

Univerzita Palackého v Olomouci  
Přírodovědecká fakulta  
Katedra experimentální fyziky

# DIPLOMOVÁ PRÁCE

**Ne-newtonovské kapaliny a dimenze fraktálních  
obrazců**



Autor:	Patrik Šindler
Studijní program:	N0114A110002
Studijní obor:	Učitelství fyziky pro střední školy
Forma studia:	Prezenční
Vedoucí práce:	RNDr. Holubová Renata, CSc.
Termín odevzdání práce:	leden 2023

Prohlašuji, že jsem předloženou diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením RNDr. Renaty Holubové, CSc., a že jsem použil zdrojů, které cituji a uvádím v seznamu použitých pramenů.

V Olomouci dne 3.1.2023

.....

## **Bibliografická identifikace:**

Jméno a příjmení autora	Patrik Šindler
Název práce	Ne-newtonovské kapaliny a dimenze fraktálních obrazců
Typ práce	Diplomová
Pracoviště	Katedra experimentální fyziky
Vedoucí práce	Holubová Renata RNDr. CSc.
Rok obhajoby práce	2023
Abstrakt	<p>Práce se zabývá zkoumáním vztahu mezi fraktální dimenzí obrazců Hele-Shawovy buňky a poměrem dynamických viskozit použitých kapalin. Popisuje dynamickou viskozitu kapalin a přístroje k jejímu měření. Poskytuje popis ne-newtonovských kapalin a jejich kategorizaci podle vlastností. Dále se zabývá fraktály, jejich vlastnostmi a měřením fraktální dimenze zkoumaných obrazců. V neposlední řadě práce obsahuje analýzu naměřených hodnot pomocí metody lineární regrese a její vyhodnocení.</p>
Klíčová slova	Hele-Shawova buňka, fraktální dimenze, měření viskozity
Počet stran	53
Počet příloh	1
Jazyk	Český

## **Bibliographical identification:**

Autor's first name and surname	Patrik Šindler
Title	Non-newtonian fluids and fractal dimension
Type of thesis	Master
Department	Department of Experimental Physics
Supervisor	Holubová Renata RNDr. CSc.
The year of presentation	2023
Abstract	The thesis deal with the analysis of relation between fractal dimension and dynamic viscosity ratio of fluids used in Hele-Shaw cell. It describes the concept of dynamic viscosity and methods of viscosity measurement. It provides description of non-newtonian fluids and their categorization. It also deals with fractals, their properties and the measurement of fractal dimension. Lastly it includes analysis of measured values using linear regression.
Keywords	Hele-Shaw cell, fractal dimension, viscosity measurement
Number of pages	53
Number of appendices	1
Language	Czech

## Obsah

Úvod .....	6
<b>1 Hele-Shawova buňka .....</b>	<b>7</b>
<b>2 Viskozita .....</b>	<b>9</b>
<b>3 Fraktály.....</b>	<b>12</b>
Dimenze .....	12
Vlastnosti fraktálů.....	15
Měření fraktální dimenze.....	15
<b>4 Ne-newtonovské kapaliny.....</b>	<b>18</b>
Časově nezávislé chování .....	19
Kapaliny s časově závislou složkou deformace.....	20
Viskoelastické kapaliny .....	22
<b>5 Postup měření.....</b>	<b>23</b>
Měření viskozity .....	23
Měření fraktální dimenze obrazců Hele-Shawovy buňky .....	26
<b>6 Naměřené hodnoty .....</b>	<b>28</b>
Analýza dat .....	32
<b>Závěr .....</b>	<b>38</b>
<b>Seznam použitých pramenů .....</b>	<b>41</b>
<b>Příloha.....</b>	<b>43</b>

# Úvod

Cílem diplomové práce bylo ověřit a nalézt závislost mezi fraktální dimenzí obrazce a poměrem dynamických viskozit kapalin vtlačovaných mezi desky Hele-Shawovy buňky. Měření fraktální dimenze vzniklého obrazce je nástrojem, který popisuje chování kapalin v Hele-Shawově buňce. Její využití můžeme nalézt v geologii nebo při zefektivnění procesů v ropném průmyslu.

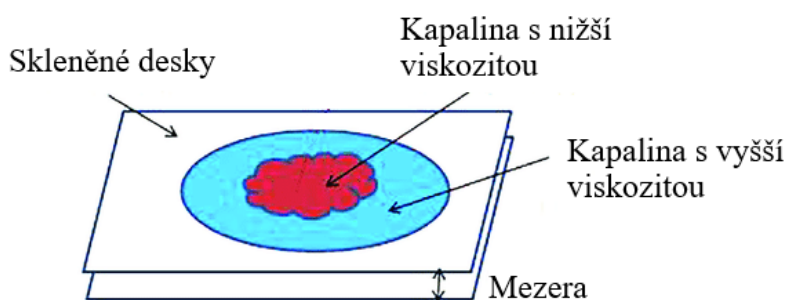
Struktura práce je následující. První kapitola se zabývá popisem Hele-Shawovy buňky a v ní probíhajícími procesy. Druhá kapitola objasňuje pojem viskozity kapalin. Popisuje její důsledky, jevy, které s ní souvisí a vysvětluje příčinu jejich vzniku. Dále podává přehled a porovnání přístrojů k jejímu měření. Třetí kapitola se zabývá fraktály. Pomocí pojmu dimenze ukazuje, jak se fraktály liší od jednoduchých matematických útvarů. Uvádí příklady několika známých fraktálů, definici Hausdorff-Besicovitchovy dimenze a shrnuje některé jejich vlastnosti. Důležitou součástí této kapitoly je přehled vybraných způsobů výpočtů a měření fraktální dimenze. A to zvláště „Box counting method“, která byla použita při určování fraktální dimenze obrazců vzniklých v Hele-Shawově buňce. Čtvrtá kapitola pojednává o ne-newtonovských kapalinách a jejich kategorizaci podle typu vlastností. Předposlední kapitola popisuje způsob měření experimentu. Shrnuje použité metody a přístroje a skript k určení fraktální dimenze. V poslední kapitole jsou uvedena vlastní naměřená data, na nichž byla provedena statistická analýza a po konzultaci vybraný nejvhodnější model, který je popisuje. Pro statistické zpracování byla zvolena hladina významnosti 5 %.

V závěru práce je shrnut výsledek měření experimentu a provedena diskuze statistické analýzy.

# 1 Hele-Shawova buňka

Hele-Shawova buňka je jednoduchá pomůcka, která je tvořena dvěma průhlednými deskami ze skla nebo plexiskla, které jsou položeny na sebe. Uprostřed horní desky je otvor pro vtlačení kapaliny. Tato pomůcka je pojmenovaná po inženýrovi Henry Selby-Hele-Shawovi, který studoval v Bristolu a pracoval jako inženýr a přednášející matematiky na University College v Bristolu. V roce 1904 založil College of Engineering při Transvaalském technickém institutu. Je autorem mnoha patentů, např. měření rychlosti větru, třecí spojky apod. Hele-Shawova buňka slouží k vytváření fraktálových struktur pomocí jednoduchých pomůcek.[1]

Předmětem zkoumání je chování dvou různě viskózních kapalin, vtlačěných mezi desky Hele-Shawovy buňky. Vtlačíme-li kapalinu o vyšší viskozitě do kapaliny s viskozitou menší, vznikne hladké rozhraní mezi oběma kapalinami. Pokud vtlačíme méně viskózní kapalinu do kapaliny o větší viskozitě, vznikají viskózní kanály. Každý kanál se dále rozvíjí a vzniká spleť sítí kanálů. Struktura obrazce závisí na viskozitě použitých kapalin. Výsledný obrazec je soběpodobný, jedná se o fraktál.



Obrázek 1: Hele-Shawova buňka [2]

Vznik viskózních kanálů můžeme ve velkém pozorovat například při terciární těžbě ropy. Má dramatický dopad na výtěžnost ropy a snižuje účinnost vytěšňování. Jelikož jsou viskózní kanály hydrodynamicky nestabilní, je velice těžké je charakterizovat kvantitativně pomocí tradičních metod. Použití fraktální geometrie při studiu viskózních kanálů poskytuje novou metodu studia tohoto fenoménu. Některé práce se zaměřují na simulaci obrazců vzniklých v Hele-Shawově buňce pomocí statistického modelu DLA. Tento model vytváří obrazce pomocí zaznamenávání dráhy shluku částic při Brownově pohybu. Ačkoliv většina studií byla omezena pouze na výpočet fraktální dimenze, počet prstů obrazce nebo simulaci pomocí statistického modelu DLA, zkoumání fraktálů poskytuje nový pohled na komplexnost viskózních kanálů. [3]

Jak vypadá tok kapaliny mezi deskami? Uvažujeme ustálené proudění mezi dvěma stejně velkými obdélníkovými deskami o délce  $l$  a šířce  $b$ . Desky jsou nehybné a umístěny rovnoběžně ve vzdálenosti  $2a$  od sebe. Osa  $y$  prochází kolmo k deskám, roviny desek jsou dány rovnicemi  $x = \pm a$  a kapalina teče ve směru osy  $x$ . Aby kapalina tekla, musí působit stálý přetlak  $p$  ve směru toku. Podíl tlaku v kapalině  $p$  a délky desek  $l$  se nazývá tlakový gradient  $\nabla p = \frac{p}{l}$ . Rychlost kapaliny na stěnách desek je nulová a nejvyšší je mezi deskami. Snažíme se zjistit, jak vypadá rychlostní profil proudící kapaliny.

Na vrstvu kapaliny mezi deskami působí tlaková síla o velikosti  $F = 2pby$  [4], kde  $y$  je vzdálenost vrstvy od osy desek  $o$ ,  $b$  je šířka desek a  $p$  je tlak v kapalině. Současně opačným směrem působí třecí síly  $F_t$  od obou krajních vrstev kapaliny. Jelikož mají tyto síly stejnou velikost a jsou symetrické, můžeme je sečíst a vyjádřit

$$F_t = -2\eta \frac{dv}{dy} bl, \quad [4]$$

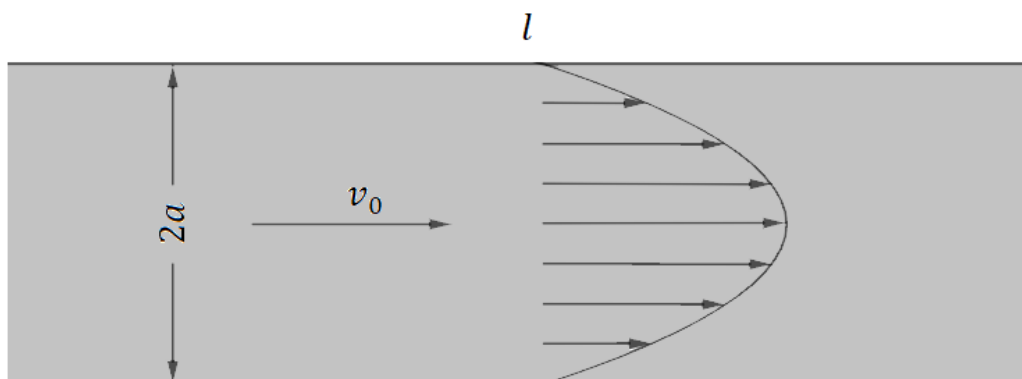
kde  $v$  je rychlost proudění kapaliny,  $y$  je vzdálenost vrstvy od osy desek,  $\eta$  je dynamická viskozita kapaliny,  $b$  je šířka desek a  $l$  je délka desek. Znaménko mínus vyjadřuje skutečnost, že gradient rychlosti je záporný, jelikož rychlost od středu klesá. Tato síla je více popsána v další kapitole o viskozitě. Při ustáleném proudění jsou obě síly v rovnováze, tedy platí

$$2pby = -2\eta \frac{dv}{dy} bl. \quad [4]$$

Integrací s okrajovými podmínkami  $v = 0$  a  $y = \pm a$  dostaneme vzorec pro rychlost

$$v = v_0 \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right), \text{ kde } v_0 = \frac{pa^2}{2\eta l}. \quad [4]$$

Rychlost  $v_0$  je maximální rychlost, kterou má kapalina tekoucí uprostřed mezi deskami. Profil proudící kapaliny je dán parabolickým průběhem viz obrázek 2. [4]



Obrázek 2: Rychlostní profil proudící kapaliny mezi dvěma deskami [4]

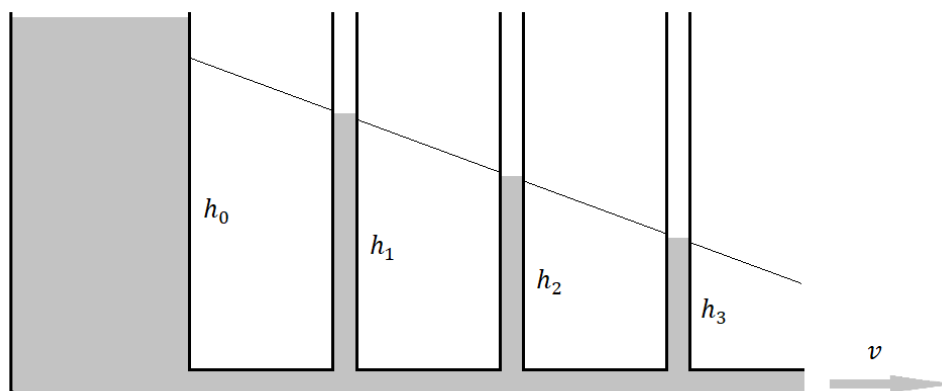


## 2 Viskozita

Kapaliny se od těles pevného skupenství hlavně liší značnou pohyblivostí svých částic. Proto jeví snadnou dělitelnost a nemají pevný tvar. Kohezní síly uvnitř kapalin jsou tedy mnohem menší než v pevných tělesech a kapaliny kladou relativně malý odpor vůči vnějším silám působícím ve směru normály plochy, která kapalinu omezuje. Z tohoto důvodu je u kapalin vhodnější mluvit o tlaku namísto napětí.

Viskozita (vazkost) je odpor kapaliny proti změně tvaru. Tato vlastnost se uplatňuje, pokud kapalina není v rovnováze a přizpůsobuje se působícím vnějším silám. Síla viskozity má snahu zeslabit rozdíl vzájemných rychlostí v proudící kapalině, čímž připomíná síly vznikající při tření. Proto úkazy viskozity někdy nazýváme vnitřním třením. Vnitřní tření kapalin je důsledkem difúzního přenosu hybnosti mezi molekulami sousedních vrstev kapaliny pohybujících se různou rychlostí. V případě rovnováhy kapalin se síly vazkosti neuplatňují. V dynamice kapalin se často setkáváme s pohybem kapalin, jejichž viskozita je tak malá, že ji můžeme zanedbat. Takovou neviskózní kapalinu nazýváme dokonalou nebo ideální kapalinou. [5]

V důsledku viskozity je rychlost kapaliny spojitou a hladkou funkcí souřadnic. Příkladem důsledku viskozity kapalin může být to, že na povrchu obtékaných těles nebo stěn potrubí musí být rychlost kapaliny rovna nule, což je zásadní rozdíl oproti ideální kapalině, u níž je nulová jen normálová složka rychlosti kapaliny. Dalším příkladem důsledku viskozity kapalin je pokles tlaku proudící kapaliny v potrubí. Příčinou změny tlaku v potrubí je pokles energie kapaliny v důsledku tření o stěny potrubí. To lze demonstrovat soustavou manometrů, viz obrázek 3.



Obrázek 3: Pokles tlaku proudící kapaliny v důsledku tření o stěny potrubí [4]

Bez viskozity by neexistovalo laminární proudění. Laminární proudění ideální kapaliny je nestabilní, tj. odchylka od laminárního proudění se rychle zesiluje a vede ke

vzniku velkých vírů. Typickou nestabilitu např. v proudění vzduchu je možno pozorovat u ve větru se třepetající vlajky. Ztráta rychlosti kapaliny poblíž překážky vlivem viskozity má za následek vznik příčného gradientu rychlosti, která je největší právě u stěn překážky. Laminární proudění viskózní kapaliny poblíž stěny se tak stává vířivým prouděním a ztrácí charakter potenciálového proudění. Proto je také popis proudění viskózní kapaliny mnohem složitější než popis proudění ideální kapaliny. [4]

Dalším příkladem důsledku viskozity kapaliny je třecí síla, která působí, pokud se mezi dvěma rovnoběžnými navzájem pohybujícími se deskami nachází viskózní kapalina. Proti pohybu působí kapalina třecí silou o velikosti

$$F = -\eta S \frac{\Delta v}{\Delta y}, \quad [4]$$

kde  $\Delta v$  je relativní rychlost,  $\Delta y$  je vzdálenost obou desek o ploše  $S$  a  $\eta$  je dynamická viskozita. Třecí síla vzniká i mezi sousedními vrstvami kapaliny, pokud se pohybují rozdílnými rychlostmi. [4]

Dynamická viskozita kapalin je závislá na druhu kapaliny a na teplotě. Se zvyšující se teplotou se dynamická viskozita kapalin zpravidla zmenšuje. [5] Závislost dynamické viskozity na teplotě je exponenciální viz [6].

K měření viskozity kapalin slouží takzvané viskozimetry. Existuje více typů viskozimetrů, uvedeme zde některé z nich.

