UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
Katedra algebry a geometrie

# RIGORÓZNÍ PRÁCE

**Olomouc 2017** **Marie Chodorová**

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
Katedra algebry a geometrie

Mgr. Marie Chodorová, Ph.D.

# Rozvíjení prostorové představivosti pomocí úloh ve stereometrii

Rigorózní práce

Konzultant práce: Prof. RNDr. Josef Molnár, CSc.

Olomouc 2017

Prohlašuji, že jsem rigorózní práci vypracovala samostatně a použila jen uvedené bibliografické a elektronické zdroje.

Olomouc květen 2017

-------------------------------
podpis

Děkuji Prof. RNDr. Josefu Molnárovi, CSc. za odborné vedení rigorózní práce. Děkuji Prof. RNDr. Josefu Mikešovi, DrSc. za cenné rady a Prof. Mgr. Radomíru Halašovi, Dr. za podporu při psaní. Děkuji své kolegyni RNDr. Lence Juklové, Ph.D. za spolupráci při dotazníkovém šetření, přečtení práce a cenné připomínky. Děkuji Mgr. Marcelovi Vrbasovi za grafické zpracování sbírky a Mgr. Patrikovi Peškovi za technickou pomoc.

# Obsah

# ÚVOD

Prostorová představivost je mezi matematiky i psychology stále aktuální téma. I když je mu věnována celá řada prací, není toto téma zdaleka považováno za uzavřené.

Předložená práce se skládá ze dvou částí. Ke každé části je také provedeno dotazníkové šetření. První část se zabývá prostorovou představivostí, inteligencí, jejich vzájemnému propojení a přehledem postupného vývoje inteligence od nejútlejšího věku až do dospělosti. Druhou, stěžejní část práce, tvoří středoškolská sbírka polohových úloh ze stereometrie. Předložené polohové úlohy jsou součástí sbírky, kterou jsem napsala s RNDr. Dagem Hrubým. Sbírka je rozdělena na dvě části. Její první část se zabývá polohovými vlastnostmi a druhá pak metrickými vlastnostmi geometrických útvarů. Původním záměrem k sepsání sbírky úloh ze stereometrie spolu s RNDr. Dagem Hrubým, který je autorem metrických úloh, bylo zaplnit mezeru a představit tak trošku jiné pojetí výuky uvedené látky, než je uvedeno v dostupných učebnicích a sbírkách pro střední školy. Během mé krátké praxe na střední škole mi takto koncipovaná sbírka chyběla, protože většina studentů při výuce matematiky má problém s prostorovou (geometrickou) představivostí a řešením stereometrických úloh a žádná z dostupných sbírek neobsahovala dostatečný počet příkladů zejména na řezy těles.

V první části předložené práce shrnuji některé poznatky, které se týkají dovednosti představivosti, prostorové představivosti a geometrické představivosti. Jedním z prostředků jak podporovat rozvíjení geometrické prostorové představivosti u žáků středních škol je řešení stereometrických úloh, které jsou obsaženy ve druhé části práce.

Představivost je spíše pojem, který patří více do oboru psychologie než matematiky. V odborné literatuře se představivostí, jakožto určitou schopností jedince, více zabývají psychologové než pedagogové. Didaktici matematiky většinou přebírají zjištěné teoretické poznatky od psychologů, které doplňují praktickými úlohami a cvičeními zaměřenými právě k rozvíjení, stimulování a procvičení geometrické představivosti.

## 1.1 PŘEDSTAVIVOST A INTELIGENCE

Představivost je schopnost jedince si vytvářet představy a je předpokladem ke tvořivé činnosti, kterou jedinec uplatňuje zvláště v problémových situacích. Představy jsou obsahem vědomí a materiálem pro vytváření pojmů a zdrojem pro myšlení. Pomocí představ si vybavujeme minulý zážitek a vjem. Vjemy dělíme podle druhu smyslu na zrakové, sluchové, čichové, hmatové aj. Vjem jako produkt vnímání je souhrn senzomotorických dat vytvářejících určitou strukturu, která umožňuje orientaci v životním prostředí a také kontroluje chování jedince. S představivostí souvisí rovněž fantazie. Fantazií nazýváme naši obrazotvornost. Podle W. Wundta[1] [1] můžeme fantazii chápat jako „myšlení v obrazech". Fantazie nám dává možnost vytvářet nové představy na základě dřívějšího vnímání a obměňování minulé zkušenosti. Hlavním znakem fantazie je novost kombinací, které dosud člověk neprožil, i když zdrojem je dříve vnímaná objektivní realita. Míra fantazie je u každého z nás jiná, protože je dána nadáním. Fantazie život nejen obohacuje, svým způsobem poskytuje i únik z reality, ale hlavně je základem každé tvůrčí činnosti. Z tohoto vymezení pojmu je patrné, že každý vědec, tedy i matematik, by měl mít vrozenou schopnost představivosti, jejíž nemalou součástí je fantazie. Bez fantazie by také nemohla vznikat umělecká díla.

Inteligence je pojem, který se objevil ve 14. století, ale nebyl přesněji definován. Do 19. století byla inteligence vztahována pouze k myšlení a myšlenkové činnosti člověka. Tuto koncepci nabourala až Darwinova vývojová teorie a ukázala, že mezi chováním člověka a zvířat je jistá podobnost. Zatímco W. Wundt (1886) [1]ve svém rozsáhlém výzkumu došel k názoru, že inteligence znamená součinnost rozumu a představivosti, tak A. Binet[2] (1904) [1] dospěl k odlišnému názoru. Tvrdí, že inteligence je schopnost chápat, usuzovat, být vytrvalý a přizpůsobit se novým požadavkům. V témže roce Ch. E. Spearman[3] [1] ve své teorii o inteligenci došel k závěru, že inteligence má dva činitele a začal hovořit o dvoufaktorové inteligenci, jejíž faktory označil jako G a S. G-faktor je ta část inteligence, která zahrnuje řešení obecných problémů a je brána jako stálá a obecná schopnost. Podle Ch. E. Spearmana je G-faktor označení pro obecnou inteligenci, která má být souhrnem většího počtu individuálně rozdílných schopností, avšak ovlivňovaných ústřední duševní vlohou. G-faktor roste od narození do 15 let, poté se ustálí. Druhým faktorem je S-faktor, což znamená

---

[1] Wilhelm Maximilian Wundt (1832 - 1920) byl německý fyziolog, psycholog a filozof.
[2] Alfred Binet (1857 - 1911) byl francouzský psycholog a fyziolog a autor prvního testu dětské inteligence.
[3] Charles Edward Spearman (1863 - 1945) byl britský psycholog, statistik – zakladatel faktorové analýzy.

speciální inteligenci, která zahrnuje zvláštní schopnosti pro řešení speciálních problémů. Pojmem inteligence se v průběhu 20. století zabývali další psychologové a doplňovali své teorie o další tvrzení. 60. léta přinášejí důkazy o tom, že inteligence je ovlivněna i genetickou výbavou jedince. V současné době psychologové tvrdí, že inteligence je podmíněna geneticky a zároveň prostředím, jen nemohou s určitostí říci, do jaké míry se ten či onen vliv uplatňuje více a celý problém označují za složitější a stále otevřený. V 80. letech se objevuje teorie koncepce mnohafaktorové inteligence. Např. R. Sternberg[4] [1] rozeznává tři složky inteligence: a) první je založena na schopnosti plánovat úkoly a řešit problémy, b) druhá vypovídá o schopnosti využívat vlastní zkušenosti tak, aby známé problémy člověk rutinně řešil a uvolnil tak kapacitu pro tvořivé řešení nových problémů, c) třetí složkou je podle něj praktická inteligence, což znamená zdravý rozum, založený na znalostech, které se ve škole nikdy neučí, ale jsou důležité pro život. Oproti R. Sternbergovi rozlišuje H. Gardner[5] [1] sedm a více druhů inteligence: 1) jazyková, která se uplatňuje při vyprávění, diskusích, debatách, veřejných vystoupeních, psaní esejů a čtení knih, 2) matematicko-logická inteligence se u jedince projevuje schopností řešit logické hádanky, hrát strategické hry, pracovat s vědeckými stavebnicemi a počítačovými programy 3) prostorová inteligence se projevuje schopností jednak vytvářet a snadno chápat grafy, diagramy, schémata, mapy, a také vybavovat si prostorové představy a operovat s nimi 4) pohybová inteligence, neboli motorická souvisí s manuální zručností, při obsluze přístrojů, modelování a je nedílnou dispozicí u sportovců 5) hudební inteligence se projevuje schopností rozlišovat přírodní zvuky, citlivostí pro lidský hlas, melodii, rytmy, zpěvem a hraním na hudební nástroje 6) pro lidské vztahy a 7) pro vlastní rozvoj. Inteligencí pro lidské vztahy můžeme chápat sociální inteligenci, což je termín E. L. Thorndika[6] [1] z roku 1920. Jedinec, který má vrozenou schopnost sociální inteligence je schopný jednat s lidmi, řešit mezilidské konflikty, má v sobě empatii, citlivost pro mezilidské vztahy, dovede nejen komunikovat s lidmi, ale i jim naslouchat, což v některých situacích bývá důležitější a užitečnější. Tuto inteligenci by měli mít zejména psychologové, psychiatři, personalisté a učitelé, kdy zejména tento typ inteligence je nezbytný pro vykonávání jejich povolání. Byly rovněž prováděny výzkumy, které ukázaly, že úspěch manažerů a vedoucích pracovníků má jistou souvislost právě se stupněm sociální inteligence. Vysoký stupeň sociální inteligence představuje tzv. sociální takt. Vedle sociální inteligence existuje emoční inteligence, jejíž pojem vznikl v 70. letech 20.

[4] Robert Jeffrey Sternberg (1949) je americký psycholog, který je představitelem kognitivní psychologie.
[5] Howard Gardner (1943) je americký vývojový psycholog, profesor na Harvardově univerzitě, známý především svou teorií mnohočetné inteligence, kterou definoval roku 1983 v knize Frames of Mind.
[6] Edward Lee Thorndike (1874 - 1949) byl americký psycholog, zakladatel zoopsychologie.

století. Dalo by se říci, že emoční inteligence je jakousi mírou radostného prožívání života a mírou zvládání každodenních problémů jedince. Tento pojem zatím není definován jednotně, kromě psychologů se tímto pojmem zabývají i odborníci z oboru sociologie, fyziologie a medicíny. Podle některých psychologů a fyzioterapeutů emoční inteligence znamená osobní moudrost a citovou vyzrálost. Ten, kdo se v životě umí vcítit do pocitů jiných lidí, porozumí jejich myšlení, uplatňuje a rozpoznává správně své city, pak sám prochází snáze svým vlastním životem. Samozřejmě, že tato inteligence sama o sobě nezaručuje šťastný a bezstarostný život, či úspěch v povolání, ale lidé mající tuto inteligenci ve vyšší míře lépe vycházejí s nadřízenými a lépe řídí své podřízené a bývají často v kolektivu oblíbení. Také německý psycholog I. Amthauer[7] [1] definuje inteligenci jako strukturu několika schopností (faktorů, komponent): 1) praktické usuzování (tvorba úsudku), 2) induktivní myšlení (zjištění významu) 3) chápání vztahů (kombinační schopnosti) 4) schopnost abstrakce 5) praktické početní myšlení 6) teoretické početní myšlení (induktivní myšlení s čísly) 7) konstruktivní představivost (bohatství představ), 8) prostorová představivost 9) paměť, z nichž každá může být u daného člověka rozvinuta různou měrou (např. někdo je silný v abstrakci, ale nemá prostorovou představivost).

Pavel Říčan je český psycholog specializující se na oblasti psychologie osobnosti, vývojovou a klinickou psychologii. V roce 1973 vydává knihu Psychologie osobnosti [3], ve které je podkapitola s názvem Prostorová představivost. Tato podkapitola je zařazena spolu s dalšími podkapitolami: Verbální schopnosti, Numerická schopnost, Percepční pohotovost, Paměťové schopnosti, Psychomotorické schopnosti a umělecké schopnosti v kapitole nazvané Inteligence a speciální schopnosti. Říčan pod prostorovou představivostí uvádí tři důležité schopnosti. První je prostorová orientace, což znamená orientaci v prostoru, určování polohy člověka v jeho okolí a můžeme říci, že je to důležitá schopnost pro vlastní pohyb člověka. Druhou složkou je vizualizace, která nám umožňuje představit si, do jakých vzájemných vztahů se dostanou předměty mimo nás, ocitnou-li se v určitých polohách. Tato schopnost se uplatňuje hlavně v deskriptivní geometrii, v praktickém životě v architektuře, stavitelství, apod. Poslední složkou je kinestetická představivost, která je potřebná hlavně v technice a pro technické myšlení, např. při představě pohybu různých soukolí.

Psychologové řadí mezi složky inteligence celou škálu schopností a dále považují některé složky inteligence za vrozené, jiné se vyvíjí jen do určitého věku. Z toho vyplývá, že každý jedinec má různorodé spektrum inteligencí, které jsou zastoupeny jinou výší úrovně.

[7] Ingeborg Amthauer (1923) je německý psycholog, který v roce 1953 vydal *Test struktury inteligence I-S-T*.

Jedním z nejvýznamnějších psychologů, kteří prováděli výzkum mimořádně nadaných dětí, byl americký psycholog L. N. Therman[8] [1]. Jeho výzkumy byly považovány za nejznámější a nejdlouhodobější. Osoby, které zkoumal, vynikaly myšlenkovou úrovní, společenskými úspěchy, mnozí měli tak vynikající prospěch, že přeskočili některý z ročníků a ve srovnání s vrstevníky byli silnější, vyšší, zdravější a méně náchylní k chorobám, nicméně bylo nemožné vytvořit kategorie, do kterých by se dali zaškatulkovat. Po Thermanovi v jeho výzkumu na týchž osobách pokračoval R. R. Sears[9] [1]. Tento dětský psycholog dospěl k dalším zajímavým závěrům, které nejsou až tak překvapivé a neočekávané. Výsledkem jeho výzkumu bylo, že dosažení určitého životního úspěchu, nezávisí až tak na samotné výši IQ daného jedince, ale spíš na rodinné výchově a prostředí, ze kterého pochází. Osoby, které patřily do skupiny úspěšných jedinců, pocházely z prostředí, které jim nabízelo láskyplnou výchovu rodičů, kteří je vedli od útlého věku ke knihám a vzdělání. Všeobecně vzato na základě vědeckých výzkumů a jejich výsledků se psychologové dokáží shodnout, že inteligence je podmíněna jak geneticky, tak prostředím, ve kterém se daný jedinec nachází. Avšak jednoznačně určit do jaké míry ten či onen vliv je uplatněn více, je velmi obtížné říci.

Podle H. Gardnera jsou jádrem prostorové inteligence ty schopnosti, které zajišťují přesné vnímání vizuálního světa, umožňují transformovat a modifikovat původní vjemy a vytvářejí z vlastní vizuální zkušenosti myšlenkové představy, i když už žádné vnější podněty nepůsobí. Díky těmto schopnostem můžeme konstruovat různé tvary nebo s nimi manipulovat. Schopnosti, které tvoří prostorovou inteligenci, nejsou zcela jistě identické: někdo může mít velmi přesné zrakové vnímání a přitom nedokáže nakreslit, vybavit si ani transformovat imaginární svět. [9]

Gardner také tvrdí, že prostorová inteligence se skládá z většího počtu volně souvisejících schopností. Za všechny můžeme jmenovat schopnost rozpoznat stejnou formu, schopnost transformovat jednu formu do formy druhé nebo rozpoznat, že k takové transformaci došlo, schopnost vytvářet mentální představy a pak tyto představy transformovat a schopnost grafického záznamu prostorových informací. Je docela pravděpodobné, že tyto operace jsou vzájemně nezávislé a mohou se jednotlivě rozvíjet nebo poškodit. Podobně jako v hudbě, v níž se setkáváme s rytmem i melodií zároveň, i jmenované prostorové schopnosti se vyskytují společně. Další dva typy prostorových schopností jsou abstraktnější a je velmi těžké je nějak definovat. První z nich zahrnuje různé typy siločar, se kterými se setkáváme na

[8] Lewis Madison Terman (1877 - 1956) byl americký psycholog a pedagog, který koumal osobnost nadaných a geniálních dětí.

[9] Robert Richardson Sears (1908 - 1989) byl americký psycholog, který se zabýval dětskou psychologií a pedagogikou.

plošných i prostorových objektech. Gardner tím míní napětí, vyváženost a kompozici, které patří mezi charakteristické vlastnosti malířského či sochařského díla. Poslední typ prostorové inteligence je založen na podobnosti, se kterou se můžeme setkat u dvou zcela různorodých forem. Autor má za to, že schopnost nalézt metaforickou podobnost ve zcela různých jevech je v mnoha případech odvozena právě od prostorové inteligence. [9]

## 1.2 PROSTOROVÁ PŘEDSTAVIVOST A PŘEDPOKLAD V POVOLÁNÍ

Pokud definujeme představivost jako schopnost jedince vytvářet v duchu obrazy, tak můžeme říci, že představivost je předpokladem k tvořivé činnosti jedince, kterou využívá hlavně při problémových situacích. Prostorové schopnosti potřebuje každý jedinec, neboť jsou uplatňovány v mnoha různých typech prostředí. Jsou důležité pro orientaci na různých místech, ať už se nacházíme v pokoji, na ulici, či poušti nebo oceánu. Součástí představivosti je i fantazie, která mnohdy dotváří komplexnější představy. Všechno, co kolem sebe vnímáme v názorné podobě, si nadále uchováváme ve svých představách. Schopnost prostorové představivosti nepotřebují pouze matematici, jsou i ostatní profese a povolání, kde je prostorová představivost nutná. Obecně vzato, každý jedinec se potřebuje pohybovat a orientovat ve svém okolí, tedy v trojrozměrném prostoru. Uveďme několik konkrétních povolání, která by se nedala vykonávat bez prostorové inteligence. Prostorové představivosti využíváme hlavně při práci s jakýmkoli grafickým znázorněním, hlavně při zobrazování trojrozměrného prostoru do dvojrozměrného, tedy do roviny. Jsou obory, ve kterých by jedinci bez prostorové inteligence pracovat nemohli, ať už se jedná o vědce či řemeslníky, potřebují ji geometři, sochaři, malíři, aj. Architekt, než začne něco tvořit na papíře, musí umět vstřebat požadavky klienta, vytvořit si představu, a teprve poté může začít kreslit na papír. Plastičtí chirurgové, kteří rekonstruují nebo nově vytváří danou část lidského organismu, musí mít představu, jak má vypadat výsledek jejich práce. Musejí umět pacientovi poradit, co je vhodné a hodí se k jeho osobě a současně je i proveditelné, a co už nikoliv. Od květinářky v květinářství očekáváme krásně sladěnou a vkusnou vazbu květin, kterou váže na základě své představy. Pilot letadla by bez prostorové představivosti byl velmi omezený, protože se mohou vyskytnout situace, ve kterých musí rychle reagovat a improvizovat, což by bez představivosti bylo velmi obtížné. Podle P. Říčana [3] by piloti měli disponovat hlavně první schopností prostorové představivosti, a to prostorovou orientací.

Prostorová inteligence může ve vědě sloužit k různým účelům: může být užitečným nástrojem, pomocným způsobem myšlení, cestou k získávání informací, způsobem formulace úkolů nebo přímo prostředkem, kterým lze určitý problém vyřešit. [9]

Mezi normálními lidmi se občas vyskytují lidé, jejichž prostorové a vizuální představy jsou neobyčejné. Můžeme připomenout vynálezce Nikolu Teslu, který si „v hlavě mohl promítnout zcela přesné zobrazení stroje propracované do detailu“. Jeho představy byly mnohem živější než nejlepší kreslené plány. Tesla měl dokonalou představivost a ke stavbě svých složitých vynálezů žádné kresby nepotřeboval. Prohlašoval, že dokáže ve své představivosti svá zařízení i testovat. [9]

S prostorovou představivostí se setkáváme i ve všech známých lidských kulturách. V tradičních kulturách se prostorová inteligence využívá k mnoha pragmatickým cílům. Gardner se zmiňuje o vysoce rozvinutých prostorových schopnostech Eskymáků, které zřejmě vznikly na základě nutnosti orientace v jednotvárném prostředí. Gardnerův záměr není vytvořit dojem, že na prostorové schopnosti má vliv klima, přesto dále popisuje bohatě rozvinuté prostorové schopnosti u obyvatel Karolínských ostrovů – Puluwatů, mezi nimiž se nacházejí skuteční mistři námořní navigace. Někteří puluwatští plavci dosahují takových výkonů, že i zkušení námořníci nad nimi žasnou. Jejich umění vychází ze schopnosti orientovat se podle postavení hvězd na nebi. [9]

Dále také Gardner dochází k závěru, že ti, kdo v této oblasti vynikají, neztrácejí své schopnosti až do konce života. On sám zastává názor, že každá forma inteligence má svůj přirozený průběh: pro logicko-matematickou inteligenci platí, že se s přibývajícím věkem u všech lidí zhoršuje, a rovněž tělesně-pohybová inteligence. Vizuálně prostorová inteligence je však alespoň v určitých aspektech odolná, obzvlášť u těch lidí, kteří ji ve svém životě pravidelně používají. Jedním z podstatných rysů prostorové inteligence je smysl pro celek. Na rozdíl od vývojové křivky logicko-matematického myšlení, která směřuje k abstrakci, zůstává prostorová inteligence pevně spojena s konkrétním světem – se světem objektů a s úlohou, kterou v životě hrají. V tomto rozdílu snad můžeme najít jedno z vysvětlení „trvalosti“ prostorové inteligence. [9]

## 1.3 GEOMETRICKÁ PŘEDSTAVIVOST V GEOMETRII

Prostorová představivost v matematice je spíše chápána jako geometrická představivost. Kdybychom matematikům položili otázku, co znamená prostorová představivost, pravděpodobně co matematik to jiná odpověď. Uvedeme několik matematiků a budeme citovat jejich pojetí geometrické (prostorové) představivosti:

- Perenčaj a Repáš (1985): „Mohli by sme povedať, že je to akési videnie priestoru. Ale ten predsa musí vidieť každý, kto vidí. Problém je v tom, že nestačí priestor vidieť, ale je nutné si ho i uvedomovať.“
- Šarounová (1982) prostorovou představivostí rozumí soubor dílčích schopností, týkajících se našich představ o prostoru, o tvarech a vzájemných vztazích mezi tělesy, o vztazích mezi předměty a námi, a konečně také o prostorových vztazích jednotlivých částí našeho těla navzájem. Šarounová používá také označení geometrická představivost a zabývá se těmito jejími složkami:
  A – schopností rozeznávat rovinné útvary,
  B – představami o některých vztazích mezi útvary v rovině,
  C – schopností rozeznávat základní tělesa v prostoru,
  D – představami o vzájemné poloze těles a rovin v prostoru.
- Kuřina (1987) geometrickou představivostí rozumí tu složku názorného myšlení, která spočívá v dovednosti vybavovat si geometrické útvary a jejich vlastnosti.
- Jirotková (1990) geometrickou představivost specifikuje jako schopnost – dovednost:
  a) poznávat geometrické útvary a jejich vlastnosti,
  b) abstrahovat z konkrétních objektů jejich geometrické vlastnosti a vidět v nich geometrické útvary v čisté podobě,
  c) na základě rovinných obrazů si představit geometrické útvary v nejrůznějších vzájemných vztazích, a to i v takových, v nichž nemohou být předvedeny pomocí hmotných modelů geometrických útvarů,
  d) mít zásobu představ geometrických útvarů a schopnost vybavovat si jejich nejrůznější podoby,
  e) představit si geometrické útvary a vztahy mezi nimi i na základě jejich popisu.
- Juščáková (2002) sestavila faktorovou analýzu prostorové představivosti a identifikovala sedm faktorů, které spadají do prostorové představivosti: prostorová orientace pasivní, vizuální paměť, vizuální identifikace, prostorová orientace aktivní,

mentální manipulace, manuální manipulace a technická tvořivost v prostorové představivosti.

- Molnár (2004) prostorovou představivostí nazývá soubor schopností týkajících se reprodukčních i anticipačních, statických i dynamických představ o tvarech, vlastnostech a vzájemných vztazích mezi geometrickými útvary v prostoru. [8]

Obecně řečeno v matematice prostorovou představivostí chápeme geometrickou představivost, což je schopnost žáků řešit stereometrické úlohy. Zatímco při řešení planimetrických úloh si můžeme danou situaci v rovině nějak znázornit či načrtnout a z náčrtku můžeme odvozovat a usuzovat o správném řešení v rovině. Při řešení stereometrické úlohy si už situaci v prostoru můžeme pouze pomocí obrázku naznačit, protože zobrazujeme trojrozměrný útvar do roviny, která je o dimenzi nižší, a k tomu je zapotřebí představivosti, znalosti vztahů mezi jednotlivými objekty v prostoru. Avšak stereometrie nestuduje přímo prostor kolem nás, ale spíše model prostoru a jeho vlastnosti, protože pojmy jako bod, přímka a rovina existují pouze v našich představách.

František Balada ve své knize Z dějin elementární matematiky [4] v kapitole věnované vzniku geometrie popisuje, že první impulsy k vytváření geometrických představ tehdejší obyvatelé nacházeli ve svém okolí. Ať už to byla souměrnost lidského nebo zvířecího těla, slunce, měsíc na obloze nebo nejkratší cesta k lovené kořisti. A je logické, že hlavním motivem k rozvoji geometrie a vzniku geometrických představ byla hlavně vynalézavost a touha člověka po lepším, pohodlnějším a rozmanitějším životě. Poznatek, že úsečka je nejkratší spojnicí dvou bodů, a praktické ověření tohoto axiomu se člověku naskytl hned několikrát, aniž by znal axiomatickou výstavbu geometrie. Postupně poznatky z geometrie byly rozšiřovány a využívány například ke stavbě obydlí, ochraně před proměnami počasí, které zapříčiňovaly sucha nebo povodně. Znalosti geometrie také umožňovaly předvídání jistých situací v lidském životě, usnadňovaly existenční boj a činily tak život snadnější. Nezbytné užití prostorových představ bylo i při stavbě lodí, kdy se zlepšovala jednak bezpečnost, ale také plavba a rychlost. Ale tyto představy nebyly ještě formální a v pravém smyslu slova geometrické, spíše užívaly termín kámen, trám, tyčka a další. Přesto už i s těmito pojmy člověk řešil řadu prostorových úloh, i když je řešil víceméně jednoduše a empiricky. Dalším zdrojem pro kreativní vznik geometrických představ byla snaha člověka orientovat se v prostoru a vytušit jisté jevy, které souvisely s pohybem Slunce po obloze. Asi není překvapivým zjištěním, že na vzniku a rozvoji geometrických představ se podílely hlavně národy, které se zabývaly a měly příznivé podmínky pro pěstování nejrůznějších plodin. K tomu potřebovaly vyměřit pozemky, které obhospodařovali, následně sklízet a skladovat úrodu, což vyžadovalo jisté geometrické vědomosti. A právě tyto poznatky, zkušenosti a dovednosti, které zatím neměly žádnou konkrétní formu, vedly k tomu, čemu dnes říkáme geometrie.

Co je v dnešní době hlavní úlohou vyučování stereometrie? Aby si žáci osvojili pojmy, které budou potřebovat ke studiu prostorových útvarů, dále aby je uměli rozeznávat podle jejich tvaru, velikosti a vzájemné polohy a aby se naučili se stereometrickými pojmy tvořivě pracovat při řešení různých úloh. Stereometrie ve striktně vědeckém podání vychází z určitého systému axiomů, které vyjadřují vztahy mezi základními geometrickými pojmy: bod, přímka, rovina. Tyto axiomy se pokládají za správné a nedokazují se. Další poznatky v geometrii se potom dále odvozují deduktivně. Elementární geometrie a stereometrie, pokud o ní budeme mluvit stroze vědecky, vychází z určitého systému axiomů, tj. tvrzení, které vyjadřují vztahy mezi základními geometrickými pojmy – bodem, přímkou a rovinou. Přitom když se nad jednotlivými axiomy a jejich významem zamyslíme, tak axiomatické vztahy v určitém smyslu slova definují právě bod, přímku a rovinu, které v běžném životě mohou představovat i jiné objekty. Tedy bod, přímka a rovina, které definujeme pomocí systému axiomů, jsou mnohem obsáhlejší abstrakcí, než ten bod, přímka a rovina, o kterých hovoříme ve vyučování na středních školách. Ve skutečnosti můžeme říci, že abstraktní pojmy, jako bod, přímka, rovina, obdélník, kulová plocha, aj. reálně hmotně neexistují. Fakticky nemůže existovat něco z hmoty, co nemá žádný rozměr jako bod, nebo neexistuje něco, na čem lze změřit jen délku a nikoliv šířku a tloušťku, a přitom je to dokonale „rovné“ jako je přímka, zrovna tak neexistuje přesně taková ideální kulová plocha, jejíž každý bod má stejnou vzdálenost od daného pevného bodu. Ale existují reálné předměty, kterými můžeme tyto abstraktní pojmy „nahradit“ s takovou přesností, že rozdíl mezi předpokládanou vlastností abstraktního pojmu a skutečnou vlastností jeho „hmotného“ obrazu je minimální a tím pádem při řešení praktických úloh je zcela zanedbatelný. Pokud chceme, aby žáky geometrie přirozeně a nenuceně bavila, měli o ni zájem, v tom případě není vhodné na základní a střední škole začínat učivo stereometrie právě uvedením axiomatické výstavby geometrie. Naopak takto podaná geometrie by byla pro žáky velmi abstraktní a nezáživná, a žáci by tak mohli získat negativní přístup ke geometrii, což jistě není cílem výuky. Také se snadno stane, že vyučování geometrie sklouzne k formalizmu, což rovněž není správná cesta ke geometrii. Spíše se snažíme žákům geometrii přiblížit pomocí vhodných modelů a zkoumat jejich vztahy a společné vlastnosti a ze získaných zkušeností pomalu přecházet k abstraktnímu vnímání a myšlení.

## 1.4 VÝVOJ MYŠLENÍ A PŘEDSTAVIVOSTI U DÍTĚTE

Psychologové se už po staletí snaží zkoumat psychologický vývoj dítěte. V současné době je dostupná literatura, ve které je popsán vývoj inteligence již od narození dítěte. Avšak obory Vývojová psychologie a Psychologie inteligence jsou tak rozsáhlé a zabývalo se jimi a stále se zabývá mnoho odborníků, kteří nejsou ve svých názorech a poznatcích vždy jednotní, takže je velmi obtížné nějak heslovitě a uceleně shrnout jejich závěry.

