly zaznamenávány pomocí značek.

Již ve 4. tis. (tisíciletí) př. n. l. přišli do této oblasti Sumerové, zakládali zde městské státy (Ur, Lagaš, Uruk, Umma, Kiš). Způsobem vlády těchto městských států byla primitivní demokracie. Rozhodovalo shromáždění lidu a fungovalo zde chrámové hospodářství, v němž kněz organizoval a rozděloval úrodu. Obyvatelé Sumeru začali pravděpodobně jako první používat písmo, neboť vznikla nutnost vést záznamy.

Mezopotámská města byla také lehce zranitelná a dobyvatelná, protože neměla silné přírodní hranice, které by ji ochránily. „Neustále do ní pronikaly různé národy, které s sebou přinášely obvyklé bohatství rozmanitých kulturních vlivů“ [8]

Městské státy mezi sebou vedly spory a po mnohaletých válkách vznikaly velké říše, monarchie. Centry těchto říší byly paláce, ve kterých sídlil panovník s neomezenou mocí. Říše se tedy spravovala systémem palácového hospodářství. První takovou říši založil kolem roku 2340 př. n. l. král Sargon. Podle hlavního města Akkad se nazývá Říše akkadská.

Po konci sumerské nadvlády vznikly v Mezopotámii dvě velké říše, na jihu Babylonie a na severu Asýrie. V těchto říších se rozvíjela řemesla a obchod, s čímž souvisel vývoj věd včetně matematiky.

Babylonská říše vzkvétala za vlády nejslavnějšího vládce Chammurapiho. Ten vydal jeden z prvních psaných zákoníků v historii, Chammurapiho zákoník. Zákoník obsahoval 282 článků týkajících se trestního práva. Tresty, které zde byly podrobně popsány, byly často velmi kruté, podle zásady „oko za oko, zub za zub“. Také je zde zmíněn správní systém říše, například dělení

[8] MAZUR, Joseph. *Kde se vzaly symboly: stručná historie matematického zápisu od starověku k dnešku*. Přeložil Marek ČTRNÁCT. Praha: Knižní klub, 2017. Universum. ISBN 978-80-242-5820-1, str. 36

na okresy, panovníkem volení správci, výběr daní a dělení obyvatelstva na Awílum, Muškénum a otroky. Na hliněné tabulky se zapisovaly počty obyvatel, pozemků a dobytka, aby byly správně vybírány daně. Po Chammurapiho smrti nastal úpadek Babylonské říše. V 6. stol. př. n. l byla dobyta Peršany a v 7. stol. př. n. l připojena k říši Asyrské.

Nejvýznamnějším vladařem Asyrské říše byl Aššurbanipal. Vybudoval si obrovské, kamennými hradbami opevněné sídelní město Ninive. V Ninive se nacházely paláce, chrámy, hradby, vodovody, v okolí města se rozléhaly sady a vinice. Nejzajímavější je ovšem Aššurbanipalova knihovna, jedno z nejvyspělejších center vzdělanosti své doby. Nacházela se zde nejen díla matematická, lékařská, ekonomická, astronomická, ale i náboženské texty, mytologické příběhy a také úlomky Eposu o Gilgamešovi. Vše napsané na více než 20 000 hliněných tabulkách. Ve 20. století byly některé tabulky popsané klínovým písmem rozluštěny francouzským asyriologem F. Thureau-Danginem a německým historikem matematiky O. Neugebauerem.

Z mezopotámské architektury stojí za zmínku také stupňovité stavby – zikurraty, které byly využívány k náboženským, ale také k astronomickým účelům. Nejznámější stavbou tohoto typu byla Babylonská věž. Visuté zahrady Semiramidiny vybudované babylonským králem Nabukadnezarem II. jsou řazeny mezi sedm divů světa. Bohužel se tyto monumentální stavby nedochovaly.

2.2 MATEMATIKA

„Hned na začátku je třeba říct, že matematika Sumeru a Babylonu předstihla všechno, k čemu došli matematici Egypta.“ [9] Navíc mezopotámskou matematiku známe lépe než matematiku egyptskou. A to díky velkému počtu dochovaných hliněných tabulek, na kterých se zachovaly záznamy a myšlenky tehdejších učenců. „Vypálené tabulky jsou takřka nezničitelné, neuškodí jim ani voda ani oheň. Mohou se sice rozbít na kusy, ale ty je možno slepit a po pečlivém okartáčování přečíst.“ [10] Většina nalezených tabulek, obsahujících matematické texty, je doby vlády Chammurapiho z 2. tis. př. n. l. a poté ze 3. stol. př. n. l.

V pozdější době, i když byla Mezopotámie ovládnuta Peršany, mezopotámská civilizace stále ovlivňovala vývoj matematiky, i přestože se hlavní dění odehrávalo v Řecku.

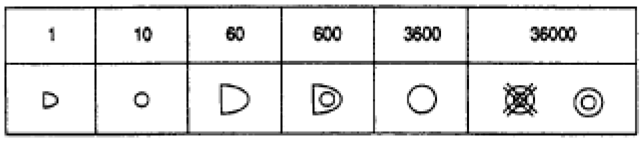
[9] HVORECKÝ, Jozef, Lev BUKOVSKÝ, Milan HEJNÝ, Štefan ZNÁM a Beloslav RIEČAN. *Pohľad do dejín matematiky*. Bratislava: Alfa, 1986, str. 19

[10] BEČVÁŘ, Jindřich, Martina BEČVÁŘOVÁ a Hana VYMAZALOVÁ. *Matematika ve starověku: Egypt a Mezopotámie*. Praha: Prometheus, 2003. Dějiny matematiky. ISBN 80-7196-255-4, str. 190

2.3 VÝVOJ PÍSMA A POČETNÍ SOUSTAVA

První sumerské písmo bylo obrázkové. Piktogramy, složené z čar a vpichů se seříznutým rákosovým rydlem vyrývaly do vlhké hlíny a označovaly různé předměty. Nejstarší nálezy se datují kolem roku 3300 př. n. l. Postupně se z nich vyvíjely ideogramy, tedy grafické znaky, které již ale nebyly zobrazením daného předmětu. Počet takových znaků se časem rozrostl až asi na 2000 znaků, jeden znak mohl mít i více významů. Později, kolem roku 2900 př. n. l., se začíná přecházet z písma piktografického ke klínovému. Začínají se objevovat klínopisné tabulky a texty. Klínové písmo se vymačkávalo seříznutým rákosovým stéblem.

Objevují se i matematické záznamy a zápisy čísel, neboť si Sumerové při osidlování Mezopotámie vedli přesné početní záznamy o evidenci zdejších zásob. Systém fungoval tak, že množství určitého výrobku bylo reprezentováno „žetony“ z kamínků nebo usušeně hlíny. Tyto žetony se ukládaly do hliněných „obálek“. Ty byly označeny grafickým symbolem informujícím o počtu a druhu žetonů v dané obálce. Díky tomuto značení se nemusela pokaždé obálka rozbít a vytvořit jiná. Až po několika staletích si sumerští účetní uvědomili, že vnitřek obálek je zbytečný, když je celá informace zaznamenána pomocí čar zvenku obálky. Tak sumerští matematici objevili nepoziční číselnou soustavu. Tato soustava byla systémem mnoha různých znaků, otisků kužele a kruhu. Byla založena na kombinaci čísel 10 a 60.



Obrázek č. 2
Původní sumerské číslice [11]

Později byly takovéto otisky nahrazeny klínovými znaky. Jednalo se o soustavu sestadecimální, tedy kombinaci desítkové a šedesátkové soustavy. Do hodnoty 59 se jednalo o soustavu desítkovou, pak přecházela na šedesátkovou, kde byly jednotlivé pozice vyhrazeny číslům 60^1, 60^2, 60^3. Ústřední čísla 10 a 60, byla vybrána záměrně, jelikož se snadno dělí a podíly vycházejí v celých číslech. Šedesátkovou soustavu ještě dnes používáme při měření času a úhlů.

[11] BEČVÁŘ, Jindřich, Martina BEČVÁŘOVÁ a Hana VYMAZALOVÁ. *Matematika ve starověku: Egypt a Mezopotámie*. Praha: Prometheus, 2003. Dějiny matematiky. ISBN 80-7196-255-4.

„V této době se patrně zápis čísel oddělil od zápisu objektů, které byly počítány, proběhla důležitá abstrakce, číslo se osvobodilo od počítaných předmětů.“ [12]

Soustava původně neměla označení pro nulu. Ze začátku doufali, že vynechaný řád poznají ze souvislostí. U čísel do třetího řádu jim to nečinilo problémy, ale u vyšších čísel docházelo k početním chybám. Postupně si však uvědomovali, že pokud mezi ciframi nechají větší mezeru, usnadní si práci a nakonec v Mezopotámii poprvé v historii začali používat poziční nulu. Jedná se o první poziční soustavu. Dalším podnětem ke vzniku nuly byly astronomické tabulky, v nichž bylo zapotřebí rychle číst.

Symbol nuly byl různý. Značila se buď dvojitým šikmým klínem, nebo dvěma širokými klíny. Její používání v matematických textech nebylo tak důsledné jako v textech astronomických. Například zápis (1) mohl znamenat 1, 60, $\frac{1}{60}$, $\frac{1}{60^2}$ a další. Dnes přepis mezopotámských čísel oddělujeme čárkou a středníkem oddělujeme zlomky.

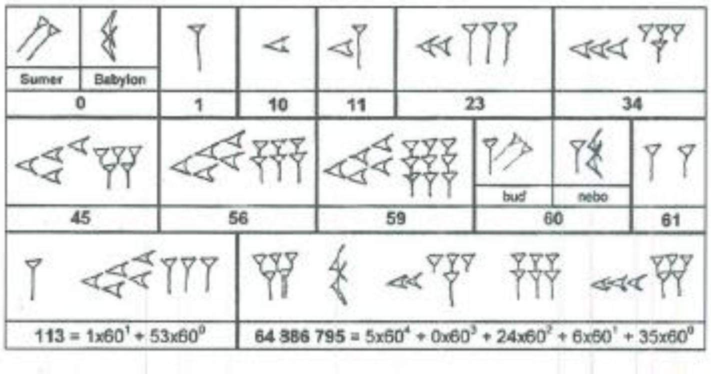
Přiklad zápisu čísla:

Sumerský zápis		Dnešní zápis
(2, 32)	$2 \times 60^1 + 32 \times 60^0$	152
(2, 44, 36)	$2 \times 60^2 + 44 \times 60^1 + 36 \times 60^0$	9876
(1, 10, 3; 30)	$1 \times 60^2 + 10 \times 60^1 + 3 \times 60^0 + \frac{30}{60}$	4203,5

Sumerové číslice zaznamenávali zaostřeným rákosovým stéblem do vlhké hlíny tabulky. Zpočátku kulatým koncem tak, že symbol pro jedničku byla elipsa 0 a pro desítku kroužek O. Později začali psát druhým koncem stébla. Tak se symbolem jedničky stal klín a desítky šikmý klín. Vyšší čísla vyjadřovali větším znakem, například velký znak 10 znamenal 100. Postupně se však tyto menší a větší symboly a všechna čísla vyjadřovala pomocí opakování symbolů 1 a 10. Později se znaky začaly hromadit do skupin po třech nebo čtyřech.

