

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta elektrotechniky  
a komunikačních technologií

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Brno, 2018

Bc. Norbert Zsitva



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION

## ÚSTAV AUTOMATIZACE A MĚŘICÍ TECHNIKY

DEPARTMENT OF CONTROL AND INSTRUMENTATION

# APROXIMACE LTI SISO SYSTÉMŮ S DOPRAVNÍM ZPOŽDĚNÍM POMOCÍ ZOBECNĚNÝCH LAGUERROVÝCH FUNKCÍ

DEAD TIME LTI SISO SYSTEMS APPROXIMATION USING GENERALIZED LAGUERRE FUNCTIONS

## DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

## AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Norbert Zsitva

## VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

prof. Ing. Pavel Jura, CSc.

BRNO 2018

# Diplomová práce

magisterský navazující studijní obor **Kybernetika, automatizace a měření**

Ústav automatizace a měřicí techniky

**Student:** Bc. Norbert Zsitva

**ID:** 164444

**Ročník:** 2

**Akademický rok:** 2017/18

**NÁZEV TÉMATU:**

## Aproximace LTI SISO systémů s dopravním zpožděním pomocí zobecněných Laguerrových funkcí

### POKYNY PRO VYPRACOVÁNÍ:

1. Simulačně proveďte vliv volných parametrů na chování zobecněných Laguerrových funkcí. Proveďte možnost aproximace posunutého Diracova impulzu pomocí báze systému zobecněných Laguerrových funkcí.
2. Zvolte vhodné kritérium pro ohodnocení kvality aproximace impulzní charakteristiky ideálního LTI SISO systému s dopravním zpožděním a vyšetřete vliv volných parametrů na toto kritérium. Porovnejte aproximace při použití prostých a zobecněných Laguerrových funkcí z hlediska tohoto kritéria.
3. Na vybraných LTI SISO systémech s dopravním zpožděním numericky proveďte závěry předchozích bodů zadání. Porovnejte chyby aproximace při použití prostých a zobecněných Laguerrových funkcí. Získané výsledky doplňte grafickými ukázkami.

### DOPORUČENÁ LITERATURA:

1. A. C. den Brinker, B. E. Sarroukh: Optimal Free Parameters in Orthonormal Approximation. IEEE Transaction on Signal Processing, Vol. 46, No. 8, August 1998.
2. T. W. Parks: Choice of Time Scale in Laguerre Approximations Using Signal Measurements. IEEE Trans. Automat. Contr.vol. AC-16, pp. 511-513, 1971.
3. Egi Hidayat, Alexander Medvedev: Laguerre domain identification of continuous linear time-delay systems from impulse response data, Automatica 48 (2012), 2902-2907.

**Termín zadání:** 5. 2. 2018

**Termín odevzdání:** 14.5.2018

**Vedoucí práce:** prof. Ing. Pavel Jura, CSc.

**Konzultant:**



**doc. Ing. Václav Jirsík, CSc.**

předseda oborové rady



### UPOZORNĚNÍ:

Autor diplomové práce nesmí při vytváření diplomové práce porušit autorská práva třetích osob, zejména nesmí zasahovat nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a musí si být plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č. 40/2009 Sb.

## **ABSTRAKT**

Táto diplomová práca sa zaoberá aproximáciou dopravného oneskorenia v časovo invariantných systémoch. V práci sú prezentované zobecnené Laguerrove funkcie a ich vlastnosti. Následne je ukázaná aproximácia Diracovho impulzu pomocou týchto funkcií a je popísaná voľba voľných parametrov. Získané výsledky sú vyhodnotené pomocou energie. V záverečnej časti práce sú porovnané aproximácie pomocou jednoduchých a zobecnených Laguerrových funkcií na vybraných systémoch.

## **KLÚČOVÉ SLOVÁ**

dopravné oneskorenie, zobecnené Laguerrove funkcie, Diracov impulz, impulzová charakteristika, energia aproximácie, prenosová funkcia

## **ABSTRACT**

This final thesis deals with the approximation of time delay in time invariant systems. First, the generalized Laguerre functions and their characteristics are presented. After this, the approximation of the Dirac delta function with the help of these functions is shown. Also, the choice of the free parameters is discussed and the results are evaluated with the help of energy. In the final part of the thesis, the approximations of systems with generalized and simple Laguerre functions are compared.

## **KEYWORDS**

time delay, generalized Laguerre functions, Dirac delta function, impulse response, energy of approximation, transfer function

ZSITVA, Norbert. *Aproximace LTI SISO systémů s dopravním zpožděním pomocí zobecněných Laguerrových funkcí*. Brno, 2018, 74 s. Diplomová práca. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Ústav automatizace a měřicí techniky. Vedúci práce: prof. Ing. Pavel Jura, CSc.

## VYHLÁSENIE

Vyhlasujem, že som svoju diplomovú prácu na tému „Aproximace LTI SISO systémů s dopravním zpožděním pomocí zobecněných Laguerrových funkcí“ vypracoval samostatne pod vedením vedúceho diplomovej práce, využitím odbornej literatúry a ďalších informačných zdrojov, ktoré sú všetky citované v práci a uvedené v zozname literatúry na konci práce.

Ako autor uvedenej diplomovej práce ďalej vyhlasujem, že v súvislosti s vytvorením tejto diplomovej práce som neporušil autorské práva tretích osôb, najmä som nezasiahol nedovoleným spôsobom do cudzích autorských práv osobnostných a/alebo majetkových a som si plne vedomý následkov porušenia ustanovenia § 11 a nasledujúcich autorského zákona Českej republiky č. 121/2000 Sb., o práve autorskom, o právach súvisiacich s právom autorským a o zmene niektorých zákonov (autorský zákon), v znení neskorších predpisov, vrátane možných trestnoprávných dôsledkov vyplývajúcich z ustanovenia časti druhej, hlavy VI. diel 4 Trestného zákoníka Českej republiky č. 40/2009 Sb.

Brno .....

.....

podpis autora

## POĎAKOVANIE

Rád by som poďakoval vedúcemu diplomovej práce, pánovi prof. Ing. Pavlovi Jurovi, CSc. za odborné vedenie, konzultácie, trpezlivosť a cenné návrhy k práci.

Brno .....

.....

podpis autora

# Obsah

Úvod	11
<b>1 Zobecnené Laguerrove Funkcie</b>	<b>12</b>
1.1 Zobecnené Laguerrove polynómy . . . . .	12
1.2 Zobecnené Laguerrove funkcie . . . . .	12
1.3 Overenie ortonormálnosti generovaných zobecných Laguerrových funkcií . . . . .	15
1.4 Vplyv voľných parametrov na zobecné a jednoduché Laguerrove funkcie . . . . .	17
<b>2 Aproximácia Diracovho impulzu pomocou zobecných Laguerrových funkcií</b>	<b>20</b>
2.1 Základné vzťahy k aproximácii pomocou zobecných Laguerrových funkcií . . . . .	20
2.2 Aproximácia ideálneho systému s dopravným oneskorením . . . . .	20
2.3 Vplyv parametrov zobecných Laguerrových funkcií na aproximáciu	22
2.4 Dopravné oneskorenie a časová mierka . . . . .	25
2.5 Aproximácia Diracovho impulzu jednoduchými Laguerrovými funkciami . . . . .	26
<b>3 Určenie optimálnych hodnôt voľných parametrov</b>	<b>28</b>
3.1 Potrebné vzťahy k určeniu optimálnych parametrov zobecných Laguerrových funkcií . . . . .	28
3.2 Optimálne parametre pre aproximáciu Diracovho impulzu zobecnými Laguerrovými funkciami . . . . .	29
3.2.1 Náhrada Diracovho impulzu obdĺžnikovým pulzom . . . . .	29
3.2.2 Náhrada Diracovho impulzu trojuholníkovým pulzom . . . . .	35
3.3 Potrebné vzťahy k určeniu optimálnych parametrov jednoduchých Laguerrových funkcií . . . . .	43
3.4 Aproximácia Diracovho impulzu jednoduchými Laguerrovými funkciami pomocou obdĺžnikového pulzu . . . . .	44
3.5 Aproximácia Diracovho impulzu jednoduchými Laguerrovými funkciami pomocou trojuholníkového pulzu . . . . .	46
3.6 Vyššie hodnoty parametru $\sigma$ pre jednoduché Laguerrove funkcie . . . . .	49
<b>4 Vyhodnotenie presnosti aproximácie Diracovho impulzu z hľadiska energie</b>	<b>51</b>
4.1 Odvodenie potrebných vzťahov pre výpočet energie . . . . .	51

4.2	Určenie závislosti energie aproximovaného Diracovho impulzu na parametroch zobecnených Laguerrových funkcií . . . . .	53
4.3	Optimálne voľné parametre pre aproximáciu Diracovho impulzu pomocou energie . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Aproximácia vybraných LTI SISO systémov s dopravným oneskorením pomocou zobecnených Laguerrových funkcií</b>	<b>61</b>
5.1	Aproximácia vybraných systémov s dopravným oneskorením . . . . .	61
5.2	Vyhodnotenie aproximácií vybraných systémov pomocou kvadratickeho kritéria . . . . .	67
5.3	Systémy s nerealizovateľnými optimálnymi parametrami . . . . .	68
<b>6</b>	<b>Záver</b>	<b>70</b>
	<b>Literatúra</b>	<b>71</b>
	<b>Zoznam symbolov, veličín a skratiek</b>	<b>72</b>
	<b>Zoznam príloh</b>	<b>73</b>
<b>A</b>	<b>Obsah priloženého CD</b>	<b>74</b>



# Zoznam obrázkov

1.1	Zobecnené Laguerrove funkcie . . . . .	13
1.2	Zobecnená Laguerrova funkcia pre rád $m = 60$ ; $\alpha = 1$ ; $\sigma = 30$ . . . . .	14
1.3	Matica ortogonalita do rádu $m = n = 100$ . . . . .	17
1.4	Zmena parametru $\alpha$ - zobecnené Laguerrove funkcie . . . . .	18
1.5	Zmena parametru $\sigma$ - zobecnené Laguerrove funkcie . . . . .	18
1.6	Zmena parametru $\sigma$ - jednoduché Laguerrove funkcie . . . . .	19
2.1	Aproximácia Diracovho impulzu ( $M = 100, \alpha = 10, \sigma = 20$ ) . . . . .	22
2.2	Porovnanie aproximácie pre rôzne rády, $T = 2$ . . . . .	23
2.3	Vplyv parametru $\alpha$ pre $\sigma = 6$ . . . . .	24
2.4	Vplyv parametru $\alpha$ pre $\sigma = 30$ . . . . .	24
2.5	Rôzne hodnoty časovej mierky $\sigma$ . . . . .	25
2.6	Porovnanie aproximácií pre rôzne hodnoty dopravného oneskorenia . . . . .	26
2.7	Aproximácia Diracovho impulzu jednoduchými Laguerrovými funkciami pre rôzne hodnoty parametru $\sigma$ . . . . .	27
3.1	Náhrada Diracovho impulzu obdĺžnikovým pulzom . . . . .	29
3.2	Derivácia obdĺžnikového pulzu . . . . .	30
3.3	Diracov impulz s optimálnymi parametrami pomocou obdĺžnikovej náhrady, $\varepsilon = 0,5$ ; $\xi = 0,25$ ; $T = 2$ . . . . .	33
3.4	Diracov impulz s optimálnymi parametrami pomocou obdĺžnikovej náhrady, $\varepsilon = 0,5$ ; $\xi = 0,25$ ; $T = 1$ . . . . .	34
3.5	Náhrada Diracovho impulzu trojuholníkovým pulzom . . . . .	35
3.6	Derivácia trojuholníkového pulzu . . . . .	37
3.7	Diracov impulz s optimálnymi parametrami pomocou trojuholníkovej náhrady, $\varepsilon = 1,25$ ; $T = 2$ . . . . .	41
3.8	Diracov impulz s optimálnymi parametrami pomocou trojuholníkovej náhrady, $\varepsilon = 1,25$ ; $T = 1$ . . . . .	42
3.9	Porovnanie aproximácií Diracovho impulzu pomocou obdĺžnikovej náhrady, $\varepsilon = 0,5$ ; $\xi = 0,25$ ; $T = 2$ . . . . .	45
3.10	Porovnanie aproximácií Diracovho impulzu pomocou obdĺžnikovej náhrady, $\varepsilon = 0,01$ ; $\xi = 0,0025$ ; $T = 0,2$ . . . . .	46
3.11	Porovnanie aproximácií Diracovho impulzu pomocou trojuholníkovej náhrady, $\varepsilon = 1,25$ ; $T = 2$ . . . . .	47
3.12	Porovnanie aproximácií Diracovho impulzu pomocou trojuholníkovej náhrady, $\varepsilon = 0,15$ ; $T = 0,2$ . . . . .	48
3.13	Porovnanie hodnôt parametru $\sigma$ pri použití jednoduchých Laguerrových funkcií obdĺžnikovou náhradou Diracovho impulzu, $\varepsilon = 0,5$ ; $\xi = 0,25$ ; $T = 2$ . . . . .	49