Rotační viskozimetry jsou založeny na měření torzního momentu. Skládají se ze dvou soustředných válců, mezi nimiž je úzká mezera, vyplněná měřenou kapalinou. Vnější válec se otáčí konstantní úhlovou rychlostí. Vnitřním třením kapaliny je otáčivý moment přenášen na vnitřní válec, zavěšený na torzním vlákně. Po ustavení rovnováhy se měří úhel pootočení vnitřního válce od původní polohy  $\varphi$ , pro který platí

$$\varphi = K \cdot \eta \cdot \omega, \quad [7]$$

kde  $\omega$  je úhlová rychlost,  $\eta$  je dynamická viskozita kapaliny a  $K$  je konstanta přístroje.

Kapilární nebo také průtokové viskozimetry jsou založeny na měření objemového průtoku zkoumané kapaliny trubicí. Výchozím principem kapilárních viskozimetrů je Hagen-Poiseuillův zákon pro svisle umístěnou kapiláru kruhového průřezu  $r$  a délce  $l$ , kterou za dobu  $\tau$  proteče kapalina o objemu  $V$  ve tvaru

$$\eta = \frac{\pi r^4 p \tau}{8 V l}, \quad [7]$$

kde  $p$  je hydrostatický tlak,  $\tau$  je doba, za kterou proteče kapalina o objemu  $V$  kapilárou o poloměru  $r$  a délce  $l$ . Tato metoda je spíše využívána pro měření porovnávací metodou,

kdy srovnáváme doby průtoku referenční a zkoumané kapaliny. Pro výslednou hodnotu dynamické viskozity zkoumané kapaliny platí vztah

$$\eta = \frac{\tau \rho}{\tau_{\text{ref}} \rho_{\text{ref}}} \eta_{\text{ref}}, \quad [7]$$

kde  $\rho$  je hustota zkoumané kapaliny,  $\tau_{\text{ref}}$  je doba výtoku referenční kapaliny,  $\rho_{\text{ref}}$  je hustota referenční kapaliny a  $\eta_{\text{ref}}$  je dynamická viskozita referenční kapaliny. Kapilární viskozimetry nelze použít k měření viskozity ne-newtonovských kapalin, jelikož pro ně Hagen-Poiseuillův zákon neplatí v plném tvaru.

Posledním typem viskozimetrů, který uvedeme, jsou tělískové viskozimetry. Ty jsou založeny na době pádu nebo vystoupení zkušební tělíska ve zkoumané kapalině. Odporovou sílu, která působí na těleso obtékané kapalinou, popisuje Stokesův zákon, který má pro kulové tělísko o poloměru  $r$  pohybující se rychlostí  $v$  tvar

$$F = 6 \pi \eta r v. \quad [7]$$

Obecně se pro daný přístroj sestaví pohybová rovnice zkušební tělíska, ve které vedle odporové síly figuruje i síla tíhová a vztlaková. Pro zkušební kuličku o poloměru  $r$ , hustotě  $\rho$  a po splnění předpokladu, že kulička padá konstantní rychlostí, má výsledný vztah podobu:

$$\eta = \frac{2 r^2 g (\rho - \rho_{\text{kapaliny}})}{9 v}. \quad [7]$$

Při měření je výhodnější měřit dobu, za kterou tělísko urazí vzdálenost uvedenou na daném viskozimetru. Po úpravě a vytknutí parametrů do jedné konstanty je výsledný vztah pro dynamickou viskozitu

$$\eta = K (\rho - \rho_{\text{kapaliny}}) t. \quad [7]$$

Příkladem tělískového viskozimetru je Höpplerův viskozimetr, který byl použit v této práci. [7]

### 3 Fraktály

V této kapitole se budeme zabývat fraktály, jejich vlastnostmi a popisem. Pojem dimenze nám poskytuje vhled do problematiky fraktálů a můžeme pomocí něj charakterizovat některé vlastnosti fraktálů.

#### Dimenze

Podle definice víme, že prázdná množina  $\emptyset$  a pouze prázdná množina má dimenzi rovnu  $-1$ . Dimenze jakéhokoliv jiného prostoru potom definujeme jako číslo o 1 větší než dimenzi objektu, pomocí kterého můžeme jakoukoliv část tohoto prostoru oddělit od jeho zbytku. Jelikož  $\emptyset$  má dimenzi  $-1$ , jakákoliv spočetná množina má potom dimenzi 0 ( $-1 + 1 = 0$ ). Obdobně můžeme říct, že přímka má dimenzi 1, protože ji můžeme rozdělit bodem ( $0 + 1 = 1$ ), rovina má dimenzi 2 protože může být rozdělena přímkou ( $1 + 1 = 2$ ).

Je pravdou, že spočetná množina může být rozdělena prázdnou množinou, ale stejně tak může být rozdělena jinou spočetnou množinou nebo přímkou. Vezměme například množinu racionálních čísel. Ta tvoří spočetnou nekonečnou množinu. Pokud ji znázorníme na reálné ose, můžeme tuto množinu rozdělit například jakýmkoliv iracionálním číslem, které má dimenzi 0. Což by ale znamenalo, že racionální čísla mají dimenzi 1 ( $0 + 1 = 1$ ). Pokud tuto množinu znázorníme v souřadnicové soustavě, mohli bychom k rozdělení použít jakoukoliv přímkou, která má průsečík s x-ovou osou. To by ale znamenalo, že racionální čísla mají dimenzi 2 ( $1 + 1 = 2$ ). K definici dimenze tedy použijeme nejnižší hodnotu. [8]

Ukážeme si, jak bychom určili dimenzi složených prostorů jako například dvou různoběžných přímek nebo sjednocení bodu a plného čtverce. V prvním případě dvou různoběžných přímek je bod množinou s nejmenší dimenzí, kterou můžeme přímkou rozdělit. V druhém případě sjednocení bodu a plného čtverce musíme rozlišovat mezi globální a lokální dimenzí. Pokud bychom použili předchozí definici na celou množinu, potom by její dimenze byla rovna 0. Pokud bychom však zkoumali jednotlivé části, zjistili bychom, že bod má dimenzi rovnu 0, zatímco jakákoliv část čtvercové oblasti má dimenzi rovnu 2. Toto je příklad lokální dimenze. Globální dimenze by podle očekávání měla být rovna 2, musíme tedy naši definici mírně upravit. Dimenze prostoru je rovna maximu jeho lokálních dimenzí, kde lokální dimenzi definujeme jako číslo o 1 větší než je dimenze nejméně dimenzionálního objektu, kterým můžeme prostor rozdělit na části. [8]

Tuto míru, definovanou uvedeným způsobem, nazýváme topologickou dimenzí prostoru. Topologická dimenze je veličina, která je invariantní vůči homomorfismům a bijektivním zobrazením. Homomorfismus může být nejlépe vysvětlen jako hladká

deformace jednoho prostoru na druhý bez jakéhokoliv trhání nebo spojování. Při takovémto procesu se topologická dimenze objektu nemění. Můžeme tedy říct, že krychle a koule jsou topologicky ekvivalentní, jelikož jedna může být deformována na druhou tímto způsobem. Obdobně můžeme úsečku opakovaně natahovat a zkracovat, ale její topologická dimenze bude stále rovna 1. Uvažujme objekt vytvořený následujícím způsobem. Začneme s úsečkou. Rozdělíme ji na třetiny a prostřední třetinu nahradíme vrcholem rovnostranného trojúhelníku. Rekurzivně tento krok opakujeme s každou vzniklou úsečkou. Takto vzniklý útvar nazýváme Kochovou křivkou.



Obrázek 4: Kochova křivka [8]

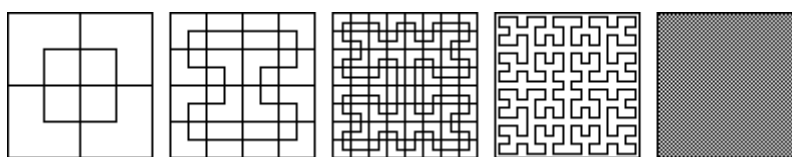
S každou iterací se délka Kochovy křivky zvyšuje koeficientem  $\frac{4}{3}$ . [8] Pokud bychom poslední krok vytváření křivky opakovali nekonečně mnohokrát, délka křivky by se blížila k nekonečnu. Plocha pod křivkou je dána následující posloupností

$$1 + \left(\frac{4}{9}\right) + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^3 + \dots,$$

kteřá konverguje k  $\frac{9}{5}$ , pokud předpokládáme, že plocha pod první křivkou je rovna jedné. [8]

Tyto výsledky nejsou nijak zvláštní, opačným případem však může být následující křivka.

Vezměme jednotkový čtverec. Rozdělíme jej na 4 identické čtverce. Nakreslíme čáru, která prochází středem každého čtverce a vrátí se do počáteční pozice. Vrátime se k druhému kroku a proces opakujeme. Obrázek 5 znázorňuje tento proces od prvního kroku až po teoretický výsledek po nekonečném počtu iterací.

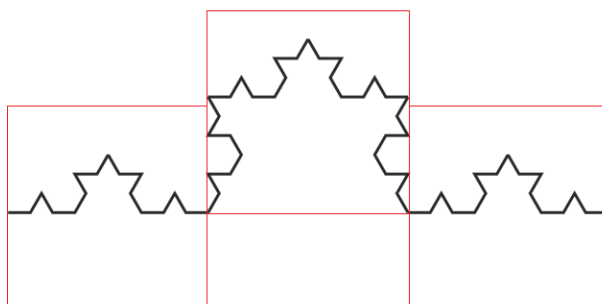


Obrázek 5: Peanova křivka (Hilbertova verze) [8]

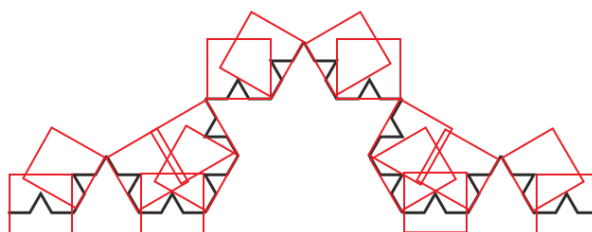
Takto vytvořená křivka má nekonečnou délku. Zajímavé je, že při nekonečném počtu iterací, prochází křivka každým bodem jednotkového čtverce. Existuje tedy spojitě bijektivní zobrazení jednotkového intervalu na plochu jednotkového čtverce. Jinými slovy jsme transformovali objekt o topologické dimenzi 1 na objekt o topologické dimenzi 2 pomocí procedury, která by neměla dovolovat výskyt takového jevu. Jednoduché prodlužování

a ohýbání by mělo zachovat velikost topologické dimenze nezměněnou. Existence Peanovy křivky přináší otázku ohledně významu topologické dimenze. [8]

Pokusíme se zakrýt Kochovu křivku pomocí čtverců. Potřebný počet čtverců bude záviset na délce jejich strany. K zakrytí celé křivky bude stačit jeden čtverec o délce strany 1, čtyři čtverce o délce strany  $\frac{1}{3}$ , 16 čtverců o délce strany  $\frac{1}{9}$ , atd.



Obrázek 6: Pokrytí Kochovy křivky čtverci o délce strany  $\frac{1}{3}$ .



Obrázek 7: Pokrytí Kochovy křivky čtverci o délce strany  $\frac{1}{9}$ .

Obecně na pokrytí Kochovy křivky potřebujeme  $4^n$  čtverců o délce strany  $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ . Pokud použijeme tuto metodu na jakýkoliv objekt v metrickém prostoru, můžeme nadefinovat veličinu ekvivalentní dimenzi. Tato dimenze se nazývá Hausdorff-Besicovitchova dimenze a definujeme ji podle vztahu

$$D = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log N(h)}{\log\left(\frac{1}{h}\right)}, \quad [8]$$

kde  $N(h)$  je počet čtverců o délce strany  $h$ , potřebný k pokrytí daného objektu.

Podle definice je tedy dimenze Kochovy křivky rovna

$$D = \frac{\log 4^n}{\log 3^n} = \frac{n \cdot \log 4}{n \cdot \log 3} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,2619 \dots$$

O tom, že se jedná o dimenzi, se můžeme přesvědčit, pokud ji aplikujeme na úsečky. Na pokrytí úsečky potřebujeme jeden čtverec o délce strany 1, dva čtverce o délce strany  $\frac{1}{2}$ , čtyři čtverce o délce strany  $\frac{1}{4}$ , atd. V limitním případě můžeme říct, že

$$\frac{\log 2^n}{\log 2^n} = 1,$$

což souhlasí s topologickou dimenzí. [8]

Hausdorff-Besicovitchova dimenze v případě Kochovy křivky není celým číslem, což nesouhlasí s topologickou dimenzí, která je rovna 1. Kochova křivka je objekt, jehož dimenze se pohybuje mezi dimenzí přímky a dimenzí roviny. Kochova křivka je fraktál.

Fraktál je množina, jejíž Hausdorff-Besicovitchova dimenze je větší než její topologická dimenze. Každá množina s neceločíselnou dimenzí je fraktálem. Hausdorff-Besicovitchovu dimenzi nazýváme fraktální dimenzí. [9]

### Vlastnosti fraktálů

Množina  $F$  je fraktál, potom vykazuje některé z následujících vlastností:

- $F$  má jemnou strukturu, tím rozumíme, že je detailní na libovolně malých měřítcích.
- $F$  je dost nepravidelný, lokálně i globálně, na to, abychom byli schopni jej popsat pomocí tradiční geometrie.
- Často má  $F$  nějakou formu soběpodobnosti. Pokud změním měřítko, vzhled tělesa se nezmění.
- V mnoha případech je  $F$  definováno jednoduchým způsobem, například rekurzivně.
- Obvykle je fraktální dimenze  $F$  větší než topologická dimenze. Jelikož dimenze je měřitelná veličina, zaměříme se při zkoumání fraktálů převážně na měření jejich fraktální dimenze.

Uvedené vlastnosti jsou platné pro většinu fraktálů. Nicméně popis fraktálů a jejich vlastností se liší často podle autorů. [10]

### Měření fraktální dimenze

První způsob výpočtu fraktální dimenze je metoda **pokrytí**. Zmínili jsme ji již v kapitole o dimenzi, viz obrázky 6 a 7.

Pokud je fraktál soběpodobný, můžeme jeho fraktální dimenzi určit pomocí **soběpodobnosti**. Vezměme například Cantorovu množinu. Uvažujme úsečku o jednotkové délce, tedy interval  $(0,1)$ . V prvním kroku odstraníme prostřední část, tedy interval  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ .

V dalším kroku odstraníme prostřední část zbývajících částí, tedy intervaly  $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$  a  $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ . Takto budeme postupovat do nekonečna. Cantorova množina je znázorněna na obrázku 8.



Obrázek 8: Cantorova množina [11]

Vztah mezi počtem částí  $N$ , na které se těleso rozdělí a koeficientem  $s$ , kterým se zmenšují délky zbývajících částí, je

$$N(s) = s^D. \quad [10]$$

Vztah pak lze dále upravit, abychom z něj získali fraktální dimenzi

$$D = \frac{\log N(s)}{\log s}.$$

Dimenze Cantorovy množiny je podle tohoto vztahu rovna  $D = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,631$ .

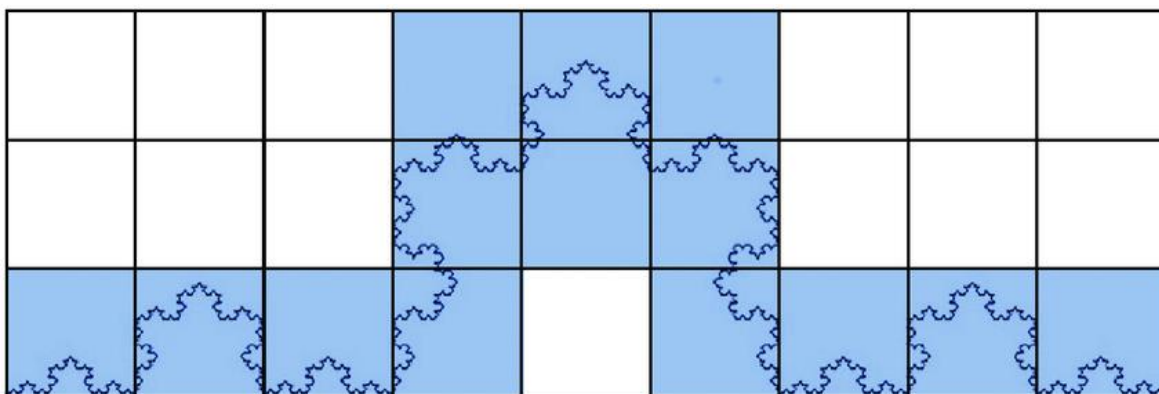
Obdobně můžeme pomocí této metody vypočítat dimenzi Kochovy křivky. Ta je podle vztahu rovna  $D = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,2619$ , což odpovídá výpočtu podle definice Hausdorff-Besicovitchovy dimenze.