Původně se psalo shora dolů, později směrem zleva doprava, od řádů vyšších po nižší. S takovými zápisy poziční soustavy uměli Sumerové sčítat i odčítat, pracovat se zlomky.

[12] BEČVÁŘ, Jindřich, Martina BEČVÁŘOVÁ a Hana VYMAZALOVÁ. *Matematika ve starověku: Egypt a Mezopotámie*. Praha: Prometheus, 2003. Dějiny matematiky. ISBN 80-7196-255-4, str. 211



Obrázek č. 3
Mezopotámské číslice [13]

Umění písma a počítání od Sumerů převzali semitské národy Akkadi, Asýřani a Babyloňané.

2.4 PRAMENY

Jak již bylo zmíněno, dochovalo se velké množství mezopotámských tabulek. Prostudována je však jen jejich malá část. Tabulek obsahující matematické texty je rozluštěno asi 400. Tyto tabulky obsahují násobení, dělení, druhé i třetí mocniny a geometrické záznamy. Matematiku ovšem nacházíme i v textech hospodářských a astronomických.

Na počátku 20. stol. se zkoumáním mezopotámské matematiky velmi zabýval německý historik a matematik Oscar Neugebauer, jehož dílo vyvolalo další zájem o bádání. Jeho následovníky byli K. Vogel, S. Gandz, E. M. Bruins nebo T. Baqir.

2.5 VZDĚLÁVÁNÍ

V Mezopotámii stejně jako v Egyptě dbali na vzdělávání, především na výchovu budoucích písařů a úředníků. Školy byly součástí chámů, či paláců a vzdělávali se v nich pouze chlapci. Školy se nazývaly „domy tabulek“. Název je odvozen od hliněných tabulek, na které se ve školách psalo. Vyučovalo se zde čtení, psaní a počítání. Výuka byla založena na memorování a opisování tabulek. Učitelé byly oprávněni používat tělesné tresty. Také byli často obdarováváni rodinami svých žáků.

Dochovaný spis z období sumerské nadvlády popisuje život studenta v tehdejší škole.

[13] MAREŠ, Milan. *Příběhy matematiky: stručná historie královny vědy*. Příbram: Pistorius & Olšanská, 2008, 334 s. ISBN 978-80-87053-16-4.

„Z tohoto pramene víme, že hlavní náplní školy bylo počítání, sčítání o odčítání a sestavování soupisů. Žák opisoval na tabulky, které se pak vyhazovaly, příklad k procvičení.“ [14]

Dále také existovaly školy, ve kterých se vzdělávaly budoucí kněží, lékaři, vyšší úředníci, soudci či učitelé.

2.6 ARITMETIKA

Matematické úlohy souvisely s využitím v praxi a řešily praktické problémy. Zpravidla byly uspořádány podle vzájemných souvislostí a řešily se od nejjednodušších ke složitějším. Návody na výpočty úloh měli naučené s konkrétními čísly. Při výpočtu jiných hodnot postupovali stejně, pouze zaměnili daná čísla. Metody řešení úloh zapisovali slovně, nepoužívali žádnou symboliku.

Uměli sčítat i odčítat, a to buď z hlavy, nebo s využitím jednoduchých postupů. Tyto operace se prováděly stejně jako dnes po řádech. Sčítání bylo označováno slovy „dej dohromady“, odčítání slovy „odeber“ a výsledek slovy „dostaneš“. Sčítance byly zapsány na jednom řádku dál od sebe. Při odčítání se první zapsal menšenec a poté menšitel, stejně jako dnes, avšak původně to mezopotámští matematici značili opačně. Výsledek se psal na tentýž řádek na konci vpravo. Při výpočtech zapisovali pouze výsledky, ne postupy.

Příklad sčítání:

1 10 a 36 50	1 46 50
Jinak	
(1, 10, 50) (0, 36, 0)	(1, 46, 50)

V dnešním zápise:

$1 \times 60^2 + (10 \times 60^1 + 36 \times 60^1) + 50 \times 60^0 = 1 \times 60^2 + 46 \times 60^1 + 50 \times 60^0$

$3600 + (600 + 2160) + 50 = 3600 + 2760 + 50 = 6410$

Násobili stejně jako my dnes podle řádů. Běžně k tomu využívali tabulky pro násobení. Ty obsahovaly součiny 2 x 2 až 59 x 59. Dochované tabulky dělíme do třech kategorií.

[14] KOLMAN, Arnošt. *Dějiny matematiky ve starověku*. Přeložil Marcela HEDRLÍNOVÁ. Praha: Academia, nakladatelství Československé akademie věd, 1968, str. 44

Tzv. souborné tabulky jsou velkých rozměrů a obsahují několik násobících tabulek. Dalšími dvěma skupinami jsou tzv. samostatné tabulky. Ty obsahují v horním rohu určité číslo (násobitele), sloupec násobenců a jim odpovídající sloupec součinů. Samostatné tabulky typu I byly součástí větších celků. Na každé z nich se odkazuje na předcházející a následující tabulku. Naopak samostatné tabulky typu II byly tvořeny samostatně.

Dělení bylo složitější operací než násobení. Převádělo se na násobení převrácenou hodnotou. Tudíž místo podílu $a : b$, počítali součin $a \cdot \frac{1}{b}$. K hledání převrácených hodnot se opět využívaly tabulky, tzv. reciproké tabulky.

Například

n	$\frac{1}{n}$	Dnešní zápis	
(10)	(6)	$60 \cdot \frac{1}{10} = 6$	
(40)	(1, 30)	$60 \cdot \frac{1}{40} = \frac{3}{2} = 1{,}5$	$\frac{30}{60} = \frac{1}{2}$
(1,20)	(45)	$60 \cdot \frac{1}{80} = \frac{3}{4} = 0{,}75$	$\frac{45}{60} = \frac{3}{4}$

Na těchto tabulkách se ovšem nevyskytovaly převrácené hodnoty všech čísel. Převrácené hodnoty takových čísel hledali pomocí jednoduchého algoritmu. Mějme číslo n a hledejme jeho převrácenou hodnotu $\frac{1}{n}$. Číslo n si vyjádříme $n = x + y$, kde x je takové číslo, že jeho převrácenou hodnotu lze najít v reciproké tabulce. Potom $\frac{1}{n} = \frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x}\cdot y}$, součin $\frac{1}{x} \cdot y$ nalezneme v násobící tabulce. Takto vyhledali převrácené hodnoty čísel, jež nebyly obsaženy v tabulkách.

V Mezopotámii se dále využívaly tabulky druhých a třetích mocnin a odmocnin. Při výpočtech mocnin postupovali stejně jako při násobení. Tabulky součtů druhých a třetích mocnin daného čísla se uplatňovaly při řešení úloh vedoucích na kvadratické a kubické rovnice. Takovýchto tabulek byla spousta, proto se snažili vystačit s co nejméně tabulkami.

Hluboké znalosti matematiky v Mezopotámii dokazuje řešení úloh, které se dnes řeší lineárními rovnicemi. Avšak chyběla matematická symbolika a používala se geometrická terminologie. Neznámé veličiny byly označovány jako délka, šířka či výška. Poté byl součin dvou neznámých označován jako obsah či plocha a součin tří neznámých jako objem. Pracovali pouze s konkrétními numerickými hodnotami, avšak vždy měli na paměti obecný případ. To, co my dnes zaznamenáváme $x + y$, Babyloňané vyjádřili $6 + 3$, součet délky a šířky.

Těchto úloh není mnoho, navíc se uvádělo pouze zadání a výsledek, ale víme, že se většině byly použity zlomky.

Vyskytují se také úlohy vedoucí na kvadratické rovnice. Podle obecných návodů převáděli úlohy na tzv. kanonické tvary, které usnadnily řešení. Využívali při tom úpravu na úplný čtverec, tabulky převrácených hodnot a tabulky odmocnin. „Vytvoření metodiky řešení úloh vedoucích na kvadratické rovnice znamenal novou etapu rozvoje matematiky, dokládá jednak vysokou úroveň matematického myšlení, jednak počátky algebry.“ [15]

V Mezopotámii bylo velmi dobře rozvinuté finančnictví. Opět nám to dokazují dochované tabulky obsahující záznamy daní, smluv, úroků anebo dluhů. Roli finančních institucí plnily chrámy a paláce. „Babylonští lichváři počítali úrok ze 60 jednotek, a to 12 šekelů z 1 miny (tj. ze 60 šekelů) ročně, to znamená, že to byl 20%ní úrok.“ [16] Proto byly mnohé úlohy zaměřené právě finanční matematiku, především na výpočet úroku, základního kapitálu, rozdělní peněžní částky, dokonce i na složené úročení. Při výpočtu těchto typů úloh se vytvářely aritmetické a geometrické posloupnosti.

Na aritmetické posloupnosti vedli také příklady řešící rozdělení práce či majetku mezi více lidí. Z dochovaných úloh vedoucích dokonce na posloupnost geometrickou je příkladem zvětšování úsečky či součet prvních deseti členů.

2.7 GEOMETRIE

O babylonské geometrii máme jen málo důkazů. Je to způsobeno tím, že se geometrie neřadila k matematice, tuto skutečnost změnili až Řekové. Dalším problémem byl materiál, jelikož hliněné desky nejsou k rýsování vhodné. K běžným záznamům psali na hliněné vdolky nebo placky. Babyloňané ovšem geometrii znali a využívali především ve stavebnictví nebo zeměměřičství k vyměřování zavlažovacích systémů a plánování velkolepých staveb paláců, hradeb a zikkuratů. Také v astronomii, v níž vynikali, museli k pozorování hvězd znát úhly.

Aritmeticky uměli vypočítat obsahy rovinných útvarů i objemy těles. Již od nejstarších období znali čtverec a obdélník, jejich obsahy vyjadřovali součinem stran.

[15] BEČVÁŘ, Jindřich, Martina BEČVÁŘOVÁ a Hana VYMAZALOVÁ. *Matematika ve starověku: Egypt a Mezopotámie*. Praha: Prometheus, 2003. Dějiny matematiky. ISBN 80-7196-255-4, str. 265

[16] KOLMAN, Arnošt. *Dějiny matematiky ve starověku*. Přeložil Marcela HEDRLÍNOVÁ. Praha: Academia, nakladatelství Československé akademie věd, 1968, str. 53

Obsah rovnoramenného trojúhelníku odpovídal vzorci $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot r$, kde a je základna a r rameno. Obsah pravoúhlého trojúhelníku vzorci $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$, kde a, b jsou odvěsny trojúhelníku. S trojúhelníky zvládali i složitější úlohy, třeba rozdělení trojúhelníku úsečkou rovnoběžnou se základnou.

Počítaly se také příklady s lichoběžníky, nejen na výpočet obsahu, ale také na dělení lichoběžníku. Zabývali se i složitějšími útvary - například obsahy trojúhelníků či čtverců vepsaných do čtverce, útvary omezené úsečkami, dokonce i kruhovými oblouky.

Věděli také, že obvod kruhu a průměr kruhu má stabilní poměr, který se rovnal číslu 3. Později tuto hodnotu zpřesnili $\pi = 3 + \frac{7}{60} + \frac{30}{60^2} = 3{,}125$, což je odchylka menší než 0,6 % od $\pi = 3{,}1415$, objevenou Eukleidem okolo roku 300 př. n. l. Obvod kruhu tedy počítali vzorcem, který bychom dnes zapsali $o = \pi \cdot d$. K výpočtu obsahu kruhu měli vytvořený algoritmus.