3.14	Porovnanie hodnôt parametru $\sigma$ pri použití jednoduchých Laguerrových funkcií trojuholníkovou náhradou Diracovho impulzu, $\varepsilon = 1,25; T = 2$ . . . . .	50
4.1	Energia aproximovaného Diracovho impulzu v závislosti na parametri $x; T = 2$ . . . . .	54
4.2	Energia aproximovaného Diracovho impulzu v závislosti na parametri $x$ pre rôzne rády $M; T = 2$ . . . . .	55
4.3	Energia aproximovaného Diracovho impulzu v závislosti na parametri $\alpha$ pre rôzne rády $M; T = 2$ . . . . .	56
4.4	Maximálne hodnoty energie aproximovaného Diracovho impulzu pre parameter $x; T = 2; M = 30$ . . . . .	57
4.5	Maximálne hodnoty energie aproximovaného Diracovho impulzu pre parameter $\alpha; T = 2; M = 30$ . . . . .	58
4.6	Optimálne parametre pomocou energie pre rád $M = 30; T = 2$ . . . . .	59
5.1	Aproximácia systému prvého rádu zobecnenými Laguerrovými funkciami ( $M = 100; T = 2$ ) . . . . .	62
5.2	Aproximácia systému prvého rádu jednoduchými Laguerrovými funkciami ( $M = 100; T = 2$ ) . . . . .	63
5.3	Aproximácia systému druhého rádu zobecnenými Laguerrovými funkciami ( $M = 100; T = 2$ ) . . . . .	63
5.4	Aproximácia systému druhého rádu jednoduchými Laguerrovými funkciami ( $M = 100; T = 2$ ) . . . . .	64
5.5	Aproximácia systému štvrtého rádu zobecnenými Laguerrovými funkciami ( $M = 100; T = 2$ ) . . . . .	65
5.6	Aproximácia systému štvrtého rádu jednoduchými Laguerrovými funkciami ( $M = 100; T = 2$ ) . . . . .	65
5.7	Aproximácia systému s komplexnými pólmi pomocou zobecnených Laguerrových funkciami ( $M = 100; T = 2$ ) . . . . .	66
5.8	Aproximácia systému s komplexnými pólmi pomocou jednoduchých Laguerrových funkcií ( $M = 100; T = 2$ ) . . . . .	67
5.9	Aproximácia systému s nerealizovateľnými optimálnymi parametrami pomocou zobecnených Laguerrových funkcií ( $M = 100; T = 2$ ) . . . . .	69

# Zoznam tabuliek

1.1	Matica ortogonalita do rádu $m = n = 6$ . . . . .	16
5.1	Výsledky kvadratického kritéria pre vybrané systémy . . . . .	67
5.2	Výsledky kvadratického kritéria pre systém s nerealizovateľnými opti- málnymi parametrami . . . . .	69

# Úvod

Systémy s dopravným oneskorením sa vyskytujú v literatúre už niekoľko rokov. Dôvodom je, že táto problematika je prítomná v rôznych oblastiach výskumu. Časové oneskorenie signálu je v mnohých prípadoch nežiadúce, pretože sťažuje prácu so systémom. Z toho dôvodu môžeme dopravné oneskorenie aproximovať. Týmto spôsobom dokážeme systémy jednoduchšie namodelovať a uľahčiť ďalšiu prácu s nimi.

Cielom diplomovej práce je ukázať možnosti aproximácie LTI SISO systémov s dopravným oneskorením pomocou zobecnených Laguerrových funkcií. V rámci tejto práce sú popísané tieto funkcie matematicky a je ukázaný vplyv voľných parametrov na ich chovanie. Ďalšia kapitola obsahuje aproximáciu ideálneho systému. Sú tu odvodené potrebné vzťahy a výsledky sú prezentované graficky. Nasledujúca časť práce je venovaná nájdeniu optimálnych hodnôt voľných parametrov. K tomu sú používané dve náhrady Diracovho impulzu. V ďalšej kapitole sú vyhodnotené aproximácie ideálneho systému pomocou energie. Po odvodení potrebných vzťahov je ukázaná závislosť energie na voľných parametroch. Poslednou súčasťou práce je aproximácia vybraných systémov jednoduchými a zobecnenými Laguerrovými funkciami. Kapitola je doplnená grafickými ukážkami, výsledky sú vyhodnotené pomocou kvadratického kritéria.

# 1 Zobecnené Laguerrove Funkcie

## 1.1 Zobecnené Laguerrove polynómy

Zobecnené Laguerrove polynómy sú riešením Laguerrovej rovnice

$$xy''(x) + (\alpha + 1 - x)y'(x) + my(x) = 0 \quad (1.1)$$

Tieto polynómy patria medzi klasické ortogonálne polynómy a sú dané vzťahom [1], [2]:

$$l_m^{(\alpha)}(x) = \sum_{n=0}^m (-1)^n \binom{m+\alpha}{m-n} \frac{x^n}{n!}, \quad (1.2)$$

kde  $m = 0, 1, \dots$ ;  $\alpha > -1$ ;  $x \in \mathbb{R}^+$ , parameter  $\alpha$  je rád zobecnenia.

## 1.2 Zobecnené Laguerrove funkcie

Zobecnené Laguerrove funkcie dostaneme zo zobecnených Laguerrových polynómov tak, že ich vynásobíme odmocninou z váhovej funkcie [1], [2]:

$$w^{(\alpha)}(x) = x^\alpha e^{-x}. \quad (1.3)$$

Následne aplikujeme substitúciu  $x = \sigma t$  (kde  $\sigma$  má význam časovej mierky a platí  $\sigma > 0$ ) a výraz vynásobíme normalizačnou konštantou [1], [2]

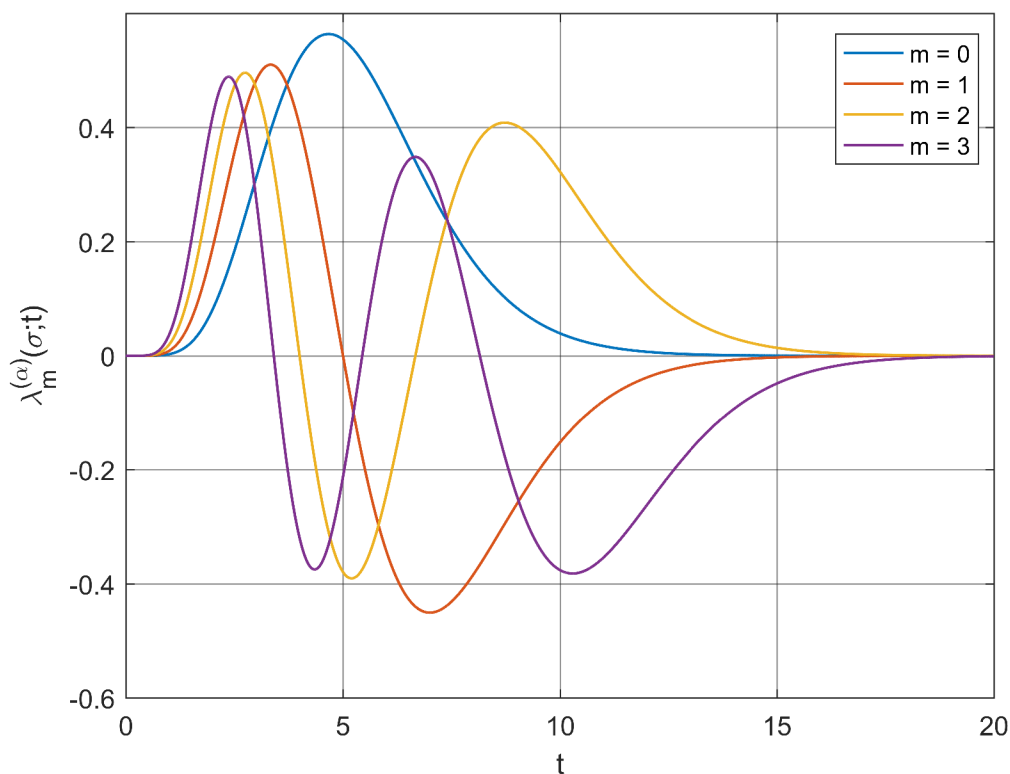
$$\sqrt{\frac{\sigma m!}{\Gamma(m + \alpha + 1)}}, \quad (1.4)$$

kde  $\Gamma(m + \alpha + 1)$  je gama funkcia. Násobenie normalizačnou konštantou znamená, že výsledné zobecnené Laguerrove funkcie sú ortonormálne (táto vlastnosť je overená v kapitole 1.3). Ako výsledok dostaneme *zobecnené Laguerrove funkcie* [1], [2]:

$$\lambda_m^{(\alpha)}(\sigma; t) = \sqrt{\frac{\sigma m!}{\Gamma(m + \alpha + 1)}} \sum_{n=0}^m (-1)^n \binom{m+\alpha}{m-n} \frac{(\sigma t)^{n+\frac{\alpha}{2}}}{n!} e^{-\sigma t}. \quad (1.5)$$

Vo výraze 1.5  $t$  značí čas, platí  $t \geq 0$ ,  $m$  je rád funkcie ( $m = 0, 1, \dots$ ). Tieto funkcie majú dva voľné parametre, ktoré sú rád zobecnenia  $\alpha$  a časová mierka  $\sigma$ . V prípade, že  $\alpha = 0$ , rovnica 1.5 sa zjednodušuje na *jednoduché Laguerrove funkcie* (značíme ich  $\lambda_m(\sigma; t)$ ).

Na nasledujúcom obrázku (čerpané z [2]) sú znázornené zobecnené Laguerrove funkcie pre nízke rády ( $m = 0, 1, 2, 3$ ).



Obr. 1.1: Zobecnené Laguerrove funkcie pre rôzne rády,  $m = 0, 1, 2, 3$ ;  $\alpha = 14$ ;  $\sigma = 3$

Pre generovanie funkcií nízkeho rádu v programovom prostredí Matlab stačí používať vzťah 1.5. Pre vysoké rády (približne pre  $m > 60$ ) tento výraz prestane fungovať. Dôvodom je, že hodnota kombinačného čísla

$$\binom{m + \alpha}{m - n} \quad (1.6)$$

je príliš veľká a Matlab toto číslo zaokrúhľuje. Riešením tohoto problému je použitie rekurzívneho vzťahu pre výpočet zobecnených Laguerrových polynómov [3], [4] :

$$l_{m+1}^{(\alpha)}(\sigma; t) = \frac{(2m + 1 + \alpha - \sigma t) l_m^{(\alpha)}(\sigma; t) - (m + \alpha) l_{m-1}^{(\alpha)}(\sigma; t)}{m + 1}. \quad (1.7)$$

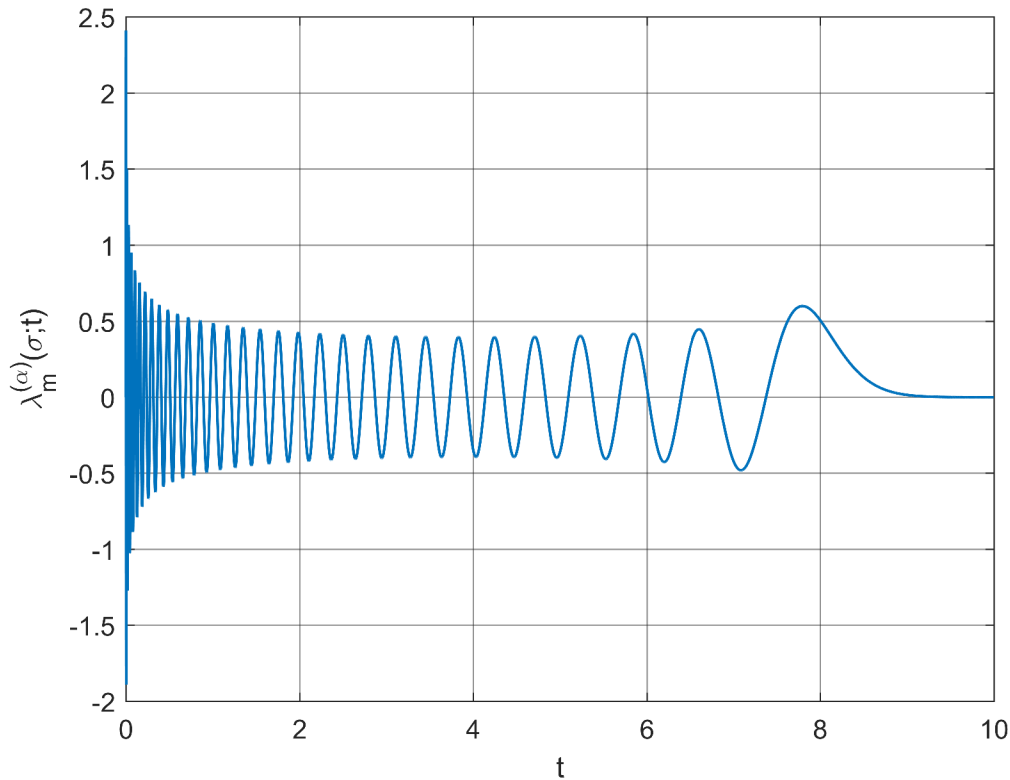
Vzťah 1.7 musíme vynásobiť odmocninou z váhovej funkcie a normalizačnou konštantou 1.4 aby sme zo zobecnených Laguerrových polynómov dostali zobecnené Laguerrove funkcie:

$$\lambda_m^{(\alpha)}(\sigma; t) = \sqrt{\frac{\sigma^{\alpha+1} m! t^\alpha e^{-\sigma t}}{\Gamma(m + \alpha + 1)}} \frac{(2m + 1 + \alpha - \sigma t) l_m^{(\alpha)}(\sigma; t) - (m + \alpha) l_{m-1}^{(\alpha)}(\sigma; t)}{m + 1}. \quad (1.8)$$

K aplikácii tejto rovnice potrebujeme poznať prvé dva zobecnené Laguerrove polynómy [3], [4]:  $l_0^{(\alpha)} = 1$ ,  $l_1^{(\alpha)} = 1 + \alpha - \sigma t$ .

Použitím výrazu 1.8 sa vyhýbame zaokrúhľovacím chybám, pretože neobsahuje vyššie spomenuté kombinačné číslo. Je ale dôležité pochopiť, že vzťahy 1.5 a 1.8 sú ekvivalentné.

Na nasledujúcom obrázku vidíme zobecnenú Laguerrovu funkciu pre vyšší rád ( $m = 60$ ).