Avšak Gardner ve své publikaci [9] píše, že existuje poměrně málo ověřených údajů o tom, jak se prostorová inteligence a soubor jejich schopností vyvíjí u dítěte. Jeden z důvodů proč tomu tak je, může být fakt, že testování prostorových schopností je obtížnější než testování jazykových či logických schopností. Jako jeden z dalších možných důvodů uvádí, že vědcům zabývajícím se vývojem prostorové představivosti dítěte chybí v této oblasti zkušenosti i intuice.

Jen stručně bych se zmínila o názorech J. Langmeiera a D. Krejčířové, které uvádí ve své knize Vývojová psychologie [2]. V uvedené knize se zmínění autoři mimo jiné často odvolávají na poznatky významného švýcarského psychologa J. Piageta[10], který se celý život zabýval psychologií inteligence. Vývoj prostorové představivosti u dítěte souvisí do jisté míry s kognitivním vývojem.

Podle Piageta [10] veškerým zdrojem inteligence je skutečná činnost dítěte, která zprostředkuje jeho styk s okolím, a to dvojím způsobem: zaprvé organismus působí na okolní prostředí a předměty, zadruhé prostředí působí na organismus.

Krátce můžeme shrnout, že běhen prvního roku života dítě jedná pouze podle svých potřeb a okolí začne vnímat tak, že si uvědomí trvání předmětu v čase. Sice udělá velký krok k poznávání světa, ale teprve stojí na prahu dlouhé cesty, kterou je vývoj inteligence. Myšlenkové operace kojence v období jednoho roku jsou těsně propojeny se skutečně prováděnou činností, s přímým vnímáním a motorickými akty, to znamená, že jeho inteligence je senzomotorická[11]. Kojenec si mezi 3–6 měsícem vytváří nové formy chování a dochází tak k přechodu mezi zvykem a inteligencí. Mezi 8–10 měsícem můžeme poukázat na rozvoj této inteligence, kdy dítě používá známých prostředků k řešení nepředvídatelných situací. Podle Piageta [10] je teprve v roce a půl nebo ve dvou letech skutečně dovršen a ukončen vývoj senzomotorické inteligence, která tvoří základ myšlení. Mezi druhým

[10] Jean Piaget (1896 - 1980) byl švýcarský psycholog, který se proslavil studiem dětského myšlení a teorií kognitivního vývoje.

[11] Senzomotorická inteligence je předpokladem myšlení, pracuje pouze se skutečností prostřednictvím vjemů a praktických činností, umožňuje úspěšnou činnost nikoli pravé poznání.

a čtvrtým rokem, tedy v tak zvaném batolecím věku začíná nová etapa symbolického a předpojmového myšlení. V tomto období dítě rozvíjí řeč a současně si tvoří symboly, tj. soustavu individuálních označujících prostředků. Symbol sám začíná až s oddělenou představou, a teprve tehdy, když se při hraní u dítěte objevuje symbol, dochází také k rozvíjení chápání znaků. Je pochopitelné, že řeč, které se dítě vlastně učí také nápodobou, a vytváření symbolu, si dítě osvojuje ve stejné době. Tedy jeho myšlení a chápání světa se v té době dostává na kvalitativně novou, vyšší úroveň, poněvadž užívání symbolů se zakládá na schopnosti představovat si něco prostřednictvím něčeho jiného. Ve fázi, která se nazývá symbolické myšlení, dítě užívá nikoliv skutečných pojmů, jak bychom se mohli mylně domnívat, ale spíše „předpojmů“, které jsou pomíjivé a jsou založené na nepodstatných vlastnostech. Dítě si sice vytváří jakýsi obrysový pojem individuálního předmětu, ale pouze v jistém poli blízké činnosti. Jako příklad můžeme uvést, když jsme s dítětem na procházce a jdeme kolem nějakého kopce, tak dítě si myslí, že kopec nebo hora mění tvar. Usuzování je v tomto věku značně zjednodušené a primitivní, ovlivněné fantazií, která ovšem vázne na logických problémech. Mezi 4–8 rokem života se vytváří názorové (intuitivní) myšlení. Z Piagetových pokusů [10] vyplývá, že zpravidla asi až v 6 nebo 7 letech života se dítě dostane na práh skutečného logického myšlení. Samo sebou pokrok v myšlení dítěte je nesporný, ale je jisté, že dítě zatím nezvládá myslet skutečně logicky po krocích, které mohou být v mysli volně opakovány a současně porovnávány. Myšlení dítěte zatím nepostupuje podle logických operací, pouze prelogicky neboli předoperačně. Toto předoperační myšlení, stejně jako symbolické, je stále svázáno s činností dítěte. V názorném myšlení však dítě samo o sobě není schopné dojít k dedukci, ale je schopné rozlišit vlastní fantazii od reality. V tomto věku se také vyvíjí smyslové vnímání, jakožto složitý psychický akt, který zahrnuje složky osobnosti člověka, mezi které patří jeho postoje, očekávání, soustředěnost, vytrvalost a také dřívější zkušenosti. Přirozeně v tomto školním věku dochází k výrazným pokrokům v oblastech zejména zrakového a sluchového vnímání. Vnímání je tak účelným aktem pozorování a svět školáka se tak významně rozšiřuje v prostoru a čase. Dříve se usuzovalo, že děti školního věku mají obecně vysokou míru schopnosti vybavit si v paměti dřívější vjemy, tedy vysokou míru představivosti. Novější studie však toto tvrzení nepotvrdily, naopak u dnešních dětí, odchovaných televizí, tablety a jinou technikou, jsou detailní vizuální představy méně přesné a kratší dobu uchované. Na rozdíl od předškolního dítěte je školák už úspěšný v pokuse o řazení předmětů podle tvarů a kvantitativních dimenzí (délek, hmotností, apod.). Výkony dětí jsou také často závislé na motivaci, na tom, jaké má doma rodinné zázemí a jakou výchovou dítě prošlo v mateřské školce. Bylo zjištěno, že žádné běžné inteligenční testy a ani Piagetovy pokusy nepodávají žádné sdělení o tvořivém myšlení, které je důležité v tvůrčí činnosti a přináší nové a rozmanité způsoby řešení místo jediného správného, což vyžadují inteligenční testy. Mezi 8–12 rokem dítěte, tj. v mladším školním období dochází k přechodu od názorného myšlení do stadia konkrétních operací. Teprve na počátku školního věku je dítě schopno skutečných logických operací, ale toto logické usuzování se stále týká jen konkrétních věcí a jevů, které si umí názorně představit. Až kolem 11 roku je dítě schopno vyvozovat soudy zcela formálně a to i přesto, že si nemůže představit konkrétní obsah. Od 12 roku a během dospívání se vytváří formální myšlení. Do věku 11–12 let dítě sice dovede logicky myslet, usuzovat a vyhodnocovat, ale pouze pokud si dovede a umí dané věci konkrétně představit. Problém nastane v momentě, kdy si nelze přímo představit, co je jen možné, či fiktivní. Od počátku pubescence tak většina teenagerů dosahuje vyššího stupně logického myšlení, který Piaget [10] nazývá systém formálních operací a myšlení tudíž dosahuje daleko většího prostoru. Langmeier a Krejčířová [2] shrnují tyto hlavní pokroky myšlení v pěti bodech:

1) Dospívající je schopen pracovat s pojmy, které jsou vzdáleny od bezprostřední smyslové zkušenosti, jsou obecnější, abstraktnější.
2) Má-li dospívající řešit nějaký problém, nespokojí se už s jediným řešením, které se mu nabízí, ale uvažuje o možných alternativách řešení.
3) Dospívající je schopen vytvářet i domněnky, které nejsou opřeny o reálnou skutečnost, jsou pouze možné a srovnává je tak pouze s myšlenkami ve své mysli.
4) Dospívající dokáže aplikovat logické operace nezávisle na obsahu soudů, tedy umí vyvodit správný závěr i bez konkrétní opory. Jedinec je teprve nyní schopen sledovat formu myšlenkového úsudku a odhlédnout od jeho konkrétního obsahu. A to je předpoklad základu pochopení algebry, apod.
5) Dospívající dokáže myslet o myšlení, vytvářet soudy o soudech.

Nový formálně abstraktní způsob myšlení je nutným předpokladem k pochopení látky v několika vyučovaných předmětech a stává se tak základem každé vědecké činnosti. Tento způsob myšlení nám dovoluje kritický přístup k vlastnímu myšlení i myšlení ostatních lidí. Díky tomuto způsobu myšlení dokáží vědci v dospělém věku rozlišovat domněnky od prokázaných faktů a posunout tak vědecké bádání v různých oborech směrem dopředu. Stadium formálních operací se začíná u dětí vytvářet na počátku pubescence a svého vrcholu dosahuje zpravidla okolo 15. roku života. Je logické, že toto myšlení se vyvíjí, nevzniká najednou a náhodně, je k tomu zapotřebí jisté přípravy a není ani ve všech směrech stejně pravidelné. Někdo umí již myslet v některých případech formálně, ale zase v jiných případech je stále vázán na konkrétní obsahy. Z čehož vyplývá, že mezi dospělými jedinci tak dochází k veliké různorodosti, která je dána několika aspekty. Jednak je to jistě částečně ovlivněno vrozenými dispozicemi, ale také dřívější i současnou příležitostí k řešení různých problémů. Nástup formálních operací souvisí také s morálním hodnocením dvou skutečností, a to jednak okolního světa tak i sebe samého.

## 1.5 ROZVOJ PROSTOROVÉ PŘEDSTAVIVOSTI POMOCÍ POČÍTAČOVÉHO SOFTWARU

V posledních letech se na mezinárodních didaktických konferencích matematikové zabývají rozvojem prostorové představivosti pomocí vhodných grafických softwarů. Jedním z mezinárodních projektů, jehož cílem bylo vytvořit softwarovou aplikaci pro rozvoj a výuku prostorové představivosti a myšlení v geometrii, je projekt DALEST (Developing an Active Learning Enviroment for the Learning of Stereometry), který vznikl v roce 2005 ve spolupráci pěti universit (University of Cyprus, University of Southampton, University of Lisbon, University of Sofia, University of Athens) za podpory Evropské Unie pod programem Socrates, MINERVA a partnery tohoto projektu byli N.K.M Netmasters a Cyprus Mathematics Teachers Association.

K propagaci a seznámení se s tímto softwarem vyšlo i několik článků [11, 12], které popisují jeho možnosti. Projekt DALEST je řada softwarových aplikací, které jsou zaměřené na zlepšení vizuálních prostorových dovedností u žáků základních a středních škol.

Design toho projektu má svou oporu v teoretických úvahách několika níže zmíněných matematiků. Linn[12] a Petersen[13] (1985) definují prostorovou představivost jako mentální proces určený k vnímání, uchovávání, vybavení, vytvoření, uspořádání prostorových představ. Lohman[14] (1988) přichází se tří faktorovým modelem prostorové představivosti, který zahrnuje: „prostorovou vizualizaci“, „prostorovou orientaci“ a „prostorové vztahy“. „Prostorová vizualizace“ je schopnost pochopit pomyslné pohyby trojrozměrném prostoru nebo schopnost manipulovat objekty v představách. „Prostorovou orientaci“ definuje jako míru své schopnosti nezůstat dezorientovaný při změnách orientace vizuálních podnětů, které probíhají pouze v mentální rotaci uspořádání. „Prostorovými vztahy“ je dána schopnost rychle manipulovat s jednoduchými vizuálními vzory jakými jsou mentální rotace a popisuje mentální schopnost otáčet s prostorovými objekty rychle a správně.

Gutierez (1996) považuje za představivost v matematice druh uvažování, které je založeno na užívání vizuálních nebo prostorových elementů, ať už mentálních nebo hmotných, vedoucích k řešení problémů nebo ke zlepšení vlastností. Představivost je spojením čtyř hlavních složek: mentální představa, vnější reprezentace, proces představivosti a schopnost představivosti. Ve stereometrii by studenti měli získat a zlepšit si komplex schopností představivosti pro

[12] Marcia C. Linn (1943) americká psycholožka působící na univerzitě v Berkeley.
[13] Anne C. Petersen (1944) americká psycholožka působící na univerzitě ve Stanfordu.
[14] David F. Lohman (1949)americký psycholog působící na univerzitě v Iowě.

provádění nutných kroků vedoucích k řešení daných stereometrických problémů. Studenti by měli být schopni v závislosti na charakteristice řešeného matematického problému vybrat mezi několika vizuálními schopnostmi, které mohou mít zcela odlišný základ. Jádrem vizuálních schopností vedoucích k rozvoji 3D dynamického geometrického softwaru je: (a) Percepční neměnnost, tj. schopnost rozeznat na daném předmětu ty samé vlastnosti nezávisle na velikosti, barvě, povrchové úpravě, umístění, nebo změně orientace, (b) „Mentální podíl“ teda schopnost vytvořit si během okamžiku dynamické rozumové představy a v duchu si vybavit uspořádání, (c) „Vnímání prostorové situace“ je schopnost spojovat daný předmět, obraz nebo mentální představu sám se sebou, (d) „Vnímání prostorových vztahů“ je schopnost spojovat představ navzájem nebo současně k sobě samému a (e) „Vizuální rozlišování“ je schopnost porovnávat několik předmětů, obrazů nebo mentálních představ a identifikovat jejich podobnosti a odlišnosti navzájem.

Na základě těchto úvah by 3D dynamický geometrický software měl poskytovat žákům rozmanitost a velké množství prostorových znázornění. Dynamická vizualizace může být velmi silným nástrojem k získání většího porozumění mnoha matematických pojmů nebo může být cestou vedoucí k řešení matematických problémů. Dynamické znázornění matematických procesů nám umožňuje v naší mysli s nimi manipulovat mnohem produktivnějším způsobem, než kterého bychom dosáhli pouhým pozorování statického textu a obrázků v knize. Počítačový software pro výuku 3D geometrie umožňuje studentům vidět na obrazovce daná tělesa z několika možných úhlů pohledu a transformovat je, a pomocí nich získávat a dál rozvíjet svoje schopnosti a znalosti ze stereometrie.

DALEST projekt je soustava softwarových aplikací, která se u žáků základních a středních škol zaměřuje na rozvoj dovedností prostorové představivosti a rozvíjení znalostí ze stereometrie. Pro bližší představu uvedeme některé aplikace a stručný popis jejich možností: Cubix Editor, Potter´s Wheel a Origami Nets.

**Cubix Editor**

Tento editor umožňuje studentům pouhým klikáním stavět geometrické objekty z kostek stejných rozměrů, jakoby pracovali se stavebnicí. Dále umožňuje uložení vytvořených objektů, znovu si je načíst a pracovat s nimi dále, různě je vybarvovat, počítat jejich objem a povrch, různě s vytvořeným objektem otáčet a manipulovat a zobrazit jeho půdorys, nárys a bokorys.

**Potter´s Wheel**

Ideou pro vznik této aplikace byl hrnčířský kruh, kdy tato aplikace dává uživateli možnost pohybovat a rotovat s objekty. V případě, že si vezmeme dvourozměrný objekt (čtverec, kruh, trojúhelník, atd.) a necháme jej rotovat kolem vertikální osy, dokáže vytvořit velkou škálu rotačních předmětů, čímž se tak stává užitečným nástrojem pro designery, kteří využívají pouze pět jednoduchých 2D objektů, ale změnou jejich polohy a orientace vzhledem k ose, je možné vytvořit 3D objekty rozmanitých tvarů.

**Origami Nets**

S touto aplikací lze sestavovat nejrůznější sítě z jednoduchých obrazců, jako jsou trojúhelníky, čtverce, obdélníky a pravidelné mnohoúhelníky. Je to způsob, kdy studenti mohou experimentovat s odlišnými sítěmi rozmanitých těles. Dále také umožňuje sestavit řetězec z trojúhelníků, které lze vložit do válce nebo kužele. Velký význam této aplikace spočívá hlavně v tom, že umí vytvořit dynamické a interaktivní prostředí, ve kterém uživatel může bez jakéhokoliv omezení vytvářet nejrůznější sítě těles. Sestavování síti těles není statický proces, naopak je pro uživatele přínosné, pokud může se sestavovanou sítí otáčet nebo jí nechat rotovat a pomáhá tak vizualizovat jak se vznikající objekt mění. Další dynamickou součástí této aplikace je to, že uživateli umožňuje jak 2D tak 3D pohled na danou síť tělesa a okamžitou zpětnou vazbu, kdy lze síť složit ještě před tím než je úplně dokončena.

**Slider**

Studenti pracují s „magickou“ krychlí, ve které je umístěno neviditelné těleso, dále ovládají „projíždějící“ rovinu, kterou lze různě pohybovat a otáčet kolem libovolné osy. Místo, ve kterém rovina protne těleso, se tak stává viditelným, tzn., že studenti mohou vidět řez tělesa laserovou rovinou. Krychlí lze otáčet všemi směry a je možné si ji prohlédnout ze všech možných úhlů pohledu. Úkolem studentů je potom typovat na základě vzniklého viditelného řezu o jaké skryté těleso se jedná. Samozřejmě o správnosti úsudku se lze přesvědčit tak, že se těleso stane viditelným.

Jedním z cílů tohoto projektu bylo vytvořit dynamický trojrozměrný software pro výuku stereometrie a iniciovat tak aktivní přístup učitelů k výuce stereometrie a nabídnout jim nástroj pro oživení a zefektivnění výuky stereometrie, která je jednou z nejobtížnějších částí středoškolské matematiky, protože základním problémem často bývá nedostatek prostorové představivosti u studentů.

# 2 DOTAZNÍKOVÁ ŠETŘENÍ MEZI ŽÁKY ZÁKLADNÍCH ŠKOL

Rozvíjení prostorové představivosti probíhá již od nejútlejšího věku dítěte. S rozvíjením geometrické představivosti je dobré začít už během základního vzdělávání. Položila jsem si otázku, jakou prostorovou představivost mají žáci prvního stupně, jak rozumí geometrickým pojmům a jak s nimi dokážou pracovat. Jelikož jsem sama neměla možnost zblízka prakticky se seznámit s výukou geometrie na základní škole a sledovat, jak žáci reagují na jednotlivé geometrické pojmy a co si pod nimi představují, tak jsem oslovila kolegyni RNDr. Lenkou Juklovou, Ph.D., se kterou jsme dospěly k zajímavému nápadu. Rozhodly jsme se, že provedeme dotazníkové šetření, abychom získaly alespoň nějaké informace o porozumění geometrie na základní škole. Na jeho základě jsme si udělaly nějaký závěr o výuce geometrie a geometrické představivosti žáků. Výsledky šetření jsme zpracovaly do několika grafů.

Dotazník byl určen pro žáky 4. a 5. tříd základních škol. Na jaře ve školním roce 2015 – 2016 jsme oslovily čtyři základní školy. Z rozeslaných dotazníků se nám vrátilo zpět 355 vyplněných, z toho jsme musely 5 vyřadit. Dotazník obsahoval celkem šest otázek a z toho pět uzavřených. To znamená, že žáci měli u každé otázky možnost výběru správné odpovědi ze tří, čtyř nebo pěti předložených odpovědí. Přitom otázky a možnosti odpovědí byly voleny tak, aby nebyla správná pouze jedna odpověď, ale nabízelo se i více správných možností. Poslední šestá otázka neměla hodnotit znalosti, nýbrž nás zajímalo, zda mají žáci zájem o geometrii a jestli je baví či nikoliv.

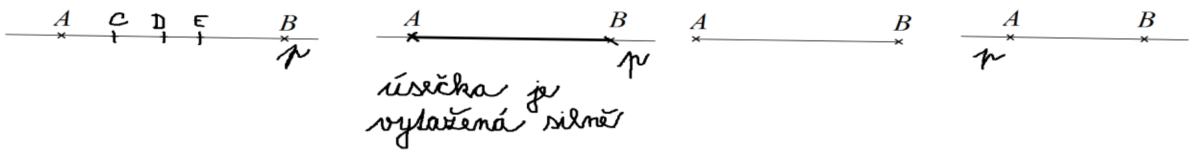
Následně jsme získané odpovědi zpracovaly do grafů. U každé otázky je graf, ze kterého je vidět, kolik procent respondentů zakroužkovalo danou odpověď. Poslední sloupec v grafu ukazuje, kolik procent respondentů mělo celou otázku správně, tedy těch, co vyznačili všechny správné odpovědi.

Hned první otázka byla zaměřená na jeden ze základních a nejstarších geometrických pojmů, a to úsečku. Zajímalo nás, zda žáci správně chápou, že úsečka je omezena krajními body, mezi kterými leží nekonečně mnoho vnitřních bodů. Zjištění bylo trochu překvapivé, protože jen necelých 10 procent respondentů odpovědělo zcela správně, což je u tohoto stěžejního pojmu trošku zarážející.

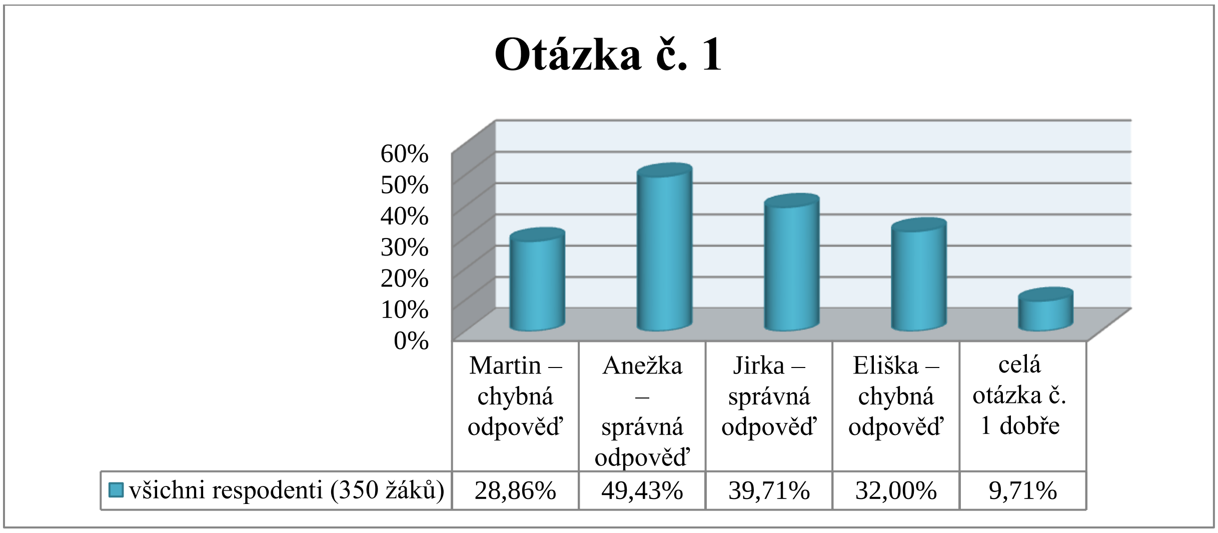
**Otázka č. 1**

Děti měly v prověrce z geometrie následující příklad: Na obrázku jsou dány dva různé body $A, B$. Vyznačte **všechny** body, které patří úsečce $AB$.


Odpovědi Martina, Anežky, Jirky a Elišky vidíte na obrázku. Zakroužkujte jména **všech** dětí, které odpověděly správně.




Martin Anežka Jirka Eliška




| | Martin – chybná odpověď | Anežka – správná odpověď | Jirka – správná odpověď | Eliška – chybná odpověď | celá otázka č. 1 dobře |
|---|---|---|---|---|---|
| všichni respodenti (350 žáků) | 28,86% | 49,43% | 39,71% | 32,00% | 9,71% |

Ve druhé otázce jsme se ptaly na společné body dvou různých polopřímek a jejich polohu.

U otázky č. 2 jsme udělaly ještě jeden graf navíc, protože bylo zajímavé sledovat, že někteří žáci zakroužkovali zcela protichůdné odpovědi. Skoro 20 procent odpovědělo, že všechny body polopřímky $CD$ patří také polopřímce $KL$ a současně, že všechny body polopřímky $KL$ patří také polopřímce $CD$.

**Otázka č. 2**

Na obrázku jsou znázorněny polopřímky $CD$ a $KL$. Zakroužkujte **všechna** tvrzení, která jsou pravdivá.

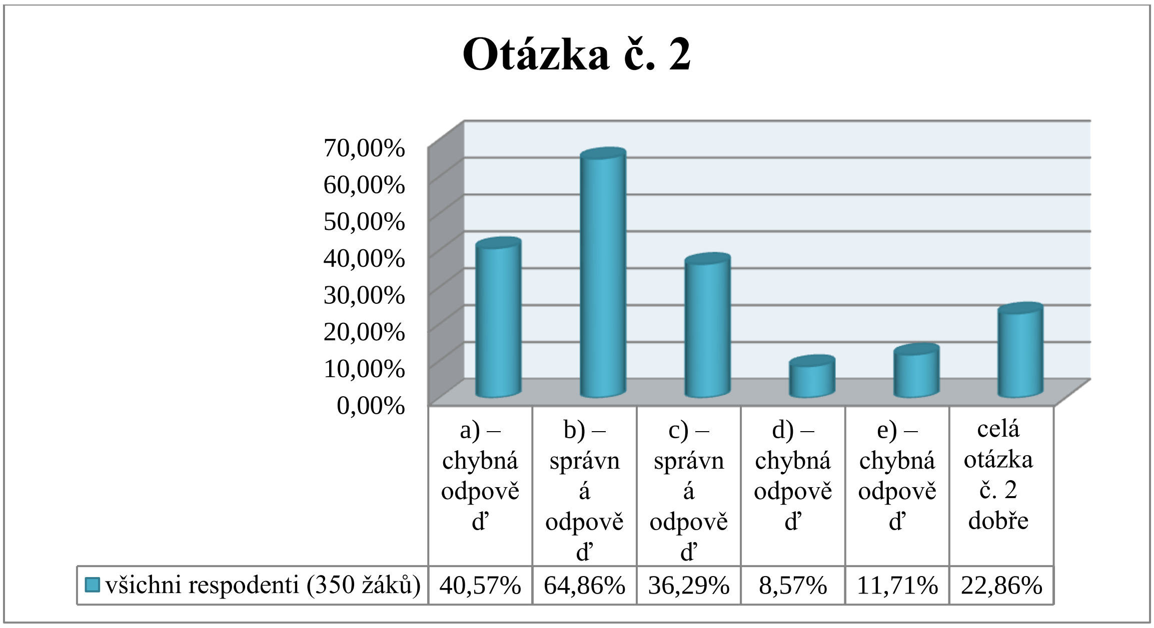
a) Všechny body polopřímky $CD$ patří také polopřímce $KL$.

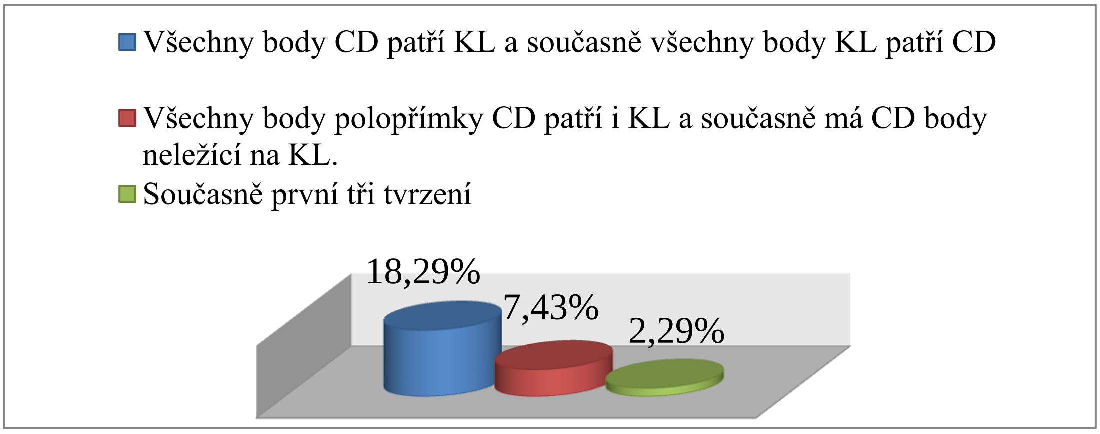
b) Všechny body polopřímky $KL$ patří také polopřímce $CD$.

c) Na polopřímce $CD$ existují body, které neleží na polopřímce $KL$.

d) Polopřímky $KL$ a $CD$ leží na různých přímkách.

e) Polopřímky $CD$ a $KL$ jsou opačné.



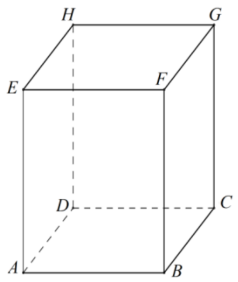




Třetí otázka už byla ze stereometrie. Zjišťovaly jsme v ní, zda žáci správně rozumí pojmu rovnoběžné, různoběžné a kolmé přímky. Je zde obrázek kvádru ve volném rovnoběžném promítání a bylo na žácích, aby správně rozpoznali a uplatnili geometrickou představivost. Například měli rozhodnout, zda protínající se průměty hran v obrázku znamenají i jejich protínání ve skutečnosti.

Z odpovědí je také možno vysledovat zajímavý fakt, že někteří žáci u otázky č. 2 a č. 3 označili tvrzení i jeho negaci současně nebo opravili správné tvrzení za chybné. Procenta těchto žáků jsme zpracovaly rovněž v samostatném grafu.

**Otázka č. 3**

Na obrázku vidíte kvádr $ABCDEFGH$. Zakroužkujte **všechna** tvrzení, která jsou pravdivá.



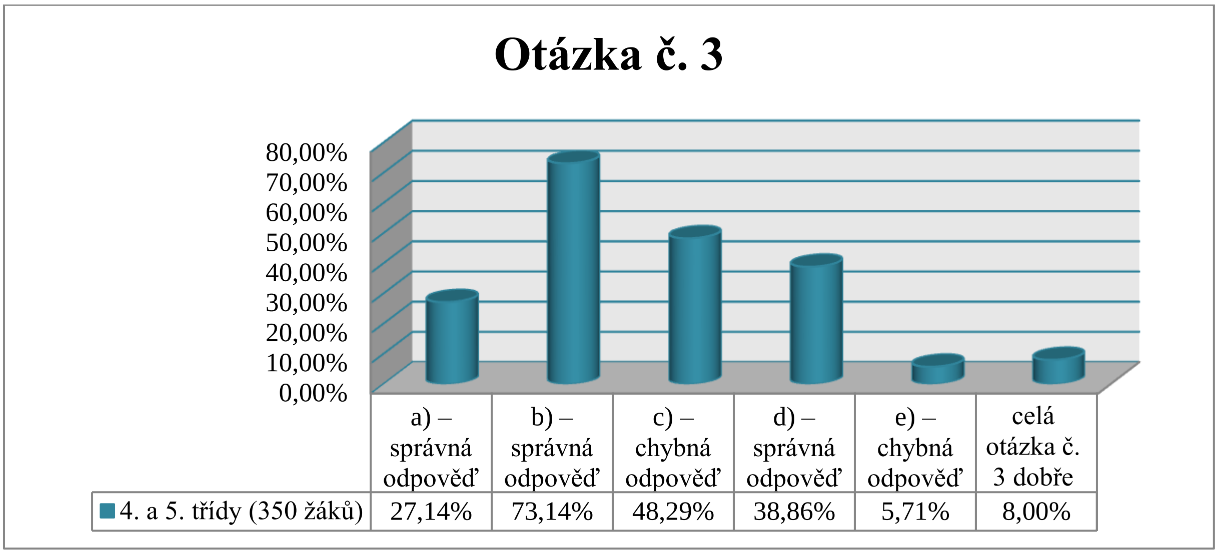

a) Přímka $AB$ je kolmá na přímku $DH$.