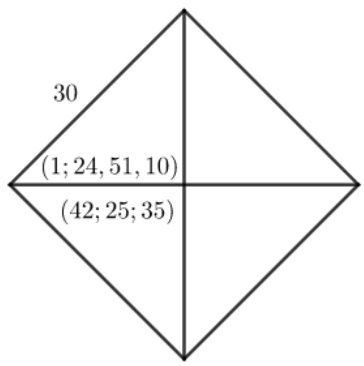
Vrcholem mezopotámské geometrie je znalost Pythagorovy věty, a to více něž 1 000 let před Pythagorem. Využívali ji výpočtu kvadratických rovnic. Věděli, že $x = p^2 - q^2$, $y = 2\,p\,q$, $z = p^2 + q^2$ odpovídá rovnici $x^2 + y^2 = z^2$ a trojúhelník o stranách x, y, z je pravoúhlý.

Z praktických úloh využívajících tuto znalost uveďme určení množství osiva potřebného na pole, jež má tvar rovnoramenného trojúhelníka, či k procvičování kružnic opsaných a vepsaných.

K výpočtu trojic pythagorejských čísel jim opět sloužily tabulky. Jmenujme například tabulku Plimpton 322 udávající 15 pythagorejských trojic.

Důkazem vysoké úrovně babylonské matematiky je tabulka YBC 7289, pocházející z doby krále Chammurapiho (1700 př. n. l), která zachycuje výpočet hodnoty čísla $\sqrt{2}$ s přesností na miliontiny.

Na tabulce je nakreslený čtverec se svými uhlopříčkami. Délka strany je (30) a uvnitř čtverce jsou uvedené hodnoty (1, 24, 51, 10) a (42, 25, 35), tedy tehdejší odhad $\sqrt{2}$ a délka uhlopříčky daného čtverce.



Obrázek č. 4

Výpočet hodnoty $\sqrt{2}$ [17]

(1; 24, 51, 10) = $1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \doteq 1{,}414\,212 = \sqrt{2}$

Výpočet úhlopříčky je roven (42; 25, 35).

(30) x (1; 24, 51, 10) = (42; 25, 35)

(42; 25, 35) ≐ 42, 4264

Prostorová geometrie se zabývala převážně praktickými úlohami, výpočty objemů či rozměrů různých staveb, tedy tělesy vyskytujícími se v běžném životě.

Objem kvádru se počítal podle vzorce $V = a \cdot b \cdot c$, obsah krychle $V = a^3$, kde a, b, c jsou hrany těles. Také objem hranolu a válce byl počítán jako součin obsahu základny a výšky. Dále se objevují příklady s klíny, kužely, jehlany.

[17] Kresleno v programu Geometrie-GeoGebra (vlastní tvorba).

3 ŘECKO

3.1 HISTORICKÝ VÝVOJ

Starověké Řecko je považováno za kolébku evropské kultury a vzdělanosti. Řecko se řadí mezi klasické otrokářské státy, na rozdíl od Egypta a Mezopotámie patřících do staroorientálních států.

Území Balkánského poloostrova bylo osídlováno dórskými, iónskými a aiolskými kmeny již ve 2. tis. př. n. l. V období velké řecké kolonizace Řekové osídlili oblast Středozemního a Černého moře. Takto velké území nebylo jednotné, ale spojoval je jazyk, náboženství a způsob myšlení. Nejedná se tedy o jeden stát, nýbrž o samosprávné městské státy, tzv. polis, které vznikaly v 8. - 6. stol. př. n. l., jako obchodní centra mezi Egyptem, Mezopotámií a Skythií, nacházela se v Ionii na západním pobřeží Malé Asie. Významnými městskými státy byly Milét, Korint, Athény nebo Sparta. V těchto státech se postupně přecházelo k otrokářské demokracii, což bylo velice pokrokovým vládním systémem.

V období Periklovy vlády v 5. stol. př. n. l. dosáhly Athény a otrokářská demokracie největšího rozkvětu. Všichni svobodní občané, mimo žen, otroků a přistěhovalců, měli stejná politická práva. Tato menšina se nejen podílela aktivně či pasivně na politickém dění, ale také zasedala v soudních porotách. Svobodní občané využívali práce otroků, protože otroctví bylo základem řecké společnosti, proto mohli se tak věnovat například filosofii. Důsledkem peloponéských válek ve 5. stol. př. n. l. byla otrokářská demokracie oslabena, s krizí se však vypořádala.

V tomto období mluvíme již o době železné. Zpracování železa i jiných kovů vedlo ke zvýšení životní úrovně, rozlišení řemesel, rozšíření obchodu, ale také válkám, v nichž byly využity dokonalejší zbraně. Platidlem se staly ražené mince.

Kultura se týkala širších vrstev obyvatelstva, nejen privilegovaných jako v Egyptě a Mezopotámii. Řekové vynikali v sochařství. Z mramoru a bronzu vytesávali pod vlivem Egypta sochy v nadživotní velikosti. Jmenujme nejslavnějšího sochaře Feidea, jehož socha Dia v Olympii byla považována za jeden ze sedmi divů starověkého světa. Zbylými čtyřmi starověkými divy světa jsou velkolepé stavby Artemidin chrám v Efesu, Mauzoleum v Helikarnassu, Rhódský kolos či Maják na ostrově Faru, které nám dokazují nejen velkolepé architektonické umění Řeků, ale také jejich matematické a především geometrické znalosti. Oblíbené bylo také řecké divadlo. Hrály se nejen mytologické příběhy, ale i příběhy z běžného života a politiky.

3.2 POČÁTKY MATEMATIKY

Rozvoj řemesel, stavitelství, zemědělství i stavba námořních lodí, všechny tyto oblasti vyžadovaly i rozvoj znalostí. Řekové přebírali znalosti od Egypťanů a Babyloňanů, jejichž kultury se díky obchodu prolínaly. O původu řecké matematiky již v této době vedli starořečtí myslitelé spory. Aristoteles zastával názor egyptského původu. Někteří souhlasili s převzetím praktických úvah, ale tvrdili, že teoretická matematika je řeckého původu. Jiní to však popírali, jelikož orientální matematika byla příliš praktická a málo vědecká.

Ovlivnění řecké matematiky egyptskými a babylonskými znalostmi nemůžeme popřít. Přestože jejich matematika byla převážně praktického rázu, objevovaly se i teoretické úvahy, právě tyto znalosti byly Řeky převzaty. Tak Řekové nemuseli matematiku objevovat od počátků, ale více rozvíjet, popisovat a zkoumat. Navíc se poprvé setkáváme s konkrétními jmény myslitelů.

Období mezi 6. – 4. stol. př. n. l. bývá označováno jako hrdinský věk řecké matematiky. Na svět se začalo nahlížet vědecky a vznikal přírodovědecký výklad světa. Nekladli si pouze otázku „Jak?“, ale především se hledali odpovědi na otázku „Proč?“ Své odpovědi na tuto otázku odůvodňovali za základě logického usuzování. V tomto období vznikaly první filosofické školy. Matematika měla velkou prestiž. S příchodem Platóna a Aristotela je tato doba ukončena.

Od 6. stol. př. n. l. byly otroky přepisovány knihy a výpočty. To později vedlo k oddělení aritmetiky a geometrie od praktické k teoretické. Praktická matematika udávala návody na řešení úloh. Teoretická matematika, jež zůstávala součástí filosofie, zdůvodňovala správnost řešení. Toto rozdělení společně s logickými metodami velmi urychlilo rozvoj matematiky. Bylo nutné přesné vymezení pojmů a používání důkazů, a to nejen v matematice, ale i u soudu či v politice, tudíž byla většina matematiků současně také politiky a rétory. Zpočátku se důkazy prováděly pouze pro některá tvrzení, později pro všechna. Řekové odstupovali od názornosti k logickým závěrům. Přecházeli se k abstraktnímu myšlení a začali vymezovat základní pojmy číslo, bod, přímka, rovina.

„I když antičtí Řekové udělali z účelového, v podstatně řemeslného počítání vědu, neznamená to, že by nepočítali docela rutinní praktické úlohy.“ [18] Praktická matematika se nazývá logistika a zahrnovala tzv. počtářské umění, tedy znalost soustavy čísel, provádění čtyř aritmetických operací za pomoci počítadla, tzv. abaku, počítání se zlomky a využití těchto

[18] MAREŠ, Milan. *Příběhy matematiky: stručná historie královny vědy*. Příbram: Pistorius & Olšanská, 2008, 334 s. ISBN 978-80-87053-16-4, str. 36

znalostí v praktických úlohách. Praktickou matematiku využívali stavitelé, zeměměřiči a řemeslníci. Později se přidalo řešení druhých a třetích odmocnin. Teoretická matematika byla protikladem logistice.

„Filosofové, kteří se zabývali matematikou, si začali uvědomovat význam matematiky jako samostatné vědy; její úkol, podobně jako i úkol ostatních věd, viděli v tom, že vysvětluje člověku jevy a pomáhá mu je tak dále cílevědomě využívat.“ [19] V samostatný obor se začala matematika vyčleňovat v polovině 6. stol. př. n. l.

Z této doby máme dochováno pouze malé množství literárních pramenů. Spoléháme tedy na díla pozdějších autorů, kteří popisují alespoň úryvky z dob utváření řecké matematiky. Záznamy o matematice se nacházíme také ve filosofických dílech, která obsahovala základní problémy matematiky. Nejstarším dochovaným dílem jsou Eukleidovy Základy ze 4. stol. př. n. l., které obsahují i matematické poznatky jeho předchůdců.

3.3 SOUSTAVA A NUMERACE

V 7. stol. př. n. l. užívali Řekové akrofonickou soustavu, ve které se čísla označovala počátečním písmenem jeho výslovnosti. Tuto soustavu převzali od Hebrejců. Jednotka se označovala I, což symbolizovalo prst, pět se značilo Π a symbolizovalo dlaň s pěti prsty. Tato symbolika prstu a dlaně nám dokládá oblíbenost počítání na prstech. Dále 10 Δ (deka), 100 H (hekaton), 1 000 X (khilioi) a 10 000 M (murioi).

1	I	ʼΙώτα
5	Π	Πέντε
10	Δ	Δέκα
100	H	ʽΗκατόν
1000	X	Ξίλιοι/χιλιάς
10 000	M	Μύριον

Obrázek č. 5
Řecká akrofonická soustava [20]

[19] KOLMAN, Arnošt. *Dějiny matematiky ve starověku*. Přeložil Marcela HEDRLÍNOVÁ. Praha: Academia, nakladatelství Československé akademie věd, 1968, str. 73

[20]MAZUR, Joseph. *Kde se vzaly symboly: stručná historie matematického zápisu od starověku k dnešku*. Přeložil Marek ČTRNÁCT. Praha: Knižní klub, 2017. Universum. ISBN 978-80-242-5820-1.