Poslední metodou, kterou zmíníme, je takzvaná „**Box counting**“ metoda. Metoda je zjednodušenou podobou metody pokrytí. Tato metoda je jednou z nejpoužívanějších metod díky její relativní jednoduchosti a empirickému odhadu. Mějme nějakou množinu  $F$  a  $N_\delta(F)$  je nejmenší počet čtverců o délce strany  $\delta$ , které pokrývají  $F$ . Potom dimenzi vypočteme podle vztahu

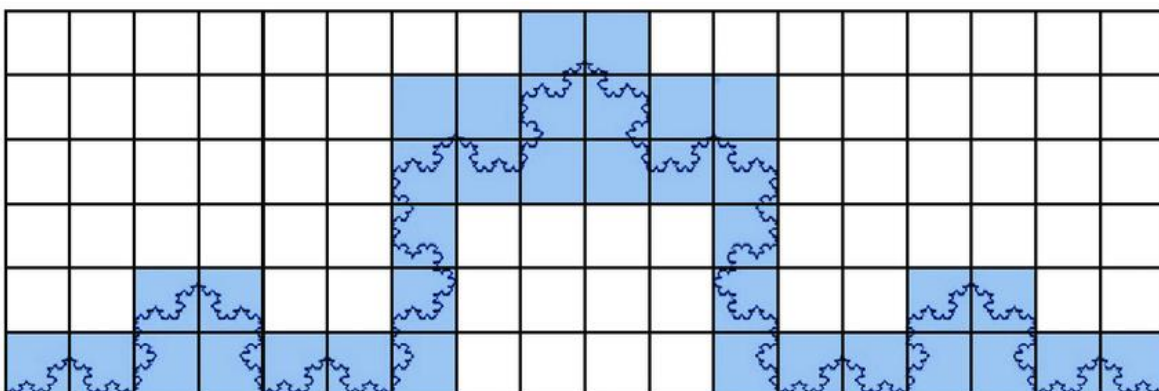
$$D = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}. \quad [10]$$

Předpokládáme, že  $\delta > 0$  je dostatečně malé na to, aby byl výraz  $-\log \delta$  kladný. Abychom se vyhnuli výrazům  $\log 0$  nebo  $\log \infty$ , budeme uvažovat pouze neprázdné ohraničené množiny. Grafické znázornění „box counting“ metody je na obrázcích 9-11.

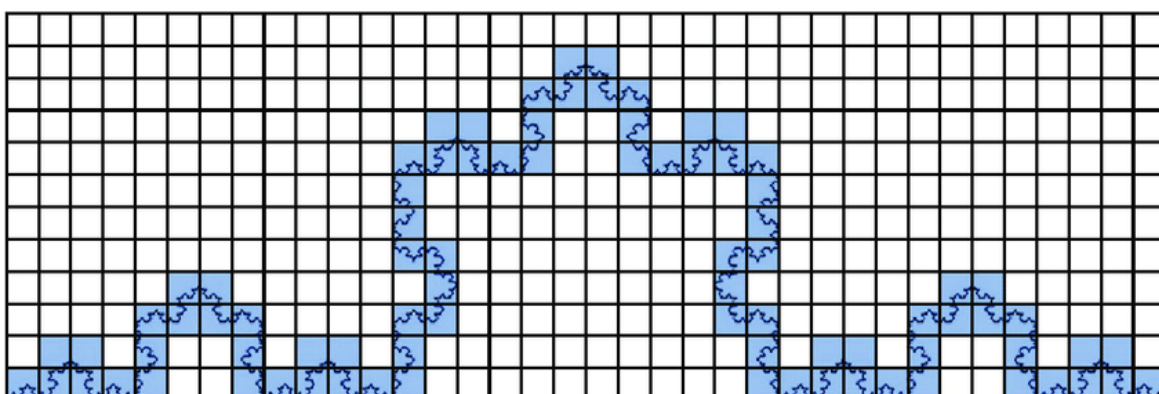




Obrázek 9: První pokrytí obrazce mřížkou o dané velikosti rámečku. [12]



Obrázek 10: Druhé pokrytí obrazce mřížkou o dané velikosti rámečku. [12]



Obrázek 11: Třetí pokrytí obrazce mřížkou o dané velikosti rámečku. [12]

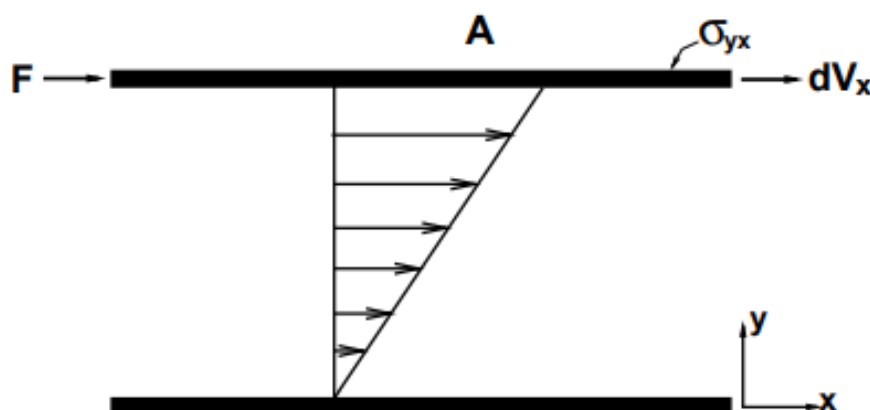
Pomocí této metody můžeme určit fraktální dimenzi obrazců, které nejsou soběpodobné. Určení dimenze pomocí této metody lze zjednodušit použitím výpočetní techniky. [10]

## 4 Ne-newtonovské kapaliny

Reologie se zabývá studiem vnitřní reakce látek na působení vnějších sil. Reologické chování kapalin je důležité k charakterizování produktů nebo k řešení technologických a inženýrských výpočtů pro zdokonalování výrobních a dopravních zařízení. Matematickým vyjádřením tokových vlastností jsou reologické stavové rovnice a jejich grafickou podobou jsou tokové křivky. [13]

K vysvětlení pojmu ne-newtonovských kapalin je vhodné nejdříve definovat newtonovské kapaliny. Při jednoduchém smyku kapaliny, viz obrázek 12, mezi dvěma deskami je odezva newtonovské kapaliny charakterizována lineárním vztahem mezi tečným napětím  $\sigma_{yx}$  a smykovou rychlostí  $\dot{\gamma}_{yx}$ , kde konstantou úměrnosti je dynamická viskozita  $\eta$ , tedy:

$$\sigma_{yx} = \eta \dot{\gamma}_{yx}. \quad [14]$$



Obrázek 12: Napětí mezi pohybujícími se deskami [14]

Odchylky od newtonovského chování se u kapaliny objevují, pokud smykové veličiny neprochází počátkem nebo vztah mezi tečným napětím a smykovou rychlostí není lineární. Jinými slovy, viskozita kapaliny není dána vztahem  $\sigma/\dot{\gamma}$ , není konstantní, ale je funkcí  $\sigma$  nebo  $\dot{\gamma}$ . Za určitých podmínek může být viskozita závislá nejen na tokových podmínkách (geometrie, smyková rychlost, tečné napětí, atd.), ale může záviset i na historii pohybu kapaliny. Kapaliny můžeme dělit do tří skupin:

- Newtonovské kapaliny mají hodnotu smykové rychlosti v každém bodě uvnitř kapaliny určenu pouze hodnotou tečného napětí v tomto bodě. Tyto kapaliny jsou často nazývané jako viskózní, neelastické, časově nezávislé.
- Časově závislé kapaliny. Vztah mezi tečným napětím a smykovým třením závisí na době trvání a na historii pohybu.

- Viskoelastické kapaliny vykazují chování na pomezí viskózní kapaliny a elastické pevné látky. Tyto kapaliny částečně vykazují vlastnosti jako elastická deformace nebo zpětný ráz.

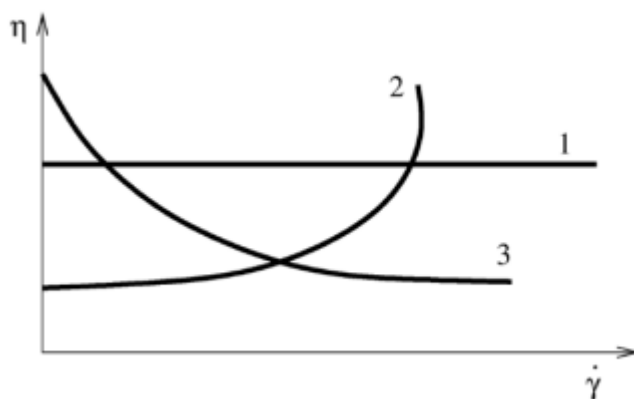
Mnoho kapalin za určitých podmínek projevuje kombinaci vlastností ze dvou až všech tří skupin. Například není neobvyklé, že tavenina polymeru vykazuje časově závislé a viskoelastické chování současně. Obecně však lze identifikovat hlavní ne-newtonovské chování a použít jej jako základ pro následné výpočty. Jednotlivé typy ne-newtonovského chování jsou jednotlivě popsány v následujících podkapitolách. [14]

### Časově nezávislé chování

Jak již bylo řečeno, tyto kapaliny jsou charakterizovány tím, že jejich hodnota smykové rychlosti v každém bodě uvnitř kapaliny je určena pouze hodnotou tečného napětí v tomto bodě. Můžeme je tedy popsat vztahem v podobě

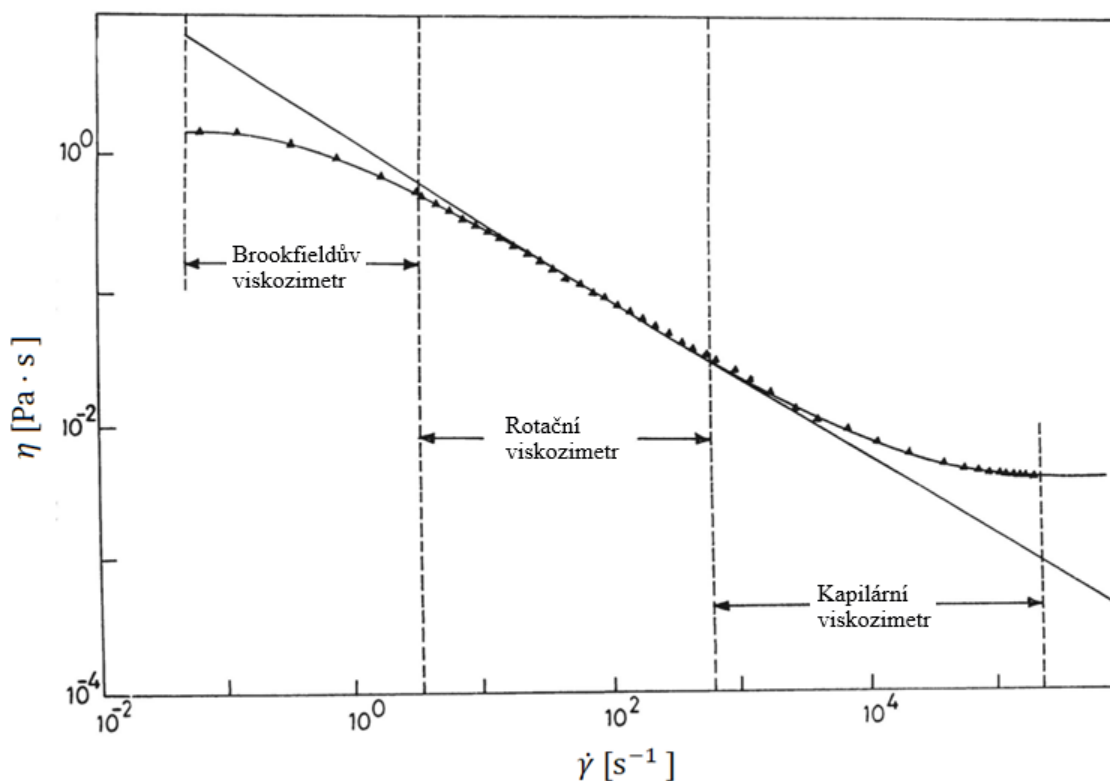
$$\dot{\gamma}_{yx} = f(\sigma_{yx}). \quad [14]$$

V závislosti na tvaru této rovnice existují tři možnosti chování kapaliny. Chování těchto kapalin znázorňuje graf 1.



Graf 1: Závislost viskozity na smykové rychlosti (1 – newtonovská kapalina, 2 – dilatantní kapalina, 3 – pseudoplastická kapalina) [15]

A) Pseudoplastické kapaliny jsou charakteristické tím, že jejich viskozita klesá se zvyšující se smykovou rychlostí. Příkladem takových kapalin mohou být roztoky polymerů nebo kečup. Příklad závislosti viskozity na smykové rychlosti zobrazuje graf 2.



Graf 2: Závislost viskozity na smykové rychlosti pro pseudoplastickou kapalinu [14]

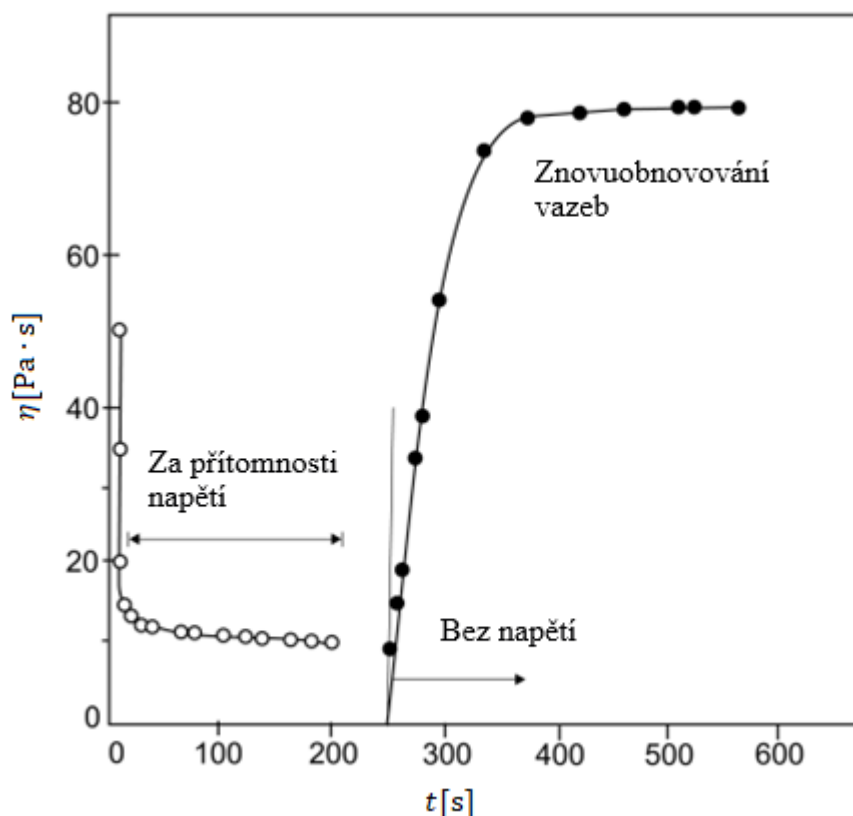
Pro vyjádření závislosti viskozity na smykové rychlosti pro pseudoplastickou kapalinu existuje mnoho různých vztahů. Některé z nich jsou založeny na prokládání experimentálních dat křivkou, zatímco jiné mají základ ve statistické mechanice. Jedním z nich je například Ostwald de Waeleův zákon, který popisuje tuto závislost jako logaritmičko-logaritmičnou. Závislost má tedy obecně tvar  $\sigma = m(\dot{\gamma})^n$ , kde  $0 < n < 1$  je index toku a  $m$  je koeficient konzistence, který popisuje tečení kapaliny. [14]

B) Dilatantní kapaliny jsou charakteristické tím, že jejich viskozita roste se zvyšující smykovou rychlostí. Tato kategorie nevyvolávala velký zájem a proto je k dispozici velmi málo spolehlivých údajů. Příkladem takových kapalin je suspenze kaolínu, oxid titaničitý nebo kukuřičná mouka ve vodě. Obdobně jako pro pseudoelastické kapaliny pro ně platí Ostwald de Waeleův zákon, kde na rozdíl od pseudoelastických kapalin platí pro index toku  $n > 1$ . [14]

### Kapaliny s časově závislou složkou deformace

Mnoho látek, zejména z potravinářského a farmaceutického odvětví, mají tokové charakteristiky, které není snadné popsat jednoduchými matematickými vzorci. Hlavní příčinou je to, že jejich viskozita není pouze závislá na tečném napětí nebo smykové rychlosti, ale i na době působení napětí. Podle závislosti viskozity na době působení napětí dělíme časově závislé kapaliny na dvě skupiny:

A) Tixotropní kapaliny jsou charakteristické tím, že jejich viskozita klesá s dobou působení napětí. Důvodem klesání viskozity je rozpad vnitřních vazeb v látce. Jak se snižuje počet vazeb v látce, snižuje se i rychlost změny viskozity a blíží se nule. V některých případech je rozpad vnitřních vazeb vratný. Po odstranění napětí a po dlouhé době odpočinku se v kapalině obnoví vnitřní vazby a kapalina získá původní hodnotu viskozity. Toto chování ilustruje obrázek 13. V časové intervalu od 0 s do 200 s působí napětí a způsobuje snížení viskozity. Po odstranění napětí se v látce začínají obnovovat vazby a viskozita roste.



Obrázek 13: Rozpad a obnovení vnitřních vazeb v kapalině [14]

Vlastností tixotropních látek se často využívá při výrobě nátěrových hmot, protože zabráňují stékání ze svislých ploch. [14]

B) Reopektické kapaliny jsou charakteristické tím, že jejich viskozita roste s dobou působení napětí. Existuje relativně málo kapalin, které se projevují tímto chováním. Oproti tixotropním kapalinám se při působení napětí vytvářejí vazby, což je důsledkem toho, že viskozita kapaliny roste s dobou působení napětí. Příkladem reopektických kapalin je suspenze bentonitu. [14]

## Viskoelastické kapaliny

Pro ideálně pružnou pevnou látku je napětí ve smyku přímo úměrné zkosu. Tuto závislost vyjadřuje Hookův zákon

$$\sigma_{yx} = G\gamma_{yx}, \quad [14]$$

kde konstantou úměrnosti je Youngův modul pružnosti ve smyku  $G$ . Při elastické deformaci se po odstranění působící síly těleso vrátí do původního stavu.