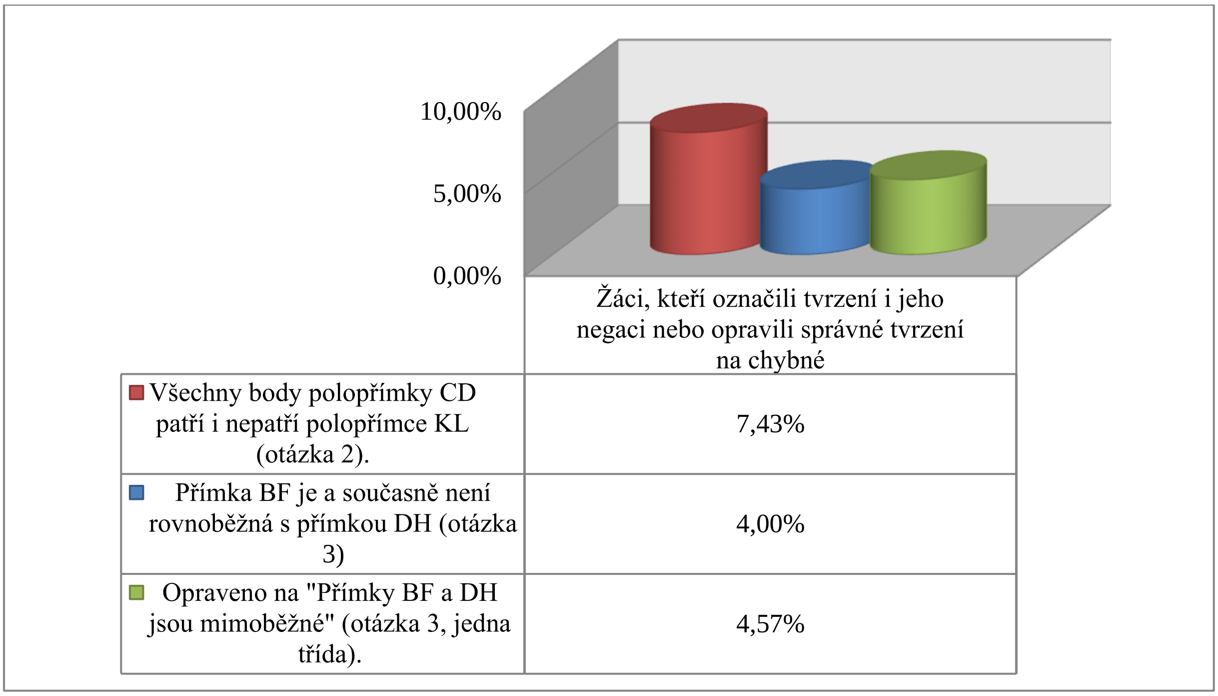
b) Přímky $BF$ a $DH$ jsou rovnoběžné.

c) Přímky $CD$ a $BF$ jsou různoběžné.

d) Přímky $CD$ a $BF$ nejsou různoběžné.

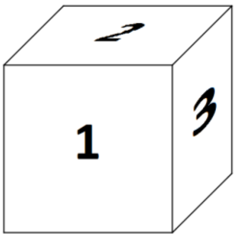
e) Přímky $BF$ a $DH$ se protínají.

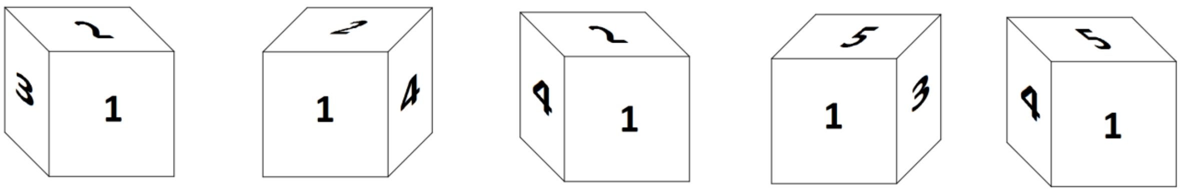


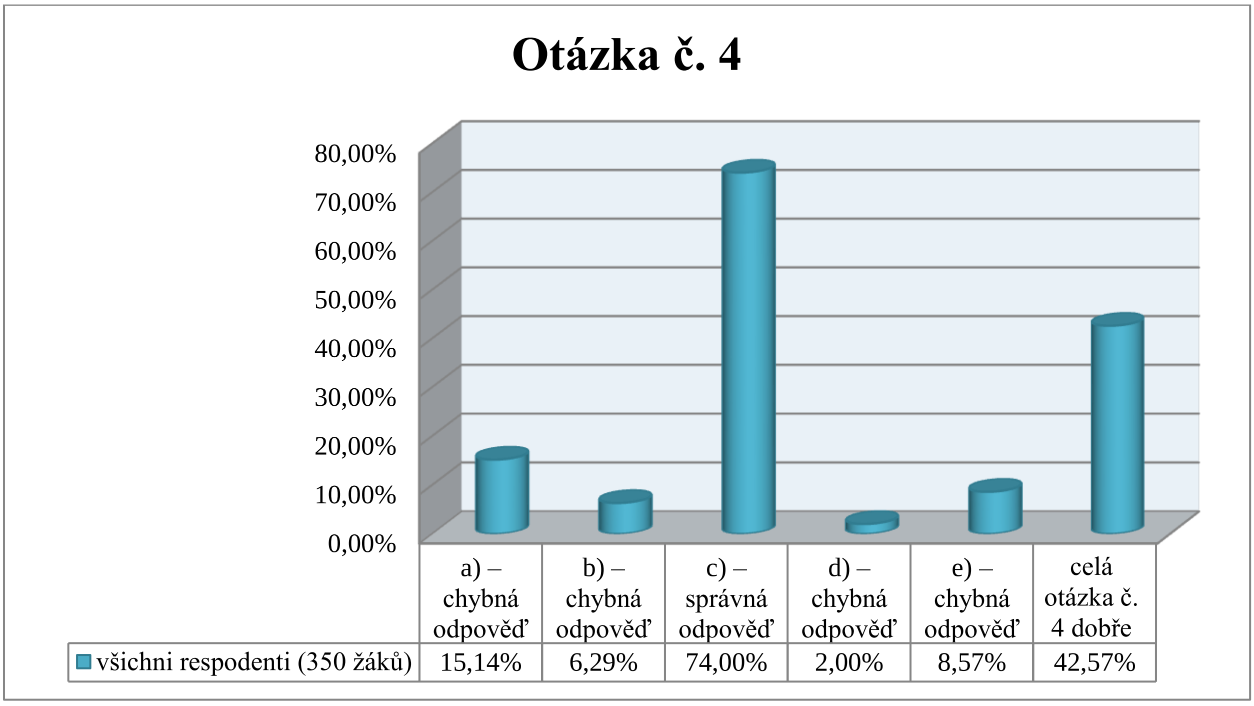




Ve čtvrté a páté otázce nás zajímalo, jak jsou žáci schopni pouze v mysli pohybovat a otáčet s krychlí. Ve čtvrté otázce je přímo hrací kostka, se kterou si dítě hraje od nejútlejšího věku. Celou správně ji měla skoro polovina, přesně 42,57 % žáků. Zajímavé je, že stejné procento správných odpovědí je i u páté otázky, a přičemž jde o nejvyšší počet správných odpovědí ze všech pěti otázek.

**Otázka č. 4**
Lukáš si postavil doprostřed stolu krychli, která má na každé stěně právě jedno z čísel 1 až 6, součet čísel na protějších stěnách je vždy 7. Na krychli se díval z pravé strany stolu (jako na obrázku). Potom přešel na levou stranu stolu. Zakroužkujte ten obrázek, na kterém je nakreslená krychle tak, jak ji viděl z levé strany.



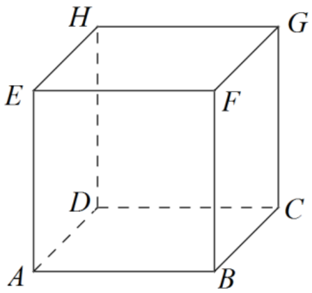




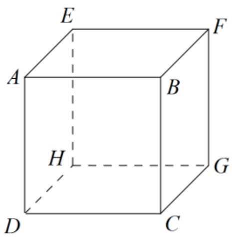

| | a) – chybná odpověď | b) – chybná odpověď | c) – správná odpověď | d) – chybná odpověď | e) – chybná odpověď | celá otázka č. 4 dobře |
|---|---|---|---|---|---|---|
| všichni respodenti (350 žáků) | 15,14% | 6,29% | 74,00% | 2,00% | 8,57% | 42,57% |

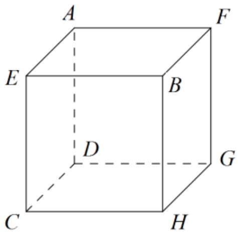
**Otázka č. 5**

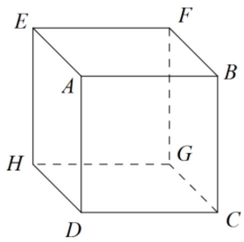
Na stole je položená krychle $ABCDEFGH$, její stěna $ABCD$ na stole leží (jako na obrázku).



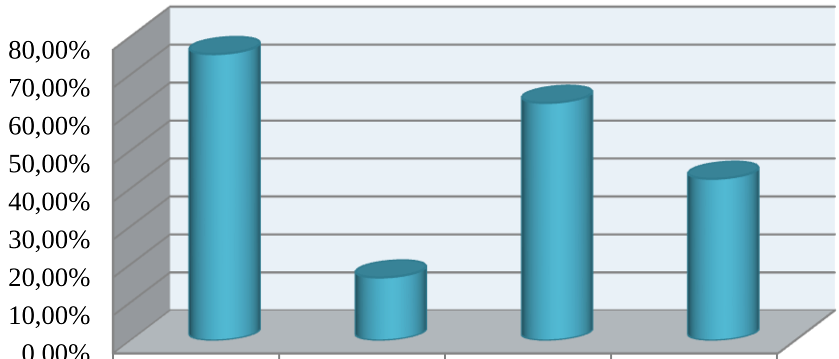

Krychli otočíme tak, aby na stole ležela stěna $DCGH$. Zakroužkujte **všechny** obrázky, které mohou ukazovat takto otočenou krychli.




## Otázka č. 5




| | a) – správná odpověď | b) – chybná odpověď | c) – správná odpověď | celá otázka č. 5 dobře |
|---|---|---|---|---|
| všichni respodenti (350 žáků) | 75,43% | 16,57% | 62,57% | 42,57% |

V poslední šesté otázce skoro 40 % žáků odpovědělo, že je geometrie baví, 35 % nebaví a 25 % neví. Z toho vyplývá, že u žáků, kteří nevědí, je jistý potenciál, se kterým by se dalo pracovat a probudit v nich správným přístupem zájem o geometrii.

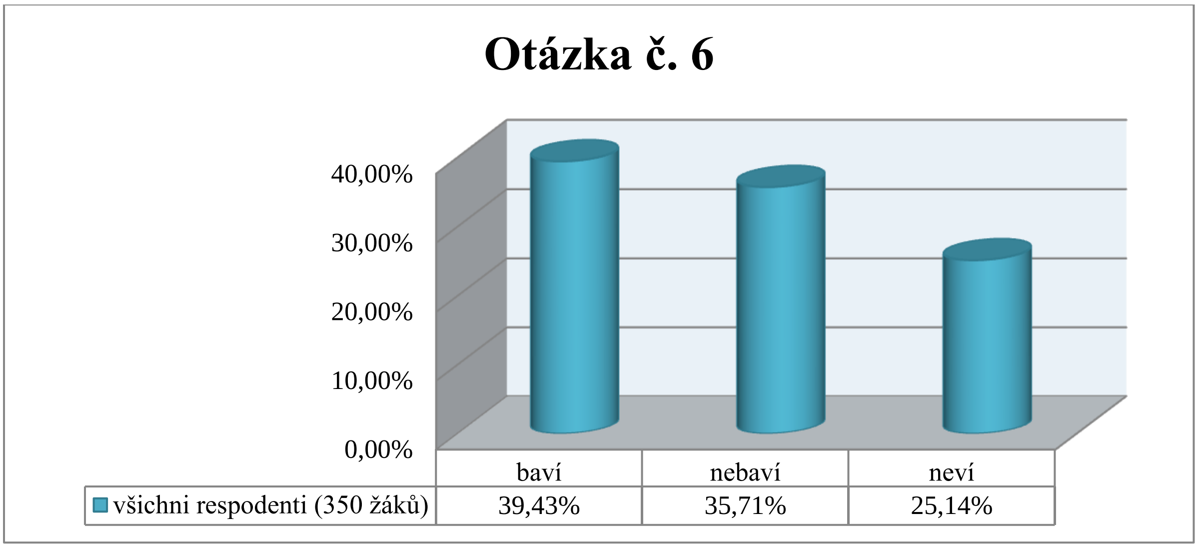
**Otázka č. 6**

Baví tě geometrie? (zakroužkuj odpověď)

a) Ano

b) Ne

c) Nevím




Vyslovit stručné hodnocení tohoto dotazníkového šetření v podstatě není možné, neboť některé výsledky byly nečekané a jiné překvapující. Ukázalo se, že žáci mají problém s pochopením a porozuměním pojmu úsečka. V následující otázce o polopřímkách pak docházelo k současnému označení protichůdných tvrzení. Rovněž někteří žáci nemají ujasněné pojmy rovnoběžné, různoběžné a kolmé přímky. Oproti tomu byli celkem úspěšní (kolem 75 %) v označení jednotlivých správných možností odpovědí v otázkách, sice v obou případech správně celou otázku mělo nakonec pouze 42,57 % žáků. Průzkum ukázal, že je nutné dbát už na základní škole, aby geometrické pojmy byly správně definovány a následně pochopeny žáky. Výsledky vyhodnocení otázek č. 4 a č. 5 ukazují, že žáci mají určitou geometrickou představivost, ale je potřeba s ní pracovat a dále ji rozvíjet.

# 3 SBÍRKA ÚLOH STEREOMETRIE

# SBÍRKA ÚLOH STEREOMETRIE

## Polohové vlastnosti útvarů v prostoru

Sbírka úloh STEREOMETRIE – Polohové vlastnosti útvarů v prostoru
Mgr. Marie Chodorová, Ph.D.
Grafická úprava a sazba: Marcel Vrbas

# OBSAH

# SEZNAM POUŽÍVANÝCH SYMBOLŮ

| | |
|---|---|
| $A, B$ | body $A, B$ |
| $a, b$ | přímky $a, b$ |
| $\leftrightarrow AB$ | přímka $A, B$ |
| $\rightarrow AB$ | polopřímka $AB$ |
| $AB$ | úsečka $AB$ |
| $\rho,\sigma$ | roviny $\rho,\sigma$ |
| $\leftrightarrow ABC$ | rovina $ABC$ |
| $\leftrightarrow Ap$ | rovina $Ap$ (rovina určená bodem $A$ a přímkou p) |
| $\leftrightarrow pq$ | rovina $pq$ (rovina určená přímkami $pq$) |
| $S_{AB}$ | střed úsečky $AB$ |
| $\measuredangle AVB$ | konvexní úhel $AVB$ |
| $a \parallel b$ | přímka $a$ je rovnoběžná s přímkou $b$ |
| $a \nparallel b$ | přímka $a$ není rovnoběžná s přímkou $b$ |
| $a \cap b = P$ | průsečík $P$ přímek $a, b$ |
| $\alpha \cap \beta = p$ | průsečnice $p$ rovin $\alpha$ , $\beta$ |
| $\lvert AB\rvert$ | vzdálenost bodů $A, B$; délka úsečky $AB$ |
| $\lvert Ap\rvert$ | vzdálenost bodu $A$ od přímky $p$ |
| $\lvert A\alpha\rvert$ | vzdálenost bodu $A$ od roviny $\alpha$ |
| $\lvert ab\rvert$ | vzdálenost rovnoběžných přímek $a, b$ |
| $\lvert \alpha\beta\rvert$ | vzdálenost rovnoběžných rovin $\alpha, \beta$ |
| $\lvert \measuredangle AVB\rvert$ | velikost konvexního úhlu $AVB$ |
| $\lvert \measuredangle ab\rvert$ | odchylka přímek $a, b$ |
| $\lvert \measuredangle p\alpha\rvert$ | odchylka přímky $p$ a roviny $\alpha$ |
| $\lvert \measuredangle \alpha\beta\rvert$ | odchylka rovin $\alpha, \beta$ |
| $V$ | objem tělesa |
| $S$ | povrch tělesa |

# A. ZÁKLADY STEREOMETRIE

## A.1 Základní stereometrické pojmy

Stereometrie, neboli geometrie v prostoru se zabývá řešením prostorových geometrických úloh. Aby student byl schopen řešit úlohy na dané téma musí se seznámit s některými stereometrickými pojmy a větami.
Za základní útvary ve stereometrii považujeme **body, přímky a roviny**. Dále uvedeme jejich vlastnosti a vztahy.

### URČENÍ PŘÍMKY

- dvěma různými body $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ je určena jediná přímka.

### URČENÍ ROVINY

- přímkou a bodem, který neleží na této přímce,
- třemi body, které neleží na jedné přímce,
- dvěma různoběžkami,
- dvěma různými rovnoběžkami.

### VZÁJEMNÁ POLOHA PŘÍMEK $\boldsymbol{a, b}$

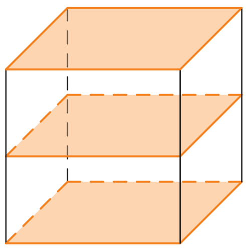
- rovnoběžné: $\boldsymbol{a, b}$ leží v téže rovině a současně $\boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{b} = \emptyset$ – různé,
- rovnoběžné splývající: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$
- různoběžné: $\boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{b} = \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}$ – průsečík,
- mimoběžné: $\boldsymbol{a, b}$ neleží v téže rovině a současně $\boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{b} = \emptyset$.

### VZÁJEMNÁ POLOHA DVOU ROVIN $\boldsymbol{\alpha, \beta}$

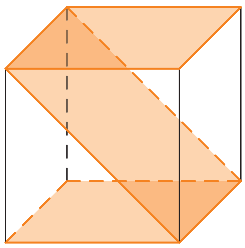
- rovnoběžné: $\boldsymbol{\alpha} \cap \boldsymbol{\beta} = \emptyset$ – různé,
- rovnoběžné splývající: $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$,
- různoběžné: $\boldsymbol{\alpha} \cap \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}$ – průsečnice.

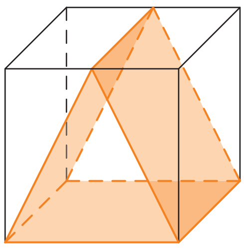
### VZÁJEMNÁ POLOHA TŘÍ ROVIN

- Všechny tři roviny jsou navzájem rovnoběžné.

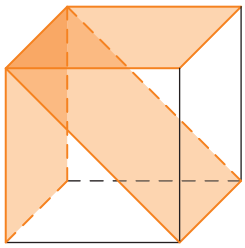


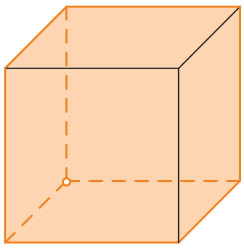
- Dvě roviny jsou rovnoběžné, třetí je protíná ve dvou rovnoběžných přímkách.
- Každé dvě roviny jsou různoběžné a všechny tři průsečnice jsou navzájem rovnoběžné a různé.





- Každé dvě roviny jsou různoběžné a všechny průsečnice splývají v jedinou přímku.
- Každé dvě roviny jsou různoběžné, jejich průsečnice jsou navzájem různoběžné a protínají se v jednom společném bodě.





## VZÁJEMNÁ POLOHA PŘÍMKY $\boldsymbol{a}$ A ROVINY $\boldsymbol{\rho}$

- rovnoběžné: $a \cap \rho = \emptyset$ – různé,
- přímka $a$ leží v rovině $\rho$: $a \in \rho$,
- různoběžné: $a \cap \rho = R$, $R$ – průsečík.

## NĚKTERÉ DALŠÍ VLASTNOSTI BODŮ, PŘÍMEK A ROVIN:

- Bodem $A$ lze vést právě jednu přímku $a$ rovnoběžnou s přímkou $b$.
- Leží-li dva různé body přímky $a$ v rovině $\rho$, pak každý bod přímky $a$ leží v rovině $\rho$.
- Mají-li dvě různé roviny $\alpha$ a $\beta$ společný bod $A$, pak mají i společnou přímku $a$, která prochází bodem $A$.
- Přímka $a$ je rovnoběžná s rovinou $\rho$, právě když v rovině $\rho$ existuje přímka rovnoběžná s přímkou $a$.
- Dvě roviny jsou rovnoběžné, právě když jedna z nich obsahuje dvě různoběžky, z nichž každá je rovnoběžná s druhou rovinou.
- Daným bodem $A$ lze vést jedinou rovinu $\alpha$ rovnoběžnou s danou rovinou $\rho$.

## A.2 Zobrazování prostorových útvarů v rovině

Rovinu, do níž geometrické útvary rovnoběžně promítáme, nazýváme průmětnou. Tuto průmětnu ztotožňujeme s nákresnou, tj. s rovinou tabule nebo sešitu. K názornému zobrazování prostorových geometrických útvarů a k ilustraci řešení některých stereometrických úloh užíváme **volné rovnoběžného promítání**.

Při zobrazování prostorových geometrických útvarů ve VRP dodržujeme jednoduchá pravidla:

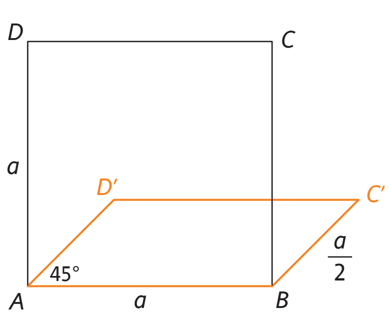
1. Body zobrazujeme jako body.
2. Přímky zobrazujeme jako přímky nebo jako body.
3. Zachováváme incidenci bodů a přímek.
4. Rovnoběžné přímky zobrazujeme jako rovnoběžky nebo jako body.
5. Zachováváme poměr velikostí rovnoběžných úseček.
6. Obrazce ležící v rovinách rovnoběžných s průmětnou zobrazujeme ve skutečné velikosti.

Při volném rovnoběžném promítání se jedná o zobrazení, ve kterém jsou bodům prostoru přiřazeny jisté body nákresny.
Pro názornost obrazů má praktický význam připojit následující úmluvy, které budeme respektovat:

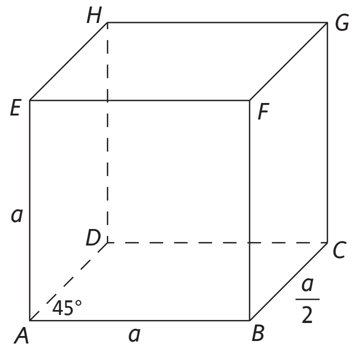
7. Obrazy přímek kolmých k průmětně (tyto přímky budeme nazývat **hloubkové**) kreslíme tak, aby svíraly s vodorovnou přímkou zvolený úhel, tzv. úhel zkosení. Většinou volíme úhel o velikosti 45°.
8. Obrazy úseček na hloubkových přímkách zkracujeme na polovinu jejich skutečné velikosti.

### PRO NÁZORNOST ZOBRAZÍME NĚKOLIK ÚTVARŮ A TĚLES:

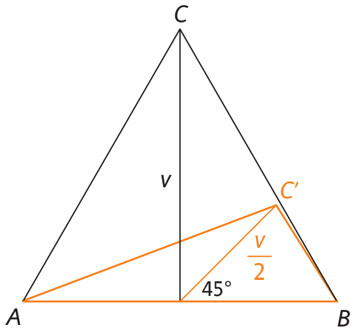
- čtverec *ABCD*



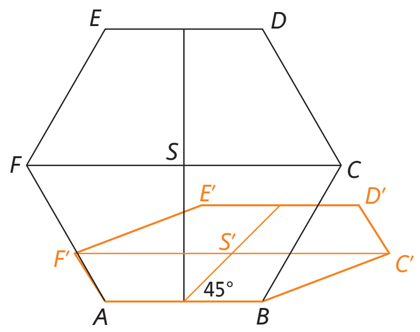

- krychle *ABCDEFGH*



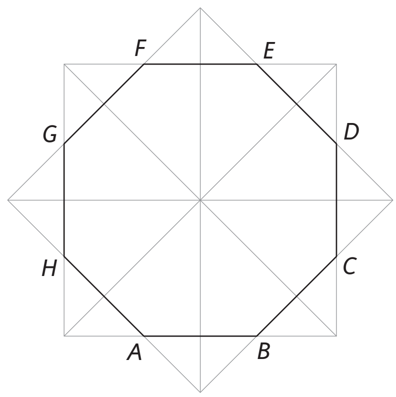
- rovnostranný trojúhelník *ABC*

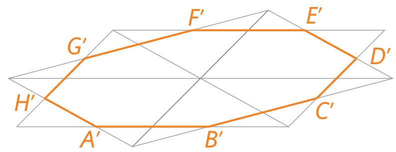



- pravidelný šestiúhelník *ABCDEF*

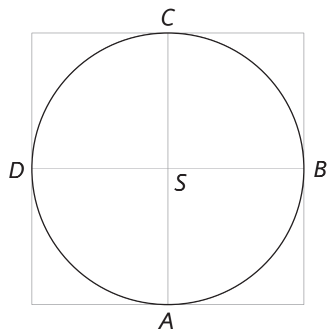


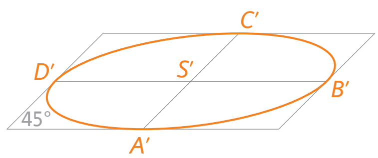

- pravidelný osmiúhelník *ABCDEFGH*



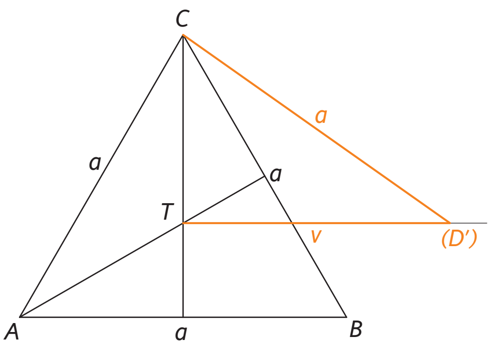



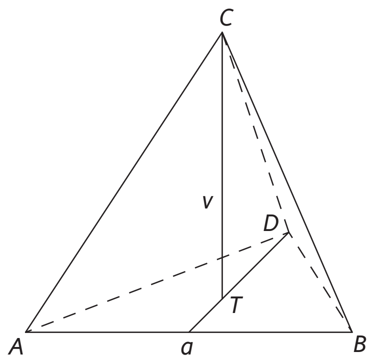

- kružnice (obrazem kružnice je elipsa)



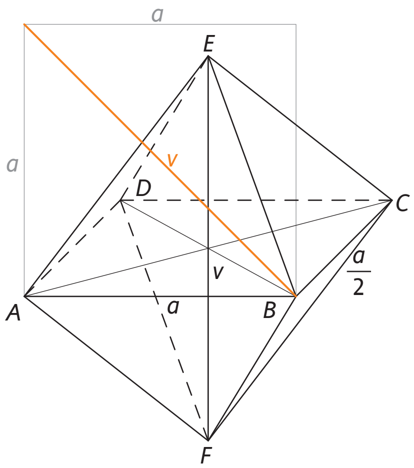



- pravidelný čtyřstěn *ABCD*
  (Ke konstrukci pravidelného čtyřstěnu je nutné určit jeho výšku, a to tak, že sklopíme rovinu, která obsahuje výšku tělesa a hranu CD, do roviny podstavy.)

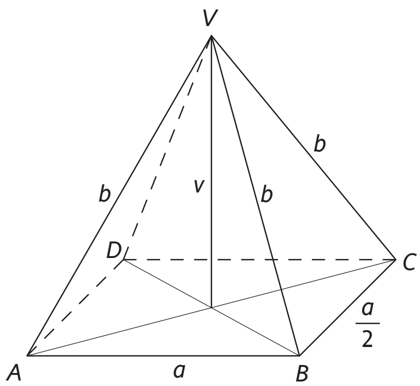



- pravidelný osmistěn *ABCDEF*




- pravidelný čtyřboký jehlan *ABCD*



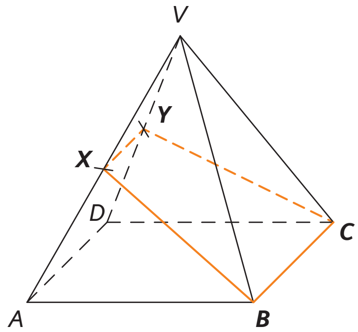
# B. POLOHOVÉ VLASTNOSTI ÚTVARŮ V PROSTORU

## B.1 Vzájemná poloha čtyř bodů

**1.**

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, zjistěte, zda uvedené body $B,C,X,Y$ leží v jedné rovině. Bod $X$ je střed hrany $AV$, bod $Y$ je střed hrany $DV$.

*Řešení:*




Body $B,C,X,Y$ leží v jedné rovině, protože hrana $BC$ je rovnoběžná se střednou $XY$ a rovnoběžné přímky leží v jedné rovině.

**2.**

Je dána krychle $ABCDEFGH$:

a) zjistěte, zda body $E$, $G$, $B$, $X$ leží v jedné rovině. Bod $X$ je střed hrany $BF$;

b) zjistěte, zda body $A$, $C$, $K$, $L$ leží v jedné rovině. Body $K$, $L$ jsou středy hran $EF$, $FG$;

c) zjistěte, zda body $K$, $L$, $B$, $X$ leží v jedné rovině. Bod $K$ je střed hrany $AE$, bod L je střed hrany $DH$ a bod $X$ leží na hraně $EF$ a platí $|XE| = 2|XF|$;

d) zjistěte, zda v krychli $ABCDEFGH$ leží uvedené body $K$, $L$, $M$, $S$ v jedné rovině. Bod $K$ je střed hrany $AE$, bod $L$ je střed hrany $DH$, bod $M$ je střed hrany $BF$ a bod $S$ je střed krychle.