Těchto znaků nebylo moc a přehledně vyjadřovaly počet, ale k počítání ani k zápisu velkých čísel nebyly vhodné. Tak byla nahrazena soustavou alfabetickou, kterou převzali od Féničanů. Čísla jsou vyjádřena písmeny alfabety; 1, 2, 3, 4, 5 a 9 symbolizovalo α, β, γ, δ, ε a θ. Písmena, která představovala čísla 6, 7, 8 se dnes již nevyskytují. Po devítce následovaly násobky 10, poté násobky 100. Čísla se zapisovala opakováním a sčítáním. Například 15 se zapisovalo ι ε. U tisíců se k označení čísla připisovala vlevo nahoru nebo dolů malé písmeno jota ι, například ʹβ nebo ͵β.

Abecední číselná symbolika podnítila vznik mnemotechniky.

α	β	γ	δ	ϵ	ϛ	ζ	η	θ	ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϙ
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50	60	70	80	90

ρ	σ	τ	υ	ϕ	χ	ψ	ω	ϡ	͵α	͵β	͵γ
100	200	300	400	500	600	700	800	900	1 000	2 000	3 000

etc.

	β	γ	
M	M	M,	etc.
10 000	20 000	30 000	

Obrázek č. 6
Řecká alfabetická soustava [21]

Tento zápis čísel nebyl na území Řecka jediný, jednotlivá města měla své zvláštnosti. Matematici usilovali o zjednodušení číselného zápisu. Tato soustava také nebyla poziční a neužívala nulu, tudíž praktické počítání nebylo snadné. Vynalézaví Řekové tak v průběhu let začali početní úlohy řešit pomocí geometrie. Tak se stala geometrie pevnou součástí matematiky a začala se velmi rychle rozvíjet.

Geometrické řešení úloh bylo mnohdy jednoduché a rychlé. Náčrtky se zakreslovaly do písku na dvoře, ty významné se kreslily na papyrus. To vše souviselo s potřebou přesného rýsování a zapříčinilo nutnost logických důkazů. Geometrie také ovlivnila výklad příkladů, číslo bylo představováno úsečkou, součin dvou čísel byl symbolizován plochou (obdélníkem) a součin tří čísel objemem (kvádrem). Jelikož neexistuje záporná úsečka ani plocha, nepracovali se zápornými čísly.

[21] MAZUR, Joseph. *Kde se vzaly symboly: stručná historie matematického zápisu od starověku k dnešku*. Přeložil Marek ČTRNÁCT. Praha: Knižní klub, 2017. Universum. ISBN 978-80-242-5820-1.

3.4 MATEMATIKA

S malými čísly se s oblibou počítalo na prstech, což desítková soustava umožňovala. S velkými pomocí kamínků pokládaných na početní desku, na které se rozlišovaly řády čísel. Velké číslovky představovaly neurčité velké množství a nazývaly se „velmi mnoho". Početní deska byla postupem času nahrazena abakem. „O tom, že počítání na počitadle bylo základním početním způsobem, svědčí samotný řecký termín ,,počítat" – pséfidzein – což doslova znamená ,,klást kaménky". [22]

Na abaku bylo 10 dvojitých sloupců, do kterých se vkládaly kamínky, později speciální počítací známky. Také se rozlišovaly řády, od nižších zprava po vyšší doleva. Každý řád byl zastoupen dvěma sloupci. Při výpočtech se zapisoval pouze výsledek. Při řešení složitějších úloh si zapisovali i pomocné výsledky.

Při sčítání se psaly sčítanci i součet na řádek. Sčítání nemělo ani svůj znak a rovnítko bylo zastoupeno slovem „dohromady". Odčítali zpaměti, na prstech nebo za pomoci abaku. Násobili stejně jako Egypťané nebo zpaměti, od nejvyšších řádů. Sčítání, odčítání i násobení si Řekové ulehčovali vytvořenými tabulkami. To, jakým způsobem Řekové dělili, není zcela jasné.

Při počítání se zlomky se používaly kmenné zlomky $\frac{1}{n}$ (stejně jako v Egyptě), jimž byl přiřazen „doplňkový zlomek" $\frac{n-1}{n}$, jejichž součet je roven 1. Zlomky se vyskytovaly ve tvaru $\frac{m}{n}$ jako násobky kmenných zlomků. Dalším zápisem zlomků bylo psaní jmenovatele nad čitatel. Při řešení úloh zlomky převáděli na společného jmenovatele, krátili i rozšiřovali. Sčítání a odčítání kmenných zlomků opět usnadňovaly tabulky.

3.5 VZDĚLÁNÍ

V Athénách se vzdělávali pouze synové svobodných občanů od 7 let v soukromých školách. Podle ideálu výchovy – kalokagathia – měl být Řek všestranný. Nevyučovalo se tedy pouze čtení, psaní a počítání, ale také hra na nástroje, kreslení, historie a tělocvik. Žádná učebnice logistiky se nedochovala, což se nejspíš způsobeno počítáním zpaměti nebo pomocí abaku.

Učení probíhalo formou dialogu, který podněcoval bádání každého žáka.

[22] KOLMAN, Arnošt. *Dějiny matematiky ve starověku*. Přeložil Marcela HEDRLÍNOVÁ. Praha: Academia, nakladatelství Československé akademie věd, 1968, str. 78

Významní filozofové si zakládali své školy, aby šířili své myšlenky a vzdělávali následovníky, kteří budou v jejich dílech pokračovat. Nejvýznamnějšími školy z počátků řecké matematiky jsou Milétská a Pythagorejská škola.

3.6 MILÉTSKÁ ŠKOLA

Nejvýznamnější osobností z počátků řecké matematiky je Thales z Milétu (asi 620 – 545 př. n. l.), zakladatel filosofické materialistické školy. Je považován za prvního řeckého filosofa. Původně byl kupcem v Milétu, jednom z nejvýznamnějších obchodních center té doby. Na svých cestách navštívil Egypt, kde se seznámil s matematikou.

Matematické jevy se snažil logicky objasnit a dokázat. Důkazy prováděl pouhým přehýbáním a otáčením obrázků. Dnes je asi nejznámější důkaz tzv. Thaletovy věty, že úhel vepsaný do půlkruhu je pravý. Dále provedl důkazy následujících geometrických vět: průměr dělí kruh na dvě poloviny; v rovnoramenném trojúhelníku jsou úhly při základně shodné; vrcholové úhly jsou si rovné; dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se stranou a přilehlými úhly.

Řecká geometrie byla oproti egyptské rovinné geometrii mnohem více abstraktnější. Častěji se používaly obrazce, na nichž se zkoumaly vlastnosti trojúhelníku, kruhu a úhlů. Důležitým pojmem byla podobnost. Díky podobnosti trojúhelníků Thales změřil výšku pyramidy. Dokázal to pomocí stínu, který vrhala pyramida a jeho postava. Takto měřil také vzdálenost lodě od přístavu. Jako první použil kružítko a úhloměr.

Thales ale nebyl jen matematikem. Z filosofie ho nejvíce oslovily přírodní vědy. Získané přízvisko „otec vědy" je toho důkazem. Zabýval se i astronomií. Spočítal dráhu Slunce, dny rovnodennosti a sestavil kalendář o 365 dnech.

Thaletovým následovníkem byl jeho žák Anaximandros (asi 610 – 545 př. n. l.), autor díla „O přírodě". Zabýval se tvarem Země a došel k závěru tvaru kruhového válce, jehož průměr je třikrát větší než jeho výška. Za využití kolmé projekce sestrojil zeměpisné mapy Řecka, dokonce i Země. Zajímal se o vesmír a vytvořil model hvězdné oblohy. Také zhotovil sluneční hodiny.

V této době se hledaly odpovědi na otázku o podstatě bytí. Spojování přírodovědy a filosofie vedlo k řešení otázky pralátky (arché), z čeho vznikl svět. Monisté věřili, že se jedná o jednu látku. Představitelé Milétské školy se touto otázkou zabývali, došli však k rozdílným závěrům. Thales považoval za pralátku vodu. Pozorováním přírody zjistil, že je voda velmi tvárná, neboť se vyskytuje v kapalném, pevném i plynném skupenství. V této teorii také vycházel z egejské, řecké i mezopotámské mytologie, kde voda, moře a řeky, měly velký význam pro hospodářství zemí. Anaximandros považoval za základ existence apeiron, neohraničenou a neurčitou látku, která se stále mění a vytváří protiklady. Také předpokládal nekonečnost vesmíru. Anaximenés zase trvdil, že pralátkou je vzduch. Jiný přístup zvolil Pythagoras, který připisoval podstatu světa číslům a zákonům mezi nimi.

3.7 PYTHAGOREJSKÁ ŠKOLA

Pythagoras ze Samu (asi 580 – 500 př. n. l.) jako první použil slova filosofie a filosof. Mladý Pythagoras rád cestoval, po návratu domů se rozhodl stát filosofem a vyučoval na ostrově Samos. V jeho domovině vládl tyran Polykratés, kvůli němu nemohl Pythagoras sehnat žáky, dokonce sám svým žákům platil. Později přesídlil do italského Krotonu, kde za podpory místního vládce Milóna založil vlastní filosofickou školu.

Filosofická škola se věnovala přírodním vědám, převážně matematice, ale i jiným oblastem, např. lékařství. Na pythagorejské škole se také studovala geometrie, aritmetika, astronomie a hudba, tedy kvadrivium.

Mezi členy byly i ženy, s nimiž jednali rovnocenně, neboť diskriminační chování bylo zakázáno. Také Pythagorova žena Theano byla významnou matematičkou

Skupina měla jasně daná pravidla. Při vstupu do skupiny členové odevzdali všechen svůj majetek. Měli zakázáno jíst maso, pít víno a nosit vlněné oblečení. Členové měli přesně daný rozvrh a jejich nové poznatky se nesměly dostat na veřejnost. Pythagoras měl u svých žáků nesmírnou autoritu. Proto nevíme, zda autory některých objevů je sám Pythagoras, nebo jeho žáci.

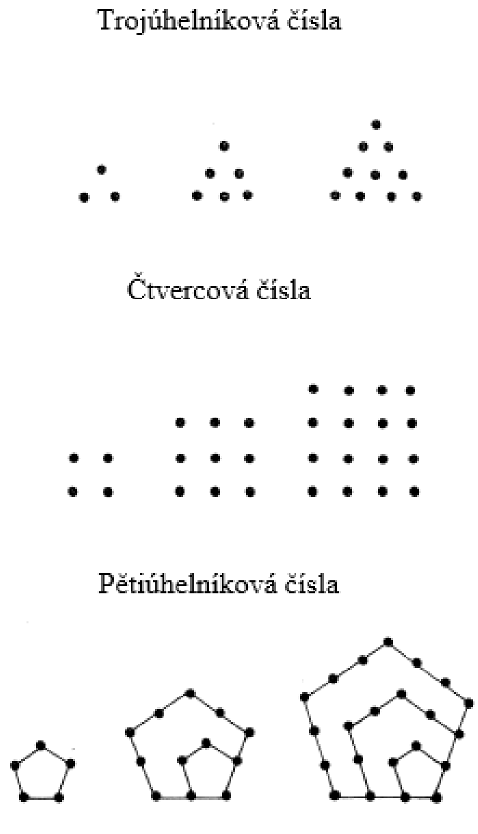
Skupina také ovlivňovala dění v Krotonu, byla současně i politickou stranou. Během lidových nepokojů bylo sídlo pythagorejců vypáleno. Pythagorejci byli z Krotonu vyhnáni, ale i poté pokračovali ve svých dílech a ještě po mnoho generací ovlivňovali řeckou matematiku.