Pro newtonovskou kapalinu je tečné napětí úměrné smykové rychlosti. Mnoho materiálů technického významu vykazuje za určitých podmínek jak elastické, tak viskózní vlastnosti. Pokud nevykazují tixotropní ani reopektické vlastnosti, mluvíme o nich jako o viskoelastických. Odezva materiálu však není určena pouze jeho strukturou, ale také pohybem, který kapalina vykonala. Proto není zcela snadné rozlišit mezi pevnou látkou a kapalinou. [14]

## 5 Postup měření

Zkoumáme obrazce, které vzniknou v Hele-Shawově buňce po vtlačení dvou různě viskózních kapalin. K analyzování těchto opakujících se vzorů je vhodný popis pomocí fraktální dimenze. Aplikujeme poznatky z fraktální geometrie k porovnání obrazců různých kapalin v Hele-Shawově buňce. K popisu zkoumaných kapalin budeme používat jejich viskozity a zkoumat závislost fraktální dimenze obrazce na poměru viskozit zkoumaných kapalin.

### Měření viskozity

K měření dynamické viskozity byl použit Höpplerův viskozimetr Brookfield KF10, jež tvoří trubice se zkoumanou kapalinou a lázeň okolo trubice. Höpplerovým viskozimetrem můžeme měřit viskozitu kapalin v rozmezí  $0,5 - 7,0 \cdot 10^4$  mPa·s. Teplotu lázně můžeme měnit pomocí oběhového termostatu Julabo ME-6, který je připojen k viskozimetru. Höpplerův viskozimetr umožňuje měření viskozity v rozsahu teplot  $-60\text{ °C} - +150\text{ °C}$ .



Obrázek 14: Höpplerův viskozimetr [16]

Viskozimetr musí být umístěn ve vodorovné poloze. K tomu slouží dva vyrovnávací šrouby na spodní straně viskozimetru. Vodorovnou polohu můžeme zkontrolovat pomocí kruhové vodováhy. Vodorovnou polohu viskozimetru bychom měli pravidelně kontrolovat během měření.

Preferovaný úhel sklonu viskozimetru je  $80^\circ$  vzhledem k vodorovné rovině. Jiné úhly sklonu můžeme nastavit pomocí seřizovacího šroubu, který je umístěn na straně viskozimetru. Podle zvoleného úhlu sklonu budeme muset při výpočtech použít příslušnou

úhlovou konstantu. Přehled možných úhlů sklonu a jejich příslušných konstant daných výrobcem je uveden v tabulce 1.

Tabulka 1: Možné úhly sklonu viskozimetru a jejich příslušné úhlové konstanty [17]

Úhel sklonu	Úhlová konstanta $F$
80° (DIN)	1,0
70°	0,952
60°	0,879
50°	0,778

Kuličky mohou v trubici viskozimetru padat v obou směrech. Směr pádu kuličky může být změněn otočením viskozimetru, který je připojen ke stojanu tak, aby se mohl otáčet. Daný směr pádu je potom zajištěn zámkovým mechanismem.

K měření dané kapaliny je nutné zvolit vhodnou kuličku. Kulička by měla být vybrána tak, aby doba pádu nebyla menší než 60 s pro kuličku č. 1 nebo 30 s pro ostatní kuličky. Pokud by doba pádu byla menší než minimální hodnota, mohlo by v trubici viskozimetru vznikat turbulentní proudění. Maximální doba pádu je 300 s. Delší doba je povolena, ale z praktických důvodů bychom měli volit kuličku s kratší dobou pádu. Parametry kuliček jsou uvedeny v tabulce 2. Tabulka obsahuje možné rozsahy viskozity, materiál kuličky, hustotu kuličky, průměr kuličky, odchylku od kulatosti a kuličkovou konstantu  $K$ .

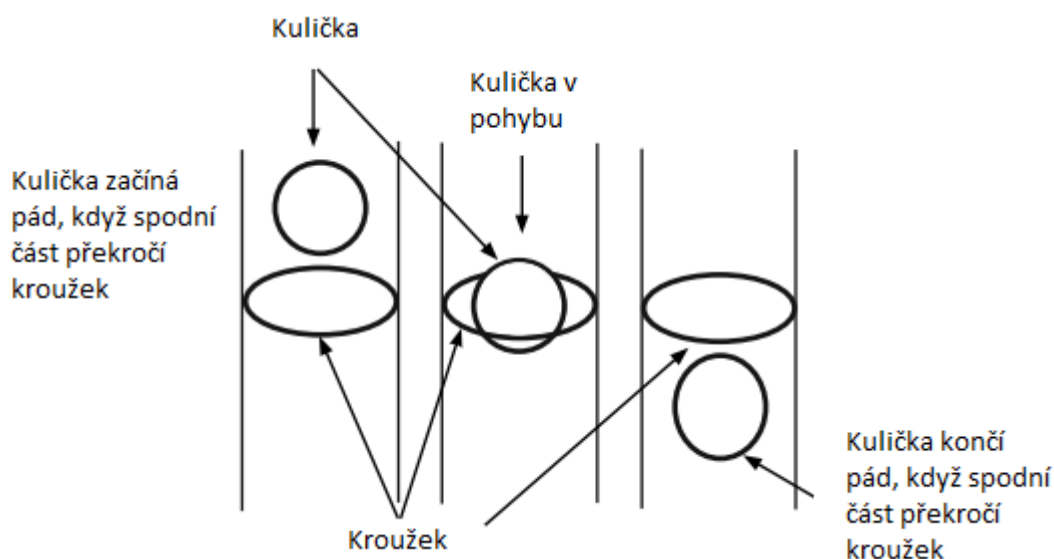
Tabulka 2: Parametry kuliček pro měření viskozity pomocí Höpplerova viskozimetru [17]

Kulička č.	Rozsah měřitelné viskozity [mPa · s]	Materiál	Hustota kuličky [g · cm <sup>-3</sup> ]	Průměr kuličky [mm]	Odchylka od kulatosti [mm]	Kuličková konstanta $K$ [mPa · cm <sup>3</sup> · g <sup>-1</sup> ]
1	0,5 to 10	Borokřemičité sklo	2,4	15,81 ± 0,01	± 0,0005	0,007
2	9 to 140	Borokřemičité sklo	2,4	15,6 ± 0,05	± 0,0005	0,09
3	40 to 700	Ni/Fe	8,1	15,6 ± 0,05	± 0,001	0,09
4	150 až 5,000	Ni/Fe	8,1	15,2 ± 0,1	± 0,001	0,7
5	1,500 až 50,000	Ni/Fe	8,1	14,0 ± 0,5	± 0,001	7
6	7,500+	Ni/Fe	8,1	11,0 ± 1	± 0,002	35



Trubice je utěsněna pomocí dvou šroubů. Měla by být naplněna přibližně 25 mm pod horní hranou. Kapalinu je nutné zbavit veškerých nečistot. Také kulička by měla být před vložením očištěna a do trubice vkládána pomocí pinzety. V případě, že má kulička větší hustotu než kapalina, padá ke dnu. Pokud se pád kuličky zastavil kvůli vzduchovým bublinám nebo se vzduchové bubliny vyskytnou ve zkoumané kapalině, potom je potřeba je odstranit pomocí vhodné tyčky otáčením kuličky. Bubliny v kapalině mohou být také odstraněny zahřátím vzorku. Při zahřívání vzorku je potřeba odstranit horní šroub, aby se v trubici nevytvořil přetlak. Po ohřátí kapaliny počkáme, než se kapalina ochladí na zkoumanou teplotu.

Měříme dobu pádu kuličky mezi dvěma kroužky vyznačenými na trubici. Měření doby pádu provádíme pomocí stopek. Při pozorování průchodu kuličky kroužkem, je zapotřebí sledovat kroužek tak, aby se jevil pouze jako úsečka. Určení průchodu kuličky provedeme podle obrázku 15. Pro lepší rozlišení je možné za viskozimetr umístit papír. Při měření tmavých kapalin je vhodné pozorovat průchod kuličky ze zadní strany viskozimetru.



Obrázek 15: Určení průchodu kuličky kroužkem. [17]

Odchytky měření mohou být způsobeny nečistotami ve zkoumané kapalině, vzduchovými bublinami nebo tím, že nebylo přesně dosaženo požadované teploty.

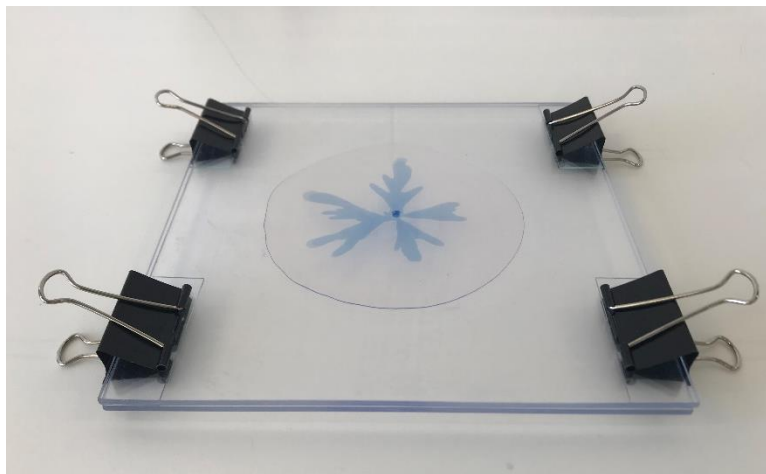
Dynamickou viskozitu vypočteme podle vztahu

$$\eta = t(\rho_1 - \rho_2)K \cdot F,$$

kde  $t$  je doba pádu kuličky  $\rho_1$  je hustota použité kuličky,  $\rho_2$  je hustota kapaliny,  $K$  je kuličková konstanta, jejíž hodnoty nalezneme v tabulce 2 a  $F$  je úhlová konstanta, jejíž hodnoty nalezneme v tabulce 1. [17]

## Měření fraktální dimenze obrazců Hele-Shawovy buňky

K měření fraktální dimenze obrazců potřebujeme Hele-Shawovu buňku. Tu tvoří dvě paralelní skleněné desky s malým otvorem v horní desce. Desky na sebe položíme a vložíme mezi ně malá sklíčka, aby mezi nimi vznikla úzká mezera. Vzniklá mezera měla 0,6 mm. Pokud se mezera zvětšuje, zvětšuje se šířka kanálů obrazce. [18] Nakonec desky sepneme pomocí svorek.



Obrázek 16: Obrázek použité Hele-Shawovy buňky.

Pomocí injekční stříkačky budeme vtlačovat zkoumané kapaliny mezi desky. Obrazce v Hele-Shawově buňce vznikají, pokud vtlačujeme méně viskózní kapalinu do více viskózní kapaliny. Desky musí být čisté a při vtlačování kapalin se mezi ně nesmí dostat nečistoty. Při vtlačování kapalin je nutné dávat pozor na to, aby se mezi desky nedostaly vzduchové bubliny.

Kolmo nad Hele-Shawovou buňkou umístíme fotoaparát na stativu. Data z tohoto experimentu získáváme ve formě obrázků. Každý pixel obrázku je tedy velmi důležitou součástí dat měření. Abychom data zpracovali co nejpřesněji, musí být všechny obrázky uloženy ve formátu, který zachovává informaci na úrovni pixelů a používá bezztrátovou kompresi. Obrázky tedy budeme ukládat ve formátu .tiff/.tif, který tyto požadavky splňuje. Obrázek je uložen v bitovém formátu, bez alfa kanálu, který poskytuje informaci o průhlednosti.

Dimenzi obrazců určíme pomocí “Box counting“ metody, kterou provedeme pomocí níže uvedeného skriptu.

```

import numpy as np
from scipy.optimize import curve_fit
import skimage as ski

def load_as_greyscale(filename):
    img = ski.img_as_float(ski.io.imread(filename)[:,:,:3])
    if len(img.shape) == 3:
        img = ski.color.rgb2gray(img)
    return img.transpose()

def box_count(pixels, shape, start=1, end=8, iterations=20):
    Lx, Ly = shape
    end = min(end, np.log2(min(Lx, Ly)))
    scales = np.logspace(start, end, num=iterations, endpoint=False, base=2)
    Ns = []
    for scale in scales:
        H,_ = np.histogramdd(pixels,bins=(np.arange(0,Lx,scale),np.arange(0,Ly,scale)))
        Ns.append(np.sum(H > 0))
    return scales, Ns

def _power(x, a, b):
    return b * x**a

def calc_boxcount(image_file_name):
    image_greyscale = load_as_greyscale(image_file_name)
    img = image_greyscale>0.5

    pixels = np.argwhere(img == 0)
    scales, Ns = box_count(pixels, img.shape)

    coeffs, _ = curve_fit(_power, scales, Ns, p0=(1,1))
    return coeffs, scales, Ns

def main(image_file_name = 'image.tif'):
    coeffs, scales, Ns = calc_boxcount(image_file_name)
    dimension = -coeffs[0]
    print('Dimenze je ', dimension)

main()

```

*Skript k určení fraktální dimenze obrazce [19]*

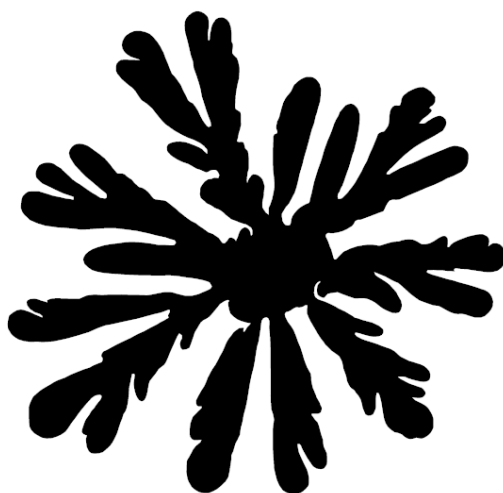
Nejprve funkce `load_as_greyscale` načte obrázek a převede ho do odstínů šedé. Funkce `box_count` pracuje v cyklech. V každém cyklu rozdělí obrázek na postupně se zmenšující čtverce a spočítá počet čtverců, ve kterých je alespoň část zkoumaného obrazce. Nakonec funkce `calc_boxcount` pracuje s výsledným počtem čtverců, ve kterých je alespoň část obrazce z funkce `box_count` a velikostí těchto čtverců. Závislost počtu čtverců na jejich velikosti proloží přímkou, kde její směrnice je výsledná fraktální dimenze zkoumaného obrazce.

## 6 Naměřené hodnoty

Výsledky měření viskozity zkoumaných kapalin jsou shrnuty v tabulce 3. Tabulka obsahuje doby pádu kuličky v Höpplerově viskozimetru, úhlovou konstantu, hustotu kapaliny a kuličky, konstantu kuličky a výslednou dynamickou viskozitu. Potřebné konstanty jsme získali z manuálu k Höpplerovu viskozimetru. [17]

Všechna měření byla provedena při teplotě 25 °C. Teplota vzorku v Hele-Shawově buňce nelze snadno měnit. Hodnota viskozity vody při teplotě 25 °C je podle tabulek rovna 0,00089 Pa · s [20].

V dalším kroku jsme získali obrázky pro různé kombinace kapalin v Hele-Shawově buňce. Na obrázku 17 je kombinace mýdla a propylenglykolu. Obrázek byl upraven pro další zpracování a výpočet fraktální dimenze. Obrázky pro další kombinace kapalin jsou uvedeny v příloze.



*Obrázek 17: Obrazec z mýdla a propylenglykolu, připraven k vyhodnocení.*

Tabulka 3: Naměřené hodnoty Höpplerovým viskozimetrem

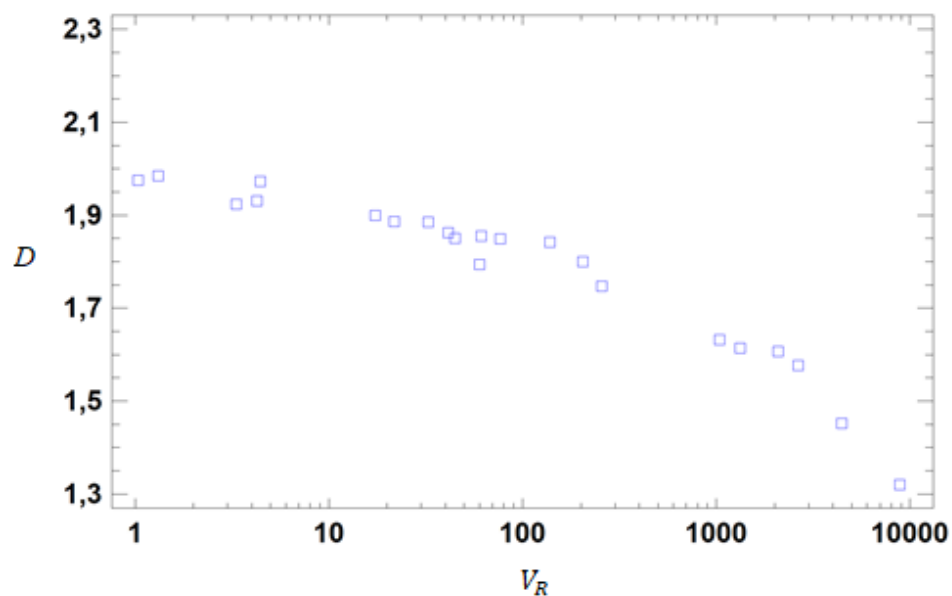
kapalina	$t_1$ [s]	$t_2$ [s]	$t_3$ [s]	$F$	$\rho_2$ [kg · m <sup>-3</sup> ]	$\rho_1$ [kg · m <sup>-3</sup> ]	$K$ [mPa · cm <sup>3</sup> · g <sup>-1</sup> ]	$\bar{\eta}$ [Pa · s]
Med květový Medokomerc	33,96	34,61	34,23	1	1514	8100	35	7,89881
Sprehový gel Gentleman	62,2	61,3	60,1	0,778	1015	8100	7	2,3614
Tekuté mýdlo Balea	47,5	48,3	49	0,778	1045	8100	7	1,85448
PU akrylátový lak bílý Hombach	37,53	37,91	37,4	1	1323	8100	7	1,78434
Motorový olej 10W40	88	89	86	1	870	8100	0,09	0,05704
Propylenglykol	61,4	60,3	60,9	1	1037	8100	0,09	0,03869
Řepkový olej olej Raciol	47,21	47,51	48,24	1	895	8100	0,09	0,0309
20% rozt. propylenglykolu	191	195	192	1	1080	2400	0,007	0,00178

Obrázky byly zpracovány pomocí skriptu a byla vyhodnocena jejich fraktální dimenze. Jednotlivé hodnoty fraktální dimenze a poměru viskozit  $V_R$  použitých kapalin jsou uvedeny v tabulce 4.

