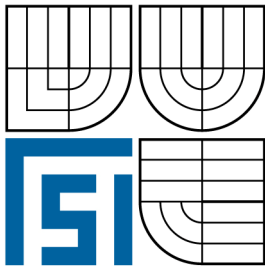


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
ÚSTAV AUTOMOBILNÍHO A DOPRAVNÍHO  
INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
INSTITUTE OF AUTOMOTIVE ENGINEERING

PRYŽOVÝ TLUMIČ TORZNÍCH KMITŮ ŘADOVÉHO  
ŠESTIVÁLCOVÉHO VZNĚTOVÉHO MOTORU  
RUBBER DAMPER OF A SIX-CYLINDER IN-LINE DIESEL ENGINE

DIPLOMOVÁ PRÁCE  
DIPLOMA THESIS

AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

PETR MATULA

VEDOUCÍ PRÁCE  
SUPERVISOR

prof. Ing. VÁCLAV PÍŠTĚK, DrSc.

BRNO 2008

## **Abstrakt**

Tato diplomová práce se jmenuje „Pryžový tlumič torzních kmitů pro řadový šestiválcový motor“. Její obsah pokrývá stručný úvod do problematiky tlumení torzních kmitů, základní analýzu kmitání klikového hřídele s výpočtem vlastní frekvence, analytickou kontrolu hřídele na namáhání torzními kmity. Její součástí je též návrh pryžového torzního tlumiče a následná kontrola klikového hřídele s aplikovaným tlumičem.

## **Abstract**

This diploma thesis is called „Rubber damper of a six-cylinder in-line diesel engine“. It consists of brief introduction to crankshaft torsion and dampers, basic analysis of crank vibrations including crank natural frequencies calculation and analytic verification of torsional vibration stress. It contains also a concept of rubber damper and verification of crankshaft with mounted damper.

## **Klíčová slova**

Pryžový tlumič torzních kmitů, analytický výpočet, torzní kmitání, návrh

## **Keywords**

Rubber damper, analytic computation, torsional vibration, concept

## **Bibliografická citace**

MATULA, P. *Pryžový tlumič torzních kmitů řadového šestiválcového vznětového motoru*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2008. 46 s. Vedoucí diplomové práce prof. Ing. Václav Píštěk, DrSc.

## **Čestné prohlášení**

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně, pod vedením vedoucího diplomové práce pana prof. Ing. Václava Píštěka, DrSc. a s použitím níže uvedené literatury.

V Brně 16. 5. 2008

.....  
podpis

## **Poděkování**

Děkuji panu prof. Ing. Václavu Píštěkovi, DrSc. za odborné vedení práce a vstřícnost při řešení problémů s ní spojených.

## Obsah

Obsah.....	7
1. Úvod.....	8
2. Parametry zadaného motoru .....	9
2.1. Rozložení sil na klikovém hřídeli.....	9
2.2. Uspořádání klikového hřídele .....	10
3. Analýza válcové jednotky motoru .....	11
3.1. Kinematika klikového mechanismu .....	11
3.2. Rozdělení hmot v ojnici .....	12
3.3. Silové a momentové zatížení ojnice.....	12
3.3.1. Síly přenášené pístním čepem .....	12
3.3.2. Radiální a tangenciální síly .....	14
3.3.3. Kroutící moment klikového hřídele .....	14
4. Úvod do problematiky kmitání klikových hřídelů.....	15
4.1. Způsoby kmitání klikového hřídele .....	15
4.2. Torzní kmity .....	15
5. Dynamický model klikového hřídele.....	18
5.1. Redukce délek .....	18
5.2. Redukce hmot.....	19
6. Vlastní torzní kmitání .....	20
6.1. Torzní tuhost .....	20
6.2. Vlastní frekvence a tvary kmitání .....	21
7. Vynucené torzní kmitání.....	24
7.1. Harmonická analýza budícího momentu.....	24
7.2. Rezonanční otáčky motoru.....	25
7.3. Relativní vydatnost rezonancí .....	26
7.4. Torzní výchylky v rezonanci.....	28
8. Namáhání na torzi .....	31
9. Tlumení torzních kmitů .....	32
10. Návrh utlumení torzních kmitů.....	35
10.1. Dynamický model klikového hřídele s přídatnou torzní soustavou .....	35
10.2. Vlastní frekvence a tvary kmitání.....	36
10.3. Rezonanční otáčky.....	37
10.4. Relativní vydatnost rezonancí .....	38
10.5. Torzní výchylky v rezonanci .....	38
10.6. Kontrola torzního napětí.....	41
11. Návrh pryžového tlumiče torzních kmitů .....	42
12. Srovnání tlumeného a netlumeného modelu.....	46
13. Závěr .....	48
Použitá literatura.....	49
Použité zkratky a symboly.....	50
Seznam příloh.....	52

## 1. Úvod

Cílem mé diplomové práce je návrh pryžového tlumiče torzních kmitů pro řadový šestiválcový vznětový motor značky ZETOR. Konstrukční rozměry motoru byly předem zadány a motor jimi spadá do UŘ III.

Ve své práci vytvořím dynamický model klikového hřídele, provedu analýzu klikového ústrojí motoru z hlediska namáhání torzními kmity. Následně navrhnu rozměry a konstrukční provedení tlumiče torzních kmitů.

Závěrem zhodnotím, jakou měrou pryžový torzní tlumič ovlivnil chování klikového mechanismu.

## 2. Parametry zadaného motoru

Pro návrh uspořádání klikového mechanismu byly zadány parametry uvedené v *tab. 1*. Jedná se o vznětový vodou chlazený řadový šestiválcový motor pro traktory. Vrtání a zdvih byly zadány tak, aby motor rozměry svých částí spadl do unifikované řady III motorů vyráběných ve firmě Zetor. Klikový hřídel je symetrický s pořadím zápalu 1-5-3-6-2-4. Úhel mezi po sobě jdoucími klikami je  $\delta = 120^\circ$ .

Tab. 1. Parametry motoru

Typ motoru	vznětový přeplňovaný	
Uspořádání	řadový	
Efektivní výkon	125	[kW]
Počet válců	6	
Pořadí vznětů	1-5-3-6-2-4	
Vrtání	105	[mm]
Zdvih	120	[mm]
Rozteč válců	136	[mm]
Kompresní poměr	21	
Průměr hlavního čepu	80	[mm]
Průměr ojnicního čepu	66	[mm]
Délka hlavního čepu	44	[mm]
Délka ojnicního čepu	40	[mm]
Vzdálenost os čepů	60	[mm]
Tloušťka ramene kliky	26	[mm]
Šířka kliky	106	[mm]
Hmotnost ojnice	2,41	[kg]
Hmotnost pístu	1,37	[kg]
Hmotnost pístního čepu	0,5	[kg]
Délka ojnice	215	[mm]

### 2.1. Rozložení sil na klikovém hřídeli

Na klikový hřídel působí mnoho různých sil a momentů. Abychom dosáhli co nejrovnoměrnějšího otáčení hřídele, je třeba síly a momenty vyvážit. Vyvážením myslíme rovnováhu setrvačných sil a momentů vznikajících od rotačních a posuvných částí klikového mechanismu. Při vyvažování počítáme s tím, že klikový hřídel koná rovnoměrný kruhový pohyb kolem své vodorovné osy.

Setrvačná síla od rotačních částí mechanismu se pro jednu válcovou jednotku vypočte podle vzorce:

$$P_r = m_A R_o \omega^2 \text{ [N]} \quad (1),$$

kde:  $m_A$  [kg] je hmotnost posuvné části ojnice

$R_o$  [mm] je poloměr kliky a

$\Omega$  [rad.s<sup>-1</sup>] je úhlová rychlost otáčení klikového hřídele.



Ve směru osy válce z každé válcové jednotky vychází směrem od osy hřídele jedna síla  $P_r$ . Jejich složením získáme výslednou hodnotu síly  $P_r$  na klikový hřídel. V případě řadového šestiválce je výslednice sil rovna nule. Protože jsou síly generovány stejnými válcovými jednotkami, jsou jejich velikosti stejné. A protože jsou kliky na hřídeli vzájemně posunuty o  $120^\circ$ , síly na nich se navzájem vyruší.

Setrvačná síla prvního řádu od posuvných částí mechanismu se pro jednu válcovou jednotku vypočte podle vzorce:

$$P_I = m_A R_o \omega^2 \cos \alpha \text{ [N]} \quad (2),$$

kde:  $\alpha$  [ $^\circ$ ] je úhel pootočení klikového hřídele.

Prostým sečtením hodnot všech sil získáme výslednici  $P_I$ . Která je pro řadový šestiválec opět nulová, protože síly o stejné hodnotě působí vždy na protilehlých ramenech.

Obdobná situace nastává i u setrvačných sil druhého řádu, které se vypočtou podle:

$$P_{II} = m_A R_o \omega^2 \lambda \cos 2\alpha \text{ [N]} \quad (3),$$

kde:  $\lambda$  [-] je klikový poměr.

I zde je výslednice rovna nule.

Síly vyšších řádů již nejsou tak velké, a proto se při výpočtech obvykle zanedbávají.

Obecně, když jsou výsledné síly působící na klikový hřídel nulové, výsledné momenty vznikající od působení jejich složek na klikách už nulové být nemusí. Není to však případ šestiválce, zde jsou všechny momenty ( $M_r$ ,  $M_I$ ,  $M_{II}$ ) nulové. Jejich výpočet provedeme snadno součinem vektoru síly a délky příslušného ramene. Momentové výslednice získáme opět vektorovým součtem složek momentů.

## 2.2. Uspořádání klikového hřídele

Jak již bylo řečeno, klikový hřídel šestiválcového motoru je symetrický podle osy jdoucí středem hlavního čepu mezi třetím a čtvrtým zalomením. Tato osa souměrnosti je kolmá na osu rotace hřídele. Symetrie jasně vyplývá z úhlu mezi po sobě jdoucími zalomeními. To, na kterou stranu budou která zalomení vychýlená určuje pořadí zápalu. Obecně se nedoporučuje volit pořadí tak, aby za sebou následovaly sousedící válce. U víceválcových motorů (od pětiválce nahoru) pořadí zápalů také ovlivňuje vydatnost rezonancí vedlejších řádů, viz. *kap. 7.3*. U řadových motorů se symetrickým klikovým hřídelem všeobecně platí, že při sledu zápalů, při němž lichá čísla nejprve stoupají a pak sudá klesají nebo obráceně, se krom příznivého vyvážení dosáhne nejkliidnějšího pásma otáček mezi hlavními kritickými otáčkami. [1]

V tomto případě bylo pořadí zápalu zvoleno : 1-5-3-6-2-4.

### 3. Analýza válcové jednotky motoru

Než přistoupíme k samotnému výpočtu kmitání hřídele, musíme zjistit síly a momenty působící na klikovou hřídel při chodu motoru. Zjistíme zejména hmotnosti posuvné a rotační části ojnice, které jsou nutné pro výpočet redukováných momentů zalomení. Dále pak výsledný kroučící moment působící na jedno zalomení. Pomocí něho vypočteme úhel výkmitu hřídele.

#### 3.1. Kinematika klikového mechanismu

Vypočteme základní veličiny: dráhu, rychlost a zrychlení pístu. Při výpočtu použijeme rozkladu na harmonické složky. Složky třetího a vyššího řádu zanedbáváme, výpočet příliš neovlivní.

Dráha pístu v závislosti na natočení klikového hřídele:

$$s(\alpha) = R_o(1 - \cos(\alpha) + \frac{\lambda}{4}(1 - \cos(2\alpha))) \text{ [m]} \quad (4),$$

Rychlost pístu v závislosti na natočení klikového hřídele:

$$v(\alpha) = R_o\omega(\sin(\alpha) + \frac{\lambda}{2}\sin(2\alpha)) \text{ [ms}^{-1}\text{]} \quad (5),$$

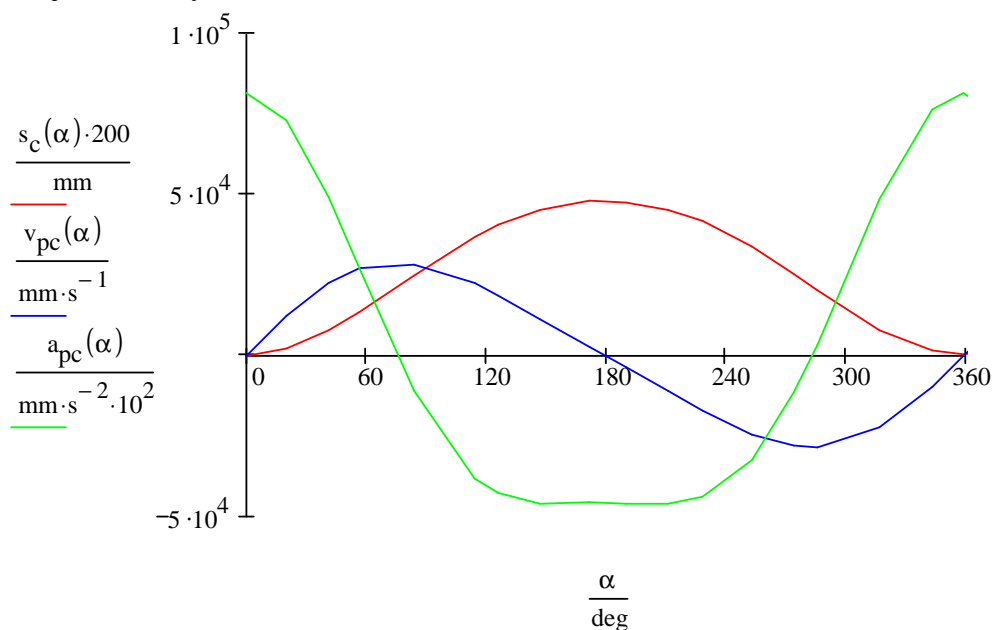
Zrychlení pístu v závislosti na natočení klikového hřídele:

$$a(\alpha) = R_o\omega^2(\cos(\alpha) + \lambda\cos(2\alpha)) \text{ [ms}^{-2}\text{]} \quad (6),$$

kde:  $\alpha$  [°] je úhel natočení klikového hřídele,

$\lambda$  [-] je klikový poměr,

$\omega$  [s<sup>-1</sup>] je úhlová rychlost otáčení klikového hřídele.



Obr. 1 Závislost velikostí dráhy, rychlosti a zrychlení pístu na úhlu natočení klikového hřídele

### 3.2. Rozdělení hmot v ojnici

Ojnice koná pohyb složený z pohybu rotačního a přímočarého vratného. Pro další výpočet je nutné rozdělit hmotu ojnice na dvě části příslušné těmto pohybům. Metoda tohoto dělení se nazývá redukce hmoty ojnice do  $n$  bodů. Princip spočívá ve vytvoření modelu ojnice, jehož veškerá hmota bude soustředěna do  $n$  bodů spojených nehmotnou tyčí. Zpravidla se užívá dvou nebo třibodová redukce. U dvoubodové redukce je veškerá hmotnost rozdělena do dvou bodů umístěných ve středech ok ojnice. Třibodová redukce přidává ještě jeden bod do těžiště.

V tomto případě použijeme dvoubodovou redukci, protože v dalších výpočtech se s hmotností v těžišti nepracuje.

Z rovnice rovnováhy zjistíme polohu těžiště:

$$\left(\frac{T_A}{2\pi}\right)^2 m_{oj} g a - m_{oj} a^2 = \left(\frac{T_B}{2\pi}\right)^2 m_{oj} g b - m_{oj} b^2 \quad (7),$$

kde:  $a$  [mm] je vzdálenost malého oka ojnice od těžiště,  
 $b$  [mm] je vzdálenost velkého oka ojnice od těžiště,  
 $T_A$  a  $T_B$  [s] jsou doby jednoho kmitu ojnice visící za malé a velké oko. Tyto hodnoty byly získány experimentálně.

Následně vypočteme ze soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} m_{oj} &= m_A + m_B \\ m_A l_A &= m_B l_B \end{aligned} \quad (8),$$

hmotnost posuvné části ojnice  $m_A$  [kg] a  
hmotnost rotační části ojnice  $m_B$  [kg].

Tyto hodnoty jsou nezbytné pro výpočet redukovaných momentů setrvačnosti.

### 3.3. Silové a momentové zatížení ojnice

Další veličinou nezbytnou pro analýzu dynamického modelu klikového hřídele je kroutící moment působící na jedno zalomení. Jeho velikost je dána silami působícími na pístní čep a radiálními a tangenciálními silami na ojnicím čepu hřídele.

#### 3.3.1. Síly přenášené pístním čepem

Jedná se o sílu od tlaku plynů, která je dána součinem tlaku ve spalovacím prostoru a plochou příčného průřezu válce:

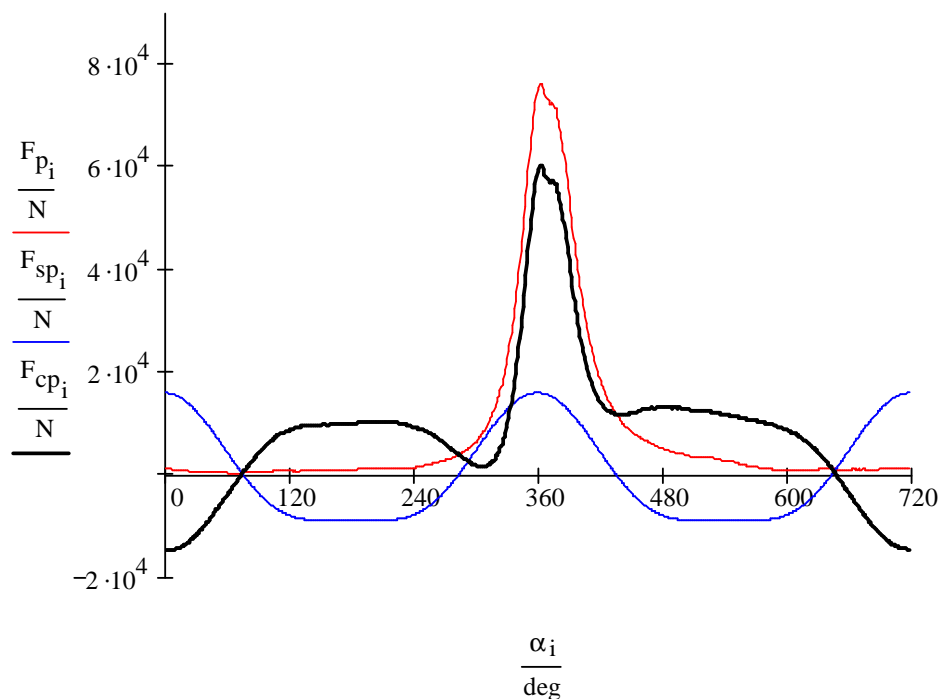
$$F_p = \frac{\pi D^2}{4} \cdot p \quad [\text{N}] \quad (9).$$

Dále o setrvačnou sílu pístní skupiny:

$$F_{sp} = m_{ps} \cdot a(\alpha) \quad [\text{N}] \quad (10).$$

kde:  $m_{ps}$  [kg] je hmotnost pístní skupiny (píst, pístní čep, pístní kroužky),  
 $a(\alpha)$  [ $\text{ms}^{-2}$ ] je zrychlení klikového hřídele.

Součtem těchto sil získáme celkovou sílu působící na píst v ose válce  $F_{cp}$ , obr. 2.

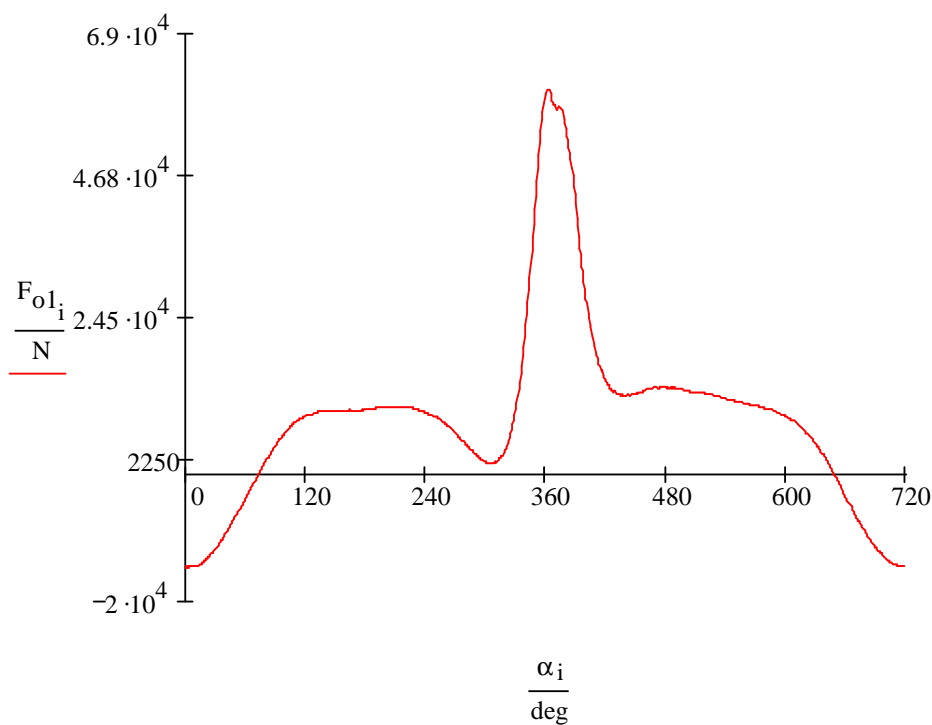


Obr. 2 Síly působící na píst

Tyto síly se přenáší na klikový hřídel prostřednictvím ojnice, která při pohybu stále mění směr jejich působení. Síla  $F_{cp}$  se musí přepočítat na ojniční sílu  $F_o$ :

$$F_o = \frac{F_{cp}}{\cos \beta} \text{ [N]} \quad (11),$$

kde:  $\beta$  [°] je úhel odklonu ojnice v závislosti na úhlu natočení kliky.



Obr. 3 Ojniční síla

### 3.3.2. Radiální a tangenciální síly

Ojniční sílu přenesenou na ojnicí čep klikového hřídele rozložíme do dvou složek. Složka radiální působí v každém okamžiku směrem k ose otáčení klikového hřídele. Na výpočet kroutícího momentu nemá vliv.

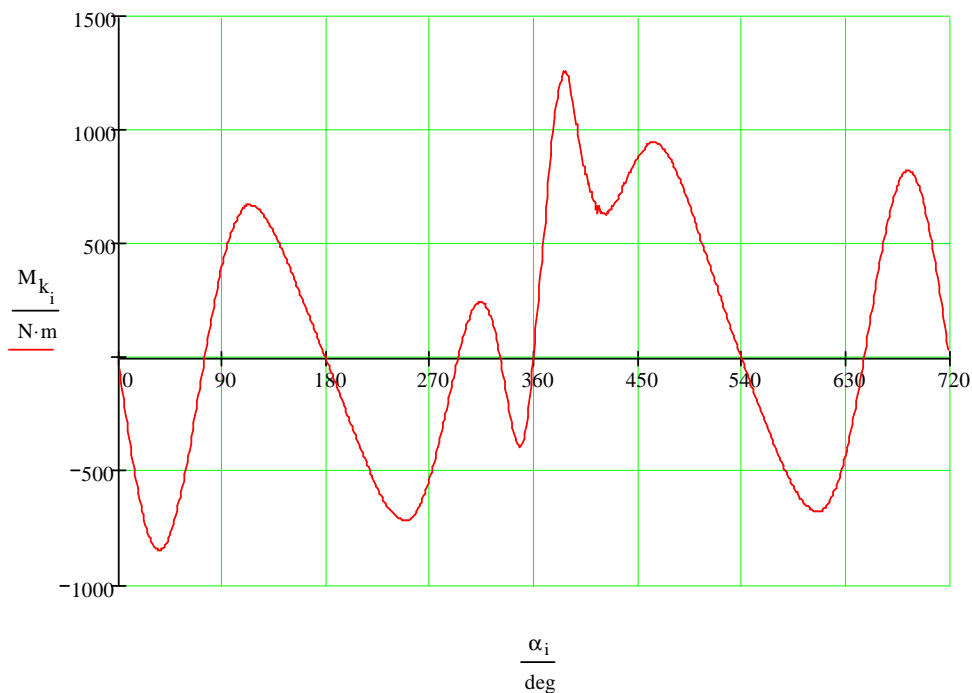
Složka tangenciální působí v každém okamžiku ve směru otáčení klikového hřídele.

$$F_t = F_o - \frac{m_A a(\alpha)}{\cos \beta} \cdot \sin(\alpha + \beta) \text{ [N]} \quad (12).$$

### 3.3.3. Kroutící moment klikového hřídele

Průběh kroutícího momentu pak vypočteme jako součin příslušné tangenciální síly a délky kliky:

$$M_k = F_t \cdot R_o \text{ [Nm]} \quad (13).$$



Obr. 4. Průběh kroutícího momentu na jednom zalomení

Veškeré výpočty k této kapitole, jsou obsaženy v Příloze 1.