Pythagorejci byli čísly naprosto fascinováni, což dospělo až k číselné mystice. Čísla byla pro Pythagorejce posvátná, tvrdili, že vše v přírodě lze zapsat pomocí celých čísel. V číslech hledali řád a harmonii. Jejich filozofie v podstatě říkala „všechno jsou čísla“. Dokonce i věci ztotožňovali s čísly a stavěli je do protikladů k věcem vnímaných smysly. Čísla měla různý význam a moc. Například sudá čísla byla ženská, naopak lichá mužská. Součet prvního ženského a prvního mužského čísla, pět, představoval manželství. Dokonalost byla symbolizována desítkou, jelikož $10 = 1 + 2 + 3 + 4$. Tedy součet základní jednotky (bodu), přímky (2 body), roviny (3 body) a prostoru (4 body). Z obrazců Pythagorejce nejvíce zaujal pravidelný pětiúhelník, neboť jeho konstrukce byla považována za úspěch.

Věnovali se kosmologii, kde opustili názor geocentrismu, tedy názoru, že Země je středem vesmíru. Představovali si, že středem vesmíru je oheň, kolem něhož se pohybuje Země, Slunce, Měsíc, hvězdy, pět planet (Merkur, Venuše, Mars, Jupiter a Saturn) a Protizemě, ta byla vymyšlena, aby vesmírných těles bylo dohromady dokonalých deset. Dokonalost vesmírů také podtrhuje jeho tvar koule. V oblasti dnešní fyziky se kromě kosmologie zabývali také světlem, jeho šířením, odrazem a lomem.

3.7.1 FIGURÁLNÍ ČÍSLA

Pythagorejci používali figurální čísla. Ta byla interpretována geometricky. Původně byla čísla zastoupena hromádkou kaménků, později je seskupovaly do různých geometrických tvarů. Třídění čísel do určitých tvarů umožnilo pochopení některých matematických poznatků. Bod definovaný jako jednotka s určenou polohou byl nedělitelný a byl chápán jako základní jednotka aritmetiky i geometrie. Základní byla čísla „trojúhelníková“, která spojováním tvořila čísla „čtvercová“, „pětiúhelníková“ atd. Tato čísla tvořila posloupnosti.



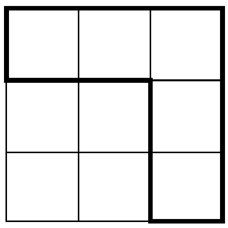
Obrázek č. 7

Figurální čísla [23]

Tzv. „tělesná čísla“ neboli součin tří činitelů vytvářela krychle. Čísla v součinném tvaru se dělila na „přímková“ a „plošná“, tedy nerozložitelná prvočísla a obdélníky nebo čtverce, které lze dále rozložit. Díky tvaru figurálního čísla můžeme rozpoznat jeho původ, tedy zda číslo vzniklo sčítáním nebo násobením. Rozlišovala se párová a nepárová čísla, tedy sudá a lichá.

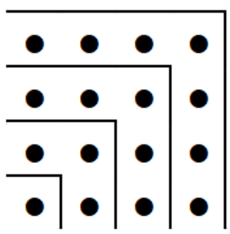
Každý bod měl okolo své pole. Takže se čísla nezobrazovala pouze body, ale také pomocí čtvercových polí, či dokonce spojením obou možností.

S vývojem matematiky pozbyla „figurální čísla“ významu. Přesto se čtvercová čísla stále používala, neboť jsou vhodná k výpočtům ploch a objemů. Pojem „gnómon“, původně označující krajní připojenou část ke čtvercovému číslu, měl později využití při zvětšování obrazců za využití podobnosti, k objasnění dalších vlastností čísel a posloupností.



Obrázek č. 8
Gnómon [24]

Například vlastnost, kterou bychom dnes zapsali $(2n - 1) + (2n + 1) = 4n$, tedy součet dvou po sobě jdoucích lichých čísel je dělitelný čtyřmi. Takovéto posloupnosti $1 + 3 = 4 \cdot 1$; $3 + 5 = 4 \cdot 2$ atd. Pythagorejci dokazovali nákresem.



Obrázek č. 9
Posloupnost v gnómonu [25]

[23] Sborníky z edice „dějiny matematiky“ vydávané nakladatelstvím PROMETHEUS.(Články J. Bečváře „*Hrdinský věk řecké matematiky*“ ve sbornících *Historiematematiky I, II* apod.)
[24] Vytvořeno v programech Excel a Malování (vlastní tvorba)
[25] Vytvořeno v programech Excel a Malování (vlastní tvorba)

Druhé mocniny, tedy rovnost $n^2 = n + 2 \cdot [1 + 2 + \dots + (n + 1)]$, znázorňovali čtvercovými čísly. Tuto rovnost nazývali tzv. stadion.

Například $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$

$$\begin{array}{l} 1 - 2 - 3 - 4 - 5 \diagdown \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 6 \\ 1 - 2 - 3 - 4 - 5 \diagup \end{array}$$

Znali také dokonalá čísla. Jedná se o čísla, která jsou součtem svých dělitelů. Například $6 = 1 + 2 + 3$ nebo $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

3.7.2 MATEMATIKA PYTHAGOREJCŮ

Pythagorejci používali pouze kladná čísla, ale podrobně se také zabývali teorii čísel. Při odčítání se mohli dostat k úsečce bez velikosti a v průběžných výpočtech jim to nedělalo potíže. Záporné hodnoty tedy sice rozpoznali, ale nedokázali pojmenovat. Při zkoumání dělitelnosti objevili prvočísla. Ta oddělovali od čísel složených a vzájemně nesoudělných. Rozlišovala se čísla lichá a sudá, k nimž se však neřadila *1* a *2*, která se považovala za základ. Vytvořili přehled aritmetického, geometrického a harmonického průměru. Ve svém sídelním městě zavedli systém měr a vah.

Pythagorejci se věnovali i teorii poměrů a úměr, kterou později dokončil Eukleides. Poměry dnes zapisujeme pomocí zlomků. Úměry rozumíme zlomky, které jsou si rovny, tedy zlomky v rozšířeném nebo zkráceném tvaru. Opět se setkáváme s geometrickou interpretací, tentokrát v podobě podobných obdélníků o stranách a, b a p, q. Jejich poměr je vyjádřen $a : b = p : q$. Například úměra 10 : 2 = 30 : 6. Určit, zda jsou si dva poměry rovny, nebylo pro Řeky velkým problémem.

Speciálním případem úměry je tzv. zlatý řez, tedy poměr 1 : 0,618, jímž se zabýval Eukleides. Je to nekonečný ideální poměr dvou velikostí. Konstrukce zlatého řezu se prováděla v pravidelném pětiúhelníku, jehož uhlopříčky jsou v poměru zlatého řezu. Zlatým řezem se v historii zabývala spousta matematiků, protože je považován za estetický ideál, využíval se v architektuře. Termín zlatý řez poprvé použil až v renesanci Leonardo da Vinci.

Řekové neměli pouze geometrické, ale i aritmetické úměry ve tvaru $a - b = p - q$. Při hledání x k daným veličinám a, b v rovnosti $a - x = x - b$, došli k aritmetickému průměru $x = \frac{a+b}{2}$.

Věnovali se také hudební úměře. Hudbu úzce spojovali s matematikou. Již Las z Hermionu, příslušník milétské školy, prováděl akustické pokusy. Z jeho poznatků došli Pythagorejci k učení „o harmonii čísel“. Zkoumali vztah mezi strunou a tónem, které tvoří harmonický akord pouze tehdy, pokud jsou délky strun v určitém poměru celých čísel. Podle harmonického principu se oktáva, kde byly struny v poměru 1 : 2, dělila na kvartu a kvintu, v poměrech 3 : 4 a 2 : 3. Platí rovnost $\frac{1}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}$. Hudební úměrou byla čísla 12, 9, 8 a 6. která jsou v poměru $\frac{6}{12} = \frac{8}{12} \cdot \frac{9}{12}$. Navíc číslo 9 je aritmetickým průměrem čísel 12 a 6 a číslo 8 je jejich harmonickým průměrem. Harmonický průměr čísel a, b se počítal $\frac{2ab}{a+b}$, tedy $\frac{144}{18} = 8$. K harmonickému průměru došli při hledání x v rovnici $\frac{1}{a} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{b}$.

3.7.3 GEOMETRIE

V geometrii se věnovali planimetrii. Zkoumanými rovinnými útvary byly trojúhelníky, čtyřúhelníky, mnohoúhelníky, kružnice i kruh. Začali se také zajímat o rovnoběžky. Byla dokázána věta o součtu vnitřních úhlů trojúhelníka.

Stereometrie nedosáhla na úroveň planimetrie, přestože se Pythagorejci podrobně věnovali studiu těles. Zabývali se pravidelnými mnohostěny a objevili dvanáctistěn a dvacetistěn. Zkoumali vlastnosti koule, avšak neznali poměr mezi povrchem a plochou hlavní kružnice.

3.7.4 PYTHAGOROVA VĚTA

Dnes asi nejznámější dílo pythagorejské školy je věta, která nese jméno svého zakladatele. „Pythagorova věta: V každém pravoúhlém trojúhelníku je druhá mocnina délky přepony rovna součtu druhých mocnin délek obou odvěsen. Označíme-li délky odvěsen a, b, délku přepony c, tedy platí

$$c^2 = a^2 + b^2.$$“ [26]

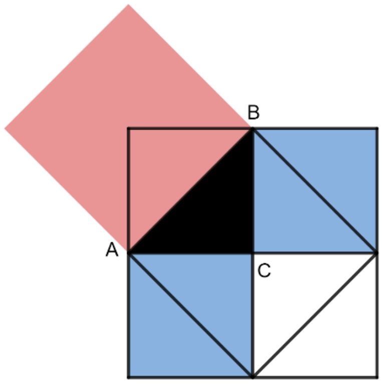
Známá byla již dříve, v Egyptě i Mezopotámii, ale až Pythagoras dokázal její pravdivost. Jako výraz vděčnosti za tento objev obětoval bohům sto volů. Právě důkazy jsou největším pythagorejským zvratem v matematice. Od této doby je důkaz základním pilířem matematiky a platí „Nemáš důkaz? Pak nemáš nic.“ [27]

---

[26] POLÁK, Josef. *Didaktika matematiky: jak učit matematiku zajímavě a užitečně*. Plzeň: Fraus, 2014, 431 s. ISBN 978-80-7238-449-5. str. 300

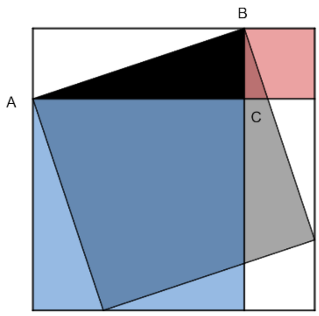
[27] MAREŠ, Milan. *Příběhy matematiky: stručná historie královny vědy*. Příbram: Pistorius & Olšanská, 2008, 334 s. ISBN 978-80-87053-16-4., str. 45

O tom, jak původní důkaz vypadal, můžeme dnes jen polemizovat. Jednou z možností je odůvodnění z dláždění, které se skládá ze stejných rovnoramenných pravoúhlých trojúhelníků. Z obrázku je vidět, že obsah čtverce sestaveného nad přeponou AB je dvakrát větší než obsah čtverce sestaveného nad odvěsnou AC, nebo BC.



