

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta elektrotechniky  
a komunikačních technologií

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Brno, 2019

Bc. Ondřej Mihálik



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION

## ÚSTAV AUTOMATIZACE A MĚŘICÍ TECHNIKY

DEPARTMENT OF CONTROL AND INSTRUMENTATION

## SIGNÁLY S OMEZENÝM SPEKTRUM, JEJICH VLASTNOSTI A MOŽNOSTI JEJICH EXTRAPOLACE

BANDLIMITED SIGNALS, THEIR PROPERTIES AND EXTRAPOLATION CAPABILITIES

### DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

### AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Ondřej Mihálik

### VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

prof. Ing. Pavel Jura, CSc.

BRNO 2019



# Diplomová práce

magisterský navazující studijní obor **Kybernetika, automatizace a měření**  
Ústav automatizace a měřicí techniky

**Student:** Bc. Ondřej Mihálik

**ID:** 173702

**Ročník:** 2

**Akademický rok:** 2018/19

## NÁZEV TÉMATU:

### **Signály s omezeným spektrem, jejich vlastnosti a možnosti jejich extrapolace**

#### POKYNY PRO VYPRACOVÁNÍ:

1. Seznamte se s pojmem „signály s omezeným spektrem“ (band-limited signals), jejich vlastnostmi a s možnostmi jejich modelování a extrapolace.
2. Seznamte se se základními vlastnostmi protáhlých sférických vlnových funkcí.
3. S pomocí SW pro výpočet protáhlých sférických vlnových funkcí prověřte možnosti extrapolace vybraných teoretických signálů. Zaměřte se na vliv šumu a vzorkovací frekvence.
4. Odladěné algoritmy ověřte při extrapolaci signálu získaného skutečným měřením.

#### DOPORUČENÁ LITERATURA:

1. DEVASIA, Amal; CADA, Michael. Bandlimited Signal Extrapolation Using Prolate Spheroidal Wave Functions. IAENG International Journal of Computer Science. November 2013, pp. 291-300.
2. OSIPOV, Andrei, Vladimir ROKHLIN a Hong XIAO. Prolate spheroidal wave functions of order zero: mathematical tools for bandlimited approximation. New York: Springer, 2013. ISBN 9781461482581.
3. Adelman, R.: Software for Computing the Spheroidal Wave Functions Using Arbitrary Precision Arithmetic, 2014.

**Termín zadání:** 4.2.2019

**Termín odevzdání:** 13.5.2019

**Vedoucí práce:** prof. Ing. Pavel Jura, CSc.

**Konzultant:**

**doc. Ing. Václav Jirsík, CSc.**  
*předseda oborové rady*

#### UPOZORNĚNÍ:

Autor diplomové práce nesmí při vytváření diplomové práce porušit autorská práva třetích osob, zejména nesmí zasahovat nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a musí si být plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č.40/2009 Sb.

## **ABSTRAKT**

Práca je zameraná na spektrálne obmedzenú extrapoláciu signálov pomocou konečného radu špeciálnych funkcií – anglicky nazývaných prolate spheroidal wave functions. Naším cieľom je zistiť, do akej miery je možné extrapolovať signál na základe jeho vzoriek z konečného intervalu. Často sa predpokladá, že táto metóda je závislá na výpočte určitých integrálov. Ukážeme, že existuje alternatíva spočívajúca v metóde najmenších štvorcov, ktorú porovnáme s metódami numerickej integrácie. Zameriame sa aj na vplyv šumu a možnosti použitia týchto algoritmov pre spracovanie dát v reálnom čase. Nakoniec sú navrhnuté algoritmy overené na skutočných dátach z mikrofónového poľa, aby ich bolo možné porovnať na základe výsledkov.

## **KLÚČOVÉ SLOVÁ**

Hilbertov priestor, Fourierova transformácia, frekvenčne obmedzené signály, extrapolácia, prolate spheroidal wave functions, ortogonalita, spektrum, metóda najmenších štvorcov

## **ABSTRACT**

The work is concerned with the band-limited signal extrapolation using truncated series of prolate spheroidal wave function. Our aim is to investigate the extent to which it is possible to extrapolate signal from its samples taken in a finite interval. It is often believed that this extrapolation method depends on computing definite integrals. We show an alternative approach by using the least squares method and we compare it with the methods of numerical integration. We also consider their performance in the presence of noise and the possibility of using these algorithms for real-time data processing. Finally all proposed algorithms are tested using real data from a microphone array, so that their performance can be compared.

## **KEYWORDS**

Hilbert space, Fourier transform, band-limited signals, extrapolation, prolate spheroidal wave functions, orthogonality, spectrum, least squares

MIHÁLIK, Ondrej. *Signály s omezeným spektrom, jejich vlastnosti a možnosti jejich extrapolace*. Brno, Rok, 78 s. Diplomová práca. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Ústav telekomunikací. Vedúci práce: prof. Ing. Pavel Jura, CSc.

## VYHLÁSENIE

Vyhlasujem, že som svoju diplomovú prácu na tému „Signály s omezeným spektrom, jejich vlastnosti a možnosti jejich extrapolace“ vypracoval samostatne pod vedením vedúceho diplomovej práce, využitím odbornej literatúry a ďalších informačných zdrojov, ktoré sú všetky citované v práci a uvedené v zozname literatúry na konci práce.

Ako autor uvedenej diplomovej práce ďalej vyhlasujem, že v súvislosti s vytvorením tejto diplomovej práce som neporušil autorské práva tretích osôb, najmä som nezasiahol nedovoleným spôsobom do cudzích autorských práv osobnostných a/alebo majetkových a som si plne vedomý následkov porušenia ustanovenia § 11 a nasledujúcich autorského zákona Českej republiky č. 121/2000 Sb., o práve autorskom, o právach súvisiacich s právom autorským a o zmene niektorých zákonov (autorský zákon), v znení neskorších predpisov, vrátane možných trestnoprávných dôsledkov vyplývajúcich z ustanovenia časti druhej, hlavy VI. diel 4 Trestného zákoníka Českej republiky č. 40/2009 Sb.

Brno .....

.....

podpis autora

## POĎAKOVANIE

Rád by som vyjadril veľkú vďaku vedúcemu práce pánovi prof. Ing. Pavlovi Jurovi, CSc. za odborné vedenie, konzultácie a jedinečné podnety motivujúce k ďalšej práci.

Brno .....

.....

podpis autora

# Obsah

Úvod	11
<b>1 Základné pojmy</b>	<b>13</b>
1.1 Priestor $L_2$	13
1.2 Ortogonálna báza	14
1.3 Fourierov rad a Fourierova transformácia	15
1.4 Signály s konečným spektrom a signály s konečným trvaním	16
1.5 Ortogonálna báza funkcií sinc	17
<b>2 Ortogonálna báza PSWF</b>	<b>18</b>
2.1 Niektoré vlastnosti PSWF	19
2.2 Časovo-frekvenčný pohľad na PSWF	23
2.3 Fourierov rad PSWF	26
<b>3 Výpočet koeficientov radu PSWF</b>	<b>27</b>
3.1 Výpočet pomocou funkcií sinc	27
3.1.1 Špeciálny prípad váhovej matice	28
3.1.2 Overenie ortogonalít	29
3.2 Výpočet pomocou polynomickej integrácie	30
3.2.1 Newtonova-Cotesova kvadrátúrna formula	31
3.2.2 Overenie ortonormality	31
3.2.3 Otázka voľby rádu polynómu	33
3.3 Výpočet metódou najmenších štvorcov	35
3.3.1 Odvodenie metódy	35
3.3.2 Overenie ortonormality	36
3.3.3 Súvislosť s Gerchbergovou metódou	38
<b>4 Extrapolácia modelovaných signálov</b>	<b>41</b>
4.1 Kritérium kvality extrapolácie	41
4.2 Harmonický signál	41
4.2.1 Analytické odvodenie spektra	42
4.2.2 Numerický experiment	42
4.3 Neharmonický signál	48
4.3.1 Motivácia	48
4.3.2 Numerický experiment	49
4.4 Extrapolačná matica	51
4.5 Matica $\mathcal{P}$ -transformácie	52

<b>5</b>	<b>Extrapolácia meraných signálov</b>	<b>54</b>
5.1	Kritérium kvality extrapolácie . . . . .	54
5.2	Signál z radu mikrofónov . . . . .	55
5.2.1	Odhad optimálneho rádu Fourierovho radu . . . . .	59
5.3	Rozšírenie na dvojrozmerné signály . . . . .	61
5.4	Signál z dvojrozmerného mikrofónového poľa . . . . .	63
<b>6</b>	<b>Záver</b>	<b>69</b>
	<b>Literatúra</b>	<b>71</b>
	<b>Zoznam symbolov, veličín a skratiek</b>	<b>73</b>
	<b>Zoznam príloh</b>	<b>75</b>
A	Odvedenie špeciálnej váhovej matice	76
B	Obsah priloženého CD	78



# Zoznam obrázkov

2.1	Závislosť vlastných čísel na parametri $c$ . . . . .	20
2.2	Časové priebehy PSWF podkritického rádu. . . . .	20
2.3	Porovnanie PSWF podkritického rádu s Hermiteovými funkciami. . .	21
2.4	Časové priebehy PSWF rádu blízkeho kritickej hodnote. . . . .	21
2.5	Časové priebehy PSWF nadkritického rádu. . . . .	22
2.6	Porovnanie PSWF nadkritického rádu s Legendreovými polynómami. . .	22
2.7	Gáborov spektrogram funkcie $\psi_5(100, t)$ . . . . .	24
2.8	Gáborov spektrogram funkcie $\psi_{50}(100, t)$ . . . . .	24
2.9	Gáborov spektrogram funkcie $\psi_{80}(100, t)$ . . . . .	25
2.10	Gáborov spektrogram funkcie $\psi_{101}(100, t)$ v okolí počiatku. . . . .	25
3.1	Príklad špeciálnej váhovej matice pre $K = 6$ . . . . .	29
3.2	Chyba ortogonalita pri integrácii pomocou funkcií sinc. . . . .	30
3.3	Chyba ortonormality bez šumu . . . . .	32
3.4	Chyba ortonormality so šumom . . . . .	34
3.5	Chyba ortonormality bez šumu . . . . .	37
3.6	Chyba ortonormality so šumom . . . . .	37
3.7	Prvá iterácia Gerchbergovej metódy. . . . .	38
4.1	Aplikácie kritéria kvality . . . . .	43
4.2	Vplyv integračnej metódy na kvalitu extrapolácie signálu bez šumu . .	43
4.3	Vplyv integračnej metódy na kvalitu extrapolácie signálu so šumom . .	44
4.4	Najlepšia dosiahnutá extrapolácia harmonického signálu so šumom. . .	45
4.5	Spektrum najlepšej dosiahnutej extrapolácie signálu so šumom. . . . .	45
4.6	Smerodajná odchýlka kvality extrapolácie $\sigma$ od jej strednej hodnoty. .	46
4.7	Vplyv integračnej metódy na kvalitu extrapolácie signálu so šumom . .	46
4.8	Zjednodušený model mikrofónového radu . . . . .	48
4.9	Najlepšia dosiahnutá extrapolácia neharmonického signálu . . . . .	49
4.10	Vplyv numerickej metódy na kvalitu extrapolácie signálu so šumom . .	50
4.11	Spektrum signálu a jeho extrapolácie pri $c = 1$ . . . . .	51
5.1	Meraný signál a jeho extrapolácia . . . . .	55
5.2	Fourierov obraz meraného signálu a jeho extrapolácie na základe $\vec{g}_p$ . .	56
5.3	Meraný signál a jeho extrapolácia . . . . .	57
5.4	Fourierov obraz meraného signálu a jeho extrapolácie na základe $\vec{g}_s$ . .	57
5.5	Meraný signál a jeho extrapolácia . . . . .	58
5.6	Fourierov obraz meraného signálu a jeho extrapolácie na základe $\vec{g}_1$ . .	58
5.7	Závislosť chyby extrapolácie na ráde Fourierovho radu . . . . .	59
5.8	Meraný signál a jeho extrapolácia . . . . .	60
5.9	Meraný signál a jeho extrapolácia . . . . .	61

5.10	Signál z mikrofónového poľa a jeho extrapolácia pri $c = 3$ . . . . .	64
5.11	Signál z mikrofónového poľa a jeho extrapolácia pri $c = 2$ . . . . .	65
5.12	Fourierov rad signálu pri $c = 2$ . . . . .	67
5.13	Fourierov rad signálu pri $c = 3$ . . . . .	67
5.14	Fourierov rad signálu pri $c = 4$ . . . . .	67

# Zoznam tabuliek

1.1	Prehľad niektorých významných ortogonálnych báz . . . . .	15
3.1	Newtonove-Cotesove koeficienty . . . . .	33
5.1	Závislosť strednej kvadratickej chyby extrapolácie na integračnej metóde . . . . .	59
5.2	Oblasti pozorovania . . . . .	63
5.3	Najlepšia extrapolácia pri použití metódy najmenších štvorcov . . . .	66
5.4	Najlepšia extrapolácia pri použití Newtonovho-Cotesovho pravidla rádu 5 . . . . .	66

# Úvod

Signály, ktoré majú konečné spektrum – po anglicky *band-limited signals* – majú mnohé zaujímavé vlastnosti. Jednou z nich je možnosť dokonale zrekonštruovať celý časový priebeh signálu len na základe jeho diskretných vzoriek. Vďaka tejto skutočnosti každodenne prevádzame spojité signály do číslicovej podoby, aby sme ich mohli uchovávať, upravovať a reprodukovovať.

Zaznamenaný (navzorkovaný) signál je nám známy len na konečnom časovom intervale – a to či už z fyzikálnych, časových, finančných alebo iných dôvodov. Nech už sú naše dôvody akékoľvek, v prípade, že je tento interval príliš krátky, iste by sme ocenili matematický aparát, ktorý by bol schopný doplniť chýbajúci (nenameraný) úsek signálu.

Už roku 1960 David Slepian a Henry Pollak navrhli extrapolovať signál mimo interval pozorovania pomocou špeciálnych funkcií – takzvaných *Prolate spheroidal wave functions*, skrátene PSWF. Myšlienku do detailov rozvinuli v sérii článkov [1–5], a to vrátane zovšeobecnenia na viacrozmerné signály. Nanešťastie, praktickému použitiu bránila nedostatočne vyvinutá výpočtová technika. Problém nebol v samotnej extrapoláčnej metóde, ale skôr v komplikovanom výpočte PSWF.

V 70. rokoch si obľubu začala získavať nová – Gerchbergova metóda – iteratívny postup spočívajúci v striedavom filtrovaní signálu a v nahrádzaní časti vyfiltrovaného signálu známym časovým priebehom [6]. S cieľom urýchliť jeho konvergenciu boli postupne odvodené rôzne modifikácie tohto algoritmu, vrátane jednokrokových metód [7]. Ich hlavným nedostatkom je nestabilita pri zvyšovaní počtu známych vzoriek signálu.

Našťastie, s dnešnou výpočtovou technikou sú už dávno prekonané problémy vyčíslenia funkčných hodnôt PSWF [8]. Tieto funkcie si opäť získavajú pozornosť – Devasia demonštruje ich použitie pri extrapolácii práve tak, ako to navrhli Slepian a Pollak. Vďaka veľmi vysokej presnosti použitej aritmetiky boli na konkrétnych signáloch dosiahnuté pozoruhodné výsledky. Išlo o navzorkované signály, ale bez vplyvu šumu [9].

Dodnes teda nebola celkom zodpovedaná otázka, čo sa stane, ak bude Slepianova metóda aplikovaná na skutočné signály – také, ktoré vznikli reálnym meraním. Cieľom tejto práce bude preskúmať možnosti extrapolácie frekvenčne obmedzených signálov. Pri tom však zohľadníme obmedzenia, ktoré sú spojené s každým praktickým meraním – bude nás zaujímať vplyv dvoch predpokladov:

1. máme k dispozícii len obmedzený počet známych vzoriek signálu;
2. presnosť nameraných hodnôt je obmedzená vplyvom šumu.

Naše dve hlavné otázky sú:

1. Do akej miery sa frekvenčné spektrum extrapolovaného signálu blíži frekvenčnému spektru skutočného signálu?
2. Do akej vzdialenosti od známeho úseku signálu je jeho extrapolácia vyhovujúca?

Prvá otázka súvisí s dobre známym problémom frekvenčnej analýzy skutočného signálu. Aby sme mohli získať jeho frekvenčné spektrum, musí byť signál definovaný na celom reálnom intervale. O chýbajúcej časti signálu sa zvyčajne robí nejaký dodatočný predpoklad – pri výpočte Fourierovho radu predpokladáme, že sa signál periodicky opakuje na celej reálnej osi času, pri Fourierovej transformácii zasa predpokladáme, že chýbajúci úsek signálu je nulový. Vo všeobecnosti oba predpoklady vedú ku vzniku skokov na okrajoch intervalu pozorovania a spektrum takto dodefinovaného signálu obsahuje zložky, ktoré sa v skutočnom signáli nenachádzajú.

Problém sa dá do istej miery riešiť použitím okien, ale ich aplikácia potláča amplitúdu signálu na okrajoch intervalu pozorovania, čím prichádzame o cenné informácie a zbytočne dochádza ku zhoršeniu frekvenčného rozlíšenia. Ak by sa nám podarilo signál aspoň čiastočne extrapolovať, zmiernili by sme tým vyššie uvedené problémy [10].

Druhou otázkou sa teoreticky zaoberal už Henry Landau [11] a jednoznačne dokázal, že predpoklady 1. a 2. majú zásadný vplyv na kvalitu extrapolácie, preto je skôr prekvapujúce, že mnohí autori na poli frekvenčne obmedzenej extrapolácie tieto predpoklady dodnes ignorujú.

# 1 Základné pojmy

V tejto časti definujeme dôležité pojmy a značenie, ktoré budeme využívať v ďalších častiach práce.

## 1.1 Priestor $L_2$

Uvažujme, že signál s ktorým pracujeme, je v čase  $t \in (a, b)$ ,  $b > a$  reprezentovaný matematickou funkciou, napríklad  $f(t)$ .

**Definícia 1.1** O komplexnej funkcii  $f(t)$  reálnej premennej  $t$  hovoríme, že je integrovateľná s kvadrátom (s druhou mocninou), ak existuje (a má konečnú hodnotu) integrál

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt. \quad (1.1)$$

Túto vlastnosť funkcie značíme  $f \in \mathbf{L}_2(a, b)$ , skrátene  $f \in \mathbf{L}_2$ . [12]

$\mathbf{L}_2$  je priestor tvorený všetkými kvadraticky integrovateľnými funkciami. Uvažujme ďalej funkcie  $f, g \in \mathbf{L}_2$ .

**Definícia 1.2** Skalárny súčin funkcií  $f(t)$  a  $g(t)$  označujeme  $\langle f, g \rangle$  a je definovaný vzťahom

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)} dt, \quad (1.2)$$

kde  $\overline{g(t)}$  značí funkciu komplexne združenú k funkcii  $g(t)$ .

Všade tam, kde by takéto značenie mohlo viesť k nejasnostiam ohľadom integračných hraníc, budeme symetrické hranice značiť dolným indexom  $\langle f, g \rangle_b = \int_{-b}^b f(t)\overline{g(t)} dt$ .

**Definícia 1.3** Normu funkcie  $f(t)$  značíme  $\|f\|$  a je definovaná vzťahom

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}. \quad (1.3)$$

**Veta 1.1** Pre vzdialenosť dvoch funkcií  $f(t)$  a  $g(t)$  v  $\mathbf{L}_2$  platia vzťahy

$$\begin{aligned} \|f - g\| &\geq 0; \\ \|f - g\| = 0 &\Leftrightarrow f = g; \\ \|f - g\| &\leq \|f - h\| + \|h - g\|; \\ \|f - g\| &= \|g - f\|. \end{aligned} \quad (1.4)$$

**Veta 1.2** Pre skalárny súčin funkcií  $f(t)$  a  $g(t)$  platí Schwarzova nerovnosť

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|. \quad (1.5)$$

Vyššie uvedené vety a definície pochádzajú z [13].

## 1.2 Ortogonálna báza

**Definícia 1.4** Funkcie  $f(t)$ ,  $g(t)$  sú v  $\mathbf{L}_2$  kolmé (ortogonálne), ak platí

$$\langle f, g \rangle = 0. \quad (1.6)$$

**Definícia 1.5** O postupnosti funkcií  $e_0, e_1, e_2, \dots$  hovoríme, že je ortogonálna v  $\mathbf{L}_2$ , ak

$$\begin{aligned} \langle e_n, e_m \rangle &\neq 0 && \text{pre } n = m, \\ \langle e_n, e_m \rangle &= 0 && \text{pre } n \neq m, \end{aligned} \quad (1.7)$$

kde  $n, m \in \mathbb{N}^0$ .

**Definícia 1.6** O postupnosti funkcií  $e_0, e_1, e_2, \dots$  hovoríme, že je ortonormálna, ak je ortogonálna a navyše platí  $\|e_n\| = 1$ , teda

$$\langle e_n, e_m \rangle = \begin{cases} 1 & \text{pre } n = m \\ 0 & \text{pre } n \neq m, \end{cases} \quad (1.8)$$

pričom  $n, m \in \mathbb{N}$ .

**Definícia 1.7** Ortogonálna sústava  $e_0, e_1, e_2, \dots$  je úplná v  $\mathbf{L}_2$  (tvorí bázu), ak platí aspoň jedna z týchto podmienok:

1. Pre každý signál  $f(t) \in \mathbf{L}_2$  platí

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\langle f, e_n \rangle|^2}{\|e_n\|^2}. \quad (1.9)$$

2. Pre každý signál  $f(t) \in \mathbf{L}_2$  platí

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle f, e_n \rangle}{\|e_n\|^2} e_n(t). \quad (1.10)$$

3. Ku každému  $f(t) \in \mathbf{L}_2$  a  $\xi > 0$  existuje konečná lineárna kombinácia

$$f_N(t) = \sum_{n=0}^N a_n e_n(t), \quad (1.11)$$

pre ktorú  $\|f - f_N\| < \xi$ .

Tab. 1.1: Prehľad niektorých významných ortogonálnych báz

Názov	Tvar postupnosti	Interval ortogonalít
Trigonometrické funkcie	$\{\cos nt\}$	$(0, \pi)$
Trigonometrické funkcie	$\{\sin nt\}$	$(0, \pi)$
Trigonometrické funkcie	$\{\cos nt, \sin nt\}$	$(-\pi, \pi)$
Komplexné exponenciálne funkcie	$\{e^{jnt}\}$	$(-\pi, \pi)$
Besselove funkcie	$\{\sqrt{t}J_m(\lambda_n t)\}$	$(0, 1)$
Laguerrove funkcie	$\{e^{-t/2}t^{\alpha/2}L_n^{(\alpha)}(t)\}$	$(0, \infty)$
Legendreove funkcie	$\{L_n(t)\}$	$(-1, 1)$
Čebyševove funkcie	$\{\sqrt{1-t^2}T_n(t)\}$	$(-1, 1)$
Hermiteove funkcie	$\{e^{-t^2/2}H_n(t)\}$	$(-\infty, \infty)$
Funkcie sinc	$\{\text{sinc}(t-n)\}$	$(-\infty, \infty)$
Prolate spheroidal wave functions	$\{\psi_n(c, t)\}$	$(-\infty, \infty)$ $(-\tau/2, \tau/2)$

### 1.3 Fourierov rad a Fourierova transformácia

Fourierov rozvoj signálu pomocou trigonometrických funkcií je len špeciálnym prípadom Fourierovho radu. V skutočnosti existuje množstvo iných bázových funkcií použiteľných pre jeho výpočet. Vybrané z nich sú zaradené do tabuľky 1.1.

**Definícia 1.8** *Fourierovým radom signálu  $f(t)$  vzhľadom k ortogonálnemu systému  $e_0, e_1, e_2, \dots$  sa nazýva rad*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n(t), \quad (1.12)$$

pre ktorého koeficienty platí

$$a_n = \frac{\langle f, e_n \rangle}{\|e_n\|^2}. \quad (1.13)$$

Koeficienty  $\{a_n\}$  nazývame spektrom signálu  $f(t)$ .

**Veta 1.3** *V priestore  $L_2$  platí Parsevalova rovnosť*

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \cdot \|e_n\|^2, \quad (1.14)$$

kde  $a_n$  sú zložky spektra  $f(t)$ . [13]

**Definícia 1.9** *Priama a spätná Fourierova transformácia sú pre signál definované vzťahmi*

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (1.15)$$



$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.16)$$

Signál v časovej doméne  $f(t)$  budeme od jeho Fourierovho obrazu  $F(\omega)$  odlišovať veľkosťou písma. Aby existoval Fourierov obraz  $F(\omega)$ , signál  $f(t)$  musí byť obmedzený a na konečnom intervale musí mať konečný počet nespojitostí, maxim a miním.

**Veta 1.4** Pre signály  $f(t)$ ,  $g(t)$  a ich Fourierove obrazy  $F(\omega)$ ,  $G(\omega)$  platí Parsevalova formula

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \overline{G(\omega)} d\omega \quad (1.17)$$

[14].

## 1.4 Signály s konečným spektrom a signály s konečným trvaním

**Definícia 1.10** Signál  $f(t)$ , ktorého spektrum má tvar

$$F(\omega) = 0 \quad \text{pre} \quad |\omega| > \Omega \quad (1.18)$$

nazývame signálom s konečným spektrom (*bandlimited signal*).  $\Omega$  označuje jeho frekvenčné obmedzenie (*bandlimit*).

**Definícia 1.11** Symbolom  $B$  označme frekvenčne obmedzujúci operátor

$$Bf(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.19)$$

Podmnožinu  $L_2$  tvorenú všetkými frekvenčne obmedzenými funkciami označme  $\mathcal{B}$ .

**Definícia 1.12** Signál  $f(t)$ , ktorého časový priebeh má tvar

$$f(t) = 0 \quad \text{pre} \quad |t| > \frac{\tau}{2} \quad (1.20)$$

nazývame signálom s konečnou dobou trvania (*timelimited signal*).  $\tau$  označuje jeho dobu trvania (*timelimit*). Interval  $\langle -\tau/2, +\tau/2 \rangle$  nazývame interval pozorovania.

**Definícia 1.13** Symbolom  $D$  označme časovo obmedzujúci operátor

$$Df(t) = \begin{cases} f(t) & \text{pre} \quad |t| \leq \tau/2 \\ 0 & \text{pre} \quad |t| > \tau/2. \end{cases} \quad (1.21)$$

Podmnožinu  $L_2$  tvorenú všetkými frekvenčne obmedzenými funkciami označme  $\mathcal{D}$ .

Jediným spoločným prvkom množín  $\mathcal{D}$  a  $\mathcal{B}$  je signál s nulovou energiou

$$\mathcal{D} \cap \mathcal{B} = \{0\}. \quad (1.22)$$

Našou snahou bolo dodržať čo najväčšiu zhodu značenia s článkami [1–3]. Definície 1.10 až 1.13 a väčšina symbolov sú v zhode s týmito článkami.

## 1.5 Ortogonálna báza funkcií sinc

Od funkcie  $\text{sinc } x$  v tvare

$$\text{sinc } x = \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{\pi x} & \text{pre } x \neq 0 \\ 1 & \text{pre } x = 0 \end{cases} \quad (1.23)$$

je možné transláciou a dilatáciou odvodiť dôležitú bázu

$$\{\text{sinc}(t/T - n)\}_{n=-\infty}^{\infty}. \quad (1.24)$$

Jej prvky sú ortogonálne

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(t/T - n) \text{sinc}(t/T - m) dt = \begin{cases} T & \text{pre } n = m \\ 0 & \text{pre } n \neq m \end{cases} \quad m, n \in \mathbb{Z} \quad (1.25)$$

a je úplná v  $\mathcal{B}$ . Každý signál  $f(t) \in \mathcal{B}$  s bandlimitom  $\Omega = \pi/T$  môžeme vyjadriť Fourierovým radom

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \text{sinc}(t/T - n). \quad (1.26)$$

Ak rovnicu vynásobíme výrazom  $\text{sinc}(t/T - k)$ , integrujme cez celý reálny interval a využijeme ortogonalitu, dostaneme

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{sinc}(t/T - k) dt, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.27)$$

Využitím

$$\mathcal{F}\{\text{sinc}(t/T - k)\} = \begin{cases} T e^{-j\omega k T} & \text{pre } |\omega| \leq \pi/T \\ 0 & \text{inak,} \end{cases} \quad (1.28)$$

môžeme aplikovať Parsevalovu formulu 1.4 na vzťah (1.27) a prepísať ho na

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} F(\omega) e^{j\omega k T} d\omega = f(kT). \quad (1.29)$$

**Veta 1.5** Ak má signál  $f(t) \in \mathcal{B}$  frekvenčné obmedzenie  $\Omega \leq \pi/T$ , dokážeme ho presne zrekonštruovať zo vzoriek  $f(kT)$  pri perióde vzorkovania  $T$  podľa vzťahu

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \frac{\sin \pi(t/T - k)}{\pi(t/T - k)}, \quad (1.30)$$

kde  $k \in \mathbb{Z}$  je číslo vzorky [15]. Táto veta sa nazýva Shannonov vzorkovací teorém.

Ide o dobre známy princíp vzorkovania a rekonštrukcie frekvenčne obmedzených signálov. Báza funkcií sinc je dôležitá preto, lebo umožňuje dokonalú interpoláciu frekvenčne obmedzeného signálu. V nasledujúcej kapitole sa zameriame na ďalšiu frekvenčne obmedzenú bázu, ktorá ponúka ešte zaujímavejšie možnosti.