**3.**

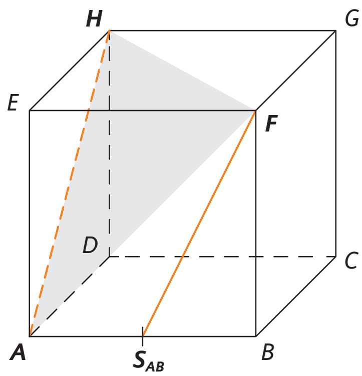
Je dán pravidelný osmistěn $ABCDEF$. Zjistěte, zda uvedené body $B$, $D$, $F$, $K$ leží v jedné rovině. Bod $K$ leží na úhlopříčce $EF$ a platí $3|EK| = |FK|$.

## B.2 Vzájemná poloha dvou přímek

**4.**

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Rozhodněte o vzájemné poloze přímek $AH$ a $S_{AB}F$:

*Řešení:*




Body $AFH$ je jednoznačně určena rovina, ale bod $S_{AB}$ v této rovině zřejmě neleží, tedy přímky $AH$ a $S_{AB}F$ jsou mimoběžné.

**5.**

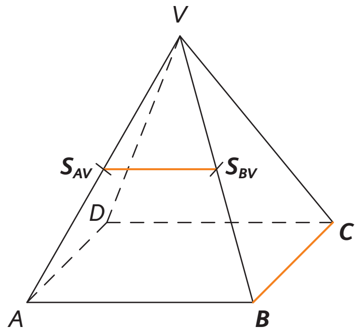
Je dána krychle $ABCDEFGH$. Rozhodněte o vzájemné poloze přímek:

a) $AS_{GH}$ a $S_{AB}D$
b) $AP$ a $BS_{CG}$, bod $P$ je střed stěny $CDGH$
c) $AP$ a $S_{AE}S_{GH}$, bod $P$ je střed stěny $CDGH$
d) $AS_{GH}$ a $EC$
e) $S_{AB}S_{AD}$ a $FH$
f) $AH$ a $S_{BF}G$
g) $BD$ a $S_{BF}H$
h) $BH$ a $S_{AE}S_{CG}$

**6.**

V pravidelném čtyřbokém jehlanu ABCDV rozhodněte o vzájemné poloze přímek $BC$ a $S_{AV}\,S_{BV}$.

*Řešení:*




Přímky $BC$ a $S_{AV}S_{BV}$ jsou mimoběžné, protože nemají žádný společný bod a neleží v jedné a téže rovině.

**7.**

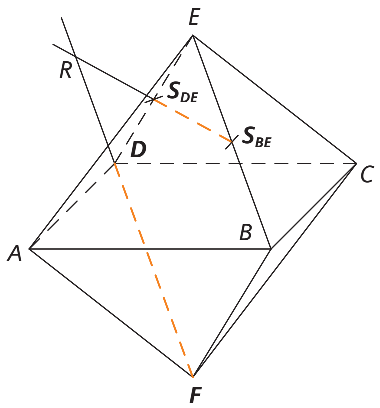
V pravidelném čtyřbokém jehlanu $ABCDV$ rozhodněte o vzájemné poloze přímek:

a) $AS_{DV}$ a $BS_{CV}$
b) $AB$ a $S_{CV}S_{DV}$
c) $BV$ a $CD$
d) $CV$ a $S_{AB}S_{AV}$
e) $DV$ a $S_{DB}S_{BV}$

**8.**

V pravidelném osmistěnu $ABCDEF$ rozhodněte o vzájemné poloze přímek $DF$ a $S_{BE}S_{DE}$.

*Řešení:*




Přímky $DF$ a $S_{BE}$ $S_{DE}$ jsou různoběžné, protože body $BEDF$ tvoří úhlopříčný řez daného osmistěnu, tím pádem leží v jedné rovině, ve které leží i body $S_{BE}$,$S_{DE}$, tedy přímky $DF$ a $S_{BE}$ $S_{DE}$ leží v jedné a téže rovině a nejsou rovnoběžné, protože se protínají v bodě $R$.

**9.**

V pravidelném osmistěnu $ABCDEF$ rozhodněte o vzájemné poloze přímek:

a) $DS_{AF}$ a $BS_{CE}$

b) $AS_{CE}$ a $S_{AF}S_{CF}$

c) $AD$ a $CS_{BF}$

## B.3 Průnik roviny a tělesa

Při konstrukci řezů na tělesech se řídíme těmito třemi pravidly:

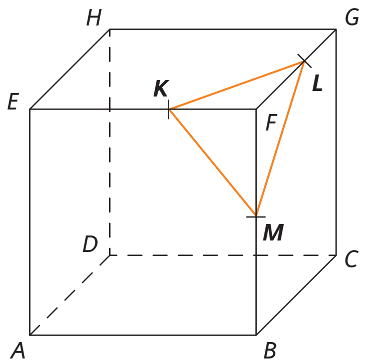
- **pravidlo č. 1:** strany řezu tvoří body, které leží v jedné stěně tělesa, (lze spojit body ležící v téže rovině stěny tělesa),
- **pravidlo č. 2:** strany řezu, které leží v rovnoběžných rovinách jsou navzájem rovnoběžné,
- **pravidlo č. 3:** jestliže dvě průsečnice tří rovin procházejí jedním bodem, musí jím procházet také třetí průsečnice.

**Poznámka:** V zadání příkladů nebude výslovně uváděno, kde body určující rovinu řezu leží, a tudíž čtenář se bude orientovat podle obrázku.

**10.**

Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou určenou body $KLM$.

*Řešení:*



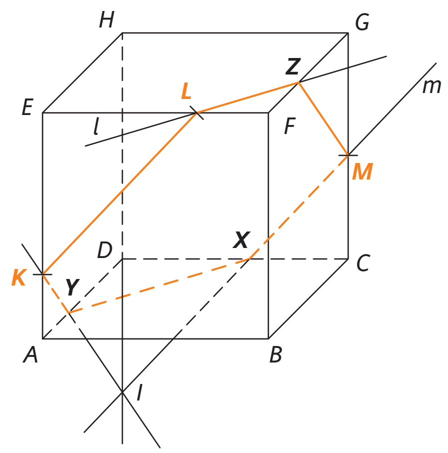

Rovina řezu je určena body $KLM$. Protože bod $K$ leží na hraně $EF$, bod $L$ leží na hraně $FG$ a body $EFG$ určují rovinu, ve které leží horní podstava $EFGH$ krychle

*ABCDEFGH*, proto v této rovině musí ležet i přímka *KL*, proto spojíme body *KL* a úsečka *KL* tak určuje jednu stranu řezu.
Analogicky totéž provedeme s body *LM* a *KM*, tedy podle pravidla č. 1 spojíme body *KL*, *LM* a *MK*, čímž je řez sestrojený.

## 11.

Sestrojte řez krychle *ABCDEFGH* rovinou určenou body *KLM*.

*Řešení:*

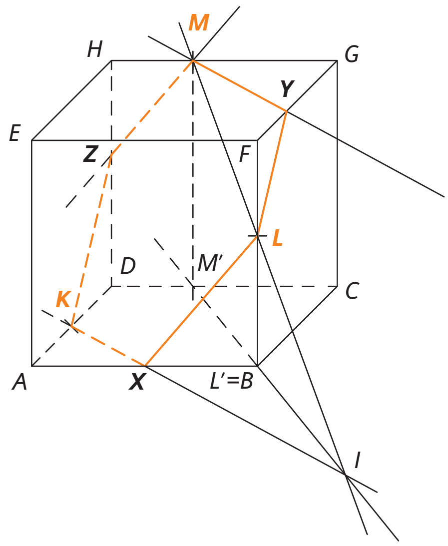



1. Body *KL* leží v téže rovině stěny *ABEF* a podle pravidla č. 1 tvoří stranu řezu.
2. Roviny *ABF* a *DCG* jsou rovnoběžné, takže podle pravidla č. 2 vedeme bodem *M* rovnoběžku m s *KL*.
3. Průnik přímky m a hrany *DC* je bod *X*.
4. Další body řezu sestrojíme užitím pravidla č. 3. Roviny *ADH*, *CDG* a *KLM* se protínají v jednom bodě *I* ∈ *DH*, kterým procházejí všechny průsečnice těchto rovin. *ADH* a *CDG* se protínají v přímce HD a na ní bude ležet bod I, jímž procházejí další dvě průsečnice. Tento bod *I* určíme jako průsečík přímek *HD* a *m*. Přímka *IK* je průsečnice rovin *ADH* a *KLM*.
5. Bod řezu *Y* je průsečíkem přímky *KI* s hranou *AD*.
6. Bodem *L* vedeme rovnoběžku l s *XY*.
7. Průnik přímky l a hrany *FG* je bod *Z*.
8. Řez je určen body *LZMXYK*.

## 12.

Sestrojte řez krychle *ABCDEFGH* rovinou určenou body *KLM*.

*Řešení:*

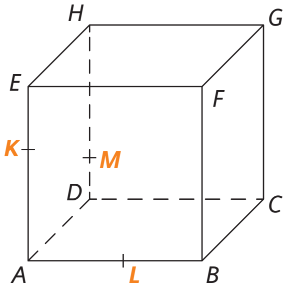



1. Nemůžeme využít žádné pravidlo. Sestrojíme průsečík přímky *LM* s rovinou podstavy *ABC*, a to tak, že sestrojíme pravoúhlý průmět této přímky do roviny stěny *ABC*, což je přímka *L´M´*. Průsečík přímky *LM* s *L´M´* je bod *I*, což je průsečík přímky *LM* s rovinou podstavy *ABC*.
2. Sestrojíme přímku *KI* a její průsečík s hranou *AB* je další bod řezu *X*.
3. Spojíme *LX*.
4. Bodem *M* vedeme rovnoběžku m s přímkou *KX* a její průsečík s hranou *FG* je bod řezu *Y*.
5. Spojíme *LY*.
6. Dále bodem *M* vedeme rovnoběžku *l* s přímkou *LX*.
7. Bod *Z*, který je průsečíkem přímky *l* a hrany *HD*, je bodem řezu a spojíme ho s bodem *K*.

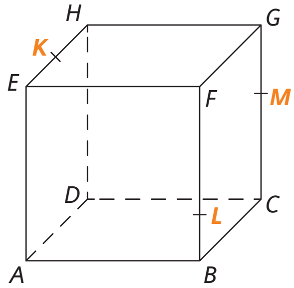
**13.**

Sestrojte řez krychle *ABCDEFGH* rovinou určenou body *KLM*:

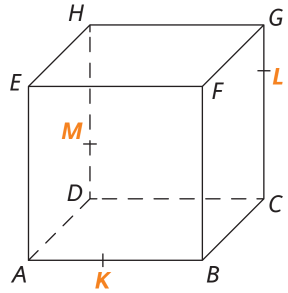
a)



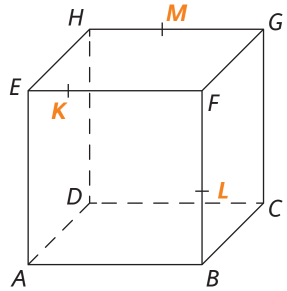

b)



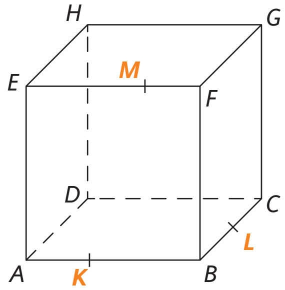

c)



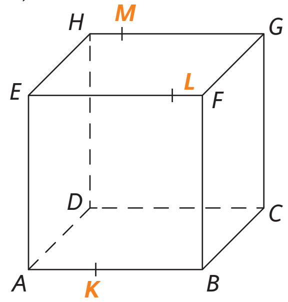

d)



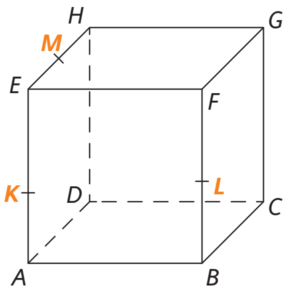

e)



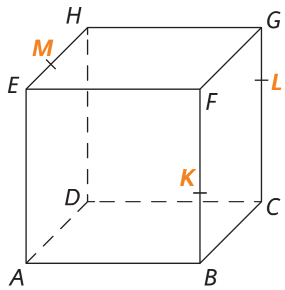

f)



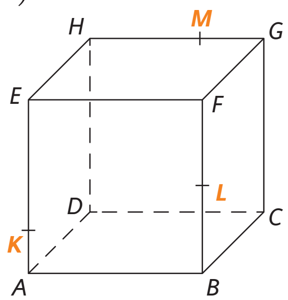

g)



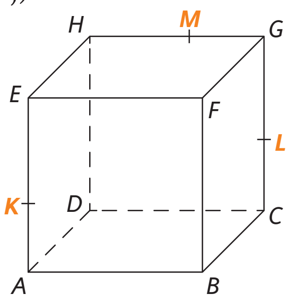

h)



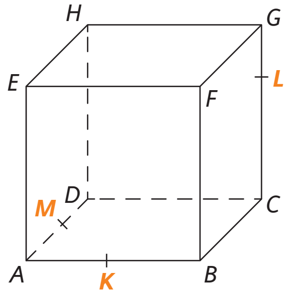

i)



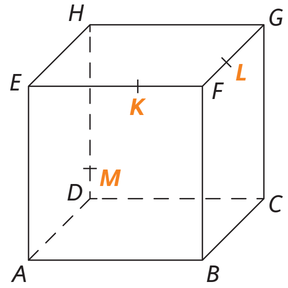

j)



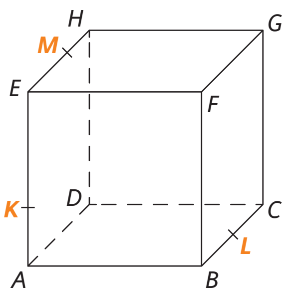

k)



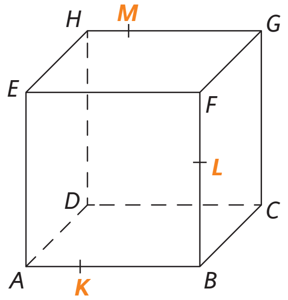

l)



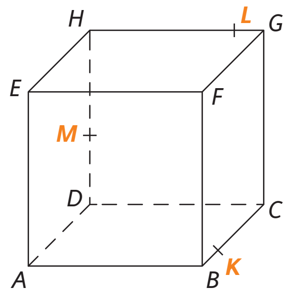
m)



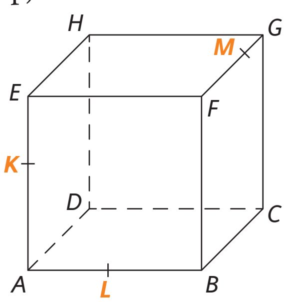

n)



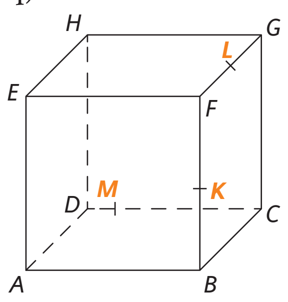

o)



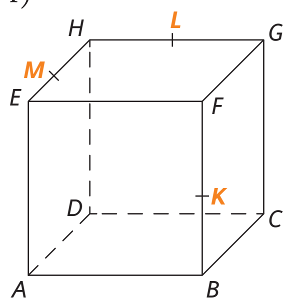

p)



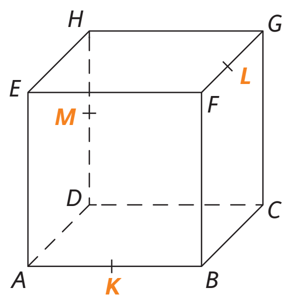

q)



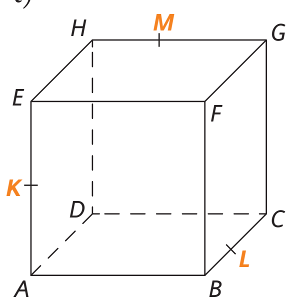

r)



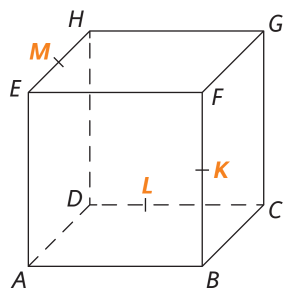

s)



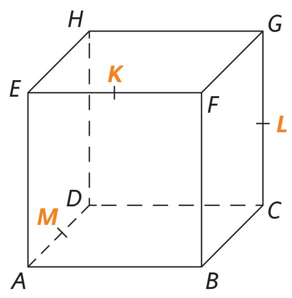

t)



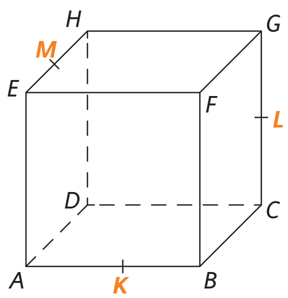

u)



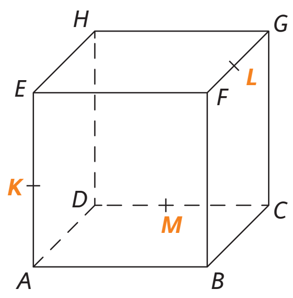

v)



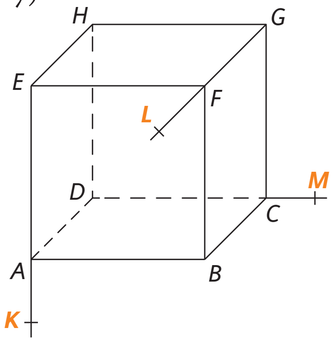

w)



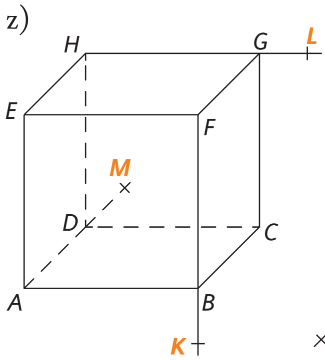

x)



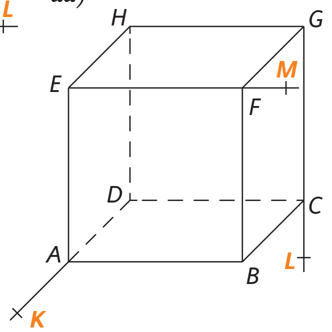
y)



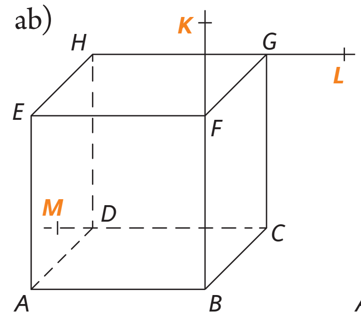

z)



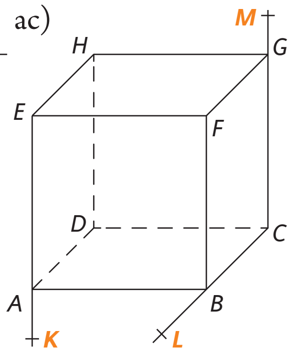

aa)



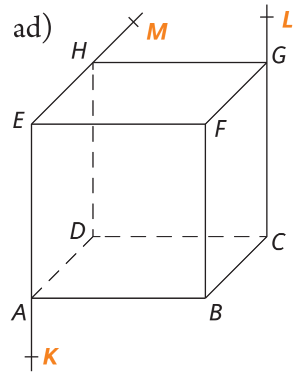

ab)



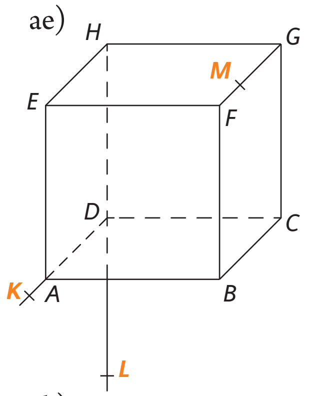

ac)



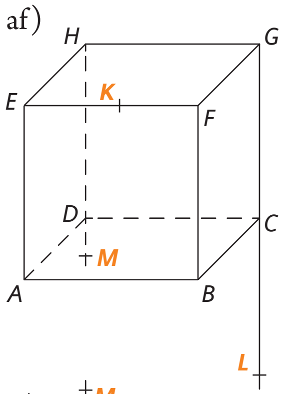

ad)



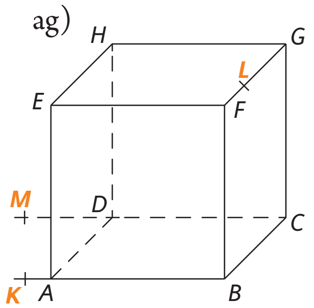

ae)



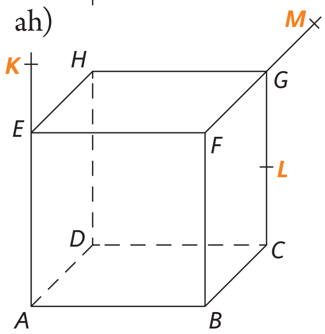

af)



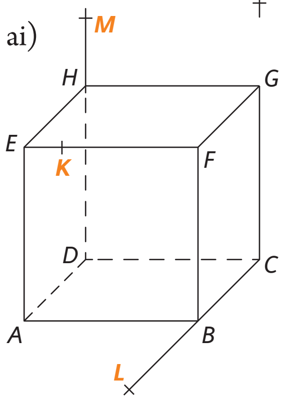

ag)



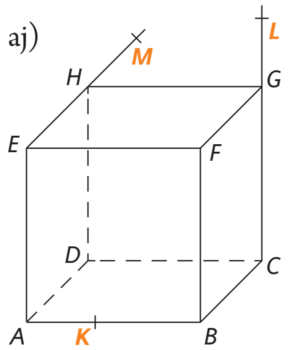

ah)



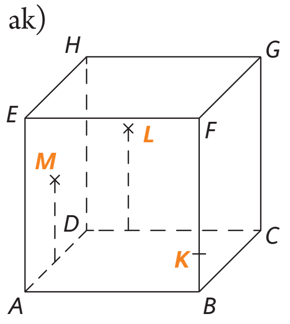

ai)



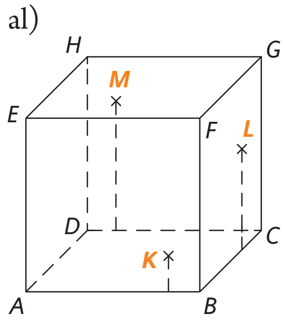

aj)



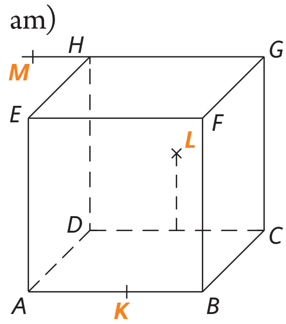
ak)




al)



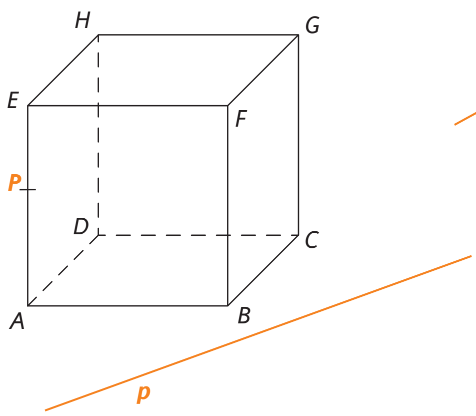

am)



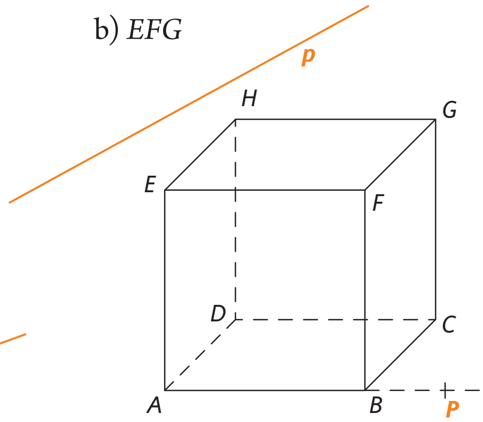

**14.**

Sestrojte řez krychle *ABCDEFGH* rovinou určenou bodem *P* a přímkou *p*, jestliže přímka *p* leží v rovině:

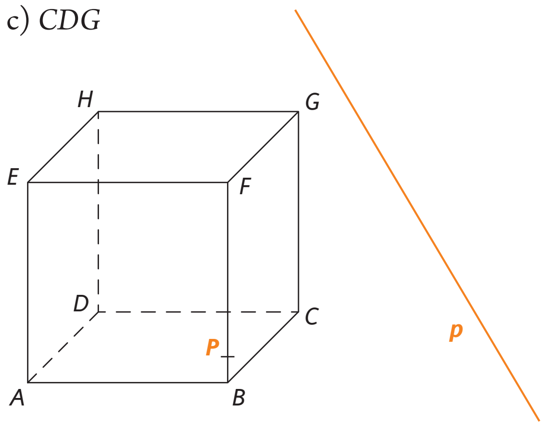
a) *ABC*




b) *EFG*



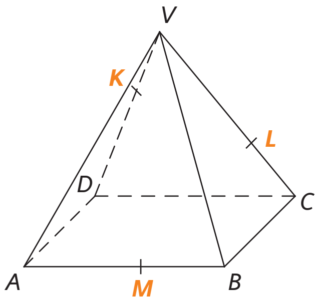

c) *CDG*



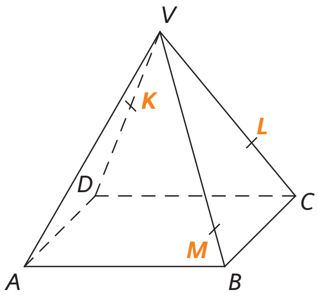
## 15.

Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu *ABCDV* rovinou *KLM:*

a)

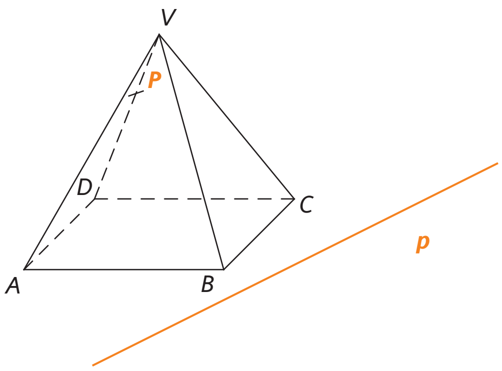



b)




## 16.

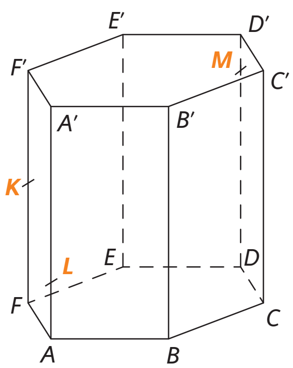
Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu *ABCDV* rovinou bodem *P* a přímkou *p*, jestliže přímka p leží v rovině *ABC*.



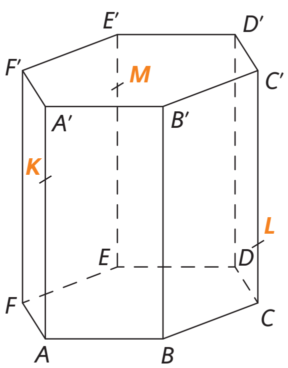

## 17.

Sestrojte řez pravidelného šestibokého hranolu *ABCDEFA′B′C′D′E′F′* rovinou *KLM*:

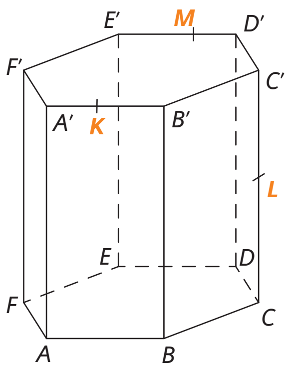
a)



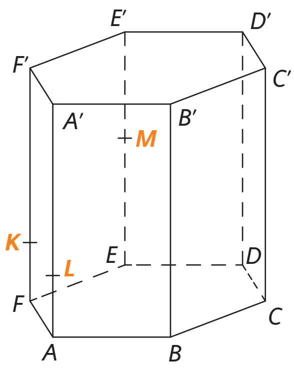

b)



c)



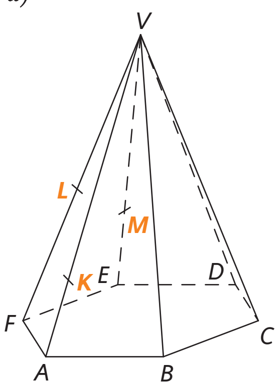

d)



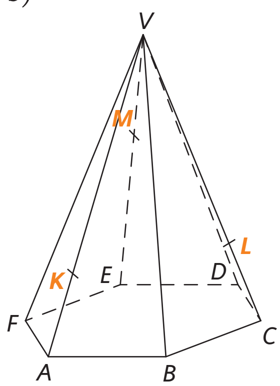

**18.**

Sestrojte řez pravidelného šestibokého jehlanu *ABCDEFV* rovinou *KLM*:

a)



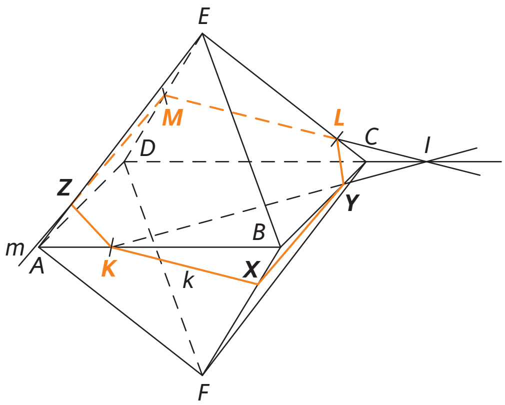

b)




**19.**

Sestrojte řez pravidelného osmistěnu *ABCDEF* rovinou *KLM*.

*Řešení:*

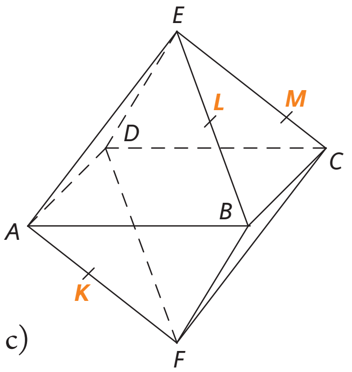


1. Body $M,L$ leží v téže rovině stěny $DCE$ a podle pravidla č. 1 tvoří stranu řezu.
2. Roviny $ABF$ a $DCE$ jsou rovnoběžné, takže podle pravidla č. 2 vedeme bodem $K$ rovnoběžku $k$ s $ML$.
3. Průnikem přímky $k$ a hrany $BF$ je bod $X$.
4. Dále už nemůžeme využít žádné pravidlo, musíme tedy sestrojit průsečík přímky $LM$ s rovinou podstavy $ABC$. V tomto případě průsečík $I$ sestrojíme jako průsečík přímky $LM$ s hranou $CD$, protože $CD$ je průsečnice rovin $ABC$ a $DCE$.
5. Sestrojíme přímku $KI$ a její průsečík s hranou $BC$ je další bod řezu $Y$.
6. Spojíme $LY$ a $XY$.
7. Podle pravidla č. 2 bodem $M$ vedeme rovnoběžku $m$ s přímkou $XY$, neboť roviny $BCF$ a $ADE$ jsou rovnoběžné a průsečík přímky $m$ s hranou $AE$ je bod řezu $Z$.
8. Spojíme $ZK$.
9. Řez je určen body $KXYLMZ$.