## 4. Úvod do problematiky kmitání klikových hřídelů

### 4.1. Způsoby kmitání klikového hřídele

Ocel, ze které je klikový hřídel vyroben, je pružný materiál. Její pružnost je základním předpokladem ke vzniku kmitů v hřídeli. Klikový hřídel může kmitat třemi směry:

- a) Kolmo na svou osu. Takové kmitání se nazývá ohybové. Vyvolává jej periodicky se měnící síla působící kolmo na hřídel. Velikost kmitání závisí na uchycení hřídele v bloku motoru. Čím jsou vzdálenosti mezi hlavními ložisky kratší, tím jsou vlastní kmity posouvány k vyšším frekvencím a eliminují se tím rezonanční stavy v rozsahu provozních otáček motoru.
- b) Kolem své osy. Toto kmitání se nazývá torzní a budu se mu věnovat níže.
- c) Podélně se svou osou. Tento druh kmitání nastává vždy společně s ostatními dvěma druhy. Jeho účinky na hřídel jsou zanedbatelné.

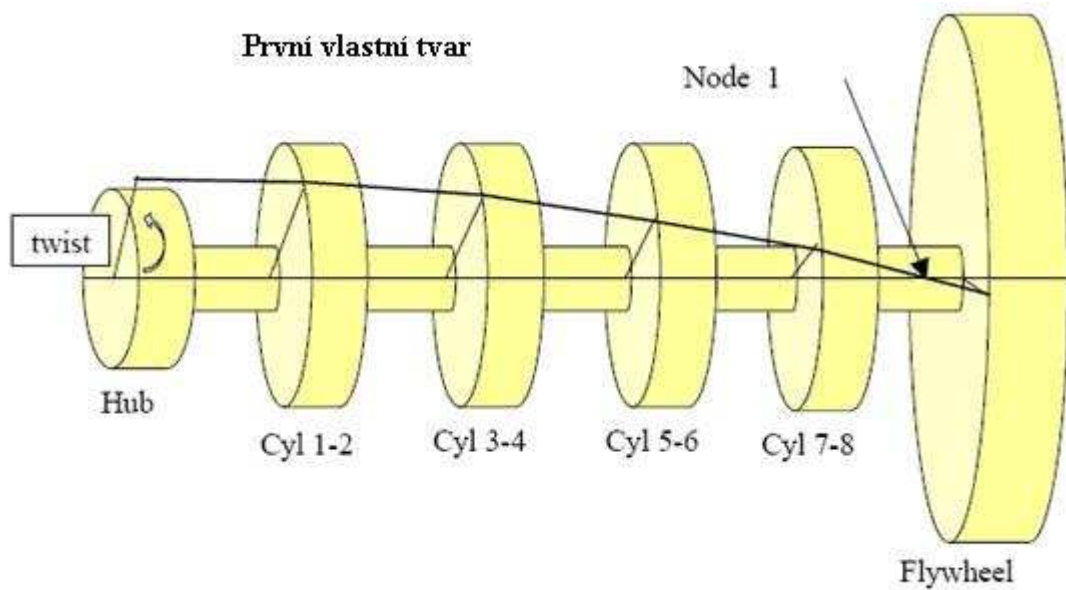
### 4.2. Torzní kmity

Torzní kmit jako takový je podélné zkroucení klikového hřídele. Toto zkroucení (výkmit) se opakuje ve vysokých frekvencích (kolem 250 – 400 Hz) a je generováno nerovnoměrnostmi v pohybu motoru. Ty vznikají zejména působením síly od tlaku plynu, která v každém válci čtyřdobého motoru vzniká jednou za dvě otáčky při expanzi. Na nerovnoměrnosti chodu motoru se též podílí setrvačná síla, která dvakrát za otáčku změní směr.

Úhel výkmitu je relativně malý (do  $2^\circ$ ), ale kvůli velké tuhosti klikového hřídele v něm vytváří velké momenty. Tyto momenty jsou mnohem větší než kroučící moment motoru, pohánějící vozidlo. Vysoká frekvence a velké momenty v hřídeli způsobují jeho únavové poškození, opotřebením ložisek a mají nepříznivý dopad na všechny části motoru poháněné od klikového hřídele.

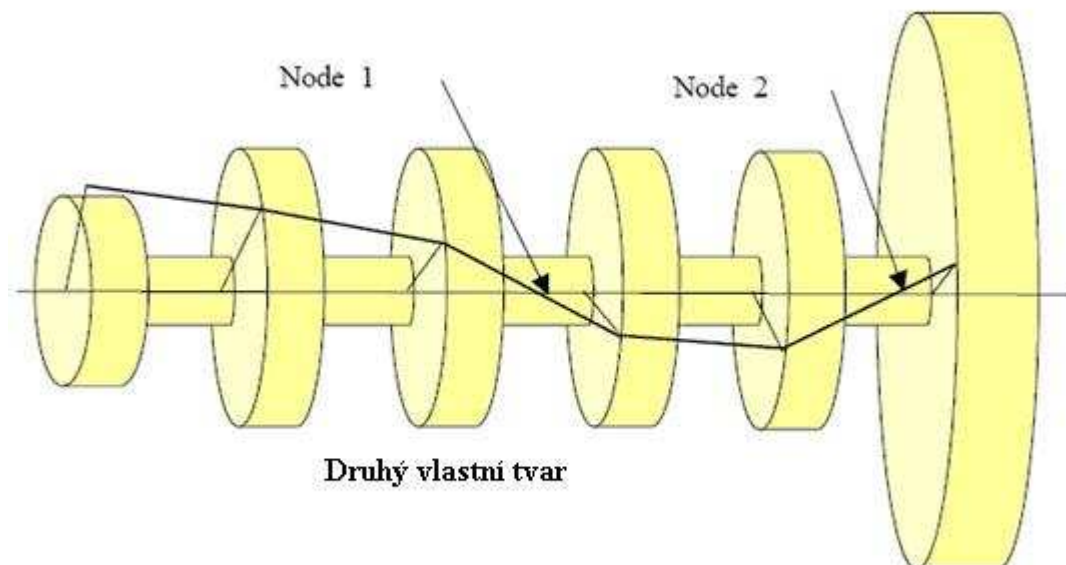
Představme si klikový hřídel jako soustavu setrvačnicků (místo každého zalomení) spojených ve středu torzní tyčí. V této soustavě jsou významné především její první dvě frekvence vlastního kmitání (vlastní frekvence), každá z nich má jiný vlastní tvar výkmitu po délce hřídele.

V prvním vlastním tvaru se část hřídele od volného konce po poslední hlavní čep vychýlí na jednu stranu, zatímco setrvačnick na opačnou. Místo, kde je výkmit nulový, se nazývá uzel. Je to místo s největším torzním napětím. V uzlu je největší pravděpodobnost lomu hřídele, způsobeného torzí.



Obr. 5. První vlastní tvar výkmitu [5]

Druhý vlastní tvar přidává na hřídele další uzel. Tedy volný konec hřídele a setrvačnick jsou stejným směrem, zatímco střed hřídele jde opačným. Úseky mezi uzly jsou kratší při stejné tuhosti klikového hřídele. Z toho vyplývá, že druhá vlastní frekvence je vyšší než první.



Obr. 6. Druhý vlastní tvar výkmitu [5]

Torzní kmity se projeví, když se frekvence nerovnoměrností chodu motoru přiblíží některé z vlastních frekvencí klikového hřídele. Když se frekvence působící na hřídel vyrovná s vlastní frekvencí hřídele nastává rezonance systému. Velikost výkmitu se několikanásobně zvětší. Na grafu rezonanční křivky se objeví „špička“.

Zvětšený výkmit vyvolaný rezonancí je příčinou poškození hřídele a ložisek. Také nebezpečně rychle navyšuje počet únavových cyklů, protože tento jev probíhá ve vysokých frekvencích.



## 5. Dynamický model klikového hřídele

Pro zjednodušení výpočtu se klikové ústrojí přepočítává na náhradní systém, tzv. dynamický model klikového hřídele. Model musí mít stejné dynamické vlastnosti jako původní hřídel (moment setrvačnosti a tuhost). Model se skládá z hmotných kotoučů spojených nehmotným torzním hřídelem. Příklad náhradního torzního systému pro vidlicový osmiválcový motor je na obr. 5.

Rozměry, momenty setrvačnosti a tuhosti modelu získáme pomocí redukce délek a hmotností.

### 5.1. Redukce délek

Při redukci délek vypočítáme průměr  $D_{red}$  a délku  $L_{red}$  válcové náhrady klikového hřídele. Tyč musí být navržena tak, aby se při působení daného momentu zkroutila o stejný úhel jako reálný klikový hřídel.

Redukovaný průměr  $D_{red}$  se obvykle volí stejný jako průměr hlavního čepu klikového hřídele  $D_j$ .

Redukovaná délka jednoho zalomení:

$$L_{red} = D_{red} \left( \frac{L_j}{D_j^4} + \frac{L_c}{D_c^4} + \frac{2\pi}{32E} \cdot \frac{R_o}{L_w B^3} \right) [\text{mm}] \quad (14).$$

Tento vzorec však neposkytuje dostatečně přesné ztvárnění délky, proto se používají různé zpřesňující koeficienty zpracovávané do něho.

V tomto případě byl použit vztah dle Ker Wilsona:

$$L_{red} = D_{red} \left( \frac{L_j + 0,4D_j}{D_j^4} + \frac{L_c + 0,4D_c}{D_c^4} + \frac{R_o - 0,2(D_j + D_c)}{L_w B^3} \right) [\text{mm}] \quad (15).$$

Redukovaná délka volného konce klikového hřídele:

$$L_{rr} = (l_1 + \xi d_1) \frac{D_{red}^4}{d_1^4} + (l_2 - \xi d_1) \frac{D_{red}^4}{d_2^4} [\text{mm}], \quad (16).$$

kde:  $l_1$  [mm] je volná délka náboje pro řemenici,

$l_2$  [mm] je polovina délky hlavního čepu,

$d_1$  [mm] je průměr náboje pro řemenici,

$d_2$  [mm] je průměr hlavního čepu,

$\xi$  [-] součinitel vyjadřující poměr mezi  $d_1$  a  $d_2$ .

Redukovaná délka na konci se setrvačnickem:

$$L_{rs} = \frac{L_j}{2} + l_p \frac{D_{red}^4}{d_p^4} + \frac{L_{red}}{2} [\text{mm}] \quad (17).$$

kde:  $l_p$  [mm] je délka příruby pro setrvačnick,

$d_p$  [mm] je průměr roztečné kružnice, na které jsou umístěny díry pro uchycení setrvačnicku.

Tab. 2 Redukované délky částí klikového hřídele

$L_{red}$ [mm]	$L_{rr}$ [mm]	$L_{rs}$ [mm]
260	1466	207

Výpočet redukce délek je uveden v Příloze 3.

## 5.2. Redukce hmot

Modelem hmoty jednoho zalomení je kotouč o momentu setrvačnosti  $J_{red}$ , jaký má ono zalomení společně s ojnicí a pístní skupinou. Kinetická energie tohoto kotouče musí být stejná jako kinetická energie zalomení, ojnice a pístní skupiny.

Redukovaný moment setrvačnosti jednoho zalomení se vypočte:

$$J_{red} = J_z + m_2 r^2 + m_p \left( \frac{1}{2} + \frac{\lambda^2}{8} \right) \cdot R_o^2 \quad [\text{kgm}^2] \quad (18),$$

kde:  $J_z$  [ $\text{kgm}^2$ ] je skutečný moment setrvačnosti příslušného zalomení klikového hřídele. Zjistíme jej analýzou 3D modelu zalomení např. v prostředí ProEngineer.

Redukované momenty volného konce klikového hřídele a konce na straně setrvačnicku byly dodány vedoucím diplomové práce.

Tab.3. Redukované délky částí klikového hřídele

$J_{red}$ [ $\text{kgm}^2$ ]	$J_{rr}$ [ $\text{kgm}^2$ ]	$J_{rs}$ [ $\text{kgm}^2$ ]
0,035	0,027	1,08

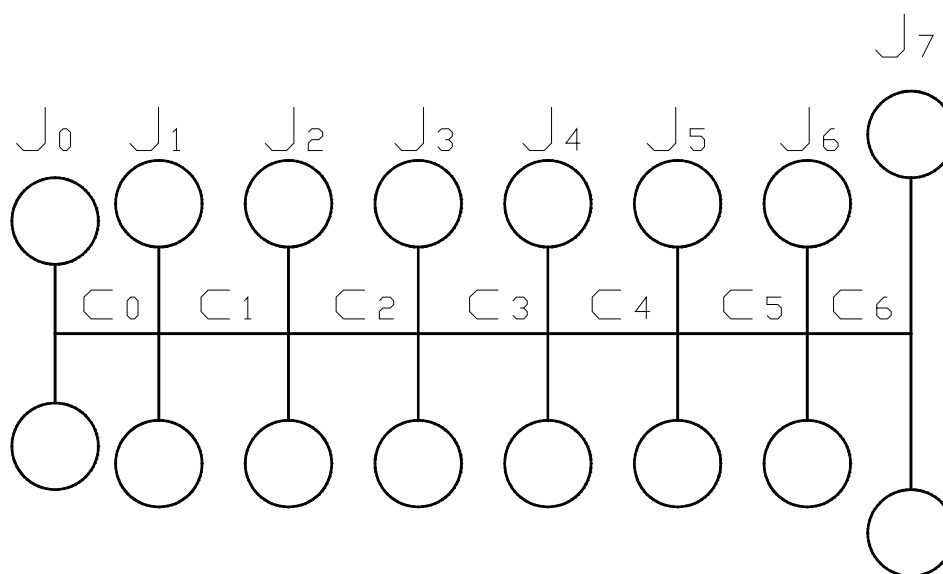
Výpočet redukce hmot je uveden v Příloze 3.

## 6. Vlastní torzní kmitání

Kmitání, způsobené vnějším impulsem, které se děje bez jakéhokoli dalšího zásahu z vnějšku, se nazývá vlastním kmitáním. Samo o sobě by se nezastavilo, ale působením pasivních odporů se po určité době utlumí. Vlastní kmity jsou vlastností každé soustavy, závisí na její pružnosti a hmotnosti. Kmitání probíhá v určitých frekvencích a amplitudách. Prakticky jsou důležité pouze první dvě frekvence. Vyšších frekvencí motor zpravidla při svém provozu nedosahuje. Pokud by se vlastní frekvence shodovala s některou s frekvencí sil generovaných motorem, tyto dvě frekvence by se sečetly a nastala by rezonance.

### 6.1. Torzní tuhost

Jak už bylo uvedeno výše, klikový hřídel se zjednoduší na náhradní torzní systém *obr.7*. Kotouče reprezentují hmotu hřídele s momentem setrvačnosti  $J_i$ . Od indexu 0 označujícího řemenice až po index 7 označující hmotu setrvačnicku. Spojovací tyče mají určitou tuhost  $c_i$ . Indexování jde opět směrem od řemenice k setrvačnicku.



Obr. 7. Náhradní torzní systém řadového šestiválce

Torzní tuhost vypočteme ze vztahu:

$$c = \frac{G \cdot I_p}{L_{red}} \text{ [Nm rad}^{-1}\text{]} \quad (19),$$

kde:  $G$  [Mpa] je modul pružnosti ve smyku spojovací tyče  
 $I_p$  [m<sup>4</sup>] je kvadratický polární moment spojovací tyče:

$$I_p = \frac{\pi D_{red}^4}{32} \text{ [m}^4\text{]} \quad (20).$$

Tuhosti spojovacích tyčí jsou uvedeny v *tab. 4*.

Tab.4 Torzní tuhosti v náhradním torzním systému

$c_0$ [Nm.rad <sup>-1</sup> ]	$c_1$ [Nm.rad <sup>-1</sup> ]	$c_2$ [Nm.rad <sup>-1</sup> ]	$c_3$ [Nm.rad <sup>-1</sup> ]	$c$ [Nm.rad <sup>-1</sup> ]	$c_5$ [Nm.rad <sup>-1</sup> ]	$c_6$ [Nm.rad <sup>-1</sup> ]
227669	1283333	1283333	1283333	1283333	1283333	1612089

Výpočet torzních tuhostí je uveden v Příloze 3.

## 6.2. Vlastní frekvence a tvary kmitání

Vlastní kmitání je nezávislé na pohybu klikového hřídele. Takže při sestavování pohybových rovnic uvažujeme hřídel v klidu. Pohybová rovnice pak vypadá [3]:

$$M\ddot{q} + Cq = 0 \quad (21),$$

kde:  $M$  je matice hmotnosti:

$$M = \begin{pmatrix} J_{red0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{red1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{red2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{red3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{red4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{red5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{red6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{red7} \end{pmatrix}$$

$C$  je matice tuhosti:

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & -c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_0 & c_0 + c_1 & -c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & -c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_4 & c_4 + c_5 & -c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_5 & c_5 + c_6 & -c_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_6 & c_6 \end{pmatrix}$$

a  $q$  je vektor velikostí výkmitů:

$$q = a \cdot e^{j\omega t} \quad (22).$$

Přímý výpočet vlastních frekvencí z  $\det[C - \omega^2 M] = 0$  nepřichází pro velkou výpočetní náročnost v úvahu. Toto úskalí můžeme obejít s využitím standardního problému vlastních čísel.

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad (23),$$

kde:  $A$  je čtvercová matice

$I$  je jednotková matice

$\lambda$  je příslušné vlastní číslo

$x$  je vlastní vektor

Vynásobíme-li homogenní soustavu

$$(C - \Omega^2 M) \cdot a = 0 \quad (24),$$

maticí  $M^{-1}$ , která je inverzní k matici hmotnosti, získáme soustavu ekvivalentní ke standardnímu problému vlastních čísel:

$$(M^{-1}C - \Omega^2 I) \cdot a = 0 \quad (25),$$

kde:  $M^{-1}C$  je ekvivalentní s maticí  $A$ ,  
 $\Omega^2$  je obdobou  $\lambda$ ,  
 $a$  je vlastním vektorem stejně jako  $x$ .

Z výše uvedeného jasně plyne, že  $\Omega^2$  jsou vlastní čísla matice  $M^{-1}C$ . Úhlová rychlost vlastního kmitání je tedy odmocnina z vlastních čísel. Vlastní tvary kmitání se pak vypočtou z vlastních vektorů této matice.

Vlastní frekvenci  $\omega$  pak již jednoduše přepočítáme:

$$\omega = \frac{\Omega}{2\pi} \text{ [Hz]} \quad (26).$$

kde:  $\Omega$  [rad.s<sup>-1</sup>] je úhlová rychlost vlastního kmitání.

Pro potřeby výpočtu je potřeba znát první dvě vlastní frekvence. Další vlastní frekvence vznikají až za provozními otáčkami motoru. Hodnoty první vlastní frekvence ( $N_1$ ) a druhé vlastní frekvence ( $N_2$ ) jsou uvedeny v *tab. 5*.

*Tab.5 Vlastní frekvence*

$N_1$ [Hz]	$N_2$ [Hz]
226	484

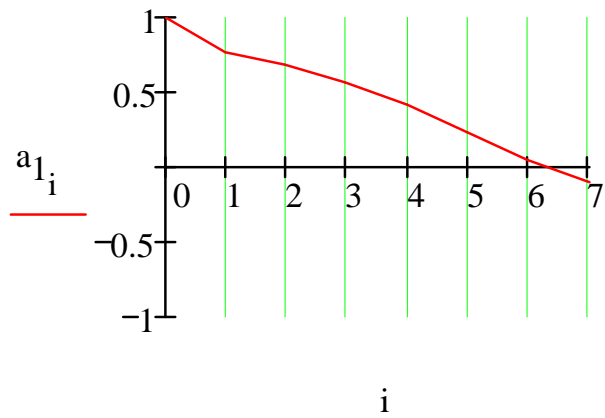
Vzhledem k tomu, že velikost amplitud vlastního kmitání je závislá na velikosti počátečního impulsu, uděleného soustavě, vypočteme pouze poměrné velikosti amplitud.

V poměru k jednotkové amplitudě řemenice  $X_0$ :

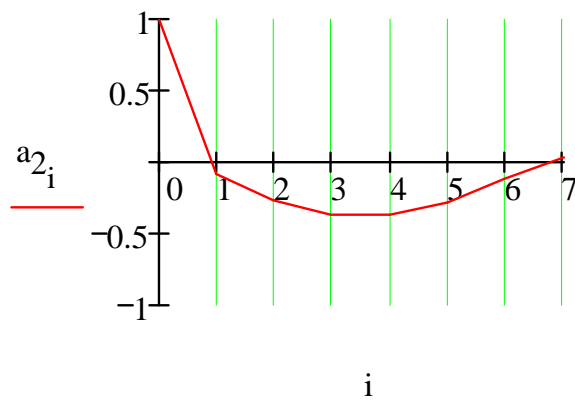
$$a = \frac{X_i}{X_0} \text{ [-]} \quad (27).$$

Spojením hodnot poměrných velikostí amplitud, tak jak jdou za sebou, vzniká výkmitová čára. Tato čára popisuje, jak vypadá kmitání v příslušném vlastním tvaru.

Výpočet vlastních tvarů a frekvencí je uveden v *Příloze 3*.



Obr. 8. První vlastní tvar kmitu



Obr. 9. Druhý vlastní tvar kmitu

## 7. Vynucené torzní kmitání

Vlastní torzní kmity se v krátkém čase po jejich vzniku utlumí, takže nejsou nebezpečné. Periodicky proměnný kroučící moment, který byl vypočítán v *kap. 3.3.3*, způsobuje vynucené kmitání klikového hřídele, a toto už nebezpečné být může.

### 7.1. Harmonická analýza budícího momentu

Kroučící moment jednoho zalomení klikového hřídele se periodicky mění podle natočení kliky. U čtyřdobých motorů je perioda dvě otáčky. Výsledný kroučící moment se rozloží na řadu sinusově proměnných dílčích momentů tzv. harmonických složek. V závislosti na počtu period harmonické složky v jedné otáčce klikového hřídele, určíme řád harmonické složky  $\kappa$ .

Čtyřdobé motory mají řád harmonické složky odstupňovaný po 0,5:  $\kappa = 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; \dots$

Pro rozklad na harmonické složky se používá Fourierova transformace. Vypočteme jednotlivé amplitudy kroučícího momentu  $M_f$  příslušné jednotlivým harmonickým složkám. Využijeme Fourierovy analýzy v oboru reálných čísel:

Kosinová složka:

$$A_k = \frac{2}{n} \sum_j \left( x_j \cdot \cos \left( 2k\pi \frac{j}{n} \right) \right) \quad (28).$$

Sinová složka:

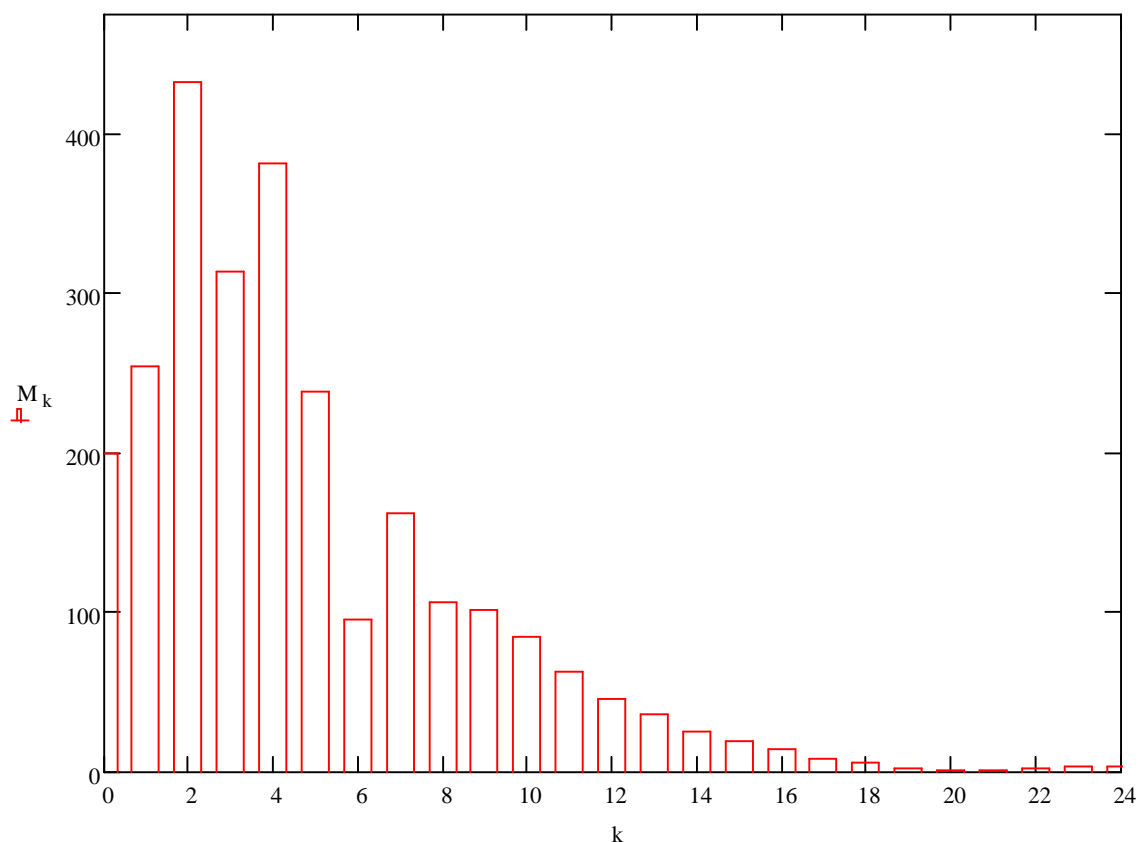
$$B_k = \frac{2}{n} \sum_j \left( x_j \cdot \sin \left( 2k\pi \frac{j}{n} \right) \right) \quad (29).$$

Představme si hodnoty  $A_k$  a  $B_k$  jako reálnou a imaginární složku komplexního čísla. Výsledná hodnota amplitudy momentu  $M_f$  se vypočte jako absolutní hodnota z tohoto komplexního čísla:

$$M_f = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \text{ [Nm]} \quad (30),$$

kde:  $k$  označuje harmonickou složku,  
 $x_j$  označuje příslušný vzorek,  
 $n$  je počet vzorků.