## 2 Ortogonálna báza PSWF

**Veta 2.1** Pre daný parameter  $c$  je možné nájsť nekonečnú spočítateľnú postupnosť reálnych funkcií  $\psi_0(c, t)$ ,  $\psi_1(c, t)$ ,  $\psi_2(c, t)$ , ... a postupnosť reálnych kladných čísel

$$1 > \lambda_0(c) > \lambda_1(c) > \lambda_2(c) > \dots > 0 \quad (2.1)$$

majúcich nasledujúce vlastnosti:

1.  $\{\psi_n\}$  sú frekvenčne obmedzené, ortogonálne a úplné v  $\mathcal{B}$ .

$$\langle \psi_n, \psi_m \rangle_\infty = \begin{cases} 0 & \text{pre } n \neq m \\ 1/\lambda_n(c) & \text{pre } n = m \end{cases} \quad m, n \in \mathbb{N}^0. \quad (2.2)$$

2. Na intervale  $-\tau/2 \leq t \leq \tau/2$  sú  $\{\psi_n\}$  ortonormálne a úplné v  $\mathbf{L}_2(-\tau/2, \tau/2)$ .

$$\langle \psi_n, \psi_m \rangle_{\tau/2} = \begin{cases} 0 & \text{pre } n \neq m \\ 1 & \text{pre } n = m \end{cases} \quad m, n \in \mathbb{N}^0. \quad (2.3)$$

3. Pre všetky reálne alebo komplexné  $t$

$$\lambda_n(c)\psi_n(c, t) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \frac{\sin \Omega(t-s)}{\pi(t-s)} \psi_n(c, s) ds = BD\psi_n(c, t), \quad n \in \mathbb{N}^0. \quad (2.4)$$

Funkcie  $\{\psi_n\}$  sa po anglicky nazývajú *prolate spheroidal wave functions* (PSWF).  $\psi_n(c, t)$  aj  $\lambda(c)$  sú spojitými funkciami parametra  $c = \Omega\tau/2$  [1].<sup>1</sup> Jeho vplyv si ukážeme neskôr.

Najprv – aby sme predišli zbytočnej komplikácii vzťahov – zavedieme dohodu, podľa ktorej pevne zvolíme

$$\tau = 2 \quad (2.5)$$

a budeme sa jej držať odteraz až po koniec kapitoly 4. Dovtedy budú naše úvahy čisto matematické, preto nebudeme vzťahy zneprehľadňovať fyzikálnymi jednotkami. Takáto voľba vôbec nie je na úkor všeobecnosti, pretože každý časovo obmedzený signál, ktorý je v tvare

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{pre } t \in \langle a, b \rangle \\ 0 & \text{pre } t \notin \langle a, b \rangle \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R}, a < b,$$

je možné vhodným časovým posunutím a zmenou mierky na časovej osi transformovať tak, aby bol jeho interval pozorovania  $\langle -1, 1 \rangle$ .

<sup>1</sup> V literatúre nie je jednotný názor na to, ako tieto funkcie normalizovať. Zámerne používame opačnú definíciu, než je uvedená v pôvodnom článku. Článok funkcie normalizuje tak, aby  $\|\psi_n\|_\infty = 1$ . My budeme používať  $\|\psi_n\|_1 = 1$ .

## 2.1 Niektoré vlastnosti PSWF

Mnoho zaujímavých vlastností  $\psi_n$  môžeme nájsť v pôvodnej sérii článkov [1–5], ale hlavne v knihe [16] špeciálne venovanej týmto funkciám, preto tu uvedieme len tie vlastnosti, ktoré sú pre nás najdôležitejšie.

**Veta 2.2** *Pre každé  $c > 0$  existuje taká rastúca postupnosť kladných čísel  $\chi_0(c) < \chi_1(c) < \chi_2(c) < \dots$ , že pre všetky  $n \in \mathbb{N}^0$  má diferenciálna rovnica*

$$(1 - t^2)y_n''(t) - 2t \cdot y_n'(t) + [\chi_n(c) - c^2t^2]y_n(t) = 0 \quad (2.6)$$

*spojité riešenie na intervale  $\langle -1, 1 \rangle$ . Navyše, všetky jej riešenia sa dajú vyjadriť ako súčin konštanty a funkcie  $\psi_n(c, t)$ , ktorá je riešením integrálnej rovnice (2.4).*

**Veta 2.3** *Funkcia  $\psi_n(c, t)$  je párnou funkciou pre párne  $n$  a nepárnou funkciou pre nepárne  $n$ ,*

$$\psi_n(c, t) = (-1)^n \psi_n(c, -t), \quad n \in \mathbb{N}^0. \quad (2.7)$$

**Veta 2.4** *Funkcia  $\psi_n(c, t)$  má na intervale  $t \in (-1, 1)$  práve  $n$  núl,  $n \in \mathbb{N}^0$ .*

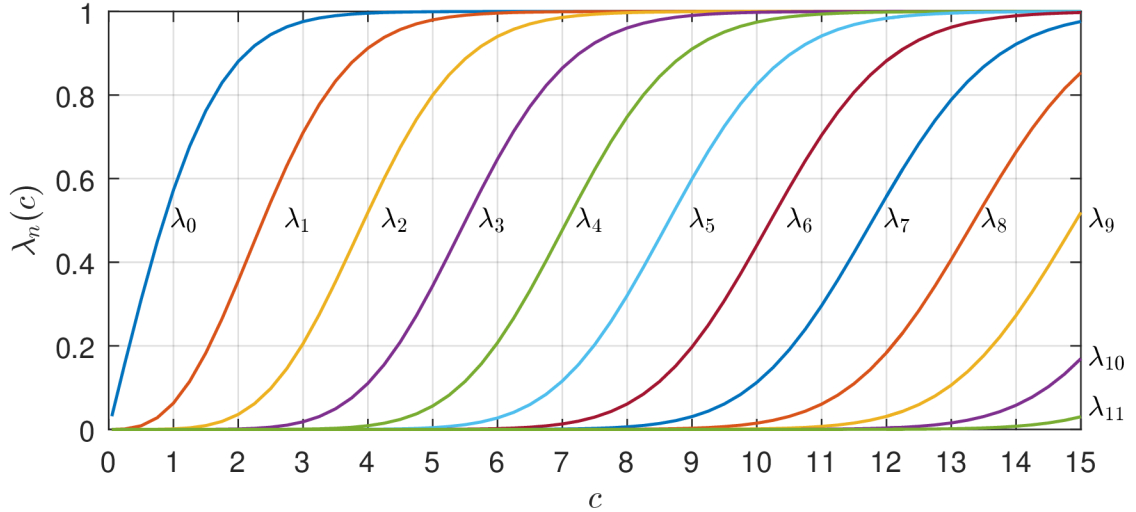
**Veta 2.5** *Pre Fourierovu transformáciu  $\psi_n(c, t)$  platia vzťahy*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(c, t) e^{-j\omega t} dt = \begin{cases} j^{-n} \sqrt{\frac{2\pi}{c\lambda_n(c)}} \psi_n\left(c, \frac{\omega}{c}\right) & \text{pre } |\omega| \leq c \\ 0 & \text{pre } |\omega| > c, \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\int_{-1}^1 \psi_n(c, t) e^{-j\omega t} dt = j^{-n} \sqrt{\frac{2\pi\lambda_n(c)}{c}} \psi_n\left(c, \frac{\omega}{c}\right). \quad (2.9)$$

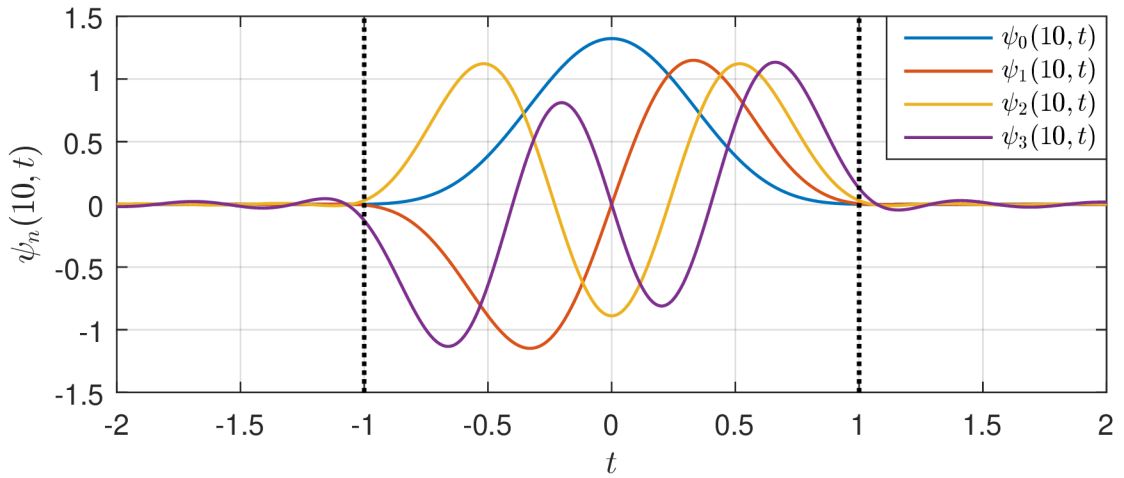
Hranice frekvenčného spektra funkcií  $\psi_n(c, t)$  nastavujeme parametrom  $c$ . Voľba šírky spektra má zásadný vplyv na vlastné čísla  $\lambda_n(c)$  integrálnej rovnice (2.4). Udávajú, aká časť z celkovej energie  $\psi_n(c, t)$  sa nachádza v intervale  $\langle -1, 1 \rangle$ . Platí

$$\lambda_n(c) = \frac{\|\psi_n\|_1}{\|\psi_n\|_\infty}. \quad (2.10)$$



Obr. 2.1: Závislosť vlastných čísel integrálnej rovnice (2.4) na parametri  $c$ .

Pre vlastné čísla  $\lambda_n(c)$  je zlomová hodnota  $n \approx 2c/\pi$ . V prípade  $n \ll 2c/\pi$  sú blízke 1. Priebeh funkcie  $\psi_n(c, t)$  sa vtedy blíži Hermiteovej funkcii a jej energia sa koncentruje v intervale  $\langle -1, 1 \rangle$ , tak ako na Obr. 2.2 a Obr. 2.4.



Obr. 2.2: Časové priebehy PSWF podkritického rádu.

**Definícia 2.1** Hermiteova funkcia  $\varphi_n(t)$  je daná vzťahom

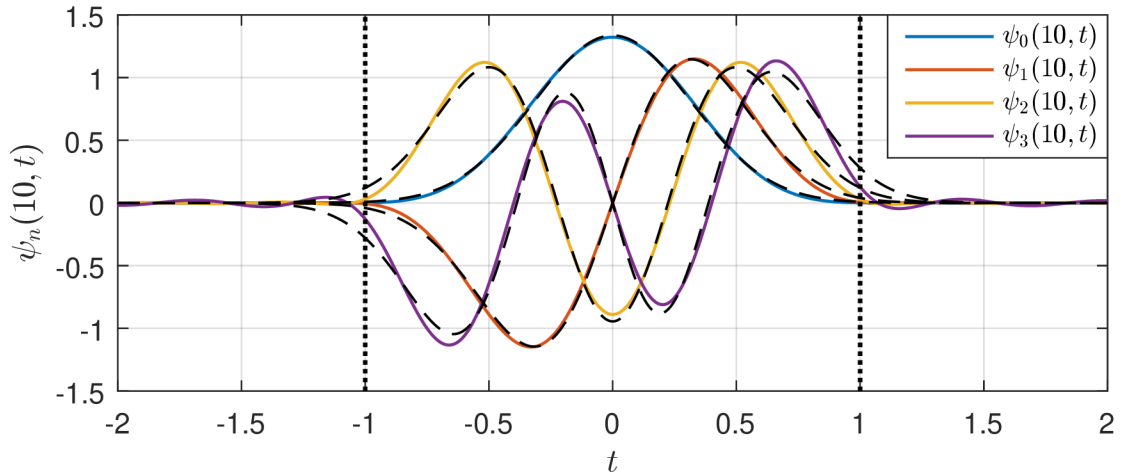
$$\varphi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(t) e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad (2.11)$$

kde  $H_n(t)$  je Hermiteov polynóm rádu  $n$  definovaný Rodriguesovou formulou

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2}. \quad (2.12)$$

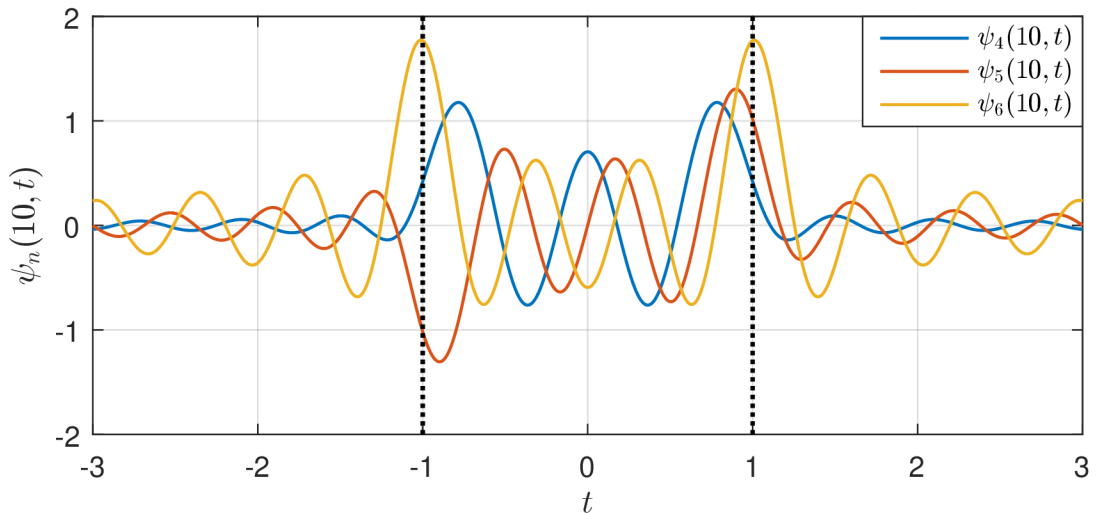
**Veta 2.6** Pre  $n \in \mathbb{N}^0$  a  $c \rightarrow \infty$  platí približný vzťah

$$\psi_n(c, t) \approx \sqrt[4]{c} \varphi_n(\sqrt{c}t). \quad (2.13)$$



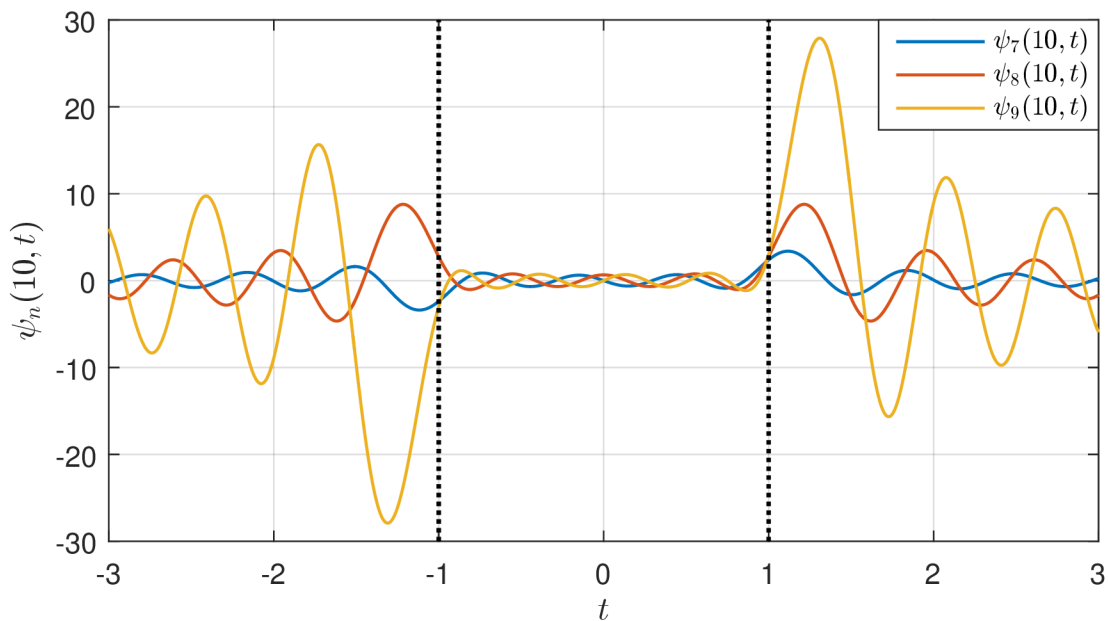
Obr. 2.3: Porovnanie PSWF podkritického rádu (plnou čiarou) s Hermiteovými funkciami (prerušovanou čiernou čiarou).

Ak  $n$  zvyšujeme, pri hodnote  $n \approx 2c/\pi$  začnú vlastné čísla badateľne klesať a energia mimo intervalu  $\langle -1, 1 \rangle$  už nie je zanedbateľná. Podobnosť s Hermiteovými funkciami sa stráca a  $\psi_n(c, t)$  majú nasledujúce priebehy:



Obr. 2.4: Časové priebehy PSWF rádu blízkeho kritickej hodnote.

Pre  $n \gg 2c/\pi$  sa čísla  $\lambda_n(c)$  veľmi rýchlo približujú k nule. Priebeh  $\psi_n(c, t)$  sa na intervale  $\langle -1, 1 \rangle$  blíži Legendrovmu polynómu a energia rozložená za jeho hranicami sa so vzrastajúcim rádom prudko zväčšuje.



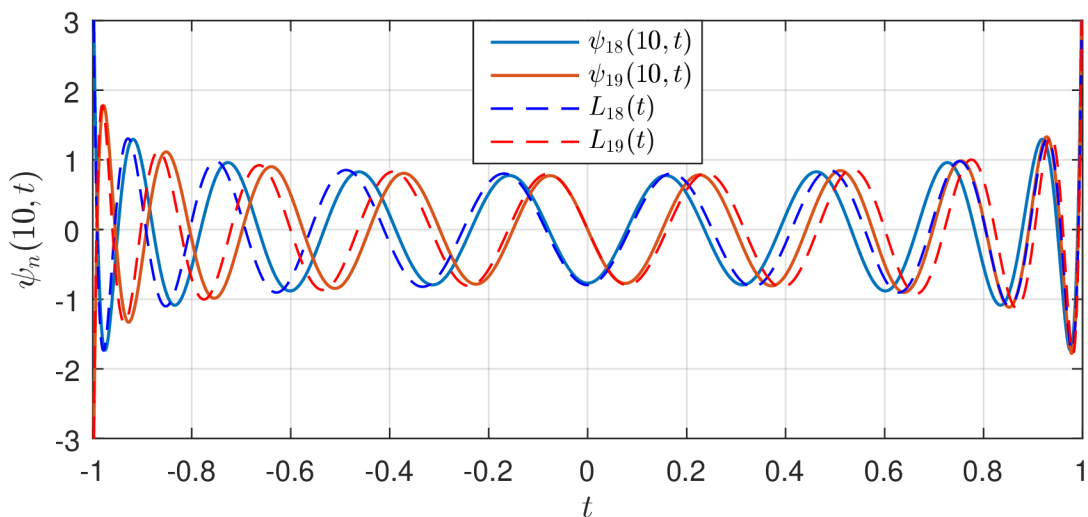
Obr. 2.5: Časové priebehy PSWF nadkritického rádu.

**Veta 2.7** Pre  $n \in \mathbb{N}^0$  a  $c \rightarrow 0$  platí približný vzťah

$$\psi_n(c, t) \approx \sqrt{n^2 + \frac{1}{2}} L_n(t), \quad (2.14)$$

kde  $L_n(t)$  je Legendreov polynóm rádu  $n$  definovaný Rodriguesovou formulou

$$L_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n. \quad (2.15)$$



Obr. 2.6: Porovnanie PSWF nadkritického rádu s Legendreovými polynómami.

## 2.2 Časovo-frekvenčný pohľad na PSWF

Pre získanie krátkodobej Fourierovej transformácie (STFT) sme použili Gáborovu transformáciu, keďže používa Gaussovo okno, ktoré zabezpečuje optimálne rozlíšenie v čase i frekvencii zároveň.

**Definícia 2.2** Gáborov spektrogram signálu  $f(t)$  je definovaný vzťahom

$$S(t, \omega) = \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-a(s-t)^2} e^{-j\omega s} ds \right|^2. \quad (2.16)$$

Volbou parametra  $a$  nastavujeme rozlíšenie. Väčšie hodnoty  $a$  zvyšujú rozlíšenie v čase na úkor rozlíšenia vo frekvencii a naopak.

**Veta 2.8** Gáborov diagram Hermiteovej funkcie  $\varphi_n(t)$  má tvar

$$S_n(t, \omega) = \frac{1}{2^n n!} (t^2 + \omega^2)^n e^{-\frac{1}{2}(t^2 + \omega^2)}. \quad (2.17)$$

**Veta 2.9** Pre súradnice  $[t_m, \omega_m]$  maximálnych hodnôt Gáborovho diagramu Hermiteovej funkcie  $\varphi_n(t)$  platí

$$t_m^2 + \omega_m^2 = 2n, \quad (2.18)$$

Diagram má stred v počiatku sústavy súradníc  $[0; 0]$  a jeho polomer je  $\sqrt{2n}$ .

Vety pochádzajúcich z článku [17] a predpokladajú voľbu  $a = 1/2$ . Ich využitím môžeme aproximovať Gáborov spektrogram funkcií  $\psi_n(c, t)$  podkritického rádu. Ak zvolíme  $a = c/2$ , tak môžeme odvodiť, že pri  $n \ll 2c/\pi$  bude približne platiť

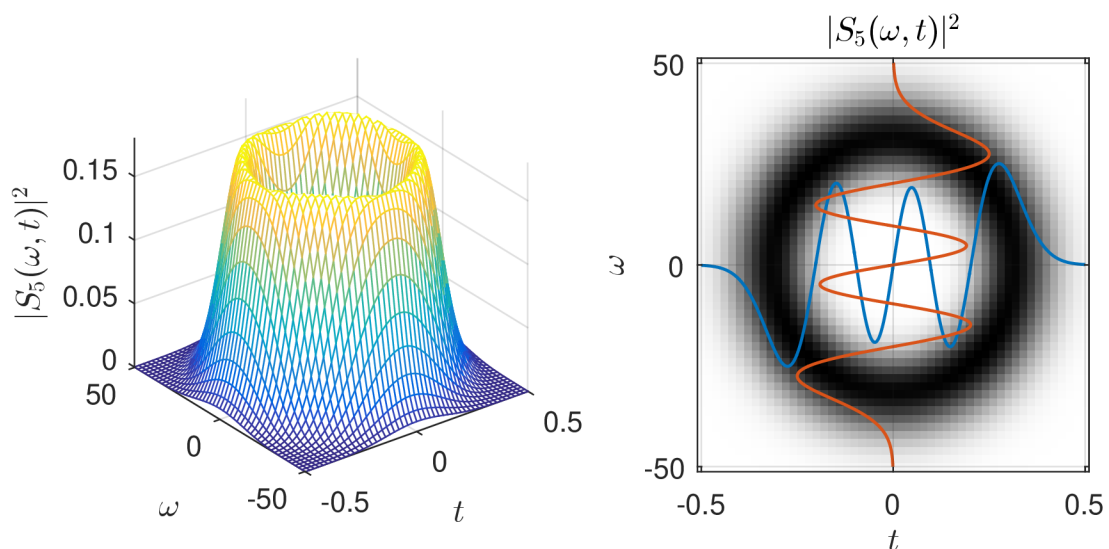
$$S_n(t, \omega) \approx \frac{1}{2^n n!} \left( c t^2 + \frac{\omega^2}{c} \right)^n e^{-\frac{1}{2} \left( c t^2 + \frac{\omega^2}{c} \right)}. \quad (2.19)$$

Maximálne hodnoty spektrogramu budú približne ležať na elipse tvaru

$$c t_m^2 + \frac{\omega_m^2}{c} = 2n, \quad (2.20)$$

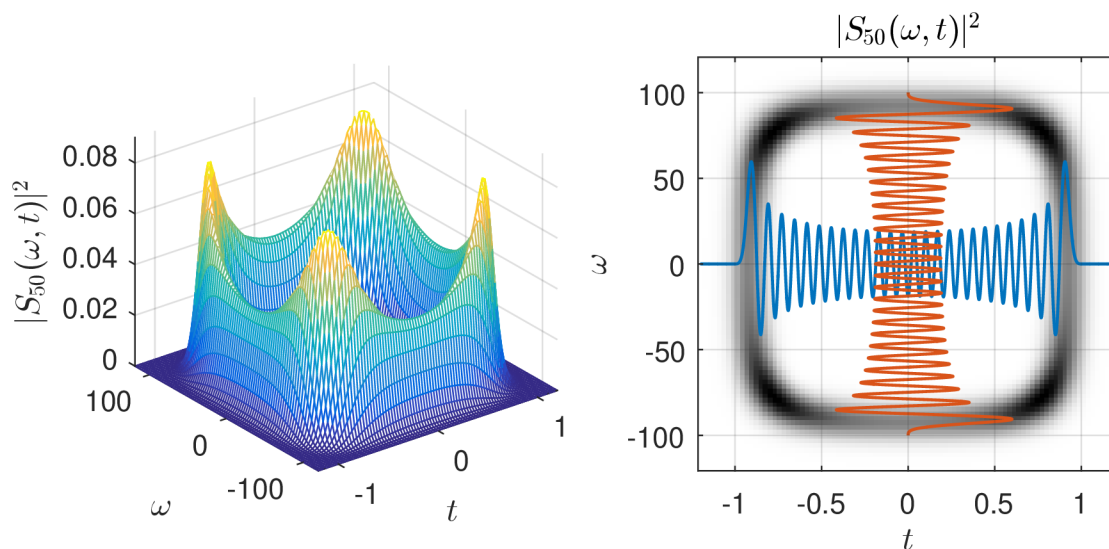
o čom sa môžeme presvedčiť numerickým výpočtom Gáborovej transformácie.





Obr. 2.7: Gáborov spektrogram funkcie  $\psi_5(100, t)$ .

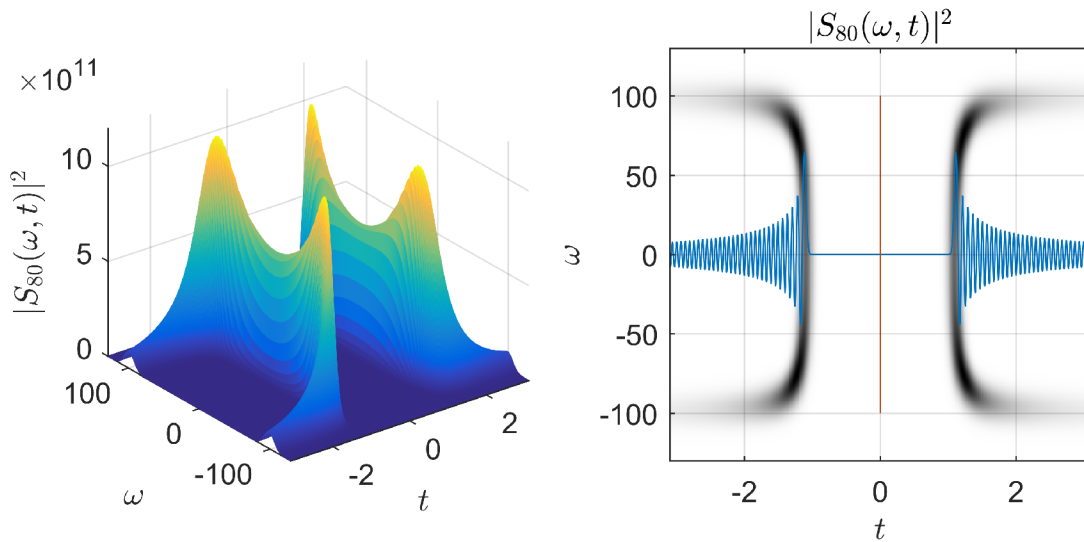
Aby bola súvislosť medzi Gáborovým spektrogramom  $S_n(\omega, t)$  a časovým priebehom  $\psi_n(c, t)$  zreteľnejšia, sú tieto priebehy spolu vynesené v grafoch na pravej strane. Nule zodpovedá biela farba a čím sú funkčné hodnoty vyššie, tým je farba tmavšia.



Obr. 2.8: Gáborov spektrogram funkcie  $\psi_{50}(100, t)$ .

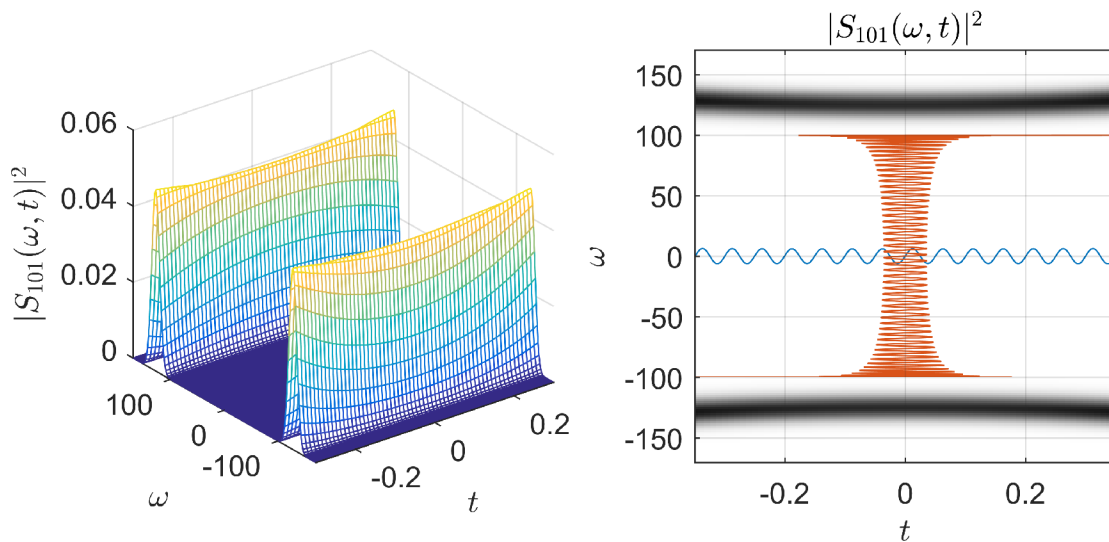
Ak zvyšujeme rád  $n$ , diagram sa deformuje tak, aby sa čo najväčšia časť jeho energie nachádzala v oblasti tvaru obdĺžnika

$$\begin{aligned} -1 &\leq t \leq 1, \\ -c &\leq \omega \leq c. \end{aligned} \tag{2.21}$$



Obr. 2.9: Gáborov spektrogram funkcie  $\psi_{80}(100, t)$ .