Obrázek č. 10
Důkaz Pythagorovy věty u rovnoramenných trojúhelníků [28]

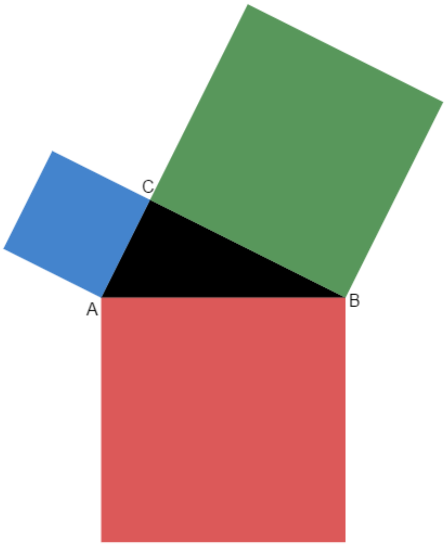
Důkaz Pythagorovy věty je zřejmý také z následujícího obrázku. Jedná se o důkaz věty v obecném případě. Opět vidíme, že obsah čtverce sestaveného nad přeponou AB je větší než obsah čtverců sestavených nad jeho odvěsnami AC a BC.



Obrázek č. 11
Důkaz Pythagorovy věty v obecném případě [29]

V Eukleidových Základech se vyskytuje ještě jiný důkaz této věty. Ten ale také souvisí s pozorováním geometrických objektů. Z tohoto důkazu je patrná dnes stále používaná věta: Součet obsahů čtverců nad odvěsnami trojúhelníka je roven obsahu čtverce nad přeponou.

[28] Kresleno v programu Geometrie-GeoGebra (vlastní tvorba)
[29] Kresleno v programu Geometrie-GeoGebra (vlastní tvorba)



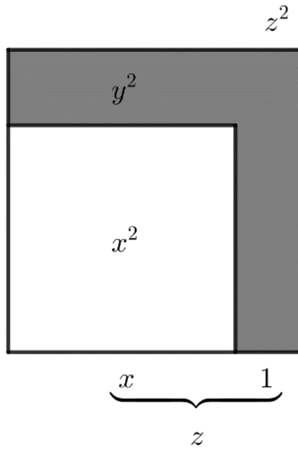
Obrázek č. 12
Důkaz Pythagorovy věty [30]

Existuje však spousta jiných důkazů Pythagorovy věty, které byly vymyšleny mnoho staletí po Pythagorovi. „Věta má více publikovaných důkazů než kterákoli jiná matematická poučka“ [31]

Trojici přirozených čísel, pro niž platí rovnost $x^2 + y^2 = z^2$, nazýváme pythagorejská trojice. Tato tři čísla tvoří strany pravoúhlého trojúhelníka, pro nějž platí Pythagorova věta. Nejznámější a nejjednodušší pythagorejskou trojicí jsou čísla 3, 4 a 5. Takovými trojicemi se zabývali již Egypťané a Řekové. Za objevitele obecných pravidel pro nalezení pythagorejských trojic je považován Pythagoras, na něj později navázal Platón.

Pythagoras došel k této trojici čísel: $x = 2p^2 + 2p$, $y = 2p + 1$, $z = 2p^2 + 2p + 1$, kde p je libovolné přirozené číslo. Trojice je odvozena ze čtvercových figurálních čísel. Velký čtverec je roven z^2, malý čtverec x^2 a gnómon y^2, tedy krajní připojenou část ke čtverci velikosti x^2. Mějme gnómon šířky 1, poté $z = x + 1$. Gnómon (y^2) je lichý, tím pádem i y musí být liché, tudíž $y = 2p + 1$ a $y^2 = 4p^2 + 4p + 1$. Odečteme-li od gnómonu 1 a vydělíme dvěma dostaneme $x = 2p^2 + 2p$ a $z = 2p^2 + 2p + 1$. Dalšími pythagorejskými trojicemi jsou 12, 5, 13 nebo 24, 7, 25.

[30] Kresleno v programu Geometrie-GeoGebra (vlastní tvorba)
[31] PICKOVER, Clifford A. *Matematická kniha: od Pythagora po 57. dimenzi : 250 milníků v dějinách matematiky*. Přeložil Petr HOLČÁK. Praha: Dokořán, 2012, 542 s. Zip, sv. 29. ISBN 978-80-7363-368-4., str. 40



Obrázek č. 13
Pythagorejská trojice odvozená ze čtvercových figurálních čísel [32]

3.7.5 NESOUMĚŘITELNOST

Asi za největší objev Pythagorejské školy je považována nesouměřitelnost. Pod tímto pojmem se ukrývají úsečky, které nemohou být vyjádřeny poměrem celých čísel. Původně se domnívali, že všechny úsečky jsou souměřitelné, tedy mají společnou míru. Společnou mírou úseček a, b je měrná jednotková úsečka c, pro která platí $a = p \cdot c$ a $b = q \cdot c$. Tedy $\frac{a}{p} = \frac{b}{q}$.

Pythagorejci se tedy přibližovali iracionálním číslům. Řekové měli pro nesouměřitelnost hned tři pojmy: asymetron (nelze najít společnou míru), areton (nelze vyjádřit celými čísly) a alogon (nelze vyjádřit poměrem). Pojem iracionální čísla, odvozený od latinského slova racio, znamenající poměr, ještě neexistoval.

Skutečnost, že poměr nelze vyjádřit v celých číslech, byla pro Pythagorejce velkým překvapením. „Zjištění, že některé úsečky nemají společnou míru, způsobilo zhroucení původní pythagorejské představy o vzájemném vztahu čísel a geometrických veličin.“ [33] Proto také tento objev tajili. Vždyť doposud pokládali celá čísla za základ všeho. Objevitelem nesouměřitelnosti byl pravděpodobně Hippasos z Metapontu. Za tento objev a jeho vyzrazení byl podle legendy ostatními pythagorejci potrestán utopením v moři.

[32] Kresleno v programu Geometrie-GeoGebra (vlastní tvorba)
[33] In: Jindřich Bečvář (editor); Eduard Fuchs (editor): Historie matematiky. I. Seminář pro vyučující na středních školách, Jevíčko, 19.8.-22.8.1993, Sborník. (Czech). Brno: Jednota českých matematiků a fyziků, 1993, str. 62

Vyvolalo to tzv. první krizi matematiky, a proto začali hledat nové základy. Východiskem z krize se stala tzv. řecká geometrická algebra. Přešlo se ke geometrickému chápání veličin. Geometrie byla podřízena aritmetice. Veličiny byly znázorňovány jako délky, obsahy a objemy, ne jako čísla. Platil zákon homogenity, podle něj bylo možné sčítat a odčítat pouze veličiny ve stejném rozměru, tedy délky, obsahy a objemy. Při vynásobení délek vznikl obsah, při vynásobení délky a obsahu vznikl objem.

Nesouměrnost souvisí i s Pythagorovou větou, vždyť se v ní běžně vyskytuje $\sqrt{2}$. Pythagorova věta udává návod, jak vypočítat velikost přepony, když známe velikosti odvěsen. Pokud byly obě odvěsny rovny 1, poté $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, ale nedařilo se najít poměr dvou celých čísel, jelikož strana a uhlopříčka čtverce jsou nesouměřitelné. „Nemožnost vyjádřit $\sqrt{2}$ poměrem dvou celých čísel měla za následek nejen hledání přibližné hodnoty $\sqrt{2}$, ale také snahu o důkaz této nemožnosti.“ [34] Ten nacházíme o několik století později v Eukleidových Základech.

Pythagorejci posunuli matematiky o obrovský kus kupředu. „To všechno v soustavě, která byla všechno, jen ne pohodlná.“ [35]

---

[34] KOLMAN, Arnošt. *Dějiny matematiky ve starověku*. Přeložil Marcela HEDRLÍNOVÁ. Praha: Academia, nakladatelství Československé akademie věd, 1968, str. 94

[35] MAREŠ, Milan. *Příběhy matematiky: stručná historie královny vědy*. Příbram: Pistorius & Olšanská, 2008, 334 s. ISBN 978-80-87053-16-4., str. 44

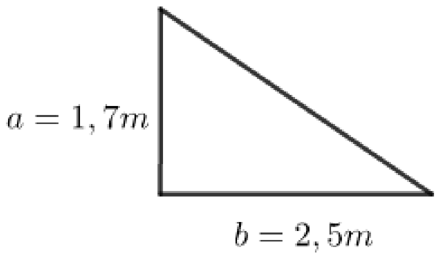
PRAKTICKÁ ČÁST

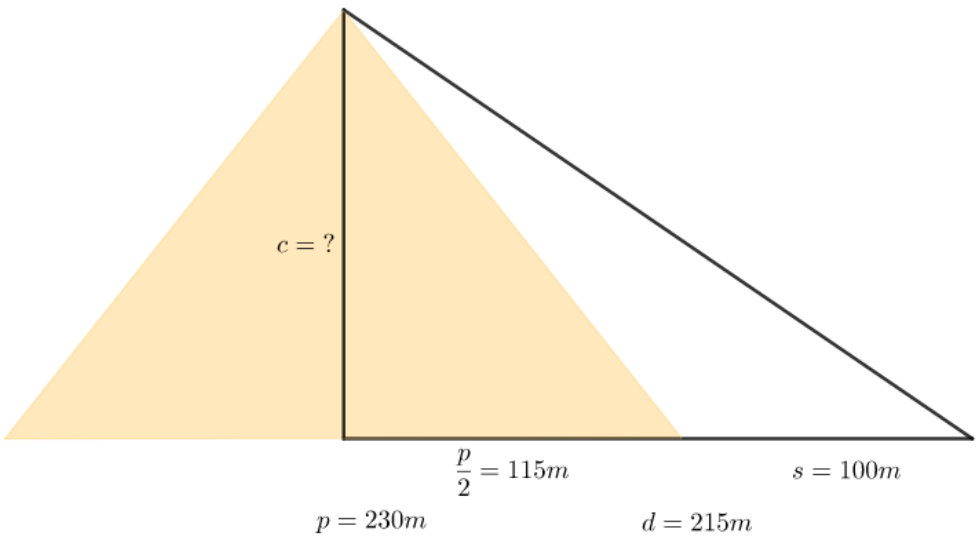
4.1 JAK THÁLES ZMĚŘIL PYRAMIDU?

Při měření výšky pyramidy využil Tháles podobnosti trojúhelníků. Použil k tomu velikosti stínu své postavy a pyramidy.

Jak je vysoká Cheopsova pyramida v Gíze, která má délku základny 230 m a vrhá stín dlouhý 100 m? Když víme, že Tháles byl vysoký 1,7m a jeho stín byl dlouhý 2,5 m.

Thaletova výška	a = 1,7 m
Thaletův stín	b = 2,5 m
Základna pyramidy	p = 230 m
	$\frac{p}{2}$ = 115 m
Stín pyramidy	s = 100 m
Velikost odvěsny	d = 215 m
Výška pyramidy	c = ? m





Obrázek č. 14
Tháles a pyramida [36]

[36] Kresleno v programu Geometrie-GeoGebra (vlastní tvorba)

$$\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$$

$$c = \frac{a \cdot d}{b}$$

$$c = \frac{1{,}7 \cdot 215}{2{,}5}$$

$$c = 146{,}2$$

Cheopsova pyramida je vysoká 146,2 m.