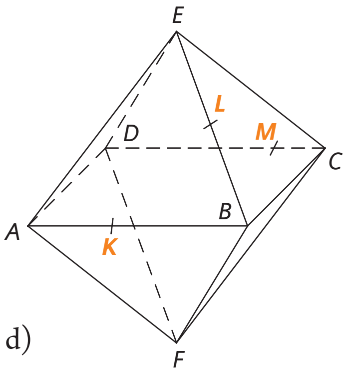
## 20.

Sestrojte řez pravidelného osmistěnu $ABCDEF$ rovinou $KLM$:

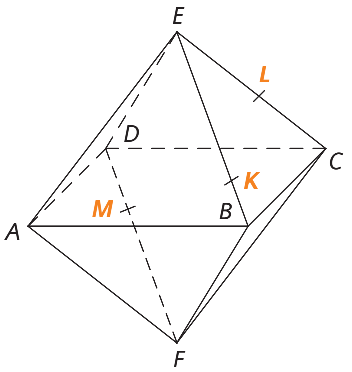
a)



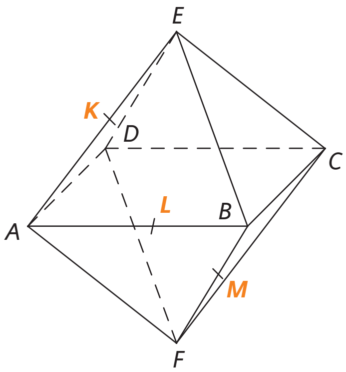

b)




c)

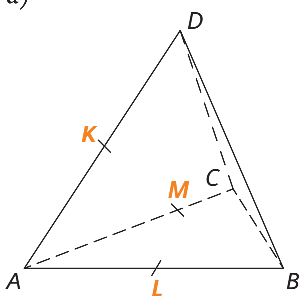


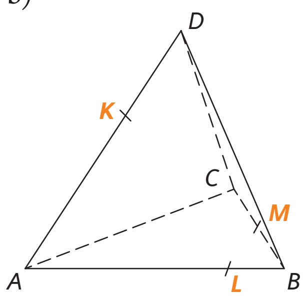

d)



**21.**

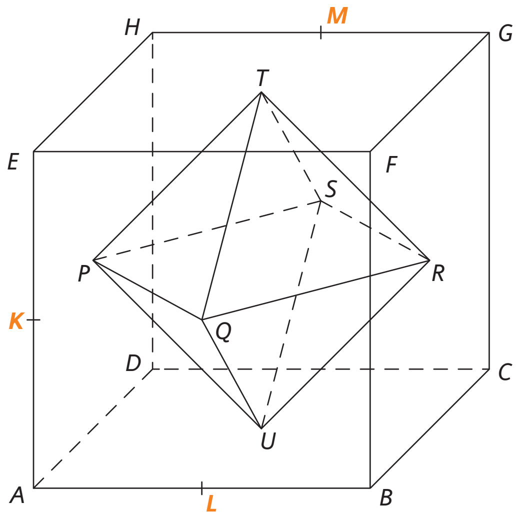
Sestrojte řez pravidelného čtyřstěnu *ABCD* rovinou *KLM*:

a) 


b) 


**22.**

Sestrojte řez krychle *ABCDEFGH* a současně řez pravidelného osmistěnu *PQRSTU* rovinou *KLM*.

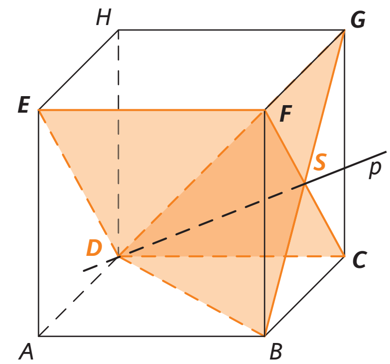



## B.4 Vzájemná poloha dvou rovin

**23.**

Rozhodněte o vzájemné poloze dvou rovin *CEF* a *BDG*, je-li dána krychle *ABCDEFGH*, v případě různoběžných rovin sestrojte jejich průsečnici.

*Řešení:*

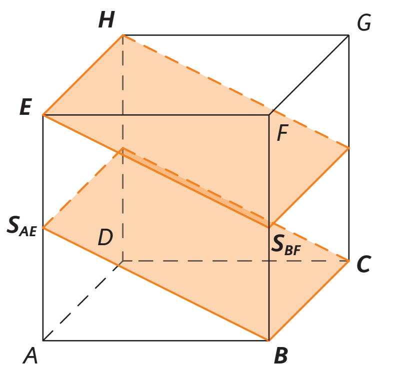



Roviny $CEF$ a $BDG$ jsou různé a mají společný bod $D$, tedy průsečnice těchto rovin musí procházet bodem $D$. Dále platí pro různoběžné přímky $BG$ a $CF$, které leží v rovině stěny krychle $BCF$, že $BG$ leží v rovině $BDG$ a $CF$ leží v rovině $CEF$, proto bod $S = BG \cap CF$ náleží současně oběma rovinám a je dalším bodem průsečnice $p$. Protože je $D \neq S$, je přímka $p = DS$ hledanou průsečnicí rovin $CEF$ a $BDG$.

**24.**

Rozhodněte o vzájemné poloze dvou rovin $BCS_{AE}$ a $EHS_{BF}$, je-li dána krychle $ABCDEFGH$, v případě různoběžných rovin určete jejich průsečnici.

*Řešení:*




Ukážeme, že rovina $EHS_{BF}$ je rovnoběžná s rovinou $BCS_{AE}$. V rovině $EHS_{BF}$ si vybere např. přímky $EH$ a $ES_{BF}$ a ukážeme, že tyto přímky jsou rovnoběžné s rovinou $BCS_{AE}$. Přímka $EH$ je rovnoběžná s přímkou $S_{AE}S_{DH}$ a přímka $ES_{BF}$ je rovnoběžná s přímkou $S_{AE}B$, tedy v rovině $EHS_{BF}$ existují dvě různoběžné přímky rovnoběžné s rovinou $BCS_{AE}$, a proto jsou roviny $BCS_{AE}$ a $EHS_{BF}$ rovnoběžné.

**25.**
Rozhodněte o vzájemné poloze dvou rovin, je-li dána krychle $ABCDEFGH$, v případě různoběžných rovin určete jejich průsečnici:
a) $BFS_{AC}$, $HFS_{EH}$
b) $AFH$, $BDG$
c) $EFG$, $BCS_{AE}$
d) $ABS_{DH}$, $S_{AB}S_{CG}S_{CH}$
e) $ACE$, $AFH$
f) $EGS_{BC}$, $BHF$
g) $ABG$, $HFS_{AD}$
h) $ABC$, $FHS_{AE}$
i) $ABC$, $AFH$
j) $ACF$, $CGS_{AB}$
k) $ACH$, $S_{AB}S_{BC}S_{EF}$
l) $AS_{EF}S_{EH}$, $CDS_{FG}$
m) $BEG$, $S_{AB}S_{BC}S_{CG}$
n) $AS_{EF}S_{EH}$, $CS_{FG}S_{HG}$
o) $BCS_{AE}$, $BS_{EF}S_{FG}$
p) $ACS_{DH}$, $BCS_{EF}$

**26.**
Rozhodněte o vzájemné poloze dvou rovin, je-li dán jehlan $ABCDV$, v případě různoběžných rovin určete jejich průsečnici:
a) $BVS_{AD}$, $DS_{BC}S_{CV}$
b) $ACV$, $BDS_{CV}$
c) $BCV$, $ADV$
d) $ACS_{CV}$, $VS_{AD}S_{BC}$
e) $BDV$, $S_{BC}S_{CV}K$, $K \in AD \wedge |DK| = 3|AK|$
f) $ABC$, $S_{CV}S_{AV}K$, $K \in BV \wedge |VK| = 3|BK|$
g) $BCV$, $S_{AV}CK$, $K \in AB \wedge |AK| = 3|BK|$

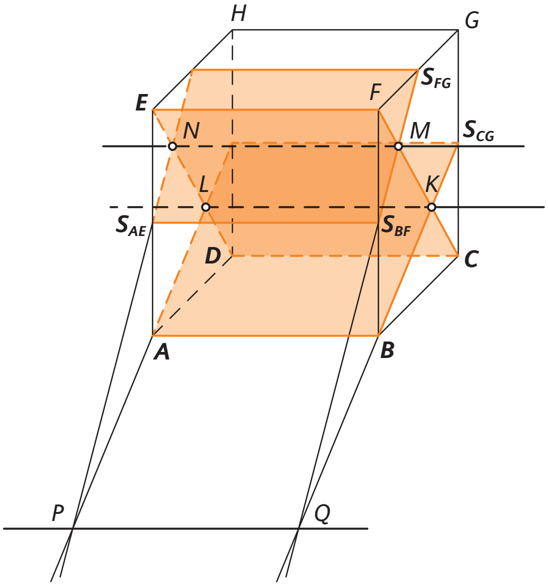
**27.**
Rozhodněte o vzájemné poloze dvou rovin $BDS_{AF}$ a $S_{AE}S_{BE}S_{CE}$, je-li dán pravidelný osmistěn $ABCDEF$.

## B.5 Vzájemná poloha tří rovin

**28.**

Je dána krychle *ABCDEFGH*. Rozhodněte o vzájemné poloze tří rovin *CDE*, $S_{AE}S_{BF}S_{FG}$, $ABS_{CG}$.

*Řešení:*




Roviny jsou navzájem různoběžné, ale protínají se v navzájem rovnoběžných přímkách. Průsečnicí rovin *CDE* a $ABS_{CG}$ je přímka *KL*, kde $K = BS_{CG} \cap CF$, $L = AS_{DH} \cap DE$. Průsečnicí rovin *CDE* a $S_{AE}S_{BF}S_{FG}$ je přímka *MN*, kde $M = S_{BF}S_{FG} \cap CF$, $N = S_{AE}S_{EH} \cap DE$. Průsečnicí rovin $S_{AE}S_{BF}S_{FG}$ a $ABS_{CG}$ je přímka *PQ*, kde $P = AS_{DH} \cap S_{AE}S_{EH}$, $Q = BS_{CG} \cap S_{BF}S_{FG}$. Přímky *KL*, *MN*, *PQ* jsou navzájem rovnoběžné.

**29.**

Je dána krychle *ABCDEFGH*. Rozhodněte o vzájemné poloze tří rovin:

a) *ECG*, *BDF*, *ABH*

b) *BCE*, *ADF*, $S_{AE}S_{CG}S_{AF}$

c) *ADE*, $BCS_{EF}$, $S_{AF}S_{CG}S_{BF}$

d) *BDG*, *BDE*, $S_{EF}S_{FG}S_{EH}$

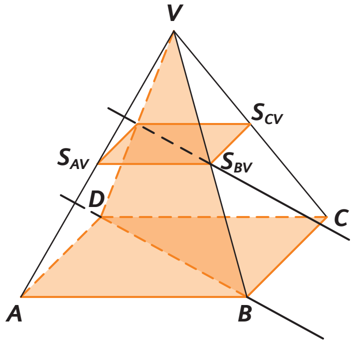
e) *BDH*, $S_{AB}S_{AD}S_{AE}$, $S_{FG}S_{GH}S_{CG}$

f) *AGH*, $S_{BF}S_{CG}S_{GH}$, $S_{AE}S_{AB}S_{CD}$

**30.**

Je dána pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Rozhodněte o vzájemné poloze tří rovin $ABC$, $BDV$, $S_{AV}S_{BV}S_{CV}$.

*Řešení:*




Roviny $ABC$ a $S_{AV}S_{BV}S_{CV}$ jsou navzájem rovnoběžné, protože $AB \parallel S_{AV}S_{BV}$ a $BC \parallel S_{BV}S_{CV}$, tedy třetí rovina $BDV$ protíná tyto dvě rovnoběžné roviny v navzájem rovnoběžných přímkách.

**31.**

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Rozhodněte o vzájemné poloze tří rovin:

a) $ACV$, $BDV$, $S_{AV}S_{BV}S_{CV}$

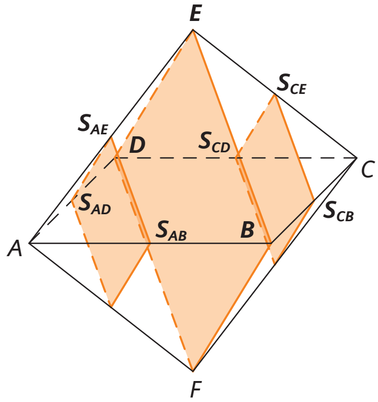
b) $ACV$, $S_{AB}S_{BC}S_{BV}$, $S_{AD}S_{CD}S_{DV}$

c) $DBV$, $S_{AB}S_{AD}V$, $S_{BC}S_{CD}V$

**32.**

Je dán pravidelný osmistěn $ABCDEF$. Rozhodněte o vzájemné poloze tří rovin $BDE$, $S_{AB}S_{AD}S_{AE}$, $S_{CB}S_{CD}S_{CE}$.

*Řešení:*



Roviny jsou navzájem rovnoběžné, protože $S_{AD}S_{AE} \parallel DE \parallel S_{CD}S_{CE}$ a $S_{AE}\,S_{AB} \parallel BE \parallel S_{CB}S_{CE}$.

**33.**

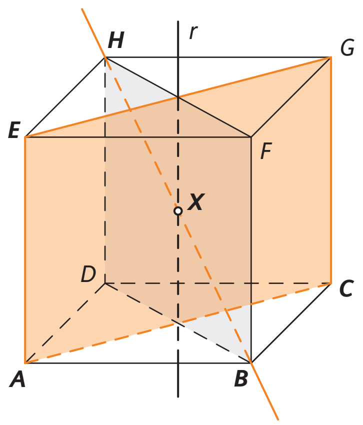
Je dán pravidelný osmistěn *ABCDEF*. Rozhodněte o vzájemné poloze tří rovin:
a) *ABC, BEF, ACE*
b) $ABS_{CE}$, $CDS_{AF}$, $S_{AB}S_{CD}E$

## B.6 Vzájemná poloha přímky a roviny

**34.**

Je dána krychle *ABCDEFGH*. Určete průsečík přímky *BH* s rovinou *ACE*.

*Řešení:*




Přímkou *BH* proložíme vhodnou rovinu, v tomto případě to bude rovina *BDH*. Sestrojíme průsečnici *r* těchto rovin. Hledaný průsečík přímky *BH* a roviny *ACE* je bod *X*, který je průsečíkem přímek *BH* a *r*.

**35.**

Je dána krychle *ABCDEFGH*, rozhodněte o vzájemné poloze roviny a přímky, v případě různoběžnosti určete průsečík:
a) *EC, ABH*
b) *BF, EGC*
c) *FH, BDH*
d) $AG$, $BHS_{AB}$

## 36.

V krychli $ABCDEFGH$ jsou body $P, Q, R, S$ po řadě středy stěn $ADEH$, $ABEF$, $BCFG$, $CDGH$.

Určete vzájemnou polohu:

a) přímky $PQ$ a roviny $EFG$

b) přímky $RS$ a roviny $ABC$

c) přímky $QR$ a roviny $DHC$

d) přímky $PR$ a roviny $ABF$

## 37.

Je dána krychle $ABCDEFGH$, rozhodněte o vzájemné poloze přímky a roviny, v případě různoběžnosti určete průsečík:

a) přímky $PR$ a roviny $S_{AB}S_{DC}S_{EF}$, body $P$, $R$ jsou po řadě středy stěn $ADEH$, $BCFG$

b) přímky $KL$ a roviny $BDF$, bod $K$ leží na $AE$ a platí $|EK| = 2|AK|$, bod $L$ leží na $CG$ a platí $|GL| = 2|CL|$

c) přímky $S_{BF}S_{DH}$ a roviny $BS_{EF}S_{FG}$

d) přímky $FS_{DH}$ a roviny $S_{AB}S_{BC}S_{AE}$

## 38.

Je dána krychle ABCDEFGH. Zjistěte, zda leží:

a) přímka $KD$ v rovině $ABC$, bod $K$ leží na $BC$ a platí $|BK| = 2|CK|$

b) přímka $BH$ v rovině $ACG$

c) přímka $AD$ v rovině $AFH$

d) přímka $PR$ v rovině $ABG$, body $P$, $R$ jsou po řadě středy stěn $ADEH$, $BCFG$

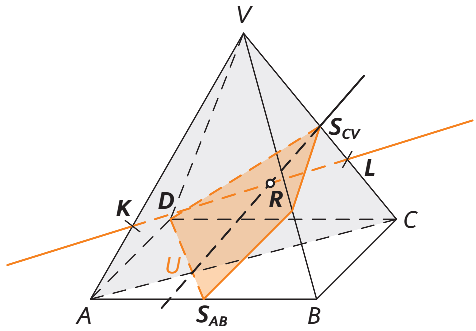
## 39.

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Zjistěte, zda body $E$, $B$ a přímka $DH$ leží v jedné rovině.

## 40.

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Sestrojte průsečík přímky $KL$ s rovinou $S_{AB}DS_{CV}$. Bod $K$ leží na $AV$ a platí $|AK| = 3|VK|$, $L$ leží na $CV$ a platí $|CL| = 3|VL|$.

*Řešení:*




1. Přímkou $KL$ proložíme vhodnou rovinu, v tomto případě to bude rovina $A_{CV}$.
2. Sestrojíme průsečnici proložené roviny $ACV$ s danou rovinou $S_{AB}DS_{CV}$. Průsečnicí těchto rovin je přímka $US_{CV}$, protože přímky $AC$ a $S_{AB}D$ leží v rovině podstavy a mají společný právě jeden bod $U$. A dalším bodem průsečnice je bod $S_{CV}$, protože leží na hraně $CV$.
3. Průsečíkem přímky $KL$ s rovinou $S_{AB}DS_{CV}$ je bod $R$, což je průsečík přímky $KL$ s průsečnicí $US_{CV}$.

**41.**

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Sestrojte průsečík přímky s rovinou:

a) přímky $CS_{AV}$ s rovinou $KLV$, $K$ leží na $AB$ a platí $|BK| = 3|AK|$, $L$ leží na $CD$ a platí $|DL| = 3|CL|$

b) přímky $VS_{AC}$ s rovinou $S_{AB}S_{CV}D$

c) přímky $VS_{AC}$ s rovinou $AS_{BC}S_{CV}$

d) přímky $CS_{AV}$ s rovinou $KLM$, $K$ leží na $AB$ a platí $|AK| = 3|BK|$, $L$ leží na $CV$ a platí $|CL| = 2|VL|$, $M$ leží na $DV$ a platí $|MV| = 3|DM|$

e) přímky $BV$ s rovinou $JKL$, $J$ leží na $AB$ a platí $|BJ| = 3|AJ|$, $K$ leží na $CV$ a platí $|VK| = 3|CK|$, $L$ leží na $DV$ a platí $|DL| = 3|LV|$

f) přímky $VS_{BC}$ s rovinou $S_{AB}S_{AV}S_{CD}$

## B.7 Průnik přímky s hranicí tělesa

Průsečík přímky a roviny získáme takto:

1. Přímkou proložíme vhodnou rovinu, která je s danou rovinou různoběžná.
2. Určíme průsečnici těchto rovin.
3. Průsečík dané přímky s průsečnicí je hledaný průsečík přímky s rovinou.

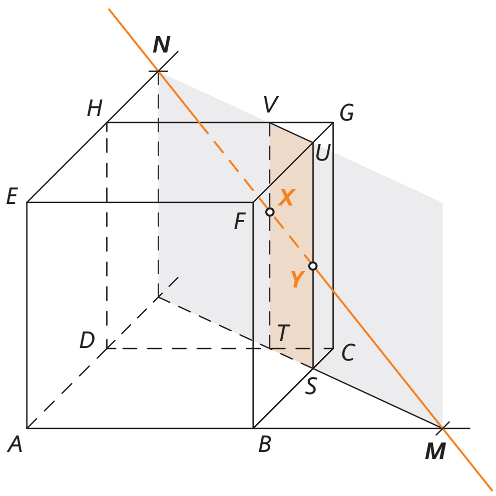
Průnik přímky s hranicí tělesa řešíme podobně jako průsečík přímky s rovinou:

1. Přímkou proložíme libovolnou vhodnou rovinu, která protne těleso a je s danou rovinou různoběžná. U hranolů prokládáme zpravidla rovinu, která je rovnoběžná s bočními hranami hranolu, tzv. **směrovou rovinu**. U jehlanů prokládáme danou přímkou zase zpravidla rovinu, která obsahuje vrchol tělesa, tzv. **vrcholovou rovinu**.
2. Sestrojíme řez tělesa touto rovinou.
3. Průsečík dané přímky s řezem je hledaný průsečík přímky s hranicí tělesa.

**42.**

Je dána krychle *ABCDEFGH*. Určete průsečíky přímky *MN* s hranicí krychle. Bod *M* leží na *AB*, bod *N* leží na *EH*

*Řešení:*




Přímkou *MN* proložíme rovinu rovnoběžnou se svislými hranami krychle (tzv. směrovou rovinu) a určíme její řez *STUV* s krychlí. Přímka *MN* protíná hranici tohoto řezu (tj. hranici krychle) v bodech *XY*.

**43.**

Je dána krychle *ABCDEFGH*. Určete průsečíky přímky *PQ* s hranicí krychle. Pro body *P*, *Q* platí:

a) $B = S_{AP}$, $H = S_{QG}$

b) *P* leží na $\rightarrow DH$ a platí $|DP| = 1{,}5|DH|$, $B = S_{QD}$

c) *P* leží na $\rightarrow CB$ a platí $|CP| = 1{,}5|BC|$, *Q* leží na $\rightarrow EH$ a platí $|EQ| = 1{,}5|EH|$

d) *P* leží na $\rightarrow FB$ a platí $|FP| = 1{,}25|BF|$, *Q* leží na $\rightarrow DH$ a platí $|DQ| = 1{,}25|\mathrm{DH}|$

**44.**

Je dán pravidelný šestiboký hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$. Určete průsečíky přímky $MN$ s hranicí hranolu. Pro body $M$, $N$ platí:

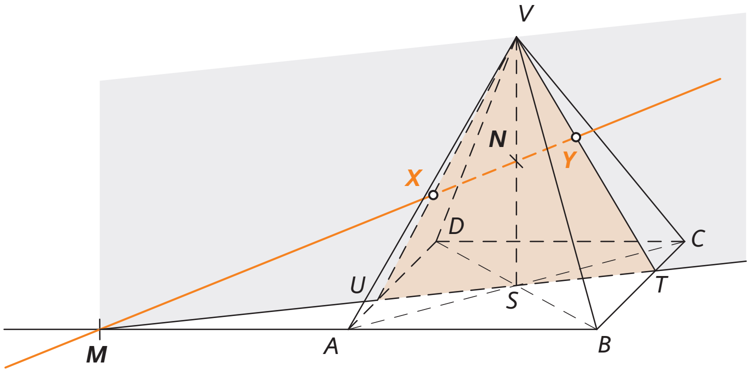
a) $F = S_{ME}$, $N$ leží na $\rightarrow B'C'$ a platí $|B'N| = 1{,}25|B'C'|$

b) $B = S_{AM}$, N leží na $\rightarrow EE'$ a platí $|EN| = 1{,}25|EE'|$

**45.**

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Určete průsečíky přímky $MN$ s hranicí jehlanu. Pro body $M$, $N$ platí: $A = S_{MB}$, $N = S_{SV}$, bod S je střed podstavy $ABCD$.

*Řešení:*




Přímkou $MN$ proložíme rovinu, která prochází vrcholem jehlanu ( tzv. vrcholovou rovinu) a určíme její řez $UTV$ s jehlanem. Přímka $MN$ protíná hranici tohoto řezu (tj. hranici jehlanu) v bodech $XY$.

**46.**

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Určete průsečíky přímky $PQ$ s hranicí jehlanu. Pro body $P$, $Q$ platí:

a) $P = S_{DV}$, $B = S_{AQ}$

b) $P$ leží na $\rightarrow VB$ a platí $|VP| = 1{,}5|VB|$, $Q = S_{DV}$

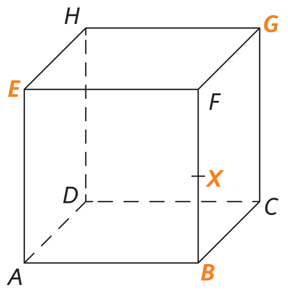
c) $P = S_{AV}$, $Q$ leží na $\rightarrow DC$ a platí $|DQ| = 1{,}5|DC|$

**47.**

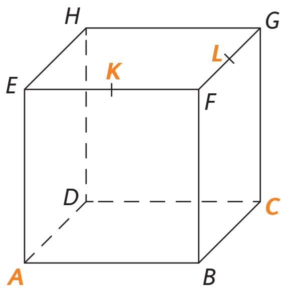
Je dán pravidelný osmistěn $ABCDEF$. Určete průsečíky přímky $MN$ s hranicí osmistěnu. Pro body $M$, $N$ platí: $M$ leží na $\rightarrow AB$ a platí $|AM| = 1{,}5|AB|$, $N$ leží na $\rightarrow FD$ a platí $|FN| = 1{,}25|FD|$.

# VÝSLEDKY ÚLOH

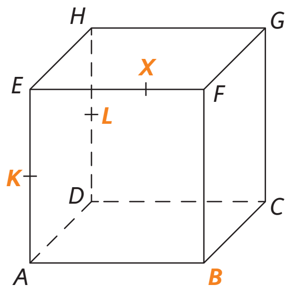
**2.** a) neleží



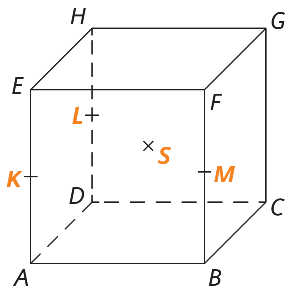

b) leží



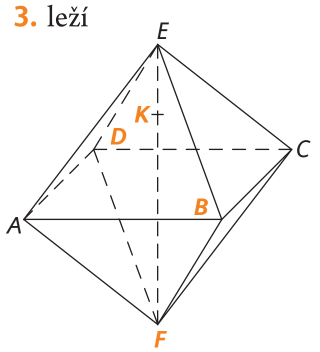

c) neleží



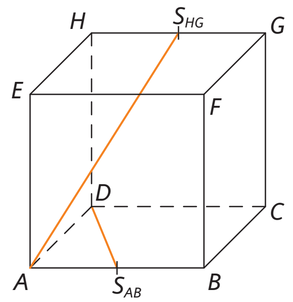

d) leží



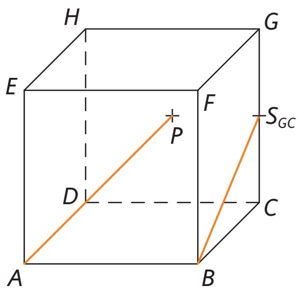

**3.** leží



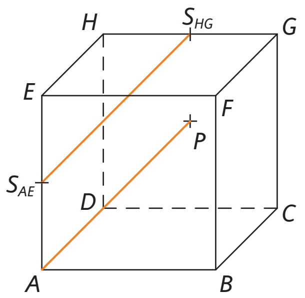

**5.** a) mimoběžky



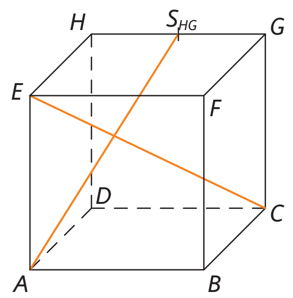

b) různoběžky



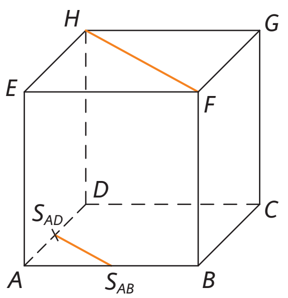

c) rovnoběžky



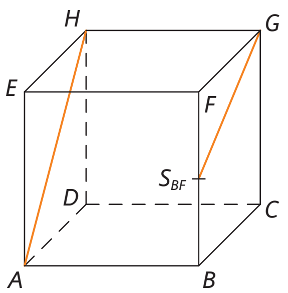

d) mimoběžky



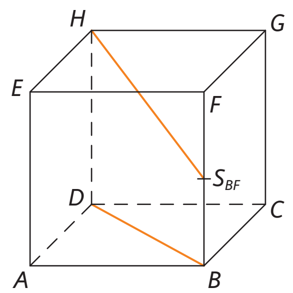

e) rovnoběžky



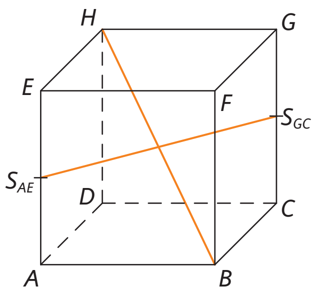

f) mimoběžky



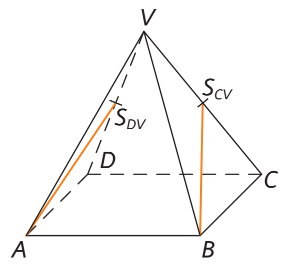

g) různoběžky



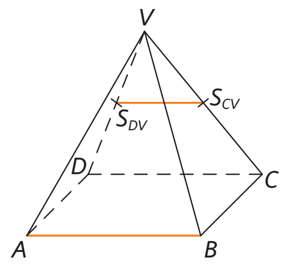
h) různoběžky



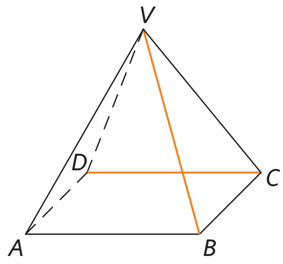

**7.** a) různoběžky



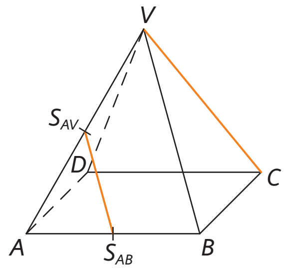

b) rovnoběžky



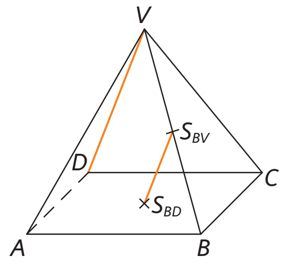

c) mimoběžky



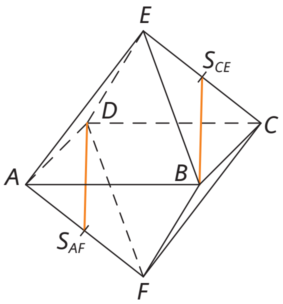

d) mimoběžky



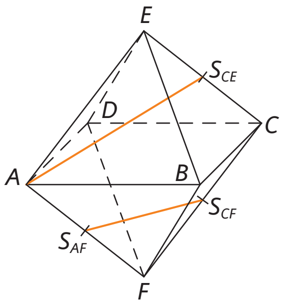

e) rovnoběžky



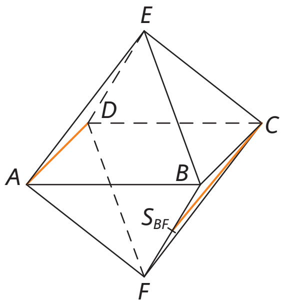

**9.** a) rovnoběžky



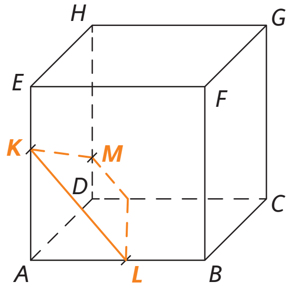

b) různoběžky



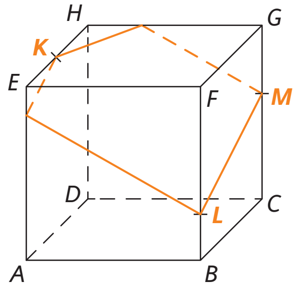

c) mimoběžky



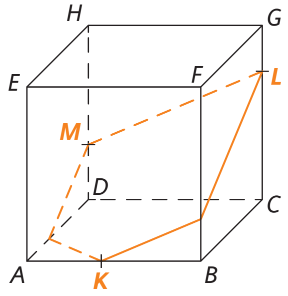

**13.** a)



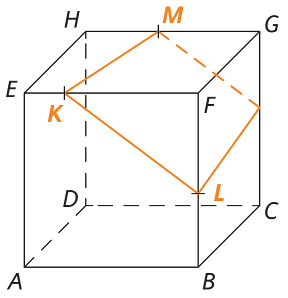

b)