Obr. 1.2: Zobecnená Laguerrova funkcia pre rád  $m = 60$ ;  $\alpha = 1$ ;  $\sigma = 30$

Z obrázkov 1.1 a 1.2 je zrejmé, že zobecnené Laguerrove funkcie konvergujú k nule pre  $t$  blížiac sa k nekonečnu. Ďalšou dôležitou vlastnosťou týchto funkcií je, že s rastúcim rádom rastie počet nulových bodov. To znamená, že rád  $m + 1$  pretína nulovú osu o jedenkrát viac ako rád  $m$ . V ďalšej časti práce ukážeme, že zobecnené Laguerrove funkcie generované pomocou vzťahu 1.8 sú navzájom ortonormálne.

### 1.3 Overenie ortonormálnosti generovaných zobecných Laguerrových funkcií

Dve funkcie  $f(t)$  a  $g(t)$  sú ortogonálne na intervale  $(0; \infty)$  ak ich skalárny súčin je nulový [5]:

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_0^{\infty} f(t)g(t)dt = 0. \quad (1.9)$$

V prípade, že platí aj

$$\int_0^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} |g(t)|^2 dt = 1, \quad (1.10)$$

funkcie  $f(t)$  a  $g(t)$  sú ortonormálne. Vo výraze 1.10  $|f(t)|$  značí absolútnu hodnotu funkcie  $f(t)$ . Pretože zobecnené Laguerrove funkcie majú len reálne hodnoty, výpočet absolútnej hodnoty môžeme zanedbať. Zo vzťahu 1.10 dostaneme:

$$\int_0^{\infty} f^2(t)dt = \int_0^{\infty} g^2(t)dt = 1. \quad (1.11)$$

Pre zobecnené Laguerrove funkcie môžeme rovnice 1.9 a 1.11 zhrnúť nasledujúcim spôsobom:

$$\int_0^{\infty} \lambda_m^{(\alpha)}(\sigma; t)\lambda_n^{(\alpha)}(\sigma; t)dt = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \quad (1.12)$$

Pomocou rovnice 1.12 vytvoríme v Matlabe maticu ortogonalít aby sme overili správnosť numerických výpočtov. Integrál nahradíme funkciou `trapz()`, pre hornú hranicu tohto integrálu potrebujeme zvoliť dostatočne veľké číslo. Dôvodom je, že zobecnené Laguerrove funkcie konvergujú k nule pre  $t$  blížiac sa k nekonečnu. Pre funkciu na obr. 1.2 stačia hodnoty od  $t = 10$  (väčšie hodnoty  $t$  pridávajú nároky na výpočet a na presnosť majú minimálny vplyv). Program je k dispozícii v skripte `OrthMatrix.m`, zobecnené Laguerrove funkcie sú reprezentované vektormi vypočítaných hodnôt podľa vzťahu 1.8.

Tabuľka 1.1 ukazuje maticu ortogonalít do rádu  $m = n = 6$ . Vidíme, že čísla na hlavnej diagonále ( $m = n$ ) sa blížia k jednotke a čísla mimo hlavnej diagonály ( $m \neq n$ ) sú takmer nulové. Chyby sú spôsobené konečným integračným krokom a rýchlym zvlínením zobecnených Laguerrových funkcií pre malé časové hodnoty. Presnosť výsledkov sa dá zvýšiť tým, že funkcie vypočítame s jemnejším krokom. Týmto spôsobom predĺžime vektory, ktoré reprezentujú zobecnené Laguerrove funkcie. Pre vytvorenie tabuľky 1.1 boli použité vektory s dĺžkou 10 000.

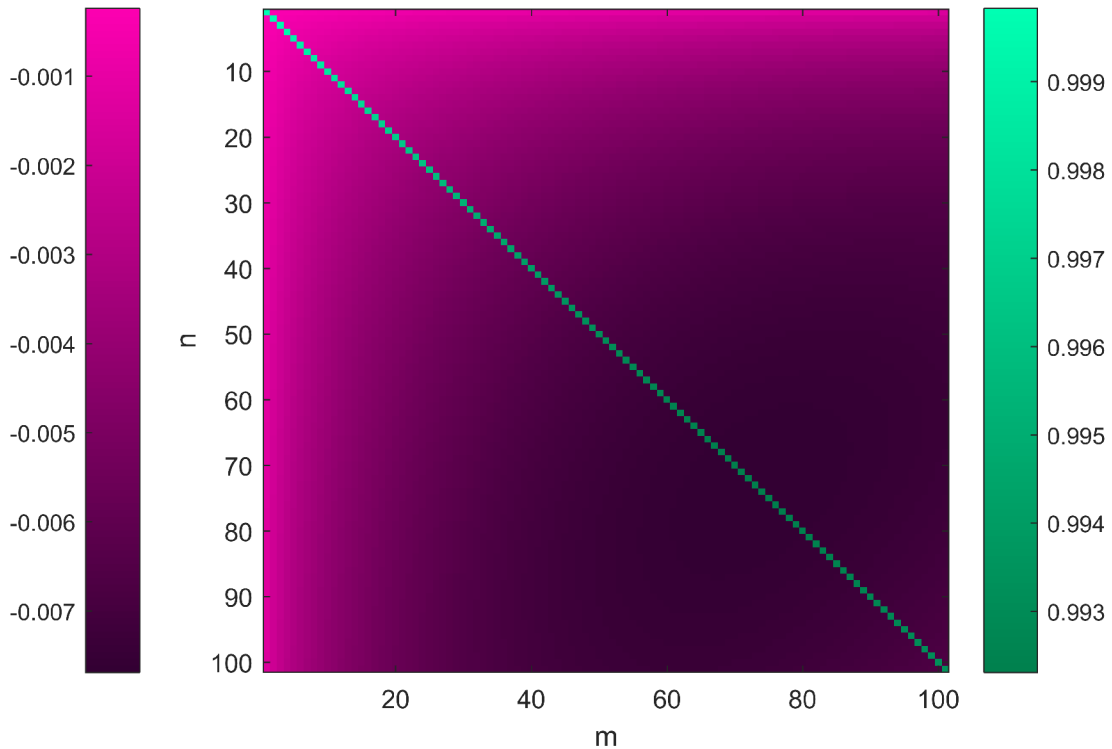


Tab. 1.1: Matica ortogonalita do rádu  $m = n = 6$ 

m \ n	0	1	2	3	4	5	6
0	0,9998	-0,0002	-0,0003	-0,0003	-0,0004	-0,0004	-0,0004
1	-0,0002	0,9997	-0,0004	-0,0005	-0,0005	0,0006	0,0006
2	-0,0003	-0,0004	0,9995	-0,0006	-0,0007	-0,0007	-0,0008
3	-0,0003	-0,0005	-0,0006	0,9993	-0,0008	-0,0008	-0,0009
4	-0,0004	-0,0005	-0,0007	-0,0008	0,9992	-0,0009	-0,0010
5	-0,0004	-0,0006	-0,0007	-0,0008	-0,0009	0,9990	-0,0011
6	-0,0004	-0,0006	-0,0008	-0,0009	-0,0010	-0,0011	0,9988

Odchýlku matice ortogonalita od jednotkovej matice môžeme charakterizovať dvomi číslami: maximálnou odchýlkou od jednotky na hlavnej diagonále a maximálnou odchýlkou od nuly mimo hlavnej diagonály. V Matlabe tieto premenné sú označené *error1* a *error0*. Pre maticu ortogonalita do rádu  $m = n = 6$  majú hodnoty *error1* = 0,0012 a *error0* = 0,0011.

Aby sme dosiahli vyššiu prehľadnosť, maticu ortogonalita môžeme zobrazovať ako obrázok. Týmto spôsobom môžeme vykresliť maticu pre vyššie rády. To vidíme na obrázku 1.3, kde fialovou farbou sú zobrazené hodnoty mimo hlavnej diagonály. Pre rád  $m = n = 100$  tieto čísla sú v intervale  $[-0,0077; -0,0002]$ . Pretože na obrázku tmavšou farbou sú zobrazené menšie čísla, platí, že čím tmavšia je farba, tým väčšia je odchýlka od nuly. Hodnoty na hlavnej diagonále sú zobrazené zelenou farbou a pohybujú sa v intervale  $[0,9923; 0,9998]$ . Pre tieto čísla tak isto platí, že čím tmavšou farbou sú zobrazené, tým väčšia je ich odchýlka od jednotky (odchýlky sú v intervale  $[0,0002; 0,0077]$ ).



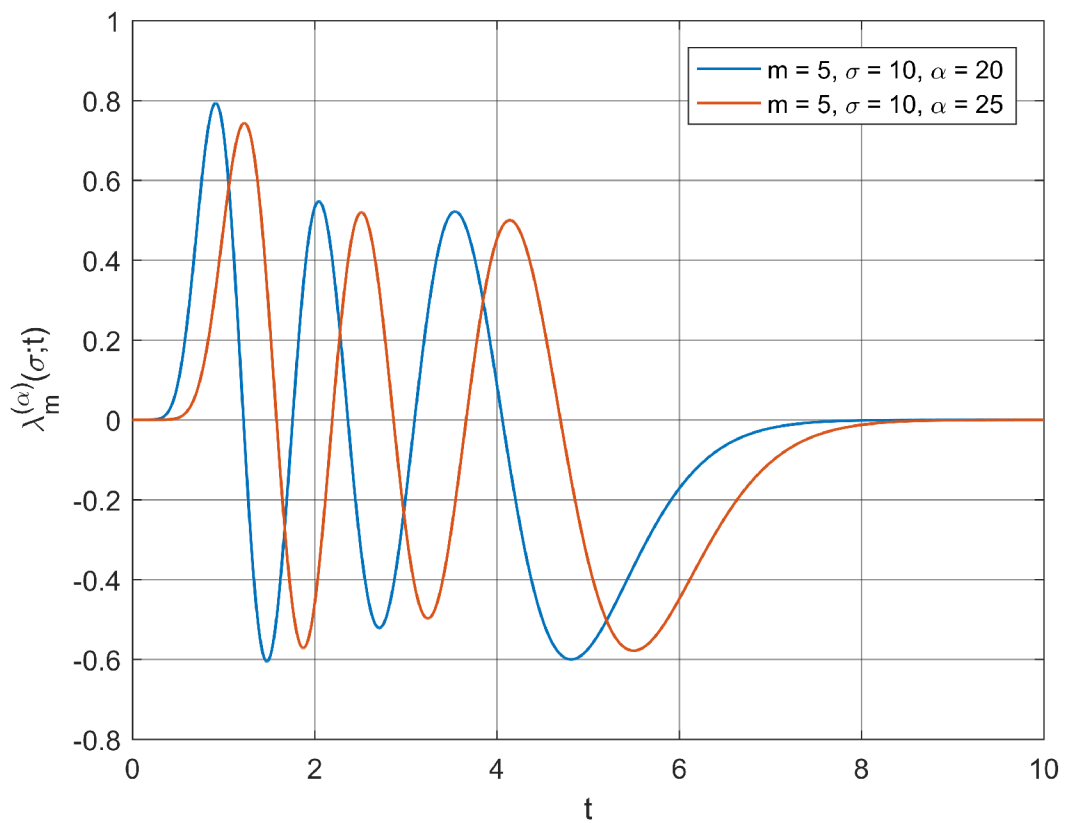
Obr. 1.3: Matica ortogonalita do rádu  $m = n = 100$

## 1.4 Vplyv voľných parametrov na zobecnené a jednoduché Laguerrove funkcie

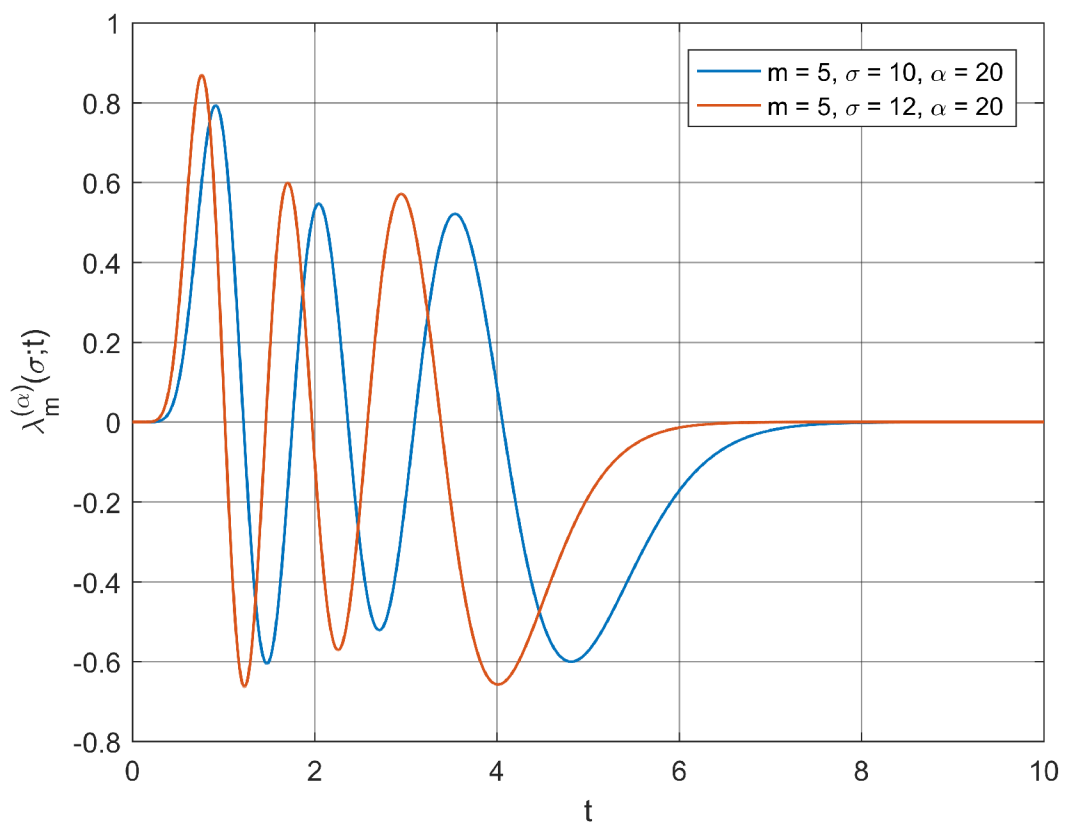
Voľné parametre zobecnených Laguerrových funkcií sú rád zobecnenia  $\alpha$  a časová mierka  $\sigma$ . Na obrázku 1.4 vidíme vplyv  $\alpha$  pre rád  $m = 5$ . Je zrejmé, že rastúca  $\alpha$  posunie funkciu doprava na časovej osi. Ďalšie vplyvy zvýšenia tohto parametru sú pokles amplitúdy a rozširovanie jednotlivých vln. Obrázok 1.5 znázorňuje vplyv parametru  $\sigma$ . Všimneme si, že modrý priebeh je totožný s modrým priebehom z obr. 1.4 z dôvodu ľahšieho porovnania. Vidíme, že s rastúcou  $\sigma$  má funkcia užšie vlny a vyššiu amplitúdu. Tieto zmeny sú v súlade s tým, že znázornené zobecnené Laguerrove funkcie sú normalizované.