Fourierova analýza je uvedena v Příloze 2.



Obr. 10. Rozklad točivého momentu na harmonické složky

## 7.2. Rezonanční otáčky motoru

Každá z harmonických složek způsobuje nezávisle na ostatních vynucená kmitání hřídele ve frekvenci, jakou má tato složka. Složka řádu  $\kappa$  generuje při otáčkách  $n$  vynucené kmitání o frekvenci  $\kappa n$ . Bude-li  $\kappa n$  souhlasit s frekvencí vlastních kmitů  $N$ , nastane rezonance těchto dvou kmitání. Motor má tedy celou škálu rezonančních otáček příslušných kmitání daného vlastního tvaru. Rezonanční otáčky vyjádříme vztahem:

$$n_{rez} = \frac{N}{\kappa} \text{ [s}^{-1}\text{]} \quad (31).$$

O nebezpečnosti rezonančních otáček rozhodují faktory jako: tlumení, amplituda momentu  $M_f$ , vzájemná působení těchto momentů na klikách hřídele. Když je rezonance příliš vydatná a může ohrozit pevnost hřídele, nazýváme takové otáčky kritickými.

Rezonanční otáčky do řádu  $\kappa = 12$  jsou uvedeny v tab. 6. Motor pracuje v provozních otáčkách  $800 - 2200 \text{ min}^{-1}$ . Provozní otáčky jsou v tabulce označeny tučně. Otáčky při hlavních řádech harmonické složky jsou vyznačeny červeně. Hlavní řády čtyřdobého motoru zjistíme ze vzorce:

$$\kappa_h = \frac{z}{2} k \quad (32),$$



kde:  $z$  je počet válců motoru  
 $k$  je číslo harmonické složky;  $k = 1, 2, 3, \dots$

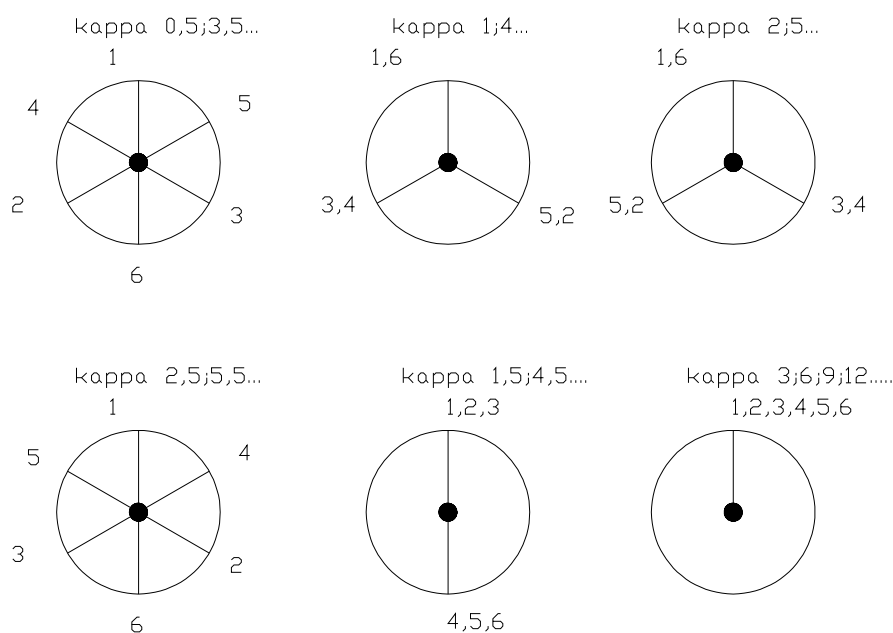
Tedy pro šestiválcový motor jsou hlavní řády harmonické složky: 3, 6, 9, 12 ...

Tab.6 Rezonanční otáčky

$\kappa$	$n_{rez1} [s^{-1}]$	$n_{rez2} [s^{-1}]$
0,5	27167	58141
1	13584	29071
1,5	9056	19380
2	6792	14535
2,5	5433	11628
<b>3</b>	<b>4528</b>	<b>9690</b>
3,5	3881	8306
4	3396	7268
4,5	3019	6460
5	2717	5814
5,5	2470	5286
<b>6</b>	<b>2264</b>	<b>4845</b>
6,5	<b>2090</b>	4472
7	<b>1941</b>	4153
7,5	<b>1811</b>	3876
8	<b>1698</b>	3634
8,5	<b>1598</b>	3420
<b>9</b>	<b>1509</b>	<b>3230</b>
9,5	<b>1430</b>	3060
10	<b>1358</b>	2907
10,5	<b>1294</b>	2769
11	<b>1235</b>	2643
11,5	<b>1181</b>	2528
<b>12</b>	<b>1132</b>	<b>2423</b>

### 7.3. Relativní vydatnost rezonancí

Při rezonančním kmitání se tvar výkmitové čáry blíží výkmitové čáře vlastního torzního kmitání systému (*obr. 8 a 9*). Pomůckou pro výpočet vydatnosti rezonancí mohou být tzv. směrové hvězdice vektorů  $a_i$  pro různé řády harmonické složky. Na *obr. 11* jsou znázorněny směrové hvězdice pro řadový šestiválec s pořadím zápalu 1-5-3-6-2-4. Pro všechny válce jsou úhly mezi po sobě jdoucími klikami stejné,  $\delta = 120^\circ$ .



Obr. 11. Směrové hvězdice v závislosti na  $\kappa$

Představme si nyní vektory  $a_i$  v komplexní rovině, rozložené na sinové a kosinové složky. Sečteme-li jednotlivé složky získáme sinovou a kosinovou složku vektoru  $R$ , jehož velikost je relativní vydatností rezonancí generovaných vynuceným kmitáním.

Relativní vydatnost rezonancí pro daný řád harmonické složky se pak vypočte:

$$R_{\kappa} = \sqrt{\left(\sum_i (a_i \cos(\kappa\delta_i))\right)^2 + \left(\sum_i (a_i \sin(\kappa\delta_i))\right)^2} \quad [-] \quad (33).$$

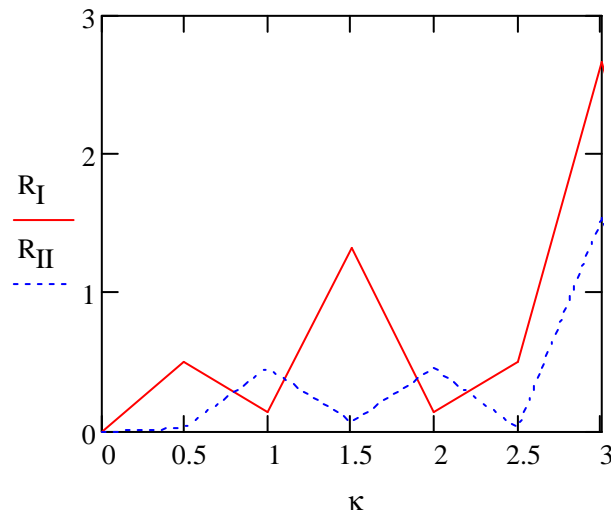
Hodnoty vydatností rezonancí pro I. a II. vlastní frekvenci jsou uvedeny v tab. 7.

Tab.7. Vydatnosti rezonancí

Vydatnost rezonance $R_{\kappa}$	Vlastní frekvence	
	I.	II.
$\kappa = 0,5; 3,5; 6,5; 9,5$	0,492	0,020
$\kappa = 1; 4; 7; 10$	0,137	0,457
$\kappa = 2; 5; 8; 11$	0,137	0,457
$\kappa = 2,5; 5,5; 8,5; 11,5$	0,492	0,020
$\kappa = 1,5; 4,5; 7,5; 10,5$	1,322	0,061
$\kappa = 3; 6; 9; 12$	2,657	1,539

Povšimněme si, že vydatnosti v posledních dvou řádcích převyšují ostatní. Směrové vektory těchto složek leží totiž na jedné přímce. Vznikají tzv. silné harmonické složky.

Výpočet relativní vydatnosti rezonancí je uveden v Příloze 3.



Obr. 12. Porovnání vydatností rezonancí pro I. a II. vlastní frekvenci

#### 7.4. Torzní výchylky v rezonanci

Velikost torzních výchylek je závislá především na velikosti tlumících odporů  $\xi$ . Jsou-li tyto tlumící odpory dostatečně malé, je tvar vynuceného kmitání v rezonanci skoro stejný jako tvar vlastního kmitání. Dále uvažujeme, že je tlumena jen hmota samotného hřídele, bez jakýchkoli připojených hmot.

V tomto případě byla velikost tlumícího odporu zjištěna ze starších, podobných motorů.  
 $\xi = 2,2 \text{ Nms.rad}^{-1}$ .

Amplitudu torzních kmitů volného konce klikového hřídele vypočteme jako:

$$\phi_0 = \frac{M_{f\kappa} R_\kappa}{\xi \cdot \Omega \sum_z (a_z)^2} \text{ [rad]} \quad (34).$$

kde:  $\xi$  [Nms.rad<sup>-1</sup>] je tlumící odpor,

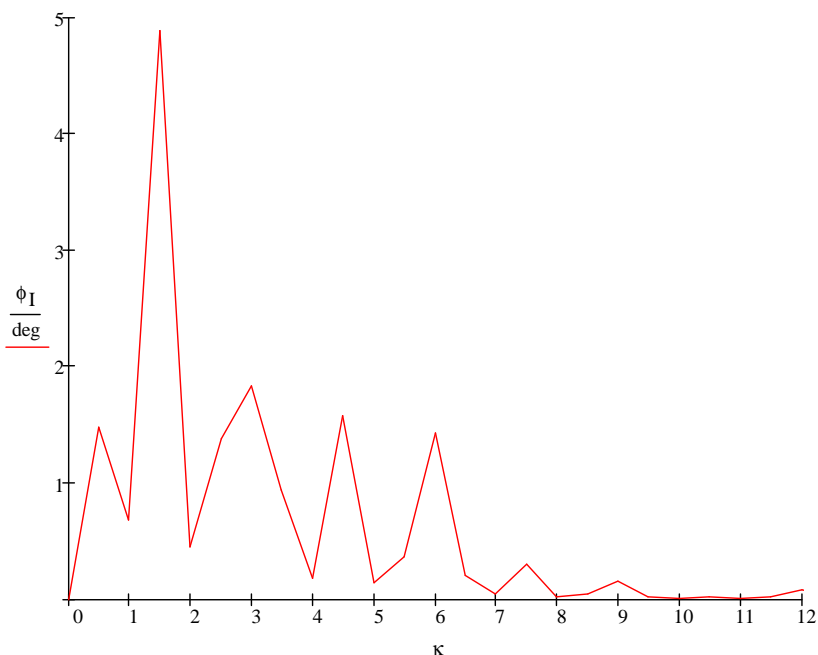
$\Omega$  [rad.s<sup>-1</sup>] je úhlová rychlost vlastních kmitů,

$a_z$  [-] jsou poměrné výchylky na příslušném místě náhradního torzního systému.

Velikosti amplitud torzních kmitů volného konce klikového hřídele ve stupních pro rezonanci v I. vlastní frekvenci jsou uvedeny v tab. 8. V tabulce jsou pro lepší orientaci přidány rezonanční otáčky.

Tab.8 Amplitudy torzních kmitů volného konce

$\kappa$	$n_{\text{rezl}} [\text{s}^{-1}]$	$\phi [^\circ]$
0,5	27167	1,477
1	13584	0,674
1,5	9056	4,889
2	6792	0,444
2,5	5433	1,381
<b>3</b>	<b>4528</b>	<b>1,836</b>
3,5	3881	0,943
4	3396	0,177
4,5	3019	1,577
5	2717	0,135
5,5	2470	0,359
<b>6</b>	<b>2264</b>	<b>1,431</b>
6,5	<b>2090</b>	<b>0,205</b>
7	<b>1941</b>	<b>0,041</b>
7,5	<b>1811</b>	<b>0,298</b>
8	<b>1698</b>	<b>0,022</b>
8,5	<b>1598</b>	<b>0,048</b>
<b>9</b>	<b>1509</b>	<b>0,158</b>
9,5	<b>1430</b>	<b>0,014</b>
10	<b>1358</b>	<b>0,001</b>
10,5	<b>1294</b>	<b>0,014</b>
11	<b>1235</b>	<b>0,003</b>
11,5	<b>1181</b>	<b>0,014</b>
<b>12</b>	<b>1132</b>	<b>0,085</b>



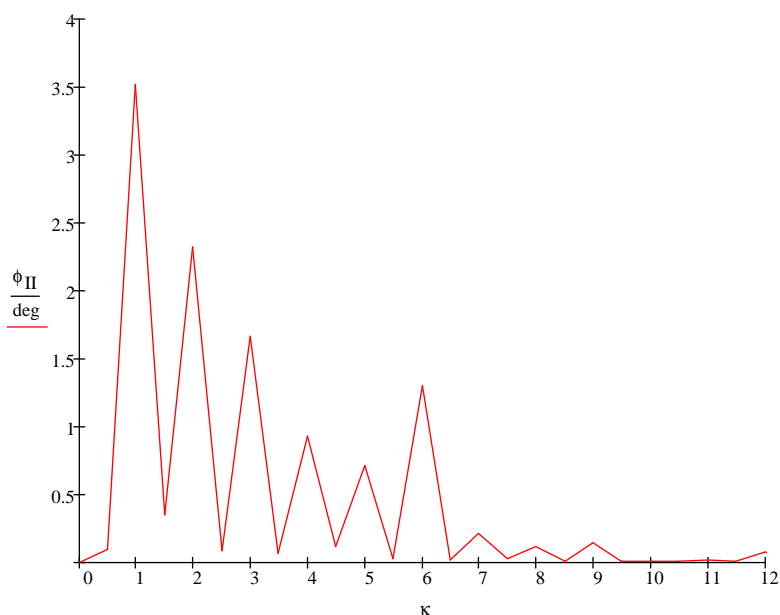
Obr. 13. Amplitudy torzních kmitů volného konce

Největší amplituda pro rezonanci při I. vlastní frekvenci nastává při  $\kappa = 1,5$ . Tento řád je však velmi vzdálen provozním otáčkám ( $800 - 2200 \text{ min}^{-1}$ ). Těm je nejbližší řád  $\kappa = 6$ . Pro kontrolu na torzní namáhání hřídele tedy vybereme řád  $\kappa = 6$ , který má zároveň největší amplitudu v rozsahu provozních otáček.

Velikosti amplitud torzních kmitů volného konce klikového hřídele ve stupních pro rezonanci v II. vlastní frekvenci jsou uvedeny v tab. 9. V tabulce jsou pro lepší orientaci přidány rezonanční otáčky.

Tab.9 Amplitudy torzních kmitů volného konce

$\kappa$	$n_{rez2} [s^{-1}]$	$\phi [^\circ]$
0,5	58141	0,093
1	29071	3,517
1,5	19380	0,352
2	14535	2,317
2,5	11628	0,087
3	9690	1,662
3,5	8306	0,059
4	7268	0,924
4,5	6460	0,113
5	5814	0,706
5,5	5286	0,023
6	4845	1,295
6,5	4472	0,013
7	4153	0,212
7,5	3876	0,021
8	3634	0,113
8,5	3420	0,003
9	3230	0,143
9,5	3060	0,001
10	2907	0,006
10,5	2769	0,001
11	2643	0,014
11,5	2528	0,001
12	2423	0,077



Obr. 14 Amplitudy torzních kmitů volného konce

Největší amplituda pro rezonanci při II. vlastní frekvenci nastává při  $\kappa = 1$ . Nejblíže provozním otáčkám se nachází až řád  $\kappa = 12$ , pro který budeme kontrolovat.

Výpočet obou amplitud je uveden v Příloze 3.

## 8. Namáhání na torzi

Výpočet namáhání hřídele uvažuje pouze harmonickou složku budícího momentu, která je v rezonanci. Ostatní složky se zanedbávají. Největší torzní napětí hřídele je v místě největšího zkroucení průřezu tedy v uzlu kmitání.

Přídavné torzní napětí vyvolané torzním kmitáním se spočítá podle známého vzorce:

$$\tau = \frac{M_t}{W_\tau} \text{ [MPa]} \quad (35).$$

kde:  $W_\tau \text{ [m}^3\text{]}$  je modul odporu hřídele v krutu:  $W_\tau = \pi \frac{D_c^3}{16}$  (36),

$$M_t \text{ [Nm]} \text{ je střídavý kroutící moment vnášený do úseku kmitáním: } M_t = \varphi_\kappa c_n \quad (37),$$

kde:  $\varphi_\kappa \text{ [rad]}$  je reálná torzní výchylka získaná rozdílem příslušných poměrných výchylek vynásobených amplitudou torzní výchylky příslušné  $\kappa$ :  $\varphi_\kappa = \phi(a_{n-1} - a_n)$  (38).

Reálná torzní výchylka by neměla přesáhnout velikost  $2,5^\circ$  a napětí na povrchu hřídele by nemělo být větší než 40 MPa. [1]

Pro výpočet reálné torzní výchylky pro I. vlastní frekvenci bylo počítáno s poměrnými výchylkami  $a_6$  a  $a_7$  viz. obr. 8. Pro výpočet reálné torzní výchylky pro II. vlastní frekvenci bylo počítáno s poměrnými výchylkami  $a_0$  a  $a_1$  viz. obr. 9.

Tab.10 Torzní napětí

Max. torzní napětí	I.vlastní frekvence	II.vlastní frekvence
$\tau \text{ [MPa]}$	15,18	41,91

Mechanismus z výše uvedených důvodů nevyhovuje z hlediska torzních kmitů. Dále musíme přihlídnout k faktu, že na tomto typu motoru se z klikové hřídele zubovým převodem pohánějí další zařízení. Zubový převod by výchylky kolem  $1,5^\circ$  jen těžko vydržel.

Kontrola namáhání torzním napětím je uvedena v Příloze 3.

## 9. Tlumení torzních kmitů

Abychom se zbavili rezonancí vlastního a vynuceného torzního kmitání při provozu motoru, je třeba odsunout rezonance z intervalu provozních otáček motoru. Vlastní kmitání můžeme změnit úpravou torzního systému, a to několika způsoby.

Nejúčinnějším způsobem je zvýšení tuhosti klikového hřídele. Masivnější hřídel má vyšší tuhost. Bohužel, hřídel nemůžeme zvětšovat do nekonečna, navíc v tomto případě jsme omezeni rozměry součásti, dané výrobcem motoru.

Dnes nejpoužívanější metodou je aplikace přídatného torzního systému – tlumiče torzních kmitů. Tlumič se montuje na volný konec klikového hřídele, kde jsou torzní výchylky zpravidla největší.

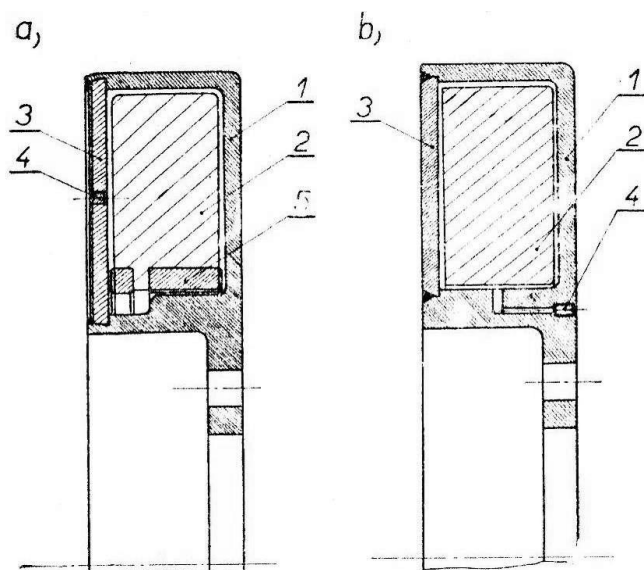
Podle principu činnosti můžeme tlumiče torzních kmitů rozdělit do tří skupin:

- a) Třecí tlumiče, které třecím odporem mění kmitovou energii v teplo.
- b) Dynamické tlumiče, které energii od kmitavého pohybu kompenzují pomocným torzním systémem.
- c) Rezonanční tlumiče, které torzní kmitání utlumují rezonancí tlumícího prvku.

Třecí tlumiče se skládají z hmotného kotouče, umístěného zpravidla na volném konci hřídele. Kotouč koná rovnoměrný kruhový pohyb. Vzhledem ke klikovému hřídeli tedy dochází k relativnímu kmitání, které je tlumeno pasivními odpory (třením) mezi těmito dvěma částmi. Využívá se jak suché, tak kapalinné tření.

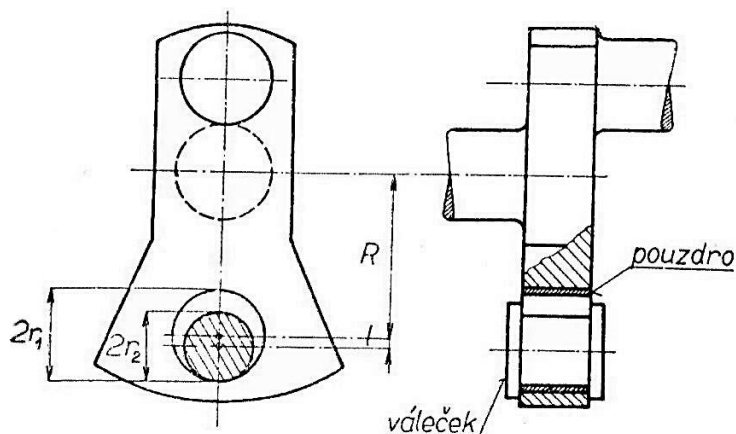
Tlumičům, využívajícím kapalinné tření, se říká také kapalinové, silikonové nebo viskózní tlumiče, protože jako třecí médium používají film vysoce viskózního silikonového oleje. Stavba tlumiče je popsána na *obr. 15*.

Skříň tlumiče *1* je připojena k přednímu konci klikového hřídele. Ve skříni se nachází prsteneček *2*. Po uzavření skříně víkem *3* zbude mezi skříní a prstencem jen velmi malý prostor. Velikost tohoto prostoru se počítá v desetinách milimetru. Do tohoto prostoru se napouštěcím otvorem *4* pod tlakem vpraví silikonový olej. Poté se otvor utěsňuje. Spojení prstence a skříně probíhá pouze viskozitou kapaliny. Některé tlumiče bývají ještě osazeny vodícími pouzdry *5*, protože při kombinaci materiálů jako je ocel-ocel nebo ocel-litina ztrácí silikonový olej výrazně na mazivosti. Vnitřní plochy skříně a víka je třeba povrchově upravit broušením. [1]



Obr. 15 Silikonový tlumič torzních kmitů [1]

Dynamické tlumiče vyrovnávají kmitavou energii klikového hřídele pomocí přídavného kyvadla připevněného ke kmitající hmotě. To znamená, že ji nemaří, ale přeměňují na jiný druh energie. Protože zrychlení v odstředivém poli rotujícího hřídele je mnohonásobně vyšší než v gravitačním poli, postačí pro utlumení torzního kmitání poměrně malé kyvadlo.