*Tabulka 4: Poměr viskozit kapalin a fraktální dimenze*

<b>Kapalina 1</b>	<b>Kapalina 2</b>	<b><math>V_R</math></b>	<b><math>D</math></b>
mýdlo	lak	1,04	1,975
sprchový gel	lak	1,32	1,985
med	sprchový gel	3,34	1,924
med	mýdlo	4,26	1,931
med	lak	4,43	1,973
olej	roztok propylenglykolu	17,36	1,900
motorový olej	roztok propylenglykolu	21,73	1,887
mýdlo	propylenglykol	32,51	1,885
sprchový gel	propylenglykol	41,41	1,863
mýdlo	motorový olej	44,93	1,850
mýdlo	olej	60,01	1,794
sprchový gel	motorový olej	61,06	1,855
sprchový gel	olej	76,45	1,849
med	propylenglykol	138,47	1,842
med	motorový olej	204,15	1,800
med	olej	255,62	1,747
mýdlo	roztok propylenglykolu	1041,70	1,632
sprchový gel	roztok propylenglykolu	1326,95	1,614
mýdlo	voda	2083,68	1,607
sprchový gel	voda	2654,27	1,577
med	roztok propylenglykolu	4436,94	1,452
med	voda	8875,07	1,320

Výsledná data naměřené dimenze a poměru viskozit z tabulky 4 byla pro přehlednost a další analýzu vynesena do grafu 3.



Graf 3: Závislost dimenze  $D$  na poměru viskozit  $V_R$ .

Graf 3 znázorňuje závislost fraktální dimenze  $D$  na poměru viskozit  $V_R$ . Pro lepší přehled a orientaci v grafu je x-ová osa v logaritmickém měřítku. Z grafu vidíme, že se zvyšujícím se poměrem viskozit kapalin se fraktální dimenze obrazce zmenšuje. Dále můžeme vidět, že pokud se hodnota poměru viskozit přibližuje k 1, potom se fraktální dimenze obrazce blíží k hodnotě 2. To odpovídá fraktální dimenzi kruhu, který vznikne, pokud vtlačíme do aparatury stejnou kapalinu.

## Analýza dat

Jako první zkoumáme, zda existuje závislost mezi fraktální dimenzí obrazce  $D$  a poměrem viskozit  $V_R$ . Pokud mezi daty závislost existuje, chceme zvolit vhodný model této závislosti. Abychom ověřili, zda mezi daty existuje závislost, provedeme regresní analýzu dat. Pro analýzu dat budeme používat program Statgraphics [21]. Volíme jednoduchou regresi a předpokládáme lineární závislost, tedy přímku s předpisem  $D = a - bV_R$ . Nejprve provedeme F-test, kterým ověřujeme, zda mezi daty existuje daná závislost. Výstupem je tabulka 5, která obsahuje součty čtverců pro model, reziduální součet čtverců a celkový součet čtverců. Dále obsahuje jednotlivé stupně volnosti, reziduální výběrový rozptyl a výsledek F-testu.

Tabulka 5: Výsledek F-testu.

	Součet čtverců	Df	Výběrový rozptyl	F
Model	0,514122	1	0,514122	68,28
Rezidua	0,150601	20	0,00753006	
Součet	0,664723	21		

$H_0$ : mezi daty neexistuje lineární závislost

$H_A$ : mezi daty existuje lineární závislost

Pro ověření nebo zamítnutí nulové hypotézy porovnáváme výsledek F-testu s tabulkovou hodnotou kvantilu  $F_{1-\alpha/2}(v_V, v_M)$ , kde  $v_V$  je počet stupňů volnosti modelu a  $v_M$  reziduální počet stupňů volnosti. V této práci jsme se rozhodli použít hodnotu hladiny statistické významnosti  $\alpha = 0,05$ , jako například v [22,23]. Z tabulky 5 vidíme, že hodnoty stupňů volnosti jsou  $v_V = 20$  a  $v_M = 1$ . Tabulková hodnota kvantilu je rovna 5,872. [24] Jelikož výsledná hodnota F-testu je větší než hodnota tabulková, nulovou hypotézu zamítáme. Mezi daty tedy existuje daná závislost.

Nyní se zaměříme na zjištění toho, zda nalezený model nelze zjednodušit, tedy jestli některé regresní koeficienty nelze považovat za nulové a z modelu je vypustit. To ověříme pomocí dílčích studentových t-testů. Výstupem je tabulka 6, která obsahuje bodové odhady koeficientů regresní přímky, bodové odhady směrodatných odchylek koeficientů regresní přímky a výsledky dílčích t-testů.

Tabulka 6: Výsledky t-testů.

Parametr	Bodové odhady	Směrodatná odchylka	Statistické T	P-hodnota
a	1,85729	0,0204839	90,6708	0,0000
b	-0,0000747383	0,00000904502	-8,26293	0,0000

Nyní se zaměříme na to, jestli daný model nelze zjednodušit. Otestujeme tedy, zda není možné některé regresní koeficienty považovat za nulové.



$$H_0: a = 0$$

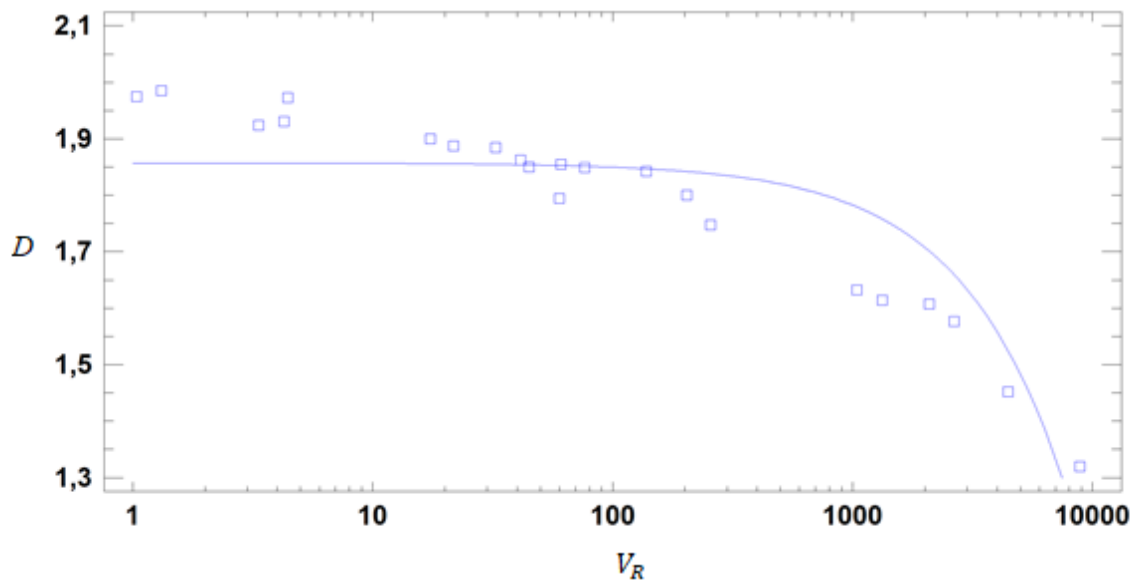
$$H_A: a \neq 0$$

Výsledná P-hodnota je menší než  $\alpha = 0,05$ . Hypotézu  $H_0$  zamítáme, tzn. koeficient  $a$  nelze z modelu vypustit.

$$H_0: b = 0$$

$$H_A: b \neq 0$$

Výsledná P-hodnota je menší než  $\alpha = 0,05$ . Hypotézu  $H_0$  zamítáme, tzn. koeficient  $b$  nelze z modelu vypustit. Vyrovnávací přímku pro tento model bychom tedy mohli zapisovat ve tvaru  $D = 1,85729 - 0,0000747383 V_R$ .



Graf 4: Lineární závislost dimenze  $D$  na poměru viskozit  $V_R$

Kvalita regresního modelu se hodnotí pomocí indexu determinace  $R^2$ , který udává, kolik procent rozptylu závisle proměnné je vysvětleno daným modelem. [24] Lineární model má koeficient determinace  $R^2 = 77,34 \%$ . Pokusíme se zjistit, zda existuje vhodnější model, který by měl vyšší koeficient determinace. V programu Statgraphics máme možnost porovnat alternativní modely podle koeficientu determinace. Výstupem je tabulka 7.

Tabulka 7: Porovnání alternativních modelů podle koeficientu determinace  $R^2$ .

Model	$R^2$ [%]
Reciprocal-Y square root-X	97,69
Logarithmic-Y square root-X	96,54
Square root-X	94,69
Squared-Y square root-X	92,27
Squared-Y logarithmic-X	91,04
Logarithmic-X	88,28
Reciprocal-Y	86,25
Multiplicative	84,94
Exponential	81,95
Reciprocal-Y logarithmic-X	81,04
Square root-Y	79,67
Linear	77,34
Squared-Y	72,61
Reciprocal-Y squared-X	62,87
Logarithmic-Y squared-X	57,32
Square root-Y squared-X	54,61
Squared-X	51,96
Double squared	46,90
Squared-Y reciprocal-X	27,60
Reciprocal-X	24,67
Square root-Y reciprocal-X	23,25
S-curve model	21,85

Z tabulky 7 vidíme, že nejvyšší koeficient determinace má model recipročně odmocninný, jehož závislost je dána předpisem  $D = \frac{1}{a+b\sqrt{V_R}}$ . [21] Koeficient determinace pro tento model je roven  $R^2 = 97,69\%$ . Opět musíme zjistit, zda tento model můžeme použít. Nejprve provedeme F-test abychom zjistili, zda mezi daty existuje daná závislost. Výstupem F-testu je tabulka 8.

Tabulka 8: Výsledek F-testu

	Součet čtverců	Df	Výběrový rozptyl	F
Model	0,0857294	1	0,0857294	845,47
Rezidua	0,00202796	20	0,000101398	
Součet	0,0877573	21		

$H_0$ : mezi daty neexistuje daná závislost

$H_A$ : mezi daty existuje daná závislost

Tabulková hodnota kvantilu je rovna 5,872. [24] Výsledná hodnota F-testu je větší než tabulková hodnota, což znamená, že nulovou hypotézu zamítáme, mezi daty existuje daná závislost.

Dále provedeme dílčí studentovy t-testy, abychom zjistili, jestli je možné některé koeficienty vypustit. Výstupem je tabulka 9.

Tabulka 9: Výsledky t-testů.

Parametr	Bodové odhady	Směrodatná odchylka	Statistické T	P-hodnota
a	0,516437	0,00275083	187,738	0,0000
b	0,00256539	0,0000882275	29,077	0,0000

$$H_0: a = 0$$

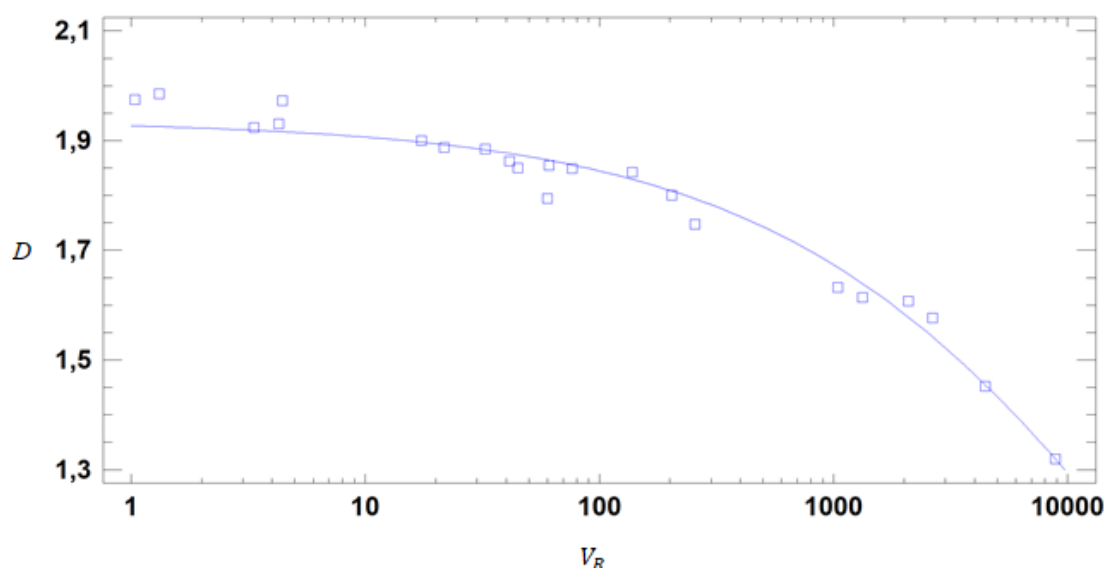
$$H_A: a \neq 0$$

Výsledná P-hodnota je menší než  $\alpha = 0,05$ . Hypotézu  $H_0$  zamítáme, tzn. koeficient a nelze z modelu vypustit.

$$H_0: b = 0$$

$$H_A: b \neq 0$$

Výsledná P-hodnota je menší než  $\alpha = 0,05$ . Hypotézu  $H_0$  zamítáme, tzn. koeficient b nelze z modelu vypustit. Daná závislost by měla předpis  $D = \frac{1}{0,516437 + 0,00256539 \sqrt{V_R}}$ . [21]



Graf 5: Recipročně odmocninná závislost dimenze D na poměru viskozit  $V_R$

Zbývá nám ověřit předpoklady pro použití daného regresního modelu. Jako první ověříme normalitu reziduí. Normalitu reziduí budeme ověřovat pomocí Shapiro-Wilkova testu. [24] Výstupem Shapiro-Wilkova testu je tabulka 10, která obsahuje výsledek testové statistiky W a P-hodnotu.

Tabulka 10: Výsledek Shapiro-Wilkova testu.

Test	W	P-hodnota
Shapiro-Wilk	0,969699	0,704089

$$H_0: \text{rezidua mají normální rozdělení}$$

$$H_A: \text{rezidua nemají normální rozdělení}$$

V tomto případě je výsledná P-hodnota vyšší než hodnota  $\alpha = 0,05$ . Nulovou hypotézu tedy nezamítáme, rezidua mají normální rozdělení. Dalším předpokladem pro

použití daného regresního modelu je nulová střední hodnota reziduí. Výsledkem testu je obrázek 18.

```
Hypothesis Tests for RESIDUALS
Sample mean = 0,000768947
Sample median = -0,000994856
Sample standard deviation = 0,0321718

t-test
Null hypothesis: mean = 0
Alternative: not equal

Computed t statistic = 0,112107
P-Value = 0,91180
Do not reject the null hypothesis for alpha = 0,05.
```

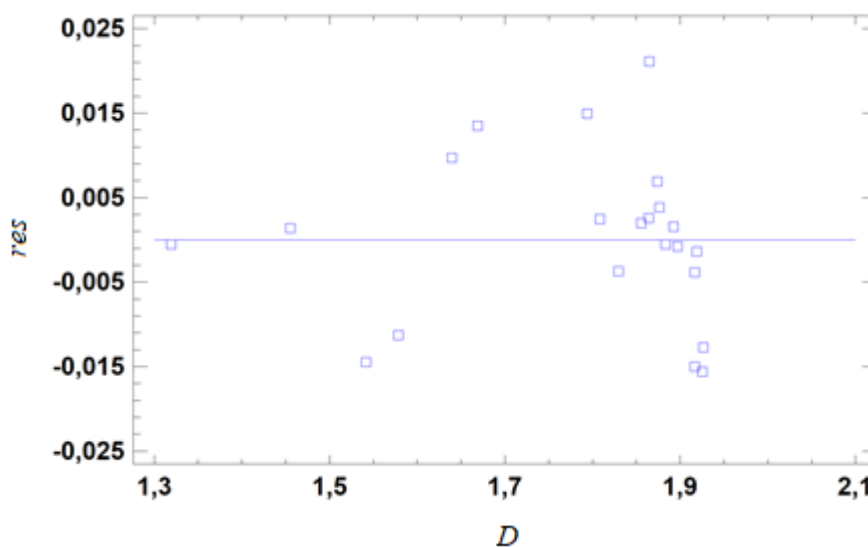
Obrázek 18: Ověření hypotézy nulové střední hodnoty. [21]

$H_0$ : rezidua mají nulovou střední hodnotu

$H_A$ : rezidua nemají nulovou střední hodnotu

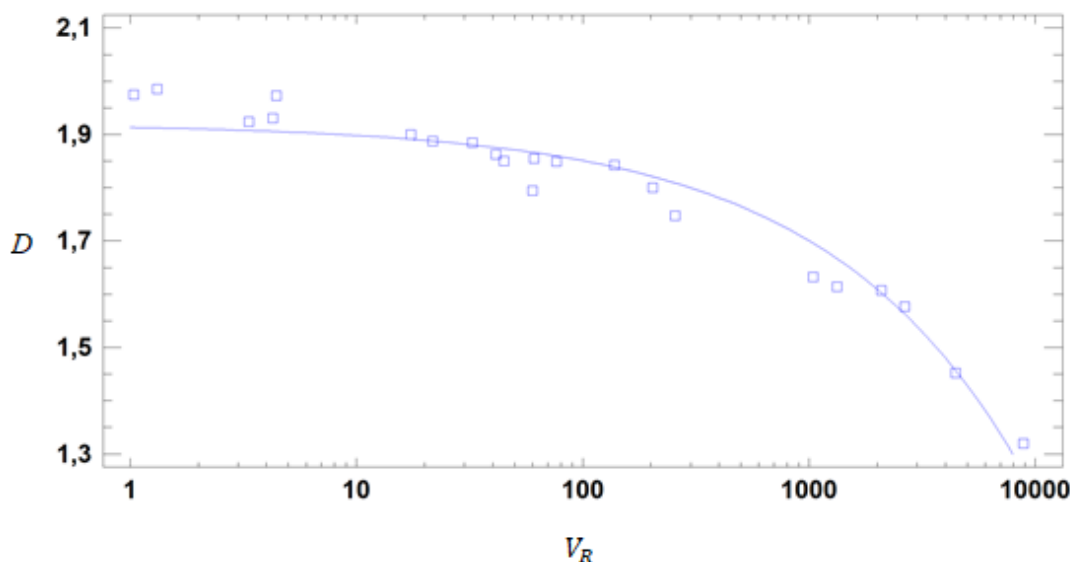
Výsledná P-hodnota je vyšší než hodnota  $\alpha = 0,05$ . Hypotézu tedy nezamítáme.