Pretože v ďalších častiach práce budeme používať aj jednoduché Laguerrove funkcie, ukážeme na nich vplyv parametru  $\sigma$ . Pripomenieme, že pre tieto funkcie  $\alpha = 0$ , takže majú len jeden voľný parameter. Z obrázku 1.6 vidíme, že situácia je podobná ako v prípade zobecnených Laguerrových funkcií. Rastúci voľný parameter  $\sigma$  „stlačí“ tieto funkcie (majú užšie vlny a vyššiu amplitúdu).

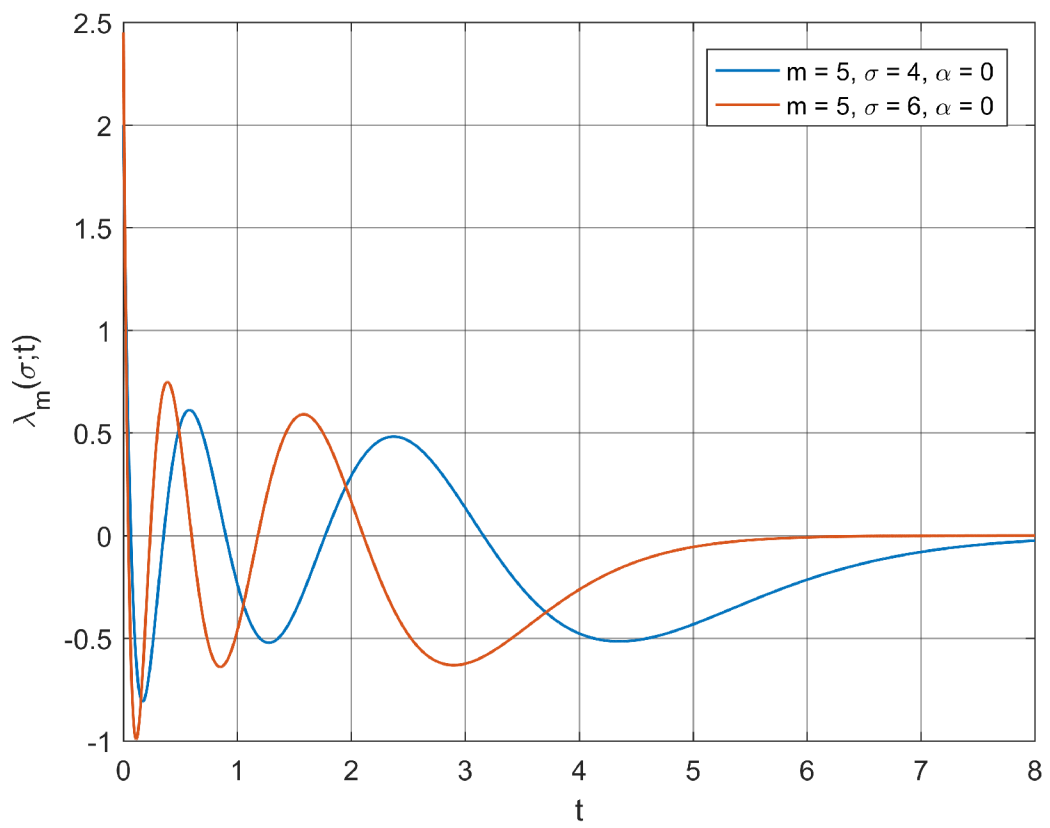
Z obrázku 1.6 je ďalej zrejmé, že jednoduché Laguerrove funkcie nezačínajú od nuly, to je najväčší rozdiel oproti zobecneným funkciám.



Obr. 1.4: Zmena parametru  $\alpha$  - zobecnené Laguerrove funkcie



Obr. 1.5: Zmena parametru  $\sigma$  - zobecnené Laguerrove funkcie



Obr. 1.6: Zmena parametru  $\sigma$  - jednoduché Laguerrove funkcie

## 2 Aproximácia Diracovho impulzu pomocou zobecnených Laguerrových funkcií

V predchádzajúcej časti práce sme sa zoznámili so zobecnenými Laguerrovými funkciami. Táto kapitola sa zaoberá aproximáciou impulzovej charakteristiky ideálneho systému, čomu odpovedá Diracov impulz.

### 2.1 Základné vzťahy k aproximácii pomocou zobecnených Laguerrových funkcií

Laguerrove funkcie v časovej doméne tvoria ortonormálnu bázu v priestore  $L^2$  [6]. Z toho vyplýva, že každú funkciu  $f(t) \in L^2$  dokážeme vyjadriť s ich Laguerrovou radou pomocou nasledujúcej rovnice [6]:

$$f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \langle f(t), \lambda_m^{(\alpha)}(\sigma; t) \rangle \lambda_m^{(\alpha)}(\sigma; t). \quad (2.1)$$

Vo výraze 2.1  $\langle f(t), \lambda_m^{(\alpha)}(\sigma; t) \rangle$  značí skalárny súčin funkcie  $f(t)$  a zobecnenej Laguerrovej funkcie  $\lambda_m^{(\alpha)}(\sigma; t)$  [6]:

$$\langle f(t), \lambda_m^{(\alpha)}(\sigma; t) \rangle = \int_0^{\infty} f(t) \lambda_m^{(\alpha)}(\sigma; t) dt. \quad (2.2)$$

Skalárny súčin  $\langle f(t), \lambda_m^{(\alpha)}(\sigma; t) \rangle$  v rovniciach 2.1 a 2.2 nie je nič iné ako Laguerrovo spektrum signálu  $f(t)$ . Pre jednoduchosť spektrum označíme ako  $C_m$ . Rovnicu 2.1 môžeme písať vo tvare

$$f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \lambda_m^{(\alpha)}(\sigma; t). \quad (2.3)$$

### 2.2 Aproximácia ideálneho systému s dopravným oneskorením

Impulzová charakteristika ideálneho systému je reprezentovaná Diracovým impulzom  $\delta(t)$ . Spolu s dopravným oneskorením dostaneme  $\delta(t - T)$ , kde  $T$  je dopravné oneskorenie. Pre aproximáciu využijeme vzťah 2.3 a dostaneme nasledujúcu rovnicu:

$$\delta(t - T) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \lambda_m^{(\alpha)}(\sigma; t). \quad (2.4)$$

Následne pre  $C_m$  dosadíme skalárny súčin podľa rovnice 2.2. Z výrazu 2.4 dostaneme

$$\delta(t - T) = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \int_0^{\infty} \delta(t - T) \lambda_m^{(\alpha)}(\sigma; t) dt \right) \lambda_m^{(\alpha)}(\sigma; t). \quad (2.5)$$

Všimneme si, že v integrále násobíme zobecnenú Laguerrovu funkciu s posunutým Diracovom impulzom. K zjednodušeniu tohto súčinu využijeme filtračnú vlastnosť Diracovho impulzu [7]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - T) f(t) dt = f(T). \quad (2.6)$$

Pomocou vzťahu 2.6 pre zobecnené Laguerrove funkcie získame:

$$\int_0^{\infty} \delta(t - T) \lambda_m^{(\alpha)}(\sigma; t) dt = \lambda_m^{(\alpha)}(\sigma; T), \quad (2.7)$$

kde  $\lambda_m^{(\alpha)}(\sigma; T)$  je hodnota zobecnenej Laguerrovej funkcie v bode  $T$  ( $T$  je dopravné oneskorenie). Pomocou tohto vzťahu upravíme výraz 2.5 a dostaneme

$$\delta(t - T) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m^{(\alpha)}(\sigma; T) \lambda_m^{(\alpha)}(\sigma; t). \quad (2.8)$$

Z rovnice 2.8 vyplýva, že Laguerrovo spektrum Diracovho impulzu je

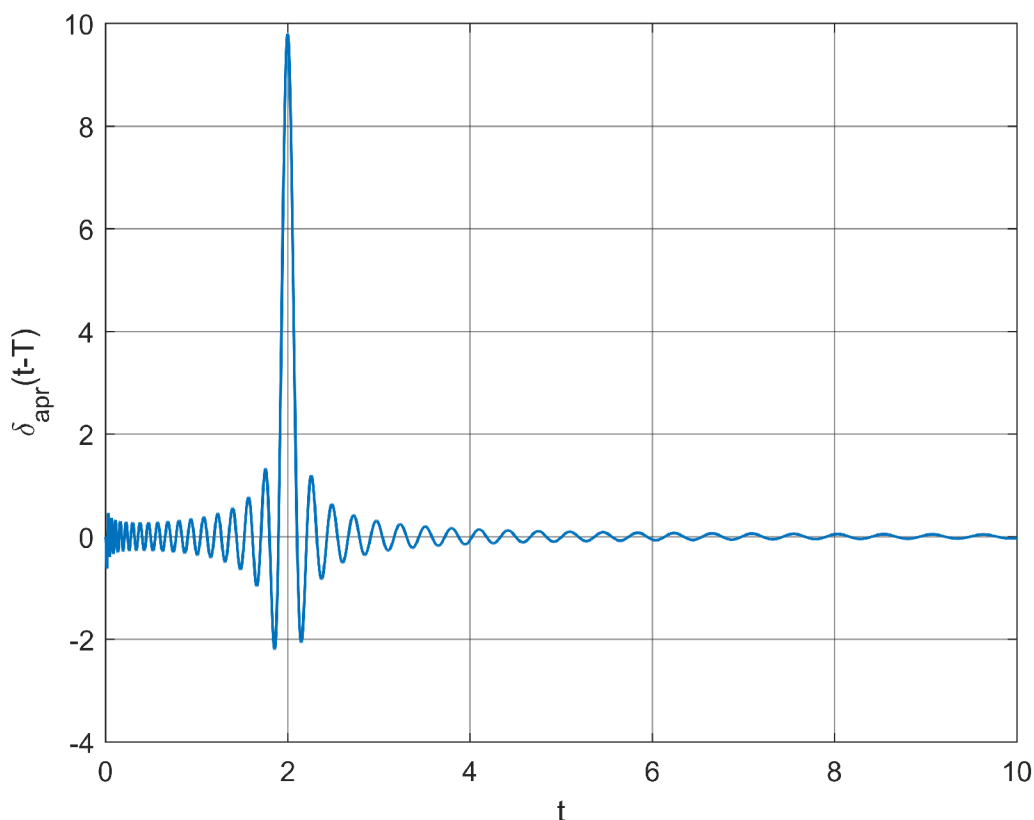
$$C_m = \lambda_m^{(\alpha)}(\sigma; T). \quad (2.9)$$

Pre numerický výpočet v Matlabe rovnicu 2.8 používame vo tvare

$$\delta(t - T) \approx \sum_{m=0}^M \lambda_m^{(\alpha)}(\sigma; T) \lambda_m^{(\alpha)}(\sigma; t). \quad (2.10)$$

Rozdiel medzi rovnicami 2.8 a 2.10 je to, že nekonečno sme nahradili premennou  $M$ , ktorá určuje rád aproximácie. Na nasledujúcom obrázku je ukážka aproximovaného Diracovho impulzu získaného pomocou vzťahu 2.10.

Hodnota dopravného oneskorenia na obrázku 2.1 je  $T = 2$ . Vidíme, že v tomto bode má aproximovaná funkcia maximum, jej tvar sa blíži k tvaru Diracovho impulzu. Výsledná funkcia na obrázku 2.1 nie je nič iné, ako súčet zobecných Laguerrových funkcií, ktoré sú vynásobené vhodnou váhou (rovnica 2.10). Aproximácia závisí na troch parametroch, ktoré sú  $M$ ,  $\alpha$  a  $\sigma$ . Pri zobecných Laguerrových funkcií  $m$  značí rád funkcie, v tomto prípade  $M$  je rád aproximácie. Toto môžeme chápať aj tak, že sčítame  $M + 1$  (od 0 do  $M$ ) funkcií k tomu, aby sme získali hľadanú aproximáciu. Význam ďalších dvoch parametrov je nezmenený:  $\alpha$  je rád zobecnenia a  $\sigma$  je časová mierka pre zobecné Laguerrove funkcie, ktoré boli použité k aproximácii. V ďalšej kapitole bude podrobnejšie popísaný vplyv týchto parametrov na aproximáciu.