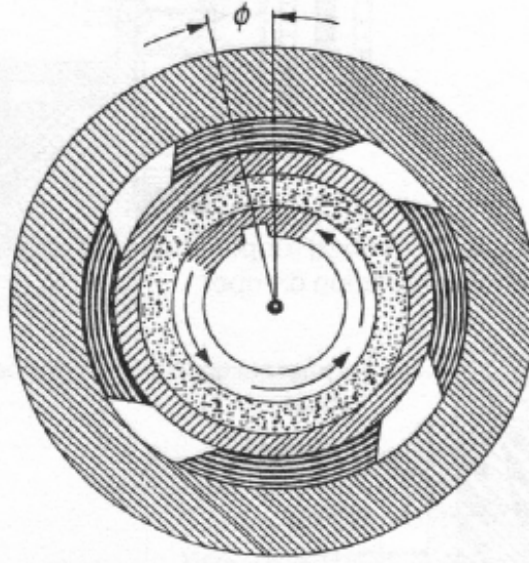


Obr. 16 Dynamický tlumič ve tvaru válečku [1]

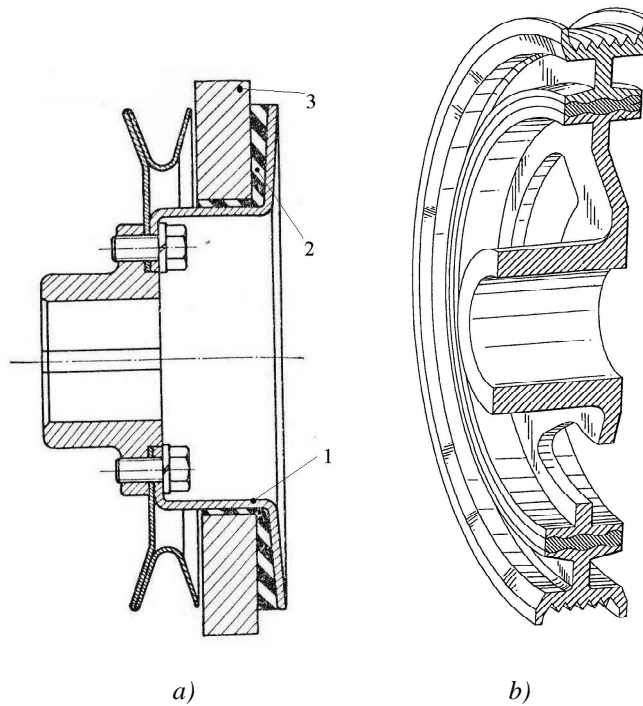
Rezonanční tlumiče jsou konstrukčně jednoduché a cenově výhodné. Oproti jejich hlavní alternativě – třecím tlumičům (zejm. viskózním), mají menší rozměry. Tlumí v širokém pásmu otáček s vysokou účinností. Jako tlumící médium se používají pružné segmenty (listové pružiny, pryžové prstence). Nejčastější variantou rezonančních tlumičů jsou právě pryžové tlumiče, obr. 18 a), b). Sestávají z hmotného kotouče 1, který je vrstvou pryže 2 navulkanizován na unášec 3. Někdy bývá unášečem přímo řemenice.

Při rovnoměrném kruhovém pohybu klikového hřídele se unášec (příruba) otáčí stejnou rychlostí jako hmotný kotouč. Pokud je rovnoměrný pohyb hřídele narušen torzními kmity, pokračuje kotouč v pohybu rovnoměrném kruhovém a začne se pohybovat i vůči unášeci. V pryži, která spojuje unášec a kotouč, vzniká smykové napětí. Toto napětí generuje vnitřní tření v pryži tlumící torzní kmitání. Obr. 17





Obr. 17 Pohyb hmotného kotouče vůči unášeci torzního tlumiče [7]



a) b)  
Obr. 18 Různé varianty pryžových rezonančních tlumičů

## 10. Návrh utlumení torzních kmitů

Abychom dostali obraz, jaké kmity a napětí panují v klikovém hřídeli s aplikovaným tlumičem, vytvoříme jeho dynamický model. Provedeme znovu všechny výpočty, *kap. 6 - 8* pro tuto konfiguraci. Pokud budou výstupní hodnoty výchylek v rezonanci a torzní napětí v přijatelných hodnotách, přistoupíme k návrhu tělesa tlumiče.

### 10.1. Dynamický model klikového hřídele s přídatnou torzní soustavou

Vytvoříme dynamický model, který bude mít před řemenicí jeden člen navíc – torzní tlumič. Pro tlumič zvolíme jeho základní charakteristiku moment setrvačnosti  $J_t$ . Moment setrvačnosti volím  $J_t = 0,045 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ .

Dále spočítáme jeho charakteristické veličiny:

Poměrná velikost tlumiče:

$$\mu = \frac{J_t}{J_{ef}} \quad [-] \quad (39),$$

kde:  $J_{ef}$  je efektivní moment dynamického modelu bez tlumiče:

$$J_{ef} = \sum J_i \cdot a_i^2 \quad [\text{kg}\cdot\text{m}^2] \quad (40),$$

kde:  $J_i$  [Nm] jsou redukované momenty modelu bez tlumiče

$a_i$  [-] jsou poměrné amplitudy téže soustavy.

Ze součinitele poměrné velikosti vypočteme optimální naladění tlumiče:

$$w_{opt} = \frac{1}{1 + \mu} \quad [-] \quad (41).$$

Nyní již můžeme spočítat úhlovou rychlost vlastního kmitání tlumiče:

$$\Omega_t = \Omega \cdot w_{opt} \quad [\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}] \quad (42),$$

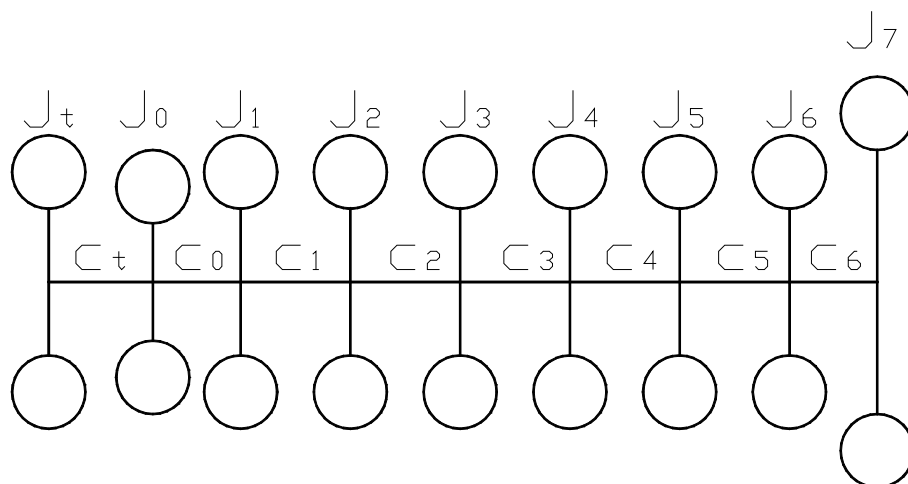
kde:  $\Omega$  [ $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ] je úhlová rychlost vlastního kmitání modelu bez tlumiče.

Posledním parametrem tlumiče je jeho tuhost:

$$c_t = J_t \cdot \Omega_t^2 \quad [\text{Nm}\cdot\text{rad}^{-1}] \quad (43).$$

Tab. 11 Veličiny pro výpočet tlumiče torzních kmitů

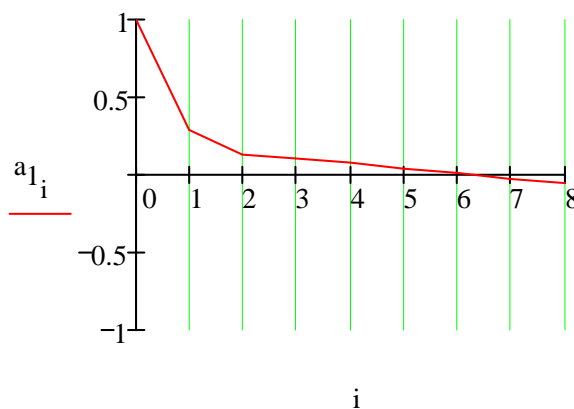
$J_t$ [kg.m <sup>2</sup> ]	$J_{ef}$ [kg.m <sup>2</sup> ]	$\mu$ [-]	$w_{opt}$ [-]	$\Omega_t$ [rad.s <sup>-1</sup> ]	$c_t$ [Nm.rad <sup>-1</sup> ]
0,045	0,095	0,48	0,68	964	41842



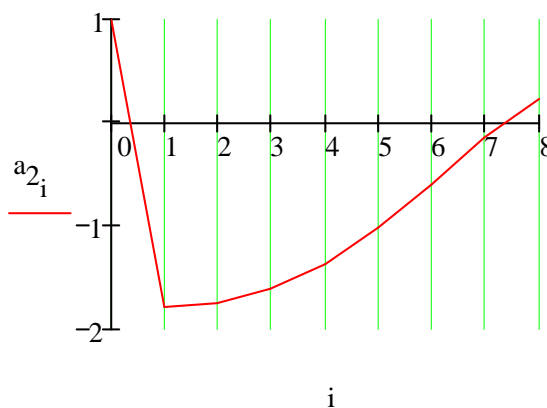
Obr. 19 Náhradní torzní systém

## 10.2. Vlastní frekvence a tvary kmitání

Náhradní torzní systém byl rozšířen o jeden člen s tuhostí  $c_t$  a momentem setrvačnosti  $J_t$ , obr. 19. S výpočtem vlastních tvarů kmitání postupujeme úplně stejně jako v kap. 6.2. První dva vlastní tvary jsou na obr.20 a 21.



Obr. 20 První vlastní tvar



Obr. 21 Druhý vlastní tvar

Velikosti vlastních frekvencí jsou uvedeny v tab. 12.

Tab. 12 Vlastní frekvence systému s tlumičem

$N_1$ [Hz]	$N_2$ [Hz]
130	256

Výpočet vlastních tvarů a frekvencí je uveden v Příloze 4.

### 10.3. Rezonanční otáčky

Přidáním hmoty tlumiče do náhradního torzního systému se snížila velikost vlastní frekvence kmitání systému. Rezonanční otáčky se tedy podle vzorce (31) také snižují.

V tab. 13. jsou uvedeny hodnoty rezonančních otáček po řád harmonické složky  $\kappa = 12$  pro první a druhou vlastní frekvenci. Rozsah provozních otáček je opět vyznačen tučně a hlavní řády červeně.

Tab. 13 Rezonanční otáčky systému s tlumičem

$\kappa$	$n_{\text{rez1}}$ [ $s^{-1}$ ]	$n_{\text{rez2}}$ [ $s^{-1}$ ]
0,5	15599	30741
1	7800	15371
1,5	5200	10247
2	3900	7685
2,5	3120	6148
3	2600	5124
3,5	2228	4392
4	1950	3843
4,5	1733	3416
5	1560	3074
5,5	1418	2795
6	1300	2562
6,5	1200	2365
7	1114	2196
7,5	1040	2049
8	975	1921
8,5	918	1808
9	867	1708
9,5	821	1618
10	780	1537
10,5	743	1464
11	709	1397
11,5	678	1337
12	650	1281

## 10.4. Relativní vydatnost rezonancí

Vydatnosti se spočítají stejným postupem jako v *kap. 7.3* podle vzorce (33). Velikost relativní vydatnosti je opět pro určité skupiny  $\kappa$  stejná.

Tab. 14 Relativní vydatnosti kmitů

Vydatnost rezonance $R_\kappa$	Vlastní frekvence	
	I.	II.
$\kappa = 0,5; 3,5; 6,5; 9,5; 12,5$	0,111	1,082
$\kappa = 1; 4; 7; 10; 13$	0,005	0,439
$\kappa = 2; 5; 8; 11; 14$	0,005	0,439
$\kappa = 2,5; 5,5; 8,5; 11,5; 14,5$	0,111	1,082
$\kappa = 1,5; 4,5; 7,5; 10,5; 13,5$	0,291	2,935
$\kappa = 3; 6; 9; 12; 15$	0,297	6,552

Výpočet relativní vydatnosti rezonancí je uveden v Příloze 4.

## 10.5. Torzní výchylky v rezonanci

Velikost torzních výchylek se aplikací tlumiče snižuje. Mimo tlumícího odporu  $\xi$  vlastní hmoty hřídele zde ještě působí tlumící odpor  $\xi_t$  vyvolaný tlumičem.

Tlumící odpor tlumiče se vypočítá:

$$\xi_t = 2\gamma J_t \Omega \text{ [Nms.rad}^{-1}\text{]} \quad (44),$$

kde:  $\gamma$  [-] je poměrný útlum. Literatura [1] uvádí jeho hodnotu v rozmezí  $\gamma = 0,01 - 0,12$ . V našem případě jsme zvolili hodnotu  $\gamma = 0,1$ .

Velikosti torzních výchylek pro I a II. vlastní tvar kmitání soustavy s tlumičem torzních kmitů se vypočtou podle vzorce:

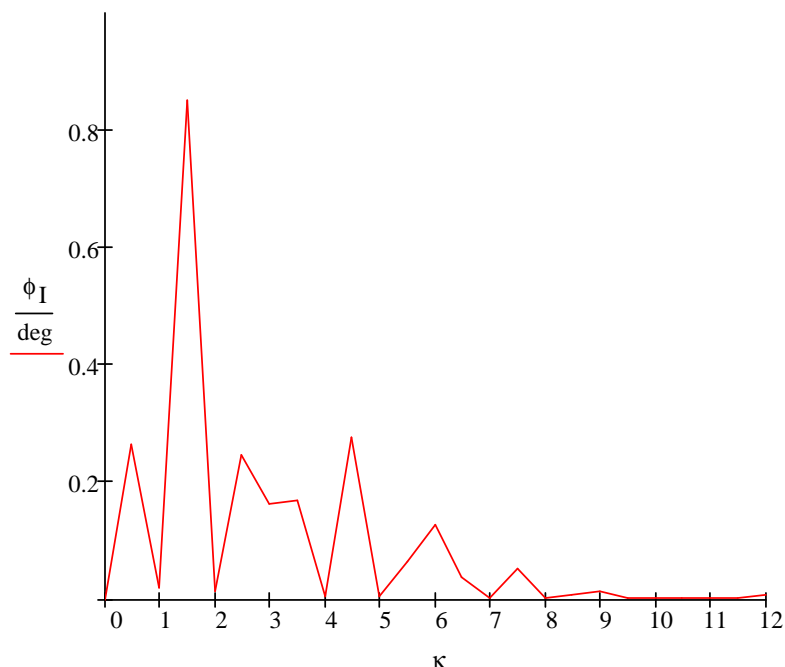
$$\phi_0 = \frac{M_{j\kappa} R_\kappa}{\Omega \left( \xi \sum_z (a_z)^2 + \xi_t (a_0 - a_1)^2 \right)} \text{ [rad]} \quad (45),$$

kde:  $a_z$  [-] jsou poměrné výchylky na příslušném místě náhradního torzního systému. Rozdíl  $\Omega$  [rad.s<sup>-1</sup>] je úhlová rychlost kmitání soustavy s tlumičem.

Vypočtené hodnoty amplitud torzních kmitů pro I. vlastní frekvenci jsou uvedeny v *tab. 14*. Na *obr. 22* je jsou zobrazeny amplitud torzních kmitů pro příslušné řády harmonické složky.

*Tab. 15* Amplitudy torzních kmitů volného konce

$\kappa$	$n_{\text{rezl}} [\text{s}^{-1}]$	$\phi [^\circ]$
0,5	15599	0,263
1	7800	0,019
1,5	5200	0,851
2	3900	0,012
2,5	3120	0,246
<b>3</b>	<b>2600</b>	<b>0,163</b>
3,5	<b>2228</b>	<b>0,168</b>
4	<b>1950</b>	<b>0,005</b>
4,5	<b>1733</b>	<b>0,275</b>
5	<b>1560</b>	<b>0,004</b>
5,5	<b>1418</b>	<b>0,064</b>
<b>6</b>	<b>1300</b>	<b>0,127</b>
6,5	<b>1200</b>	<b>0,037</b>
7	<b>1114</b>	<b>0,001</b>
7,5	<b>1040</b>	<b>0,052</b>
8	<b>975</b>	<b>0,001</b>
8,5	<b>918</b>	<b>0,009</b>
<b>9</b>	<b>867</b>	<b>0,014</b>
9,5	<b>821</b>	<b>0,002</b>
10	<b>780</b>	<b>0</b>
10,5	<b>743</b>	<b>0,002</b>
11	<b>709</b>	<b>0</b>
11,5	<b>678</b>	<b>0,003</b>
<b>12</b>	<b>650</b>	<b>0,007</b>



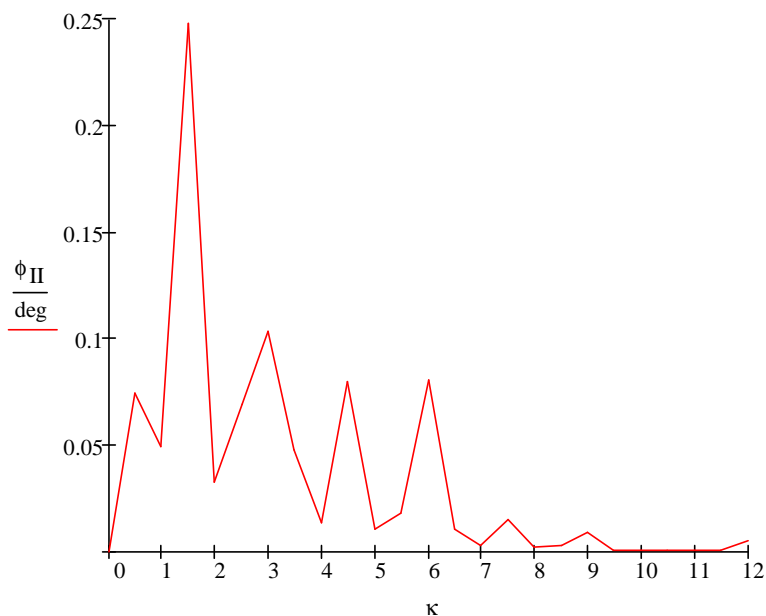
*Obr. 22* Amplitudy torzních kmitů volného konce

Amplitudy zasahující do provozního rozsahu otáček jsou vyznačeny tučně. Největší výchylku v provozní oblasti má silný řád  $\kappa = 4,5$ , a proto s ní budu počítat při kontrole klikového hřídele na torzní napětí.

V tab. 16 jsou uvedeny velikosti amplitud torzních kmitů volného konce klikového hřídele pro rezonanci v II. vlastní frekvenci.

Tab. 16 Amplitudy torzních kmitů volného konce

$\kappa$	$n_{rez2} [s^{-1}]$	$\phi [^\circ]$
0,5	30741	0,074
1	15371	0,049
1,5	10247	0,248
2	7685	0,033
2,5	6148	0,069
<b>3</b>	<b>5124</b>	<b>0,103</b>
3,5	4392	0,047
4	3843	0,013
4,5	3416	0,080
5	3074	0,010
5,5	2795	0,018
<b>6</b>	<b>2562</b>	<b>0,081</b>
6,5	2365	0,010
7	<b>2196</b>	<b>0,003</b>
7,5	<b>2049</b>	<b>0,015</b>
8	<b>1921</b>	<b>0,002</b>
8,5	<b>1808</b>	<b>0,002</b>
<b>9</b>	<b>1708</b>	<b>0,009</b>
9,5	<b>1618</b>	<b>0,001</b>
10	<b>1537</b>	<b>0</b>
10,5	<b>1464</b>	<b>0,001</b>
11	<b>1397</b>	<b>0</b>
11,5	<b>1337</b>	<b>0,001</b>
<b>12</b>	<b>1281</b>	<b>0,005</b>



Obr. 23 Amplitudy torzních kmitů volného konce

Amplitudy výchylek příslušející k rozsahu provozních otáček jsou vyznačeny tučně. V provozním rozsahu má nejvyšší výchylku řád  $\kappa = 7,5$ . Kontrolu torzního namáhání hřídele budeme provádět pro tento řád.

Výpočet obou amplitud je uveden v Příloze 4.

## 10.6. Kontrola torzního napětí

Opět musíme zkontrolovat, zdali zkroucení hřídele nezpůsobuje napětí, které by mohlo poškodit hřídel. Budeme postupovat stejně jako v *kap. 8*. Pro výpočet maximálního napětí I. vlastním tvaru použijeme rozdíl poměrných výchylek  $a_6 - a_7$ . V případě II. vlastního tvaru budeme opět do vzorce (38) volit větší rozdíl poměrných výchylek viz. *obr. 21*. Volíme rozdíl  $a_0 - a_1$ .

Maximální přídavné torzní napětí působící na volný konec klikového hřídele v prvních dvou vlastních tvarech je uvedeno v *tab. 17*.

Tab. 17 Přídavné torzní napětí

Max. torzní napětí	I.vlastní frekvence	II.vlastní frekvence
$\tau$ [MPa]	2,22	0,55

Po stránce namáhání torzním napětím soustava vyhovuje. Žádné napětí nepřekročilo hodnotu  $\tau = 40$  MPa.

Kontrola namáhání torzním napětím je uvedena v *Příloze 4*.



## 11. Návrh pryžového tlumiče torzních kmitů

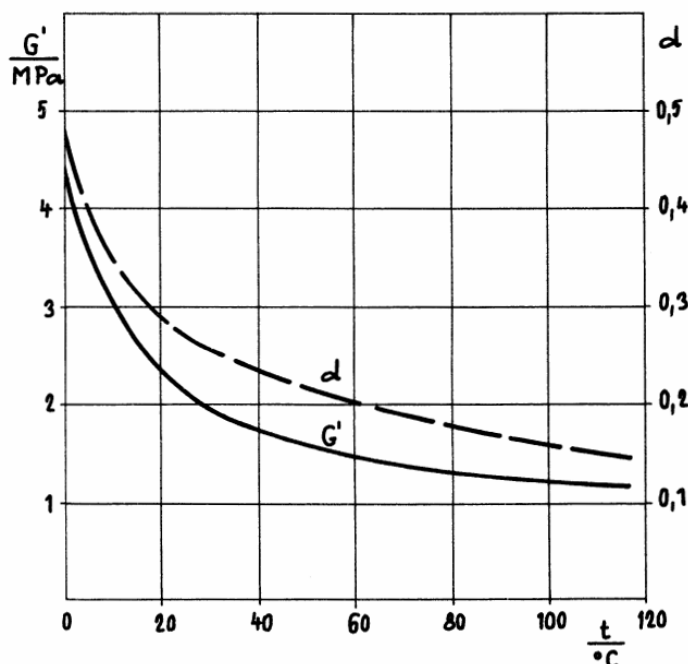
Jak už bylo výše zmíněno, pryžový tlumič torzních kmitů se skládá z unášeče, pružného pryžového prstence a hmotného kotouče. Unášeč a hmotný kotouč jsou navulkanizovány na boky pryžového kotouče. V případě tohoto tlumiče je unášečem samotné těleso řemenice. Tlumič bude upevněn ze strany bližší ke bloku motoru, aby při případné havárii nespádl do motorového prostoru a nepoškodil ostatní součásti motoru.

Chování pryže, lze popsat veličinou komplexní modul pružnosti  $G$ , který je tvořen reálnou složkou  $G'$  a imaginární  $G''$ . Poměrem těchto dvou složek získáme tzv. ztrátový součinitel pryže, charakterizující tlumící vlastnosti pryže:

$$d = \frac{G''}{G'} = \frac{\kappa \omega k_t}{c_t} \quad (46).$$

Ze vzorce (46) je patrná úměra mezi reálnou složkou komplexního modulu pružnosti  $G'$  a tuhostí  $c_t$

Obě tyto veličiny jsou do velké míry ovlivňovány teplotou, *obr. 24*, a proto musíme brát v potaz jaké teplo bude panovat v pracovním prostoru tlumiče. Při výpočtu musíme zvolit tak malý modul pružnosti ve smyku, aby po zahřátí motoru jeho hodnota neklesla pod zvolenou míru.



Obr. 24 Závislost modulu pružnosti ve smyku  $G'$  a ztrátového součinitele  $d$  pryže na teplotě (zkušební element 60° Shore) [4]

Energie, kterou tlumič pohltí, musí být ve formě tepla odvedena do okolí. Pokud tlumič pracuje delší dobu v rezonančním režimu, může se teplota pryžového prstence několikrát zvýšit. Pokud se jedná o rezonanci s I. vlastní frekvencí, dojde při snížení tuhosti také k poklesu rezonanční amplitudy a jejímu přesunutí k nižším frekvencím. V tomto případě působí teplotně závislé parametry stabilizačně. [4]

Jedná-li se o rezonanci s II. vlastní frekvencí je efekt opačný. S klesající tuhostí roste rezonanční amplituda. V extrémním případě může dojít až k poškození tlumiče nebo dokonce motoru.

Pryž má ještě jednu nepříjemnou vlastnost. Z dlouhodobého hlediska mění své mechanické vlastnosti a tím ovlivňuje funkčnost tlumiče. Toto chování se označuje jako stárnutí pryže.