Pri nadkritickom ráde je časo-frekvenčná analýza ťažšia kvôli vysokým funkčným hodnotám spektrogramu. Ak zo spektrogramu zobrazíme len oblasť v okolí počiatku súradnicovej sústavy, máme možnosť vidieť jav, ktorý môže byť na prvý pohľad prekvapujúci. Funkcia  $\psi_{100}(100, t)$  je frekvenčne obmedzená a jej Fourierov obraz  $F(\omega)$  je nulový pre  $|\omega| > 100$ . Napriek tomu veta 2.4 spôsobuje, že na intervale  $\langle -1, 1 \rangle$  musí byť okamžitá frekvencia funkcie  $\psi_n(c, t)$  vyššia než  $c$ , ak  $n \gg 2c/\pi$ .



Obr. 2.10: Gáborov spektrogram funkcie  $\psi_{101}(100, t)$  v okolí počiatku.

## 2.3 Fourierov rad PSWF

Vďaka úplnosti  $\psi_n$  môžeme signály patriace do  $\mathbf{L}_2(-1, 1)$ , vyjadriť Fourierovým radom

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(c, t). \quad (2.22)$$

Ak túto rovnicu vynásobíme  $\psi_m(c, t)$ , integrujeme a využijeme ortogonalitu, dostaneme rôzne vzťahy pre spektrum  $\{a_n\}$ . V závislosti na integračných hraniciach dostávame nasledujúce vety:

**Veta 2.10** *Signál  $f(t) \in \mathbf{L}_2(-1, 1)$  je pre všetky  $t \in \langle -1, 1 \rangle$  možné vyjadriť pomocou radu (2.22), ktorého koeficienty sú dané vzťahom*

$$a_n = \langle f, \psi_n \rangle_1. \quad (2.23)$$

**Veta 2.11** *Signál  $f(t) \in \mathcal{B}$ ;  $\mathcal{B} \subset \mathbf{L}_2(\mathbb{R})$  je pre všetky  $t \in \mathbb{R}$  možné vyjadriť pomocou radu (2.22), ktorého koeficienty sú dané vzťahmi*

$$a_n = \langle f, \psi_n \rangle_{\infty} \cdot \lambda_n(c), \quad (2.24)$$

$$a_n = \langle f, \psi_n \rangle_1. \quad (2.25)$$

Táto veta je podstatou extrapoláčnej metódy. Využitím znalosti časového priebehu  $f(t)$  na intervale pozorovania  $\langle -1, 1 \rangle$  môžeme určiť koeficienty Fourierovho radu. Získaný rad je definovaný pre všetky  $t \in \mathbb{R}$  a tým pádom definuje priebeh  $f(t)$  aj mimo intervalu pozorovania.

**Veta 2.12** *Majme ľubovoľný signál  $g(t) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R})$ . Signál  $f(t) = Bg(t)$  je pre všetky  $t \in \mathbb{R}$  možné vyjadriť pomocou radu (2.22), ktorého koeficienty sú dané vzťahom*

$$a_n = \langle g, \psi_n \rangle_{\infty} \cdot \lambda_n(c). \quad (2.26)$$

Veta vyplýva zo vzťahu (2.24), ak naň aplikujeme vetu 1.4 využitím Fourierovho obrazu  $\psi_n(c, t)$  podľa (2.8). Veta hovorí, že výpočtom Fourierovho radu integráciou cez celý reálny interval dostávame z ľubovoľného signálu  $g(t) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R})$  jeho frekvenčne obmedzenú verziu  $f(t) = Bg(t)$ .

### 3 Výpočet koeficientov radu PSWF

Predpokladajme, že meriame nejaký nenulový signál  $f(t) \in \mathcal{B}$  a – nech už sú naše dôvody akékoľvek – nezmeriame celý priebeh  $f(t)$ . Je nám známy len signál

$$Df(t) = \begin{cases} f(t) & \text{pre } |t| \leq 1, \\ 0 & \text{pre } |t| > 1. \end{cases} \quad (3.1)$$

Podľa vety 2.11 je teoreticky možné signál dokonale extrapolovať nekonečným radom, no prakticky môžeme vypočítať len konečný rad

$$f_N(t) = \sum_{n=0}^N a_n \psi_n(c, t), \quad N \in \mathbb{N}^0. \quad (3.2)$$

Hovoríme, že  $f_N(t)$  je aproximáciou signálu  $f(t)$   $N$ -tého rádu. Keďže kľúčom ku kvalitnej extrapolácii signálu je čo najpresnejšie vyčíslenie koeficientov  $\{a_n\}$ , táto kapitola porovnáva rôzne metódy ich výpočtu.

Jednu skupinu tvoria interpolačné metódy. Aby sme mohli vyčíslit (2.25), musíme priebeh signálu medzi vzorkami nejako dedefinovať. V praxi sú najbežnejšie rovnomerne navzorkované signály, preto aj my budeme predpokladať, že sú vzorky v čase ekvidistantné. Potom sa nám ponúkajú dve najbežnejšie metódy – interpolácia funkciami sinc a interpolácia polynómami.

Keďže výsledky interpolačných metód nemusia vždy byť uspokojivé, uvádzame aj aproximáciu koeficientov  $\{a_n\}$  použitím metódy najmenších štvorcov, teda bez interpolácie.

Budeme sa zaoberať zdrojmi chýb vznikajúcich v závislosti na použitej metóde, perióde vzorkovania signálu, integračných hraniciach a šume. Práve pochopenie týchto súvislostí umožní chybu minimalizovať správnou voľbou numerickej metódy.

#### 3.1 Výpočet pomocou funkcií sinc

Určitý integrál súčinu signálov  $f(t), g(t) \in \mathcal{B}$  s bandlimitmi  $\Omega_f = \pi/T_f$  a  $\Omega_g = \pi/T_g$  môžeme vďaka (1.30) zapísať nasledovne:

$$\int_{-a}^a f(t)g(t)dt = \int_{-a}^a \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT_f) \frac{\sin \pi(t/T_f - k)}{\pi(t/T_f - k)} \sum_{l=-\infty}^{\infty} g(lT_g) \frac{\sin \pi(t/T_g - l)}{\pi(t/T_g - l)} dt.$$

Keďže integrál súčtu je súčtom integrálov

$$\int_{-a}^a f(t)g(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(kT_f)g(lT_g) \int_{-a}^a \frac{\sin \pi(t/T_f - k)}{\pi(t/T_f - k)} \frac{\sin \pi(t/T_g - l)}{\pi(t/T_g - l)} dt.$$

Pre integrál na pravej strane zavedme označenie

$$W(k, l) = \int_{-a}^a \frac{\sin \pi(t/T_f - k)}{\pi(t/T_f - k)} \frac{\sin \pi(t/T_g - l)}{\pi(t/T_g - l)} dt. \quad (3.3)$$

Potom hľadaný integrál môžeme zapísať v tvare

$$\int_{-a}^a f(t)g(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(kT_f)g(lT_g)W(k, l), \quad (3.4)$$

kde  $W(k, l)$  sú váhy nezávislé na funkčných hodnotách spracúvaných signálov.

Je zrejmé, že pri strojovom výpočte budeme musieť oba nekonečné rady nahradiť konečnými. Dostávame aproximačný vzťah, ktorý má v maticovom zápise jednoduchú formu

$$\int_{-a}^a f(t)g(t)dt \approx \vec{f}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \vec{g}, \quad (3.5)$$

pričom  $\vec{f}$ ,  $\vec{g}$  sú stĺpcové vektory obsahujúce vzorky signálov  $f(t)$ ,  $g(t)$  a  $\mathbf{W}$  je *váhová matica*. Tá nemusí byť nevyhnutne štvorcovou maticou. Vo všeobecnosti signály  $f(t)$  a  $g(t)$  nemusia mať ani rovnakú periódu vzorkovania, ani rovnaký počet vzoriek.

Ak získaný aproximačný vzťah určitého integrálu aplikujeme na výpočet skalárneho súčinu (2.25), dostaneme približný vzťah pre koeficienty radu (2.22) v tvare

$$a_n \approx \vec{f}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \vec{\psi}_n, \quad n \in \mathbb{N}^0. \quad (3.6)$$

Hoci nie sme schopní presne zrekonštruovať signál  $f(t)$ , pretože nemáme k dispozícii žiadne vzorky mimo intervalu pozorovania, signál  $g(t)$  bude v našom prípade  $\psi_n(t)$ . Počet vzoriek signálu  $g(t)$  môžeme zvoliť takmer ľubovoľne veľký (sme obmedzení len výpočtovou kapacitou) a tým sme schopní zrekonštruovať ho s takmer ľubovoľnou presnosťou.

### 3.1.1 Špeciálny prípad váhovej matice

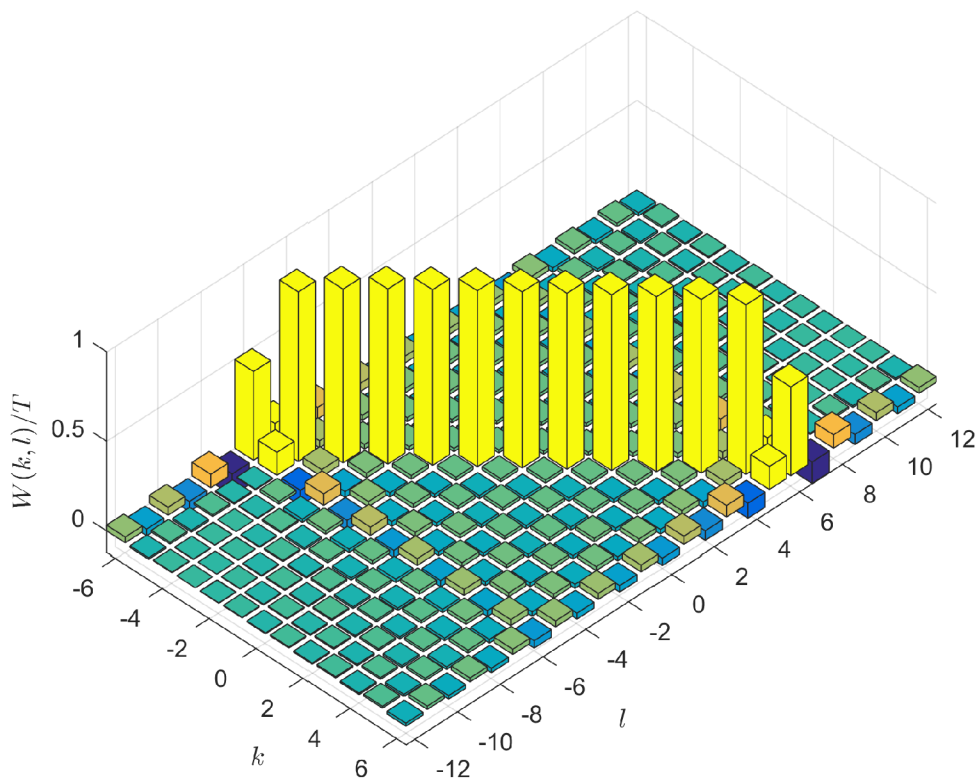
V prípade, kedy majú signály  $f(t)$ ,  $g(t)$  zhodnú periódu vzorkovania  $T > 0$  a integračná hranica  $a$  je kladným celočíselným násobkom tejto periódy

$$a = KT, \quad K \in \mathbb{N}, \quad (3.7)$$

dochádza k výraznému zjednodušeniu vzťahu (3.3). Ten potom dokážeme v závislosti na hodnotách  $k$  a  $l$  vyjadriť pomocou štandardne implementovaných funkcií programu MATLAB – `cos`, `cosint` a `sinint`. Tu uvedieme len výsledok

$$W(k, l) = \begin{cases} -\frac{T}{\pi} \left( \left[ \frac{1 - \cos x}{x} \right]_{2\pi(-K-k)}^{2\pi(K-k)} + \int_{2\pi(-K-k)}^{2\pi(K-k)} \frac{\sin x}{x} dx \right), & k = l \\ \frac{T}{2\pi} \frac{(-1)^{k+l}}{k-l} \left( \int_{2\pi(-K-k)}^{2\pi(K-k)} \frac{1 - \cos x}{x} dx - \int_{2\pi(-K-l)}^{2\pi(K-l)} \frac{1 - \cos x}{x} dx \right), & k \neq l \end{cases}, \quad (3.8)$$

Jeho odvodenie sa nachádza v prílohe A.



Obr. 3.1: Príklad špeciálnej váhovej matice pre  $K = 6$ .

Špeciálna váhová matica pripomína lichobežníkové integračné pravidlo – tomuto pravidlu zodpovedá diagonálna matica s hodnotami  $[0,5 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 1 \ 0,5]$  a je špeciálnym prípadom Newtonovho-Cotesovho pravidla, ktorému bude pozornosť venovaná neskôr.

### 3.1.2 Overenie ortogonalít

Jednou z vhodných metód pre overenie kvality integračnej metódy je kontrola ortonormality básových funkcií – teda kontrola numerického výpočtu vzťahu (2.3). Zostavme maticu chýb ortonormality  $\mathbf{Q}$ , ktorej prvky sú dané vzťahom

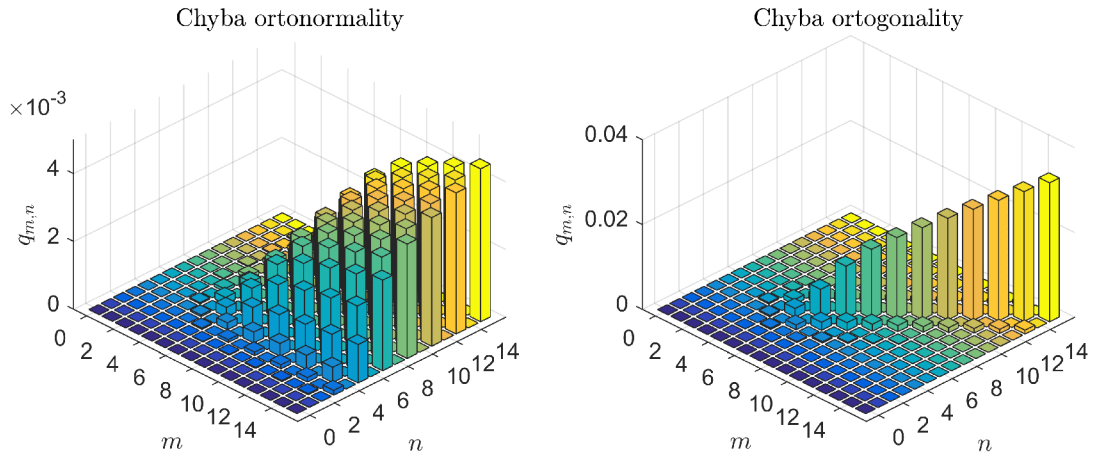
$$q_{m,n} = |\langle \psi_m, \psi_n \rangle_1 - \delta_{m,n}|, \quad m, n \in \mathbb{N}^0, \quad (3.9)$$

kde  $\delta_{m,n}$  je Kroneckerovo delta

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1, & \text{pre } m = n \\ 0, & \text{pre } m \neq n. \end{cases} \quad (3.10)$$

Na základe (2.3) by sme mohli očakávať, že všetky prvky  $\mathbf{Q}$  budú nulové, lenže – ako sme spomenuli vyššie – matica  $\mathbf{W}$  má konečné rozmery a preto výpočet nemôže byť

dokonale presný. Zvolíme periódu vzorkovania  $T = 10^{-3}$  a budeme predpokladať, že obe funkcie podliehajúce skalárnemu súčinu sú navzorkované len pre  $|t| \leq 1$ . Kvalita ortogonalita je pri tejto integračnej metóde relatívne nízka – odchýlky sú príliš veľké, zobrazené sú vľavo na obrázku nižšie.



Obr. 3.2: Chyba ortonormality podľa (3.9) (vľavo) a chyba ortogonalita podľa (3.11) (vpravo) pri integrácii pomocou funkcií sinc. Bolo použité  $c = 10$ .

Pri výpočte ortogonalita na intervale  $t \in \mathbb{R}$  sú integračné hranice  $\pm\infty$ , preto vo vzťahu (3.8) môžeme položiť  $K \rightarrow \infty$ . Tým sa z váhovej matice stane matica jednotková. Vzťah (3.5) vtedy môžeme nahradiť skalárnym súčinom vektorov obsahujúcich vzorky signálov. Takže aby sme skontrolovali ortogonalitu  $\psi_n$  na intervale  $t \in \mathbb{R}$ , stačí funkcie generovať s veľmi dlhou periódou vzorkovania – priamo periódou  $T = \pi/\Omega$ . Funkcie boli vygenerované pre  $T = 0,2$  a  $|t| \leq 30$ . Chyba definovaná vzťahom

$$q_{m,n} = \left| \sqrt{\lambda_m(c)\lambda_n(c)} \cdot \langle \psi_m, \psi_n \rangle_\infty - \delta_{m,n} \right|, \quad m, n \in \mathbb{N}^0 \quad (3.11)$$

je zobrazená na vyššie uvedenom obrázku vpravo. Pre vyššie rády chyba rastie hlavne kvôli tomu, že sme pri výpočte vynechali priebeh pre  $|t| > 30$ .

## 3.2 Výpočet pomocou polynomickej integrácie

Ako bolo ukázané vyššie, interpolácia funkciami sinc vedie k chybám, ak pri výpočte vynecháme vzorky signálu. Vzorky nám však budú chýbať vždy, pretože to je

podstatou extrapoláčnej úlohy. Mali sme možnosť vidieť, že presný výpočet skalárneho súčinu (2.25) nie je možný, preto sa zameriame na ďalšie spôsoby približného výpočtu určitého integrálu.

V článku [9] spočíva podstata približného vyčíslenia  $\{a_n\}$  v preložení  $r+1$  vzoriek integrovaného signálu polynómom rádu  $r$  a následnou integráciou tohto polynómu.

### 3.2.1 Newtonova-Cotesova kvadratúrna formula

V skutočnosti je možné odvodiť, že namiesto hľadania koeficientov interpolačného polynómu a jeho následnej integrácie stačí sčítať vzorky signálu s váhou  $C_k$ . Opakovaným použitím vzťahu

$$\int_{t_0}^{t_0+nT} s(t) dt \approx \frac{n-1}{T} \sum_{k=0}^r C_k s(t_0 + kT), \quad (3.12)$$

postupne integrujeme signál  $s(t)$  na celom intervale  $\langle -1, 1 \rangle$ , pričom koeficienty  $C_k$  sú dané vzťahom

$$C_k = \frac{1}{r} \frac{(-1)^{r-k}}{k!(r-k)!} \int_0^r \frac{t^{r+1}}{t-k} dt. \quad (3.13)$$

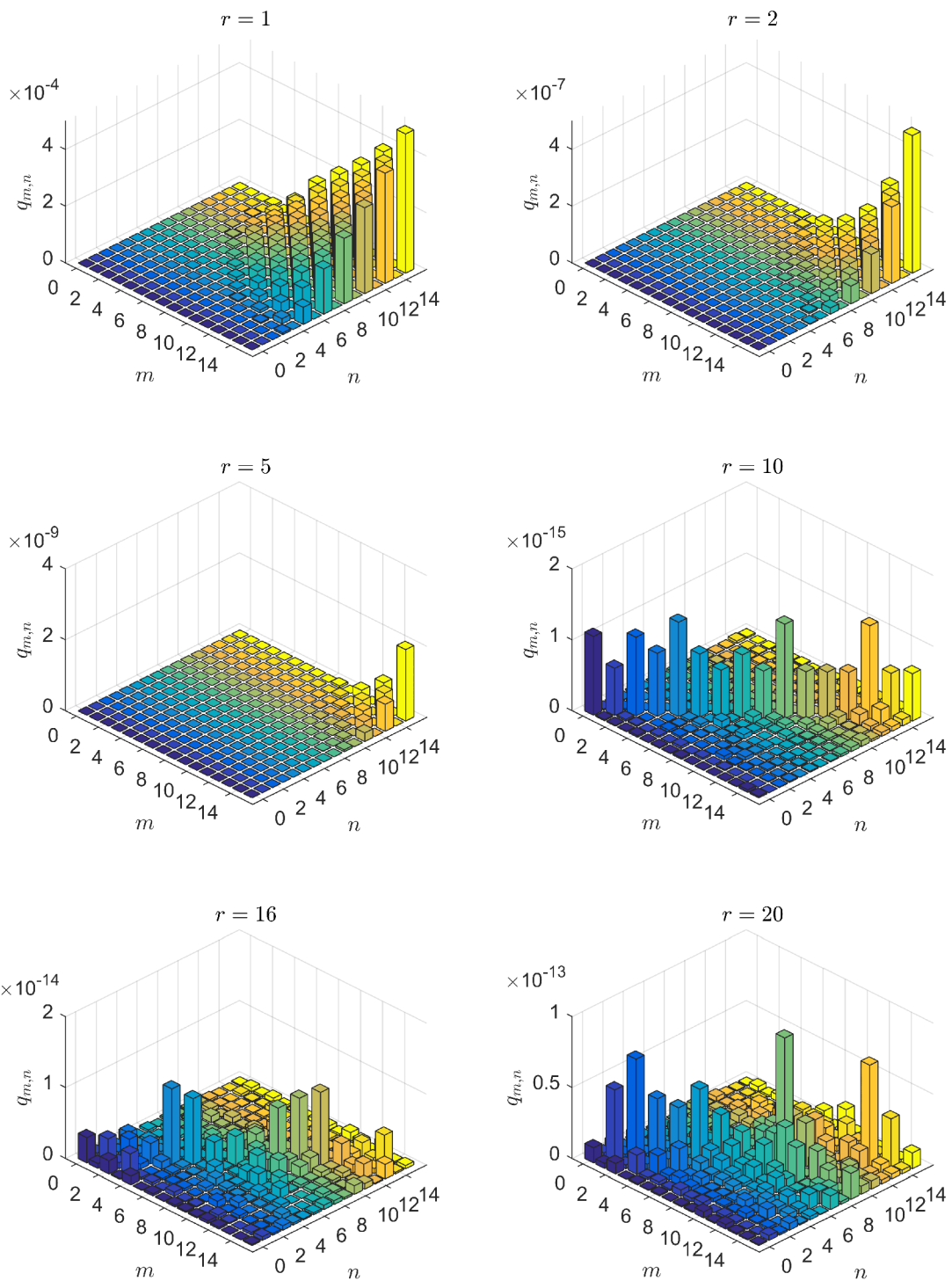
Uvedený postup sa nazýva *Newtonova-Cotesova metóda* [18].

V našom prípade je integrandom  $s(t) = f(t)\psi_n(c, t)$ . Ak bude splnený predpoklad, že je tento súčin dobre aproximovateľný interpolačným polynómom, môžeme dosiahnuť omnoho menšiu chybu než pri použití interpolácie jednotlivých signálov funkciami sinc.

### 3.2.2 Overenie ortonormality

Newtonovou-Cotesovou metódou rôznych rádov  $r$  sme určili chybu ortogonalnosti  $\mathbf{Q}$ , ktorej prvky sú definované vzťahom (3.9). Bolo použité  $c = 10$  a perióda vzorkovania  $T = 10^{-3}$ . Výsledky sú uvedené na nasledujúcej strane. Upozorňujeme, že jednotlivé grafy majú rôznu mierku na zvislej osi. Farba grafu slúži len pre lepšiu orientáciu na osi  $n$ .





Obr. 3.3: Chyba ortonormality v závislosti na ráde  $r$  Newtonovho-Cotesovho pravidla.  $T = 10^{-3}$ ,  $c = 10$ .

### 3.2.3 Otázka voľby rádu polynómu

Analyzujeme obrázok 3.3. Najprv sa zamerajme na  $n, m \ll 2c/\pi$ . Na základe našich úvah o interpolácii signálu funkciami sinc vieme, že pre integráciu frekvenčne obmedzených signálov postačuje prostá sumácia všetkých ich vzoriek. Všetky vzorky súčinnu  $f(t)\psi_n(c, t)$  samozrejme nebudeme mať k dispozícii, ale pre  $n \ll 2c/\pi$  sú vzorky  $\psi_n(c, t)$  mimo intervalu  $\langle -1, 1 \rangle$  zanedbateľné. Výpočet  $a_n$  stačí realizovať pravidlom rádu  $r = 0$ . Tým sme objasnili, prečo je na obrázku chyba zanedbateľná ak sú  $m$  a  $n$  menšie než asi 7.

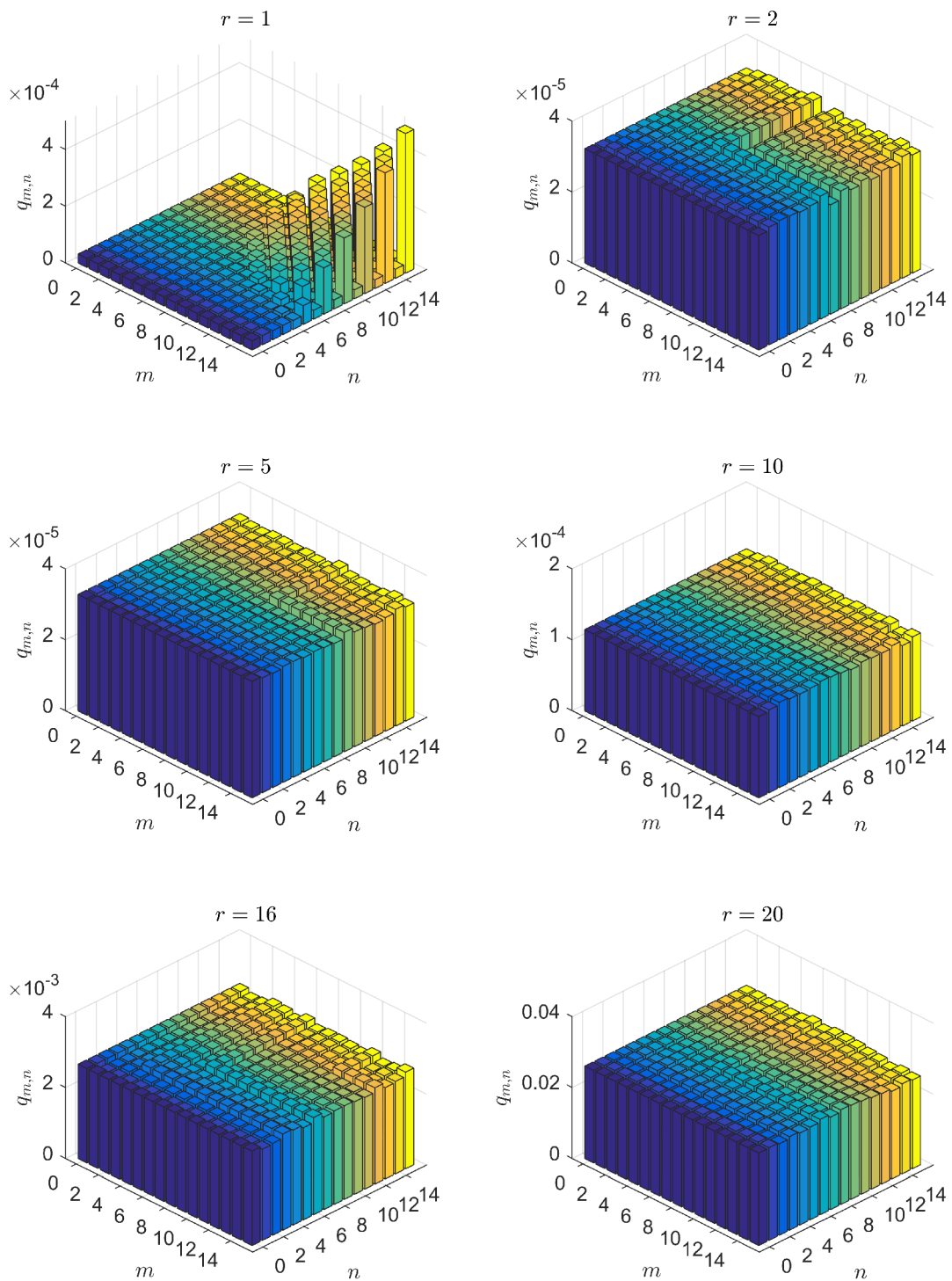
Teraz uvažujme väčšie  $n$ , pretože pre úspešnú extrapoláciu potrebujeme vyčíslit aj ďalšie členy spektra. Vtedy sa už  $\psi_n(t)$  blížia Legendreovým polynómom. Mali by sme voliť  $r$  podobné  $n$  alebo ešte väčšie. Súhlasí to s obrázkom – vidíme, že u vyšších rádoch  $m, n$  dosiahneme zmenšenie chyby práve zvýšením rádu integračného pravidla. Minimálna chyba ortonormality na diagonále je asi  $10^{-15}$ . Je možné, že táto chyba už súvisí s nepresnosťou vyčíslenia funkčných hodnôt  $\psi_n(c, t)$ . Generovali sme ich s presnosťou na 17 platných číslic.