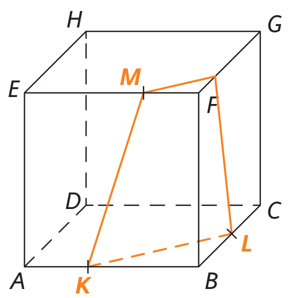

c)



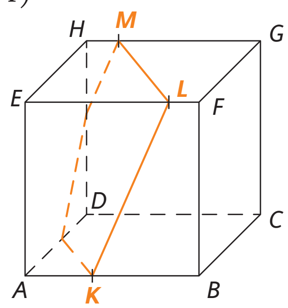
d)



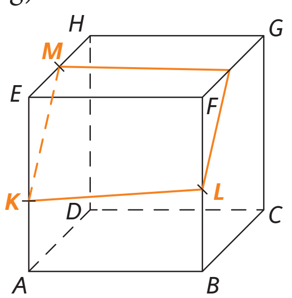

e)



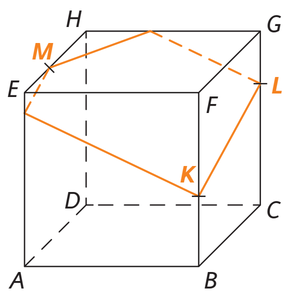

f)



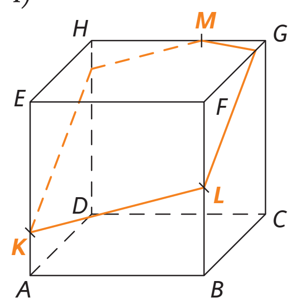

g)



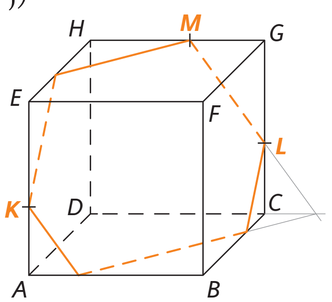

h)



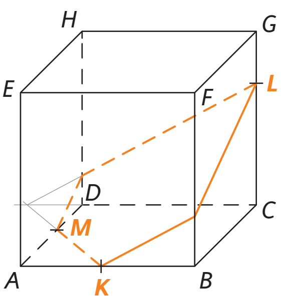

i)



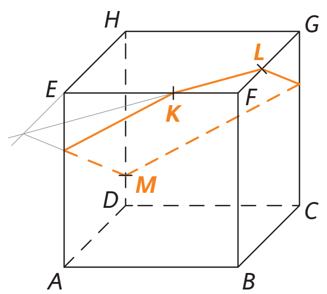

j)



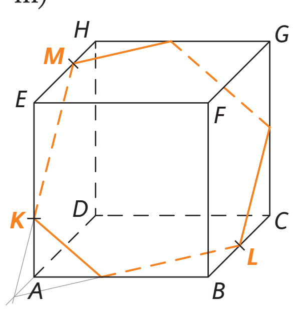

k)



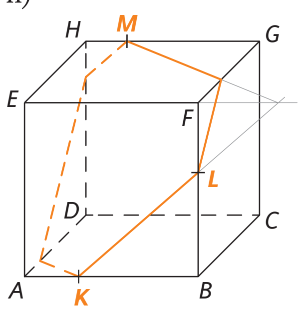

l)



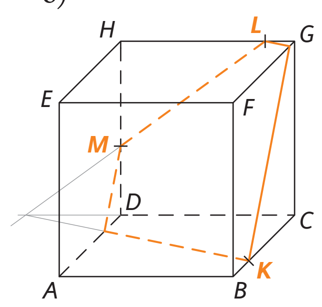

m)



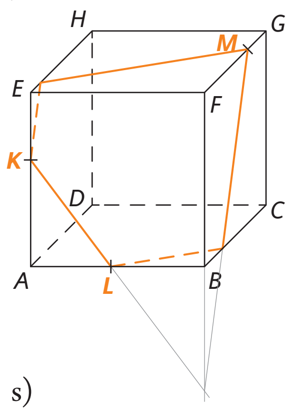

n)



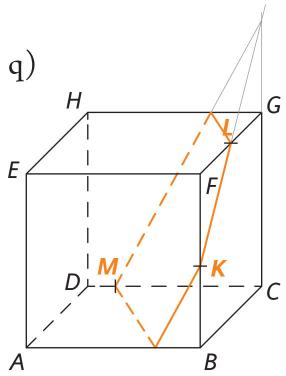

o)



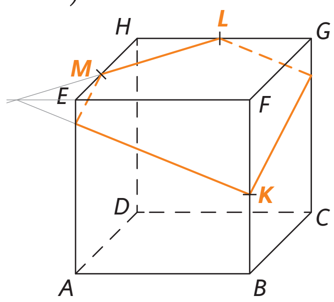
p)


H
G
M
E
F
K
D
C
A
L
B

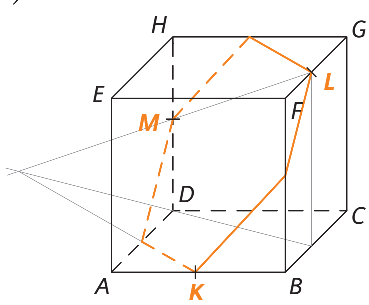
q)


H
G
L
E
F
M
K
D
C
A
B

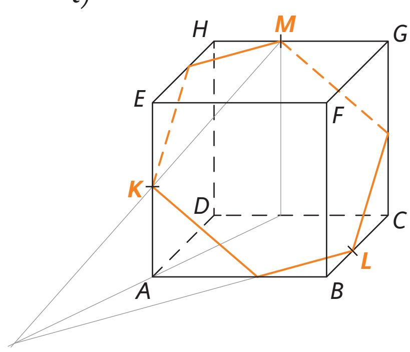
r)


H
L
G
M
E
F
K
D
C
A
B

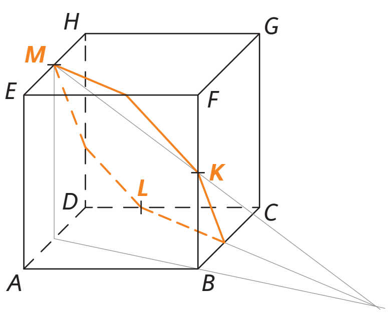
s)


H
G
E
L
M
F
D
C
A
K
B

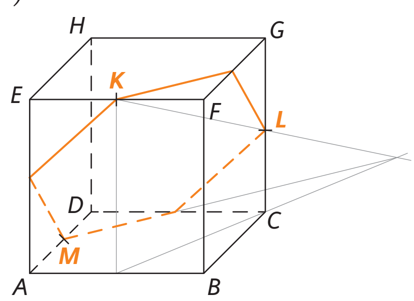
t)


H
M
G
E
F
K
D
C
L
A
B

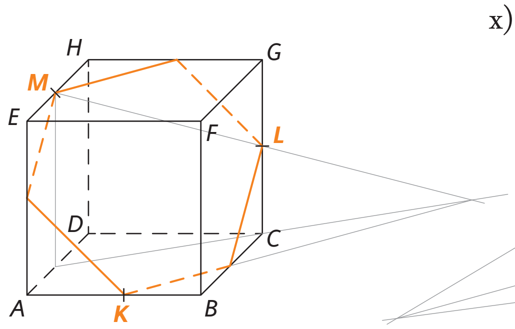
u)


H
G
M
E
F
K
L
D
C
A
B

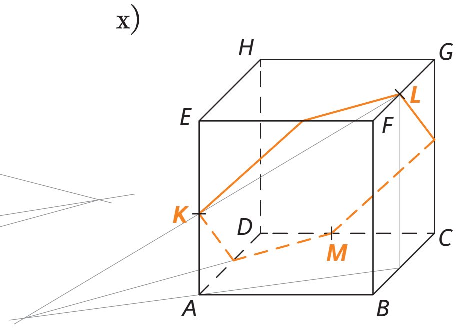
v)


H
G
E
K
F
L
D
C
M
A
B

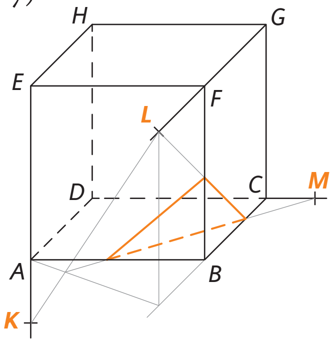
w)


H
G
M
E
F
L
D
C
A
K
B

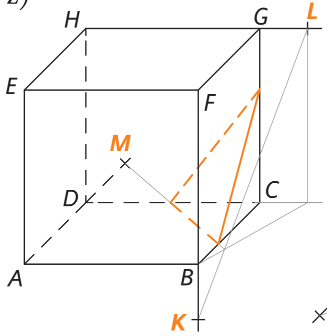
x)


H
G
E
L
F
K
D
C
M
A
B

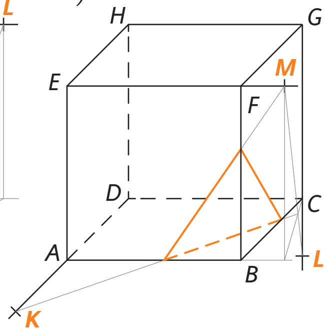
y)



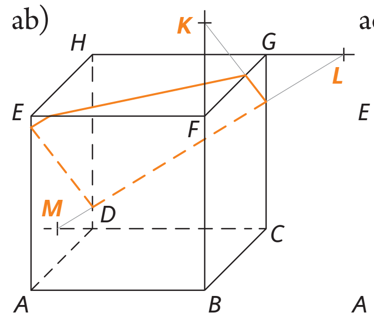

z)



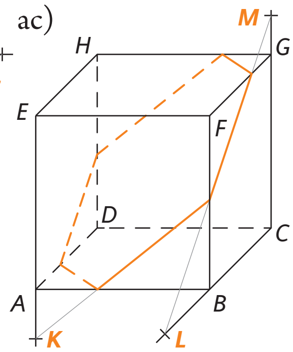

aa)



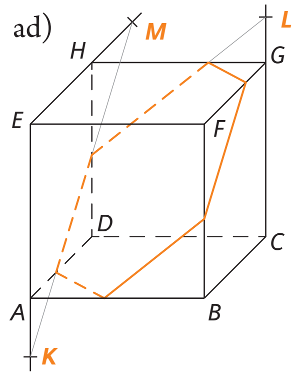

ab)



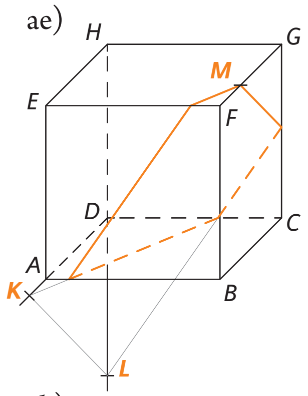

ac)



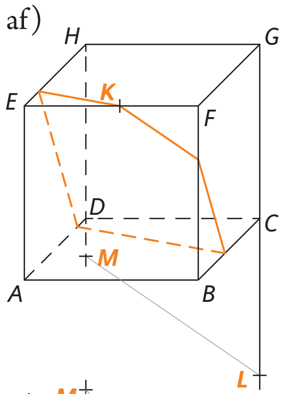

ad)



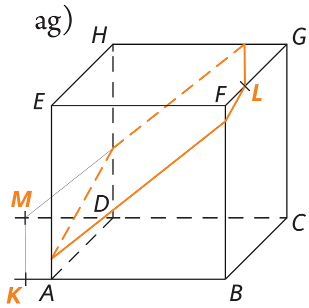

ae)



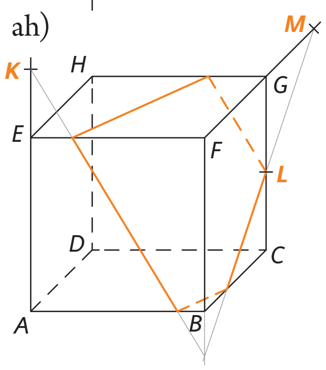

af)



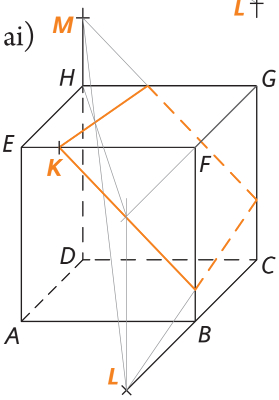

ag)



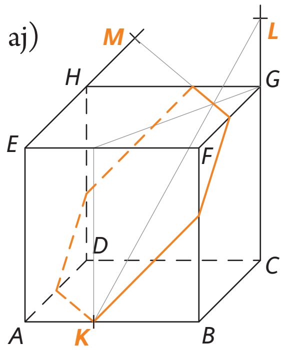

ah)



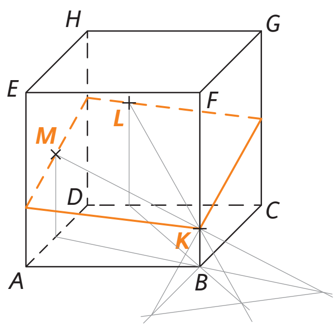

ai)



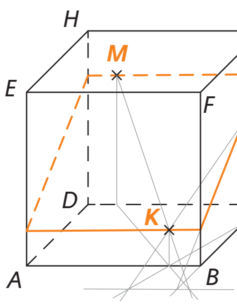

aj)



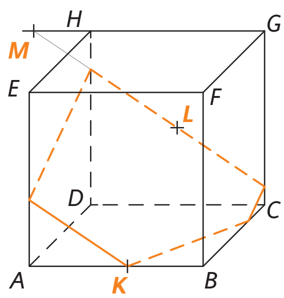
ak)



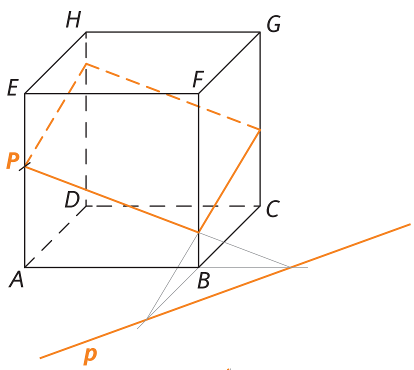

al)



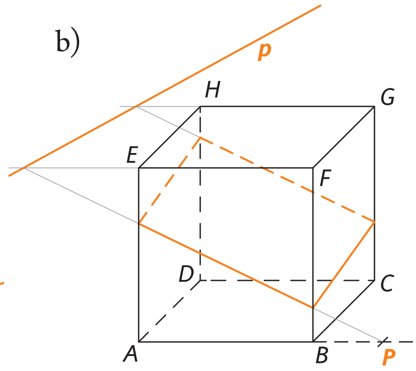

am)



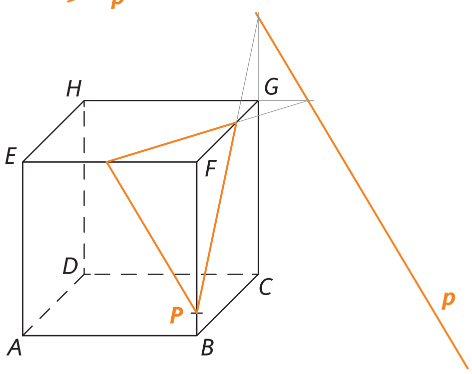

**14.** a)



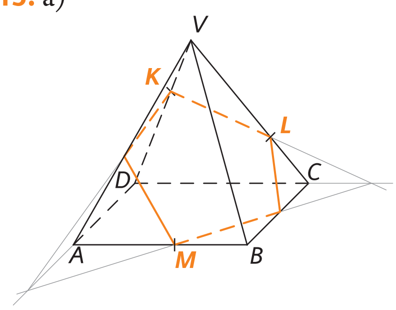

b)



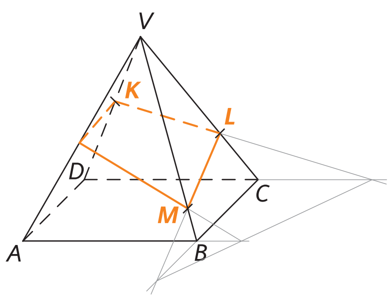

c)



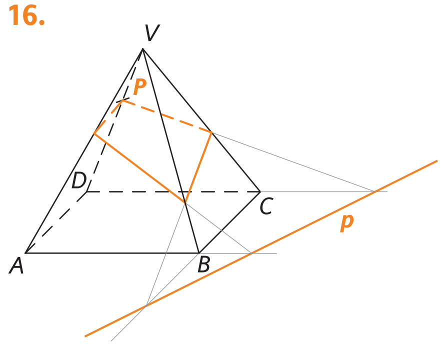

**15.** a)



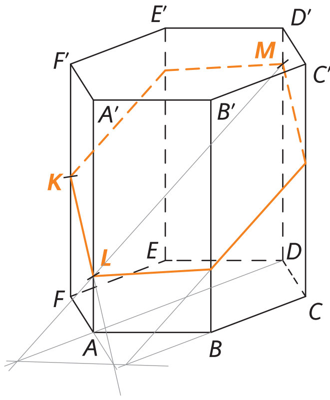

b)



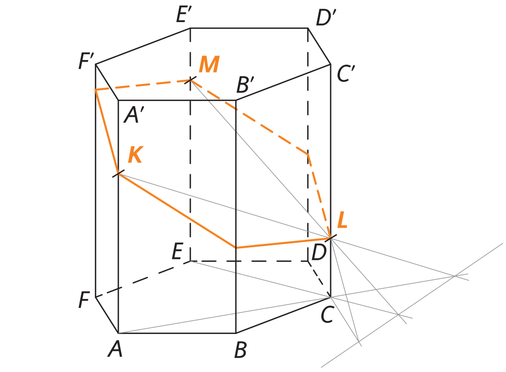

**16.**



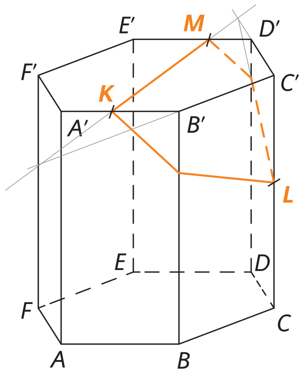
**17.** a)


E′
D′
F′
M
C′
A′
B′
K
L
E
D
F
C
A
B

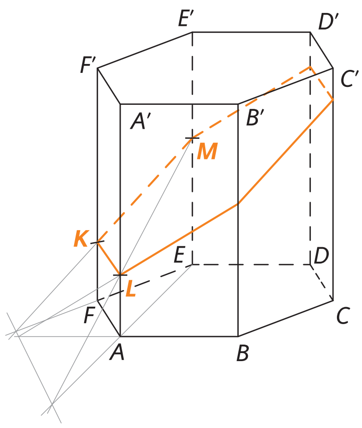
b)


E′
D′
F′
M
C′
B′
A′
K
L
E
D
F
C
A
B

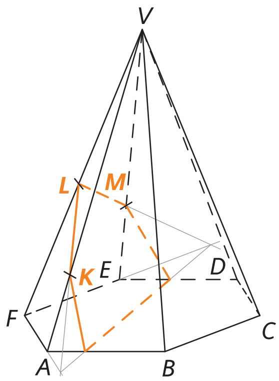
c)


E′
M
D′
F′
K
C′
A′
B′
L
E
D
F
C
A
B

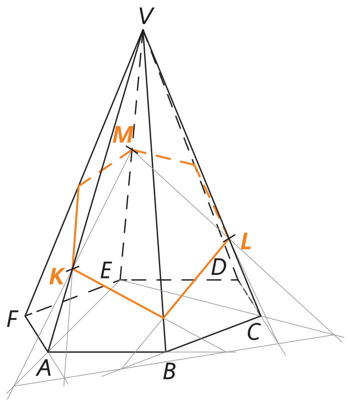
d)


E′
D′
F′
C′
A′
B′
M
K
E
D
L
F
C
A
B

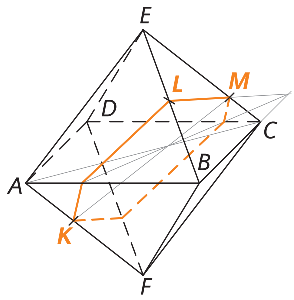
**18.** a)


V
L
M
K
E
D
F
C
A
B

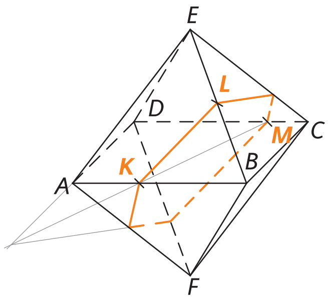
b)


V
M
L
K
E
D
F
C
A
B

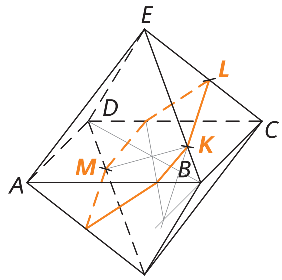
**20.** a)



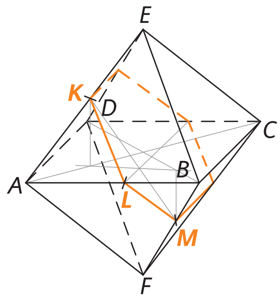

b)



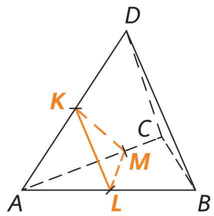

c)



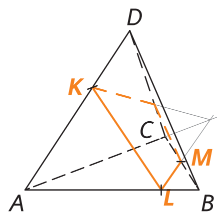

d)



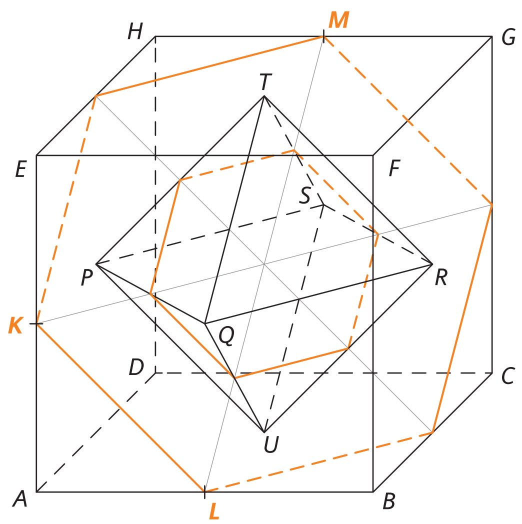

**21.** a)



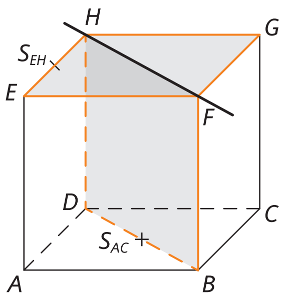

b)