Návrh pryžového tlumiče torzních kmitů se dá rozdělit do dvou částí. V té první navrhujeme rozměry a modul pružnosti pryžového prstence a v té druhé zvolíme velikost hmotného prstence ze železa.

Tuhost pryžového prstence je dána:

$$c_t = \frac{\pi G_g (D_2^4 - D_1^4)}{32 t_g} [\text{Nm} \cdot \text{rad}^{-1}] [1] \quad (47),$$

kde:  $D_1$  a  $D_2$  [mm] jsou vnitřní a vnější průměry pryžového prstence

$t_g$  [mm] je tloušťka pryžového prstence

$G_g$  [MPa] je modul pružnosti ve smyku pro pryž. Vzhledem k tomu, že se modul pružnosti u pryže mění v závislosti na teplotě, volím podle křivky na obr. 20 nejhorší možnou variantu a to je  $G_g = 1 \text{ MPa}$ .

Velikost tuhosti jsme spočítali na začátku kap. 10 ze (43). Vypočítáme rozměry pryžového prstence. Velikost vnitřního průměru volím tak, aby měl dostatečně velkou styčnou plochu s ostatními součástmi:  $D_1 = 135 \text{ mm}$ . Šířku volíme na  $t_g = 5 \text{ mm}$ . Velikost vnějšího průměru získáme úpravou (47):

$$D_2 = \sqrt[4]{D_1^4 + \frac{32 t_g c_t}{\pi G_g}} [\text{mm}] \quad (48).$$

Rozměry byly zvoleny tak, aby se kvůli aplikaci tlumiče nemusela měnit standardní řemenice.

Nyní podle [1] spočítáme napětí v pryžovém kotouči. Dovolené napětí v pryžovém prstenci nesmí překročit hodnotu 0,3 MPa, pak už není zaručena bezpečnost spoje.

$$\tau_g = 16 \frac{M_t \left( \frac{D_2 - D_1}{2} \right)}{\pi (D_2^4 - D_1^4)} [\text{MPa}] [1] \quad (49).$$

kde:  $M_t$  je největší točivý moment v pryžovém prstenci.

$$M_t = \phi_{\kappa_6} c_t (a_t - a_0) [\text{Nm}] \quad (50).$$

Vnitřní průměr kovového hmotného kotouče  $2.R_l$  bude stejný jako vnitřní průměr pryžového prstence  $D_1$ . Tloušťku kotouče  $t_o$  volíme. Vnější průměr hmotného kotouče vypočteme ze vzorce pro moment setrvačnosti homogenního prstence:

$$J_t = \rho_o \cdot t_o \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} R^3 d\varphi dr \text{ [kg.m}^2\text{]} \quad (51).$$

kde:  $\rho_o$  je hustota oceli;  $\rho = 7850 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  
 $R_1$  [mm] je vnitřní poloměr hmotného prstence  
 $R_2$  [mm] je vnější poloměr hmotného prstence.

Úpravou rovnice (51) získáme vztah pro výpočet vnějšího poloměru ocelového prstence:

$$R_2 = \sqrt[4]{\frac{2J_t}{\rho_o t_o \pi} + R_1^4} \text{ [mm]} \quad (52).$$

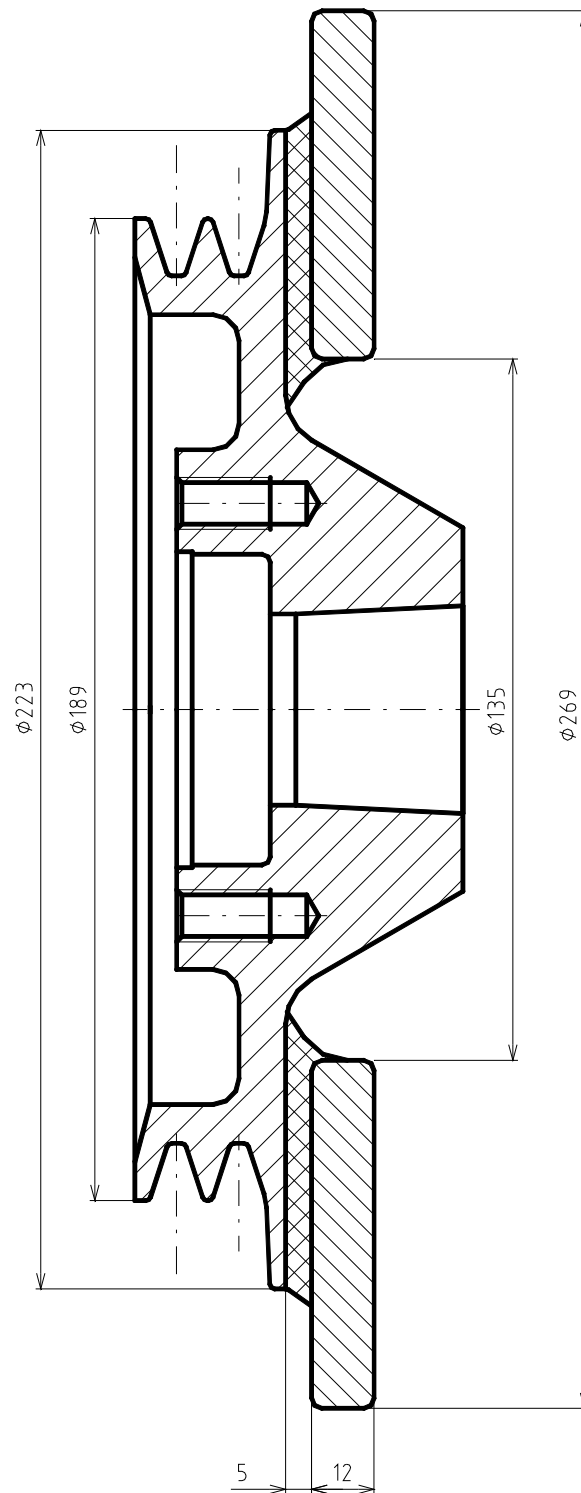
Takto jsme získali všechny potřebné rozměry a hodnoty pro konstrukci pryžového tlumiče torzních kmitů. Rozměry jsou uvedeny v *tab. 18* níže.

*Tab. 18 rozměry pryžového tlumiče torzních kmitů*

$D_1$ [mm]	$D_2$ [mm]	$2.R_1$ [mm]	$2.R_2$ [mm]	$t_g$ [mm]	$t_o$ [mm]
135	223	135	269	5	12

Výpočet rozměrů tlumiče torzních kmitů je uveden v *Příloze 4*.

Návrh tlumiče torzních kmitů upevněného na řemenici je vyveden na *obr. 25*.



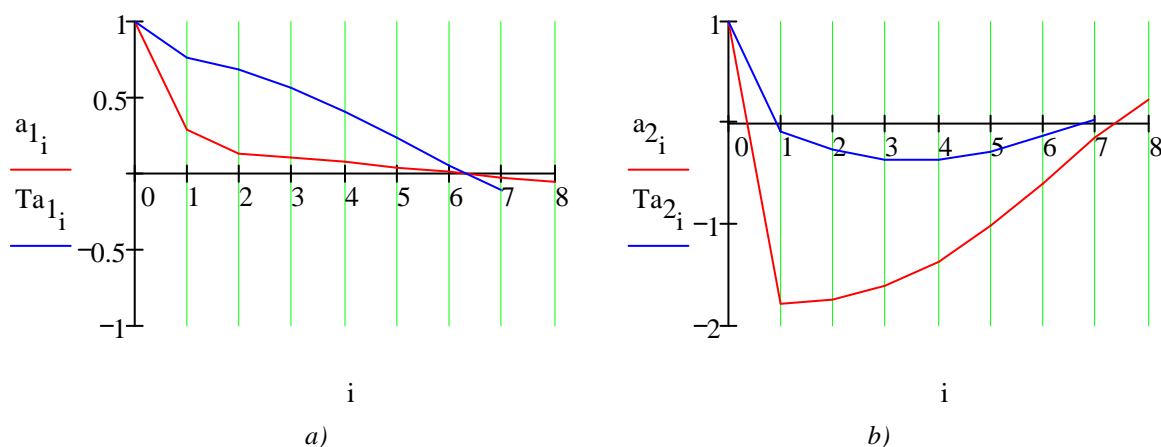
Obr. 25 Návrh tlumiče připevněného na řemenici

## 12. Srovnání tlumeného a netlumeného modelu

Závěrem bych porovnal oba dynamické modely, které byly v této diplomové práci vytvořeny.

Připojením tlumiče se změní chování celého dynamického systému.

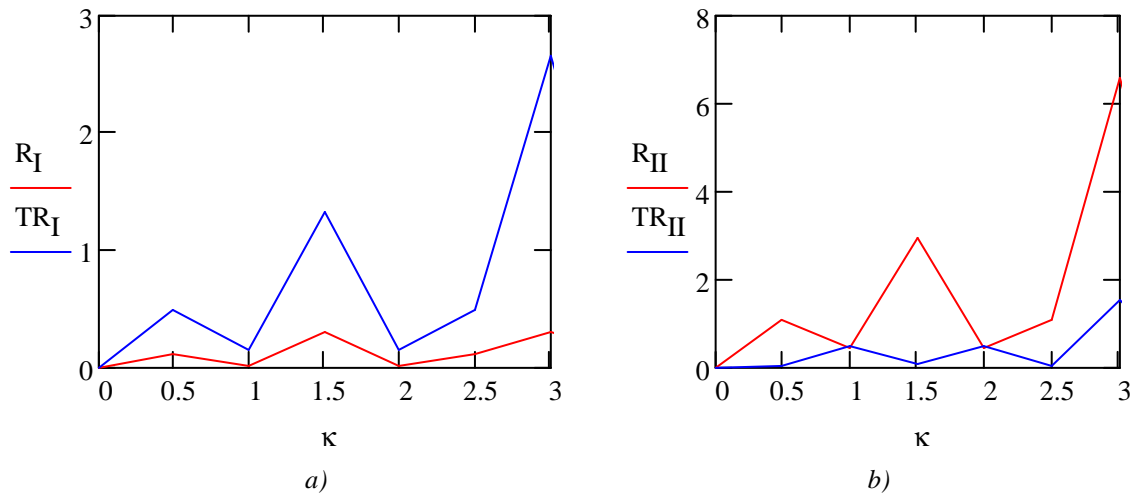
Tyto změny lze pozorovat již na začátku výpočtu. Srovnáme-li velikosti poměrných výchylek *obr. 26*. Na *obr. 26 a)* vidíme jasné snížení výchylek v I. vlastním tvaru. Naopak na *obr. 23 b)* poměrné amplitudy II. vlastních kmitů vzrůstají, jak již bylo výše popsáno. Nejstrmější pokles nastává v místě 0 – 1. To je dáno právě nízkou tuhostí pružné vazby pryžovým prstencem. Nízká tuhost vazby stojí též za dalšími jevy, jako je snížení vlastní frekvence. Tato je závislá na úhlové rychlosti vlastního kmitání, kterou získáme právě z výpočtu vlastních tvarů kmitání. Snížení vlastních frekvencí mechanismu prospívá z hlediska množství vibrací na něho přenášených. Zmenšuje se tak únavové opotřebení.



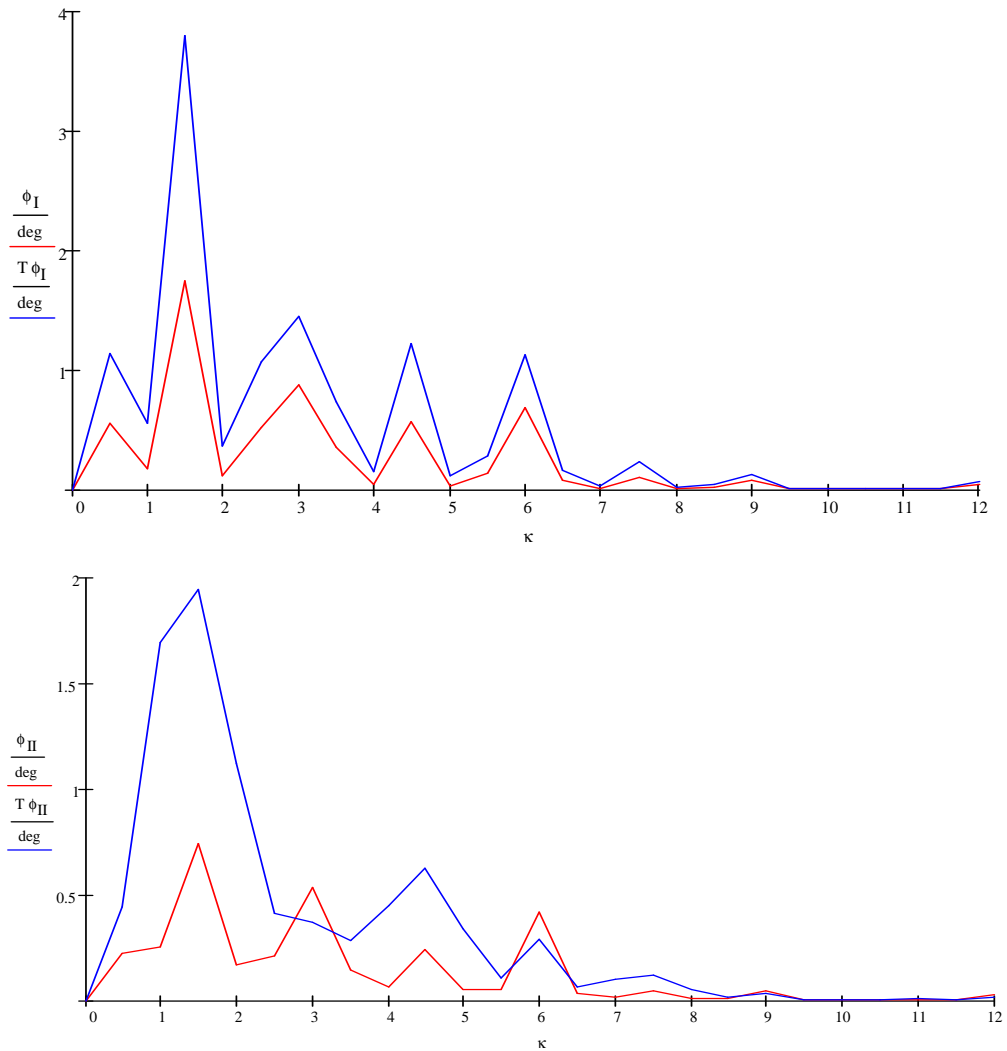
Obr. 26 Porovnání vlastních tvarů obou systémů. Modrá barva označuje dynamický model bez tlumiče, červená s tlumičem.

Velikosti vydatností v I. vlastním tvaru se po připojení tlumiče též sníží, protože jsou závislé na průběhu výkmitové čáry (33). Ve II. vlastním tvaru se naopak zvýší. Toto chování vyplývá z vlastností pryžového tlumiče, které byly popsány v *kap. 11*. Silné řady  $\kappa = 1,5$  a 3, mají mnohem větší vydatnost než ostatní. Z toho plyne, že i jejich amplitudy budou vyšší než u většiny řádů.

Hlavním důvodem aplikace torzních tlumičů je eliminace torzního napětí. Napětí vzniká rozkmitáním klikového hřídele kolem své osy. Zmenšíme-li velikost těchto rozkmitů bude i napětí v krutu nižší. Největší amplitudy vznikají na volném konci klikového hřídele *obr. 28*. Porovnáním obou vlastních frekvencí přijdeme na další vlastnost pryžových tlumičů. Ačkoliv se obě vlastní frekvence po aplikaci tlumiče snížily, amplituda se sníží jen první. Amplituda od II. vlastní frekvence se nesnižuje, ale právě naopak (řád  $\kappa = 3, 6, 9, \dots$ ).



Obr. 27 srovnání vydatnosti rezonancí obou systémů. Modrá barva označuje dynamický model bez tlumiče, červená s tlumičem.



Obr. 28 Srovnání amplitud kmitů volného konce hřídele. Modrá barva označuje dynamický model bez tlumiče, červená s tlumičem

### 13. Závěr

Provedl jsem kontrolu namáhání torzními kmity klikového hřídele pro řadový šestiválcový motor spadající do unifikované řady III motorů značky Zetor. Na základě výsledků této kontroly jsem navrhnul přídatnou torzní soustavu s pružným a tlumícím členem v paralelním zapojení. Tato soustava by se realizovala jako pryžový tlumič torzních kmitů, pro který jsem vytvořil základní rozměrový návrh. Konstrukční provedení spočívá v přímém navulkanizování tělesa tlumiče na zadní stranu řemenice. Kontaktní plocha pro umístění tlumiče se bude muset příslušně povrchově upravit pro vulkanizaci pryže a je třeba zajistit správnou toleranci čelního kruhového házení.

Tlumič je navržen tak, aby snížil torzní napětí v klikovém hřídeli na přípustnou hodnotu a zmenšil kmitání, které by se jinak přenášelo ozubeným převodem do rozvodového mechanismu.

## Použitá literatura

- [1] KOLEKTIV VÚNM A ČKD PRAHA *Naftové motory čtyřdobé*. I. díl, 2. vydání Praha: SNTL 1962
- [2] KOŽOUŠEK, J. *Výpočet a konstrukce spalovacích motorů II*. 1. vydání, Praha: SNTL 1983
- [3] PÍŠTĚK, V. *Aplikovaná mechanika*. 1. vydání, Brno: SNTL 1983
- [4] PÍŠTĚK, V., ŠTĚTINA, J. *Pevnost a životnost*, 1. vydání, Brno: Nakladatelství VUT Brno 1993
- [5] SISCO, WILLIAM, C. *Crankshaft Torsion and Dampers*, [on-line]. 2007-05-06; 00:01. [cit. 2007-03-17]. Dostupné z: <http://RacingArticles.com>
- [6] KOLEKTIV VÚNM A ČKD PRAHA *Naftové motory čtyřdobé*. II. díl, 2. vydání Praha: SNTL 1962
- [7] HEISLER, H. *Advanced Engine Technology*, Warrendale: SAE International 2002



## Použité zkratky a symboly

$a(\alpha)$	[m]	Zrychlení pístu
$a_i$	[-]	Poměrná velikost amplitudy torzních kmitů
$c_i$	[Nm.rad <sup>-1</sup> ]	Torzní tuhost
$c_t$	[Nm.rad <sup>-1</sup> ]	Torzní tuhost tlumiče
$d$	[-]	Ztrátový součinitel pryže
$k$	[-]	Harmonická složka
$l_A$	[m]	Délka posuvné části ojnice
$l_B$	[m]	Délka rotační části ojnice
$m_A$	[kg]	Hmotnost posuvné části ojnice
$m_B$	[kg]	Hmotnost rotační části ojnice
$m_{oj}$	[kg]	Hmotnost celé ojnice
$m_{ps}$	[kg]	Hmotnost pístní skupiny
$n_{rez}$	[s <sup>-1</sup> ]	Rezonanční otáčky
$p$	[MPa]	Tlak ve válci
$s(\alpha)$	[m]	Dráha pístu
$t_g$	[m]	Tloušťka pryžového prstence
$t_o$	[m]	Tloušťka ocelového prstence
$v(\alpha)$	[m]	Rychlost pístu
$w_{opt}$	[-]	Optimální ladění
$z$	[-]	Počet válců motoru
$p_e$	[MPa]	Efektivní tlak
$n$	[s <sup>-1</sup> ]	Jmenovité otáčky
$p_{atm}$	[MPa]	Atmosférický tlak
$g$	[ms <sup>-2</sup> ]	Gravitační zrychlení
$B$	[m]	Šířka ramene kliky
$D$	[m]	Vrtání
$D_1$	[m]	Vnitřní průměr pryžového prstence
$D_2$	[m]	Vnější průměr pryžového prstence
$D_c$	[m]	Průměr ojnicního čepu
$D_j$	[m]	Průměr hlavního čepu
$D_{red}$	[m]	Redukovaný průměr
$E$	[MPa]	Youngův modul pružnosti
$F_{cp}$	[N]	Celková síla od pístní skupiny
$F_o$	[N]	Ojnicní síla
$F_p$	[N]	Síla od tlaku plynů
$F_{sp}$	[N]	Setrvačná síla pístní skupiny
$F_t$	[N]	Tangenciální síla
$G$	[Nm.rad <sup>-1</sup> ]	Modul pružnosti ve smyku
$G_g$	[Nm.rad <sup>-1</sup> ]	Modul pružnosti ve smyku pryže
$I_p$	[m <sup>4</sup> ]	Polární moment
$J_{ef}$	[kg.m <sup>2</sup> ]	Efektivní moment
$J_{red}$	[kg.m <sup>2</sup> ]	Redukovaný moment setrvačnosti zalomení
$J_{rr}$	[kg.m <sup>2</sup> ]	Redukovaný moment řemenice
$J_{rs}$	[kg.m <sup>2</sup> ]	Redukovaný moment setrvačnicku
$J_t$	[kg.m <sup>2</sup> ]	Moment setrvačnosti tlumiče

$J_z$	[kg.m <sup>2</sup> ]	Moment setrvačnosti příslušného zalomení
$L_c$	[m]	Délka ojnicního čepu
$L_j$	[m]	Délka hlavního čepu
$L_{red}$	[m]	Redukovaná délka klikového hřídele
$L_{rr}$	[m]	Redukovaná délka náboje pro řemenici
$L_{rs}$	[m]	Redukovaná délka příruby pro setrvačnick
$L_w$	[m]	Tloušťka ramene kliky
$M_f$	[Nm]	Amplitudy momentu $M_k$ rozložené Fourierovou transformací
$M_I$	[Nm]	Moment od setrvačných sil posuvných částí prvního řádu
$M_{II}$	[Nm]	Moment od setrvačných sil posuvných částí druhého řádu
$M_k$	[Nm]	Kroutící moment působící na jedno zalomení klikového hřídele
$M_r$	[Nm]	Moment od setrvačných sil rotačních částí
$M_t$	[Nm]	Střídavý kroutící moment
$N_i$	[Hz]	i-tá vlastní frekvence
$P_I$	[N]	Setrvačná síla I. řádu od posuvných částí klikového mechanismu
$P_r$	[N]	Setrvačná síla od rotačních částí klikového mechanismu
$P_r$	[N]	Setrvačná síla II.řádu od posuvných částí klikového mechanismu
$R_1$	[m]	Vnitřní poloměr ocelového prstence
$R_2$	[m]	Vnější poloměr ocelového prstence
$R_o$	[m]	Poloměr kliky
$R_\kappa$	[-]	Relativní vydatnost rezonance
$W_\tau$	[m <sup>3</sup> ]	Modul odporu v krutu
$\xi$	[Nms.rad <sup>-1</sup> ]	Tlumící odpor
$\phi_0$	[rad]	Amplituda torzních kmitů volného konce
$\xi_t$	[Nms.rad <sup>-1</sup> ]	Tlumící odpor vyvolaný tlumičem
$\alpha$	[rad]	Úhel pootočení klikového hřídele
$\beta$	[rad]	Úhel odklonu ojnice v závislosti na natočení kliky
$\gamma$	[-]	Poměrný útlum
$\delta$	[rad]	Úhel, který svírají dvě po sobě jdoucí kliky
$\kappa$	[-]	Řád harmonické složky
$\lambda$	[-]	Klikový poměr
$\mu$	[-]	Poměrná velikost tlumiče
$\rho_o$	[kg.m <sup>-3</sup> ]	Hustota oceli
$\tau$	[MPa]	Tangenciální napětí v hřídeli
$\tau_g$	[MPa]	Napětí v pryžovém kotouči
$\Phi_k$	[rad]	Reálná torzní výchylka
$\omega$	[Hz]	Úhlová frekvence otáčení klikového hřídele
$\Omega$	[rad.s <sup>-1</sup> ]	Úhlová rychlost kmitání klikového hřídele
$\Omega_t$	[rad.s <sup>-1</sup> ]	Úhlová rychlost vlastního kmitání tlumiče

## Seznam příloh

- Příloha 1.* Analýza válcové jednotky
- Příloha 2.* Fourierova analýza točivého momentu
- Příloha 3.* Dynamický model klikového hřídele – výpočet torzních kmitů bez tlumiče
- Příloha 4.* Dynamický model klikového hřídele – výpočet torzních kmitů s tlumičem