Treba však myslieť na to, že rád  $r$  nemôžeme zvyšovať ľubovoľne, pretože výsledky začne závažne ovplyvňovať šum. Nižšie uvedená tabuľka obsahuje hodnoty Newtonovych-Cotesovych koeficientov pre niektoré rády.

Tab. 3.1: Newtonove-Cotesove koeficienty

$r$	$H_0$	$H_1$	$H_2$	$H_3$	$H_4$	$H_5$	$H_6$	$H_7$	$H_8$
1	1	1							
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$						
3	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$					
4	$\frac{7}{45}$	$\frac{32}{45}$	$\frac{12}{45}$	$\frac{32}{45}$	$\frac{7}{45}$				
5	$\frac{19}{144}$	$\frac{75}{144}$	$\frac{50}{144}$	$\frac{50}{144}$	$\frac{75}{144}$	$\frac{19}{144}$			
6	$\frac{41}{420}$	$\frac{216}{420}$	$\frac{27}{420}$	$\frac{272}{420}$	$\frac{27}{420}$	$\frac{216}{420}$	$\frac{41}{420}$		
7	$\frac{751}{8640}$	$\frac{3577}{8640}$	$\frac{1323}{8640}$	$\frac{2989}{8640}$	$\frac{2989}{8640}$	$\frac{1323}{8640}$	$\frac{3577}{8640}$	$\frac{751}{8640}$	
8	$\frac{989}{14\ 175}$	$\frac{1472}{14\ 175}$	$\frac{-232}{14\ 175}$	$\frac{2624}{14\ 175}$	$\frac{-2270}{14\ 175}$	$\frac{2624}{14\ 175}$	$\frac{-232}{14\ 175}$	$\frac{1472}{14\ 175}$	$\frac{989}{14\ 175}$

Väčšinou je chyba metódy tým menšia, čím je  $r$  väčšie, ale v tabuľke si môžeme všimnúť, že pri vysokom  $r$  metóda niektorým vzorkám signálu prikladá omnoho vyššiu váhu, než iným. To je jedným z dôvodov, prečo sa pri zväčšovaní  $r$  nad istú hodnotu prestane chyba aproximácie zmenšovať, ale začne s  $r$  prudko narastať. Potom už aj veľmi malé zaokrúhľovacie chyby majú zásadný vplyv na tvar interpolačného polynómu a vedú k chybe ortonormality (na obrázku 3.3 prípad  $r = 20$ ).



Obr. 3.4: Stredná kvadratická chyba ortonormality v závislosti na ráde  $r$  Newtonovho-Cotesovho pravidla, ak je ku  $\psi_n$  pridaný Gaussov šum.  $T = 10^{-3}$ ,  $c = 10$ .

Aby sme sa lepšie priblížili realite, kontrolu ortonormality sme zopakovali s tým, že sme k jednej z funkcií vystupujúcich v skalárnom súčine pričítali Gaussov šum. Ten mal energiu  $10^{-6}$  energie signálu, teda pomer signál–šum bol 60 dB. Experiment sme zopakovali 1 000-krát a Obr. 3.4 zobrazuje strednú kvadratickú chybu týchto 1 000 realizácií.

Článok [9] pri perióde vzorkovania  $T = 10^{-3}$  (čo je rovnaká hodnota, ako sme zvolili aj my) odporúča integráciu pomocou polynómu rádu 250. Ale to je o rád vyššia hodnota než tá, pri ktorej nám pri šume prestala platiť ortonormalita. Dôvodom je, že v článku popísaný algoritmus pracuje s veľmi vysokým počtom platných číslíc a uvažuje nulový šum.

Dochádzame k záveru, že ak budeme chcieť spracúvať nejaký reálne meraný signál, určite nebudeme môcť použiť ľubovoľne vysoký rád polynómu. Výsledky naznačujú, že v praxi nebudeme môcť použiť interpolačný polynóm rádu vyššieho než asi 10.

### 3.3 Výpočet metódou najmenších štvorcov

Nahliadnime teraz na problém určovania koeficientov spektra z mierne iného uhla pohľadu. Kvôli vete 2.11 sme sa doteraz (podobne ako mnohí iní autori) až príliš sústredili na rôzne spôsoby numerickej aproximácie určitého integrálu. Je to prirodzené, keďže výhodou ortogonálnych báz je vlastnosť, že koeficienty spektra sú nezávislé a každý z nich môže byť vyčíslený zvlášť – výpočtom určitého integrálu.

Na druhú stranu, pri bázach, ktoré nie sú ortogonálne, sme odkázaní na úplne iné spôsoby výpočtu spektra. Môže ísť napríklad o riešenie sústavy rovníc, iteratívne postupy hľadania extrému funkcionálu a podobne. V skutočnosti nám ale nič nebráni v aplikácii týchto postupov aj na bázy ortogonálne.

#### 3.3.1 Odvodenie metódy

Predpokladajme, že meraný signál nám je známy len v diskrétnych časových okamihoch  $t_1, t_2, \dots, t_K$ , ktoré ležia v intervale  $\langle -1, 1 \rangle$ , no vo všeobecnosti nemusia byť ekvidistantné. Na základe známych vzoriek  $\{f(t_k)\}_{k=1}^K$  signálu  $f(t)$  môžeme zaviesť funkcionál

$$J(\vec{a}) = \sum_{k=1}^K \left[ f(t_k) - \sum_{n=0}^N a_n \psi_n(t_k) \right]^2, \quad (3.14)$$

ktorého význam je ten, že vyjadruje súčet kvadrátov odchýlok signálu od jeho aproximácie radom (3.2) v bodoch vzorkovania. V minime funkcionálu  $J(\vec{a})$  je jeho gradient nulový

$$\nabla J(\vec{a}) = \vec{0}. \quad (3.15)$$

Zrejme platí

$$\frac{\partial J(\vec{a})}{\partial a_m} = 2 \sum_{k=1}^K \left\{ \left[ f(t_k) - \sum_{n=0}^N a_n \psi_n(t_k) \right] \psi_m(t_k) \right\}. \quad (3.16)$$

Ak prejdeme k maticovému a vektorovému zápisu

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} f(t_1) \\ f(t_2) \\ \vdots \\ f(t_K) \end{bmatrix}, \quad \vec{\psi}_n = \begin{bmatrix} \psi_n(t_1) \\ \psi_n(t_2) \\ \vdots \\ \psi_n(t_K) \end{bmatrix}^T, \quad \Psi_{N,K} = \begin{bmatrix} \vec{\psi}_0 \\ \vec{\psi}_1 \\ \vdots \\ \vec{\psi}_N \end{bmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

môžeme vzťah (3.16) zapísať nasledovne

$$\frac{\partial J(\vec{a})}{\partial a_m} = 2 \vec{\psi}_m \cdot (\vec{f} - \Psi_{N,K}^T \cdot \vec{a}). \quad (3.18)$$

Tým pádom podmienku pre minimum  $J(\vec{a})$  môžeme písať v tvare

$$\Psi_{N,K} \cdot (\vec{f} - \Psi_{N,K}^T \cdot \vec{a}) = \vec{0}. \quad (3.19)$$

Ak získanú rovnicu zľava vynásobíme maticou  $(\Psi_{N,K} \cdot \Psi_{N,K}^T)^{-1}$ , dostávame výsledný vzťah pre koeficienty spektra

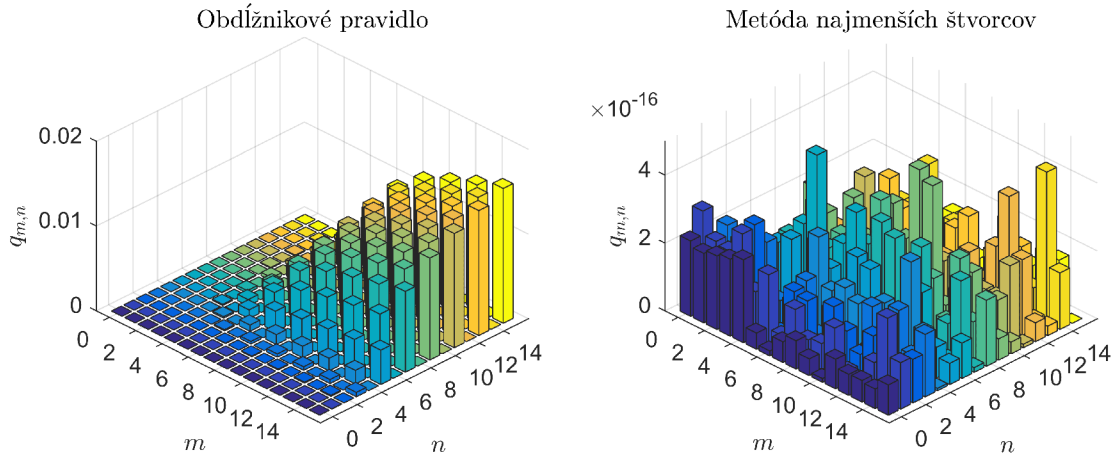
$$\vec{a} = (\Psi_{N,K} \cdot \Psi_{N,K}^T)^{-1} \cdot \Psi_{N,K} \cdot \vec{f}. \quad (3.20)$$

Vzťahu môžeme rozumieť tak, že súčin  $\Psi_{N,K} \cdot \vec{f}$  reprezentuje Newtonovu-Cotesovu metódu nultého rádu (obdĺžnikové integračné pravidlo) a inverzia matice zabezpečuje korekciu ňou získaných koeficientov.

Azda jedinou nevýhodou uvedeného vzťahu je potreba výpočtu inverzie matice. Je rozumné zaoberať sa otázkou, za akých podmienok je matice invertovateľná. Našťastie máme predstavu o tom, ako vyzerá súčin  $\Psi_{N,K} \cdot \Psi_{N,K}^T$  v prípade ekvidistantného vzorkovania. Stačí si uvedomiť, že tento súčin je vlastne výpočet ortogonalita použitím Newtonovej-Cotesovej metódy rádu  $r = 0$  (obdĺžnikového pravidla). Súčin  $\Psi_{N,K} \cdot \Psi_{N,K}^T$  je blízky jednotkovej matici  $\mathbf{I}$  delenej periódou vzorkovania  $T$  a odchýlky sú spôsobené nepresnosťou obdĺžnikovej metódy. Túto odchýlku od skalárnej matice  $\mathbf{I}/T$  vidno na obrázku 3.5 vľavo.

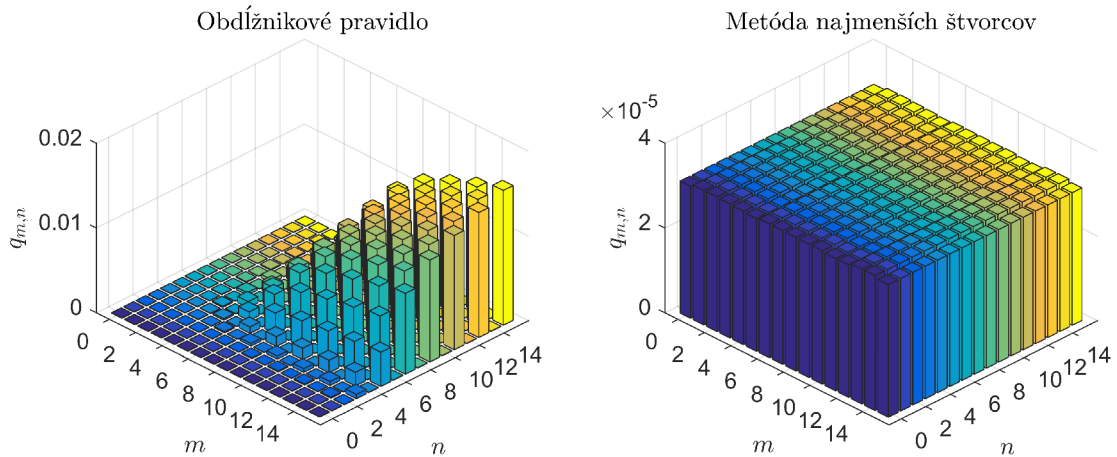
### 3.3.2 Overenie ortonormality

Ak za  $\vec{f}$  dosadíme  $\vec{\psi}_n$ , môžeme tým zopakovať overenie ortogonalita z časti 3.1.2. Grafickým znázornením si môžeme utvoriť predstavu o výsledkoch obdĺžnikového pravidla. Tiež vidno, že výsledkom metódy najmenších štvorcov je vynikajúca ortonormalita.



Obr. 3.5: Chyba ortonormality bez šumu.  $T = 10^{-3}$ ,  $c = 10$ .

Ak za  $\vec{f}$  dosadíme  $\vec{\psi}_n$  s Gaussovým šumom o energii  $10^{-6}$  a experiment zopakujeme 10 000-krát, dostaneme nasledujúcu strednú kvadratickú chybu:



Obr. 3.6: Stredná kvadratická chyba ortonormality za prítomnosti šumu.  $T = 10^{-3}$ ,  $c = 10$ .

Veľkou výhodou metódy najmenších štvorcov je skutočnosť, že (oproti Newtonovej-Cotesovej metóde rádu  $r > 1$ ) prikladá všetkým vzorkám súčinu  $f(t)\psi_n(c, t)$  rovnakú váhu. Vďaka tomu má nižšiu citlivosť na šum, než Newtonova-Cotesova metóda pri voľbe vyšších rádo  $r$ .

### 3.3.3 Súvislosť s Gerchbergovou metódou

Označme symbolom  $\bar{D}$  doplnok k operátoru  $D$ , takže pre ľubovoľný signál  $f(t) \in L_2$  platia vzťahy

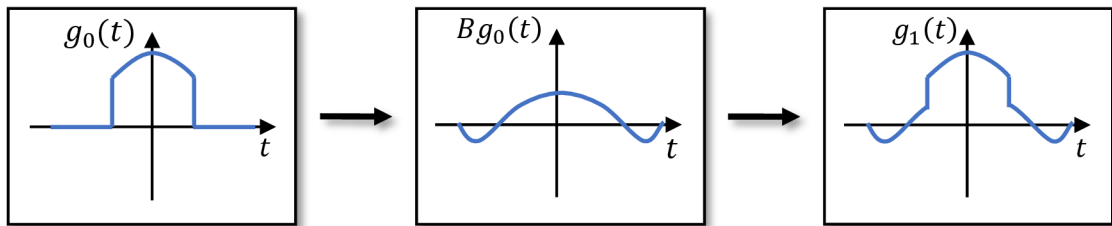
$$f(t) = \bar{D}f(t) + Df(t), \quad (3.21)$$

$$\bar{D}f(t) = \begin{cases} f(t) & \text{pre } |t| > 1 \\ 0 & \text{pre } |t| \leq 1. \end{cases} \quad (3.22)$$

Predpokladajme – tak ako na začiatku tejto kapitoly – že meriame ľubovoľný signál  $f(t) \in \mathcal{B}$ , ale jeho priebeh zmeriame len na konečnom intervale a preto máme k dispozícii len signál  $g_0(t) = Df(t)$ . Gerchbergova extrapolačná metóda [6] je iteratívny postup, pri ktorom na známy signál  $g_0(t)$  aplikujeme operátory  $\bar{D}$  a  $B$ . Pre  $m$ -tú iteráciu platí

$$g_m(t) = \bar{D}B g_{m-1}(t) + g_0(t), \quad m \in \mathbb{N}. \quad (3.23)$$

Jej priebeh si naznačíme na ilustračnom obrázku.



Obr. 3.7: Prvá iterácia Gerchbergovej metódy.

Prvá iterácia začína signálom  $g_0(t) \in \mathcal{D}$ . Je konečný v čase, ale nemá konečné spektrum. Výsledkom operácie  $B$  je signál  $Bg_0(t)$  s konečným spektrom a teda nemôže byť konečný v čase<sup>1</sup>. Vďaka tomu došlo do istej miery k akémusi extrapolovaniu signálu mimo interval pozorovania. Lenže táto operácia zároveň zmenila časový priebeh signálu na intervale pozorovania a preto tento úsek signálu  $Bg_0(t)$  v intervale  $\langle -1, 1 \rangle$  nahradíme signálom  $g_0(t)$ . Tým dostávame výsledok prvej iterácie – signál  $g_1(t)$ .

Druhá iterácia začína signálom  $g_1(t)$ , ktorý obsahuje skoky a preto jeho spektrum nie je konečné. Opäť sa zopakujú rovnaké kroky, ako v prvej iterácii a výsledkom je zlepšenie aproximácie. Podľa [19] pre chybu dvoch po sebe nasledujúcich iterácií platí

$$\|f - g_m\| < \|f - g_{m-1}\|, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (3.24)$$

<sup>1</sup>Je to dôsledok (1.22). Signál  $Bg(t)$  by mohol byť konečný v čase len vtedy, ak by bol nulový pre všetky  $t \in \mathbb{R}$ .

Kedže spojitú verziu algoritmu nemožno prakticky realizovať, nahrádza sa diskretnou. Predpokladajme, že máme k dispozícii len  $K > 1$  vzoriek signálu zaznamenaných v časových okamihoch

$$t_k = 2 \frac{k-1}{K-1} - 1, \quad k \leq K, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.25)$$

Tieto vzorky tvoria vektor

$$\vec{g} = [0 \quad \dots \quad 0 \quad g(t_1) \quad \dots \quad g(t_K) \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T, \quad (3.26)$$

ktorého  $K$  známych prvkov je doplnených nulami tak, aby mal celkovú dĺžku  $L$  prvkov. Signál chceme extrapolovať pre všetky  $k$  v rozsahu  $1 \leq k \leq L$  pomocou ortonormálnych komplexných exponenciál

$$\vec{\phi}_n = L^{-1/2} \begin{bmatrix} e^{-j1n2\pi/L} \\ e^{-j2n2\pi/L} \\ \vdots \\ e^{-jLn2\pi/L} \end{bmatrix}^T, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \vec{\phi}_{-N} \\ \vec{\phi}_{1-N} \\ \vdots \\ \vec{\phi}_N \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

V  $m$ -tom kroku sa spočíta diskretná Fourierova transformácia, ktorej výsledkom sú frekvenčné zložky spektra

$$\vec{a}_m = \Phi \cdot \vec{g}_m. \quad (3.28)$$

Počet riadkov matice  $\Phi$  sa vždy volí nižší, než počet stĺpcov. Spektrum signálu  $\vec{a}_m$  je konečné (vektor má konečný počet prvkov). Ak je diskretné spektrum konečné, anglicky sa nazýva *index-limited*. Pre  $m$ -tú iteráciu diskretného Gerchbergovho algoritmu platí

$$\vec{g}_{m+1} = \bar{\mathbf{D}} \cdot \Phi^H \cdot \vec{a}_m + \vec{g}_0, \quad (3.29)$$

kde  $\Phi^H$  značí Hermiteovskú združenú maticu k matici  $\Phi$ . Ak by algoritmus bežal donekonečna, pri  $m \rightarrow \infty$  by sa vzorky signálu ustálili na hodnotách, ktoré sú riešením rovnice

$$\vec{g} = \bar{\mathbf{D}} \cdot \Phi^H \cdot \Phi \cdot \vec{g} + \vec{g}_0. \quad (3.30)$$

Úpravou tejto rovnice dostaneme vzťah pre jednokrokovú modifikáciu Gerchbergovho algoritmu

$$\vec{g} = (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{D}} \cdot \Phi^H \cdot \Phi)^{-1} \cdot \vec{g}_0, \quad (3.31)$$

podobne, ako v článku [7]. Komplexné exponenciály majú periódu  $L$  vzoriek, preto je výsledkom speriodizovaný extrapolovaný priebeh. Aby sa signál z dvoch po sebe nasledujúcich periód príliš neovplyvňoval, treba voliť dostatočne veľké  $L$ . Veľkou nevýhodou rovnice (3.31) je potreba výpočtu inverzie veľmi rozmernej matice veľkosti  $L \times L$ .



Odvodme znova vzťah pre jednokrokovú Gerchbergovu metódu, ale tentokrát pre členy spektra. Ak rovnicu (3.30) zľava vynásobíme maticou  $\Phi$ , dostaneme vzťah, ktorý popisuje ustálené hodnoty spektra

$$\vec{a} = \Phi \cdot (\bar{\mathbf{D}} \cdot \Phi^H \cdot \vec{a} + \vec{g}_0). \quad (3.32)$$

S cieľom nájsť jej riešenie ju upravíme na

$$\vec{a} = (\mathbf{I} - \Phi \cdot \bar{\mathbf{D}} \cdot \Phi^H)^{-1} \cdot \Phi \cdot \vec{g}_0. \quad (3.33)$$

Keďže použitá báza je ortonormálna, platí

$$\Phi \cdot \Phi^H = \mathbf{I} \quad (3.34)$$

a vďaka tomu môžeme vzťah (3.33) zjednodušiť na

$$\vec{a} = (\Phi \cdot \mathbf{D} \cdot \Phi^H)^{-1} \cdot \Phi \cdot \vec{g}_0. \quad (3.35)$$

V tejto rovnici postačuje použiť matice  $\Phi$  obsahujúce len vzorky na intervale pozorovania, pretože vzorky mimo neho budú aj tak vynulované kvôli násobeniu operátorom  $\mathbf{D}$  alebo signálom  $\vec{g}_0$ . Inverzia má v tomto prípade rozmer rovný počtu použitých ortonormálnych funkcií a preto je oveľa menšia, než v prípade (3.31). Tento výsledok je v skutočnosti vzťahom pre aproximáciu vzoriek signálu  $\vec{g}_0$  ortonormálnou bázou komplexných exponenciál podľa metódy najmenších štvorcov. Jednokroková Gerchbergova metóda má zásadný problém v tom, že nie vždy je možné vypočítať hľadanú inverziu.

Za povšimnutie ale stojí, že funkcie  $\vec{\phi}_n$  v skutočnosti nemusia byť komplexné exponenciály. Môžeme ich nahradiť ľubovoľnými ortonormálnymi funkciami spĺňajúcimi (3.34). Spektrum  $\vec{a}$  potom bude *index-limited* v zmysle zovšeobecneného Fourierovho spektra. Ak položíme  $L \rightarrow \infty$ , čo môžeme, pretože hodnota  $L$  nemá vplyv na (3.35), zistíme, že ortonormalitu v zmysle (3.34) spĺňajú aj ďalšie frekvenčne obmedzené funkcie – napríklad funkcie  $\lambda_n(c)\psi_n(c, t)$  alebo funkcie sinc. Z týchto funkcií sú najvhodnejšie práve  $\psi_n(c, t)$  a to vďaka ich dvojitej ortogonalite, ktorá zabezpečuje, že  $\Phi \cdot \mathbf{D} \cdot \Phi^H$  je blízka skalárnej matici. Dospeli sme k záveru, že metóda najmenších štvorcov je v skutočnosti zovšeobecnením jednokrokovej Gerchbergovej metódy pre ľubovoľnú frekvenčne obmedzenú bázu. Obe metódy minimalizujú kritérium

$$J(\vec{a}) = \sum_{k=1}^K \left[ f(t_k) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(t_k) \right]^2. \quad (3.36)$$

## 4 Extrapolácia modelovaných signálov

V predchádzajúcej kapitole sme si ukázali, že kvalita extrapolácie bude závisieť na viacerých parametroch. Predpokladajme, že perióda vzorkovania  $T$  je daná spracúvaným signálom a nemôžeme ju meniť. Stále však máme tri parametre, ktoré potrebujeme nastaviť. Sú to:

- metóda aproximácie koeficientov  $\{a_n\}$ ,
- $c$  – frekvenčné obmedzenie,
- $N$  – rád ukončenia rozvoja do Fourierovho radu.

V tejto časti predvedieme možnosti extrapolácie na dvoch konkrétnych signáloch, pri ktorých budeme predpokladať znalosť ich vzoriek len na intervale pozorovania.<sup>1</sup>

### 4.1 Kritérium kvality extrapolácie

**Definícia 4.1** *Integrujme kvadrát rozdielu správneho signálu  $f(t)$  a jeho aproximácie  $f_N(t)$  mimo intervalu pozorovania až po také  $t$ , pre ktoré bude hodnota tohto integrálu rovná  $q$ .*

$$q = \int_{-\epsilon}^{-1} |f(t) - f_N(t)|^2 dt + \int_1^{\epsilon} |f(t) - f_N(t)|^2 dt, \quad \epsilon > 1, \quad (4.1)$$

kde  $q$  je nejaká pevne zvolená konštanta. O  $\epsilon$  budeme hovoriť, že ide o mieru kvality extrapolácie.

Hodnota  $\epsilon$  nám v podstate vraví, do akej vzdialenosti od počiatku súradnicovej sústavy je aproximácia  $f_N(t)$  blízka  $f(t)$ . Vyššia hodnota  $\epsilon$  značí vyššiu kvalitu extrapolácie. V najhoršom prípade, ak  $\epsilon \approx 1$ , znamená to, že signál je extrapolovaný nesprávne.

### 4.2 Harmonický signál

Zvoľme jednoduchý signál v tvare

$$f(t) = \sin \omega_0 t, \quad (4.2)$$

$$F(\omega) = j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]. \quad (4.3)$$

Zdôrazňujeme, že tieto dve rovnice vyjadrujú cieľ, ku ktorému by sme sa mali dopracovať. Na počiatku extrapoláčnej úlohy nám nie sú známe – máme k dispozícii len  $Df(t)$ .

---

<sup>1</sup>Pripomíname, že v kapitole 2 sme pevne zvolili  $\tau = 2$ . Z toho dôvodu namiesto  $\Omega$  píšeme priamo  $c$ . Z rovnakého dôvodu je v tejto kapitole intervalom pozorovania vždy práve interval  $\langle -1, 1 \rangle$ .

## 4.2.1 Analytické odvedenie spektra

Vďaka jednoduchému tvaru signálu bude jednoduché aj analytické vyjadrenie spektra  $\{a_n\}$ . Postupujme najprv tak, akoby sme naozaj mali k dispozícii len  $Df(t)$ . Použitím vzťahu (2.25) dostávame

$$a_n = \int_{-1}^1 \sin \omega_0 t \psi_n(c, t) dt, \quad (4.4)$$

čo môžeme využitím Eulerovho vzťahu zapísať nasledovne

$$a_n = \frac{1}{2j} \left[ \int_{-1}^1 e^{j\omega_0 t} \psi_n(c, t) dt - \int_{-1}^1 e^{-j\omega_0 t} \psi_n(c, t) dt \right]. \quad (4.5)$$

Použitím (2.9) môžeme tento vzťah upraviť na

$$a_n = j^{-n-1} \sqrt{\frac{\pi \lambda_n(c)}{2c}} \left[ \psi_n\left(c, -\frac{\omega_0}{c}\right) - \psi_n\left(c, \frac{\omega_0}{c}\right) \right]. \quad (4.6)$$

Napokon využitím vety 2.3 o parite a miernou úpravou získame

$$a_n = \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) \sqrt{\frac{2\pi}{c \lambda_n(c)}} \psi_n\left(c, \frac{\omega_0}{c}\right), \quad n \in \mathbb{N}^0. \quad (4.7)$$

Toto odvedenie pochádza z práce [10].

Za povšimnutie stojí to, že keby sme mali k dispozícii celý priebeh signálu  $f(t)$  a pre výpočet spektra použili (2.24), dostali by sme mierne odlišný vzťah

$$a_n = \begin{cases} \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) \sqrt{\frac{2\pi}{c \lambda_n(c)}} \psi_n\left(c, \frac{\omega_0}{c}\right), & \text{pre } |\omega_0| \leq c \\ 0, & \text{pre } |\omega_0| > c \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}^0. \quad (4.8)$$

Pri porovnaní vidno, že tieto dva vzťahy pre spektrum  $\{a_n\}$  sa nezhodujú ak má signál frekvenciu  $|\omega_0| > c$ . Vzťah (4.8) vždy zabezpečuje dosiahnutie najmenšej možnej vzdialenosti  $\|f - f_N\|_\infty$ . Samozrejme, pri  $|\omega_0| > c$  zabezpečuje iba to, že sa vzdialenosť nezväčšuje. Vzťah (4.7) minimalizuje len vzdialenosť  $\|f - f_N\|_1$ , a pri jeho použití môže vzdialenosť  $\|f - f_N\|_\infty$  rásť nado všetky medze. Toto porovnanie ukazuje, aká dôležitá je správna voľba parametra  $c$ .