Poslední podmínkou použití daného regresního modelu, kterou musíme ověřit je nulová kovariance reziduí. [24] Tu ověříme pomocí exploračního grafu 6.



Graf 6: Závislost reziduí na předpovídaných hodnotách dimenze  $D$

Z grafu 6 vidíme, že rezidua jsou náhodně rozmístěna okolo nulové hodnoty a nemají žádný zřejmý vztah k předpovídaným hodnotám, ani se systematicky nezvyšují, ani se systematicky nesnižují spolu s rostoucími předpovídanými hodnotami a není zde ani náznak nelineárního vztahu, lze tedy předpokládat, že kovariance reziduí je nulová. Můžeme tedy konstatovat, že byly splněny předpoklady daného regresního modelu. [24]



Graf 7: Odmocninná závislost dimenze  $D$  na poměru viskozit  $V_R$

Obdobně i pro další modely, které mají hodnotu koeficientu determinace vyšší než 90 %, jsme ověřili, že byly splněny předpoklady pro použití regresního modelu. Při volbě vhodného regresního modelu se často soustředíme na jednoduchost vztahu. Po konzultaci s vedoucím jsme se rozhodli zvolit model odmocninný, který má koeficient determinace roven  $R^2 = 94,69 \%$ . A jehož předpis je  $D = 1,92014 - 0,00695126\sqrt{V_R}$ .

Závěr analýzy tvoří příklad praktického využití získaných výsledků. Jedná se o predikci očekávaných hodnot závislé proměnné při zvolené hodnotě nezávisle proměnné. V našem případě jde o odhad fraktální dimenze obrazce Hele-Shawovy buňky s daným poměrem dynamických viskozit kapalin. Praktické využití pro daný typ výpočtu existuje v oblasti terciární těžby ropy, která využívá vodu pro těžbu ropy.

Hloubka i teplota v ropných vrtech se může lišit. Pro vrt o hloubce 2 km je podle [25] teplota přibližně 65 °C. Dynamické viskozity ropy a vody za těchto podmínek jsou 40,09 mPa · s [26] a 0,433 mPa · s [20]. Pomocí programu Statgraphics jsme získali odhad i s jeho intervalem predikce.

Tabulka 11: Odhad dimenze podle odmocninného modelu.

$V_R$	$D$	Dolní 95% limit	Horní 95% limit
92,59	1,853	1,763	1,943

Odhadovaná dimenze obrazce z ropy a vody je 1,853 a s 95%-ní spolehlivostí se bude dimenze pohybovat v rozmezí intervalu (1,763; 1,943). V praxi se pro zvýšení viskozity často přidávají různé druhy polymerů, čímž se zvyšuje efektivita těžby.

## Závěr

Tato diplomová práce poskytuje popis konstrukce Hele-Shawovy buňky a její stručné využití. Popisuje vlastnosti fraktálů spolu se způsoby určení jejich fraktální dimenze, viskozitu kapalin a způsoby jejího měření a základní typy a vlastnosti ne-newtonovských kapalin. Zkoumání fraktální dimenze obrazců nám může pomoci pochopit procesy, které mohou snižovat účinnost při těžbě ropy.

Hlavní částí této práce je vlastní měření, z něhož vychází zpracování dat. Práce obsahuje soubor naměřených hodnot dvaadvaceti různých obrazců Hele-Shawovy buňky, které vznikly vtlačení kombinací devíti různých kapalin. Byly zvoleny dostupné kapaliny, které by mohli použít i žáci střední školy. Kapaliny jsou charakterizovány viskozitou, která byla změřena pomocí Höpplerova viskozimetru. Hodnoty viskozity kapalin jsou uvedeny v tabulce 3. Jelikož byly zvoleny kapaliny o různých viskozitách, získaná data pro poměry viskozity kapalin v rozmezí od 1,04 až 8875,07. Výsledné obrazce byly zpracovány a byla určena jejich fraktální dimenze. K jejímu určení byl použit skript napsaný v jazyce Python. Závislost dimenze na poměru viskozit daných kapalin znázorňuje graf 3.

Provedli jsme analýzu závislosti určené fraktální dimenze na poměru naměřených viskozit použitých kapalin. Pro statistické zpracování byla zvolena hladina významnosti 5 %. K analýze dat byl použit program Statgraphics. Vhodnost zvoleného modelu byla určena podle koeficientu determinace. Nejvyšší koeficient determinace má model recipročně odmocninný a to  $R^2 = 97,69 \%$ . Recipročně odmocninná závislost je zobrazena v grafu 5. Po konzultaci s vedoucím jsme se však rozhodli pro model odmocninný, jehož koeficient determinace je roven  $R^2 = 94,69 \%$ . Závislost tohoto modelu má jednodušší předpis  $D = 1,92014 - 0,00695126\sqrt{V_R}$  a splňuje všechny podmínky pro použití lineární regrese. Odmocninná závislost je zobrazena v grafu 7.

Z grafu 3 je zřejmé, že se zvyšujícím se poměrem viskozit zkoumaných kapalin se fraktální dimenze výsledného obrazce v Hele-Shawovově buňce snižuje. Pokud by absolutní člen výsledného předpisu výpočtu fraktální dimenze podle odmocninného modelu byl roven dvěma, potom by se hodnota fraktální dimenze pro malé poměry viskozity kapalin blížila dvěma. To odpovídá fraktální dimenzi kruhu, který vznikne, pokud vtlačíme do aparatury stejnou kapalinu.

Výsledný model jsme použili k odhadu fraktální dimenze obrazce vytvořeného z ropy a vody. Hodnoty viskozity kapalin jsme zvolili pomocí přibližných podmínek

v ropném vrtu o hloubce 2 km. Odhadovaná dimenze je rovna  $1,853 \pm 0,090$ . Dané hodnoty se však mohou lišit podle typu zvolené kapaliny nebo podmínek v daném vrtu.

Hele-Shawova buňka může být použita na střední škole jako pomůcka pro demonstraci proudění kapalin při výuce hydromechaniky. K její výrobě stačí dvě stejně velké skleněné desky s dírkou uprostřed jedné z nich. Kvůli bezpečnosti a jednoduší přípravě je možné využít desky z plexiskla. Dále jsou potřeba svorky na sepnutí desek, injekční stříkačky a podložní sklíčka k vytvoření mezery mezi deskami. Místo sklíček můžeme využít např. kancelářské sponky. Je potřeba zvolit vhodnou šířku mezery, aby v Hele-Shawově buňce vznikaly obrazce.

Při vytváření obrazců by měly být desky čisté. Je potřeba aby si žáci dávali pozor, aby se při vtlačování kapalin mezi desky nedostávaly bublinky vzduchu. Obrazce budou vznikat, pouze pokud bude vtlačována méně viskózní kapalina do více viskózní kapaliny. K určení fraktální dimenze mohou žáci použít volně dostupný software Fractalyse . [27] Žáci mohou zkoumat závislost fraktální dimenze obrazců na poměru viskozit zvolených kapalin. Při zkoumání viskozity kapalin se mohou žáci zamyslet, kde se setkáváme s viskozitou kapalin. Např. proč kečup nevyteče ze sklenice nebo proč med stéká pomalu ze lžice. Zároveň můžeme předvést, že viskozita závisí na teplotě, protože med teče mnohem rychleji, pokud zvýšíme jeho teplotu.

Pro seznámení žáků s ne-newtonovskými kapalinami může být použita např. suspenze škrobu a vody. Žáci si mohou vyzkoušet, že se viskozita ne-newtonovských kapalin nemění pouze s teplotou, ale může se také změnit, pokud na ni působíme vnější silou. Při zkoumání ne-newtonovských kapalin můžeme žáky seznámit s tixotropními kapalinami, jejichž viskozita klesá s dobou působení vnějšího napětí a jejich praktickým využitím při výrobě nátěrových hmot.

Pomocí pohybu kapaliny mezi deskami můžeme žákům ukázat analogii mezi přenosem hybnosti a přenosem tepla. Při proudění kapaliny v důsledku pohybu jedné z desek získává vrstva kapaliny nejbližší k desce určitou hybnost ve směru pohybu dané desky. Tato vrstva předá část své hybnosti své sousední vrstvě, která se v důsledku pohybuje stejným směrem. Vidíme, že hybnost kapaliny se přenáší směrem klesající rychlosti kapaliny. To můžeme prezentovat jako analogii přenosu tepla z teplejšího místa na studenější, kde místo dynamické viskozity je koeficientem součinitel tepelné vodivosti.

V matematice vidíme uplatnění Hele-Shawovy buňky v seznámení žáků s fraktály a jejich praktickým využitím. Fraktály sice nejsou zahrnuty v rámcovém vzdělávacím

programu, ale mohou být vhodným prostředkem pro rozvoj prostorové představivosti ve výuce geometrie.

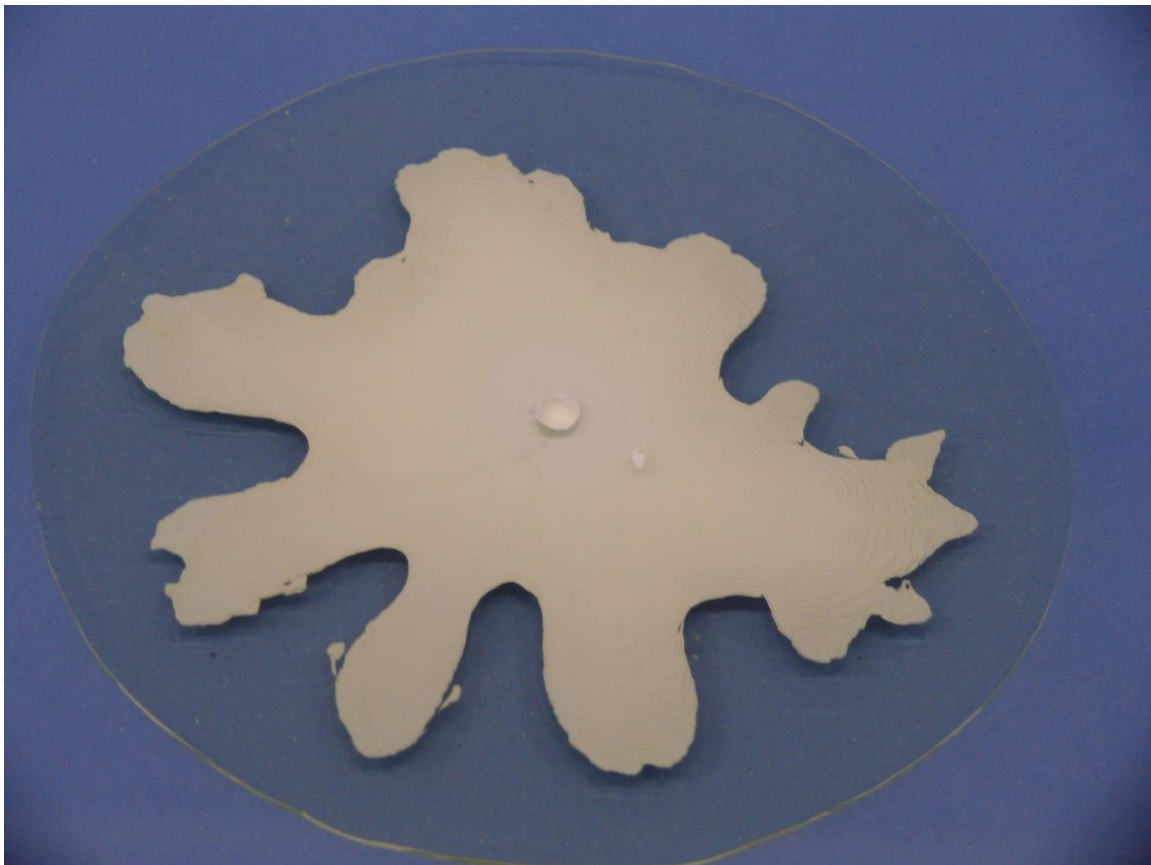


## Seznam použitých pramenů

- [1] Guerino, E. et al.: *Glycerol & Nematic Liquid Crystal in a Hele-Shaw Cell: Electric Field Effects*. NJIT, Department of Mathematical Sciences, New Jersey Institute of Technology, Newark, NJ 07102, USA, [online]. [cit. 2022-11-22]. Dostupné z: [https://www.gracesguide.co.uk/index.php?title=Henry\\_Selby\\_Hele-Shaw](https://www.gracesguide.co.uk/index.php?title=Henry_Selby_Hele-Shaw)
- [2] Singh, Akhileshwar & Singh, Yogesh & Pandey, Krishna. (2020). Viscous fingering instabilities in radial Hele-Shaw cell: A review. *Materials Today: Proceedings*. 26. 10.1016/j.matpr.2020.01.022.
- [3] Jian-hua Zhang, Zhen-hua Liu, *Study of the relationship between fractal dimension and viscosity ratio for viscous fingering with a modified DLA model*, *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 1998, ISSN 0920-4105, [online]. [cit. 2022-11-22]. Dostupné z: [https://doi.org/10.1016/S0920-4105\(98\)00038-2](https://doi.org/10.1016/S0920-4105(98)00038-2)
- [4] Bajer, Jiří. *Mechanika*. 3., rozš. a dopl. vyd. Olomouc: Vladimír Chlup, 2012. ISBN 978-80-903958-5-5.
- [5] Brdička, Miroslav, Ladislav SAMEK a Bruno SOPKO. *Mechanika kontinua*. Vyd. 2., opravené. Praha: Academia, 2000. ISBN 9788020007728.
- [6] Fogel'son, R.L., Likhachev, E.R. *Temperature dependence of viscosity*. *Tech. Phys.* 46, (2001). [online]. [cit. 2022-12-05]. Dostupné z: <https://doi.org/10.1134/1.1395131>
- [7] *Měření viskozity* [online]. [cit. 2022-12-05]. Dostupné z: [https://www.wikiskripta.eu/w/Měření\\_viskozity](https://www.wikiskripta.eu/w/Měření_viskozity)
- [8] *The Chaos Hypertextbook* [online]. [cit. 2022-12-05]. Dostupné z: <https://hypertextbook.com/chaos/fractal>
- [9] MANDELBROT, Benoit B. *The fractal geometry of nature*. San Francisco: W.H. Freeman, c1982. ISBN 07-167-1186-9.
- [10] *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Application*. Second Edition Kenneth Falconer c2003 John Wiley & Sons, Ltd ISBNs: 0-470-84861-8
- [11] *Cantor Dust* [online]. [cit. 2022-12-05]. Dostupné z: <https://www.robertdickau.com/cantor.html>
- [12] Pilgrim, Ian & Taylor, Richard. (2018). *Fractal Analysis of Time-Series Data Sets: Methods and Challenges*. 10.5772/intechopen.81958. [online]. [cit. 2022-12-05]. Dostupné z: [https://www.researchgate.net/publication/330955045\\_Fractal\\_Analysis\\_of\\_Time-Series\\_Data\\_Sets\\_Methods\\_and\\_Challenges](https://www.researchgate.net/publication/330955045_Fractal_Analysis_of_Time-Series_Data_Sets_Methods_and_Challenges)
- [13] Kumaran, V. *Fundamentals of Rheology* [online]. [cit. 2022-12-06]. Dostupné z: <https://physics.iitm.ac.in/~compflu/Lect-notes/kumaran.pdf>
- [14] P. Chhabra, Rajendra. *Non-Newtonian Fluids: An Introduction*. 2010. ISBN 978-1-4419-6493-9.