## Příloha 1 - Analýza válcové jednotky

### 1. Zadané hodnoty

Motor: Zetor prototyp vznětového šestiválce

Efektivní výkon motoru	$P_e := 125 \cdot \text{kW}$	
Počet válců	$i := 6$	
Taktnost	$\tau := 0.5$	
Vrtání	$D := 105 \text{mm}$	
Zdvih	$Z := 120 \text{mm}$	
Zdvihový objem	$V_Z := \pi \cdot \frac{D^2}{4} \cdot Z$	$V_Z = 1.04 \text{L}$
Objem motoru	$V_m := i \cdot V_Z$	$V_m = 6.23 \text{L}$
Kompresní poměr	$\varepsilon := 21$	
Jmenovité otáčky	$n := \frac{2200}{60} \cdot \frac{1}{\text{s}}$	
Efektivní tlak	$p_e := \frac{P_e}{V_Z \cdot i \cdot n \cdot \tau}$	$p_e = 1.09 \text{MPa}$
Litrový výkon	$P_l := \frac{P_e}{V_Z \cdot i}$	$P_l = 20.05 \frac{\text{kW}}{\text{L}}$
Délka ojnice (od středu oka ke středu)		$L_{oj} = 215.25 \text{mm}$
Vnitřní průměr malého oka		$D_{H1} = 44.1 \text{mm}$
Vnitřní průměr velkého oka		$D_{D1} = 70.35 \text{mm}$
Klikový poměr	$\lambda := \frac{Z}{2 L_{oj}}$	$\lambda = 0.28$

## 2. Průběh změny zdvihu, rychlosti a zrychlení pístu v závislosti na úhlu pootočení klikového hřídele motoru

Úhlová frekvence:

$$\omega := 2 \cdot \pi \cdot n$$

### I. harmonická složka pístu:

- dráha:

$$s_1(\alpha) := Z \cdot (1 - \cos(\alpha))$$

- rychlosti:

$$v_{p1}(\alpha) := \left( \frac{d}{d\alpha} s_1(\alpha) \right) \cdot \omega$$

- zrychlení:

$$a_{p1}(\alpha) := \left( \frac{d^2}{d\alpha^2} s_1(\alpha) \right) \cdot \omega^2$$

### II. harmonická složka pístu:

- dráha:

$$s_2(\alpha) := Z \cdot \left[ \frac{\lambda}{4} \cdot (1 - \cos(2\alpha)) \right]$$

- rychlosti:

$$v_{p2}(\alpha) := \left( \frac{d}{d\alpha} s_2(\alpha) \right) \cdot \omega$$

- zrychlení:

$$a_{p2}(\alpha) := \left( \frac{d^2}{d\alpha^2} s_2(\alpha) \right) \cdot \omega^2$$

### Celková harmonická dráhy pístu:

- dráha:

$$s_c(\alpha) := Z \cdot \left[ 1 - \cos(\alpha) + \frac{\lambda}{4} \cdot (1 - \cos(2\alpha)) \right]$$

- rychlosti:

$$v_{pc}(\alpha) := \left( \frac{d}{d\alpha} s_c(\alpha) \right) \cdot \omega$$

- zrychlení:

$$a_{pc}(\alpha) := \left( \frac{d^2}{d\alpha^2} s_c(\alpha) \right) \cdot \omega^2$$

### 3. p- $\alpha$ a p-V diagramy

$$\alpha := 0 \cdot \text{deg}, 2 \cdot \text{deg} .. 720 \cdot \text{deg}$$

Atmosférický tlak:

$$p_{\text{atm}} := 0.1 \cdot \text{MPa}$$

Načtení indikátorového diagramu

$$\text{in} := \text{READPRN}(\text{"In\_diag-slabsi.dat"})$$

Počet vzorků:

$$n_p := \text{in}_0 \qquad n_p = 720$$

$$i := 0 .. n_p - 1$$

$$\text{krok} := 1 \cdot \text{deg}$$

$$\alpha_i := i \cdot \text{krok}$$

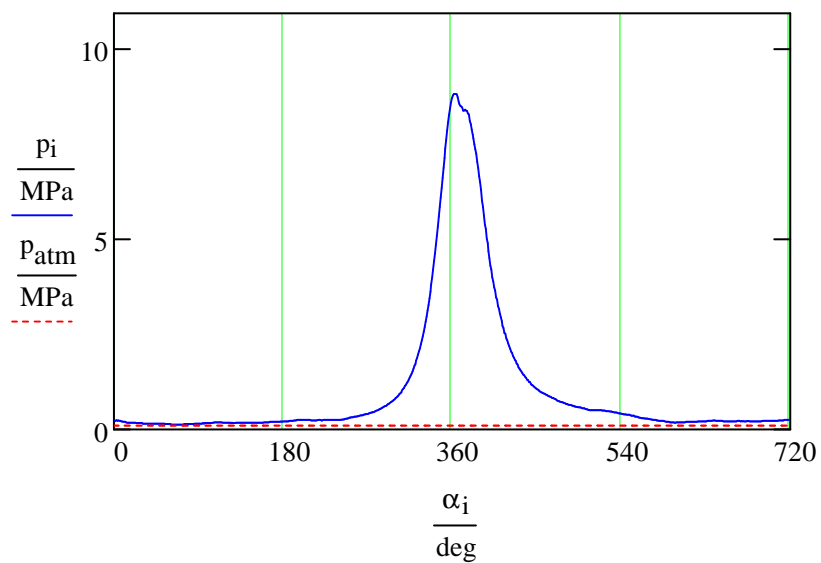
Ke tlakům v in diagramu je třeba přičíst ještě atmosférický tlak

$$p_i := (\text{in}_{i+1} + p_{\text{tm}}) \cdot \text{MPa}$$

in =

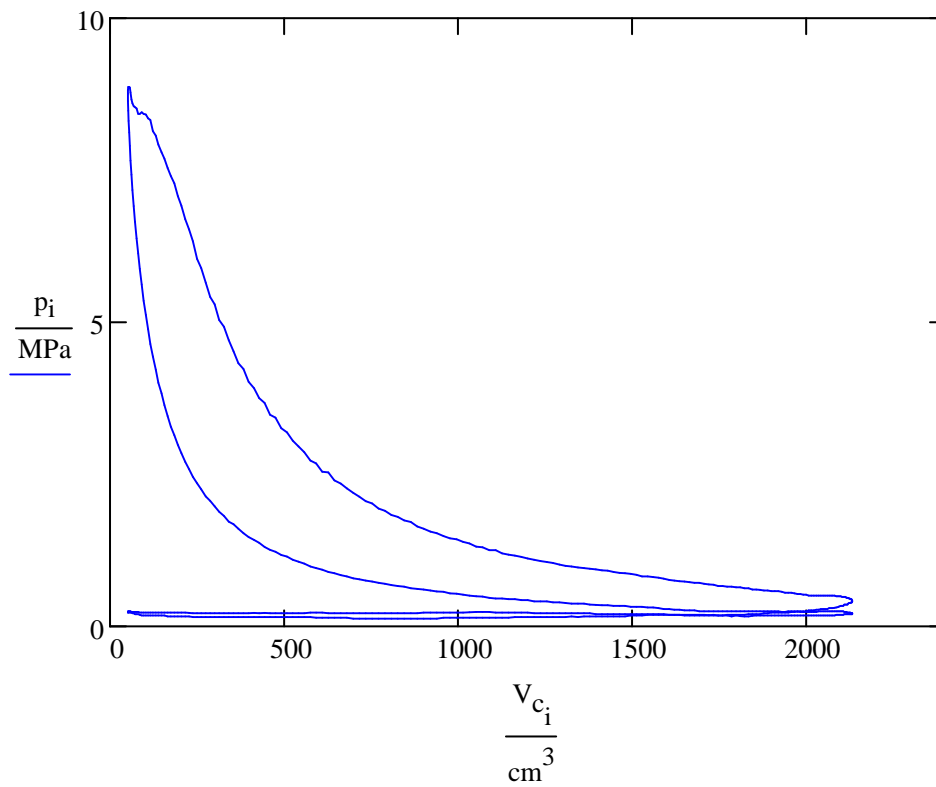
720
0.14
0.13
0.12
0.14
0.12
0.14
0.12
0.12
0.11
0.11
0.1
0.1
0.1
0.09
0.07

#### 3.1 p- $\alpha$ diagram



Plocha pístu	$S_p := \frac{\pi \cdot D^2}{4}$	$S_p = 86.59 \text{ cm}^2$
Zdvihový objem válce		$V_z = 1039.082 \text{ cm}^3$
Kompresní objem	$V_k := \frac{V_z}{\varepsilon - 1}$	$V_k = 51.95 \text{ cm}^3$
Okamžitý objem	$V_{c_i} := V_k + (S_p \cdot s_c(\alpha_i))$	

### 3.2 p-V diagram



## 4. Síly v klikovém mechanismu

### 4.1. Odkývání ojnice

Experimentální zjištěné délky jednoho kmitu ojnice za malé a velké oko

$$T_A := 0.749s$$

$$T_B := 0.672s$$

### 4.2 Redukce ojnice do hmotných bodů

Provádím redukci do 2 bodů.

délka ojnice od středu ke středu

$$l := L_{Oj}$$

$$l = 215.25 \text{ mm}$$

průměr malého oka

$$d_A := D_{H1}$$

$$d_A = 44.1 \text{ mm}$$

průměr velkého oka

$$d_B := D_{D1}$$

$$d_B = 70.35 \text{ mm}$$

hmotnost ojnice

$$m_{OJ} := 2.41 \text{ kg}$$

plná délka ojnice

$$L := l + \frac{d_A}{2} + \frac{d_B}{2}$$

$$L = 272.47 \text{ mm}$$

Určení polohy těžiště:

$$\left(\frac{T_{rA}}{2 \cdot \pi}\right)^2 \cdot m_{OJ} \cdot g \cdot a - m_{OJ} \cdot a^2 = \left(\frac{T_{rB}}{2 \cdot \pi}\right)^2 \cdot m_{OJ} \cdot g \cdot (L - a) - m_{OJ} \cdot (L - a)^2$$

$$a := L \cdot \frac{g \cdot T_B^2 - 4 \cdot \pi^2 \cdot L}{g \cdot T_A^2 + g \cdot T_B^2 - 8 \cdot \pi^2 \cdot L}$$

$$a = 148.86 \text{ mm}$$

$$b := L - a$$

$$b = 123.618 \text{ mm}$$



Vzdálenost středů ok od těžišti

$$\text{Horní oko:} \quad l_A := a - \frac{d_A}{2} \quad l_A = 126.81 \text{ mm}$$

$$\text{Spodní oko:} \quad l_B := b - \frac{d_B}{2} \quad l_B = 88.44 \text{ mm}$$

Momenty v daných bodech:

$$J_A := \left( \frac{T_A}{2 \cdot \pi} \right)^2 \cdot m_{OJ} \cdot g \cdot a \quad \boxed{J_A = 0.04999 \text{ m}^2 \cdot \text{kg}}$$

$$J_B := \left( \frac{T_B}{2 \cdot \pi} \right)^2 \cdot m_{OJ} \cdot g \cdot (L - a) \quad \boxed{J_B = 0.03 \text{ m}^2 \cdot \text{kg}}$$

$$J_T := J_A - m_{OJ} \cdot a^2 \quad J_T = -0 \text{ m}^2 \cdot \text{kg}$$

**Redukce na 2 body:**

$$\text{Hmotnosti:} \quad m_{OJ} = m_A + m_B \quad m_A \cdot l_A = m_B \cdot l_B$$

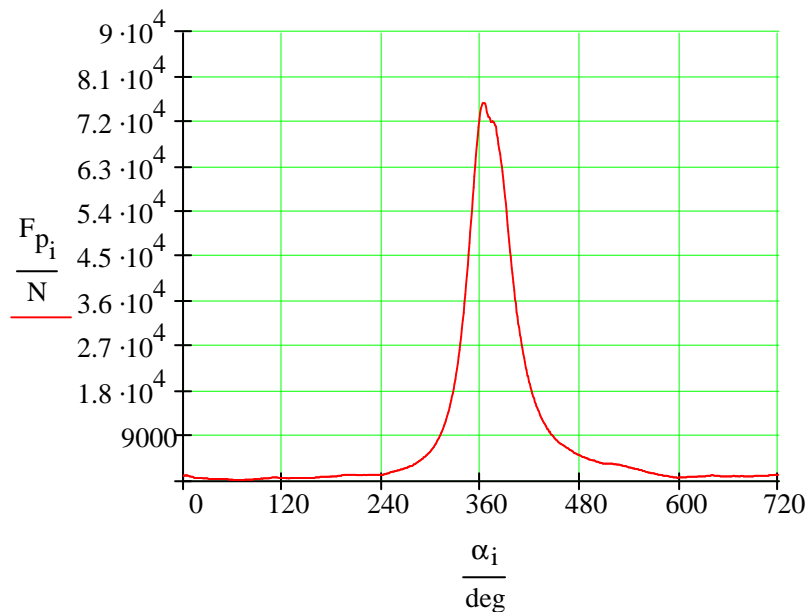
$$m_A := \frac{m_{OJ} \cdot l_B}{l_B + l_A} \quad \boxed{m_A = 0.99 \text{ kg}}$$

$$m_B := m_A \cdot \frac{l_A}{l_B} \quad \boxed{m_B = 1.42 \text{ kg}}$$

## 5. Určení průběhu sil přenášených pístním čepem

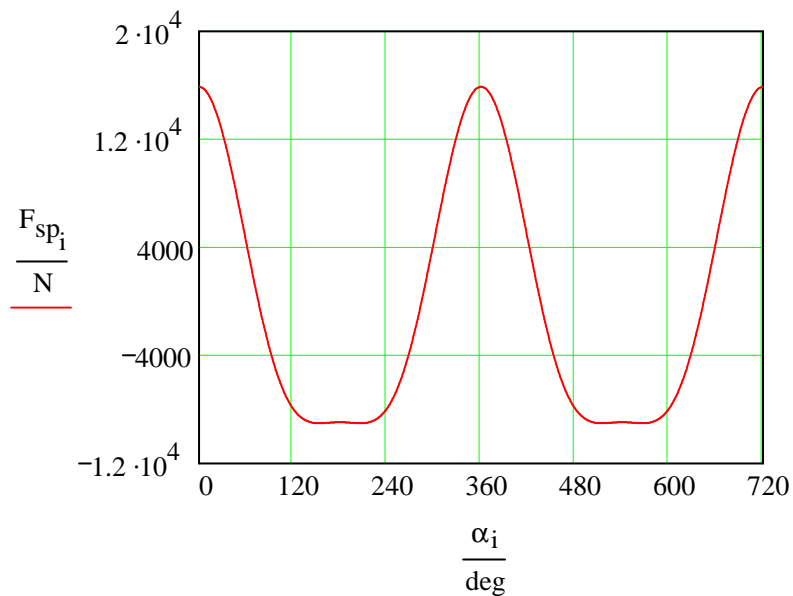
### 5.1. Průběh primárních sil (od tlaků plynů), sil sekundárních (setrvačných) a sil celkových působících na píst ve směru osy válce při zadaných otáčkách

Síla od tlaku plynu: 
$$F_{p_i} := \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot (p_i - p_{atm})$$

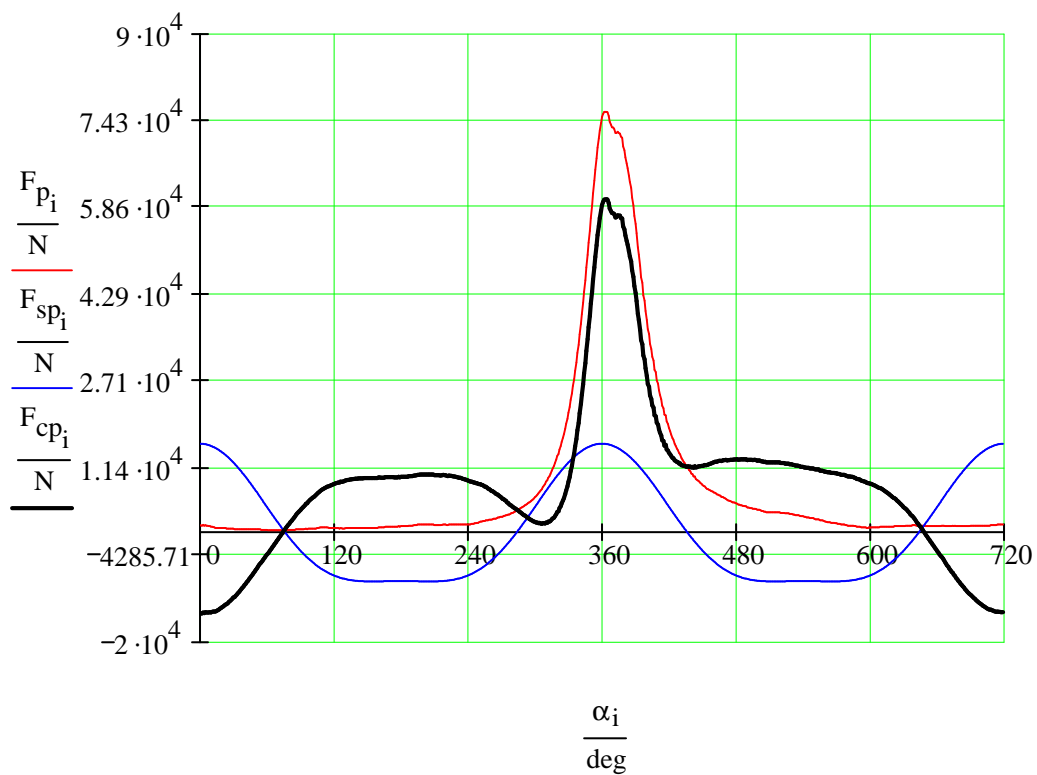


Hmotnost pístní skupiny:  $m_{pist} := 1.95 \text{ kg}$

Setrvačná síla na pístní čep:  $F_{sp_i} := m_{pist} \cdot a_{pc}(\alpha_i)$



Výsledná síla působící na píst:  $F_{cp_i} := F_{p_i} - F_{sp_i}$



**5.2. Zobrazení průběhu sil přenášených pístním čepem při zadaných otáčkách.**

Délka ramene kliky:  $r := \frac{Z}{2}$

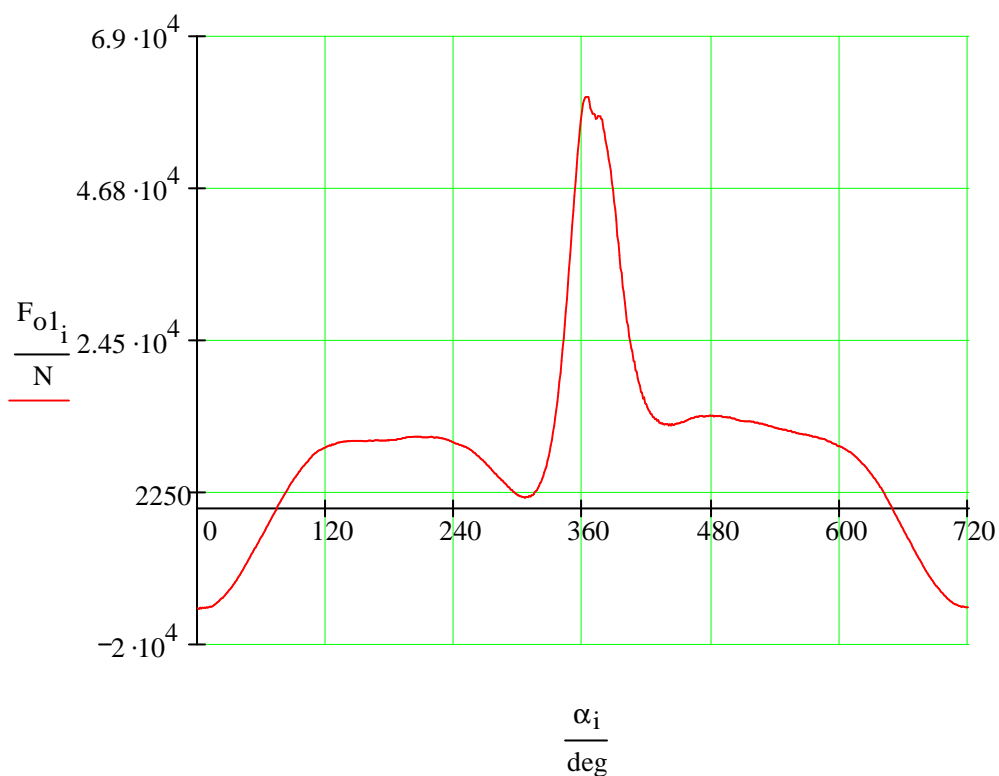
Klikový poměr:  $\lambda = 0.28$

Úhel odklonu ojnice:  $\beta_i := \text{asin}[\lambda \cdot (\sin(\alpha_i))]$

Ojniční síla:  $F_{o1_i} := \frac{F_{cp_i}}{\cos(\beta_i)}$

-14712.94
-14795.7
-14801.55
-14652.54
-14755.69
-14617.4
-14679.39
-14629.88
-14676.82
-14612.3
-14653.03
-14573.67
-14495.64
-14497.06
-14499.99
-14391.62

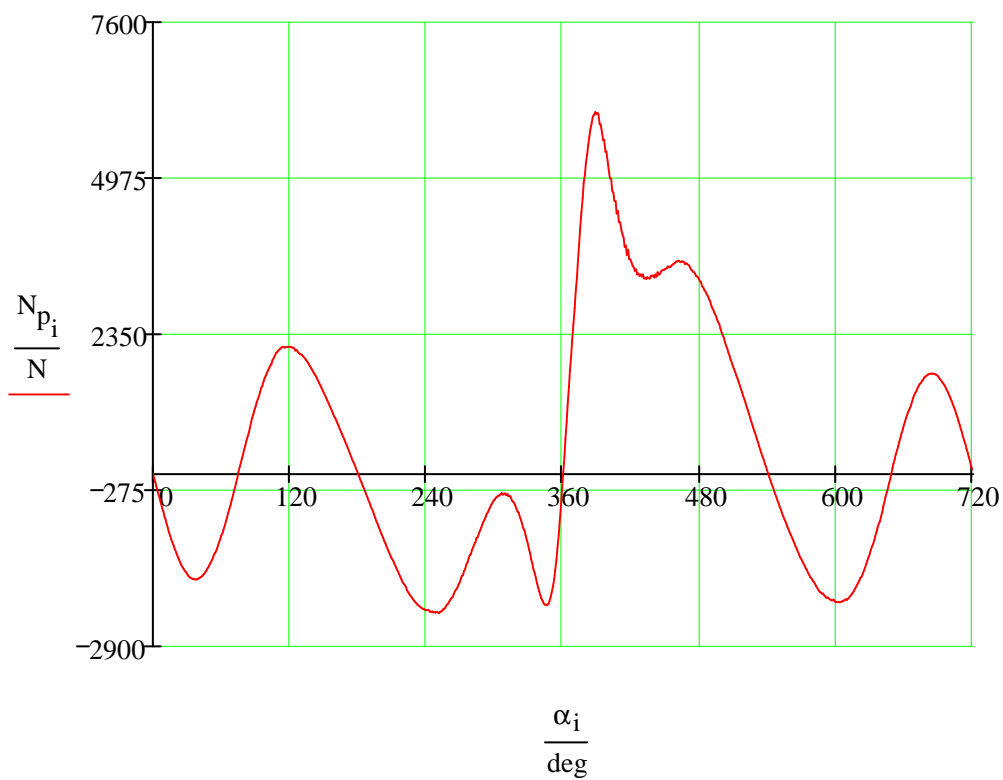
N



Boční síla působící na píšť:  $N_{p_i} := F_{cp_i} \cdot \tan(\beta_i)$

0
-71.98
-143.99
-213.76
-286.91
-355.12
-427.71
-496.99
-569.37
-637.18
-709.26

$N_{p_i} =$  N

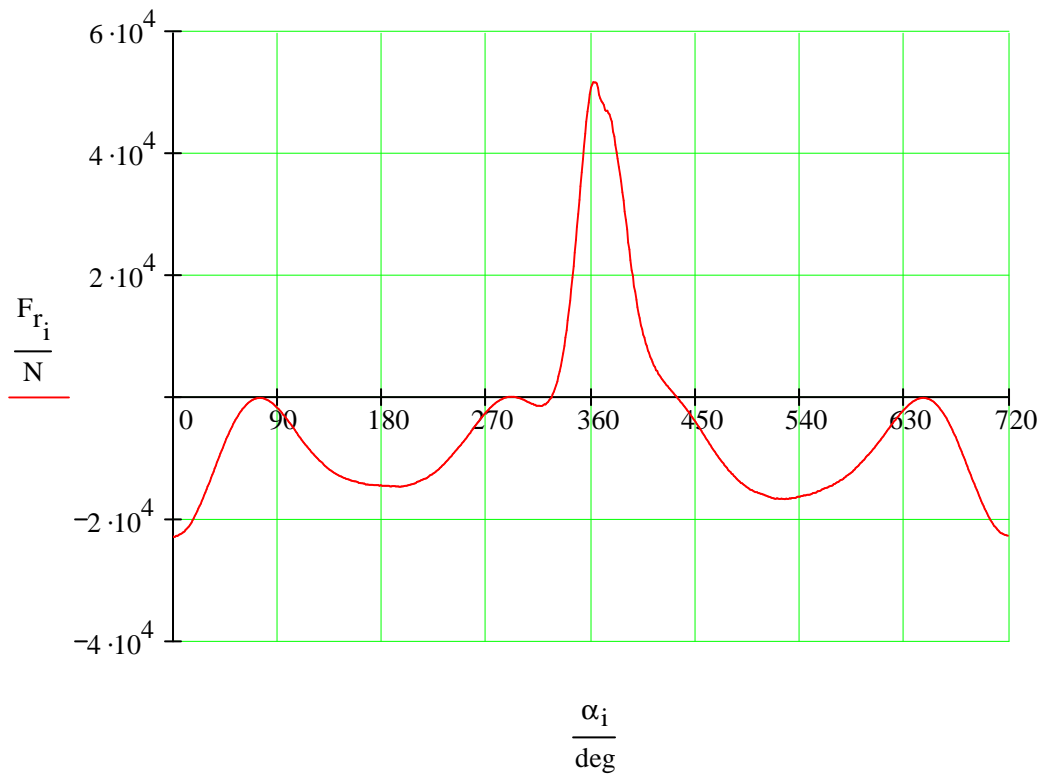


## 6. Radiální síly a tangenciální síly a kroutícího momentu na jednom zalomení klikového hřídele

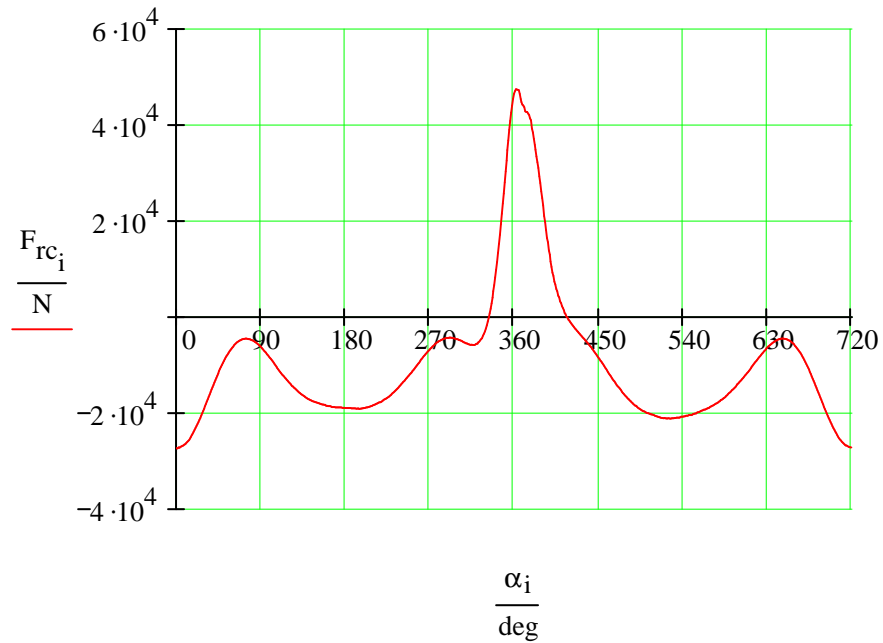
### 6.1. Určení a zobrazení průběhu radiálních, tangenciálních a celkových sil působících v ojnicím čepu na jednom zalomení klikového hřídele