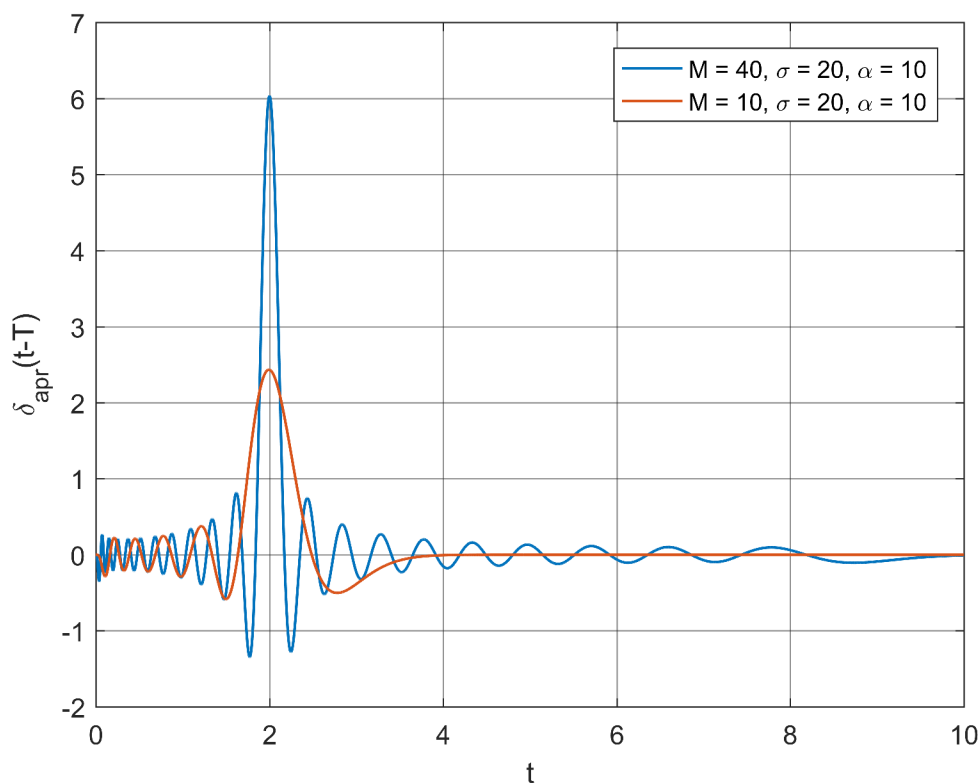
Obr. 2.1: Aproximácia Diracovho impulzu ( $M = 100, \alpha = 10, \sigma = 20$ )

## 2.3 Vplyv parametrov zobecnených Laguerrových funkcií na aproximáciu

Ako to už bolo spomínané v predchádzajúcej kapitole, aproximácia pomocou zobecnených Laguerrových funkcií závisí na parametroch  $M$ ,  $\alpha$  a  $\sigma$ . Najprv ukážeme vplyv zmeny rádu  $M$ . To je znázornené na obrázku 2.2. Je zrejmé, že tvar aproximovanej funkcie pre vyšší rád je bližšie k tvaru Diracovho impulzu. Tento priebeh má ale väčšie kmity a konverguje k nule pomalšie ako aproximácia nižšieho rádu. Zvolené rády pre vykreslenie obrázku 2.2 sú pomerne nízke, aby výsledné funkcie boli dostatočne rozlíšiteľné.

Vplyv volných parametrov  $\alpha$  a  $\sigma$  na aproximáciu už nedokážeme jednoznačne predpovedať. Dôvodom je, že k aproximácii sčítame zobecnené Laguerrove funkcie a nevieme presne určiť, že po zmene časovej mierky alebo rádu zobecnenia výsledok bude lepší alebo práve naopak. Na nasledujúcich obrázkoch ukážeme, že vplyv parametrov  $\alpha$  a  $\sigma$  je aj navzájom závislý.

Na obr. 2.3 vidíme zmenu parametru  $\alpha$  pre  $\sigma = 6$ , veľkosť dopravného oneskorenia je  $T = 2$ . Dôležitým rozdielom medzi dvoma priebehmi je, že červený ( $\alpha = 30$ )

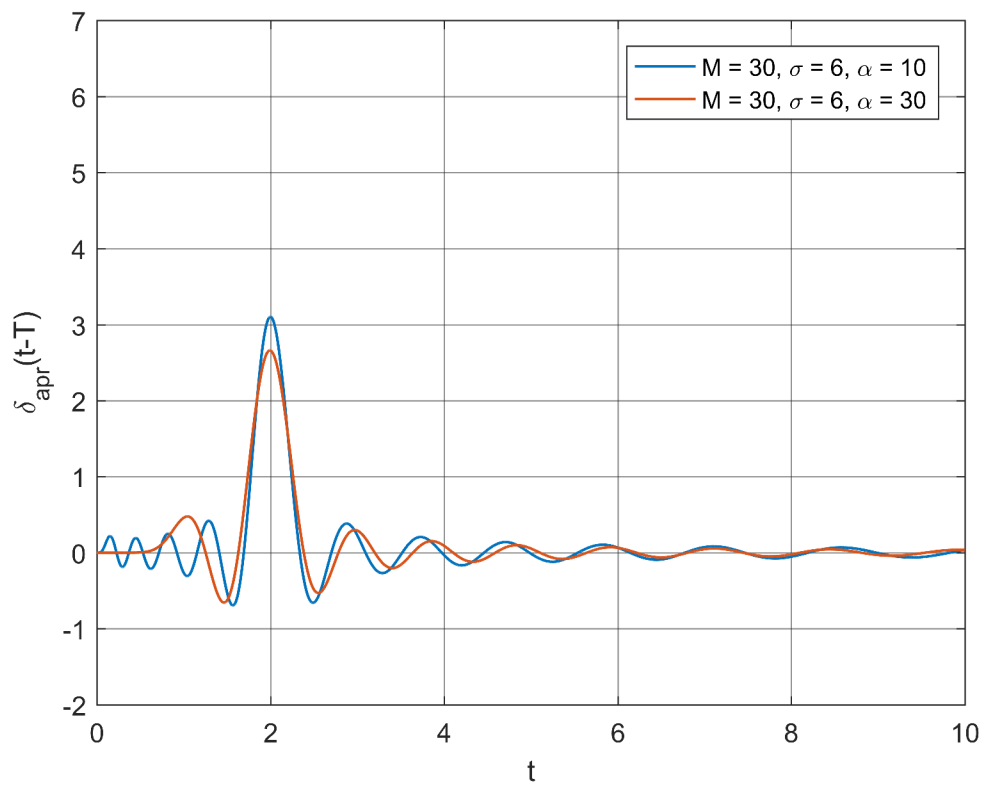


Obr. 2.2: Porovnanie aproximácie pre rôzne rády,  $T = 2$

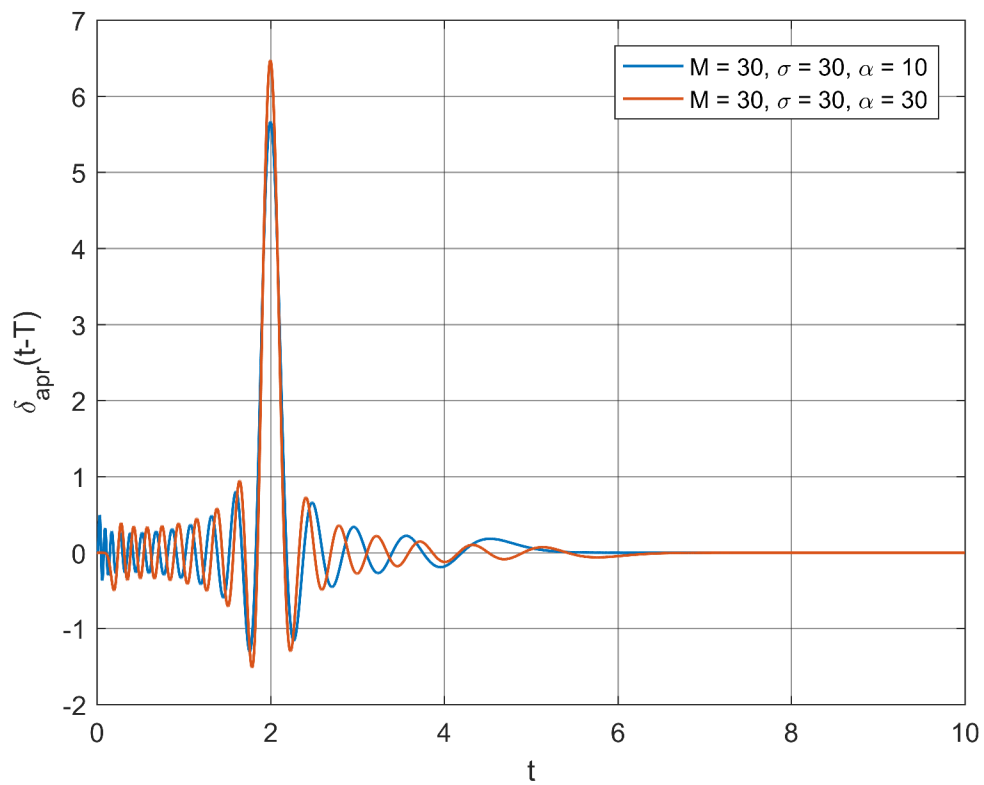
má nižšiu hodnotu v bode  $T$ . Ďalej platí, že tento priebeh konverguje k nule pomalšie, než priebeh s menšou  $\alpha$ . To je spôsobené tým, že parameter  $\alpha$  posúva zobecnené Laguerrove funkcie doprava na časovej osi a tým je posunutá aj výsledná aproximácia s väčšou hodnotou  $\alpha$ .

Ak si pozrieme na obr. 2.4 vidíme, že červený priebeh má vyššiu hodnotu v bode  $T$  ako modrý. Všimneme si, že hodnoty  $\alpha$  sú nezmenené oproti predchádzajúcemu obrázku (2.3). Jediný parameter, ktorý sa zmenil je  $\sigma$ . To znamená, že zvýšenie hodnoty  $\sigma$  zmenil vplyv  $\alpha$ . To je spôsobené vplyvom parametru  $\sigma$  na zobecnené Laguerrove funkcie, čo sa vo výsledných aproximáciách prejavuje podobne, „stlačí“ ich.





Obr. 2.3: Vplyv parametru  $\alpha$  pre  $\sigma = 6$

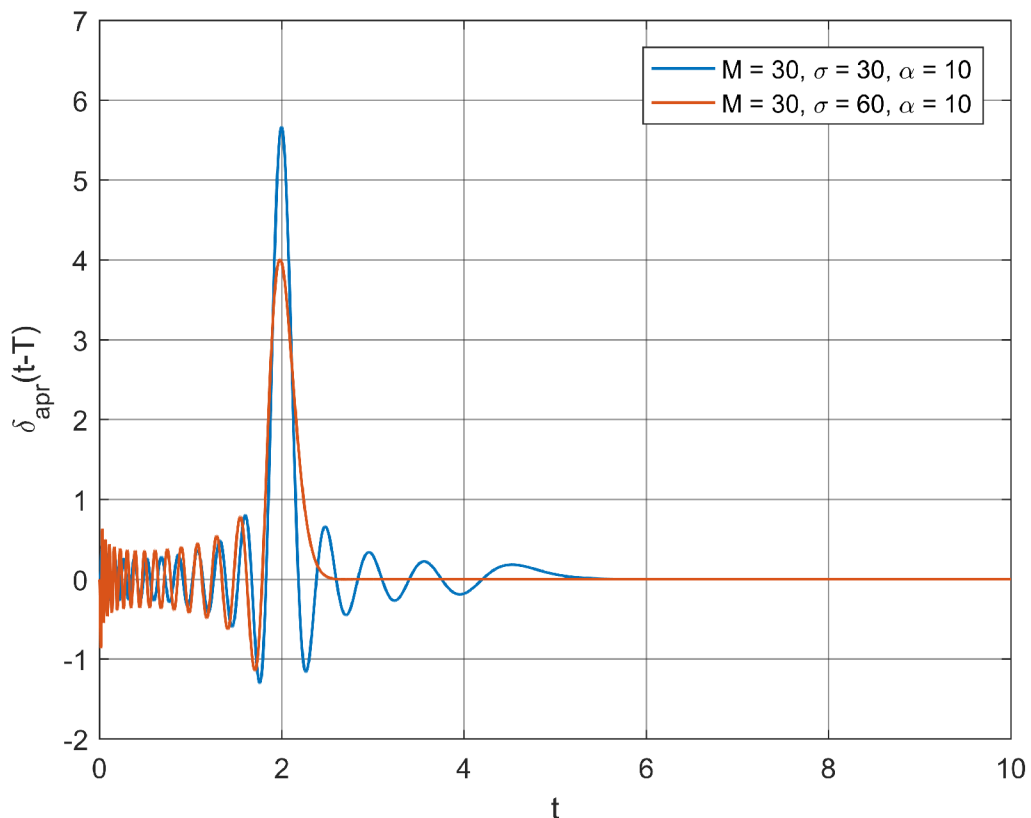


Obr. 2.4: Vplyv parametru  $\alpha$  pre  $\sigma = 30$

## 2.4 Dopravné oneskorenie a časová mierka

Ak ešte raz porovnáme obrázky 2.3 a 2.4 vidíme, že priebehy na druhom obrázku sú bližšie k tvaru Diracovho impulzu. To je spôsobené zvýšením parametru  $\sigma$ . To ale neznamená, že väčšia  $\sigma$  vždy zlepšuje aproximáciu. Na obrázku 2.5 vidíme príklad, ktorý demonštruje toto tvrdenie.