## 4.2.2 Numerický experiment

Pre signál (4.2) sme zvolili konkrétnu hodnotu frekvencie a periódy vzorkovania

$$\begin{aligned} \omega_0 &= 0,5, \\ T &= 10^{-3}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

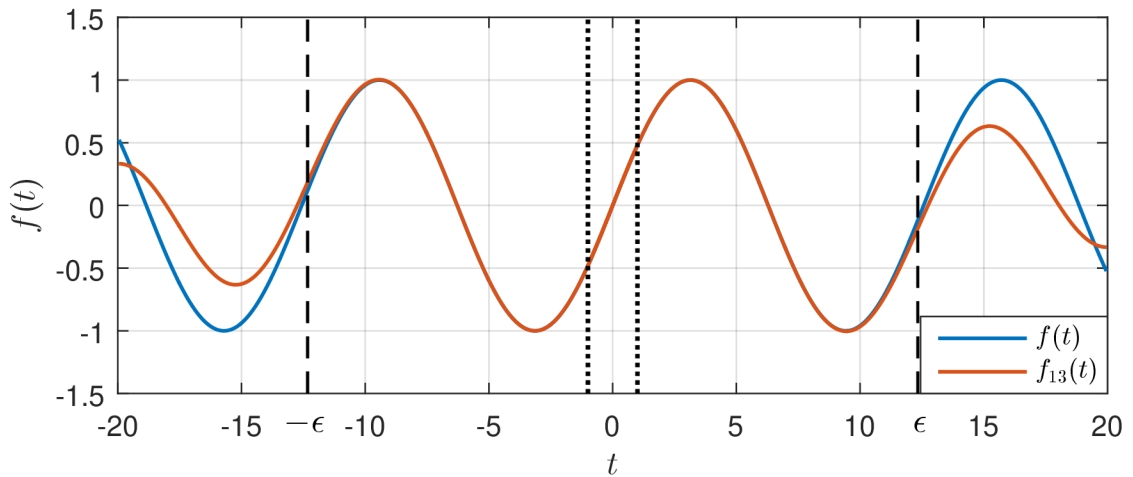
Aproximovali sme ho konečným radom

$$f_N = \sum_{n=0}^N a_n \psi_n(1, t), \quad (4.10)$$

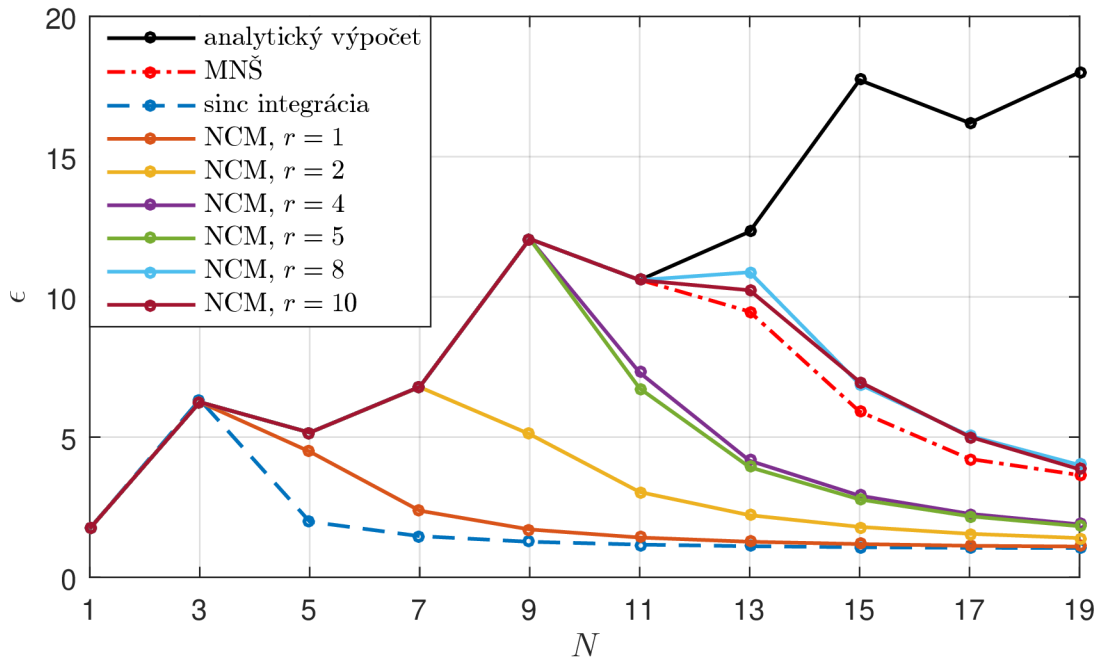
ktorého koeficienty boli vypočítané:

- analyticky podľa vŕahu (4.7),
- na základe integrácie funkcií sinc, teda váhovou maticou v tvare (3.8),
- použitím Newtonovho-Cotesovho pravidla rôznych rádov a
- metódou najmenších štvorcov.

Kvalita extrapolácie v zmysle definície 4.1 bola spočítaná pre rôzne hodnoty  $N$  a rôzne integračné metódy. Vždy bolo použité kritérium s hodnotou  $q = 0,2$ . Nižšie uvedený obrázok znázorňuje použitie kritéria v prípade analyticky určenej aproximácie  $f_{13}(t)$ . Bodkovanou čiarou je vyznačený interval pozorovania.



Obr. 4.1: Aplikácie kritéria kvality podľa definície 4.1.

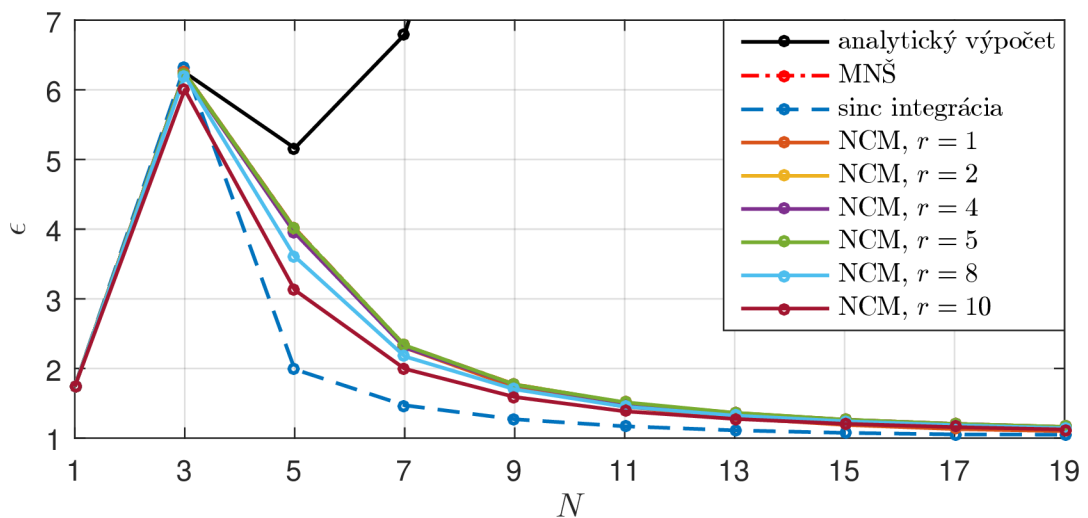


Obr. 4.2: Vplyv rádu  $N$  na kvalitu extrapolácie signálu (4.2) bez prítomnosti šumu.

Numerický experiment na Obr. 4.2 odhaľuje dôležitú skutočnosť – so zvyšovaním rádu Fourierovho radu  $f_N(t)$  sa zvyšuje aj kvalita extrapolácie  $\epsilon$ , ale len po istú maximálnu hranicu, a potom začne klesať. Problém nespočívá v samotnom Fourierovom rade. Môžeme sa presvedčiť, že analyticky vyjadrené koeficienty tento problém nepostihuje a ich extrapolácia sa môže navyšovaním  $N$  zlepšovať donekonečna. Problém je v numerických metódach, pretože dokážu správne určiť len niekoľko prvých členov Fourierovho rozvoja. Aby sme dosiahli čo najlepšiu extrapoláciu, mali by sme použiť správnu numerickú metódu a zároveň musíme vybrať vhodný rád  $N$ , pri ktorom zastavíme rozvoj signálu do Fourierovho radu.

Ďalej experiment bez šumu ukazuje, do akej miery si jednotlivé metódy poradia s tým, že priebeh signálu medzi okamihmi vzorkovania nemáme k dispozícii. Tak, ako by sme očakávali, s týmto problémom si dokáže najlepšie poradiť Newtonova-Cotesova metóda vyšších rádov (v legende NCM). Rovnako dobré výsledky poskytuje aj metóda najmenších štvorcov (v legende MNS).

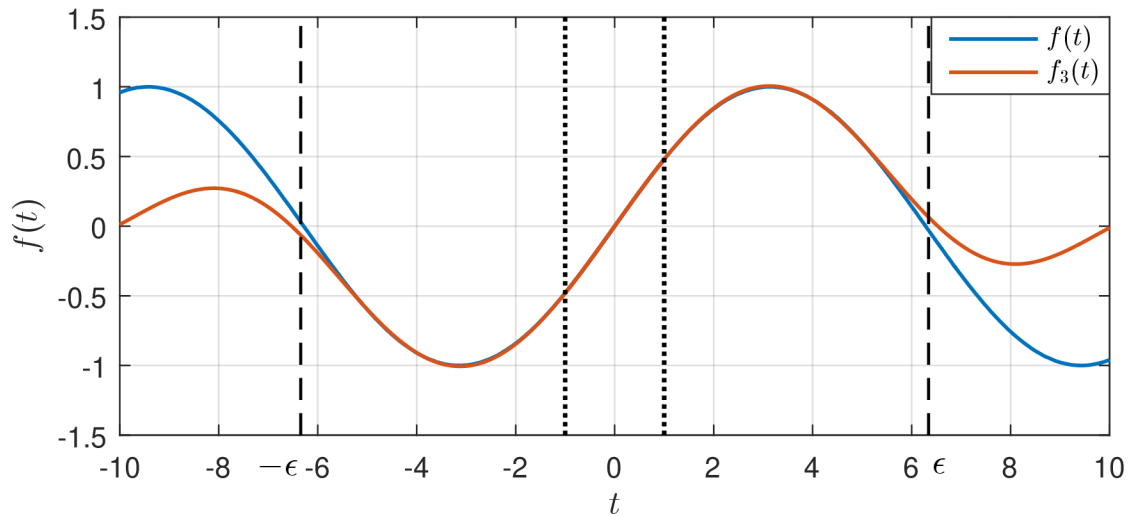
Aby sme porovnali praktickú použiteľnosť metód, zopakovali sme numerický experiment, pričom k signálu sme pričítali Gaussov šum. Odstup signál-šum bol 60 dB a počet opakovaní experimentu bol  $R = 1000$ . Priemerné hodnoty kvality extrapolácie  $\epsilon$  sú na obrázku nižšie.



Obr. 4.3: Vplyv integračnej metódy na strednú hodnotu kvality extrapolácie signálu (4.2) v závislosti na ráde  $N$  za prítomnosti Gaussovho šumu,  $T = 10^{-3}$ .

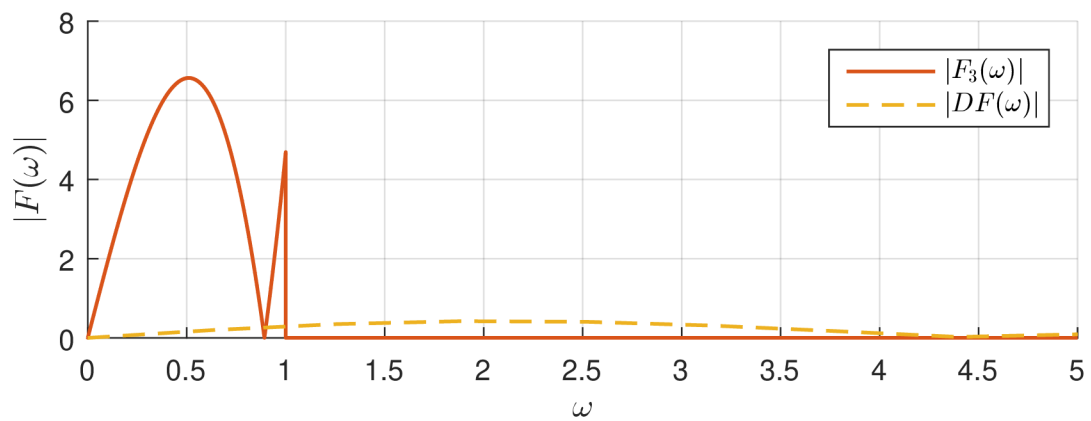
Je zaujímavé, ako zásadne je kvalita extrapolácie ovplyvnená už veľmi malým šumom (Obr. 4.3). Výsledky rôznych metód sú si navzájom veľmi podobné. Pod vplyvom šumu integračné pravidlá vysokých rádov (8, 10) strácajú svoju výhodu a dávajú horšie výsledky než ostatné metódy. Výsledky integračných pravidiel rádov 1, 2, 4, 5 a metódy najmenších štvorcov v grafe splývajú.

Najvyššia kvalita extrapolácie bola dosiahnutá pri  $N = 3$ . Signál sa podarilo viacerými metódami extrapolovať na šesťnásobok dĺžky intervalu pozorovania. Extrapolácia je zobrazená na nasledujúcom obrázku.



Obr. 4.4: Najlepšia dosiahnutá extrapolácia signálu (4.2) so šumom.

Napriek šumu bolo možné spoľahlivo doplniť priebeh signálu na interval asi šesťnásobnej dĺžky. Výsledok je ešte zaujímavejší, ak si zobrazíme jeho Fourierov obraz. Kým klasická Fourierova transformácia signálu  $Df(t)$  nám dáva spektrum obsahujúce len veľmi málo užitočnej informácie, Fourierov obraz radu  $f_3(t)$  nám dovoľuje spoľahlivo odčítať maximum na frekvencii  $|\omega| \approx 0,5$ .

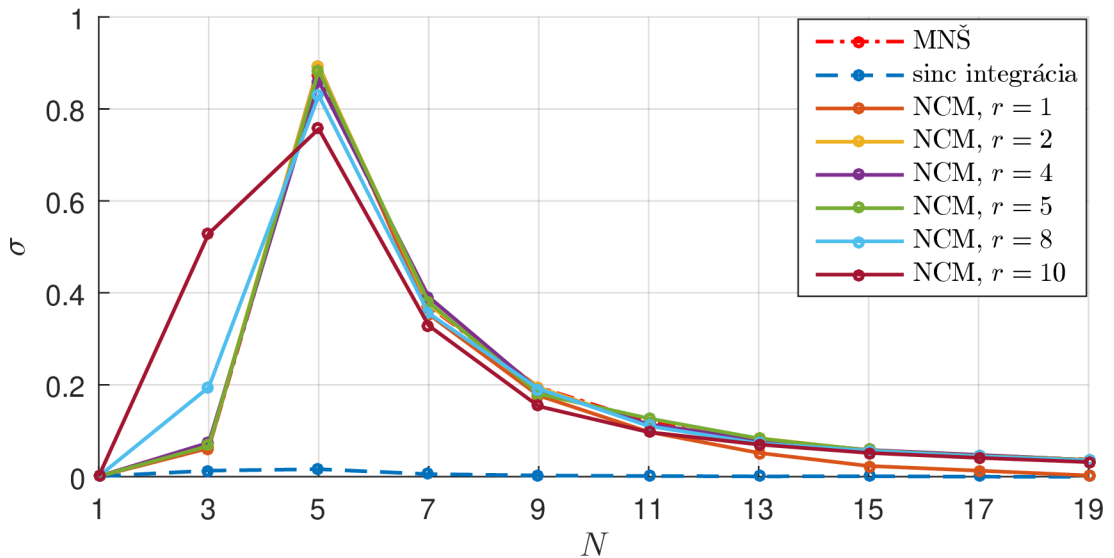


Obr. 4.5: Spektrum najlepšej dosiahnutej extrapolácie signálu (4.2) so šumom.

Okrem strednej hodnoty kvality extrapolácie je dôležitá aj jej smerodajná odchýlka

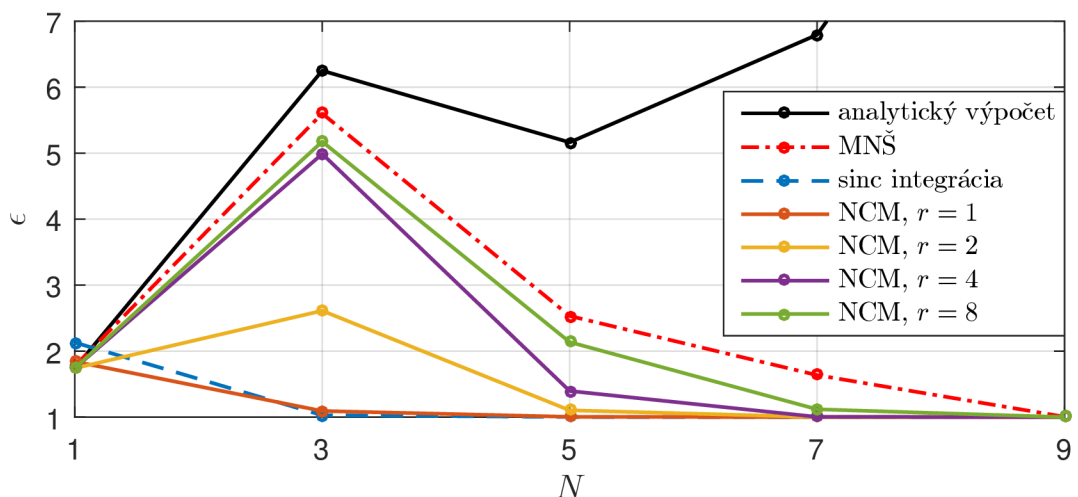
$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{R} \sum_{i=1}^R \left( \epsilon_i - \frac{1}{R} \sum_{k=1}^R \epsilon_k \right)^2}. \quad (4.11)$$

Ak má metóda vysokú smerodajnú odchýlku kvality  $\sigma$ , značí to, že niekedy sú jej výsledky veľmi dobré a inokedy zasa veľmi zlé – v závislosti na konkrétnej inštancii šumu. Odchýlka bola vypočítaná zo všetkých  $R = 1\,000$  realizácií experimentu.



Obr. 4.6: Smerodajná odchýlka kvality extrapolácie  $\sigma$  od jej strednej hodnoty.

Na základe uvedených grafických výsledkov by sa mohlo zdať, že metóda založená na numerickej integrácii pomocou funkcií sinc dáva rovnako dobré výsledky, ako ostatné metódy a zároveň je z nich najstabilnejšia – má najmenšiu odchýlku  $\sigma$ . To však platí len pri dostatočne veľkej perióde vzorkovania. Ak pre signál (4.2) opäť zvolíme frekvenciu  $\omega_0 = 0,5$ , ale tentokrát použijeme periódu vzorkovania  $T = 1/4$ , dostaneme signál, s ktorým si táto metóda neporadí.



Obr. 4.7: Vplyv integračnej metódy na strednú hodnotu kvality extrapolácie signálu (4.2) v závislosti na ráde  $N$  za prítomnosti Gaussovho šumu,  $T = 1/4$ .

Tak, ako pri vysokom šume zlyhávajú Newtonove-Cotesove integračné pravidlá vysokých rádov ( $r > 8$ ), pri dlhej perióde vzorkovania zlyhávajú pravidlá nízkych rádov ( $r \leq 2$ ) a zlyháva aj metóda používajúca funkcie sinc. Pri uvedenom signáli sa zdajú byť najvhodnejšími pravidlá rádu  $r = 4$ ,  $r = 8$  a metóda najmenších štvorcov. Ak porovnáme všetky vyššie uvedené grafy, vidno, že tieto metódy zakaždým dosiahli veľmi dobré výsledky.

Ďalej je vhodné porovnať najlepšiu dosiahnutú kvalitu extrapolácie pri perióde vzorkovania  $T = 10^{-3}$  a  $T = 1/4$ . Je zaujímavé, že zvýšenie frekvencie vzorkovania 250-násobne prinesie len veľmi malé zvýšenie kvality  $\epsilon$  (z hodnoty 5,5 na asi 6,5). Znamená to, že pre zlepšenie extrapolácie je potrebné zlepšiť odstup signál–šum. Výsledok je v zhode s článkom [11], podľa ktorého je vzdialenosť, do ktorej môžeme signál spoľahlivo extrapolovať, obmedzená najmä šumom. Frekvencia vzorkovania je skôr dôležitá pre zachovanie ortogonalita bázy, ktorú používame, no ak vzorky signálu nepoznáme s dostatočnou presnosťou, zvyšovanie frekvencie vzorkovania nám výrazne nepomôže.



## 4.3 Neharmonický signál

Zvoľme signál

$$f(t) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + t^2} \quad (4.12)$$

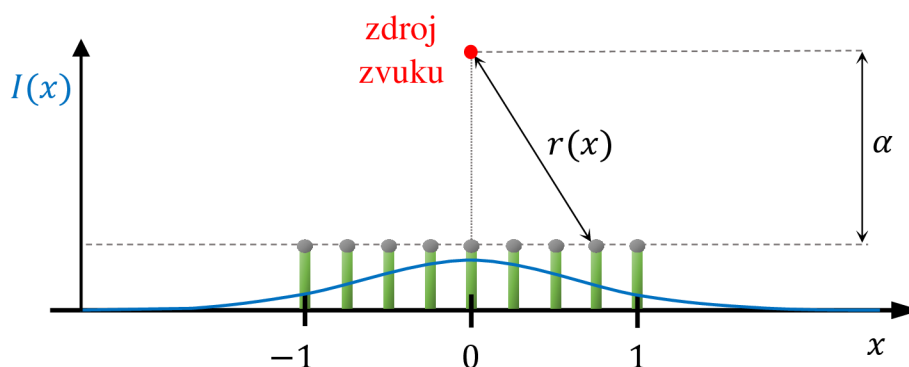
majúci spektrum

$$F(\omega) = \pi\alpha e^{-\alpha|\omega|} \quad (4.13)$$

kde  $\alpha > 0$  konštanta ovplyvňujúca mierku na časovej osi. Pri riešení extrapoláčnej úlohy budeme opäť predpokladať, že máme k dispozícii len vzorky  $Df(t)$ .

### 4.3.1 Motivácia

Predstavme si deväť mikrofónov umiestnených na priamke tak, aby rozostupy medzi nimi boli zhodné. Predpokladajme, že vo vzdialenosti  $\alpha$  sa priamo nad stredom takéhoto radu mikrofónov nachádza bodový zdroj zvuku a že vysiela zvukové vlny rovnomerne do všetkých smerov priestoru.



Obr. 4.8: Zjednodušený model mikrofónového radu

Je zrejmé, že vzdialenosť jednotlivých mikrofónov od zdroja je

$$r(x) = \sqrt{\alpha^2 + x^2}, \quad (4.14)$$

kde  $x$  je súradnica konkrétneho mikrofónu. Podľa zákona prevrátených štvorcov, ktorý popisuje šírenie zvuku, bude intenzita meraná jednotlivými mikrofónmi daná vzťahom

$$I(x) = I_0 \frac{\alpha^2}{r^2(x)} = I_0 \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + x^2}. \quad (4.15)$$

Ak tento vzťah porovnáme s definíciou nášho druhého spracúvaného signálu (4.12), vidíme medzi nimi podobnosť až na zmenu značenia.

Praktický význam našej úvahy je ten, že ak by sme boli schopní extrapolovať takýto signál aj napriek prítomnosti šumu, znamenalo by to, že sme schopní doplniť informáciu o intenzite zvuku v miestach, kde mikrofóny nie sú prítomné.

### 4.3.2 Numerický experiment

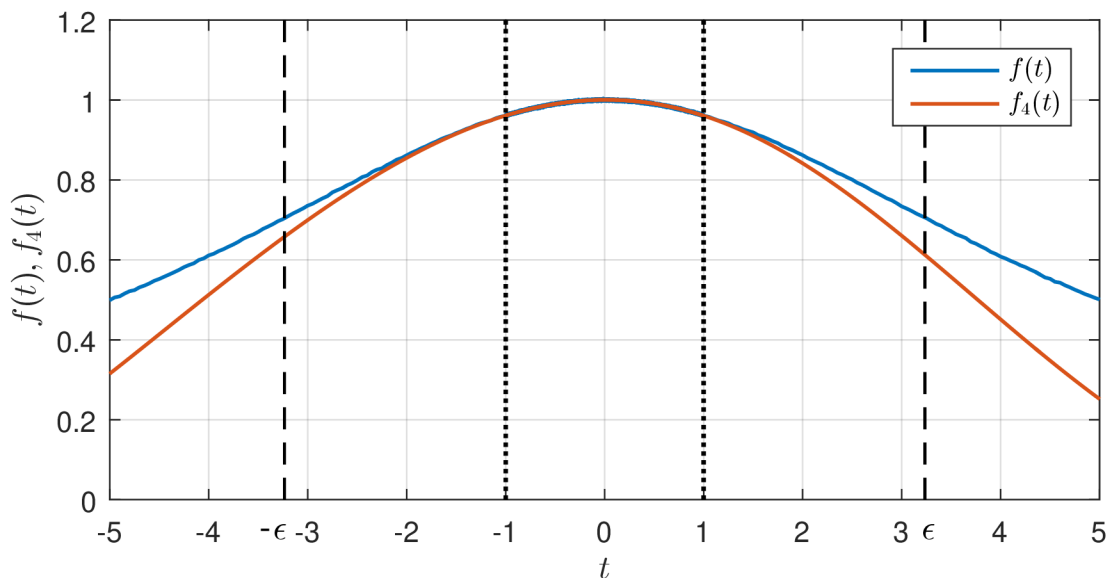
Zvolili sme konkrétny tvar signálu (4.12) nastavením parametrov

$$\begin{aligned}\alpha &= 5, \\ T &= 1/4.\end{aligned}\tag{4.16}$$

Chystáme sa extrapolovať signál, ktorý nemá konečné spektrum,  $f(t) \notin \mathcal{B}$ , ale aspoň jeho amplitúda exponenciálne klesá s  $\omega$ . Článok [9] ukázal, že extrapolácia môže byť dobrá, aj vtedy, keď signál nie je dokonale frekvenčne obmedzený.

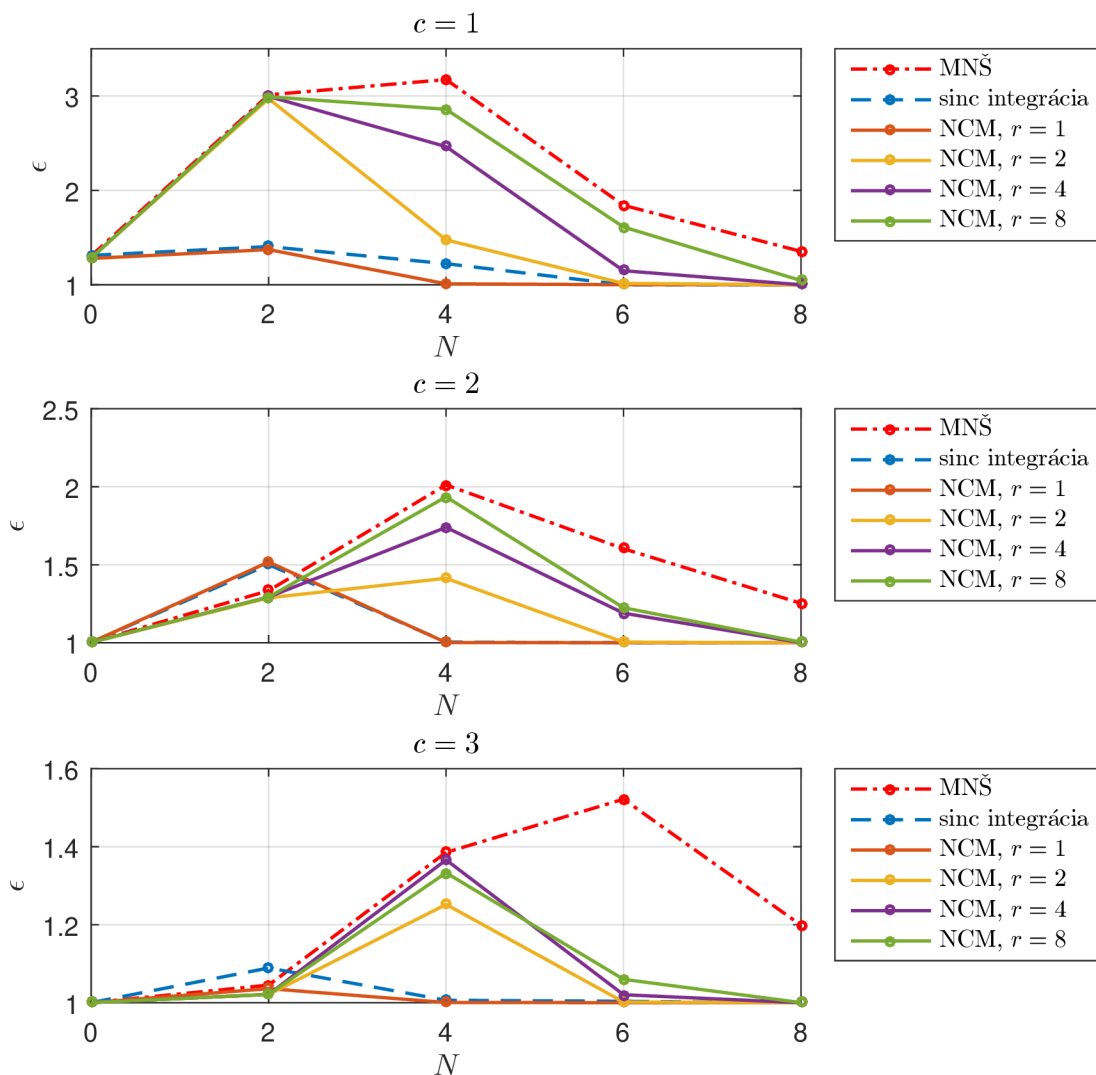
Takýto „nevýhodný“ signál sme vybrali zámerné, aby sme zbytočne nestrácali čas analýzou prehnane idealizovaného priebehu. Pri všetkých numerických experimentoch bude prítomný Gaussov šum o energii  $10^{-6}$  energie pôvodného signálu.

Pokúsili sme sa signál extrapolovať pri voľbe  $c \in \{1, 2, 3\}$ , no najlepšie výsledky sme dosiahli pri  $c = 1$  a  $N = 4$  (tzn. pri piatich členoch Fourierovho radu) s použitím metódy najmenších štvorcov.



Obr. 4.9: Najlepšia dosiahnutá extrapolácia signálu (4.12).