Odstředivá síla:  $F_{od} := (m_B) \cdot r \cdot \omega^2$   $F_{od} = 4521.393 \text{ N}$

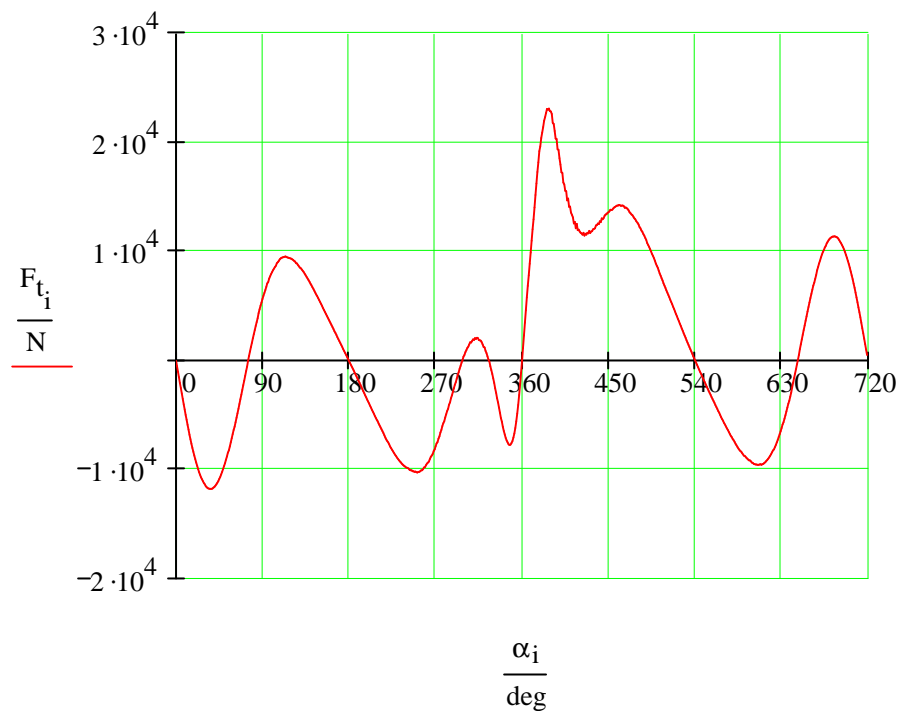
Radialní síla:  $F_{r_i} := \left( F_{o1_i} - \frac{m_A \cdot a_{pc}(\alpha_i)}{\cos(\beta_i)} \right) \cdot \cos(\alpha_i + \beta_i)$



Výsledná radiální síla:  $F_{rc_i} := F_{r_i} - F_{od}$

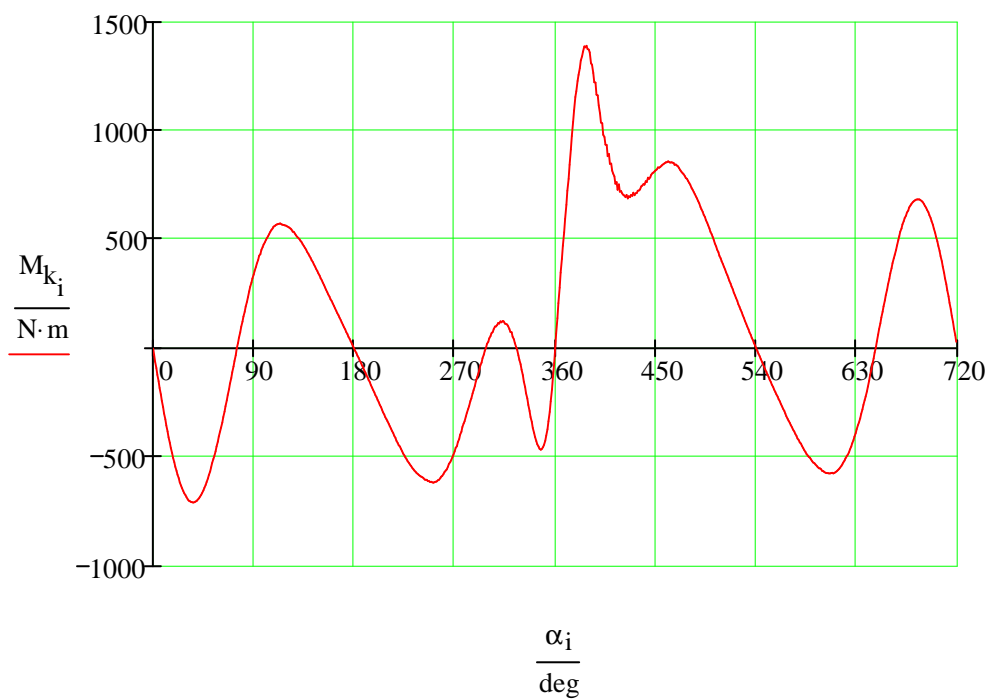


Tangenciální síla:  $F_{t_i} := \left( F_{o1_i} - \frac{m_A \cdot a_{pc}(\alpha_i)}{\cos(\beta_i)} \right) \cdot \sin(\alpha_i + \beta_i)$



## 6.2. Určení průběhu momentu na jednom zalomení klikového hřídele

Točivý moment na jednom zalomení:  $M_{k_i} := F_{t_i} \cdot r$



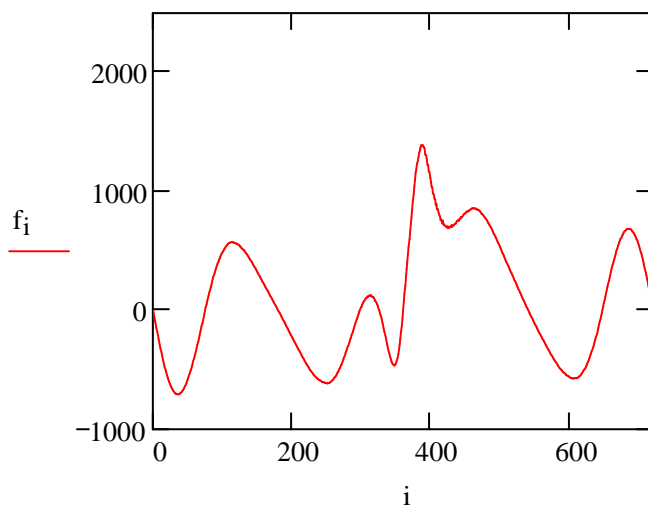


## Příloha 2 - Fourierova analýza točivého momentu:

### 1. Načtení vstupních dat

$F := \text{READPRN}(\text{"AA.dat"}) \quad f := F$

$i := 0, 1 \dots 719$



0
-30.61
-61.2
-91.12
-121.9
-151.2
-181.6
-210.9
-240.9
-269.4
-298.8
-326.3
-353.3
-381.1
-408.5
-433.2

### 2. Provedení DFA v reálném oboru:

Počet harmonických složek:

$n := 720$

$z := 1 \dots n$

$n_{\text{harm}} := 26 \quad k := 0 \dots n_{\text{harm}}$

$j := 0 \dots n - 1 \quad x_j := f_j$

Kosinová složka: 
$$A_k := \frac{2}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left( x_j \cdot \cos \left( k \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{j}{n} \right) \right)$$

Sinová složka: 
$$B_k := \frac{2}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left( x_j \cdot \sin \left( k \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{j}{n} \right) \right)$$

Absolutní hodnoty: 
$$M_k := \sqrt{(A_k)^2 + (B_k)^2}$$

**Výpis amplitud kosinových ( $A_k$ ), sinových ( $B_k$ ) a absolutních hodnot ( $M_k$ ) zadaného momentu.**

Kosinusová složka:      Sinusová složka:      Absolutní hodnoty:

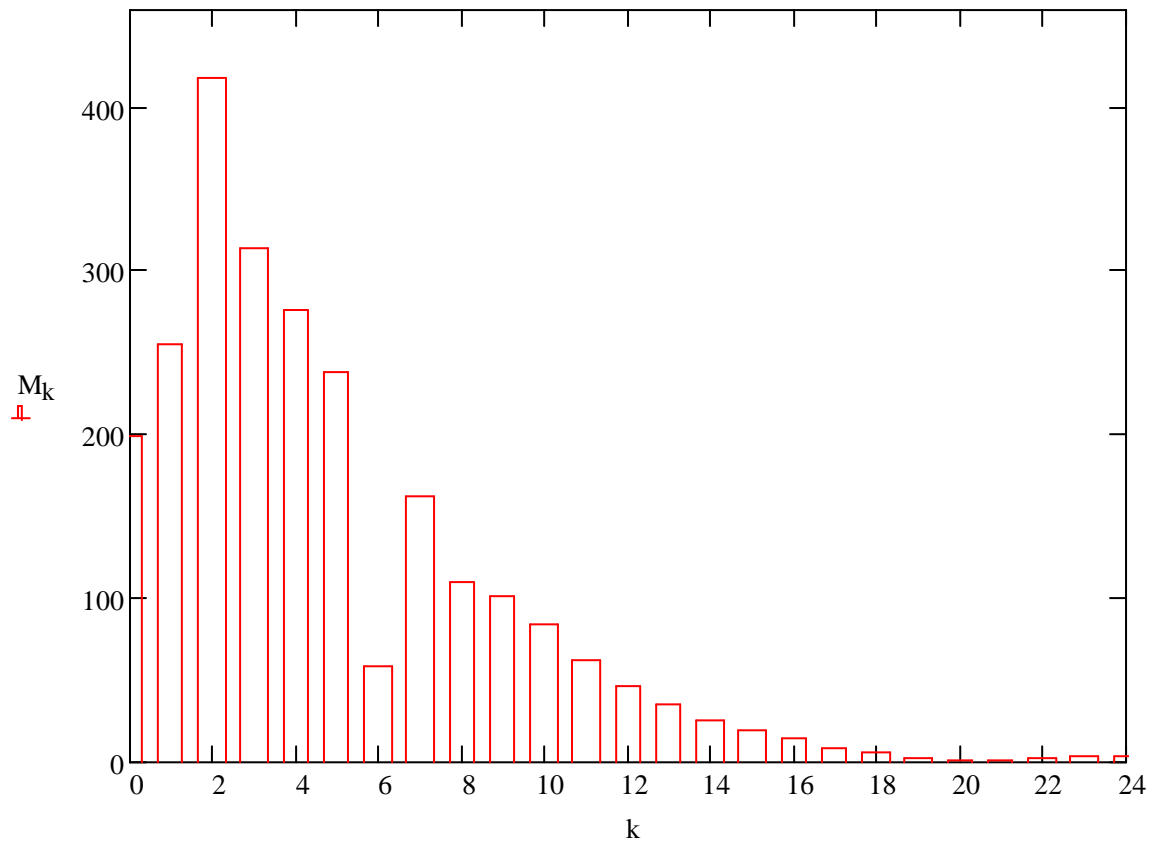
k =	$A_k =$	$B_k =$	$M_k =$
0	199.162	0	199.162
1	-185.769	-174.381	254.792
2	105.191	405.097	418.532
3	-31.236	-312.474	314.031
4	-10.568	-275.495	275.698
5	38.352	-235.145	238.252
6	-41.993	-41.002	58.691
7	54.174	-153.323	162.612
8	-53.267	96.261	110.016
9	48.251	-89.073	101.303
10	-46.239	70.139	84.009
11	38.17	-48.843	61.989
12	-30.101	34.432	45.735
13	25.617	-24.418	35.39
14	-19.064	16.56	25.252
15	15.526	-11.252	19.174
16	-11.207	7.527	13.5
17	7.445	-3.705	8.316
18	-4.5	2.264	5.037
19	2.32	-0.341	2.345
20	-0.647	0.341	0.731
21	-0.668	0.571	0.879
22	1.518	0.624	1.641
23	-2.245	-0.995	2.456
24	2.701	-0.047	2.702
25	-2.872	-0.899	3.01
26	2.91	0.027	2.91

**Zobrazení amplitud složek momentu**

Maximum v grafu:

$$T := 1.1 \cdot \max(M)$$

$$T = 460.385$$



## Příloha 3 - Dynamický model klikového hřídele - výpočet torzních kmitů bez tlumiče

### 1. Zadané hodnoty

Pořadí zážehu 1-5-3-6-2-4

Redukovaný průměr hřídele	$D_{\text{red}} := 80\text{mm}$	
Delka hlavního čepu	$L_j := 44\text{mm}$	
Délka ojničního čepu	$L_c := 40\text{mm}$	
Průměr hlavního čepu	$D_j := 80\text{mm}$	
Průměr ojničního čepu	$D_c := 66\text{mm}$	
Vzdálenost os čepů	$R_o := 60\text{mm}$	
Tloušťka ramene kliky	$L_w := 26\text{mm}$	
Šířka kliky	$B := 106\text{mm}$	
Modul pružnosti v tahu	$E := 2.1 \cdot 10^5 \text{MPa}$	
Modul pružnosti ve smyku	$G := 8.3 \cdot 10^4 \text{MPa}$	
Hmotnost ojnice	$m_{\text{oj}} := 2.41\text{kg}$	
	$m_1 := 0.99\text{kg}$	
	$m_2 := 1.42\text{kg}$	
Hmotnost pístu	$m_{\text{pist}} := 1.365\text{kg}$	
Hmotnost pístního čepu	$m_c := 0.5\text{kg}$	
Hmotnost kroužku	$m_k := 0.085\text{kg}$	
Délka ojnice	$l := 215\text{mm}$	
Moment ve směru osy klikového hřídele:	$J_z := 2.452 \cdot 10^4 \text{kg} \cdot \text{mm}^2$	
Klikový poměr	$\lambda := \frac{R_o}{l}$	$\lambda = 0.279$

## 2. Redukovaná délka

### Redukovaná délka zalomení:

Ker Wilsor

$$L_{\text{red}} := D_{\text{red}}^4 \cdot \left[ \frac{L_j + 0.4 \cdot D_j}{D_j^4} + \frac{L_c + 0.4 \cdot D_c}{D_c^4} + \frac{R_o - 0.2(D_j + D_c)}{L_w \cdot B^3} \right]$$

$$L_{\text{red}} = 260.075 \text{ mm}$$

### Redukovaná délka náboje pro řemenici:

Volná délka náboje pro řemenici  $l_1 := 86 \text{ mm}$

Polovina hlavního čepu:  $l_2 := 22 \text{ mm}$

Průměr náboje:  $d_1 := 40 \text{ mm}$

Průměr hlavního čepu:  $d_2 := 80 \text{ mm}$

Součinitel napětí v přechodu mezi průměry:  $\xi := 0.1$

$$L_{\text{rr}} := (l_1 + \xi \cdot d_1) \cdot \frac{D_{\text{red}}^4}{d_1^4} + (l_2 + \xi \cdot d_1) \cdot \frac{D_{\text{red}}^4}{d_2^4}$$

$$L_{\text{rr}} = 1466 \text{ mm}$$

### Redukovaná délka příruby pro setrvačnick:

Délka příruby setrvačnicku  $l_p := 55 \text{ mm}$

Rozteč šroubů na setrvačnicku  $d_p := 80 \text{ mm}$

$$L_{\text{rs}} := \frac{L_j}{2} + l_p \cdot \frac{D_{\text{red}}^4}{d_p^4} + \frac{1}{2} \cdot L_{\text{red}} \quad L_{\text{rs}} = 207.037 \text{ mm}$$

### 3. Redukovaný moment

#### Redukovaný moment:

Hmotnost pístní skupiny:  $m_p := m_1 + m_{pist} + m_c + m_k \quad m_p = 2.94 \text{ kg}$

$$J_{red} := J_z + m_2 \cdot R_o^2 + m_p \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{\lambda^2}{8} \right) \cdot R_o^2$$

$$J_{red} = 0.035 \text{ m}^2 \cdot \text{kg}$$

#### Redukovaný moment na konci s řemenicí:

zadáno prof. Píšťkem

$$J_{red\_rem} := 0.027 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

#### Redukovaný moment na konci se setrvačnickem:

zadáno prof. Píšťkem

$$J_{red\_setr} := 1.08 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

#### Polární moment jednoho zalomení:

$$I_p := \frac{\pi \cdot D_{red}^4}{32}$$

$$I_p = 0 \text{ m}^4$$

**4. Tuhosti :**

Tuhost náboje řemenice:  $c_0 := \frac{G \cdot I_p}{L_{rr}}$   $c_0 = 227669.034 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}}$

Tuhost zalomení:  $c_1 := \frac{G \cdot I_p}{L_{red}}$   $c_1 = 1.2833 \times 10^6 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}}$

$$c_2 := c_1 \quad c_3 := c_1 \quad c_4 := c_1 \quad c_5 := c_1$$

Tuhost příruby setrvačnicku:  $c_6 := \frac{G \cdot I_p}{L_{rs}}$   $c_6 = 1.612 \times 10^6 \text{ J}$

**5. Výpočet torzních kmitů**

Momentová matice:

$$M := \begin{pmatrix} J_{red\_rem} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{red} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{red} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{red} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{red} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{red} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{red} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{red\_setr} \end{pmatrix}$$

Matice tuhostí

$$C := \begin{pmatrix} c_0 & -c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_0 & c_0 + c_1 & -c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & -c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_4 & c_4 + c_5 & -c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_5 & c_5 + c_6 & -c_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_6 & c_6 \end{pmatrix}$$

Matice soustavy  $A := M^{-1} \cdot C$

### Vlastní čísla matice A

$$\lambda := \text{eigenvals}(A)$$

$$\Omega := \sqrt{\lambda}$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} 139076141.346 \\ 117695073.255 \\ 86249190.114 \\ 51683681.055 \\ 22837400.109 \\ 9267576.247 \\ 2023437.666 \\ -0 \end{pmatrix} \frac{1}{s^2}$$

úhlová rychlost vlastního kmitání

$$\Omega = \begin{pmatrix} 11793.055 \\ 10848.736 \\ 9287.044 \\ 7189.136 \\ 4778.849 \\ 3044.269 \\ 1422.476 \\ 0i \end{pmatrix} \frac{\text{rad}}{s}$$

Matice normalizovaných vektorů vlastních čísel

$$X := \text{eigenvecs}(A)$$



### 6. Vlastní tvary torzních kmitů

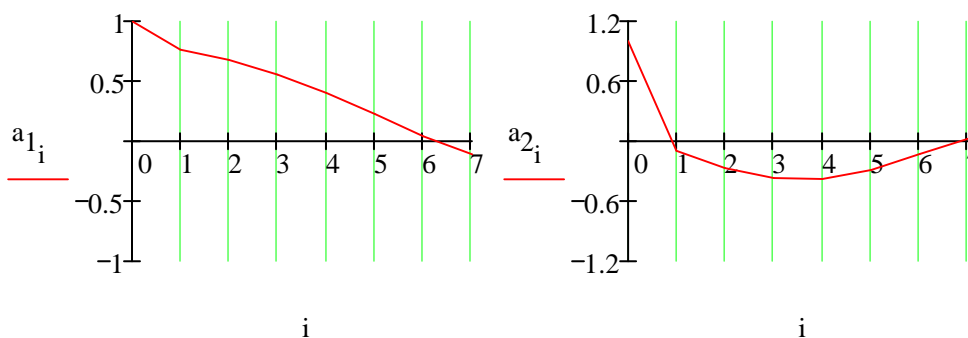
$i := 0..7$  poměrné amplitudy vztažené k amplitudě řemenice  $X_0$

$$a_{0_i} := \frac{X_{i,7}}{X_{0,7}} \quad a_0^T = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)$$

$$a_{1_i} := \frac{X_{i,6}}{X_{0,6}} \quad a_1^T = (1 \ 0.76 \ 0.675 \ 0.554 \ 0.401 \ 0.227 \ 0.04 \ -0.111)$$

$$a_{2_i} := \frac{X_{i,5}}{X_{0,5}} \quad a_2^T = (1 \ -0.099 \ -0.269 \ -0.371 \ -0.379 \ -0.291 \ -0.13 \ 0.025)$$

$$a_{3_i} := \frac{X_{i,4}}{X_{0,4}} \quad a_3^T = (1 \ -1.708 \ -1.124 \ 0.161 \ 1.346 \ 1.691 \ 0.983 \ -0.069)$$



### 7. Výpočet vlastních frekvencí

Frekvence vlastního kmitání  $\omega := \frac{\Omega}{2 \cdot \pi}$

$$N_1 := \omega_6 \quad N_2 := \omega_5$$

$$N_1 = 226.394 \frac{1}{s} \quad N_2 = 484.511 \frac{1}{s}$$

$$\omega = \begin{pmatrix} 1876.922964 \\ 1726.629964 \\ 1478.078992 \\ 1144.186582 \\ 760.57748 \\ 484.510525 \\ 226.39407 \\ 0.000005i \end{pmatrix} \frac{1}{s}$$

$$\kappa := 0.5, 1..13$$

Rezonanční otáčky motoru  $n_{1rez}(\kappa) := \frac{N_1}{\kappa} \quad n_{2rez}(\kappa) := \frac{N_2}{\kappa}$

$\kappa =$		$n_{1rez}(\kappa) =$	$\frac{1}{\text{min}}$	$n_{2rez}(\kappa) =$	$\frac{1}{\text{min}}$
	0.5	27167		58141	
	1	13584		29071	
	1.5	9056		19380	
	2	6792		14535	
	2.5	5433		11628	
	3	4528		9690	
	3.5	3881		8306	
	4	3396		7268	
	4.5	3019		6460	
	5	2717		5814	
	5.5	2470		5286	
	6	2264		4845	
	6.5	2090		4472	
	7	1941		4153	
	7.5	1811		3876	
	8	1698		3634	
	8.5	1598		3420	
	9	1509		3230	
	9.5	1430		3060	
	10	1358		2907	
	10.5	1294		2769	
	11	1235		2643	
	11.5	1181		2528	
	12	1132		2423	
	12.5	1087		2326	
	13	1045		2236	