4.2 ÚLOHA O PYTHAGOROVÝCH ŽÁCÍCH

,,Ctihodný Pythagore, potomku helikónských múz, řekni mi , prosím tě, kolik v tvém domě na zápasišti vědy dlí žáků horlivě usilujících o odměnu vítězi?"

,,Chci ti to říci Polykrate. Pohleď, polovina se zabývá krásnou matematikou, čtvrtina usiluje o poznání nesmrtelné přírody, sedmina pak setrvává zcela v mlčení přemýšlejíc to, co vyslechla. Připočti k tomu tři ženy, z nichž Theano vyniká; tolik jich vedu ke kněžství pierských múz." [37]

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{7} + 3 = x$$

$14\,x + 7\,x + 4\,x + 84 = 28\,x$

$3\,x = 84$

$\underline{\underline{x = 28}}$

Pythagoras vedl 28 žáků, z nichž se 14 zabývalo matematikou, 7 poznávalo přírodu, 4 mlčky přemýšleli o nových znalostech a 3 byly ženy.

4.3 DŮKAZ PYTHAGOROVY VĚTY POMOCÍ HRY TETRIS

Je dán trojúhelník *ABC* o stranách $a = 4\ cm$, $b = 3\ cm$, $c = 5\ cm$.

Pomocí Pythagorovy věty ověřte, že je trojúhelník *ABC* pravoúhlý.

[37] POLÁK, Josef. *Didaktika matematiky: jak učit matematiku zajímavě a užitečně*. Plzeň: Fraus, 2014, 431 s. ISBN 978-80-7238-449-5. str. 151

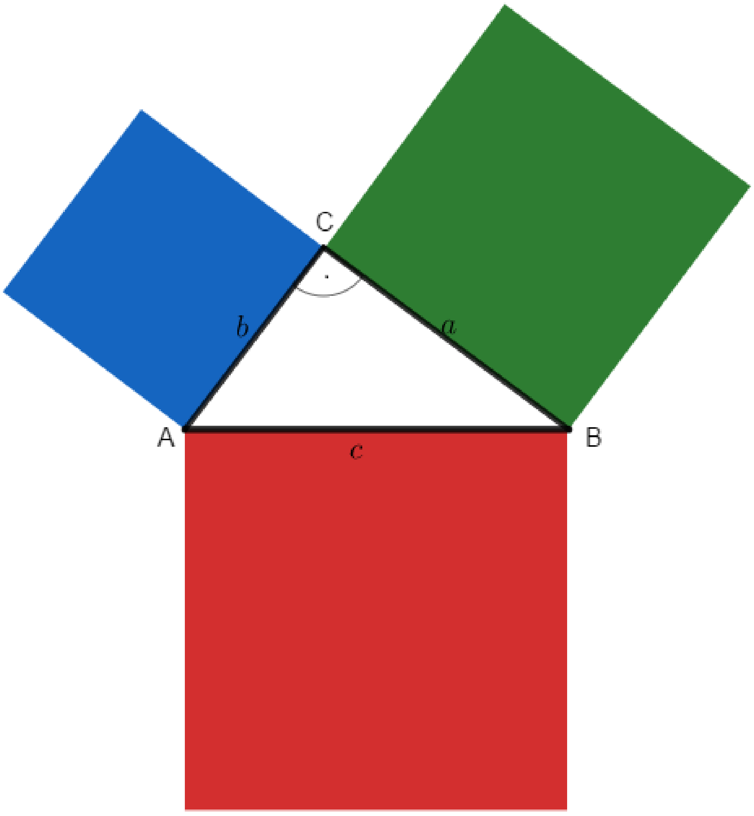
$a^2 + b2 = c2$

$4^2 + 3^2 = 5^2$

$16 + 9 = 25$

$25 = 25$

Ano, trojúhelník *ABC* je pravoúhlý. Součet obsahů čtverců sestavených nad odvěsnami je roven obsahu čtverce nad přeponou.

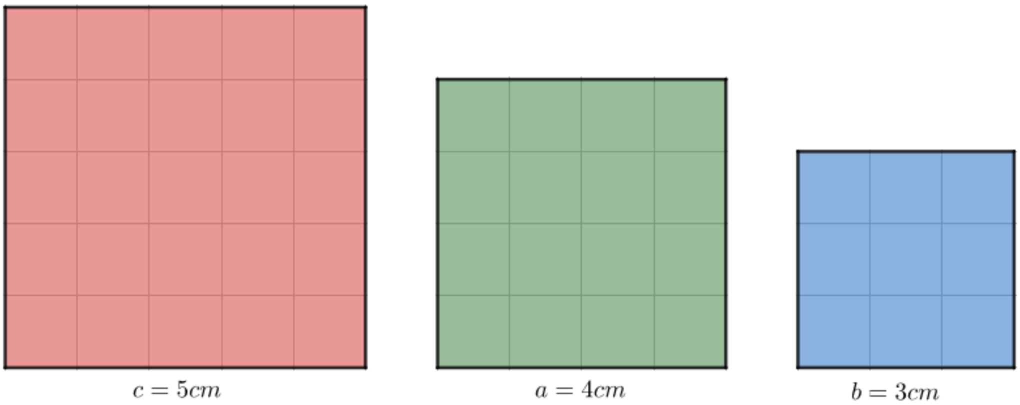


Obrázek č. 15
Pravoúhlý trojúhelník ABC [38]

Nyní si rovnost součtu obsahů čtverců sestavených nad odvěsnami a obsahu čtverce nad přeponou dokážeme hrou Tetris.
Hra Tetris je řazena mezi nejúspěšnější a nejslavnější počítačové hry. Jejím cílem je skládat do sebe kostky různých tvarů tak, aby žádné místo nezůstalo prázdné.

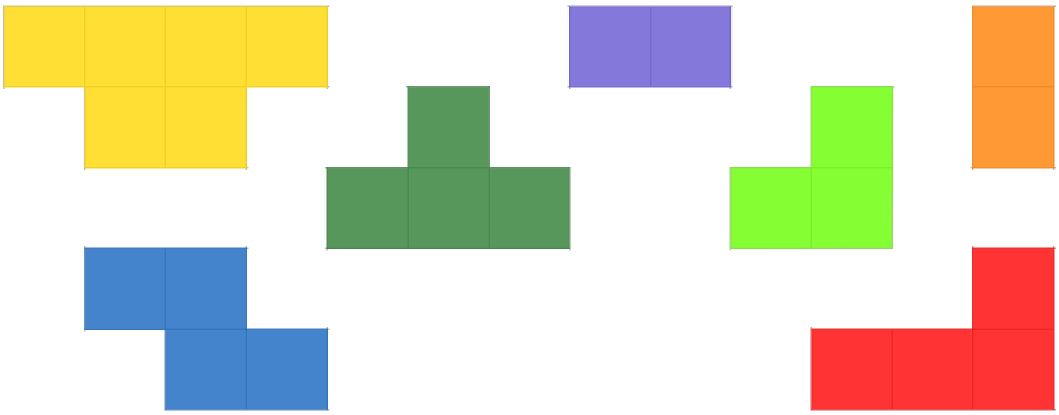
[38] Kresleno v programu Geometrie-GeoGebra (vlastní tvorba)

Čtverec nad přeponou má obsah 25 cm^2. Skládá se tedy z 25 čtverečků o obsahu 1 cm^2. Čtverce nad odvěsnami mají obsahy 16 cm^2 a 9 cm^2, skládají se tedy z 16 a 9 čtverečků s obsahem 1 cm^2, což lze vidět na následujícím obrázku.



Obrázek č. 16
Čtverce sestrojené nad přeponou a odvěsnami trojúhelníku ABC [39]

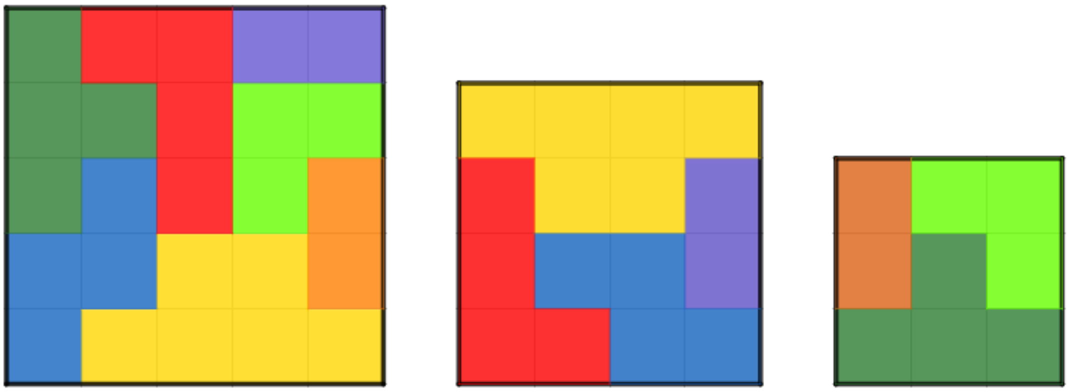
Čtverce budeme vyplňovat útvary z následujícího obrázku. S těmito útvary můžeme libovolně rotovat.



Obrázek č. 17
Tvary hry Tetris [40]

[39] Kresleno v programu Geometrie-GeoGebra (vlastní tvorba)
[40] Kresleno v programu Geometrie-GeoGebra (vlastní tvorba)

Velký čtverec (sestrojený nad přeponou) bude obsahovat všechny útvary. Stejné útvary použijeme dohromady k vyplnění obou malých čtverců (sestavených nad odvěsnami).



Obrázek č. 18
Důkaz Pythagorovy věty pomocí hry Tetris [41]

Po vyplnění čtverců vidíme, že obsah čtverce sestrojeného nad přeponou je opravdu roven součtu obsahů čtverců nad odvěsnami.

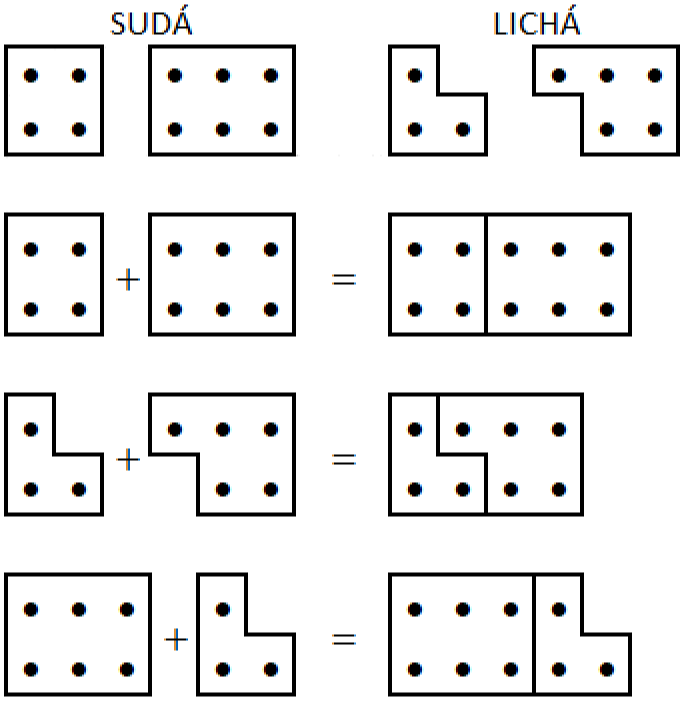
4.4 FIGURÁLNÍ ČÍSLA

Figurální čísla nám mohou sloužit jako názorná pomůcka, která ulehčí pochopení některých matematických jevů. Příklady jsou inspirovány ze sborníku . *Historie matematiky. I. Seminář pro vyučující na středních školách* . [42]

4.4.1 SUDÁ A LICHÁ ČÍSLA

Sudá figurální čísla je možné seskupit do tvaru obdélníku nebo čtverce. U lichých čísel to možné není, vznikají různé mnohoúhelníky.
Pokud je tedy možné součet čísel srovnat do obdélníku či čtverce, jedná se o číslo sudé. Naopak pokud není možné takovéto srovnání, jedná se o číslo liché.