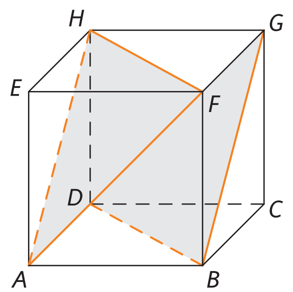

**22.**



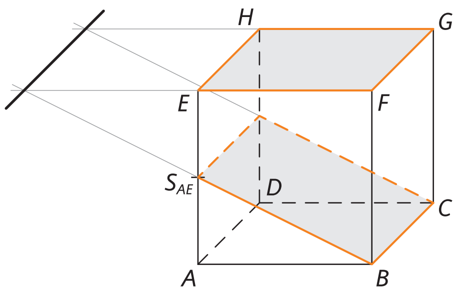
**25.** a) různoběžné: HF



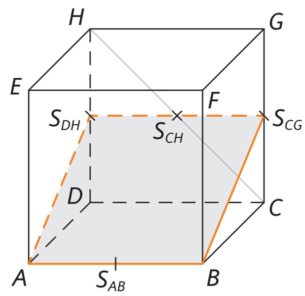

b) rovnoběžné



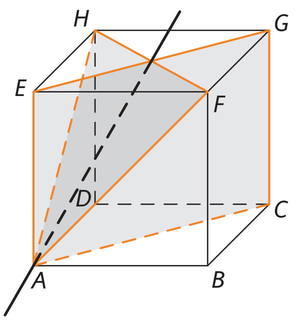

c) různoběžné



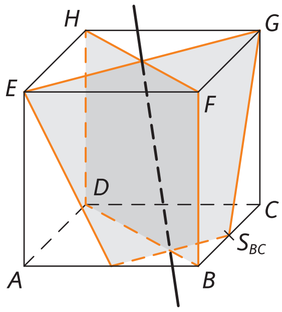

d) splývají



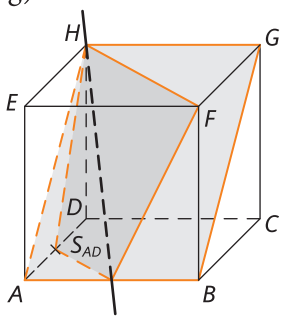

e) různoběžné



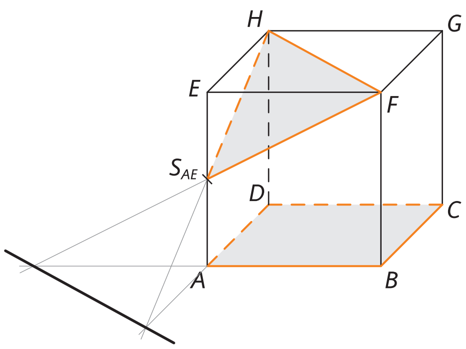

f) různoběžné



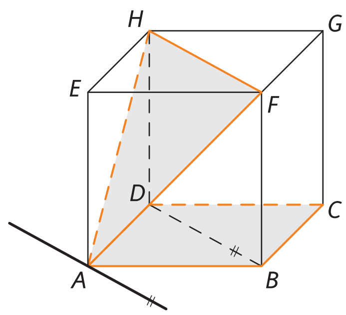

g) různoběžné



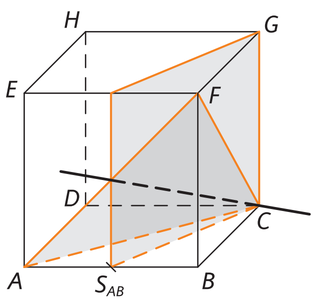

h) různoběžné



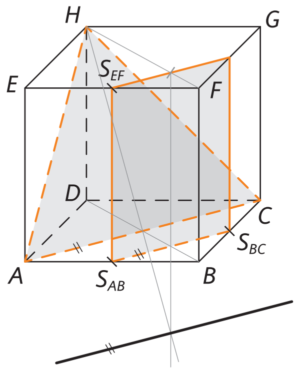

i) různoběžné



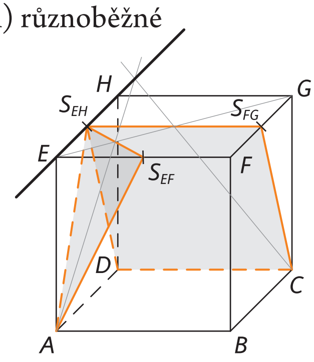
j) různoběžné



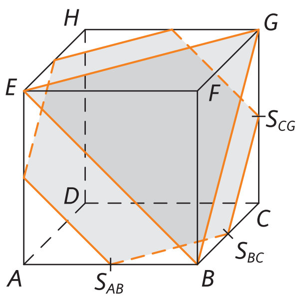

k) různoběžné



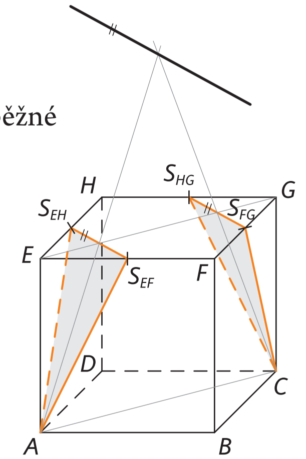

l) různoběžné



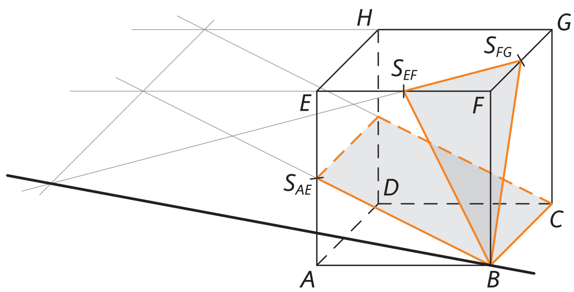

m) rovnoběžné



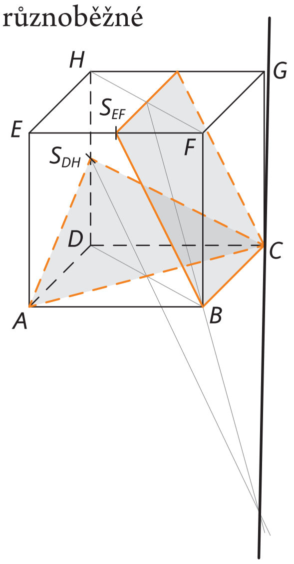

n) různoběžné



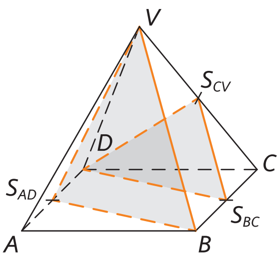

o) různoběžné



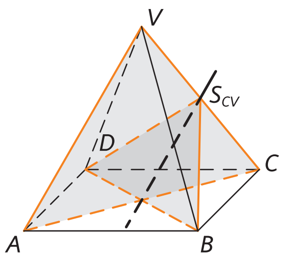

p) různoběžné



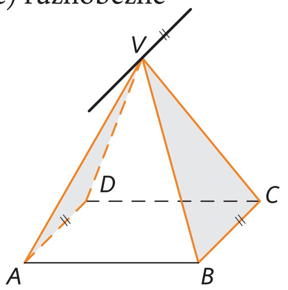
**26.** a) rovnoběžné



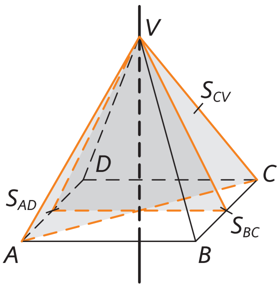

b) různoběžné



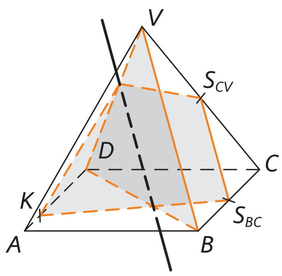

c) různoběžné



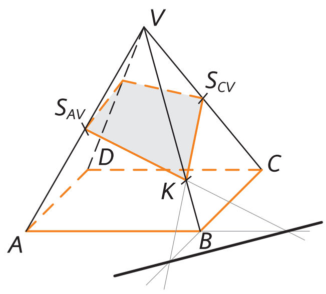

d) různoběžné



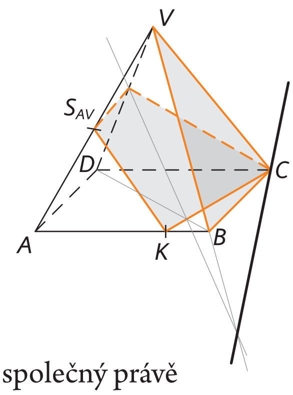

e) různoběžné



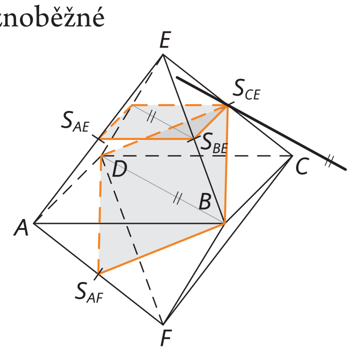

f) různoběžné



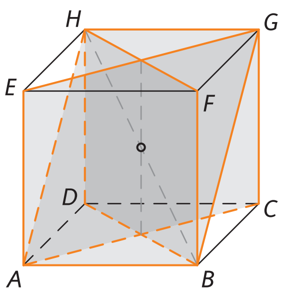

g) různoběžné



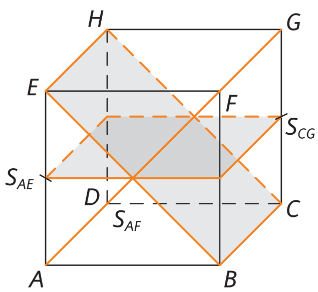

**27.** různoběžné



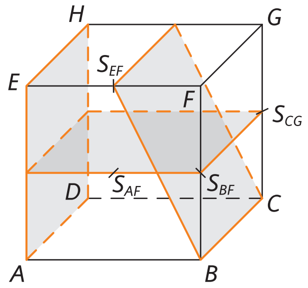

**29.** a) společný právě jeden bod



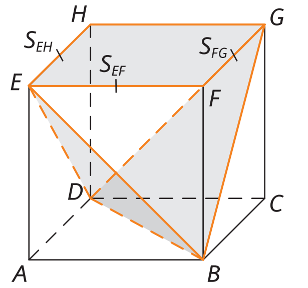

b) protínají se v jedné přímce



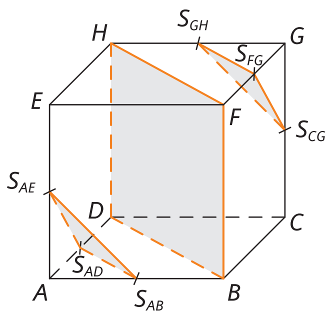
c) protínají se ve třech navzájem rovnoběžných přímkách



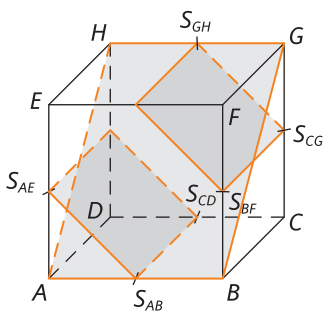

d) protínají se ve třech navzájem rovnoběžných přímkách



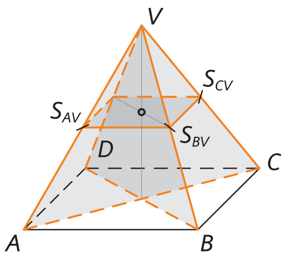

e) roviny $S_{AB}S_{AD}S_{AE}$ a $S_{FG}S_{GH}S_{CG}$ jsou navzájem rovnoběžné, tedy třetí rovina je protíná ve dvou navzájem rovnoběžných přímkách



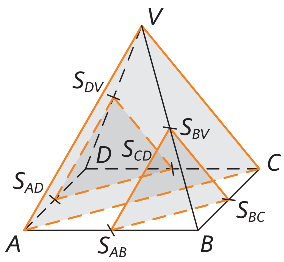

f) roviny $S_{BF}S_{CG}S_{GH}$ a $S_{AE}S_{AB}S_{CD}$ jsou navzájem rovnoběžné, tedy třetí rovina je protíná ve dvou navzájem rovnoběžných přímkách



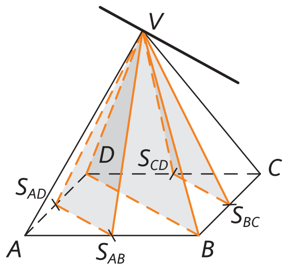

**31.** a) společný právě jeden bod



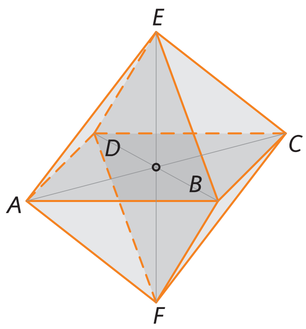

b) navzájem rovnoběžné



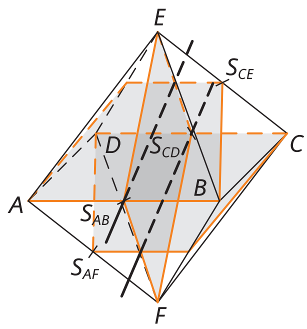

c) protínají se v jedné přímce



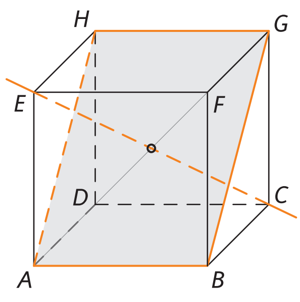
**32.** a) společný právě jeden bod, a to střed



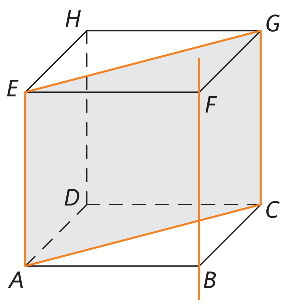

b) roviny $ABS_{CE}$ a $CDS_{AF}$ jsou navzájem rovnoběžné, tedy třetí rovina je protíná ve dvou navzájem rovnoběžných přímkách



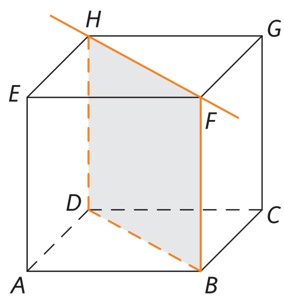

**35.** a) různoběžné



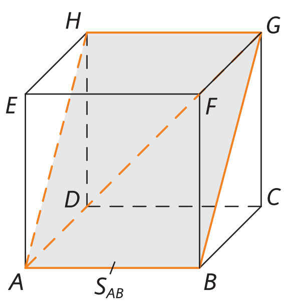

b) rovnoběžné



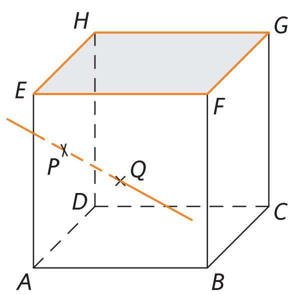

c) $FH \subset BDH$



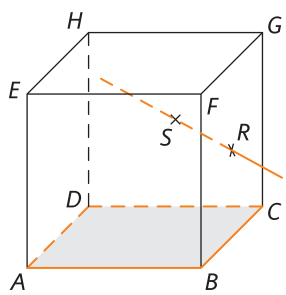

d) $AG \subset BHS_{AB}$



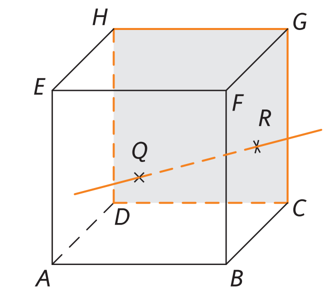

**36.** a) rovnoběžné



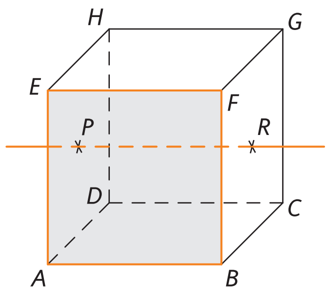

b) rovnoběžné



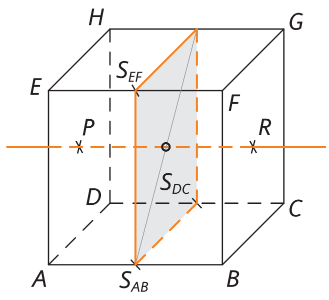
c) různoběžné



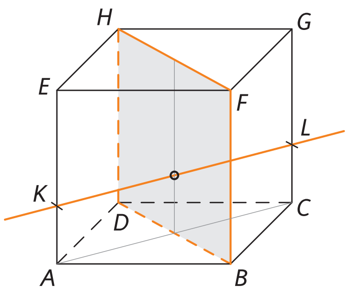

d) rovnoběžné



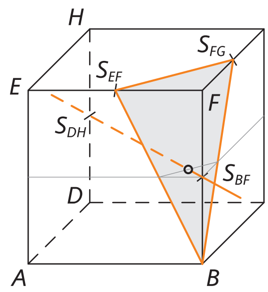

**37.** a) různoběžné



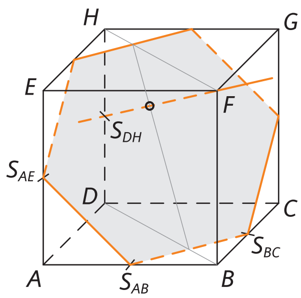

b) různoběžné



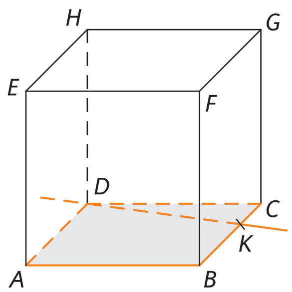

c) rovnoběžné



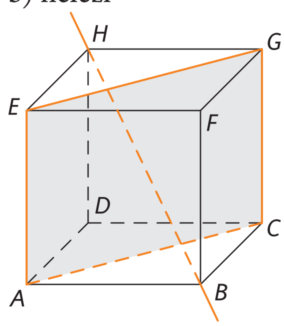

d) různoběžné



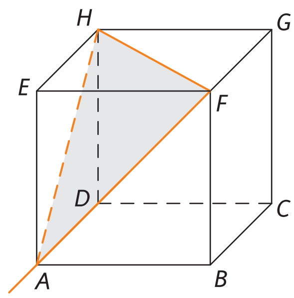

**38.** a) leží



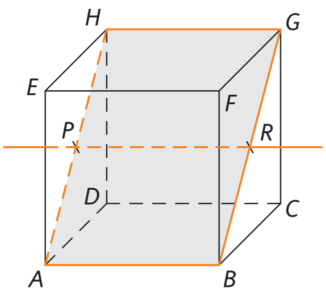

b) neleží



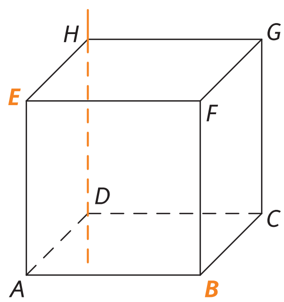

c) neleží



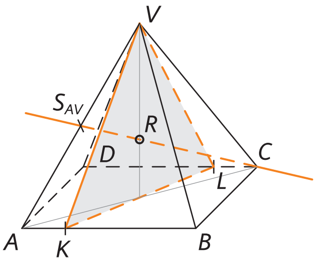

d) leží



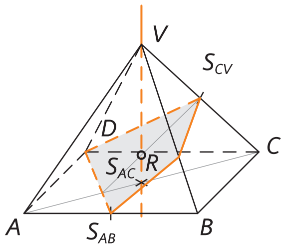

**39.** neleží



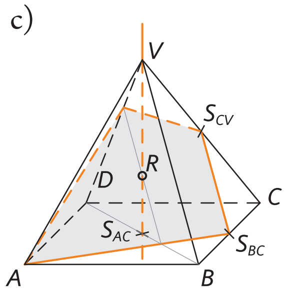
**41.** a)



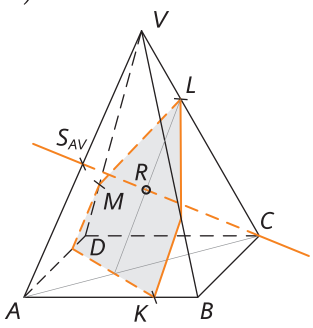

b)



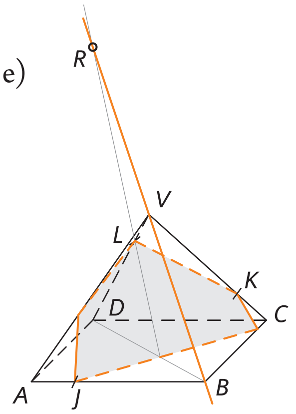

c)



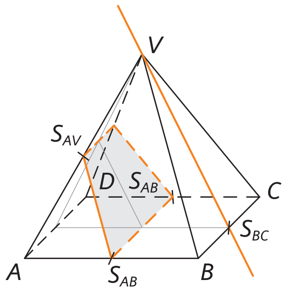

d)



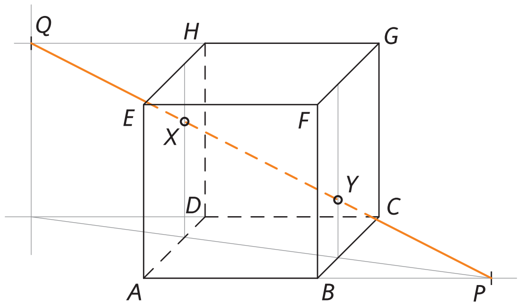

e)



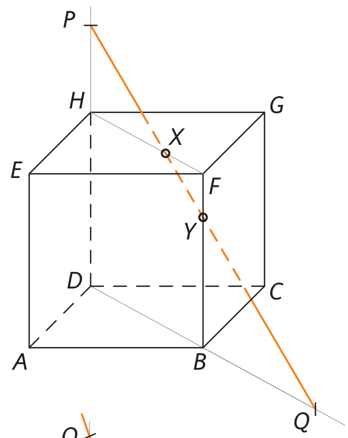

f) rovnoběžné



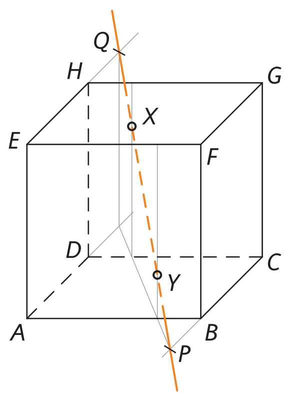

**43.** a)



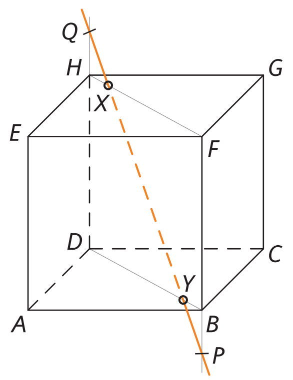

b)



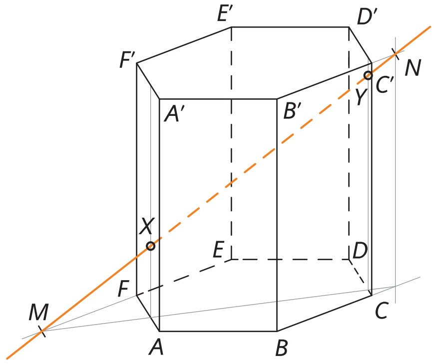

c)



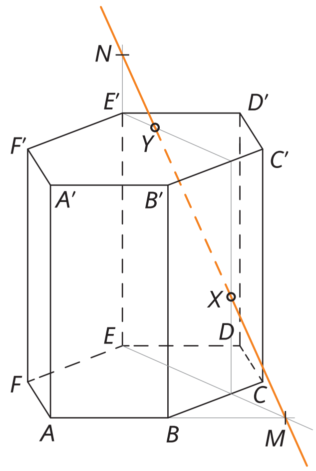

d)



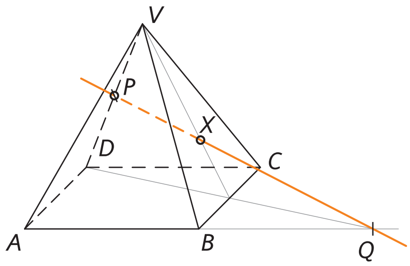
**44.** a)



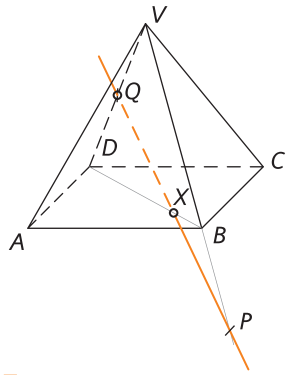

b)



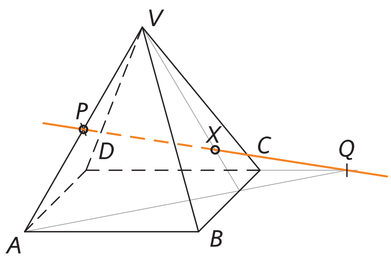

**46.** a)



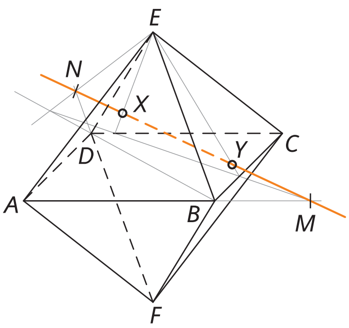

b)




c)




**47.**

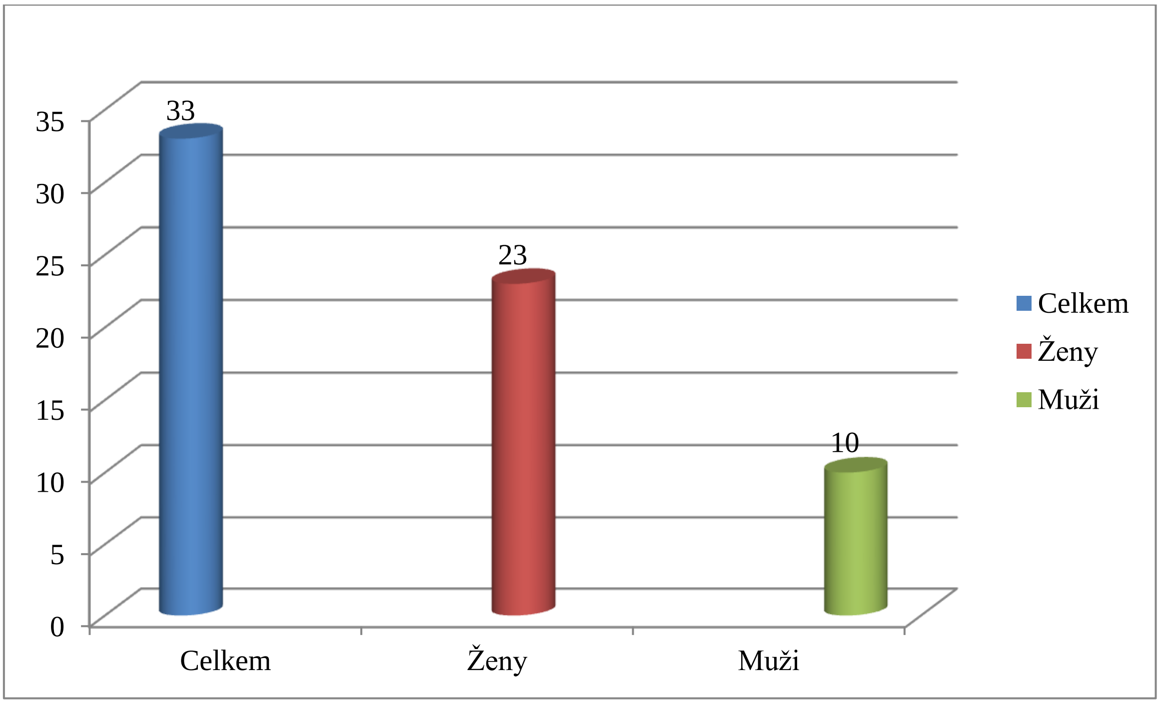


# 4 DOTAZNÍKOVÁ ŠETŘENÍ MEZI UČITELI STŘEDNÍCH ŠKOL

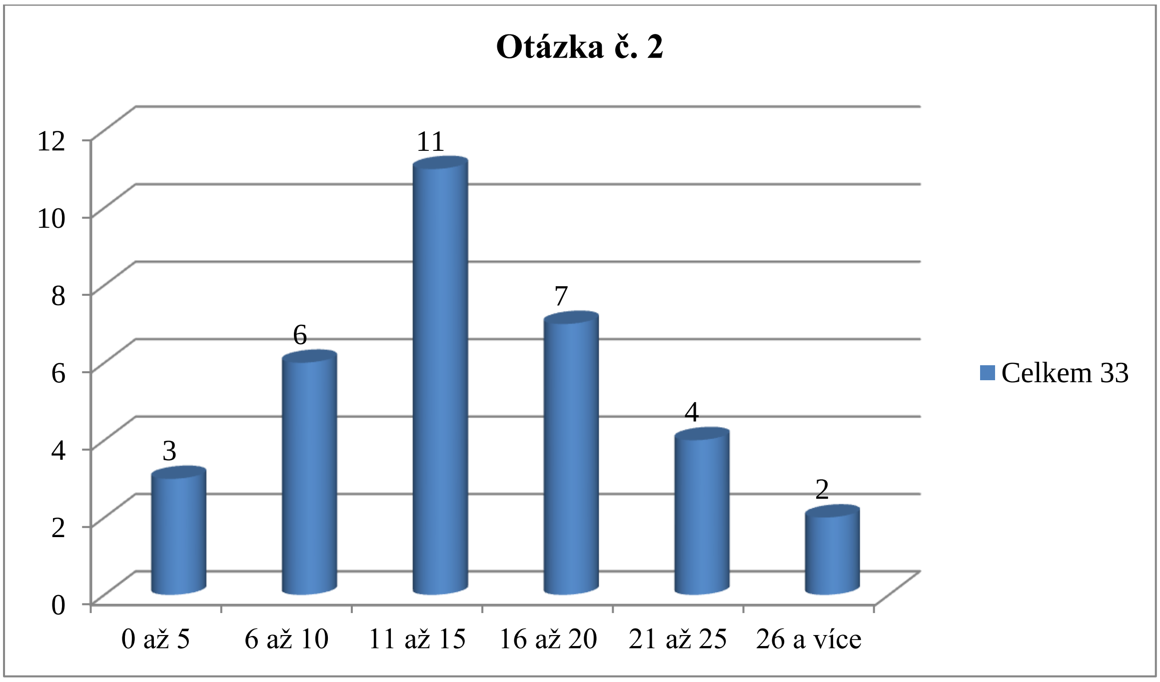
Součástí práce je rovněž malé dotazníkové šetření mezi učiteli středních škol, které se uskutečnilo v březnu a dubnu letošního roku. Požádala jsem učitele matematiky na několika středních školách v Olomouci o vyplnění dotazníku. Dotazník obsahoval deset otázek, osm bylo uzavřených a dvě otevřené. Cílem výzkumného šetření, spíše malé sondy, bylo zjistit, kolik hodin věnují učitelé na různých středních školách stereometrii, zda by byl zájem o tuto sbírku pro výuku stereometrie. V deváté otázce měli vyjádřit, co si myslí o prostorové představivosti žáků. Poslední desátá otázka byla otevřená. Kdo chtěl, mohl zde napsat svůj názor na to, co by se mělo změnit nebo zlepšit ve výuce stereometrie. Z rozeslaných dotazníků na školy se vrátilo nazpět 33.

Prvních pět otázek bylo spíš všeobecně informačních. Zajímalo nás, jak jsou mezi učiteli zastoupeny ženy a muži, jak dlouho učí na střední škole, na jakém typu střední školy, kolik hodin výuky věnují stereometrii a jaký mají další aprobovaný předmět kromě matematiky. Dotazníkového šetření se zúčastnilo 23 žen a 17 mužů. Nejvíce mezi respondenty byla zastoupena doba 11 – 15 let, po kterou učí na střední škole, a to jedenácti učiteli. Na dotazník odpovědělo 17 učitelů z gymnázií, 4 učitelé ze střední průmyslové školy, 8 učitelů ze střední zdravotní školy a 4 učitelé ze střední ekonomické školy. Většina učitelů napříč všemi typy škol věnuje stereometrii více jak 10 vyučovacích hodin. Z dotazníkového šetření dále vyplynulo, že nejčastější aprobace učitelů je matematika s fyzikou, uvedlo ji 17 dotázaných.