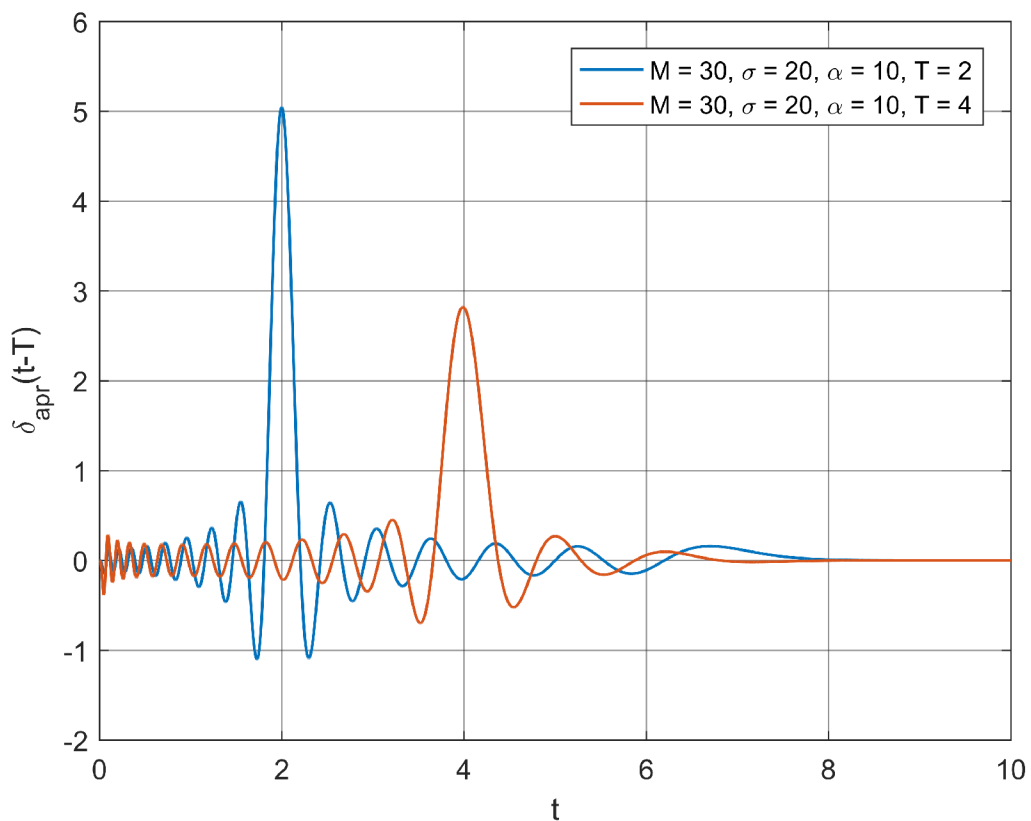
To, že prečo zhoršuje aproximáciu príliš veľká hodnota parametru  $\sigma$  dokážeme odôvodniť ak sa vrátíme ku kapitole 1.4. V tejto časti práce je popísaný vplyv voľných parametrov na zobecnené Laguerrove funkcie. Z obrázku 1.4 je zrejmé, že vyššia hodnota  $\sigma$  „stlačí“ tieto funkcie (konvergujú k nule rýchlejšie). Ďalej vieme, že aproximácia Diracovho impulzu je súčet zobecnených Laguerrových funkcií. Z toho vyplýva, že ak postupne zvyšujeme hodnotu parametru  $\sigma$ , dokážeme dosiahnuť, že funkcie budú mať nulovú hodnotu v bode  $T$ . Takéto zobecnené Laguerrove funkcie ale zhoršujú aproximáciu. Dôvodom toho je, že hodnota oneskoreného Diracovho impulzu je všade nulová okrem bodu dopravného oneskorenia. Takže Laguerrova funkcia, ktorá má nulovú hodnotu v bode  $T$  nepridá nič užitočného do aproximácie.



Obr. 2.5: Rôzne hodnoty časovej mierky  $\sigma$

Z predchádzajúcej úvahy ďalej vyplýva, že pre väčšie hodnoty dopravného one-

skorenia bude vhodnejšia menšia  $\sigma$ . Platí ale to, že čím väčšie je dopravné oneskorenie, tým horšia je výsledná aproximácia (pre tie isté parametre). Toto ukážeme na obrázku 2.6. Vidíme, že červený priebeh s dopravným oneskorením  $T = 4$  je výrazne horší ako modrý pre  $T = 2$ . Túto vlastnosť dokážeme vysvetliť tým, že dĺžka zobecnených Laguerrových funkcií rastie s rastúcim rádom (obsahujú viac vln a konvergujú pomalšie k nule). To znamená, že pre väčšie hodnoty dopravného oneskorenia funkcie nižšieho rádu sú príliš krátke, majú nulovú hodnotu v bode  $T$ . Pre také zobecnené Laguerrove funkcie opäť platí, že nepridávajú nič užitočného do výslednej aproximácie. Situácia je podobná, ako pre príliš veľké hodnoty parametru  $\sigma$ .



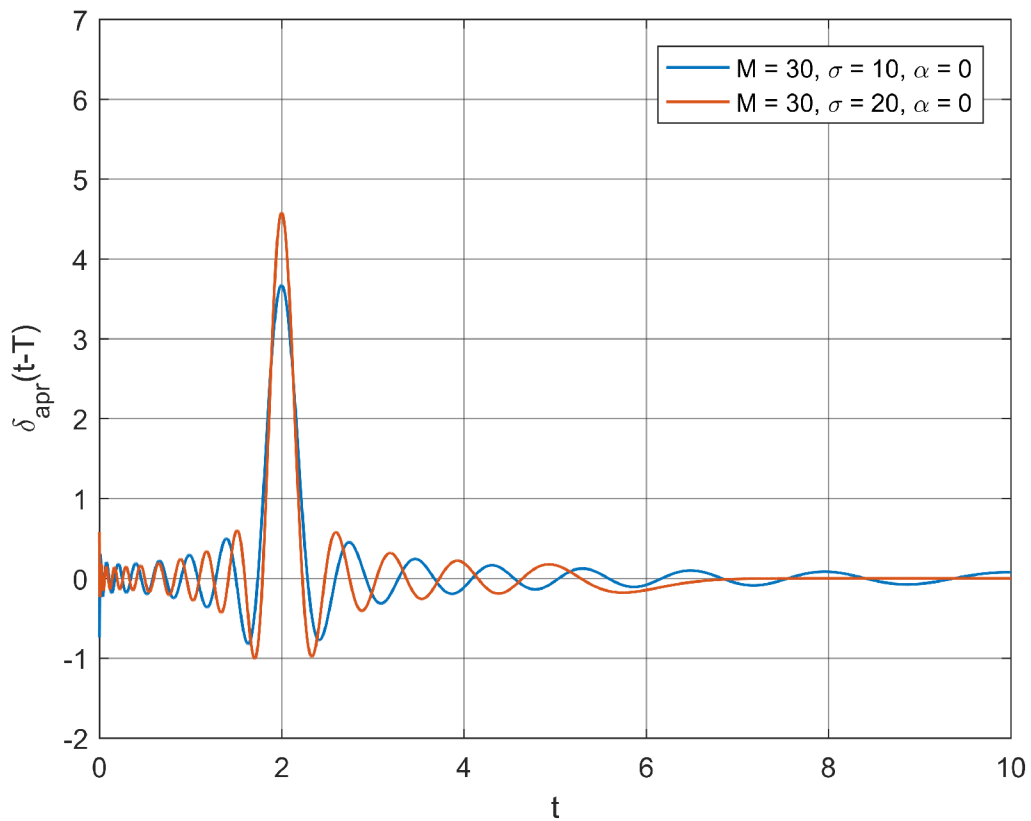
Obr. 2.6: Porovnanie aproximácií pre rôzne hodnoty dopravného oneskorenia

## 2.5 Aproximácia Diracovho impulzu jednoduchými Laguerrovými funkciami

Doteraz k aproximácii Diracovho impulzu sme používali zobecnené Laguerrove funkcie. Pre úplnosť ukážeme aproximáciu aj jednoduchými Laguerrovými funkciami,

pre ktoré  $\alpha = 0$ . To vidíme na obrázku 2.7 pre rôzne hodnoty parametru  $\sigma$ . Je zrejmé, že zmena časovej mierky má podobný vplyv na výsledné aproximácie ako v prípade zobecnených funkcií. To vyplýva aj z kapitoly 1.4, kde sme popísali vplyv voľných parametrov na Laguerrove funkcie.

Ak si porovnáme obrázok 2.7 s predchádzajúcimi, na prvý pohľad nevidíme žiadny podstatný rozdiel. V ďalšej kapitole práce ukážeme, ako zvoliť voľné parametre vhodne pre aproximáciu ideálneho systému. Pomocou takto zvolených parametrov budú podrobnejšie porovnané aproximácie zobecnenými a jednoduchými Laguerrovými funkciami.



Obr. 2.7: Aproximácia Diracovho impulzu jednoduchými Laguerrovými funkciami pre rôzne hodnoty parametru  $\sigma$

### 3 Určenie optimálnych hodnôt voľných parametrov

V predchádzajúcich častiach práce sme videli, ako sa zmenia zobecnené a jednoduché Laguerrove funkcie a aproximácie vytvorené pomocou týchto funkcií so zmenami voľných parametrov  $\alpha$  a  $\sigma$ . Táto kapitola sa zaoberá určením optimálnych hodnôt týchto parametrov.

#### 3.1 Potrebné vzťahy k určeniu optimálnych parametrov zobecnených Laguerrových funkcií

Vzťahy pre získanie optimálnych hodnôt voľných parametrov zobecnených Laguerrových funkcií sú odvodené v článku [8]:

$$\hat{\alpha} = \frac{2m_0}{m_{-1}} \sqrt{\frac{m_{-1}\mu_1}{m_{-1}m_1 - m_0^2}}, \quad (3.1)$$

$$\hat{\sigma} = 2\sqrt{\frac{m_{-1}\mu_1}{m_{-1}m_1 - m_0^2}}. \quad (3.2)$$

V rovniciach 3.1 a 3.2  $\hat{\alpha}$  a  $\hat{\sigma}$  sú optimálne hodnoty parametrov  $\alpha$  a  $\sigma$ . Premenné  $m_i$  a  $\mu_i$  sú tzv. momenty. Platia pre nich nasledujúce vzťahy [8]:

$$m_i = \langle f(t), g_i(t) \rangle, \quad g_i(t) = t^i f(t) \quad (3.3)$$

$$\mu_i = \langle f'(t), \tilde{g}_i(t) \rangle, \quad \tilde{g}_i(t) = t^i f'(t) \quad (3.4)$$

Vo výrazoch 3.3 a 3.4  $f(t)$  značí funkciu, ktorú aproximujeme. V prípade premennej  $m_i$  index  $i$  môže mať hodnoty  $i = -1, 0, 1$  a pre  $\mu_i$  index  $i$  môže mať hodnotu  $i = 1$ . Momenty  $m_i$  a  $\mu_i$  sú kladné čísla pre  $t \in (0, \infty)$  [8]. To platí pre náš prípad, pretože zobecnené Laguerrove funkcie sú definované pre  $t \geq 0$ . Vzťahy 3.3 a 3.4 môžeme písať v nasledujúcom tvare:

$$m_i = \int_0^{\infty} t^i f^2(t) dt, \quad (3.5)$$

$$\mu_i = \int_0^{\infty} t^i (f'(t))^2 dt. \quad (3.6)$$

Tento zápis bude mať význam v ďalších častiach práce, kde odvodíme optimálne parametre pre ideálny systém.

## 3.2 Optimálne parametre pre aproximáciu Diracovho impulzu zobecnenými Laguerrovými funkciami

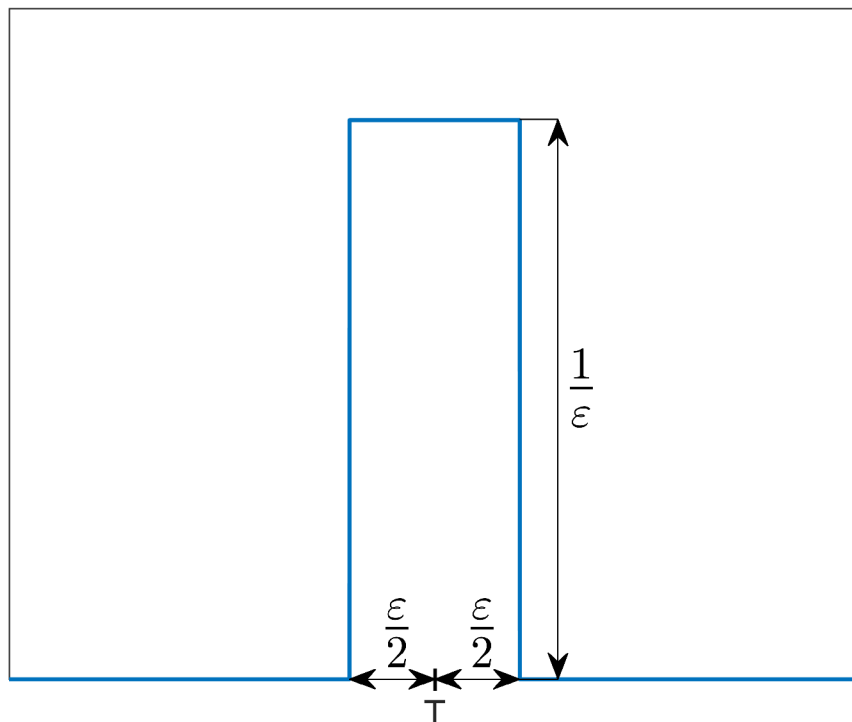
Určenie hodnôt optimálnych parametrov pre Diracov impulz vychádza z aplikovania rovníc z predchádzajúcej kapitoly. Vidíme, že v rovnici 3.5 sa vyskytuje integrál z druhej mocniny funkcie  $f(t)$ . Pre Diracov impulz tento výraz sa rovná nekonečnu:

$$\int_0^{\infty} \delta^2(t) dt = \infty. \quad (3.7)$$

Z toho dôvodu nedokážeme analyticky určiť optimálne parametre pre Diracov impulz. Ďalší spôsob na výpočet je použitie Matlabu. V tomto prípade ale narazíme na problém, že Diracov impulz má nekonečnú hodnotu v bode dopravného oneskorenia. To znamená, že nedokážeme túto funkciu používať ani pre numerický výpočet. Z týchto dôvodov Diracov impulz nahradíme inými funkciami, ktorých tvar sa blíži k tvaru Diracovho impulzu: obdĺžnikovým a trojuholníkovým pulzom.

### 3.2.1 Náhrada Diracovho impulzu obdĺžnikovým pulzom

Obdĺžnikový pulz je jeden z najčastejšie zvolených funkcií pre náhradu Diracovho impulzu (obrázok 3.1).