- [15] Valouchová, H. a M. Růčka. Neneutonovské kapaliny. Praha 1. Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská. [online]. [cit. 2022-12-05]. Dostupné z: <http://fyzsem.fjfi.cvut.cz/2011-2012/Zima11/proc/newtkap.pdf>
- [16] *Vedant instruments: Falling Ball Viscometer* [online]. [cit. 2022-12-06]. Dostupné z: <https://www.vedantinstruments.com/product.php?id=23>
- [17] *Manuál k viskozimetru KF10* [online]. [cit. 2022-11-22]. Dostupné z: [https://www.brookfieldengineering.com/-/media/ametebrookfield/manuals/lab%20viscometers/kf10\\_kf20%20instructions.pdf?la=en](https://www.brookfieldengineering.com/-/media/ametebrookfield/manuals/lab%20viscometers/kf10_kf20%20instructions.pdf?la=en)
- [18] Nand, S., Sharma, V., Das, S.K. *et al. Effect of Hele–Shaw cell gap on radial viscous fingering. Sci Rep* 12, 18967 (2022). [online]. [cit. 2022-11-22]. Dostupné z: <https://doi.org/10.1038/s41598-022-22769-x>
- [19] Ladan, John. *Fractal Viscous Fingering* [online]. [cit. 2022-12-05]. Dostupné z: <https://gitlab.physics.utoronto.ca/advanced-lab/experiments/fvf>
- [20] *Viscosity of Water* [online]. [cit. 2022-12-05]. Dostupné z: <https://wiki.anton-paar.com/en/water>
- [21] Statgraphics Technologies, Inc. Statgraphics 19.4.02 [software]. The Plains, Virginia [cit. 2022-12-05]. Dostupné z: <https://www.statgraphics.com/download19>
- [22] TVRDÍK, Josef. *Analýza vícerozměrných dat*. Ostravská univerzita 2013 [online]. [cit. 2023-01-16]. Dostupné z: <https://web.osu.cz/~Bujok/files/avdat.pdf>
- [23] Damir I. Sagdeev, Marina G. Fomina, Ilmutdin M. Abdulagatov, *Density and viscosity of propylene glycol at high temperatures and high pressures*, ISSN 0378-3812, [online]. [cit. 2022-12-05]. Dostupné z: <https://doi.org/10.1016/j.fluid.2017.07.006>
- [24] HRON, Karel a Pavla KUNDEROVÁ. *Základy počtu pravděpodobnosti a metod matematické statistiky*. 2. dopl. vydání. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2015. ISBN 978-80-244-4774-2.
- [25] Fridleifsson, Ingvar B.; Bertani, Ruggero; Huenges, Ernst; Lund, John W.; Ragnarsson, Arni; Rybach, Ladislaus. *The possible role and contribution of geothermal energy to the mitigation of climate change*, Luebeck, [online]. [cit. 2022-12-05]. Dostupné z: <https://www.ipcc.ch/site/assets/uploads/2018/05/proc-renewables-luebeck.pdf>
- [26] *Viscosity of Oil* [online]. [cit. 2022-12-05]. Dostupné z: [https://petrowiki.spe.org/Oil\\_viscosity](https://petrowiki.spe.org/Oil_viscosity)
- [27] *Fraclatyse* [software]. [cit. 2022-12-05]. Dostupné z: <https://sourcesup.renater.fr/www/fractalysse>

## Příloha



*Obrázek P1: Hele-Shawova buňka – Med a lak*



*Obrázek P2: Hele-Shawova buňka – Med a propylenglykol*



*Obrázek P3: Hele-Shawova buňka – Med a roztok propylenglykolu*



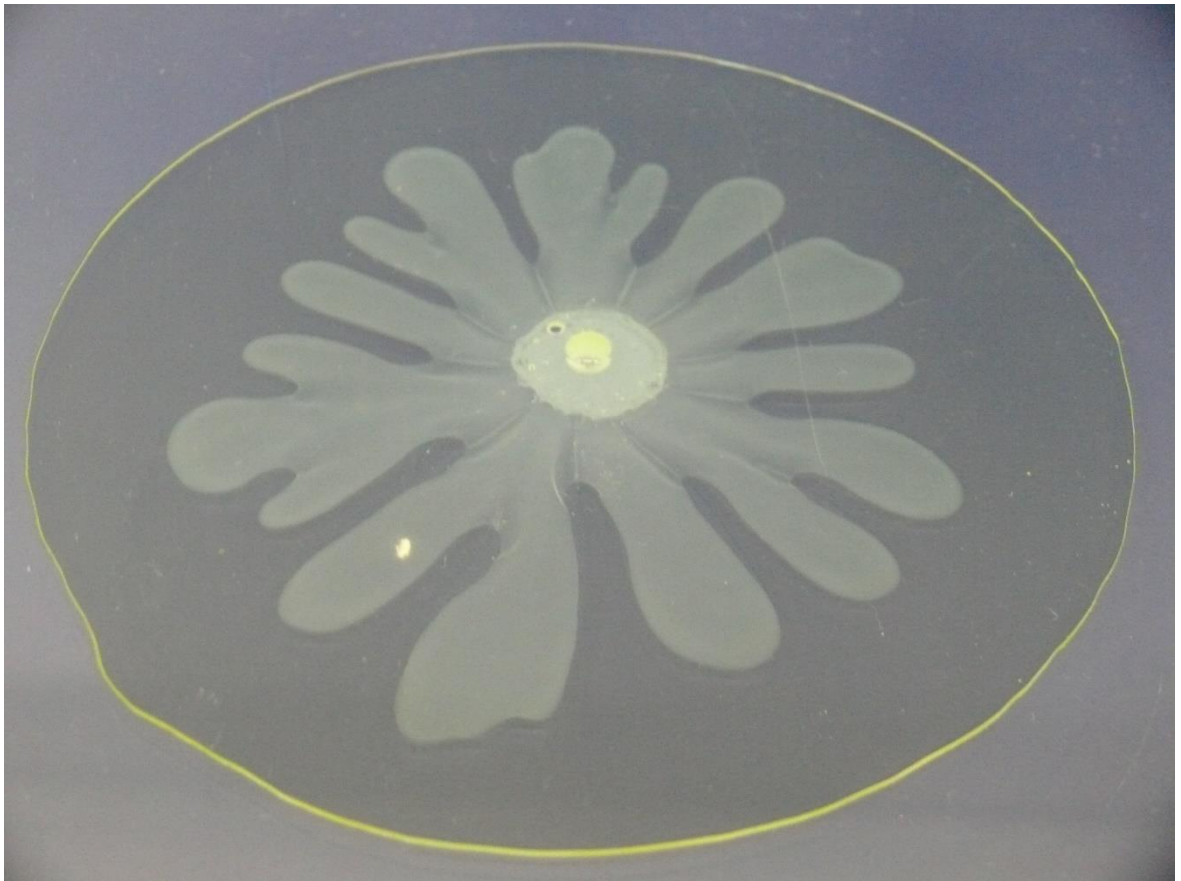
*Obrázek P4: Hele-Shawova buňka – Med a motorový olej*



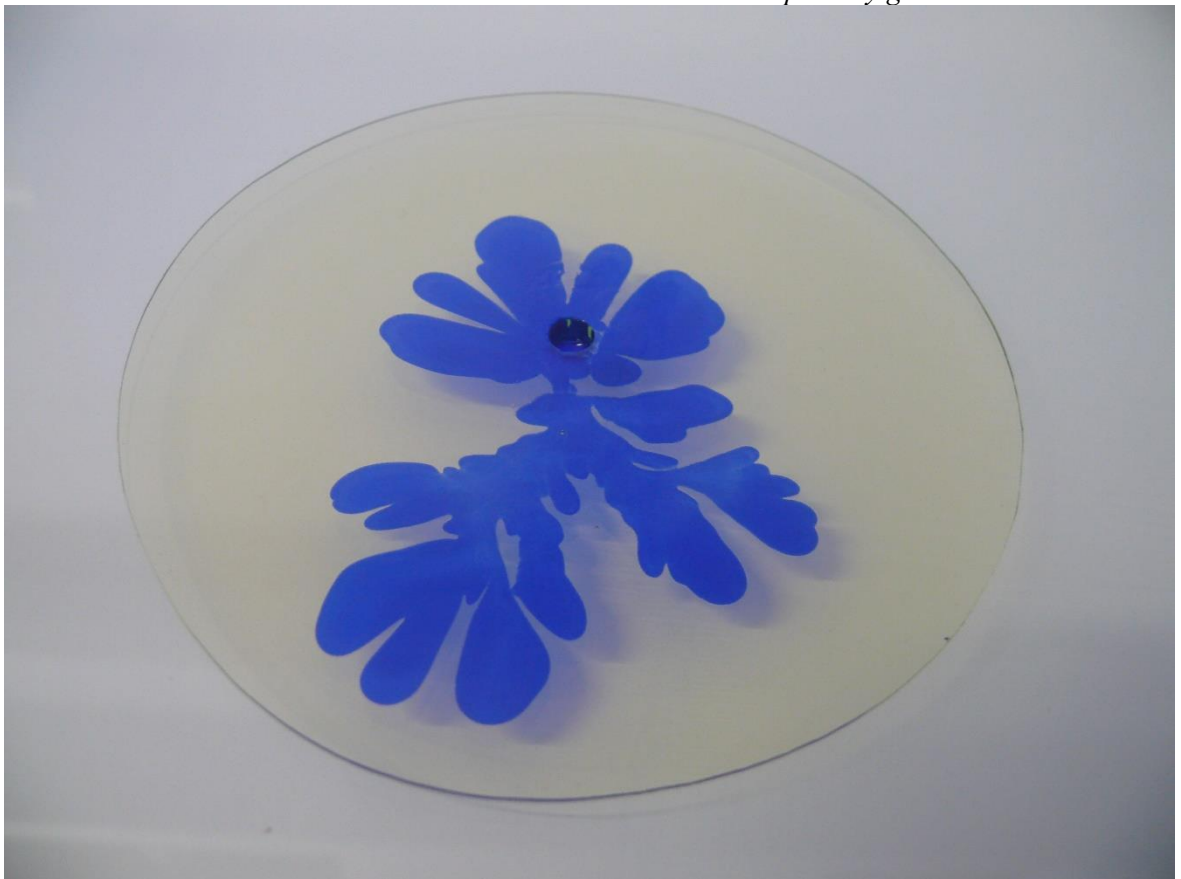
*Obrázek P5: Hele-Shawova buňka – Med a mýdlo*



*Obrázek P6: Hele-Shawova buňka – Med a olej*



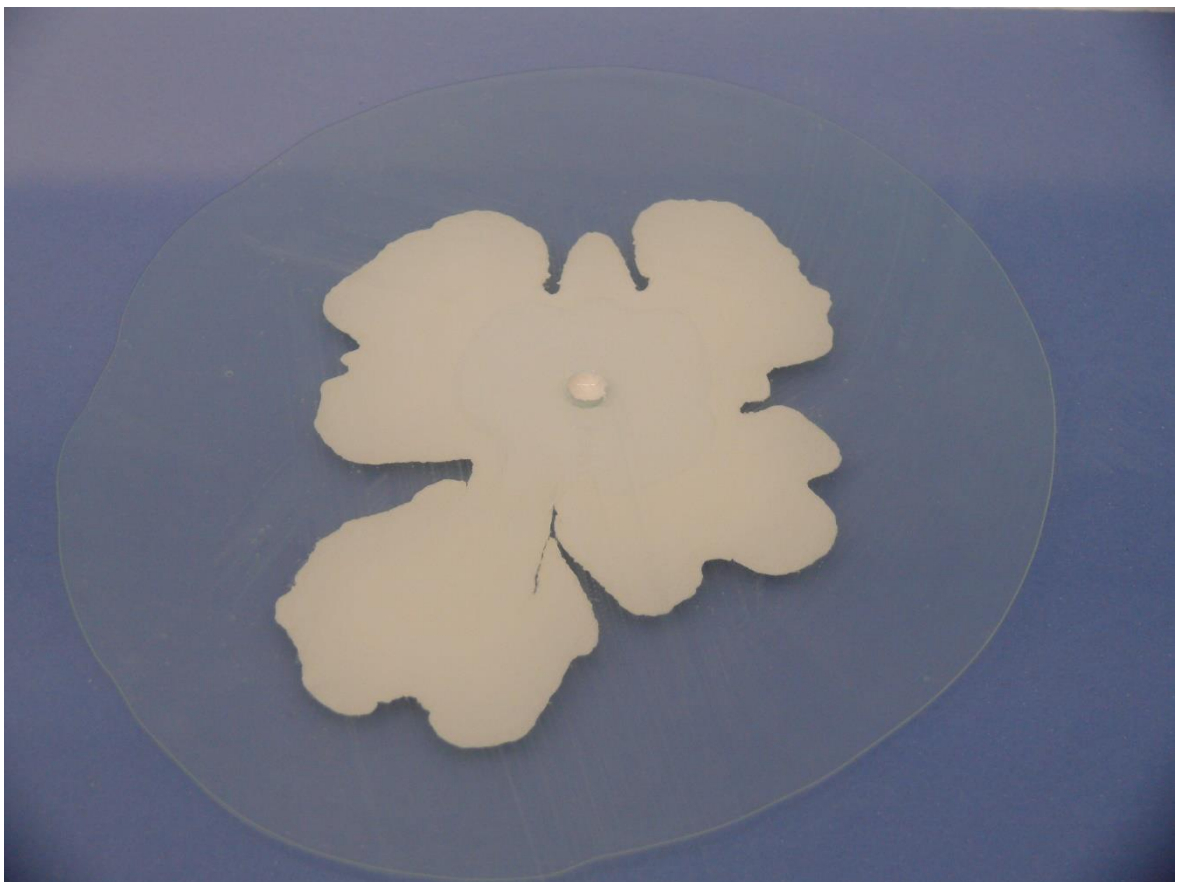
*Obrázek P7: Hele-Shawova buňka – Med a sprchový gel*



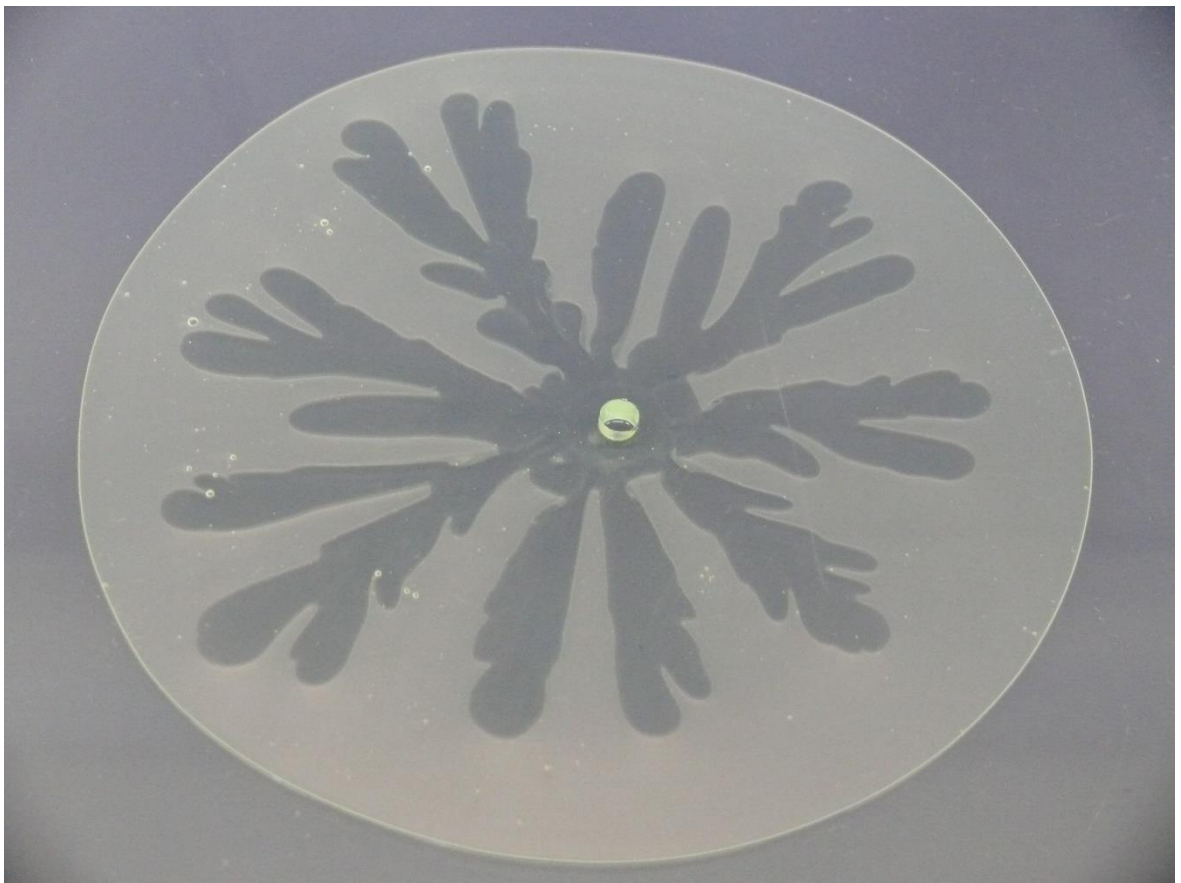
*Obrázek P8: Hele-Shawova buňka – Med a voda*