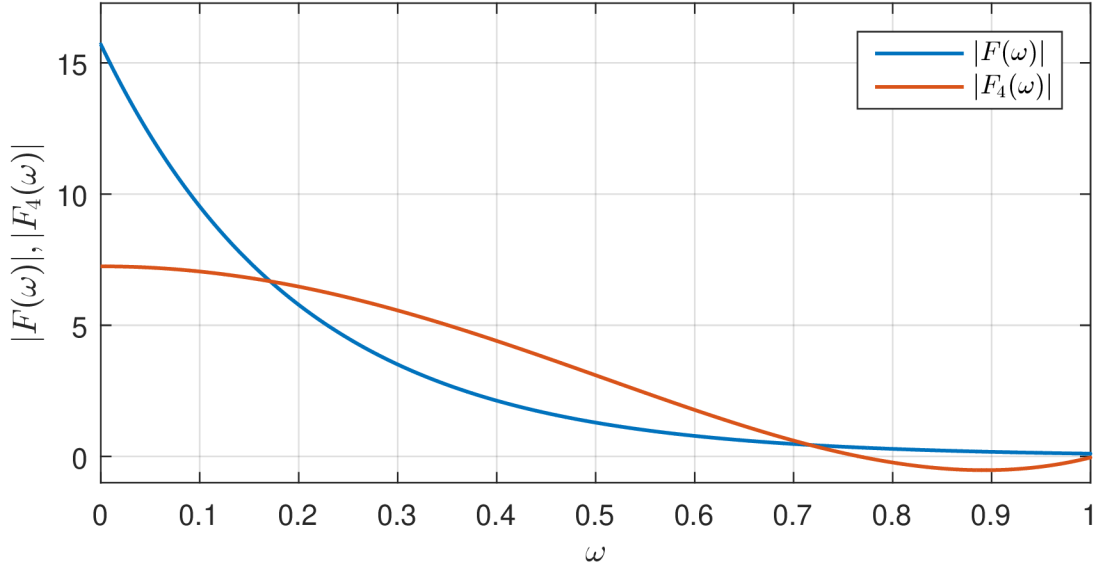
Keďže signál obsahuje šum, experiment sme opakovali 1 000-krát a stredné hodnoty kvality extrapolácie  $\epsilon$  v zmysle (4.1) s hodnotou  $q = 0,1$  sú uvedené na ďalšej strane.



Obr. 4.10: Vplyv numerickej metódy na kvalitu extrapolácie signálu (4.12) obsahujúceho Gaussov šum.

Zhoršenie kvality extrapolácie s narastajúcim  $c$  je dané tým, že pre väčšie  $c$  si funkcie  $\psi_n$  vyžadujú aj vyššiu frekvenciu vzorkovania. Ak frekvenciu vzorkovania nezvýšime, majú zhoršenú ortonormalitu a pri výpočte Fourierovho radu dochádza k väčším chybám. Keďže spôsob vzorkovania je presne daný zadaním extrapoláčnej úlohy, musíme znižovať  $c$ .

Lenže, ak nastavíme  $c = 1/2$ , kvalita extrapolácie sa zhorší a pre menšie  $c$  ďalej klesá. Extrapolácia je horšia, pretože sa snažíme tvrdiť, že spektrum signálu je nulové pre  $|\omega| > 1/2$ , hoci to nie je pravda. Signál v skutočnosti obsahuje nezanedbateľné frekvenčné zložky aj pre  $|\omega| > 1/2$ .



Obr. 4.11: Spektrum signálu a jeho extrapolácie pri  $c = 1$ .

Napriek tomu, že sme hovorili o časovom priebehu, stále ide o analógiu k obrázku 4.8. V prípade, že by išlo o dáta z nášho modelu mikrofónového poľa, mohli by sme povedať, že sme úspešne doplnili informáciu pre niekoľko mikrofónov za hranicami poľa.

## 4.4 Extrapoláčna matica

Na dvoch modelovaných signáloch sme si ukázali možnosti aplikácie PSWF pri extrapolácii signálov. Signál nám bol známý len v diskretných časových okamihoch  $t_1, t_2, \dots, t_K$ , ležiacich v intervale  $\langle -1, 1 \rangle$ . Vzorky signálu získané v týchto okamihoch tvorili vektor  $\vec{f} = [f(t_1) \ f(t_2) \ \dots \ f(t_K)]^T$ , z neho sme po jednom určovali prvky vektoru  $\vec{a} = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_N]^T$  a sledovali sme, ako sa postupne mení kvalita extrapolácie. Celý postup mozeme zapisat maticovo

$$\vec{a} = \Psi_{N,K} \cdot \mathbf{W} \cdot \vec{f}, \quad (4.17)$$

kde  $\Psi_{N,K}$  je matica vzoriek  $\psi_n(c, t)$  podla (3.17) a  $\mathbf{W}$  označuje váhovú maticu závislú na integračnej metóde. V prípade metódy najmenších štvorcov by sme namiesto tohto vzťahu použili (3.20).

Aby sme na základe  $\vec{a}$  získali extrapolovaný signál

$$\vec{f}_N = [f_N(t_{K+1}) \ f_N(t_{K+2}) \ \dots \ f_N(t_{K+L})]^T, \quad L \in \mathbb{N},$$

použijeme maticu  $\Psi$ , ktorá obsahuje vzorky  $\psi_n(c, t)$  mimo intervalu pozorovania

$$\vec{f}_N = \Psi_{N,L}^T \cdot \vec{a}. \quad (4.18)$$

Uvedený spôsob výpočtu dobre demonštruje princíp extrapolácie, ale pre praktickú aplikáciu obsahuje zbytočne veľký počet operácií. Všimnime si, že môžeme vytvoriť maticu

$$\mathbf{E} = \Psi_{N,L}^T \cdot \Psi_{N,K} \cdot \mathbf{W}. \quad (4.19)$$

Nazvime ju *extrapolačná matica*, pretože jej použitím dostávame extrapolovaný signál vykonaním jedinej maticovej operácie

$$\vec{f}_N = \mathbf{E} \cdot \vec{f}. \quad (4.20)$$

Ak nepotrebuje meniť parametre extrapoláčnej metódy, maticu  $\mathbf{E}$  môžeme mať uloženú v pamäti. To napríklad umožňuje v reálnom čase spracúvať a extrapolovať meraný signál.

## 4.5 Matica $\mathcal{P}$ -transformácie

V predchádzajúcich častiach sme si ukázali, že extrapoláciou môžeme účinne dodefinovať priebeh signálu za hranicami intervalu pozorovania. Fourierovou transformáciou doplneného signálu vieme dosiahnuť výrazne lepšie frekvenčné rozlíšenie, než prostou Fourierovou transformáciou signálu  $Df(t)$ .

Ak by sme takúto vylepšenú frekvenčnú analýzu chceli implementovať na reálnom počítači, dodefinovanie signálu mimo intervalu pozorovania by znamenalo ďalšie nároky na pamäť, pretože novozískané vzorky signálu by sme museli niekam uložiť. Kvôli praktickej realizovateľnosti by dodefinovanie signálu nemohlo byť vykonané na celej reálnej osi času, ale len v konečnom počte bodov. Ďalej by bolo nepraktické uchovávať extrapolačnú maticu veľkej dĺžky a extrapolácia nasledovaná Fourierovou transformáciou by bola nadmerne výpočtovo náročná.

Všetky uvedené problémy je možné obísť zavedením novej integrálnej transformácie – takzvanej  $\mathcal{P}$ -transformácie [10]. Každý signál  $f(t) \in \mathcal{B}$  je možné vyjadriť radom (2.22). Ak na tento rad aplikujeme Fourierovu transformáciu, tak využitím vety 2.5 dostaneme Fourierov obraz signálu vyjadrený radom Fourierových obrazov funkcií  $\psi_n$

$$F_N(\omega) = \begin{cases} \sum_{n=0}^N a_n j^{-n} \sqrt{\frac{2\pi}{c\lambda_n(c)}} \psi_n\left(c, \frac{\omega}{c}\right) & \text{pre } |\omega| \leq c \\ 0 & \text{pre } |\omega| > c. \end{cases} \quad (4.21)$$

Koeficienty tohto radu sú dané vzťahom (2.25). Po dosadení a úprave dostaneme

$$F_N(\omega) = \begin{cases} \int_{-1}^1 f(t) \sum_{n=0}^N j^{-n} \sqrt{\frac{2\pi}{c\lambda_n(c)}} \psi_n\left(c, \frac{\omega}{c}\right) \psi_n(c, t) dt & \text{pre } |\omega| \leq c \\ 0 & \text{pre } |\omega| > c, \end{cases} \quad (4.22)$$

takže Fourierov rad  $F_N(\omega)$  môžeme vypočítať integrálnou transformáciou

$$F_N(\omega) = \mathcal{P}\{f(t)\} = \int_{-1}^1 f(t)P_N(c, t, \omega) dt \quad (4.23)$$

s jadrom

$$P_N(c, t, \omega) = \sqrt{\frac{2\pi}{c}} \sum_{n=0}^{\infty} j^{-n} \lambda_n^{-1/2}(c) \psi_n\left(c, \frac{\omega}{c}\right) \psi_n(c, t). \quad (4.24)$$

Aby sme túto transformáciu mohli realizovať numericky, zvolíme si konečný počet konkrétnych frekvencií  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_L$  ležiacich na intervale  $\langle -c, c \rangle$ , pre ktoré chceme  $\mathcal{P}$ -transformáciu vypočítať. Ak zavedieme komplexnú maticu

$$\hat{\Psi}_{N,K} = \sqrt{\frac{2\pi}{c}} \begin{bmatrix} \frac{\psi_0\left(\frac{\omega_1}{c}\right)}{j^0\sqrt{\lambda_0}} & \frac{\psi_0\left(\frac{\omega_2}{c}\right)}{j^0\sqrt{\lambda_0}} & \cdots & \frac{\psi_0\left(\frac{\omega_L}{c}\right)}{j^0\sqrt{\lambda_0}} \\ \frac{\psi_1\left(\frac{\omega_1}{c}\right)}{j^1\sqrt{\lambda_1}} & \frac{\psi_1\left(\frac{\omega_2}{c}\right)}{j^1\sqrt{\lambda_1}} & \cdots & \frac{\psi_1\left(\frac{\omega_L}{c}\right)}{j^1\sqrt{\lambda_1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\psi_N\left(\frac{\omega_1}{c}\right)}{j^N\sqrt{\lambda_N}} & \frac{\psi_N\left(\frac{\omega_2}{c}\right)}{j^N\sqrt{\lambda_N}} & \cdots & \frac{\psi_N\left(\frac{\omega_L}{c}\right)}{j^N\sqrt{\lambda_N}} \end{bmatrix},$$

môžeme jej použitím vypočítať maticu  $\mathcal{P}$ -transformácie založenú na numerickom integračnom pravidle

$$\mathbf{P} = \hat{\Psi}_{N,L}^T \cdot \Psi_{N,K} \cdot \mathbf{W}, \quad (4.25)$$

alebo na metóde najmenších štvorcov

$$\mathbf{P} = \hat{\Psi}_{N,L}^T \cdot \left( \Psi_{N,K} \cdot \Psi_{N,K}^T \right)^{-1} \cdot \Psi_{N,K}. \quad (4.26)$$

Podobne ako pri extrapolácii platí, že ak nepotrebujeme meniť parametre  $\mathcal{P}$ -transformácie, môžeme mať maticu  $\mathbf{P}$  uloženú v pamäti a používať ju pre frekvenčnú analýzu v reálnom čase podľa rovnice

$$\vec{F}_N = \mathbf{P} \cdot \vec{f}. \quad (4.27)$$

## 5 Extrapolácia meraných signálov

Jednou z možných aplikácií extrapoláčnych schopností PSWF je akustická holografia [20]. Pri nej sa mikrofónovým poľom získava záznam akustického tlaku  $p(x, y, t)$ , kde  $x, y$  sú priestorové súradnice a  $t$  označuje čas. Ak má harmonický zdroj zvuku známou frekvenciu  $\omega_0$ , môžeme Fourierovým radom z  $p(x, y, t)$  určiť amplitúdu tlaku v jednotlivých mikrofónoch

$$g(x, y) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} p(x, y, kT) e^{-j\omega_0 kT}, \quad (5.1)$$

kde  $T$  je perióda vzorkovania. Pre ďalšiu analýzu býva žiadúce určiť dvojrozmernú Fourierovu transformáciu  $g(x, y)$ , ale narážame na problém, že signál  $g(x, y)$  je konečný v priestore – je len časťou nejakého signálu  $f(x, y)$ . V tejto kapitole sa už nebudeme zaoberať extrapoláciou signálu v čase  $t$ , ale vo dvoch priestorových súradniciach  $x$  a  $y$ .

Pre zachovanie prehľadnosti sa najprv zameriame len na jeden riadok mikrofónového poľa – ukážeme si zjednodušený jednorozmerný prípad  $p(x, t)$  a  $g(x)$ . Uľahčí nám to grafické zobrazenie výsledkov. Potom odvodíme potrebné vzťahy pre dvojrozmernú extrapoláciu a zameriame sa na dvojrozmerný signál  $f(x, y)$ .

### 5.1 Kritérium kvality extrapolácie

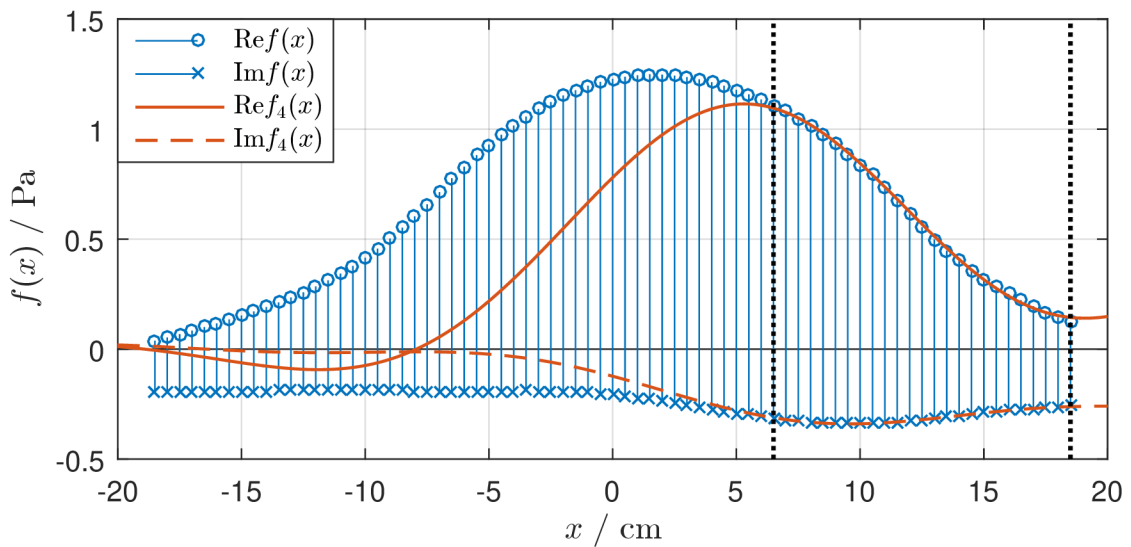
Keďže merané signály sú nám vždy známe len na konečnom intervale, nebudeme môcť vždy použiť definíciu kvality 4.1. Ľahko sa môže stať, že hodnotu  $\epsilon$  nemôžeme vypočítať, pretože chýba priebeh signálu potrebný na vyčíslenie integrálu (4.1).

V tejto kapitole budeme mať k dispozícii niekoľko vzoriek signálu  $\vec{f}$ . Označme ich počet  $K + L$ . Aby sme mohli testovať extrapoláčne schopnosti PSWF, budeme extrapoláciu počítat len použitím  $K$  vzoriek vybraných z  $\vec{f}$ . Týchto  $K$  vzoriek označíme  $\vec{g}$ . Zvyšných  $L$  vzoriek vyhradíme pre overenie kvality extrapolácie, pričom ako kritérium kvality budeme používať strednú kvadratickú odchýlku  $\Delta$  všetkých známych vzoriek  $\vec{f}$  od extrapolácie  $\vec{f}_N = \Psi_{N, K+L}^T \cdot \vec{a}$ . Platí pre ňu

$$\Delta = \sqrt{(\vec{f} - \Psi_{N, K+L}^T \cdot \vec{a})^T \cdot (\vec{f} - \Psi_{N, K+L}^T \cdot \vec{a}) / (K + L)}. \quad (5.2)$$

## 5.2 Signál z radu mikrofónov

Pre získanie dát bolo použité podobné usporiadanie, ako na obrázku 4.8. Harmonický zdroj zvuku o frekvencii 1 000 Hz umiestnený vo vzdialenosti 5 cm od mikrofónového radu bol zaznamenaný v 75 bodoch na osi  $x$  s rozstupmi 5 mm<sup>1</sup>. Zo záznamu akustického tlaku  $p(x, t)$  sme Fourierovým radom určili jeho amplitúdy v jednotlivých mikrofónoch. Tým sme dostali 75 vzoriek komplexného signálu  $f(x)$ . Tieto vzorky tvoria komplexný vektor  $\vec{f}$  dlhý 75 prvkov. Jeho reálna a imaginárna časť sú vykreslené modrou farbou na Obr. 5.1.



Obr. 5.1: Signál  $f(x)$  a jeho extrapolácia  $f_4(x)$  vypočítaná na základe  $\vec{g}_p$ .

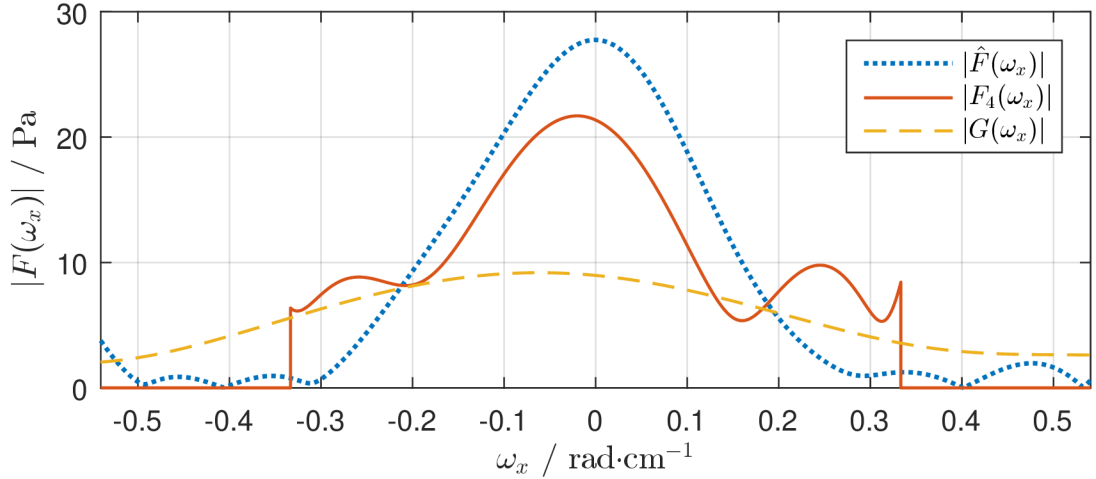
Predpokladajme, že máme k dispozícii len signál  $Df(x)$  známy na intervale dlhom 12 cm. Na obrázku je tento interval ohraničený prerušovanou čiarou. Leží v ňom 25 vzoriek, ale predpokladajme, že sme zmerali len každú tretiu z nich, teda deväť vzoriek s rozstupmi 1,5 cm. Tieto vzorky tvoria vektor  $\vec{g}_p$ .

Bolo zvolené  $c = 2$  (túto voľbu si vysvetlíme neskôr) a na základe všetkých deviatich vzoriek  $\vec{g}_p$  bol vypočítaný Fourierov rad  $f_N(x)$ . Priebeh najlepšej dosiahnutej extrapolácie  $f_4(x)$  je na Obr. 5.1 zobrazený červenou farbou.

<sup>1</sup> Táto zvýšená hustota vzoriek bola dosiahnutá sériou meraní. Medzi jednotlivými meraniami bolo pole posúvané s krokom 5 mm na osi  $x$ . Zlúčením výsledkov jednotlivých meraní vzniklo 75 rôznych časových záznamov akustického tlaku na osi  $x$ . Získané záznamy obsahujú vzorky akustického tlaku  $p(x, t)$  v priestore a čase.



Zo všetkých 75 vzoriek vektoru  $\vec{f}$  bol  $\mathcal{P}$ -transformáciou odhadnutý Fourierov obraz  $\hat{F}(\omega_x)$ , ktorý je modrou prerušovanou čiarou zobrazený na Obr. 5.2. Slúži pre kontrolu obrazu  $F_4(\omega_x) = \mathcal{F}\{f_4(x)\}$  získaného  $\mathcal{P}$ -transformáciou všetkých deviatich vzoriek  $\vec{g}_p$ .

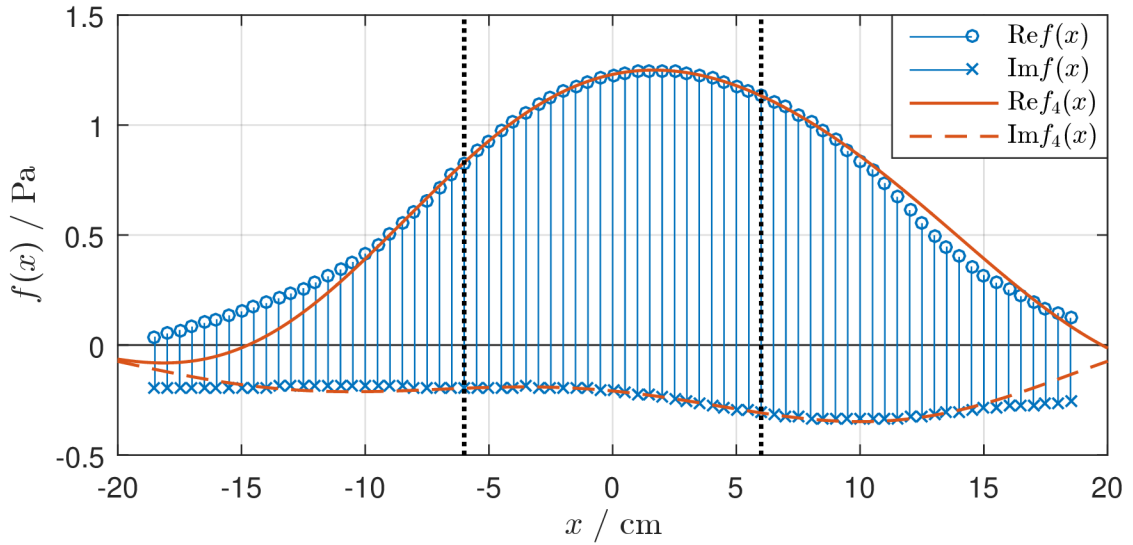


Obr. 5.2: Fourierov obraz meraného signálu a jeho extrapolácie na základe  $\vec{g}_p$ .

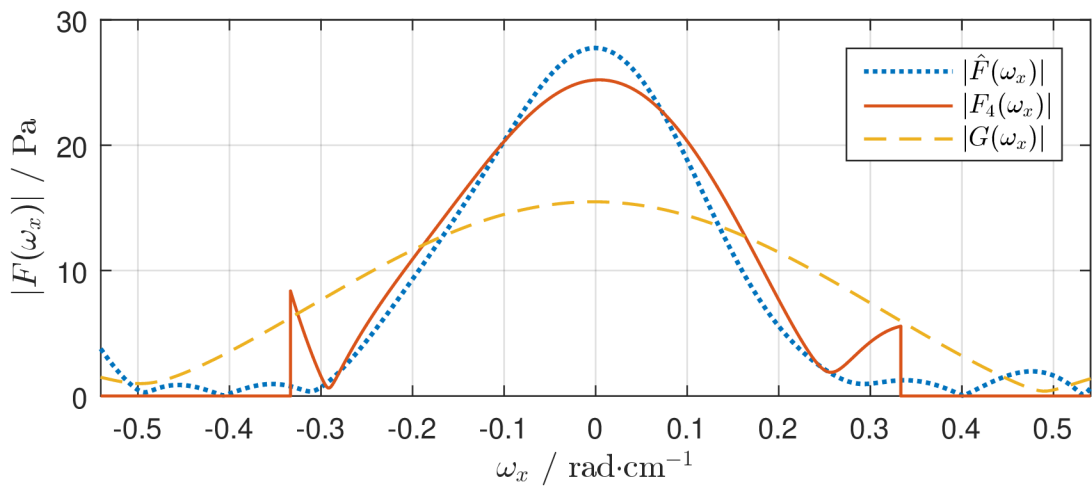
Pre lepšie objasnenie prínosu  $\mathcal{P}$ -transformácie bol vypočítaný aj Fourierov obraz  $G(\omega_x)$  signálu  $\vec{g}_p$  doplneného nulami s využitím obdĺžnikového okna. Toto porovnanie ukazuje, že ak na konečný signál  $\vec{g}_p$  aplikujeme  $\mathcal{P}$ -transformáciu namiesto Fourierovej transformácie, výrazne sa tým priblížime ku správne tvaru Fourierovho obrazu. Opäť sa ukazuje, že  $\mathcal{P}$ -transformácia zabezpečuje vyššie rozlíšenie, než Fourierova transformácia.

Zároveň vidno, prečo sme zvolili  $c = 2$ . Zodpovedá mu frekvenčné obmedzenie  $\Omega_x = 2c/\tau_x = 1/3 \text{ rad} \cdot \text{cm}^{-1}$ . Ak by sme zvolili menšiu hodnotu  $c$ , extrapolácia by bola nesprávna, pretože by došlo k výraznému skresleniu Fourierovho obrazu. Na druhú stranu, so zväčšovaním  $c$  sa pri zachovaní periódy vzorkovania zhoršuje ortonormalita funkcií  $\psi_n(c, t)$ . Vzorkovanie je dané vektorom  $\vec{g}_p$  a nemôžeme ho meniť, preto pri voľbe  $c$  treba hľadať istý kompromis medzi týmito protichodnými požiadavkami.

Extrapolácia bola zopakovaná pre dve ďalšie umiestnenia intervalu pozorovania. Dokopy sa teda použili tri rôzne vektory vzoriek  $\vec{g}_l$ ,  $\vec{g}_s$ ,  $\vec{g}_p$  podľa toho, či sa nachádzajú vľavo (l), uprostred (s) alebo vpravo (p). Dva vektory teda zodpovedajú prípadom, kedy sa zdroj zvuku nachádza mimo mikrofónového poľa.

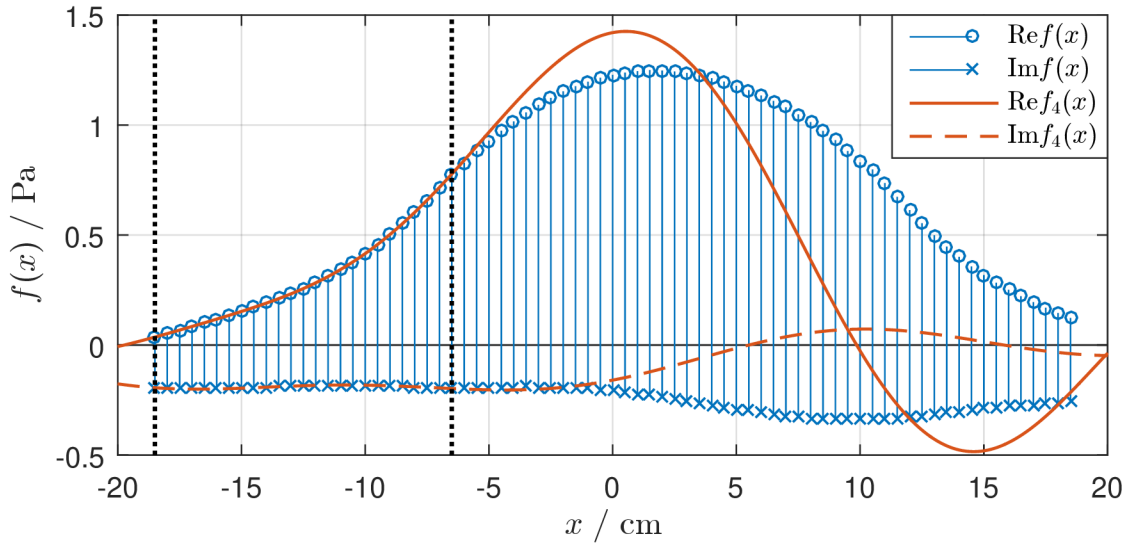


Obr. 5.3: Signál  $f(x)$  a jeho extrapolácia  $f_4(x)$  vypočítaná na základe vzoriek  $\vec{g}_s$ .

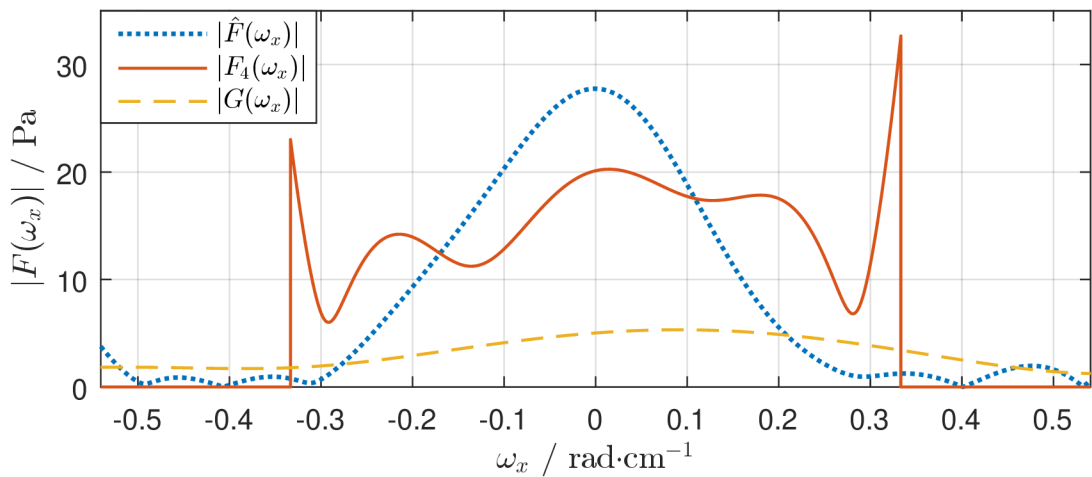


Obr. 5.4: Fourierov obraz meraného signálu a jeho extrapolácie na základe  $\vec{g}_s$ .