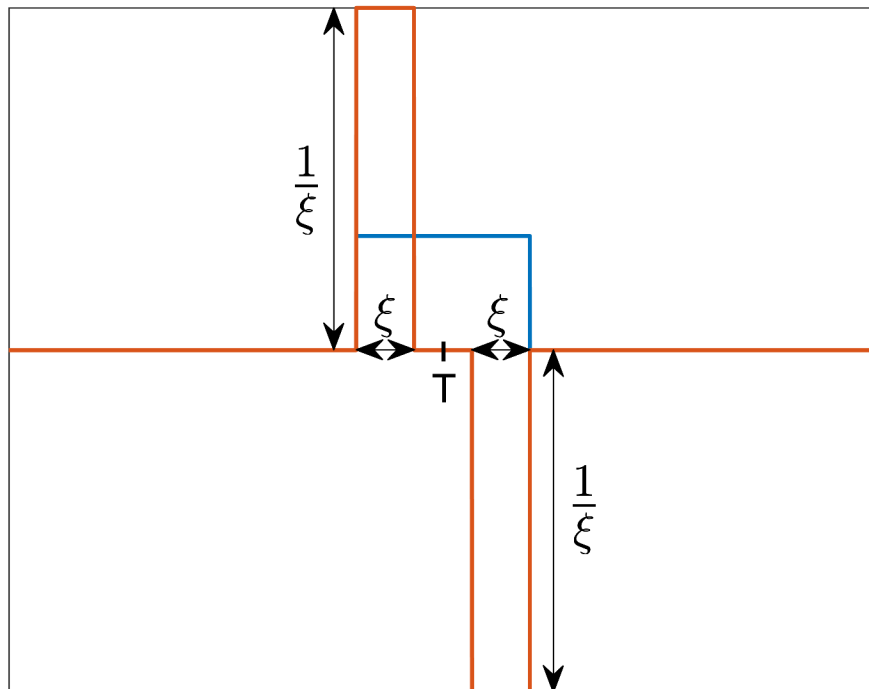


Obr. 3.1: Náhrada Diracovho impulzu obdĺžnikovým pulzom

Obdĺžnikový pulz sme zvolili tak, aby bol symetrický okolo bodu  $T$  (hodnota dopravného oneskorenia). Ďalšou dôležitou vlastnosťou je, aby mal jednotkovú plochu, podobne ako Diracov impulz. Z toho dôvodu šírka obdĺžnikového pulzu je  $\varepsilon$  a jeho výška  $\frac{1}{\varepsilon}$ . Ďalšou vlastnosťou Diracovho impulzu je, že všade má nulovú hodnotu okrem bodu dopravného oneskorenia (kde jeho hodnota sa blíži k nekonečnu). To platí aj pre zvolený obdĺžnikový signál, pretože pre  $\varepsilon \rightarrow 0$  jeho výška sa blíži k nekonečnu a jeho šírka k nule. To znamená, že čím menšiu hodnotu má  $\varepsilon$ , tým bližšie je obdĺžnikový pulz k Diracovho impulzu. Posledná dôležitá vlastnosť je voľba šírky pulzu  $\varepsilon$  vzhľadom na veľkosť dopravného oneskorenia  $T$ , musí platiť

$$\frac{\varepsilon}{2} \leq T.$$

Ako to vyplýva z rovníc 3.5 a 3.6, k určení hodnôt optimálnych parametrov potrebujeme funkciu  $f(t)$  a jeho deriváciu  $f'(t)$ . Obdĺžnikový pulz, ktorý používame namiesto Diracovho impulzu je aproximovaná funkcia  $f(t)$ . Jeho deriváciu vidíme na obrázku 3.2.



Obr. 3.2: Derivácia obdĺžnikového pulzu

Derivácia obdĺžnikového pulzu by sa teoreticky skladala z Diracovho impulzu v bode  $T - \frac{\varepsilon}{2}$  a z otočeného Diracovho impulzu v bode  $T + \frac{\varepsilon}{2}$ . Tu ale opäť využijeme

obdĺžnikovú náhradu. S tým dostaneme ďalší parameter  $\xi$ , ktorým značíme šírku pulzov. Hodnotu tejto premennej môžeme zvolit tak, aby platila nerovnosť:

$$\xi \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.8)$$

Volba ďalšieho parametru ale pridáva ešte väčšiu voľnosť do určenia hodnôt optimálnych parametrov, čo je nevýhoda využitia obdĺžnikového pulzu pre náhradu Diracovho impulzu.

V tejto chvíli už poznáme funkcie  $f(t)$  (obdĺžnikový pulz podľa obrázku 3.1) a  $f'(t)$  (derivácia obdĺžnikového pulzu podľa obrázku 3.2). K určeniu optimálnych parametrov potrebujeme vypočítať potrebné momenty podľa rovníc 3.5 a 3.6, ktoré pre obdĺžnikový pulz a jeho deriváciu majú tvar:

$$\begin{aligned} m_0 &= \int_0^{\infty} f^2(t) dt = \int_{T-\frac{\varepsilon}{2}}^{T+\frac{\varepsilon}{2}} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 dt, \\ m_1 &= \int_0^{\infty} t f^2(t) dt = \int_{T-\frac{\varepsilon}{2}}^{T+\frac{\varepsilon}{2}} t \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 dt, \\ m_{-1} &= \int_0^{\infty} \frac{1}{t} f^2(t) dt = \int_{T-\frac{\varepsilon}{2}}^{T+\frac{\varepsilon}{2}} \frac{1}{t} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 dt, \\ \mu_1 &= \int_0^{\infty} t (f'(t))^2 dt = \int_{T-\frac{\varepsilon}{2}}^{T-\frac{\varepsilon}{2}+\xi} t \left(\frac{1}{\xi}\right)^2 dt + \int_{T+\frac{\varepsilon}{2}-\xi}^{T+\frac{\varepsilon}{2}} t \left(-\frac{1}{\xi}\right)^2 dt. \end{aligned}$$

Pre výpočet momentov  $m_0$ ,  $m_1$  a  $m_{-1}$  sme dosadili za funkciu  $f(t)$  hodnotu  $\frac{1}{\varepsilon}$ , čo je výška obdĺžnikového pulzu medzi bodmi  $T - \frac{\varepsilon}{2}$  a  $T + \frac{\varepsilon}{2}$ . Tieto body určia hranice pre integrovanie. Pre výpočet  $\mu_1$  sme rozdelili integrál na dve časti od  $T - \frac{\varepsilon}{2}$  do  $T - \frac{\varepsilon}{2} + \xi$ , kde derivácia obdĺžnikového pulzu má hodnotu  $\frac{1}{\xi}$ , a od  $T + \frac{\varepsilon}{2} - \xi$  do  $T + \frac{\varepsilon}{2}$ , kde derivácia obdĺžnikového pulzu je  $-\frac{1}{\xi}$ .

Po výpočte momentov dostaneme nasledujúce hodnoty:

$$\begin{aligned} m_0 &= \frac{1}{\varepsilon}, \\ m_1 &= \frac{1}{\varepsilon} T, \\ m_{-1} &= \frac{1}{\varepsilon^2} \ln \left( \frac{T + \frac{\varepsilon}{2}}{T - \frac{\varepsilon}{2}} \right), \\ \mu_1 &= \frac{2}{\xi} T. \end{aligned}$$

Teraz sme už schopní určiť hodnoty optimálnych parametrov. Najprv odvodíme parameter  $\hat{\sigma}$  dosadením do rovnice 3.2:



$$\hat{\sigma} = 2\sqrt{\frac{m_{-1}\mu_1}{m_{-1}m_1 - m_0^2}} = 2\sqrt{\frac{\frac{1}{\varepsilon^2} \ln\left(\frac{T + \frac{\varepsilon}{2}}{T - \frac{\varepsilon}{2}}\right) \frac{2T}{\xi}}{\frac{1}{\varepsilon^2} \ln\left(\frac{T + \frac{\varepsilon}{2}}{T - \frac{\varepsilon}{2}}\right) \frac{T}{\varepsilon} - \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2}}.$$

Po zjednodušení dostaneme:

$$\hat{\sigma} = 2\sqrt{\frac{\ln\left(\frac{T + \frac{\varepsilon}{2}}{T - \frac{\varepsilon}{2}}\right) \frac{2T}{\xi}}{\ln\left(\frac{T + \frac{\varepsilon}{2}}{T - \frac{\varepsilon}{2}}\right) \frac{T}{\varepsilon} - 1}}. \quad (3.9)$$

Teraz určíme hodnotu parametru  $\alpha$ . Podľa rovníc 3.1 a 3.2 platí:

$$\hat{\alpha} = \frac{m_0}{m_{-1}} \hat{\sigma} = 2\frac{\varepsilon}{\ln\left(\frac{T + \frac{\varepsilon}{2}}{T - \frac{\varepsilon}{2}}\right)} \sqrt{\frac{\ln\left(\frac{T + \frac{\varepsilon}{2}}{T - \frac{\varepsilon}{2}}\right) \frac{2T}{\xi}}{\ln\left(\frac{T + \frac{\varepsilon}{2}}{T - \frac{\varepsilon}{2}}\right) \frac{T}{\varepsilon} - 1}}. \quad (3.10)$$

V tejto chvíli poznáme vzťahy pre výpočet optimálnych parametrov. Hodnoty premenných, na ktorých aproximácia závisí, zvolíme nasledujúcim spôsobom:  $\varepsilon = 0,5$ ,  $\xi = 0,25$  a  $T = 2$ . Pre voľné parametre dostaneme:  $\hat{\sigma} = 55,31$  a  $\hat{\alpha} = 110,04$ . Všimneme si, že pomer premenných  $\hat{\alpha}$  a  $\hat{\sigma}$  je:

$$\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\sigma}} = \frac{110,04}{55,31} = 1,99 \approx 2,$$

a hodnota dopravného oneskorenia v našom prípade je  $T = 2$ . To nie je náhoda, pre optimálne parametre Diracovho impulzu platí:

$$\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\sigma}} = \frac{m_0}{m_{-1}} = T. \quad (3.11)$$

Vieme, že z obdĺžnikového pulzu dostaneme Diracov impulz pre  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Využitím tejto vlastnosti rovnicu 3.11 napíšeme pre obdĺžnikový pulz:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\sigma}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{m_0}{m_{-1}}. \quad (3.12)$$

Do limity 3.12 dosadíme hodnoty  $m_0$  a  $m_{-1}$  a dostaneme:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{m_0}{m_{-1}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{\frac{1}{\varepsilon^2} \ln\left(\frac{T + \frac{\varepsilon}{2}}{T - \frac{\varepsilon}{2}}\right)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\ln\left(\frac{T + \frac{\varepsilon}{2}}{T - \frac{\varepsilon}{2}}\right)}. \quad (3.13)$$

Ak v tejto chvíli vypočítame limitu 3.13, dostaneme výraz typu „ $\frac{0}{0}$ “. Z toho dôvodu využijeme L'Hospitalovo pravidlo. Derivácia čitateľa výrazu 3.13 je rovno jednej, derivácia menovateľa je

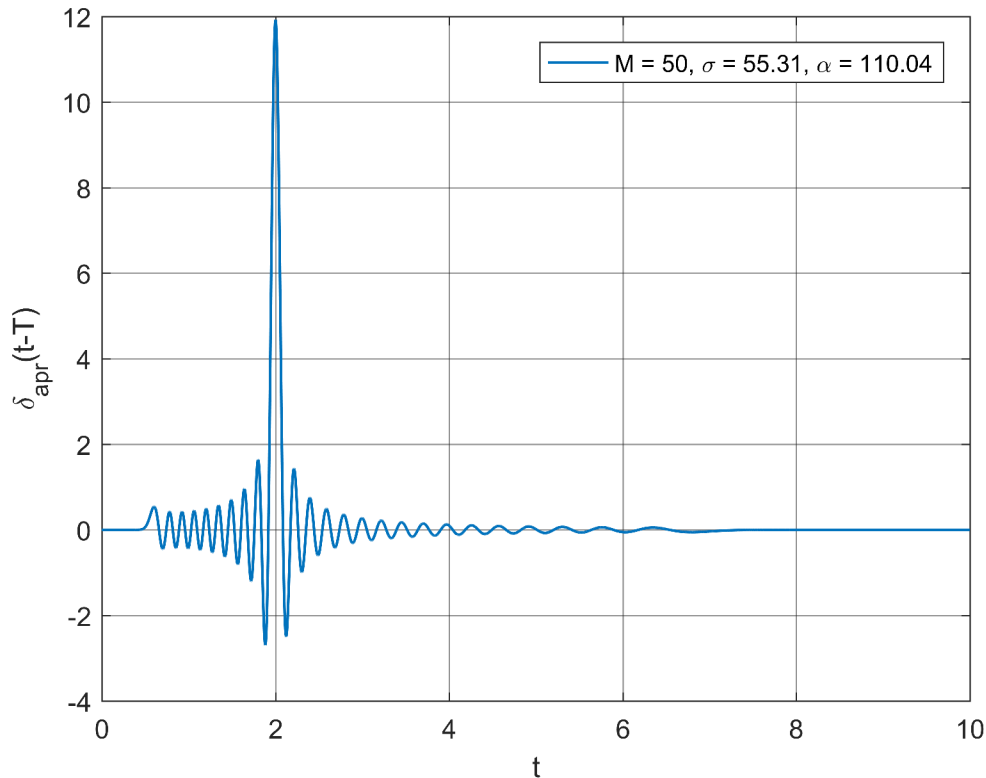
$$\frac{\partial \ln\left(\frac{T + \frac{\varepsilon}{2}}{T - \frac{\varepsilon}{2}}\right)}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{\left(\frac{T + \frac{\varepsilon}{2}}{T - \frac{\varepsilon}{2}}\right)} \frac{\frac{1}{2}\left(T - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(T + \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{\left(T - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2} = \dots = \frac{4T}{4T^2 - \varepsilon^2}.$$

Túto hodnotu dosadíme do 3.13 a dostaneme:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\ln\left(\frac{T + \frac{\varepsilon}{2}}{T - \frac{\varepsilon}{2}}\right)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{4T}{4T^2 - \varepsilon^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{4T^2 - \varepsilon^2}{4T} = T. \quad (3.14)$$

S tým sme dokázali platnosť rovnice 3.11 pomocou obdĺžnikovou náhradou Diracovho impulzu.