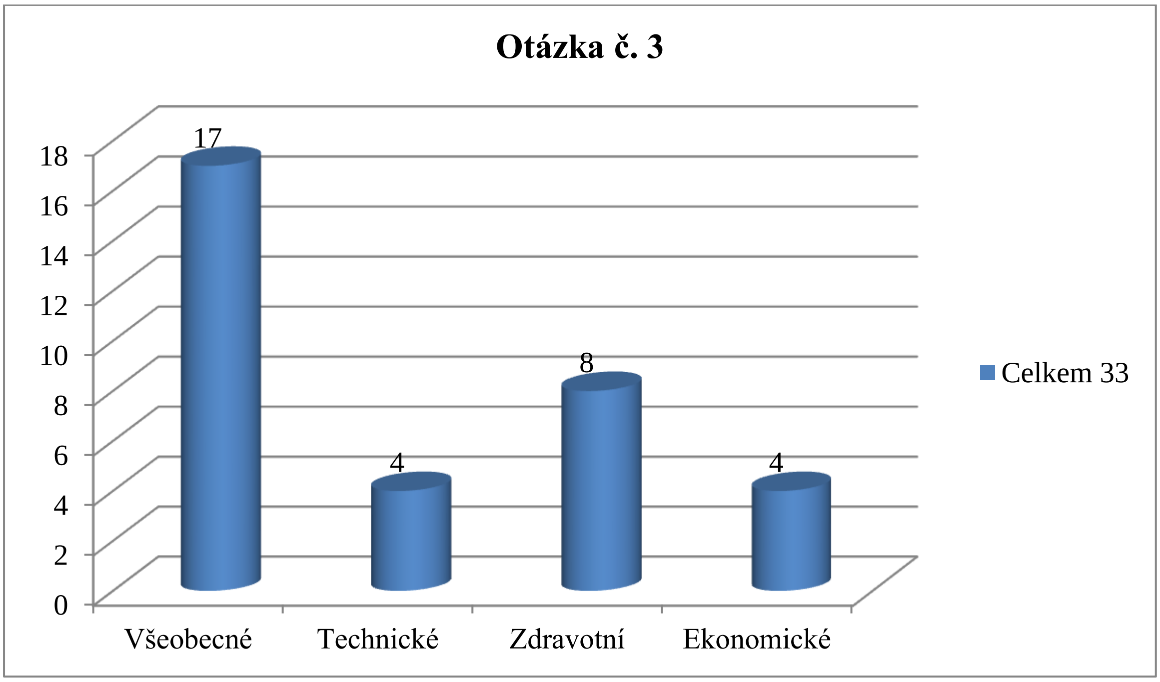
1. **Jste**
   - ŽENA
   - MUŽ



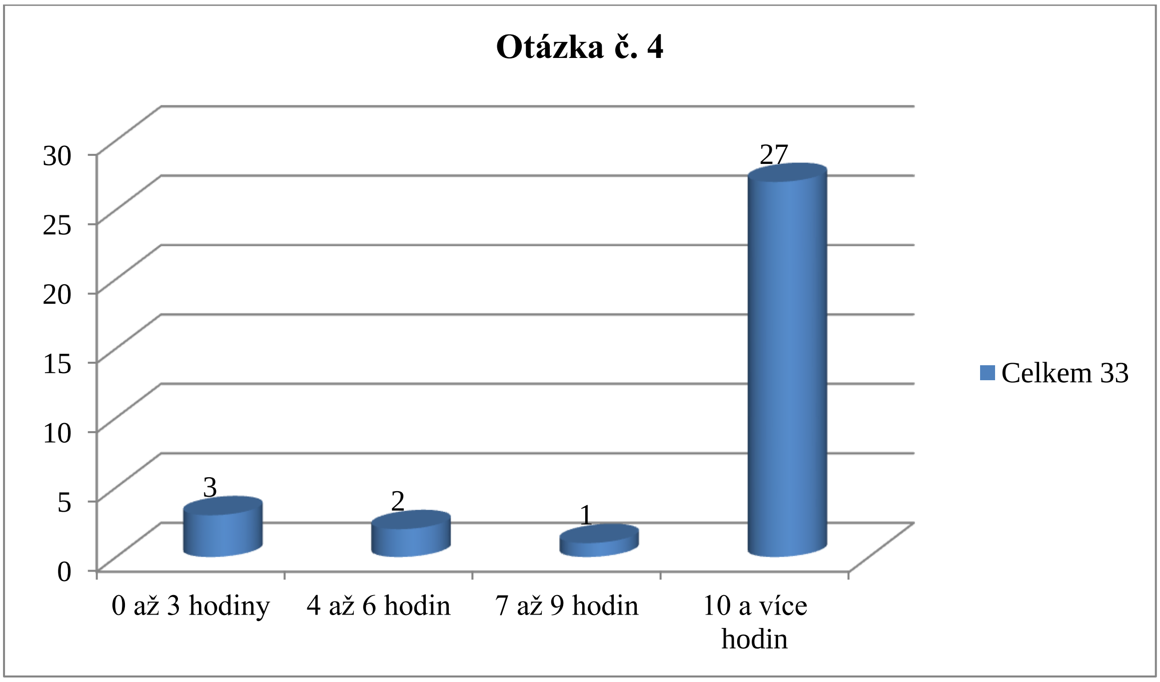

2. **Jak dlouho učíte na střední škole:**



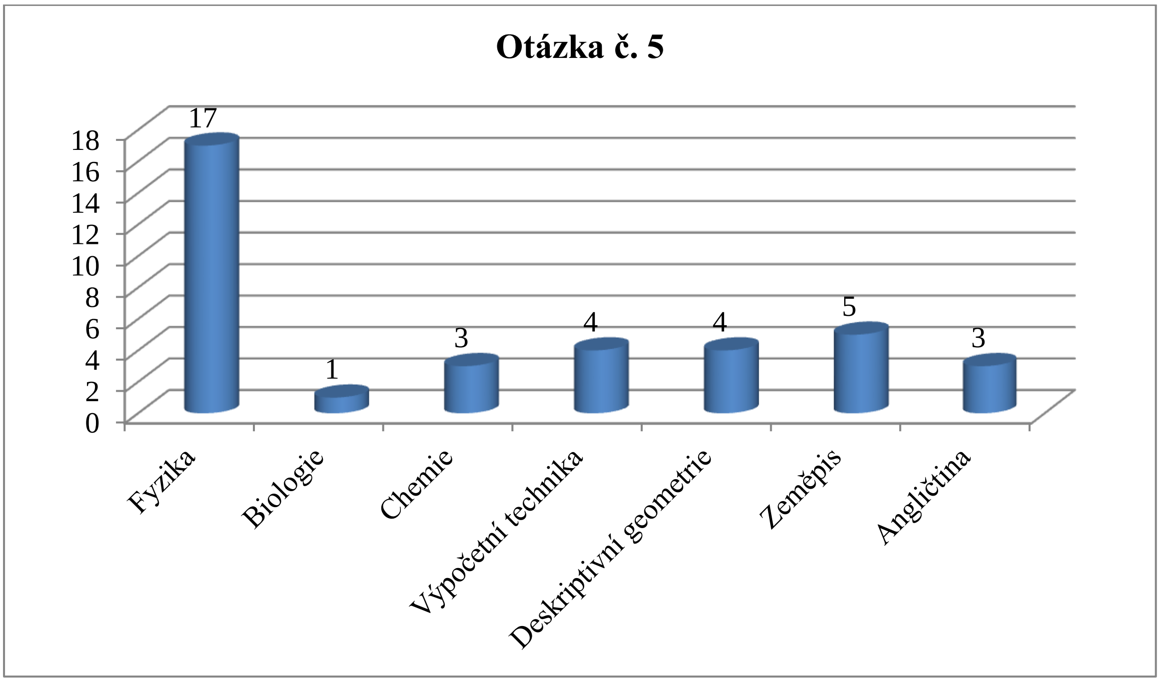
3. **Typ školy, na které učíte?**




4. **Kolik hodin výuky věnujete stereometrii během 1. až 4. ročníku?**

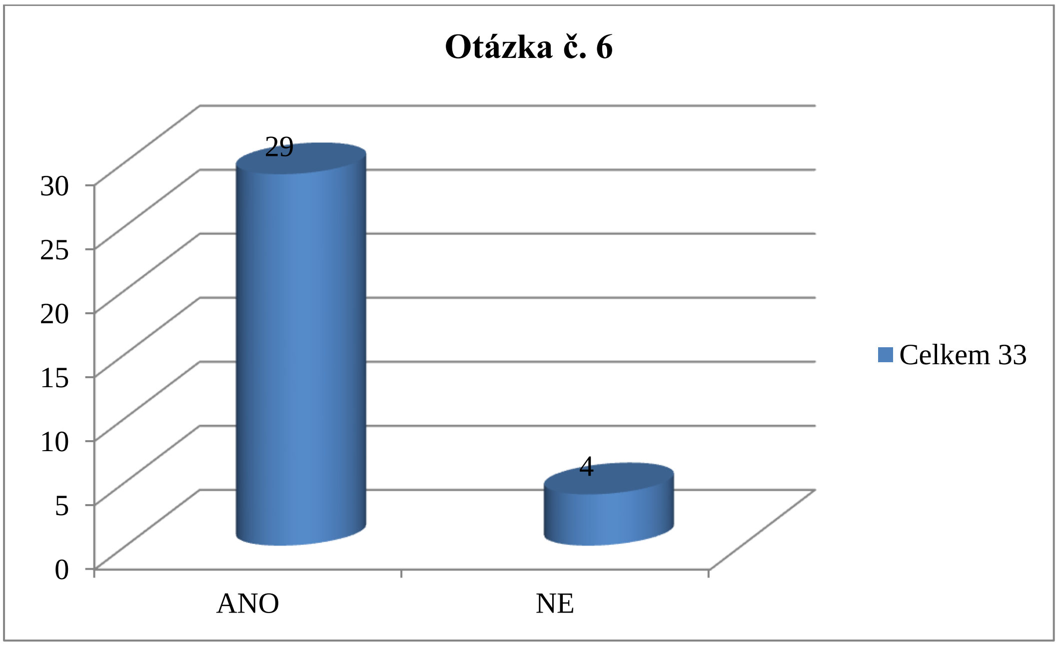


5. **Jaký je další předmět Vaší aprobace?**

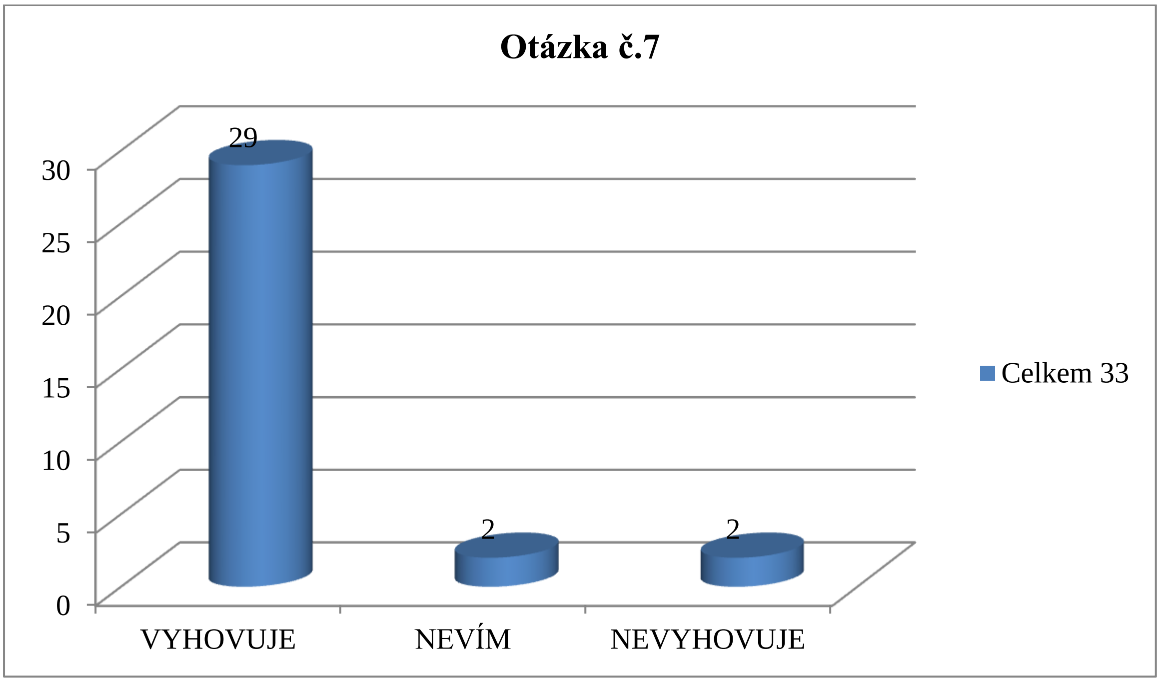



Otázky číslo 6, 7 a 8 se týkaly přímo sbírky. Mým záměrem bylo zjistit tři skutečnosti, jestli učitelé na středních školách by sbírku považovali za vhodnou pro výuku, zda by jim vyhovoval zvolený styl zadání příkladů, a v neposlední řadě zda počet příkladů je dostatečný. Z níže uvedených grafů je patrné, že ve velké většině převládají kladné odpovědi.

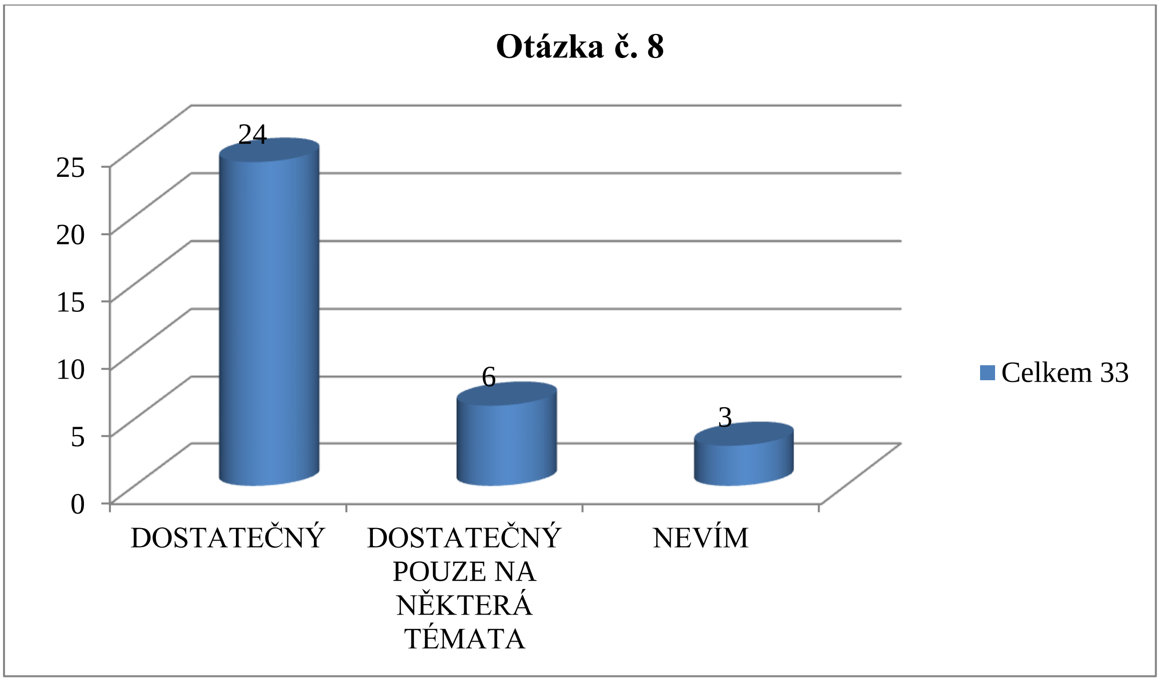
6. **Zvolili byste sbírku pro výuku stereometrie na SŠ?**




7. **Způsob zadání příkladů?**

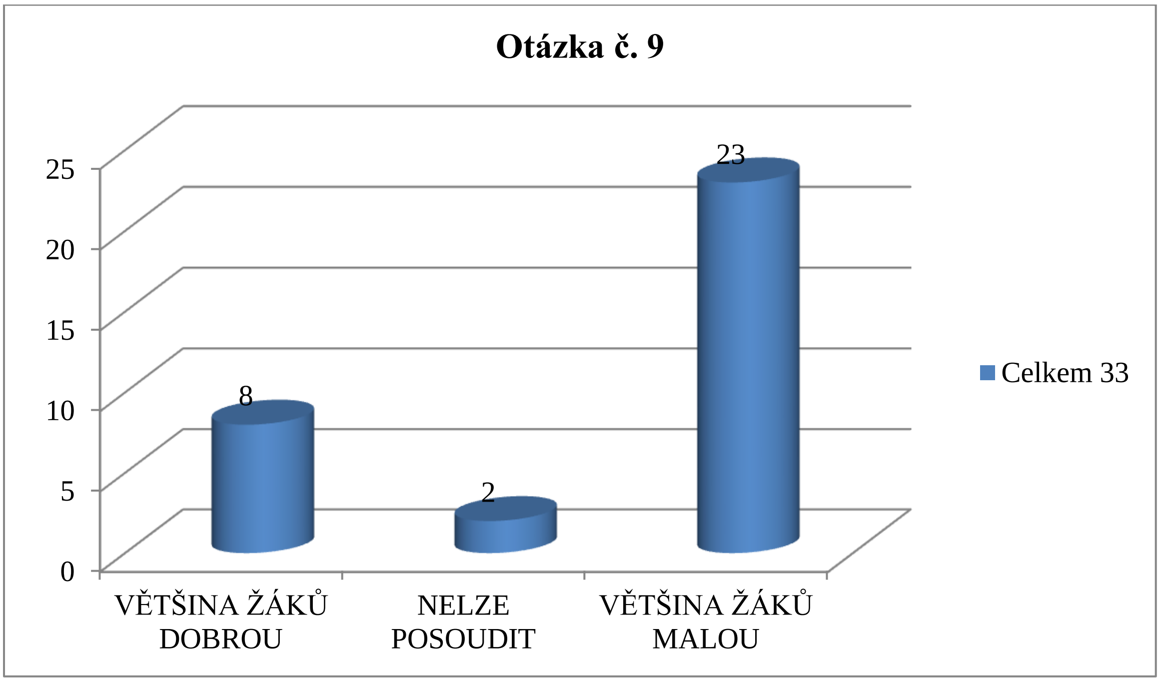


**8. Sbírka obsahuje počet příkladů na jednotlivá témata?**




Jelikož rigorózní práce je o prostorové představivosti, tak v otázce číslo 9 jsem se zajímala, co si myslí přímo vyučující na středních školách o prostorové představivosti svých studentů. 23 dotázaných si myslí, že většina studentů má malou prostorovou představivost, oproti tomu 8 dotázaných si myslí, že většina studentů ji má dobrou, a pouze 2 dotázaní nevěděli.

**9. Jakou mají žáci představivost?**




**10. Co by se mělo podle Vás změnit nebo zlepšit ve výuce stereometrie?**

Na otázku číslo 10 odpovědělo pouze 19 vyučujících. Nejčastější odpovědí bylo: více hodin stereometrie a více času. Objevily se také názory, že s rozvíjením prostorové představivosti by se mělo začít již na základní škole nebo že výuka stereometrie by se měla propojit s výpočetní technikou, využívat interaktivní počítačové modelování a počítačové programy. Konstruktivním nápadem je také doplnit sbírku o pracovní listy.

Jedním z prostředků jak rozvíjet prostorovou a geometrickou představivost na středních školách je pracovat s vhodnými studijními materiály. To byl také jeden z motivů pro vytvoření sbírky. Zajímalo mě, zda by sbírka našla uplatnění mezi středoškolskými učebnicemi, proto jsem provedla menší dotazníkovou sondu. Pomocí ní se mi dostalo zpětné vazby, která vypovídá v podstatě o kladném hodnocení a využití sbírky při výuce na středních školách, neboť 29 respondentů z celkového počtu 33 považuje sbírku za vhodnou pro výuku na středních školách a rovněž 29 respondentům vyhovuje způsob zadání zvolených příkladů.

## ZÁVĚR

Ukázali jsme, že neexistuje jednotná a všeobecně platná definice prostorové, resp. geometrické představivosti, neboť toto téma je stále aktuální pro mnohé matematiky, kteří se jím zabývají ať už teoreticky či prakticky ve smyslu sestavování různých testů pro žáky všech věkových kategorií, nebo vymýšlí různé tvůrčí úlohy, modely ke slepení, hlavolamy nebo skládačky, pomocí kterých by se měla rozvíjet prostorová představivost už od nejútlejšího věku. Tímto tématem se zabývají i matematikové na celosvětové úrovni a k tomuto účelu vytvořili i softwarovou aplikaci, která je v dnešní době pro studenty atraktivní. Neexistuje také jednotný názor, zda prostorová představivost je schopnost či dovednost, neboli zda je vrozená či postupně učením a procvičováním získaná. Podle mých zkušeností bych si zde dovolila uvést svůj vlastní poznatek a prostorovou představivost bych považovala za schopnost, kterou už při narození dostává dítě do vínku, a proto někdo je jí obdařen více, někdo méně a někdo skoro vůbec. Prostorovou představivost bych přirovnala k hudebnímu sluchu. Jsou jedinci, kteří se narodí absolutně bez hudebního sluchu, a u těchto jedinců se jen velmi těžko rozvíjí nějaké hudební vzdělání a velmi obtížně se učí hře na hudební nástroj na základě poslechu. V praxi jsem měla možnost setkat se i s jedinci, kteří mají velmi malou, neboli skoro žádnou geometrickou představivost, a troufale bych si dovolila tvrdit, že u těchto jedinců je skoro nemožné hovořit o nějakém rozvoji této schopnosti. Přirovnala bych to k situaci, kdy bychom chtěli po někom, kdo nemá žádný hudební sluch, aby rozpoznal, kdo zpívá falešně a kdo čistě.

Hlavní částí práce je sbírka polohových úloh ze stereometrie, která obsahuje jen stručnou teorii a nabízí řadu příkladů k procvičení polohových vlastností a hlavně řezů těles. Sbírka se skládá ze dvou kapitol: Základy stereometrie a Polohové vlastnosti útvarů v prostoru. Kapitola Polohové vlastnosti útvarů v prostoru je rozdělena na sedm podkapitol: Vzájemná poloha čtyř bodů, Vzájemná poloha dvou přímek, Průnik roviny a tělesa, Vzájemná poloha dvou rovin, Vzájemná poloha tří rovin, Vzájemná poloha přímky a roviny a poslední Průnik přímky s hranicí tělesa. V první kapitole Základy stereometrie je uvedena stručná teorie a princip volného rovnoběžného promítání, v němž jsou současně zobrazena základní tělesa, o kterých je řeč v dalších příkladech. Druhá kapitola obsahuje 47 příkladů, z toho 17 je řešených. Některé příklady jsou autorské, zejména příklady na řezy těles a neautorské příklady jsou posbírány z dostupných sbírek pro střední školy. Nejvíce příkladů obsahuje kapitola B. 3, ve které zejména příklad č. 13 obsahuje 39 dílčích příkladů na řezy krychle.

Sbírka obsahuje také výsledky úloh, kdy ke každé úloze je vypracováno přehledné grafické řešení (i s pomocnými konstrukcemi), což je velmi praktické a umožňuje studentům rychlou kontrolu správnosti výsledku jejich řešení. Sbírku se zatím nepodařilo vydat, ale od několika málo kolegů, kteří ji využívají, se mi dostalo zpětného ohlasu, který byl kladný.

Práce obsahuje kromě recenzního posudku od RNDr. Lukáše Müllera, který se sbírkou pracuje, také dvě dotazníková šetření. První dotazníkové šetření probíhalo na základních školách a bylo určeno žákům čtvrtých a pátých škol. Druhé dotazníkové šetření se týkalo přímo sbírky a provádělo se mezi učiteli středních škol.

## SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY


1. HARTL, P., HARTLOVÁ, H. Psychologický slovník. Praha: Portál, 2000. ISBN 80-7178-303-X.
2. LANGMEIER, J., KREJČÍŘOVÁ, D., Vývojová psychologie. Praha: Grada Publishing, a.s., 2006. ISBN 978-80-247-1284-0.
3. ŘÍČAN, P., Psychologie osobnosti, Praha: Grada Publishing, a.s., 2010. ISBN 978-80-247-3133-9.
4. BALADA, F., Z dějin elementární matematiky. Praha: SPN, 1959. 85-0-04
5. DUBEC, A., Metodika vyučovania deskriptívnej geometrie. Bratislava: SPN, 1959.
6. MIKAN, M., Jak se vyvinula matematika a geometrie. Praha: Orbis, 1954.
7. KADLEČEK, J., Geometrie v rovině a prostoru. Praha: Prometheus, 1996. ISBN 80-7196-017-9
8. MOLNÁR, J., Rozvíjení prostorové představivosti (nejen) ve stereometrii. Olomouc UP, 2009. ISBN 978-80-244-2254-1.
9. GARDNER, H., Dimenze myšlení. Praha: Portál, 1999. ISBN 80-7178-279-3.
10. PIAGET, J., INHELDER, B., Psychologie dítěte. Praha: Portál, 2010. ISBN 978-80-7367-798-5
11. CHRISTOU, C., JONES, K., PITTA-PANTAZI, D., PITTALIS, M., MOUSOULIDES, N., MATOS, J.F., SENDOVA, E., ZACHARIADES, T., BOYTCHEV, P., Developing student spatial ability with 3D software applications. Paper presented at the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME) , Larnaca, Cyprus, 22-26 Feb 2007.
12. BOYTCHEV, P., CHEHLAROVA, T., SENDOVA, E., Enhancing spatial imagination of young students by acticities in 3D Elica applications. Paper presented at the Spring 2007 conference of the Bulgarian Union of Mathematicians.
13. http://dalest.kenynet.cz/wp-content/uploads/2013/04/Manual_DALEST.pdf

# PŘÍLOHY

**Recenzní posudek na Sbírku úloh stereometrie, Polohové vlastnosti útvarů v prostoru**

Autor: Marie Chodorová

Posuzovaná sbírka týkající se polohových úloh, jejíž autorkou je dr. Chodorová, je sepsána na 52 stranách a obsahuje 47 úloh, z nichž některé obsahují několik podúloh. První část se věnuje vzájemné poloze čtyř bodů, což je poměrně vzácná kapitola, která nebývá v běžných učebnicích, či sbírkách obsažena. Následuje kapitola, která se věnuje vzájemné poloze dvou přímek, obsáhlá kapitola týkající se průniku roviny a tělesa, kapitola věnující se vzájemné poloze dvou a tří rovin, poloze přímky a roviny a kapitola je uzavřena kapitolou s úlohami o průniku přímky s hranicí tělesa. V nejobsáhlejší subkapitole je na třech případech shrnut postup řešení úloh řezu krychle rovinou, což hodnotím velmi pozitivně např. pro samostudium. Podobně je v následující subkapitole komentováno řešení dvou úloh, v následujících subkapitolách ještě další tři úlohy.

Těžiště celé sbírky je v úloze 13, která obsahuje 39 úloh k řezu krychlí rovinou. Obtížnost jednotlivých příkladů graduje – prvních devět příkladů lze řešit pouze s využitím prvních dvou pravidel uvedených v úvodu subkapitoly, k řešení následujících úloh je třeba i pravidlo třetí a úloha je završena složitějšími příklady, kde ani jedno z uvedených pravidel nelze v prvním kroku užít. Uvedená struktura je pro školskou praxi velmi vhodná, neboť lze pravidla procvičovat postupně. Pro školskou praxi rovněž oceňuji přímé zadání úloh k řezu krychlí. Škoda, že rovněž úlohy týkající se vzájemné polohy dvou, či tří rovin, nejsou zadány v krychlích ve volném rovnoběžném promítání (jako v úloze 13). Některé úlohy jsou zcela původní a netradiční – např. úloha 22, ve které se provádí řez v krychli a současně v osmistěnu.

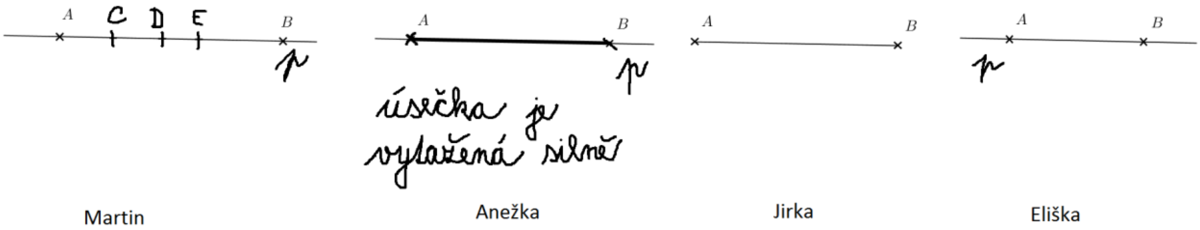
Uvedenou publikaci používám již čtvrtý rok ve školní praxi při výuce na gymnáziu. Dle mého názoru se jedná o nejlepší sbírku ke stereometrii, která je v současnosti dostupná. Dokonce jsem modifikoval výuku stereometrie dle předložené knihy – a jsem přesvědčen, že to byl krok k systematizaci a stratifikaci učiva. Pro žáky je publikace velmi přehledná, jednotlivé úlohy postupně gradují obtížnost, lze ji použít velmi pohotově ve výuce i při zadávání domácích úkolů. Jako velmi přínosné pro samostudium uvádím kompletní a precizní řešení jednotlivých úloh v závěru publikace. Obtížnost je přiměřená běžné střední škole. Navíc se jedná o jednu z nejobsáhlejších sbírek úloh ke stereometrii. Lze si jen přát více sbírek podobné kvality.

RNDr. Lukáš Műller, Ph.D., Gymnázium Jevíčko 

## Dotazník pro žáky základních škol

V otázkách s výběrem odpovědi může být správných odpovědí i víc než jedna.

1. Děti měly v prověrce z geometrie následující příklad:
   Na obrázku jsou dány dva různé body $A, B$. Vyznačte **všechny** body, které patří úsečce $AB$.


Odpovědi Martina, Anežky, Jirky a Elišky vidíte na obrázku. Kdo odpověděl správně?

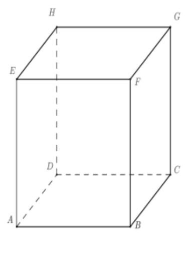
a) Martin
b) Anežka
c) Jirka
d) Eliška
e) žádný z nich

2. Na obrázku jsou znázorněny polopřímky $CD$ a $KL$. Zakroužkujte ta tvrzení, která jsou pravdivá.

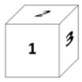

a) Všechny body polopřímky $CD$ patří také polopřímce $KL$.
b) Všechny body polopřímky $KL$ patří také polopřímce $CD$.
c) Na polopřímce $CD$ existují body, které neleží na polopřímce $KL$.
d) Polopřímky $KL$ a $CD$ leží na různých přímkách.
e) Polopřímky $CD$ a $KL$ jsou opačné.

3. Na obrázku vidíte kvádr $ABCDEFGH$. Zakroužkujte ta tvrzení, která jsou pravdivá.

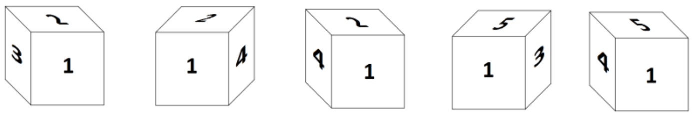
a) Přímka $AB$ je kolmá na přímku $DH$.
b) Přímky $BF$ a $DH$ jsou rovnoběžné.
c) Přímky $CD$ a $BF$ jsou různoběžné.
d) Přímky $AB$ a $DH$ nejsou různoběžné.
e) Přímky $BF$ a $DH$ se protínají.



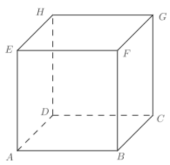
4. Lukáš si postavil doprostřed stolu krychli, která má na každé stěně číslo od 1 do 6 (na každé stěně je právě jedno z těchto čísel), součet čísel na protějších stěnách je vždy 7. Na krychli se díval z pravé strany stolu (jako na obrázku).



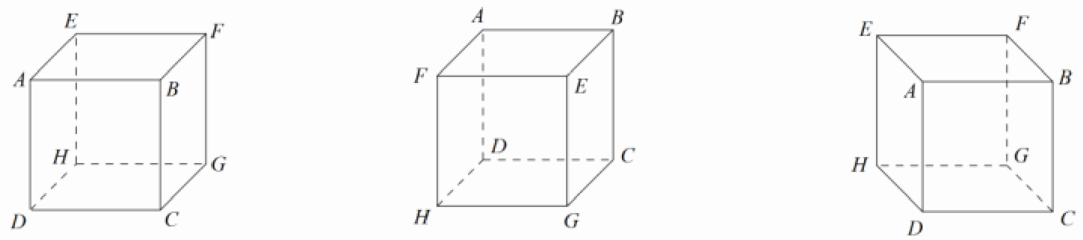
Potom přešel na levou stranu stolu. Zakroužkujte ten obrázek, na kterém je nakreslená krychle tak, jak ji viděl z levé strany.



5. Na stole je položená krychle $ABCDEFGH$, její stěna $ABCD$ na stole leží (jako na obrázku).




Krychli otočíme tak, aby na stole ležela stěna $DCGH$. Zakroužkujte obrázky, které mohou ukazovat takto otočenou krychli.




6. Baví tě geometrie? (zakroužkuj odpověď)

Ano Ne Nevím

**Dotazník pro učitele středních škol**

Univerzita Palackého
v Olomouci

1. Jste
    - ŽENA
    - MUŽ
2. Jak dlouho učíte na střední škole:
3. Typ školy, na které učíte?
    - všeobecné - gymnázium
    - technické
    - zdravotní
    - ekonomické
    - humanitní
    - jiné
4. Kolik hodin výuky věnujete stereometrii během 1. až 4. ročníku?
    - 0 – 3
    - 4 – 6
    - 7 - 9
    - 10 a více
5. Jaký je další předmět Vaší aprobace?
    - fyzika
    - biologie
    - chemie
    - výpočetní technika
    - deskriptivní geometrie
    - zeměpis
    - dějepis
    - angličtina
    - tělesná výchova
    - jiný
6. Zvolili byste sbírku pro výuku stereometrie na SŠ?
    - ANO
    - NELZE POSOUDIT
    - NE
7. Způsob zadání příkladů?
    - VYHOVUJEA
    - NEVÍM
    - NEVYHOVUJE
8. Sbírka obsahuje počet příkladů na jednotlivá témata?
    - DOSTATEČNÝ
    - DOSTATEČNÝ POUZE NA NĚKTERÁ TÉMATA
    - NEVÍM
    - NEDOSTATEČNÝ
9. Jakou mají žáci představivost?
    - VĚTŠINA ŽÁKŮ DOBROU
    - NELZE POSOUDIT
    - VĚTŠINA ŽÁKŮ MALOU
10. Co by se mělo podle Vás změnit nebo zlepšit ve výuce stereometrie?

**Děkujeme za spolupráci!**