[41] Kresleno v programu Geometrie-GeoGebra. (vlastní tvorba)
[42] Příklady jsou inspirovány ze sborníku: BEČVÁŘ, Jindřich, FUCHS, Eduard. *Historie matematiky. I. Seminář pro vyučující na středních školách*, Jevíčko, 19.8.-22.8.1993, Sborník. (Czech). Brno: Jednota českých matematiků a fyziků, 1993. pp. 20–107. Dostupné z https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/400590



Obrázek č. 19
Součet figurálních čísel [43]

- Pokud sčítáme dvě sudá čísla, vzniká číslo sudé.
- Pokud sčítáme dvě lichá čísla, vzniká číslo sudé.
- Pokud sčítáme suché a liché číslo, vzniká číslo liché.

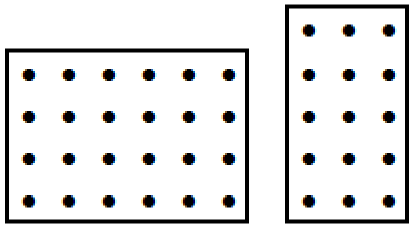
4.4.2 DĚLITELNOST ČÍSEL

Srovnání čísel do obdélníků a čtverců nám znázorní, zda jsou čísla soudělná či nesoudělná. Pokud čísla srovnáme do obdélníků o stejně velké straně tak, aby tato strana byla největší, získáme největšího společného dělitele.

a) Mějme čísla 24 a 15.

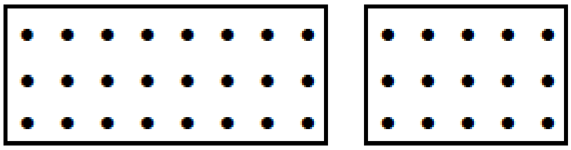
Čísla jsou uspořádána do obdélníkového tvaru, ale nemají stejně dlouhou stranu.

[43] Vytvořeno v programech Excel a Malování (vlastní tvorba)



Obrázek č. 20
Figurální čísla 24 a 15 [44]

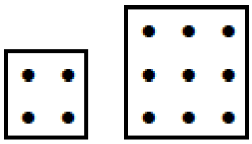
Po přerovnání čísel do jiných obdélníkových tvaru o stranách 3, vidíme největšího společného dělitele čísel 24 a 15, kterým je 3.



Obrázek č. 21
Největší společný dělitel čísel 24 a 15 [45]

b) Mějme čísla 4 a 9.

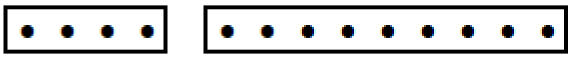
Čísla jsou uspořádána do čtvercového tvaru, ale nemají stejně dlouhou stranu.



Obrázek č. 22

Figurální čísla 4 a 9 [46]

Po přerovnání čísel zjistíme, že je lze uspořádat pouze do obdélníků se společně dlouhou stranou o velikosti 1. Jedná se tedy o čísla nesoudělná.



Obrázek č. 23
Nesoudělná čísla 4 a 9 [47]

[44] Vytvořeno v programech Excel a Malování (vlastní tvorba)
[45] Vytvořeno v programech Excel a Malování (vlastní tvorba)
[46] Vytvořeno v programech Excel a Malování (vlastní tvorba)
[47] Vytvořeno v programech Excel a Malování (vlastní tvorba

ZÁVĚR

Cílem mé bakalářské práce bylo zabývat se základními otázkami vývoje matematiky ve starověku. V teoretické části jsem se zaměřila na dějiny matematiky ve starověkém Egyptě, Mezopotámii a Řecku. V teoretické části je uveden souhrn znalostí z matematiky v tomto období.

Využití matematiky ve starověku vyplynulo z praktických potřeb jako je zavlažování, stavitelství, zeměměřičství, účetnictví, vybírání daní, vojenství, měření času a vytvoření kalendářů, podle kterého se řídila sklizeň. Později se ale starověcí učenci začali věnovat i matematice samotné. Již staří Řekové vytvořili základy matematické teorie a začali své poznatky logicky dokazovat. Dnes můžeme jen žasnout nad jejich znalostmi, nad tím, co dokázali. A to ne vždy v pohodlných číselných soustavách, s ideálními materiály k záznamu počítání či rýsování a bez pomůcek, které využíváme dnes.

V praktické části uvádím úlohy vhodné pro žáky základních škol inspirované starověkým Řeckem. Jsou zde zařazené příklady početní, ale také důkazové, které jsou pojaty zábavnou formou tak, aby byly pro žáky nejen přínosné, ale i zábavné.

Bakalářská práce může sloužit jako inspirace k prolínání matematiky a dějepisu. Obohacení vyučovacích hodin matematickou historií a historickými poznámkami a úlohami může učitel hodiny matematiky zpestřit a motivovat žáky pro učení se matematice. Zkušenosti, které jsem získala při tvorbě bakalářské práce budu využívat ve své pedagogické praxi.

Bakalářská práce mne obohatila o velké množství poznatků z historie matematiky, které jsem získala studiem odborné literatury. Některé znalosti a poznatky dávných matematiků jsou překvapující. Bakalářská práce mě inspirovala k dalšímu studiu historických pramenů v matematice.

Téma vývoje matematiky ve starověku je velmi rozsáhlé, proto bych je ráda rozvinula v diplomové práci, do ní bych mohla zahrnout vývoj matematiky i v dalších starověkých státech.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

1) BEČVÁŘ, Jindřich, Martina BEČVÁŘOVÁ a Hana VYMAZALOVÁ. *Matematika ve starověku: Egypt a Mezopotámie*. Praha: Prometheus, 2003. Dějiny matematiky. ISBN 80-7196-255-4. Dostupné z https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/401851
2) BEČVÁŘ, Jindřich, FUCHS, Eduard. *Historie matematiky. I. Seminář pro vyučující na středních školách*, Jevíčko, 19.8.-22.8.1993, Sborník. (Czech). Brno: Jednota českých matematiků a fyziků, 1993. pp. 20–107. Dostupné z https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/400590
3) HART-DAVIS, Adam, ed. *Věda: obrazový průvodce vývojem vědy a techniky*. Vydání třetí. Přeložil Jolana MALÁTKOVÁ, přeložil Hana NAVRÁTILOVÁ, přeložil Petr DUNDEK, přeložil Martin ANDĚRA. Praha: Knižní klub, 2016. Universum (Knižní klub). ISBN 978-80-242-5516-3.
4) HVORECKÝ, Jozef, Lev BUKOVSKÝ, Milan HEJNÝ, Štefan ZNÁM a Beloslav RIEČAN. *Pohľad do dejín matematiky*. Bratislava: Alfa, 1986, 239 s.
5) JACKSON, Tom a Richard BEATTY. *Matematika: 100 objevů, které změnily historii*. V Praze: Slovart, 2013. ISBN 978-80-7391-770-8.
6) KOLMAN, Arnošt. *Dějiny matematiky ve starověku*. Přeložil Marcela HEDRLÍNOVÁ. Praha: Academia, nakladatelství Československé akademie věd, 1968, 221 s.
7) MAREŠ, Milan. *Příběhy matematiky: stručná historie královny vědy*. Příbram: Pistorius & Olšanská, 2008, 334 s. ISBN 978-80-87053-16-4.
8) MAZUR, Joseph. *Kde se vzaly symboly: stručná historie matematického zápisu od starověku k dnešku*. Přeložil Marek ČTRNÁCT. Praha: Knižní klub, 2017. Universum. ISBN 978-80-242-5820-1.
9) MIKAN, Milan. *Jak se vyvinula matematika a geometrie*. Praha: Orbis, 1954, 136 s. Knihovna Vědění všem. ISBN (Váz.).
10) PICKOVER, Clifford A. *Matematická kniha: od Pythagora po 57. dimenzi : 250 milníků v dějinách matematiky*. Přeložil Petr HOLČÁK. Praha: Dokořán, 2012, 542 s. Zip, sv. 29. ISBN 978-80-7363-368-4.
11) POLÁK, Josef. *Didaktika matematiky: jak učit matematiku zajímavě a užitečně*. III. část, Historie matematiky pro učitele. Plzeň: Fraus, 2016, 179 s. ISBN 978-80-7489-327-8.

12) POLÁK, Josef. *Didaktika matematiky: jak učit matematiku zajímavě a užitečně*. Plzeň: Fraus, 2014, 431 s. ISBN 978-80-7238-449-5.
13) SMITH, David Eugene. *History of Mathematics*. New York, 1958.
14) STRUIK, Dirk Jan. *Dějiny matematiky*. Přeložil Jaroslav FOLTA, přeložil Luboš NOVÝ. Praha: Orbis, 1963, 250 s. ISBN (Brož.).

SEZNAM INTERNETOVÝCH ZDROJŮ

https://www.dejepis.com/kapitola/03-starovek/

http://vtm.e15.cz/dokonaly-knihovnicky-system-v-dobe-staroveku

http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/1406-recka-matematika-a-fyzika

http://www.geo-info-mat.cz/mat_historie.php

http://natura.baf.cz/natura/2001/6/20010606.html

http://egyptologie.cz/

http://www.starovekyegypt.net/

SEZNAM OBRÁZKŮ

SEZNAM ZKRATEK

např. (například)

př. n. l. (před naším letopočtem)

stol. (století)

tis. (tisíciletí)

tzv. (tak zvaný)

ANOTACE

Jméno a příjmení:	Blanka Toufarová
Katedra:	Matematiky
Vedoucí práce:	Mgr. Jitka Hodaňová, PhD.
Rok obhajoby:	2020

Název práce:	Základní otázky vývoje matematiky ve starověku
Název v angličtině:	Fundamental questions about Math evolution in antiquity
Anotace práce:	Bakalářská práce se ve své teoretické části zabývá historickým vývojem matematiky ve starověkém Egyptě, Mezopotámii a Řecku. Praktická část obsahuje řešené příklady inspirované starověkým Řeckem využitelné na základní škole. Cílem bakalářské práce je motivace k matematice a zpestření vyučovacích hodin.
Klíčová slova:	Matematika, starověk, vývoj matematiky.
Anotace v angličtině:	This bachelor thesis looks in its theoretical part on historical development of math in ancient Egypt, Mesopotamia and Greece. Practical part includes solves problems inspired by ancient Greece that can be used in elementary school. Intention of this bachelor thesis is motivation to math and variegation into the lessons.
Klíčová slova v angličtině:	Mathematics, antiquity, math evolution.
Rozsah práce:	54 stran
Jazyk práce:	Český jazyk