*Obrázek P9: Hele-Shawova buňka – Motorový olej a roztok propylenglykolu*



*Obrázek P10: Hele-Shawova buňka – Mýdlo a lak*



*Obrázek P11: Hele-Shawova buňka – Mýdlo a propylenglykol*



*Obrázek P12: Hele-Shawova buňka – Mýdlo a roztok propylenglykolu*

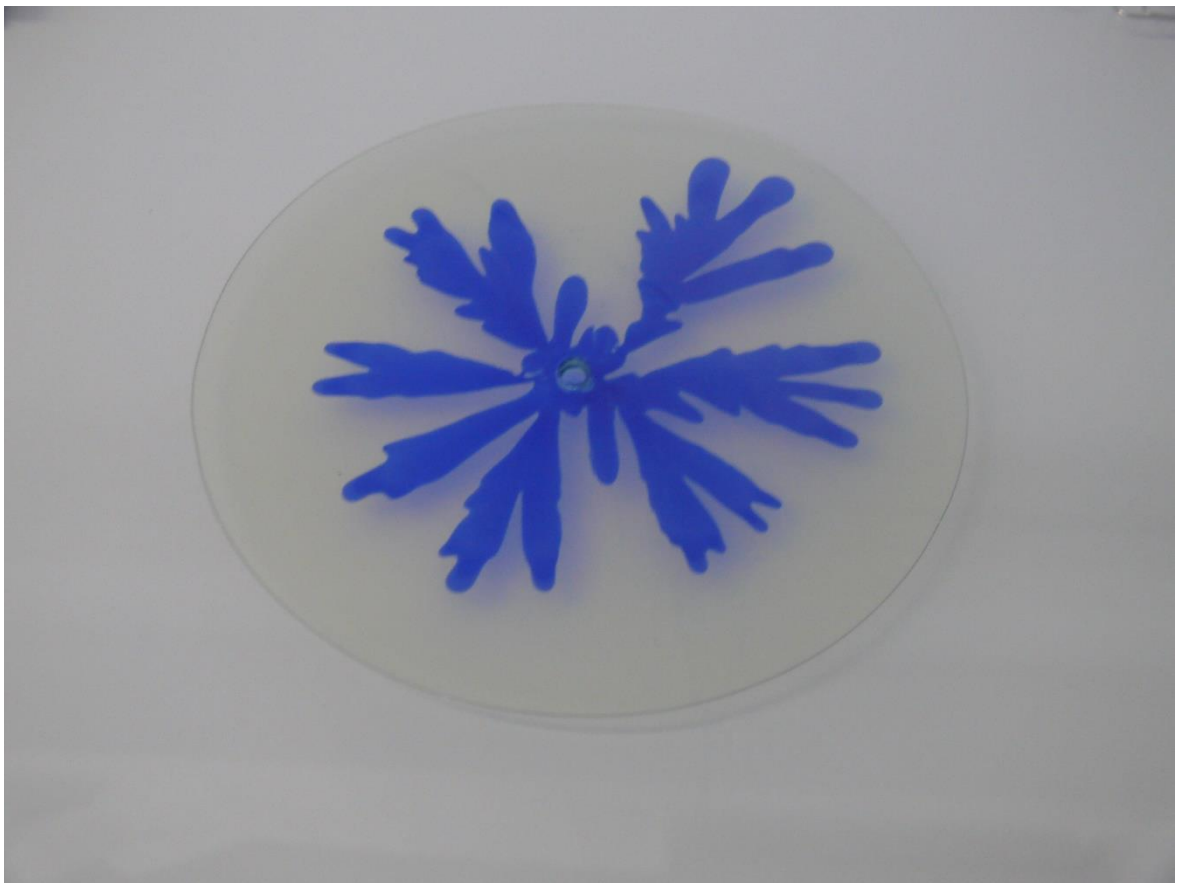




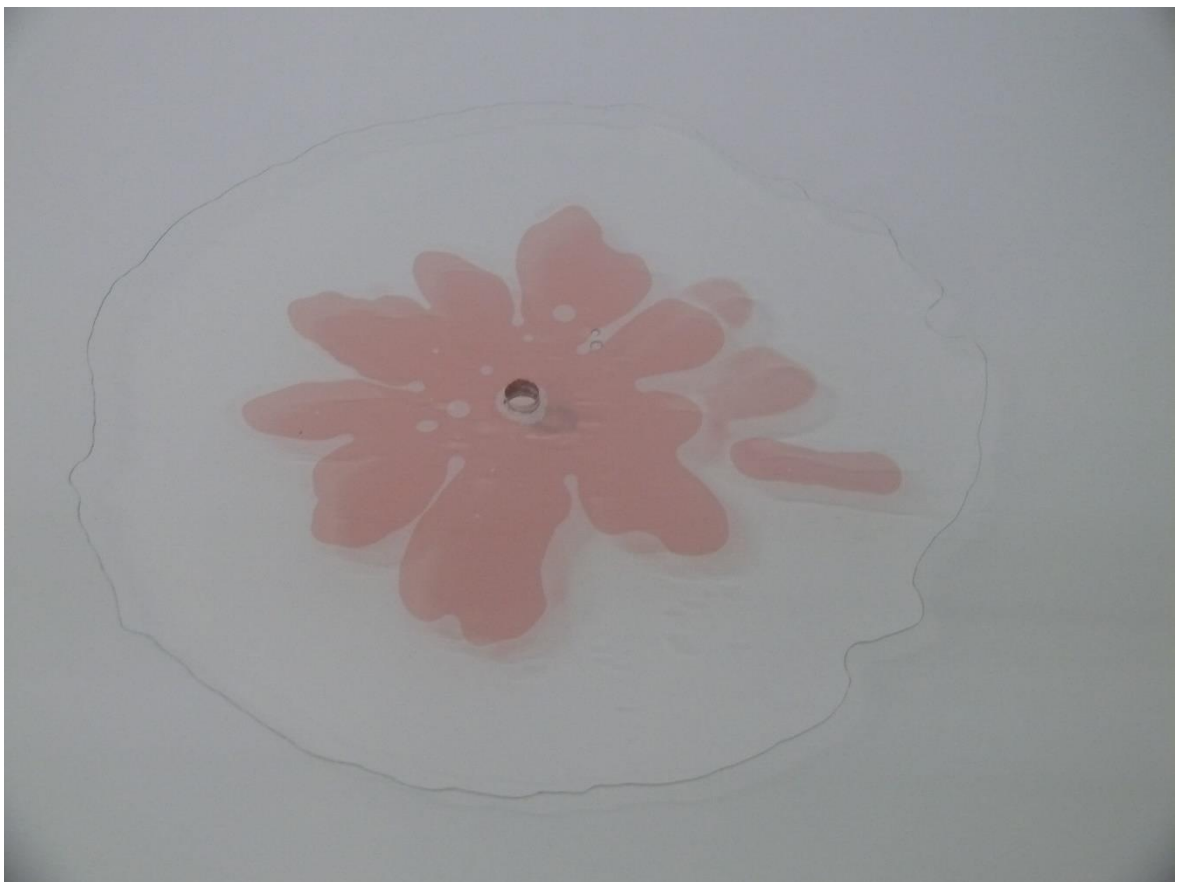
*Obrázek P13: Hele-Shawova buňka – Mýdlo a motorový olej*



*Obrázek P14: Hele-Shawova buňka – Mýdlo a olej*



*Obrázek P15: Hele-Shawova buňka – Mýdlo a voda*



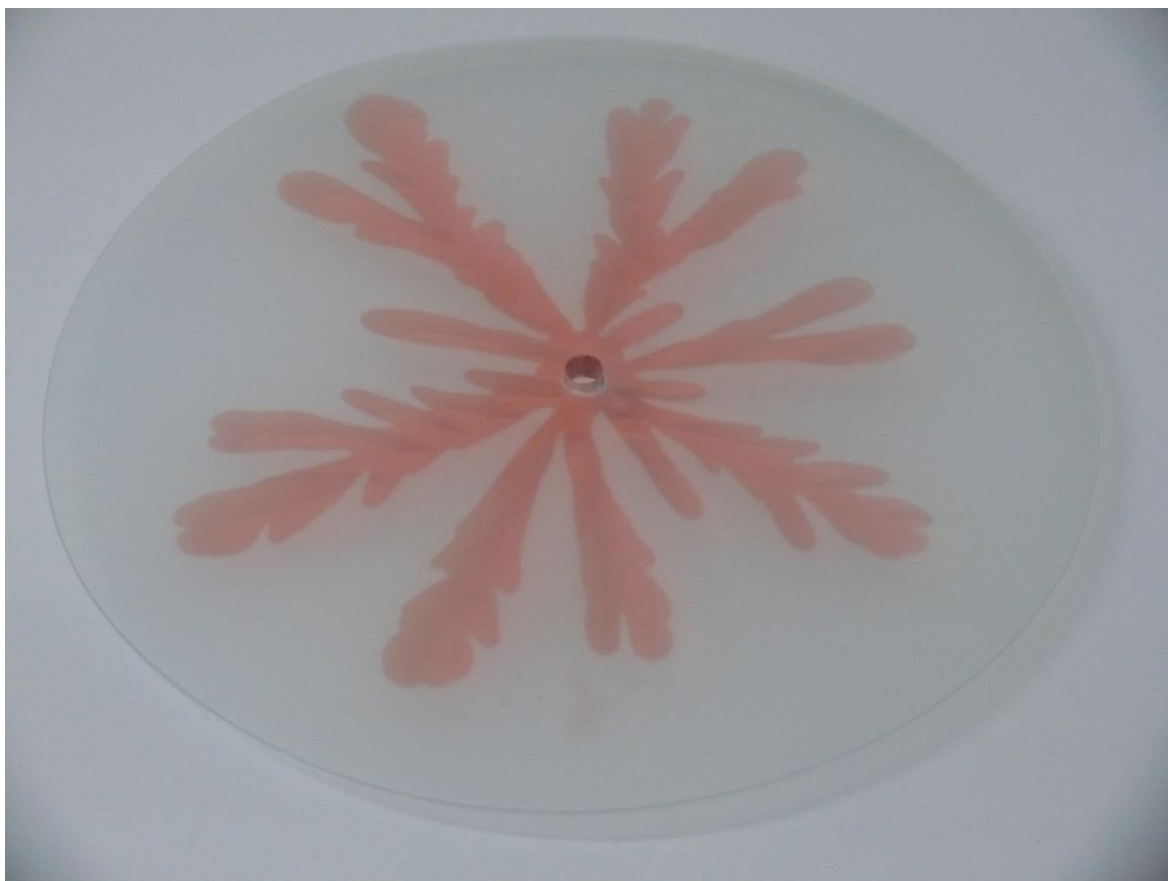
*Obrázek P16: Hele-Shawova buňka – Olej a roztok propylenglykolu*



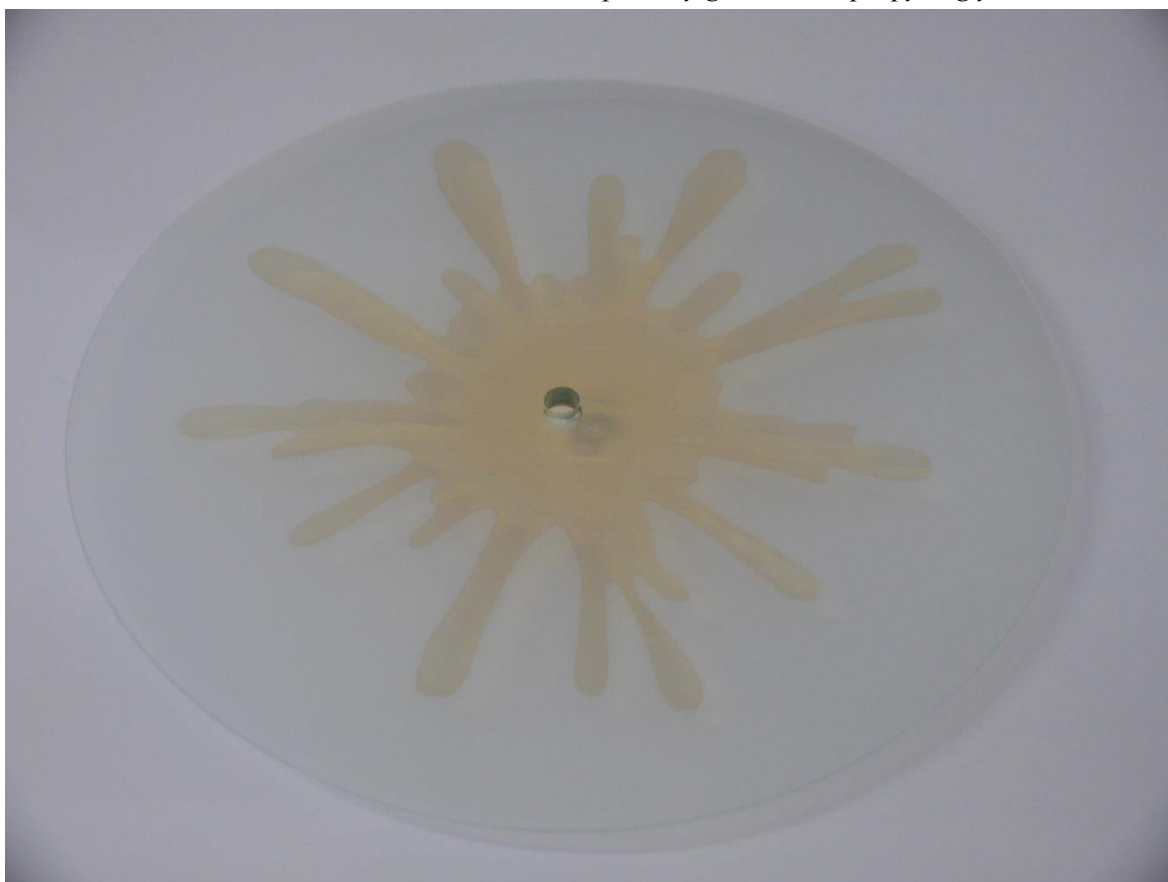
*Obrázek P17: Hele-Shawova buňka – Sprchový gel a lak*



*Obrázek P18: Hele-Shawova buňka – Sprchový gel a propylenglykol*



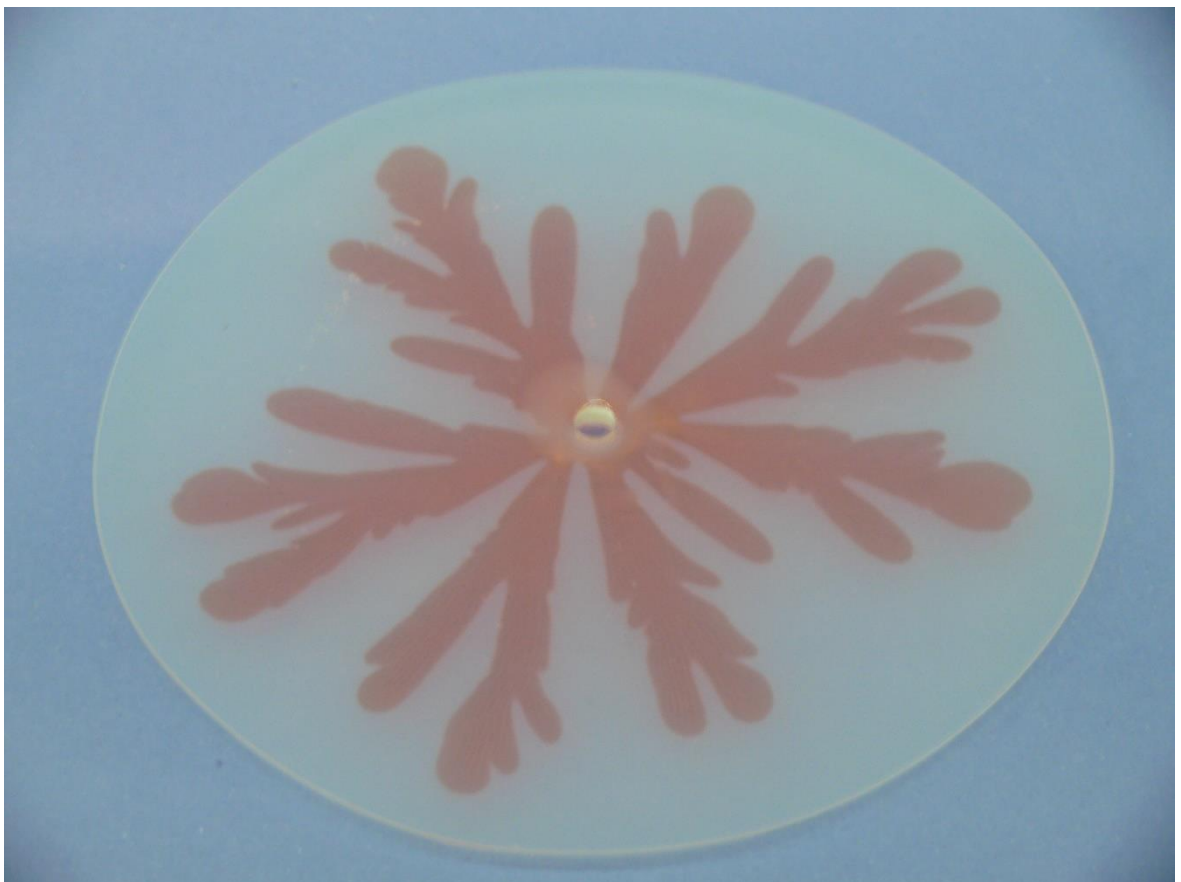
*Obrázek P19: Hele-Shawova buňka – Sprchový gel a roztok propylenglykolu*



*Obrázek P20: Hele-Shawova buňka – Sprchový gel a motorový olej*



*Obrázek P21: Hele-Shawova buňka – Sprchový gel a olej*



*Obrázek P22: Hele-Shawova buňka – Sprchový gel a voda*