## 8. Vydatnost rezonancí

$$k := 1..26 \quad \kappa_k := \frac{1}{2} \cdot k$$

$$\delta = \begin{pmatrix} 0 \\ 480 \\ 240 \\ 600 \\ 120 \\ 360 \end{pmatrix} \cdot \text{deg}$$

$$R_{I_k} := \sqrt{\left[ \sum_{i=1}^6 \left( a_{1_i} \cdot \cos(\kappa_k \cdot \delta_{i-1}) \right) \right]^2 + \left[ \sum_{i=1}^6 \left( a_{1_i} \cdot \sin(\kappa_k \cdot \delta_{i-1}) \right) \right]^2}$$

$$R_{II_k} := \sqrt{\left[ \sum_{i=1}^6 \left( a_{2_i} \cdot \cos(\kappa_k \cdot \delta_{i-1}) \right) \right]^2 + \left[ \sum_{i=1}^6 \left( a_{2_i} \cdot \sin(\kappa_k \cdot \delta_{i-1}) \right) \right]^2}$$

$\kappa =$	$R_I =$	$R_{II} =$
0	0	0
0.5	0.492	0.02
1	0.137	0.457
1.5	1.322	0.061
2	0.137	0.457
2.5	0.492	0.02
3	2.657	1.539
3.5	0.492	0.02
4	0.137	0.457
4.5	1.322	0.061
5	0.137	0.457
5.5	0.492	0.02
6	2.657	1.539
6.5	0.492	0.02
7	0.137	0.457
7.5	1.322	0.061
8	0.137	0.457
8.5	0.492	0.02
9	2.657	1.539
9.5	0.492	0.02
10	0.137	0.457
10.5	1.322	0.061
11	0.137	0.457
11.5	0.492	0.02
12	2.657	1.539
12.5	0.492	0.02
13	0.137	0.457

### 9. Amplitudy torzních kmitů volného konce

$$M_{ff} := \text{READPRN}(\text{"MKK.DAT"})$$

$$M_{f_{fn}} := M_{ff_{fn}} \cdot N \cdot m$$

$$fn := 0..26$$

Hodnota  $M_{f0}$  je střední hodnota z FFT se kterou se nepočítá

$$bz := 0..26 \quad \xi := 2.2 \frac{N \cdot m \cdot s}{\text{rad}} \quad \text{Experimentálně zjištěno}$$

$$\phi_{I_{bz}} := \frac{M_{f_{bz}} \cdot R_{I_{bz}}}{\xi \Omega_6 \cdot \sum_{z=1}^6 (a_{1z})^2}$$

$$\phi_{II_{bz}} := \frac{M_{f_{bz}} \cdot R_{II_{bz}}}{\xi \Omega_5 \cdot \sum_{z=1}^6 (a_{2z})^2}$$

$\kappa =$

0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
5.5
6
6.5
7
7.5
8
8.5
9
9.5
10
10.5
11
11.5
12
12.5
13

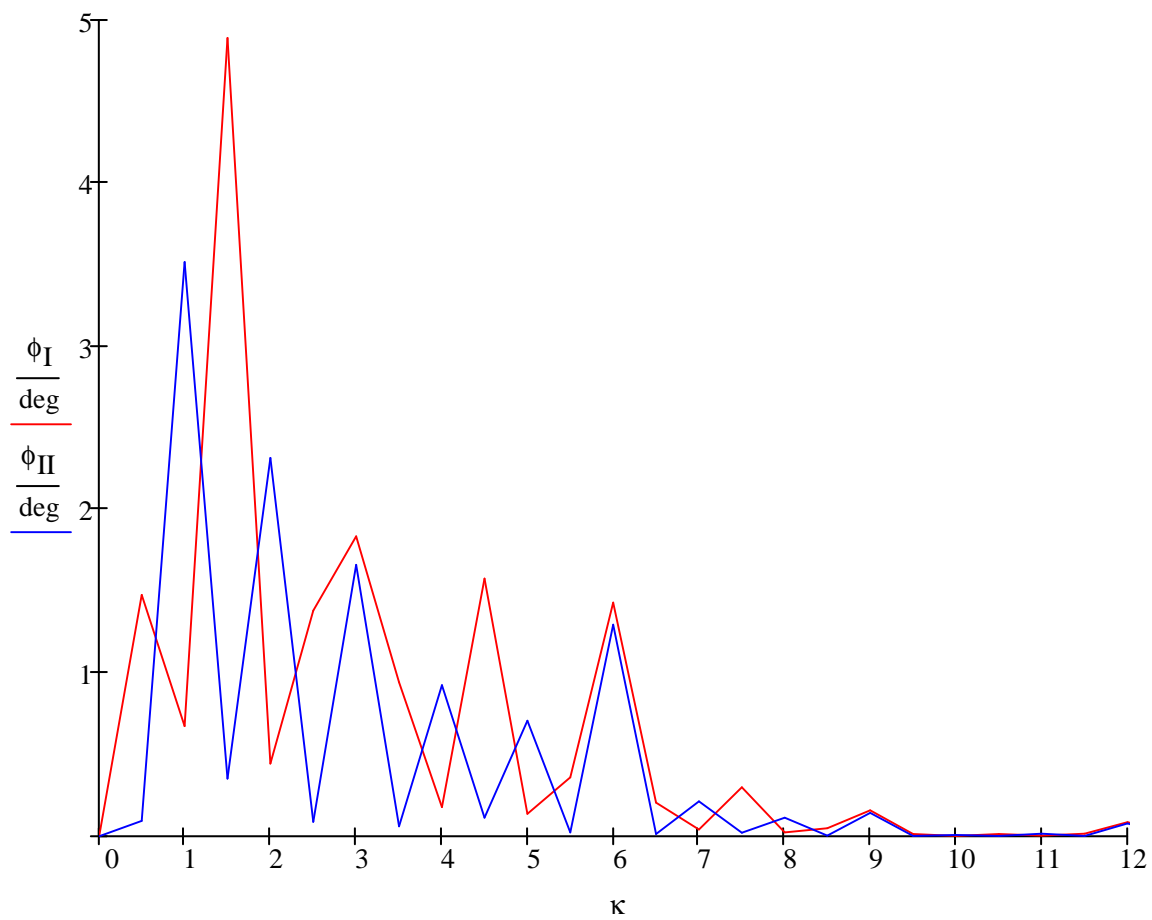
$\phi_{I_{bz}} =$

0
1.477
0.674
4.889
0.444
1.381
1.836
0.943
0.177
1.577
0.135
0.359
1.431
0.205
0.041
0.298
0.022
0.048
0.158
0.014
0.001
0.014
0.003
0.014
0.085
0.017
0.005

deg  $\phi_{II_{bz}} =$

0
0.093
3.517
0.352
2.317
0.087
1.662
0.059
0.924
0.113
0.706
0.023
1.295
0.013
0.212
0.021
0.113
0.003
0.143
0.001
0.006
0.001
0.014
0.001
0.077
0.001
0.024

deg



## 10. Namáhání na torzi

### I. harmonická

### II.harmonická

#### Největší výkmit

$$Ia_1 := a_{1_6} - a_{1_7}$$

$$Ia_1 = 0.151$$

$$IIa_1 := |a_{2_0} - a_{2_1}|$$

$$IIa_1 = 1.099$$

$$IIa_2 := a_{2_6} - a_{2_7}$$

$$IIa_2 = -0.155$$

#### Kroutící moment od torzního kmitání

$$IM_t := \phi_{I_{12}} \cdot Ia_1 \cdot c_0$$

volím  $\phi_{12}$  pro  $\kappa=6$   
protože nižší  $\kappa$   
nezasahuje do  
provozních otáček

$$IM_t = 856.776 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$IIM_t := \phi_{II_{24}} \cdot IIa_1 \cdot c_6$$

volím  $\phi_{24}$  pro  
 $\kappa=12$  protože  
nižší  $\kappa$   
nezasahuje do  
provozních otáček

$$IIM_t = 2365.877 \text{ N}\cdot\text{m}$$

#### Modul ojničního čepu

$$W_\tau := \pi \frac{D_c^3}{16}$$

$$W_\tau = 0.056 \text{ L}$$

#### Napětí od torzního kmitání

$$\tau_I := \frac{IM_t}{W_\tau}$$

$$\tau_I = 15.178 \text{ MPa}$$

$$\tau_{II} := \frac{IIM_t}{W_\tau}$$

$$\tau_{II} = 41.911 \text{ MPa}$$

## Příloha 4 - Dynamický model klikového hřídele - výpočet torzních kmitů s tlumičem

### 1. Zadané hodnoty

Pořadí zážehu 1-5-3-6-2-4

$J_b := \text{READPRN}("j.DAT")$

$J_{\text{red}} := J_b \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2$

$\omega_b := \text{READPRN}("OMEGA.DAT")$

$\omega := \omega_b \cdot \text{s}^{-1}$

$c_b := \text{READPRN}("C.T.DAT")$

$c_n := c_b \cdot \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}}$

$Ta_1 := \text{READPRN}("a1.dat")$

$Ta_2 := \text{READPRN}("a2.dat")$

$Ta_3 := \text{READPRN}("a3.dat")$

$T\phi_I := \text{READPRN}("fi1.dat")$

$T\phi_{II} := \text{READPRN}("fi2.dat")$

$$J_{\text{red}} = \begin{pmatrix} 0.027 \\ 0.035 \\ 0.035 \\ 0.035 \\ 0.035 \\ 0.035 \\ 0.035 \\ 1.08 \end{pmatrix} \text{m}^2 \cdot \text{kg} \quad \omega = \begin{pmatrix} 11790 \\ 10850 \\ 9287 \\ 7189 \\ 4779 \\ 3044 \\ 1422 \\ 0i \end{pmatrix} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad c_n = \begin{pmatrix} 227700 \\ 1283000 \\ 1283000 \\ 1283000 \\ 1283000 \\ 1283000 \\ 1283000 \\ 1612000 \end{pmatrix} \text{J}$$

## 2. Volba parametrů tlumiče

Moment setrvačnosti tlumiče volím:

$$J_t := 0.045 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Efektivní moment:

$$J_{\text{ef}} := \sum_{i=0}^7 \left[ J_{\text{red}_i} \cdot (Ta_{1_i})^2 \right] \quad J_{\text{ef}} = 0.095 \text{ m}^2 \cdot \text{kg}$$

poměrná velikost tlumiče:

$$\mu := \frac{J_t}{J_{\text{ef}}} \quad \mu = 0.475$$

Optimální naladění tlumiče:

$$w_{\text{opt}} := \frac{1}{1 + \mu} \quad w_{\text{opt}} = 0.678$$

Úhlová rychlost tlumiče:

$$\Omega_t := \omega_6 \cdot w_{\text{opt}} \quad \Omega_t = 964.274 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Torzní tuhost tlumiče

$$c_t := J_t \cdot \Omega_t^2 \quad c_t = 41842.118 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}}$$

0

## 3. Výpočet torzních kmitů

$$C := \begin{pmatrix} c_0 & -c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_0 & c_0 + c_1 & -c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & -c_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_4 & c_4 + c_5 & -c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_5 & c_5 + c_6 & -c_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_6 & c_6 + c_7 & -c_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_7 & c_7 \end{pmatrix}$$



$$M := \begin{pmatrix} J_t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{\text{red}_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{\text{red}_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{\text{red}_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{\text{red}_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{\text{red}_4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{\text{red}_5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{\text{red}_6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{\text{red}_7} \end{pmatrix}$$

Matice soustavy

$$A := M^{-1} \cdot C$$

**Vlastní čísla matice A**

úhlová rychlost vlastního kmitání

$$\lambda := \text{eigenvals}(A)$$

$$\Omega := \sqrt{\lambda}$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} 139029312.926 \\ 117657737.776 \\ 86225127.998 \\ 51680471.981 \\ 22960425.805 \\ 10369790.403 \\ 2590822.982 \\ -0 \\ 667104.401 \end{pmatrix} \frac{1}{\text{s}^2} \quad \Omega = \begin{pmatrix} 11791.069 \\ 10847.015 \\ 9285.749 \\ 7188.913 \\ 4791.704 \\ 3220.216 \\ 1609.603 \\ 0i \\ 816.765 \end{pmatrix} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Matice normalizovaných vektorů vlastních čísel

$$X := \text{eigenvecs}(A)$$

#### 4. Vlastní tvary torsních kmitů:

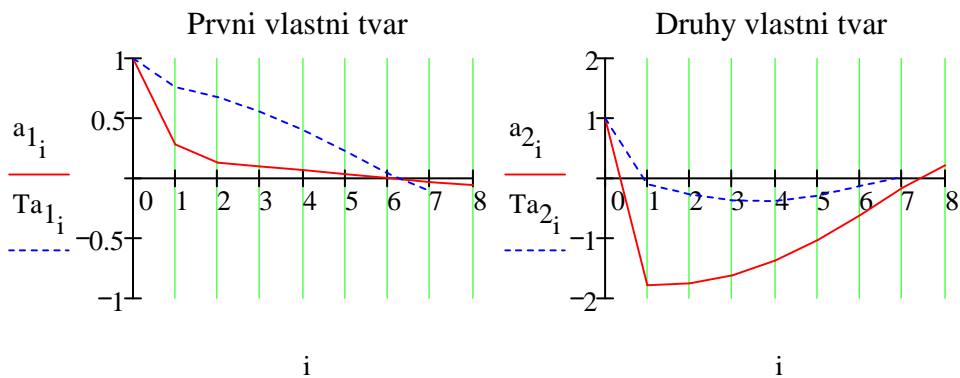
$i := 0..8$  poměrné amplitudy vztažené k amplitudě řemenice  $X_0$

$$a_{0_i} := \frac{X_{i,7}}{X_{0,7}} \quad a_0^T = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)$$

$$a_{1_i} := \frac{X_{i,8}}{X_{0,8}} \quad a_1^T = (1 \ 0.283 \ 0.128 \ 0.099 \ 0.067 \ 0.034 \ 0.001 \ -0.032 \ -0.058)$$

$$a_{2_i} := \frac{X_{i,6}}{X_{0,6}} \quad a_2^T = (1 \ -1.786 \ -1.75 \ -1.619 \ -1.374 \ -1.032 \ -0.617 \ -0.159 \ 0.215)$$

$$a_{3_i} := \frac{X_{i,5}}{X_{0,5}} \quad a_3^T = (1 \ -10.152 \ 0.282 \ 2.054 \ 3.244 \ 3.516 \ 2.793 \ 1.278 \ -0.215)$$



### 5. Frekvence vlastního kmitání

$$N_o := \frac{\Omega}{2 \cdot \pi}$$

$$N_o = \begin{pmatrix} 1877 \\ 1726 \\ 1478 \\ 1144 \\ 763 \\ 513 \\ 256 \\ 0i \\ 130 \end{pmatrix} \frac{1}{s} \quad \kappa := 0.5, 1..12$$

$$N_1 := N_{o_8} \quad N_2 := N_{o_6}$$

$N_1 = 129.992 \frac{1}{s}$

$N_2 = 256.176 \frac{1}{s}$

Rezonanční otáčky motoru

$$n_{1rez}(\kappa) := \frac{N_1}{\kappa} \quad n_{2rez}(\kappa) := \frac{N_2}{\kappa}$$

$\kappa =$	$n_{1rez}(\kappa) =$	$n_{2rez}(\kappa) =$	
	0.5	15599	30741
	1	7800	15371
	1.5	5200	10247
	2	3900	7685
	2.5	3120	6148
	3	2600	5124
	3.5	2228	4392
	4	1950	3843
	4.5	1733	3416
	5	1560	3074
	5.5	1418	2795
	6	1300	2562
	6.5	1200	2365
	7	1114	2196
	7.5	1040	2049
	8	975	1921
	8.5	918	1808
	9	867	1708
	9.5	821	1618
	10	780	1537
	10.5	743	1464
	11	709	1397
	11.5	678	1337
	12	650	1281

### 6. Vydatnost rezonancí

$$k := 1..24$$

$$\kappa_k := \frac{1}{2} \cdot k$$

$$\delta = \begin{pmatrix} 0 \\ 480 \\ 240 \\ 600 \\ 120 \\ 360 \end{pmatrix} \cdot \text{deg}$$

$$R_{I_k} := \sqrt{\left[ \sum_{i=2}^7 \left( a_{1_i} \cdot \cos(\kappa_k \cdot \delta_{i-2}) \right) \right]^2 + \left[ \sum_{i=2}^7 \left( a_{1_i} \cdot \sin(\kappa_k \cdot \delta_{i-2}) \right) \right]^2}$$

$$R_{II_k} := \sqrt{\left[ \sum_{i=2}^7 \left( a_{2_i} \cdot \cos(\kappa_k \cdot \delta_{i-2}) \right) \right]^2 + \left[ \sum_{i=2}^7 \left( a_{2_i} \cdot \sin(\kappa_k \cdot \delta_{i-2}) \right) \right]^2}$$

$\kappa =$

0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
5.5
6
6.5
7
7.5
8
8.5
9
9.5
10
10.5
11
11.5
12

$R_I =$

0
0.111
0.005
0.291
0.005
0.111
0.297
0.111
0.005
0.291
0.005
0.111
0.297
0.111
0.005
0.291
0.005
0.111
0.297
0.111
0.005
0.291
0.005
0.111
0.297

$R_{II} =$

0
1.082
0.439
2.935
0.439
1.082
6.552
1.082
0.439
2.935
0.439
1.082
6.552
1.082
0.439
2.935
0.439
1.082
6.552
1.082
0.439
2.935
0.439
1.082
6.552

## 7. Amplitudy torzních kmitů volného konce

$$M_{ff} := \text{READPRN}(\text{"MKK.DAT"}) \quad fn := 0..26$$

$$M_{f_{fn}} := M_{ff_{fn}} \cdot N \cdot m \quad bz := 0..24$$

poměrný útlum:  $\gamma := 0.1$

tlumící odpor hřídele:  $\xi := 2.2 \cdot \frac{N \cdot m \cdot s}{\text{rad}}$  Experimentálně zjištěno

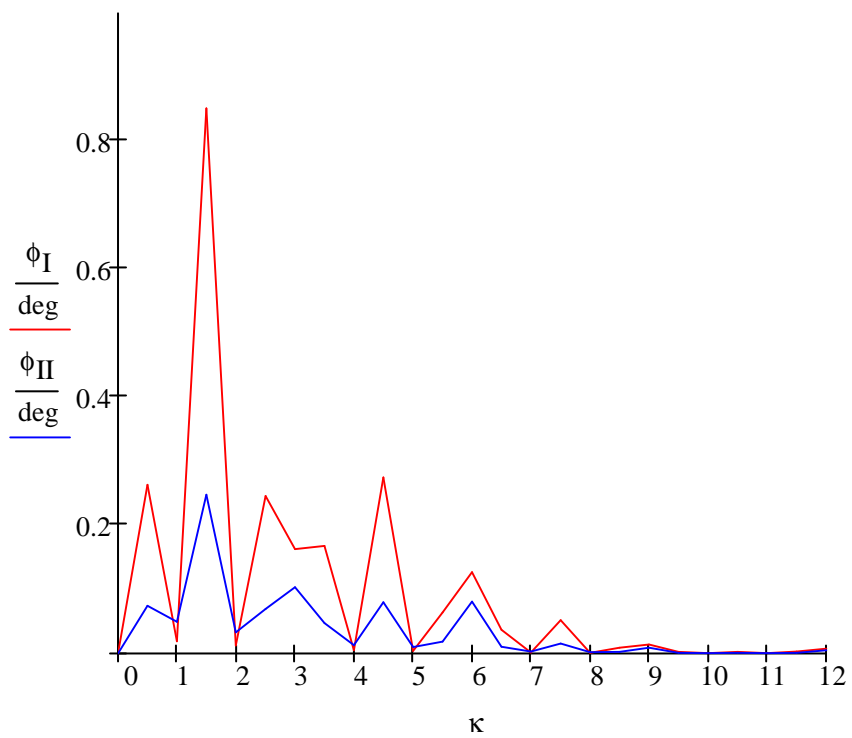
tlumící odpor tlumiče:  $\xi_t := 2 \cdot \gamma \cdot J_t \cdot \Omega_6$

$\xi_t = 14.486 \frac{N \cdot m \cdot s}{\text{rad}}$
---

$$\phi_{I_{bz}} := \frac{M_{f_{bz}} \cdot R_{I_{bz}}}{\Omega_8 \cdot \left[ \xi \cdot \left[ \sum_{z=2}^7 (a_{1z})^2 \right] + \xi_t \cdot (a_{10} - a_{11})^2 \right]}$$

$$\phi_{II_{bz}} := \frac{M_{f_{bz}} \cdot R_{II_{bz}}}{\Omega_6 \cdot \left[ \xi \cdot \left[ \sum_{z=2}^7 (a_{2z})^2 \right] + \xi_t \cdot (a_{20} - a_{21})^2 \right]}$$

$\kappa =$	$\phi_{I_{bz}} =$	deg	$\phi_{II_{bz}} =$	deg
0	0		0	
0.5	0.263		0.074	
1	0.019		0.049	
1.5	0.851		0.248	
2	0.012		0.033	
2.5	0.246		0.069	
3	0.163		0.103	
3.5	0.168		0.047	
4	0.005		0.013	
4.5	0.275		0.08	
5	0.004		0.01	
5.5	0.064		0.018	
6	0.127		0.081	
6.5	0.037		0.01	
7	0.001		0.003	
7.5	0.052		0.015	
8	0.001		0.002	
8.5	0.009		0.002	
9	0.014		0.009	
9.5	0.002		0.001	
10	0		0	
10.5	0.002		0.001	
11	0		0	
11.5	0.003		0.001	
12	0.007		0.005	



## 8. Namáhání na torzi

průměr oj. čepu:

$$D_c := 66\text{mm}$$

### I.harmonická

$$Ia_i := a_{16} - a_{17} \quad Ia_i = 0.033$$

### II.harmonická

$$IIa_1 := a_{20} - a_{21} \quad IIa_1 = 2.786$$

$$IIa_2 := a_{27} - a_{28} \quad IIa_2 = -0.374$$

### Kroučící moment od torzního kmitání

$$IM_t := \phi_{I7} \cdot Ia_i \cdot c_6$$

$$IM_t = 125.413 \text{ N}\cdot\text{m}$$

volím  $\phi 12$  pro  $\kappa=6$  protože nizzsi  $\kappa$   
nezasahuje do provozních otáček

$$IIM_t := \phi_{II15} \cdot IIa_1 \cdot c_0$$

$$IIM_t = 30.789 \text{ N}\cdot\text{m}$$

volím  $\phi 18$  pro  $\kappa=9$  protože nizzsi  $\kappa$   
nezasahuje do provozních otáček

### Modul ojničního čepu

$$W_\tau := \pi \frac{D_c^3}{16} \quad W_\tau = 0.056 \text{ L}$$

### Napětí od torzního kmitání

$$\tau_I := \frac{IM_t}{W_\tau}$$

$$\tau_I = 2.222 \text{ MPa}$$

$$\tau_{II} := \frac{IIM_t}{W_\tau}$$

$$\tau_{II} = 0.545 \text{ MPa}$$

## 9. Rozměrový návrh tlumiče

Modul pružnosti ve smyku pryže:  $G_g := 1 \text{ MPa}$

Torzni tuhost tlumiče:  $c_t = 41842.118 \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{rad}}$

Moment setrvačnosti tlumiče:  $J_t = 0.045 \text{ m}^2\cdot\text{kg}$

vnitřní průměr prstence:  $D_1 := 135 \text{ mm}$

Tloušťka pryžového prstence:  $t_g := 5 \text{ mm}$

PRYŽ:

Vnější průměr prstence:  $D_2 := \sqrt[4]{D_1^4 + \frac{32 \cdot t_g \cdot c_t}{\pi \cdot G_g}}$   $D_2 = 222.778 \text{ mm}$

Krouťicí moment v pryži:  $M_t := \phi_{I_{12}} \cdot (a_{1_0} - a_{1_1}) \cdot c_t$   $M_t = 66.391 \text{ N}\cdot\text{m}$

Napětí v pryži:  $\tau_g := 16 \cdot \frac{M_t \cdot \left(\frac{D_2 - D_1}{2}\right)}{\pi \cdot (D_2^4 - D_1^4)}$   $\tau_g = 0.007 \text{ MPa}$

### KOVOVÝ PRSTENEC

Hustota železa:  $\rho_o := 7850 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$

Tloušťka prstence:  $t_o := 12 \text{ mm}$

Vnitřní poloměr:  $R_1 := \frac{D_1}{2}$   $R_1 = 67.5 \text{ mm}$

Vnější poloměr:  $R_2 := \sqrt[4]{\frac{2J_t}{\rho_o \cdot t_o \cdot \pi} + R_1^4}$   $R_2 = 134.255 \text{ mm}$