Pri druhom experimente (zodpovedajú mu obrázky na tejto strane) bola extrapolácia vykonaná na základe vzoriek  $\vec{g}_s$ , ktoré ležia na intervale  $-6 \text{ cm} \leq x \leq 6 \text{ cm}$  s rozstupmi 1,5 cm (opäť je ich deväť). V tomto prípade sa zdroj zvuku nachádza priamo nad mikrofónovým polom a preto sú výsledky extrapolácie,  $\mathcal{P}$ -transformácie aj klasickej Fourierovej transformácie lepšie, než v prípade  $\vec{g}_p$ . Extrapolácia prechádza mnohými vzorkami ležiacimi mimo intervalu pozorovania a obraz  $F_4(\omega_x)$  získaný  $\mathcal{P}$ -transformáciou je veľmi blízky obrazu  $\hat{F}(\omega_x)$  odhadnutému na základe všetkých 75 vzoriek  $\vec{f}$ .



Obr. 5.5: Signál  $f(x)$  a jeho extrapolácia  $f_4(x)$  vypočítaná na základe vzoriek  $\vec{g}_1$ .



Obr. 5.6: Fourierov obraz meraného signálu a jeho extrapolácie na základe  $\vec{g}_1$ .

V treťom experimente bol interval pozorovania posunutý úplne doľava. Výpočet prebiehal na základe deviatich vzoriek tvoriacich vektor  $\vec{g}_1$ . Tieto vzorky ležia v intervale  $-18 \text{ cm} \leq x \leq -6 \text{ cm}$  s rozstupmi 1,5 cm. V tomto prípade sú výsledky najhoršie zo všetkých troch vykonaných experimentov. Na Obr 5.6 vidno, že  $G(\omega)$  získaný Fourierovou transformáciou  $\vec{g}_1$  nenesie takmer žiadnu užitočnú informáciu. Fourierov obraz extrapolácie  $F_4(\omega)$  obsahuje dve ostré špičky, ktoré by sa v ňom nemali nachádzať, no aj napriek tomu je svojím tvarom oveľa bližšie správne mu obrazu  $\hat{F}(\omega_x)$ , než obraz  $G(\omega_x)$ .

Tab. 5.1: Závislosť strednej kvadratickej chyby extrapolácie na integračnej metóde

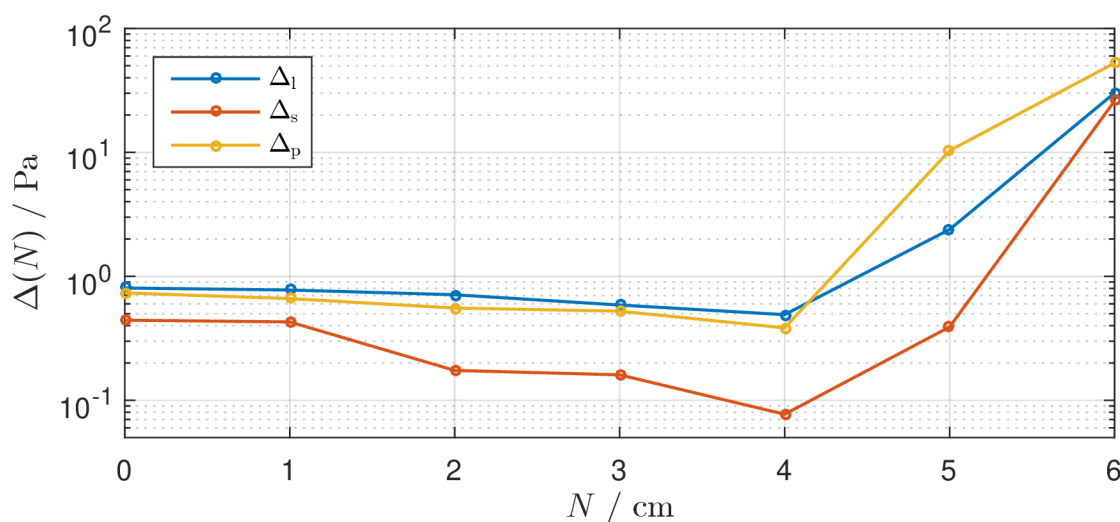
	MNŠ	sinc	NCM r. 0	NCM r. 1	NCM r. 2	NCM r. 4	NCM r. 8
$\Delta_p / \text{Pa}$	0,499	8,76	28,6	7,33	0,402	0,606	0,384
$\Delta_s / \text{Pa}$	0,094	14,15	45,2	11,82	0,146	0,118	0,077
$\Delta_l / \text{Pa}$	0,489	6,16	19,7	5,47	0,558	0,498	0,491

Tabuľka porovnáva výslednú chybu extrapolácie pri  $c = 2$ ,  $N = 4$ , rôznych aproximačných metódach a rôznych intervaloch pozorovania. Hodnoty  $c$  a  $N$  sa zhodujú s tými, ktoré boli použité pre získanie grafických výsledkov na obrázkoch 5.1 až 5.6. Prirodzene, horšia kvalita extrapolácie zodpovedá tým prípadom, v ktorých je zdroj zvuku vychýlený mimo intervalu pozorovania. Väčší zmysel má porovnať výsledky dosiahnuté rôznymi metódami výpočtu spektra  $\vec{a}$ .

Opäť sa potvrdilo, že integrácia pomocou funkcií sinc, alebo integračnými pravidlami nízkych rádov zlyháva, pretože tieto metódy si vyžadujú husto navzorkovaný signál. Najlepšie výsledky dosahuje integračné pravidlo rádu 8 a metóda najmenších štvorcov.

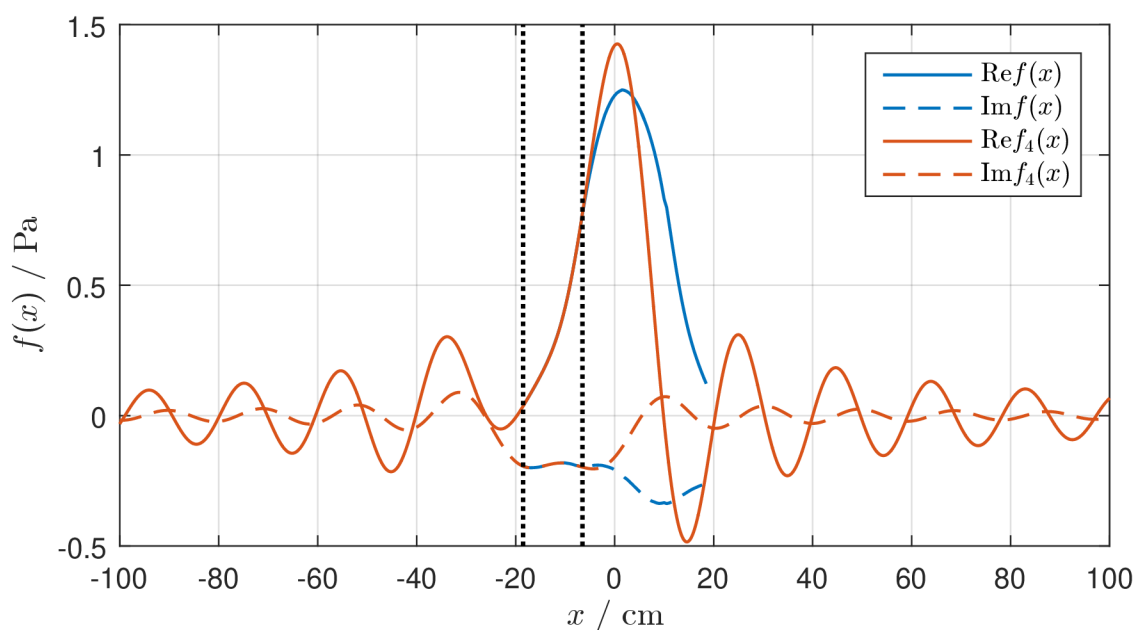
### 5.2.1 Odhad optimálneho rádu Fourierovho radu

Pri každom zo skúmaných signálov sme sa zatiaľ stretli s podobnou závislosťou chyby extrapolácie signálu na ráde  $N$ . Spočiatku so zvyšovaním rádu chyba klesá, no pri istej hodnote dosiahne minimum a po jej prekročení už prudko rastie (Obr. 5.7). Je jasné, že bude potrebné hľadať metódy, ktoré umožnia odhadnúť optimálny rád  $N$ .



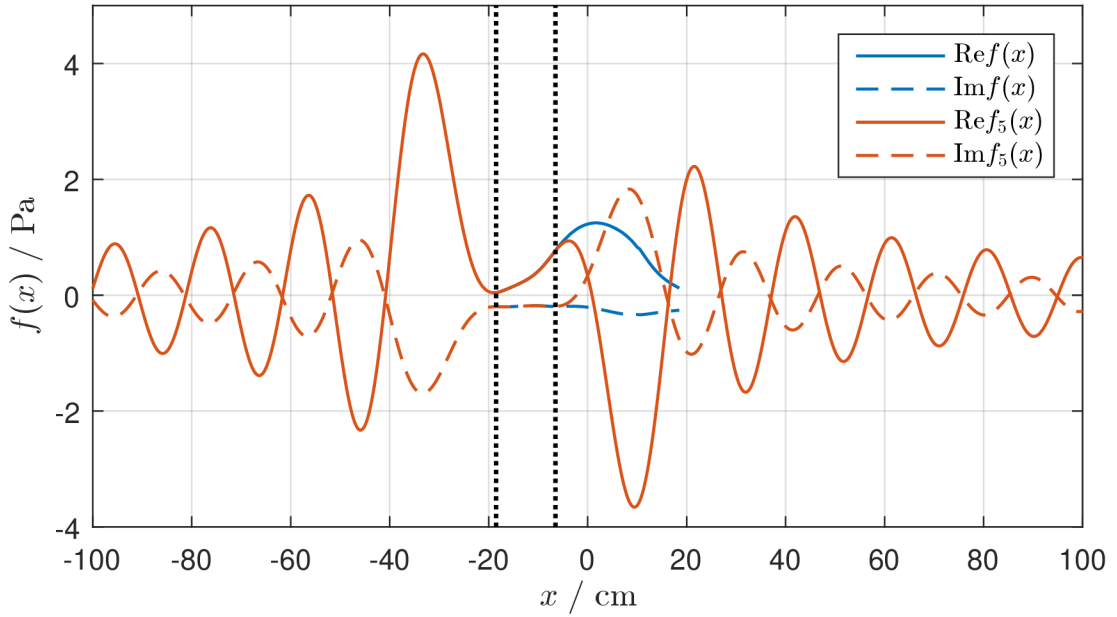
Obr. 5.7: Závislosť chyby extrapolácie na ráde Fourierovho radu pri použití integračného pravidla rádu 8.

Zaujímavosťou je efekt, ktorý je najlepšie viditeľný vo Fourierovom obraze extrapolácie zo vzoriek vzoriek  $\vec{g}_1$ . Interval pozorovania je vyznačený bodkovanou čiarou na Obr. 5.5. Na okrajoch frekvenčného obmedzenia sa vo Fourierovom obraze extrapolácie  $F_4(\omega_x)$  objavili špičky (Obr. 5.6), ktoré svojím tvarom pripomínajú Diracove impulzy. Presne, ako by sme očakávali, tieto špičky znamenajú, že extrapolácia  $f_4(x)$  obsahuje harmonické kmity viditeľné na Obr. 5.8.



Obr. 5.8: Signál  $f(x)$  a jeho extrapolácia  $f_4(x)$  vypočítaná na základe vzoriek  $\vec{g}_1$ .

Ak postupne zvyšujeme rád  $N$ , tieto špičky spočiatku nie sú viditeľné, no postupne sa zväčšujú. Veľmi ostré špičky (ako na Obr. 5.6) sú už varovným signálom, že sa Fourierov rad blíži k najlepšej dosiahnuteľnej extrapolácii. Ak napriek tomu rozšírime Fourierov rad čo i len o jediný člen, vzdialenosť  $\|f(x) - f_N(x)\|_\infty$  ohromne vzrastie a tým úplne znehodnotí celý priebeh mimo intervalu pozorovania. Takto znehodnotený priebeh vidno na Obr. 5.9. Práve ukázaný efekt by mohol nájsť uplatnenie pri odhadovaní optimálnej voľby  $N$ .



Obr. 5.9: Signál  $f(x)$  a jeho extrapolácia  $f_5(x)$  vypočítaná na základe vzoriek  $\vec{g}_1$ .

### 5.3 Rozšírenie na dvojrozmerné signály

Keďže potrebujeme extrapolovať dvojrozmerný signál  $f(x, y)$ , musíme naše úvahy zovšeobecniť na dvojrozmerný prípad. Článok [4] síce pojednáva o extrapolácii viacrozmerných signálov, ale uvažuje také PSWF, ktoré sú ortogonálne na jednotkovom kruhu

$$x^2 + y^2 = 1. \quad (5.3)$$

Keďže my budeme spracúvať signály zo štvorcového mikrofónového poľa, potrebujeme funkcie ortogonálne na štvorci

$$\begin{aligned} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1. \end{aligned} \quad (5.4)$$

To dosiahneme zavedením dvojrozmerných funkcií

$$\psi_{n,m}(c, x, y) = \psi_n(c, x) \cdot \psi_m(c, y). \quad (5.5)$$

Môžeme ľahko overiť, že spĺňajú dvojité ortogonalitu

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \psi_{m,n}(c, x, y) \psi_{p,q}(c, x, y) dx dy = \delta_{m,p} \cdot \delta_{n,q}, \quad (5.6)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{m,n}(c, x, y) \psi_{p,q}(c, x, y) dx dy = \frac{\delta_{m,p}}{\lambda_m(c)} \cdot \frac{\delta_{n,q}}{\lambda_n(c)}. \quad (5.7)$$

Sú frekvenčne obmedzené na štvorci

$$\begin{aligned} -c &\leq \omega_x \leq c, \\ -c &\leq \omega_y \leq c. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Iste by bolo výhodnejšie, ak by sme mali takú verziu dvojrozmerných PSWF, v ktorej by tieto funkcie boli frekvenčne obmedzené na kruhu s polomerom  $c$ . Nanešťastie, nájdenie týchto funkcií je nad rámec tejto diplomovej práce a preto budeme používať vyššie uvedený tvar dvojrozmerných PSWF.

Výpočtom Fourierovho radu pre signál  $f(x, y) \in \mathcal{B}$  dostávame jeho koeficienty

$$a_{m,n} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) \psi_{m,n}(c, x, y) dx dy = \frac{1}{\lambda_m(c) \lambda_n(c)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \psi_{m,n}(c, x, y) dx dy, \quad (5.9)$$

ktoré tvoria maticu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,N} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M,0} & a_{M,1} & \cdots & a_{M,N} \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

Samozrejme, opäť nie je možné vyčísliť ich s dokonalou presnosťou, pretože signál  $f(x, y)$  je navzorkovaný v bodoch so súradnicami  $x_0, x_1, \dots, x_K$  a  $y_0, y_1, \dots, y_L$ . Máme k dispozícii maticu vzoriek signálu

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} f(x_0, y_0) & f(x_0, y_1) & \cdots & f(x_0, y_L) \\ f(x_1, y_0) & f(x_1, y_1) & \cdots & f(x_1, y_L) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(x_K, y_0) & f(x_K, y_1) & \cdots & f(x_K, y_L) \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

Na ňu musíme aplikovať niektorú z metód aproximácie členov spektra. V prípade metódy najmenších štvorcov môžeme pre koeficienty spektra odvodiť vzťah

$$\mathbf{A} = \left( \Psi_{M,K} \cdot \Psi_{M,K}^\top \right)^{-1} \cdot \Psi_{M,K} \cdot \mathbf{g} \cdot \Psi_{N,L}^\top \cdot \left( \Psi_{N,L} \cdot \Psi_{N,L}^\top \right)^{-1}, \quad (5.12)$$

Pri použití numerickej integračnej metódy

$$\mathbf{A} = \Psi_{M,K} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{W} \cdot \Psi_{N,L}^\top, \quad (5.13)$$

kde  $\mathbf{W}$  je váhová matica daná integračnou metódou a jej parametrami. Na dvojrozmerný signál je možné aplikovať extrapoláčnú a  $\mathcal{P}$ -transformáčnú maticu tak, ako to bolo možné pri jednorozmernom signáli. Tvar matice zostáva rovnaký. Extrapolácia môže v reálnom čase prebiehať podľa rovnice

$$\mathbf{f}_N = \mathbf{E} \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{E}^\top \quad (5.14)$$

a  $\mathcal{P}$ -transformácia podľa

$$\mathbf{F}_N = \mathbf{P} \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{P}^T. \quad (5.15)$$

Keďže je známy signál z oboch strán násobený tou istou maticou, pri reálnej implementácii by sa mala takáto operácia ďalej optimalizovať.

## 5.4 Signál z dvojrozmerného mikrofónového poľa

Harmonický zdroj zvuku o frekvencii 2 000 Hz umiestnený vo vzdialenosti 35 cm od mikrofónového poľa bol zaznamenaný maticou mikrofónov v konfigurácii  $8 \times 8$  s rozstupmi 50 mm medzi mikrofónmi. Na základe záznamu akustického tlaku  $p(x, y, t)$  bola Fourierovým radom určená matica vzoriek  $\mathbf{f}$ , ktorá reprezentuje signál  $f(x, y)$ . Tieto vzorky sú graficky zobrazené na nasledujúcej strane vľavo.

Predpokladajme, že máme k dispozícii len signál  $Df(t)$  z 36 mikrofónov. Tieto známe vzorky tvoria maticu  $\mathbf{g}$  a na Obr. 5.10 sú zobrazené farebne. Ostatné vzorky (tie, ktoré považujeme za nedostupné a predpokladáme o nich, že sú mimo intervalu pozorovania) sú zobrazené najtmavšou farbou. Experiment uskutočníme pre štyri rôzne umiestnenia oblasti pozorovania, ktorá má tvar štvorca

$$\begin{aligned} x_{\min} &\leq x \leq x_{\max} \\ y_{\min} &\leq y \leq y_{\max}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

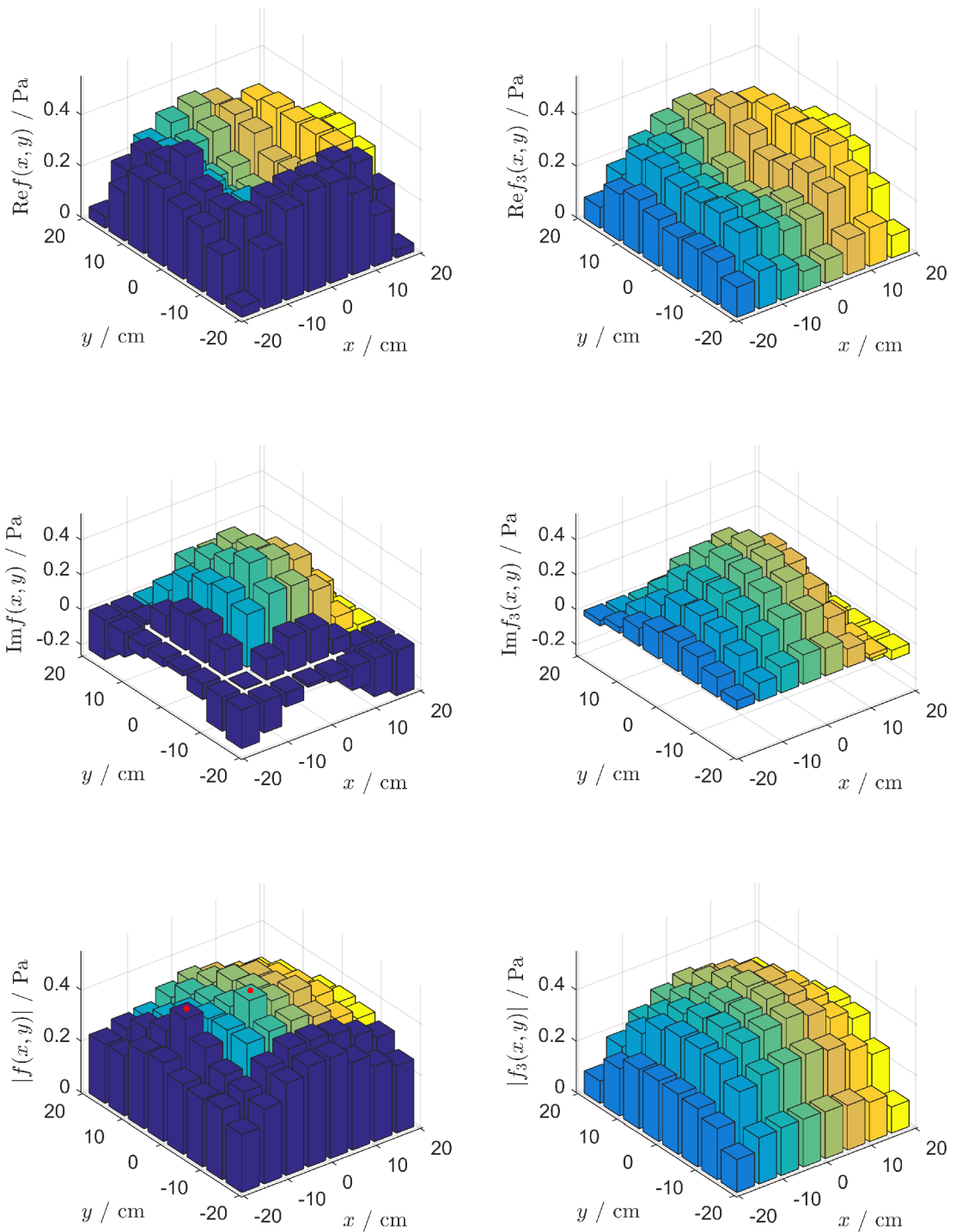
Jej hranice sú dané tabuľkou.

Tab. 5.2: Oblasti pozorovania

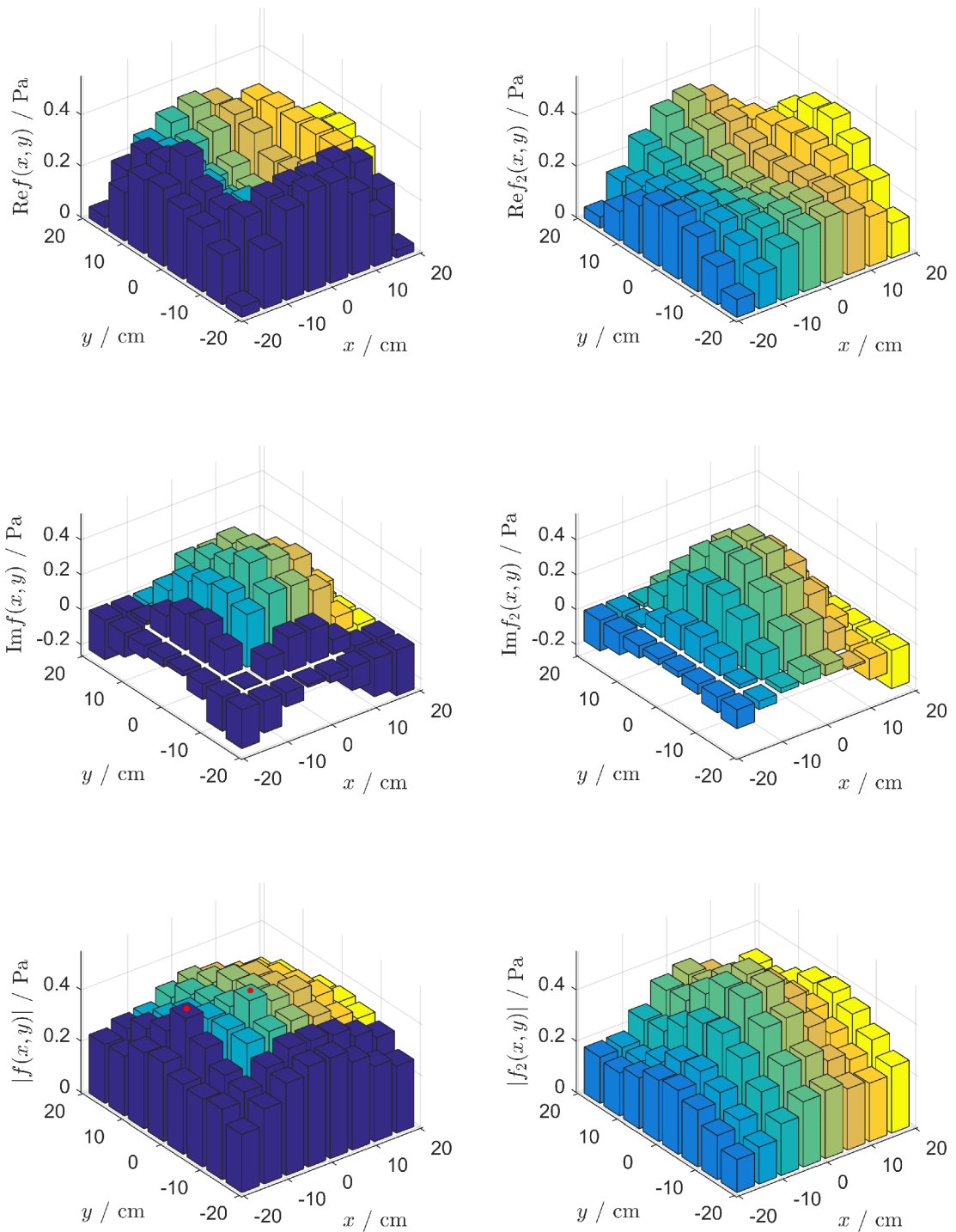
oblasť	$\frac{x_{\min}}{\text{cm}}$	$\frac{x_{\max}}{\text{cm}}$	$\frac{y_{\min}}{\text{cm}}$	$\frac{y_{\max}}{\text{cm}}$
a	-7,5	17,5	-7,5	17,5
b	-17,5	7,5	-7,5	17,5
c	-17,5	7,5	-17,5	7,5
d	-7,5	17,5	-17,5	7,5

Graficky sú zobrazené len výsledky pre oblasť a. Ostatné prípady boli veľmi podobné a tak budeme hodnotiť len ich kvadratickú chybu. Všimnime si, že pri vykreslení absolútnej hodnoty  $f(x, y)$  dve vzorky (označené červenou bodkou) výraznejšie vystupujú nad ostatné. Prítomnosť takýchto anomálií – ak sú spôsobené nepresnosťou merania – robí extrapoláciu ťažšou.





Obr. 5.10: Signál z mikrofónového pola (vľavo) a jeho extrapolácia pri  $c = 3$  (vpravo).



Obr. 5.11: Signál z mikrofónového pola (vľavo) a jeho extrapolácia pri  $c = 2$  (vpravo).

Kedže v každom riadku sa nachádza len 6 vzoriek, nemá zmysel porovnávať výsledky integrácie pomocou funkcií sinc, či lichobežníkového pravidla. Ich chyba bola príliš veľká. Tabuľky ukazujú závislosť strednej kvadratickej chyby  $\Delta$  a optimálnej voľby rádu  $N$  na parametri  $c$  a na umiestnení oblasti pozorovania.

Tab. 5.3: Najlepšia extrapolácia pri použití metódy najmenších štvorcov

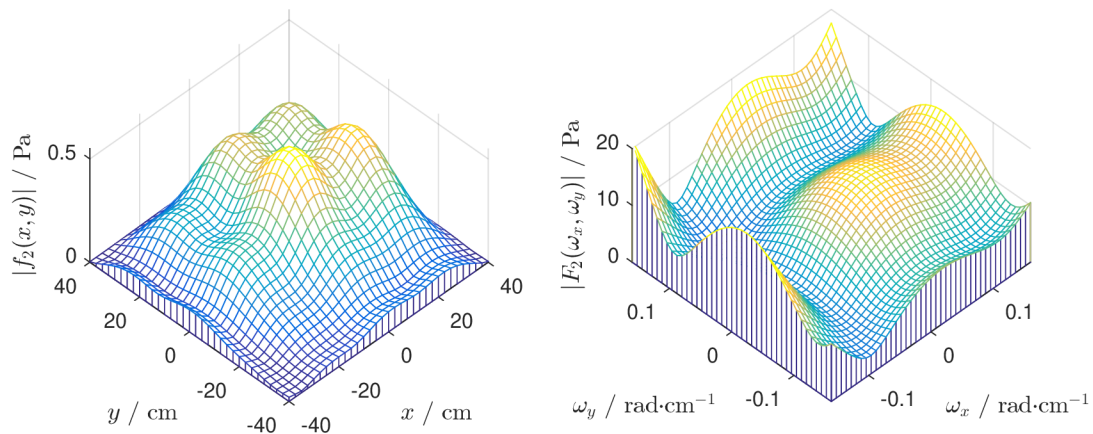
$c$	2	2,5	3	3,5	4
$\Delta_a / \text{Pa}$	0,084	0,109	0,147	0,173	0,130
$\Delta_b / \text{Pa}$	0,095	0,122	0,161	0,185	0,118
$\Delta_c / \text{Pa}$	0,080	0,107	0,140	0,168	0,135
$\Delta_d / \text{Pa}$	0,077	0,103	0,122	0,154	0,128
optimálne $N$	2	2	3	3	4

Tab. 5.4: Najlepšia extrapolácia pri použití Newtonovho-Cotesovho pravidla rádu 5

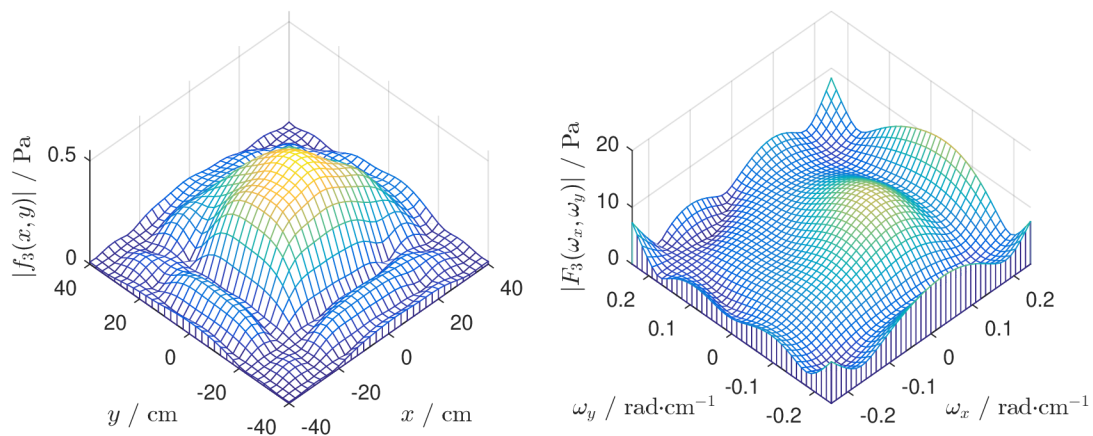
$c$	2	2,5	3	3,5	4
$\Delta_a / \text{Pa}$	0,104	0,123	0,119	0,157	0,200
$\Delta_b / \text{Pa}$	0,115	0,137	0,137	0,174	0,211
$\Delta_c / \text{Pa}$	0,097	0,116	0,118	0,156	0,197
$\Delta_d / \text{Pa}$	0,079	0,104	0,098	0,136	0,186
optimálne $N$	2	2	3	3	3

Na základe tabuliek nie možné jednoznačne povedať, ktorá z aproximačných metód je lepšia. Pre  $c = 3$  a  $c = 3,5$  má metóda najmenších štvorcov chybu o 10 až 25 % vyššiu chybu než integračné pravidlo. Na druhú stranu, pre inú voľbu  $c$  je lepšia metóda najmenších štvorcov. Pri  $c = 4$  má jednoznačnú prevahu, pretože integračné pravidlo nedokázalo dostatočne presne aproximovať koeficient  $a_4$  a Fourierov rozvoj signálu musel byť ukončený už pri  $N = 3$ . Ak by sme ho neukončili, stredná kvadratická chyba by narástla až na 0,5 Pa a extrapolácia by bola úplne nesprávna. Celkovo sa zdá, že metóda najmenších štvorcov si vie lepšie poradiť s rôznymi hodnotami  $c$  a hoci nemá vždy najmenšiu chybu, táto chyba býva rozumne malá.

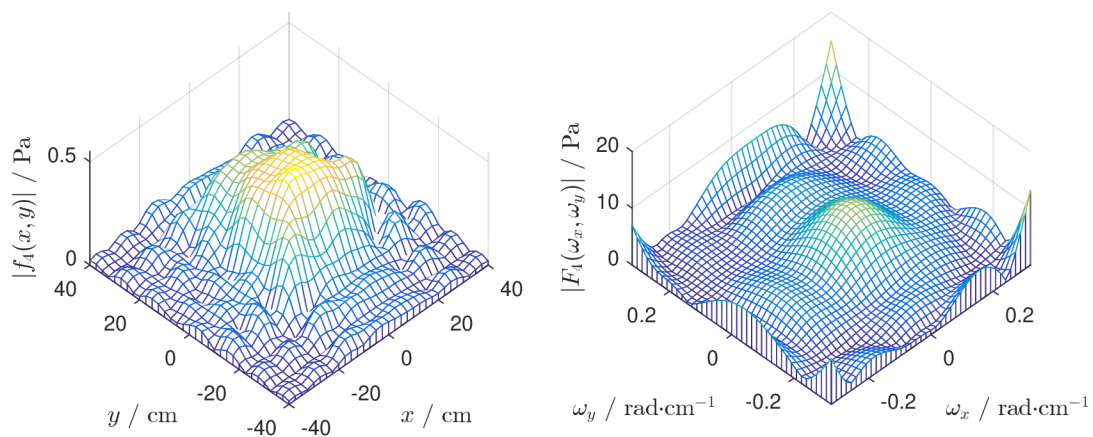
Vplyv  $c$  na tvar extrapolovaného signálu môžeme lepšie pozorovať na nasledujúcej strane, kde je pre tri rôzne  $c$  zobrazené väčšie okolie mikrofónového poľa, než bolo na predchádzajúcich stranách. Priebehy boli získané metódou najmenších štvorcov. V pravej časti sa nachádzajú Fourierove obrazy extrapolovaných priebehov. Mierka na osiach  $\omega_x$  a  $\omega_y$  nie je zvolená náhodne. Pripomíname, že pre tie priestorové frekvencie, ktoré v grafoch nie sú zobrazené, má Fourierov obraz nulové funkčné hodnoty.



Obr. 5.12: Fourierov rad signálu pri  $c = 2$ .



Obr. 5.13: Fourierov rad signálu pri  $c = 3$ .



Obr. 5.14: Fourierov rad signálu pri  $c = 4$ .

Porovnajme jednotlivé Fourierove obrazy. Ak zvolíme malé  $c$ , dochádza k orezaniu a tým aj skresleniu Fourierovho obrazu. Opäť máme možnosť pozorovať podobný efekt, ako pri signáli z jedného radu mikrofónov, kedy sa na okrajoch Fourierovho obrazu formovali ostré špičky (obrázok 5.6). Pri  $c = 2$  je extrapolácia v blízkosti oblasti pozorovania najlepšia – aspoň podľa vzoriek, ktoré vieme porovnať – no Fourierov obraz je orezaný a špičky zasahujú do tej časti obrazu, ktorá je predmetom nášho záujmu.

Miernym zväčšením  $c$  dosiahneme rozumný tvar spektra aj extrapolovaného priebehu. Ak však zvolíme priveľkú hodnotu ( $c > 5$ ), k extrapolácii nebude dochádzať v dostatočnej miere a výsledky  $\mathcal{P}$ -transformácie nebudú omnoho zaujímavejšie, než výsledky klasickej Fourierovej transformácie.

Za povšimnutie stojí aj lineárna závislosť optimálneho rádu  $N$  (pri ktorom treba ukončovať Fourierov rozvoj) na parametri  $c$ . Táto závislosť súvisí s vlastnými číslami  $\lambda_n(c)$ . Všimnime si závislosť polohy inflexného bodu kriviek  $\lambda_n(c)$  na ráde  $n$  v grafe na Obr. 2.1. Vidno, že kritický rád  $n$ , po ktorého prekročení vlastné čísla prudko klesajú, je približne lineárne závislý na  $c$ . Ak je hodnota vlastného čísla  $\lambda_n(c)$  malá, priebeh  $\psi_n(c, t)$  je podobný ako na Obr. 2.5. V takom prípade aj veľmi malá nepresnosť vo vyčíslení koeficientu  $a_N$  spôsobí veľkú nepresnosť v amplitúde radu  $f_N(t)$  mimo intervalu pozorovania. Už približným odčítaním hodnôt z grafu na Obr. 2.1 si môžeme všimnúť, že tie koeficienty, ktoré sa nám už nepodarilo správne vyčísliť a museli sme ich z Fourierovho rozvoja vynechať, majú veľmi malé vlastné čísla  $\lambda_n(c)$ .

## 6 Záver

Pri štúdiu frekvenčne obmedzených signálov sa stretávame so skupinami funkcií, ktoré nám ponúkajú veľmi zaujímavé možnosti. Tak ako funkcie sinc umožňujú dokonale interpolovať signál na základe jeho diskretných vzoriek, tak PSWF umožňujú dokonale extrapolovať signál na základe časti jeho priebehu.

PSWF sú veľmi špeciálnym matematickým nástrojom. Každý frekvenčne obmedzený signál dokážeme rozvinúť do Fourierovho radu PSWF. Na modelovanom signáli bez šumu sme ukázali, že postupným pridávaním členov radu môžeme signál extrapolovať do ľubovoľne veľkej vzdialenosti od intervalu pozorovania. Tento výsledok nie je ničím novým, pretože takýto postup bol už viackrát preskúmaný, napríklad v [10] alebo [9].

Lenže, ak do našich úvah zahrnieme rôzne javy spojené s každým skutočným meraním – predovšetkým prítomnosť šumu a konečnú frekvenciu vzorkovania – zistíme že vzdialenosť, do ktorej môžeme signál extrapolovať je obmedzená. Táto vzdialenosť je tým lepšia, čím máme o signáli viac informácií a čím lepšie ich využijeme – konkrétne, čím viac vzoriek signálu máme k dispozícii, čím menší šum signál obsahuje a napokon, čím lepšiu numerickú metódu použijeme pre aproximáciu koeficientov radu PSWF.

Vďaka tomu, že sme pracovali s modelovanými signálmi, mohli sme ľahko nastaviť a meniť ich parametre, ale zároveň aj analyticky určiť koeficienty spektra. To nám umožnilo kontrolovať chybovosť jednotlivých numerických metód. Zároveň sme mohli pozorovať, ako kvalita aproximácie závisí na voľbe parametrov  $c$  a  $N$ .

Voľba  $c$  je daná predovšetkým charakterom spracúvaného signálu. Keďže pri vzorkovaní signálov obyčajne dokážeme odhadnúť vhodnú frekvenciu vzorkovania, iste nebude ťažké vhodne odhadnúť  $c$ . Tento odhad potom môžeme mierne doladiť podľa toho, či máme záujem predovšetkým o extrapoláciu, alebo o získanie Fourierovho obrazu signálu. S cieľom maximalizovať kvalitu extrapolácie signálu v blízkosti intervalu pozorovania je vhodné mierne zmenšiť hodnotu  $c$ , ale tým sa zároveň mierne oreže a deformuje spektrum signálu. Na druhú stranu, ak nás zaujíma predovšetkým spektrum a chceme zabrániť jeho nadmernému skresleniu, musíme voliť väčšiu hodnotu  $c$ . Kvalita extrapolácie sa tým môže mierne znížiť, ale spektrum bude čitateľnejšie, pretože špičky na okrajoch frekvenčného obmedzenia nebudú výrazne zasahovať do tej časti spektra, ktorá je predmetom nášho záujmu.

Zistili sme, že pri signáloch s ktorými sme pracovali je pre výpočet koeficientov Fourierovho radu vhodné používať Newtonove-Cotesove pravidlá rádov v rozmedzí 2 až 8, v závislosti na tvare signálu, ktorý spracúvame a na úrovni šumu. Pravidlá nižších rádov sú nepresné, pretože si vyžadujú vyššiu hustotu vzoriek. Pravidlá vyšších rádov sú zasa príliš citlivé na šum.

Ako vhodná alternatíva k polynomickej integrácii sa ukázala metóda najmenších štvorcov. Ukázali sme, že táto metóda má priamu súvislosť s Gerchbergovým iteratívnym extrapoláčnym algoritmom. Napriek tomu, že nemusí vždy prekonať integračné pravidlo s optimálne zvoleným rádom, jej výsledky nikdy nie sú oveľa horšie. Keďže optimálny rád integračného pravidla nevieme dopredu určiť, jednoznačnou výhodou metódy najmenších štvorcov je, že si nevyžaduje nastavovanie parametra. Okrem toho sa ukázalo, že jej výsledky sú spoľahlivé pre rôzne hodnoty frekvenčného obmedzenia  $c$ , kým integračné pravidlá pracujú najlepšie len v istom pásme hodnôt  $c$ . Nakoniec je jej veľkou výhodou vysoká odolnosť voči šumu, pretože všetkým vzorkám signálu prikladá rovnakú váhu.

V práci sme zároveň sme ukázali, akým spôsobom je možné zostaviť extrapoláčnú maticu umožňujúcu pracovať s meraným signálom v reálnom čase. Podobne je možné zostaviť  $\mathcal{P}$ -transformáčnú maticu, ktorá umožňuje výpočet harmonického spektra signálu len na základe jeho konečného priebehu. Výpočtovo náročné zostavenie a odladenie matice môžeme zrealizovať napríklad v prostredí MATLAB a pri jej použití pre spracovanie meraného signálu v reálnom čase ju stačí načítať z pamäte. Jej miernou nevýhodou oproti klasickému prístupu využívajúcemu okná je, že neposkytuje zníženú výpočtovú náročnosť ako algoritmus rýchlej Fourierovej transformácie.

Snáď môžeme povedať, že sme prispeli ďalším dielikom do skladačky, no stále nie je úplná. Ešte je potrebné vyriešiť niektoré problémy – predovšetkým hľadať spôsoby, ktorými by bolo možné stanoviť optimálny rád ukončenia rozvoja signálu do radu PSFW. Už naše experimenty naznačujú, že rád ukončenia rozvoja je lineárne závislý na voľbe  $c$  podľa rovnice  $N = \kappa c$ . Ešte stále je však potrebné určiť koeficient proporcionality  $\kappa$ , ktorý je závislý na tvare spracúvaného signálu. Zdá sa, že vhodnou metódou by mohlo byť pozorovanie vzniku špičiek na okrajoch spektra Fourierovho obrazu, no tento efekt treba ešte omnoho lepšie preskúmať. Zároveň by mohlo byť vhodné použiť takú verziu dvojrozmerných PSWF, ktoré by boli v priestore ortogonálne na štvorci a zároveň by bol ich Fourierov obraz obmedzený na kruhu. Možno by mohli priniesť zlepšenie výsledkov extrapolácie pri spracovaní signálov zo štvorcového mikrofónového poľa.

Hoci sme sa v tejto práci zamerali predovšetkým na spracovanie signálov z mikrofónových polí, pripomíname, že ide o čisto matematickú metódu a preto nie je nijako viazaná na akustické signály. V skutočnosti iste existuje veľká skupina iných oblastí, kde by táto metóda mohla nájsť ešte lepšie uplatnenie.

# Literatúra

- [1] SLEPIAN, David; POLLAK, Henri O. Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty – I. *Bell System Technical Journal*. 1961, roč. 40, č. 1, s. 43–63. ISSN 0005-8580.
- [2] SLEPIAN, David; POLLAK, Henri O. Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty – II. *Bell System Technical Journal*. 1961, roč. 40, č. 1, s. 65–84. ISSN 0005-8580.
- [3] SLEPIAN, David; POLLAK, Henri O. Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty – III: The dimension of the space of essentially time- and band-limited signals. *Bell System Technical Journal*. 1962, roč. 41, č. 4, s. 1295–1336. ISSN 0005-8580.
- [4] SLEPIAN, David. Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier analysis and Uncertainty – IV: Extensions to many dimensions; generalized prolate spheroidal functions. *Bell System Technical Journal*. 1964, roč. 43, č. 6, s. 3009–3057. ISSN 0005-8580.
- [5] SLEPIAN, David. Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier analysis and Uncertainty – V: The Discrete Case. *Bell System Technical Journal*. 1964, roč. 43, č. 6, s. 3009–3057. ISSN 0005-8580.
- [6] GERCHBERG, R. W. Super-resolution through error energy reduction. *Optica Acta: International Journal of Optics*. 1974, roč. 21, č. 9, s. 709–720. ISSN 0030-3909.
- [7] SABRI, M., STEENAART, W. An approach to band-limited signal extrapolation: The extrapolation matrix. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*. 1978, roč. 25, č. 2, s. 74–78. ISSN 0098-4094.
- [8] ADELMAN, R. et al. Software for Computing the Spheroidal Wave Functions Using Arbitrary Precision Arithmetic. 2014, *arXiv*. 1408.0074.
- [9] DEVASIA, Amal; CADA, Michael. Bandlimited signal extrapolation using Prolate spheroidal wave functions. *IAENG International Journal of Computer Science*. 2013, roč. 40, č. 4, s. 291–300. ISSN 1819-9224.
- [10] JURA, Pavel. *Příspěvek k použití zobecněné spektrální analýzy pro frekvenční analýzu signálů*. Brno, 1983. Kandidátská disertace. Vysoké učení technické v Brně. Fakulta elektrotechnická. Školitel Zdeněk MALEC.



- [11] LANDAU, Henry. Extrapolating a band-limited function from its samples taken in a finite interval. *IEEE Transactions on Information Theory*. 1986, roč 32, č. 4, s. 464–470. ISSN 0018-9448.
- [12] REKTORYS, Karel. *Přehled užité matematiky*. 2., opr. vyd. Praha: Nakladatelství technické literatury, 1968. Česká matice technická (SNTL).
- [13] HARDY, Godfrey Harold a Werner ROGOSINSKI. *Fourierovy řady*. Přeložil Alois KUFNER. Praha: SNTL-Nakladatelství technické literatury, 1971.
- [14] ANGOT, André. *Užitá matematika pre elektrotechnické inženýry*. 2. nezm. vyd. Přeložil Antonín TER-MANUELIANC. Praha: SNTL-Nakladatelství technické literatury, 1971. Teoretická knihnice inženýra.
- [15] PAPOULIS, Athanasios. *Signal analysis*. New York: McGraw-Hill, 1977. ISBN 0070484600.
- [16] OSIPOV, Andrei, Vladimir ROKHLIN a Hong XIAO. *Prolate spheroidal wave functions of order zero: mathematical tools for bandlimited approximation*. New York: Springer, 2013. ISBN 9781461482581.
- [17] FLANDRIN, Patrick. A note on reassigned Gabor spectrograms of Hermite functions. *Journal of Fourier Analysis and Applications*. 2012, s. 15, ISSN 1531-5851.
- [18] DĚMIDOVIČ, Boris Pavlovič a Isaak Abramovič MARON. *Základy numerické matematiky*. Přeložil Jan KADLEC, přeložil Jiří KROPÁČEK, přeložil Alois KUFNER. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1966. Teoretická knihnice inženýra.
- [19] PAPOULIS, Athanasios. A New Algorithm in Spectral Analysis and Band-Limited Extrapolation. *IEEE Transactions in Circuits Systems*. 1975, roč. 22, č. 9, s. 735–742. ISSN 0098-4094.
- [20] NAYBARD, D.; WILLIAMS, J; LEE, Y. Nearfield acoustic holography: I. Theory of generalized holography and the development of NAH. *Journal of the Acoustical Society of America*. 1985, roč. 78, č. 4, str. 1395-1413. ISSN 0001-4966.

# Zoznam symbolov, veličín a skratiek

$a_n$	koeficienty Fourierovho radu
$\alpha$	parameter signálu
$B$	frekvenčne obmedzujúci operátor
$\mathcal{B}$	priestor frekvenčne obmedzených funkcií
$c$	parameter funkcií $\psi_n(c, t)$
$\chi_n(c)$	vlastné číslo
$C_k$	Newtonov-Cotesov koeficient
$D$	časovo obmedzujúci operátor
$\mathcal{D}$	priestor časovo obmedzených funkcií
$\delta(t)$	Diracova delta funkcia
$\delta_{m,n}$	Kroneckerovo delta
$e$	Eulerovo číslo
$e_n$	prvok ortogonálnej sústavy
<b>E</b>	Extrapoláčna matica
$\epsilon$	miera kvality extrapolácie
$f(t)$	funkcia reprezentujúca signál
$\vec{f}$	vektor tvorený diskretnými vzorkami signálu $f(t)$
<b>f</b>	matica tvorená diskretnými vzorkami signálu $f(x, y)$
$f_N(t)$	aproximácia funkcie $f(t)$ Fourierovým radom rádu $N$
$F(\omega)$	Fourierov obraz signálu $f(t)$
$\mathcal{F}$	operátor priamej Fourierovej transformácie
$\mathcal{F}^{-1}$	operátor spätnej Fourierovej transformácie
$\varphi_n(t)$	Hermiteova funkcia
$g(t)$	funkcia reprezentujúca signál
$G(\omega)$	Fourierov obraz signálu $g(t)$
$H_n(t)$	Hermiteov polynóm
$I$	intenzita zvuku
<b>I</b>	jednotková matica
$j$	imaginárna jednotka
$L_2$	priestor kvadraticky integrovateľných funkcií
$L_n(t)$	Legendreov polynóm
$\lambda_n(c)$	vlastné číslo
<b>MNŠ</b>	metóda najmenších štvorcov
$N$	rád ukončenia Fourierovho radu
$\mathbb{N}$	množina prirodzených čísel
$\mathbb{N}^0$	množina prirodzených čísel (s prvkom 0)
<b>NCM</b>	Newtonova-Cotesova metóda

$\omega$	uhlová frekvencia
$\omega_x$	priestorová uhlová frekvencia
$\omega_y$	priestorová uhlová frekvencia
$\omega_0$	uhlová frekvencia harmonického signálu
$\Omega$	maximálna uhlová frekvencia spektra
$p(x, y, t)$	akustický tlak
$P_n(c, t, \omega)$	jadro $\mathcal{P}$ -transformácie
<b>P</b>	matica $\mathcal{P}$ -transformácie
<b>PSWF</b>	Prolate spheroidal wave function
$q$	parameter vyhodnotenia kvality extrapolácie
$q_{n,m}$	odchýlka ortogonalít
<b>Q</b>	matica odchýlok ortogonalít
$r$	rád Newtonovho-Cotesovho pravidla
$\mathbb{R}$	množina reálnych čísel
$s(t)$	funkcia reprezentujúca signál
$S(t, \omega)$	Gáborov spektrogram
<b>STFT</b>	Short-time Fourier transform
$t$	čas
$T_f$	perióda vzorkovania signálu $f$
$T$	perióda vzorkovania (všeobecne)
$\tau$	doba pozorovania
$\tau_x$	dĺžka oblasti pozorovania
$\phi_n(t)$	prvok ortonormálnej bázy
<b><math>\Phi</math></b>	matica obsahujúca vzorky $\phi_n(t)$ pre rôzne $n$ a $t$
$\psi_n(c, t)$	PSWF rádu $n$
<b><math>\Psi_{N,M}</math></b>	matica obsahujúca vzorky $\psi_n(c, t)$ pre rôzne $n$ a $t$
<b>W</b>	matica váh
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel
$\operatorname{Re} x$	reálna časť komplexného čísla $x$
$\operatorname{Im} x$	imaginárna časť komplexného čísla $x$
$\overline{f(t)}$	komplexne združená funkcia k funkcii $f(t)$
$\ f\ $	norma prvku $f$ Hilbertovho priestoru
$\langle f, g \rangle$	skalárny súčin funkcií $f(t), g(t)$ v $\mathbf{L}_2$ všeobecne
$\langle f, g \rangle_b$	skalárny súčin funkcií $f(t), g(t)$ v $\mathbf{L}_2(-b, b)$
<b><math>\mathbf{M}^T</math></b>	transpozícia matice <b>M</b>
<b><math>\mathbf{M}^H</math></b>	Hermiteovsky združená matica k matici <b>M</b>

# Zoznam príloh

A Odvodenie špeciálnej váhovej matice	76
B Obsah priloženého CD	78

## A Odvodenie špeciálnej váhovej matice

Predpokladáme špeciálny prípad, kedy signály, ktorých súčin chceme integrovať, majú zhodnú periódu vzorkovania  $T > 0$ . Ďalej predpokladajme, že integračné hranice sú celočíselným násobkom tejto periódy. Naším cieľom bude vyjadriť prvky váhovej matice

$$W(k, l) = \int_{-KT}^{KT} \frac{\sin \pi (t/T - k)}{\pi (t/T - k)} \frac{\sin \pi (t/T - l)}{\pi (t/T - l)} dt, \quad \begin{array}{l} k, l \in \mathbb{Z} \\ K \in \mathbb{N} \end{array} \quad (\text{A.1})$$

pomocou funkcií štandardne implementovaných v **MATLABe**.

Vyriešme najprv prípad, kedy  $k = l$

$$\begin{aligned} W(k, k) &= \int_{-KT}^{KT} \frac{\sin^2 \pi (t/T - k)}{\pi^2 (t/T - k)^2} dt = \left. \begin{array}{l} \pi (t/T - k) = u \\ dt = \frac{T}{\pi} du \\ t = KT \Leftrightarrow u = \pi(K - k) \\ t = -KT \Leftrightarrow u = \pi(-K - k) \end{array} \right| = \\ &= \frac{T}{\pi} \int_{\pi(-K-k)}^{\pi(K-k)} \frac{\sin^2 u}{u^2} du = \frac{T}{\pi} \int_{\pi(-K-k)}^{\pi(K-k)} \frac{1 - \cos 2u}{2u^2} du = \frac{T}{\pi} \int_{2\pi(-K-k)}^{2\pi(K-k)} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \end{aligned}$$

Upravme neurčitý integrál

$$\begin{aligned} \int \frac{1 - \cos x}{x^2} dx &= -\frac{1}{x} - \int \frac{\cos x}{x^2} dx = \left. \begin{array}{l} u = \cos x \quad u' = -\sin x \\ v' = x^{-2} \quad v = -x^{-1} \end{array} \right| = \\ &= -\frac{1}{x} + \frac{\cos x}{x} - \int \frac{\sin x}{x} dx. \end{aligned}$$

Získavame výsledný tvar

$$W(k, k) = \frac{T}{\pi} \left( \left[ -\frac{1}{x} + \frac{\cos x}{x} \right]_{2\pi(-K-k)}^{2\pi(K-k)} - \int_{2\pi(-K-k)}^{2\pi(K-k)} \frac{\sin x}{x} dx \right). \quad (\text{A.2})$$

V tejto rovnici je zlomok obsahujúci kosínus nulový až na prípady, kedy  $k = K$ . Pomocou l'Hôpitalovho pravidla sa však ľahko presvedčíme, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + \cos x}{x} = 0 \quad (\text{A.3})$$

Zamerajme sa teraz na prípad  $k \neq l$ . Najprv upravíme (A.1) použitím identity

$$\sin(x + m\pi) = (-1)^m \sin x, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (\text{A.4})$$

na

$$W(k, l) = (-1)^{k+l} \int_{-KT}^{KT} \frac{\sin^2 \pi t/T}{\pi^2 (t/T - k)(t/T - l)} dt. \quad (\text{A.5})$$

Ďalej rozkladom na parciálne zlomky dostávame

$$W(k, l) = \frac{(-1)^{k+l}}{k-l} \left( \int_{-KT}^{KT} \frac{\sin^2 \pi t/T}{\pi (t/T - k)} dt - \int_{-KT}^{KT} \frac{\sin^2 \pi t/T}{\pi (t/T - l)} dt \right). \quad (\text{A.6})$$

a použitím identít

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad (\text{A.7})$$

a

$$\cos(x + 2m\pi) = \cos x, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (\text{A.8})$$

získame

$$W(k, l) = \frac{(-1)^{k+l}}{k-l} \left( \int_{-KT}^{KT} \frac{1 - \cos 2\pi(t/T - k)}{2\pi (t/T - k)} dt - \int_{-KT}^{KT} \frac{1 - \cos 2\pi(t/T - l)}{2\pi (t/T - l)} dt \right).$$

Nakoniec podobnou substitúciou ako v prípade  $k = l$  dostávame výsledný vzťah

$$W(k, l) = \frac{T}{2\pi} \frac{(-1)^{k+l}}{k-l} \left( \int_{2\pi(-K-k)}^{2\pi(K-k)} \frac{1 - \cos x}{x} dx - \int_{2\pi(-K-l)}^{2\pi(K-l)} \frac{1 - \cos x}{x} dx \right), \quad k \neq l. \quad (\text{A.9})$$

## B Obsah priloženého CD

Priložené CD obsahuje:

1. Tento dokument.
2. Funkcie:
  - bar3c.m – rozšírenie funkcie `bar3` na farebnú závislosť stĺpcov
  - BLW.m – generuje váhovú maticu na základe funkcií `sinc`
  - HFunction.m – generuje Hermiteove funkcie
  - NewtonCotes.m – generuje vektor váh integračného pravidla
  - prediction.m – s-funkcia pre predikciu extrapoláčnou maticou
  - quality.m – výpočet integrálnej kvality extrapolácie  $\epsilon$
3. Demonštračné skripty:
  - check\_order.m – kontrola rádov vygenerovaných funkcií
  - create\_ex\_matrix.m – extrapoláčnú maticu pre real-time extrapoláciu
  - extrapolation\_1D.m – extrapolácia jednorozmerného meraného signálu
  - extrapolation\_2D.m – extrapolácia dvojrozmerného meraného signálu
  - extrapolation\_Gerchberg.m – extrapolácia Gerchbergovou metódou
  - extrapolation\_intensity.m – extrapolácia neharmonického signálu
  - extrapolation\_sin.m – extrapolácia harmonického signálu
  - orthogonality.m – kontrola ortogonalita PSWF (na reálnom intervale)
  - orthonormality.m – kontrola ortonormality integračnými pravidlami
  - orthonormality\_BLW.m – kontrola ortonormality váhovou maticou
  - orthonormality\_LS.m – kontrola ortonormality pomocou MNŠ
  - regulator.slx – model prediktívnej regulácie s extrapoláčnou maticou
  - show\_BLW.m – ukážka váhovej matice na základe funkcií `sinc`
  - show\_PSWF.m – grafické priebehy PSWF
  - time\_frequency.m – časo-frekvenčná analýza PSWF
4. Dáta:
  - F.mat – spektrum odhadnuté z riadku tvoreného 75 mikrofónmi.
  - MicData1000Hz5cm.mat – záznam akustického tlaku z riadku mikrofónov
  - MicData2000Hz35cm.mat – záznam akustického tlaku z matice mikrofónov v usporiadaní  $8 \times 8$
  - psi1.mat – set PSWF pre  $c = 1$
  - psi2.mat – set PSWF pre  $c = 2$
  - psi3.mat – set PSWF pre  $c = 3$
  - psi4.mat – set PSWF pre  $c = 4$
  - psi10.mat – set PSWF pre  $c = 10$

Súbory boli vytvorené a otestované v prostredí MATLAB R2015b.