Teraz ukážeme aproximáciu Diracovho impulzu graficky s odvodenými optimálnymi parametrami  $\hat{\alpha} = 110,04$  a  $\hat{\sigma} = 55,31$ . Vidíme to na obrázku 3.3.

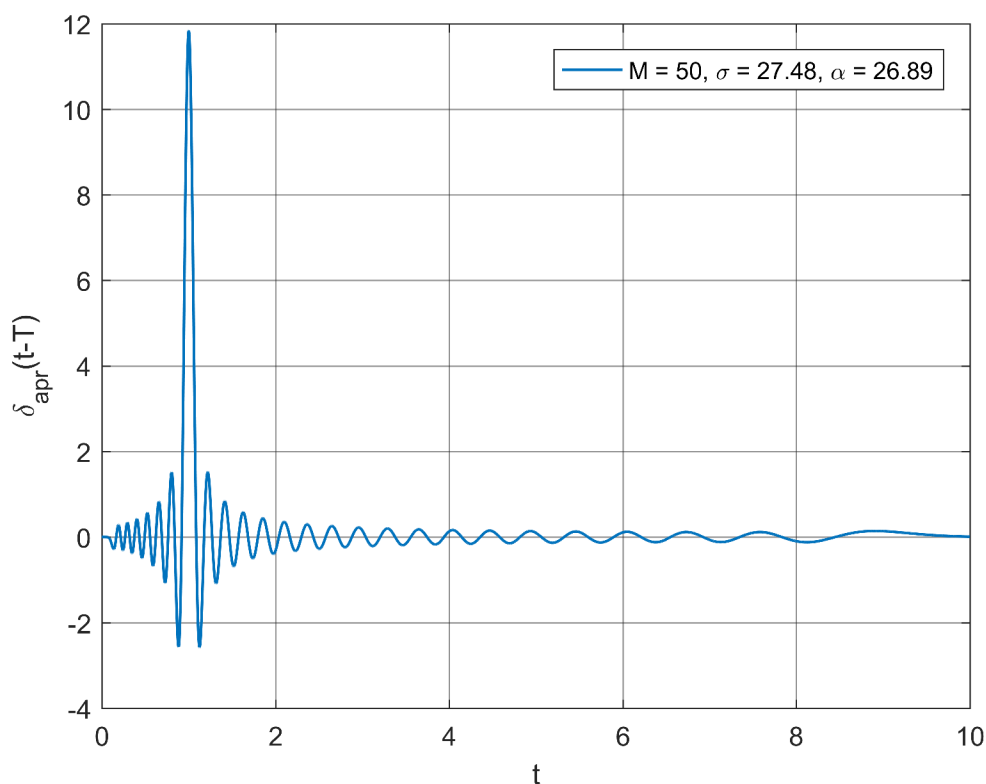


Obr. 3.3: Diracov impulz s optimálnymi parametrami pomocou obdĺžnikovej náhrady,  $\varepsilon = 0,5$ ;  $\xi = 0,25$ ;  $T = 2$

Zvolené parametre pre obdĺžnikový signál a jeho deriváciu sú  $\varepsilon = 0,5$  a  $\xi = \frac{\varepsilon}{2} = 0,25$ . Tieto hodnoty sú pomerne veľké, ale sme obmedzení z výpočtového hľadiska. Dôvodom je, že čím menšie je  $\varepsilon$  (a s tým aj  $\xi$ ), tým bližšie je tvar obdĺžnikového pulzu k Diracovho impulzu a dostaneme vyššie hodnoty pre  $\hat{\alpha}$  a  $\hat{\sigma}$ , pre ktoré Matlab už nedokáže vypočítať zobecnené Laguerrove funkcie.

Ak si porovnáme obrázok 3.3 s obr. 2.1 vidíme, že aproximácia na obrázku 3.3 má väčšie maximum, vychýli sa z nuly neskoršie a konverguje k nej rýchlejšie. To znamená, že s optimálnymi parametrami sme dostali lepší výsledok pre rád 50 ako s „náhodnými“ parametrami pre rád 100.

Na obrázku 3.3 dopravné oneskorenie je  $T = 2$ . Ukážeme, čo sa stane s aproximáciou ak túto hodnotu znížime na  $T = 1$  (obr. 3.3).



Obr. 3.4: Diracov impulz s optimálnymi parametrami pomocou obdĺžnikovej náhrady,  $\varepsilon = 0,5$ ;  $\xi = 0,25$ ;  $T = 1$

Ak porovnáme tento obrázok s predchádzajúcim, nevidíme žiadne výrazne zlepšenie. To nie je v súlade s kapitolou 2.4, kde je vysvetlené, že pre väčšie dopravné oneskorenie dostaneme horšiu aproximáciu. Dôvodom toho je, že hodnoty voľných parametrov nie sú rovnaké. Pre  $T = 1$  sme dostali  $\hat{\alpha} = 26,89$  a  $\hat{\sigma} = 27,48$ . To, že prečo majú voľné parametre nižšie hodnoty spočíva vo voľbe premenných  $\varepsilon$  a  $\xi$ ,

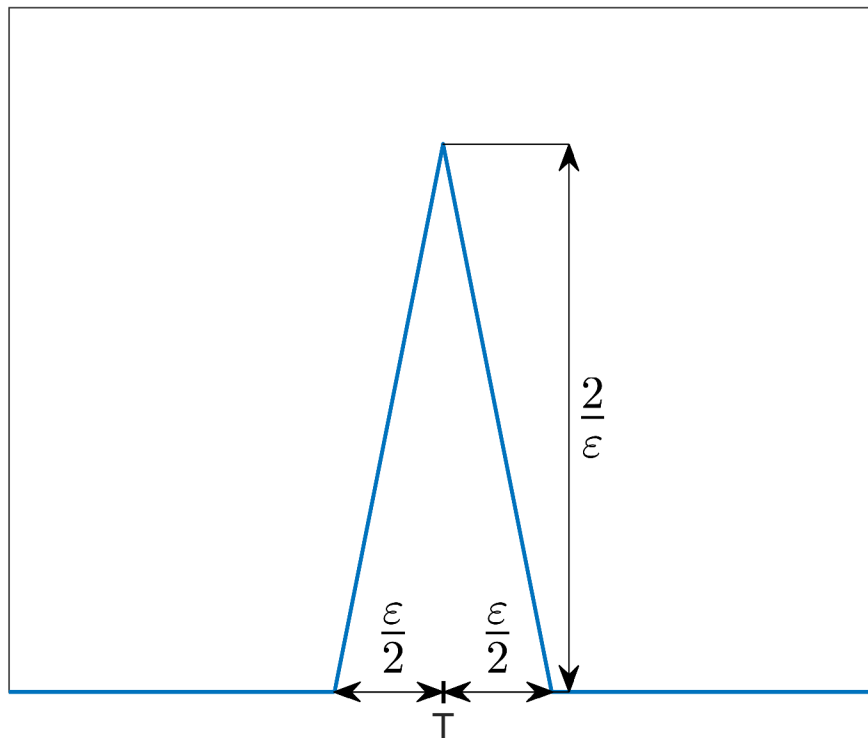
ktoré zostali nezmenené oproti predchádzajúcim príkladom. To znamená, že aproximujeme ten istý obdĺžnikový pulz, ktorý nie je ideálna náhrada Diracovho impulzu. Z toho dôvodu nemôžeme dostať lepšie výsledky. Samozrejme ak by sme znížili  $\varepsilon$  a  $\xi$ , čo v tomto prípade môžeme urobiť pretože  $\hat{\alpha}$  a  $\hat{\sigma}$  majú pomerne nízke hodnoty, tak by sme získali lepšiu aproximáciu.

Ak zväčšíme dopravné oneskorenie na  $T = 3$ , optimálne voľné parametre sú  $\hat{\alpha} = 248,61$  a  $\hat{\sigma} = 83,06$ . Pre takú veľkú hodnotu  $\hat{\alpha}$  už nie sme schopní vypočítať zobecnené Laguerrove funkcie pomocou Matlabe. To znamená, že musíme zväčšiť  $\varepsilon$  a  $\xi$ . Tým zhoršujeme náhradu Diracovho impulzu, čo zníži požiadavky na voľné parametre (a samozrejme zhoršuje aproximáciu).

### 3.2.2 Náhrada Diracovho impulzu trojuholníkovým pulzom

V predchádzajúcej časti práce sme odvodili optimálne parametre pre aproximáciu Diracovho impulzu tak, že sme ho nahradili obdĺžnikovým pulzom. Ako to už bolo spomenuté vyššie, hlavná nevýhoda toho bola, že jeho deriváciou sme zaviedli nový parameter  $\xi$ . Tým sme pridali ďalšiu voľnosť do výpočtu optimálnych parametrov.

V tejto časti práce Diracov impulz nahradíme trojuholníkovým pulzom (obrázok 3.5) a tým sa vyhýbame zavedeniu ďalšieho parametru.



Obr. 3.5: Náhrada Diracovho impulzu trojuholníkovým pulzom

Trojuholníkový pulz (podobne ako obdĺžnikový) sme zvolili symetricky podľa bodu  $T$ . Jeho šírka je  $\varepsilon$ , jeho výška  $\frac{2}{\varepsilon}$  aby mal jednotkovú plochu. Pre takto navrhnutý trojuholníkový pulz opäť platí, že pre  $\varepsilon \rightarrow 0$  jeho tvar sa blíži k tvaru Diracovho impulzu. Ďalej pre voľbu  $\varepsilon$  vzhľadom na veľkosť dopravného oneskorenia platí

$$\frac{\varepsilon}{2} \leq T,$$

podobne, ako pre obdĺžnikový pulz.

K výpočtu optimálnych parametrov potrebujeme okrem funkcie  $f(t)$  aj jeho deriváciu. Z obrázku 3.5 vidíme, že trojuholníkový pulz sa skladá z dvoch priamok. Ak tieto priamky derivujeme, dostaneme konštantné hodnoty. Z toho vyplýva, že derivácia trojuholníkového pulzu sa skladá z dvoch obdĺžnikových pulzov od  $T - \frac{\varepsilon}{2}$  do  $T$  a od  $T$  do  $T - \frac{\varepsilon}{2}$ . Výška týchto pulzov sa rovná sklonu jednotlivých priamok, čo je

$$\frac{\frac{2}{\varepsilon}}{\frac{\varepsilon}{2}} = \frac{4}{\varepsilon^2}$$

pre priamku od  $T - \frac{\varepsilon}{2}$  do  $T$  (označíme ako  $y_1$ ), a

$$-\frac{\frac{2}{\varepsilon}}{\frac{\varepsilon}{2}} = -\frac{4}{\varepsilon^2}$$

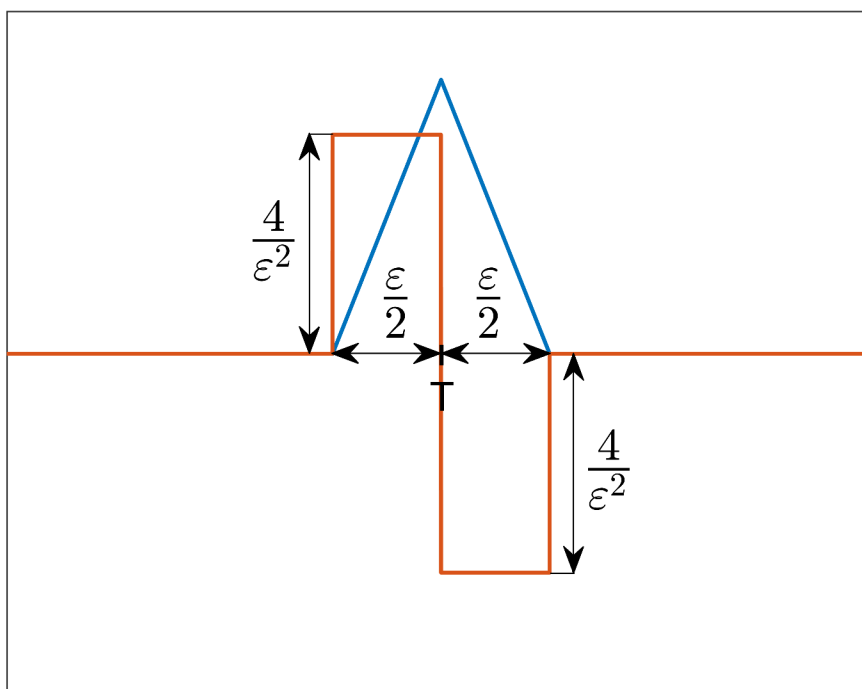
pre druhú priamku od  $T$  do  $T + \frac{\varepsilon}{2}$  (označíme ako  $y_2$ ). Deriváciu trojuholníkového pulzu vidíme na obrázku 3.6. Za pripomenutie stojí, že na tomto obrázku je znázornený prípad, kde  $\varepsilon > 2$ . Z toho vyplýva, že výška derivácie trojuholníkového pulzu je menšia ako výška samotného trojuholníkového pulzu. Pre  $\varepsilon < 2$  by to bolo opačne.

Aby sme dokázali vypočítať hodnoty optimálnych parametrov pre trojuholníkovú náhradu Diracovho impulzu, potrebujeme určiť rovnice priamok, z ktorých sa skladá táto funkcia. Smernicový tvar rovnice priamky je:

$$y = kt + q. \tag{3.15}$$

Pre priamku  $y_1$  dosadíme do rovnice 3.15 body  $[T - \frac{\varepsilon}{2}; 0]$  a  $[T; \frac{2}{\varepsilon}]$ . Dostaneme sústavu rovníc:

$$\begin{aligned} 0 &= k \left( T - \frac{\varepsilon}{2} \right) + q, \\ \frac{2}{\varepsilon} &= kT + q. \end{aligned} \tag{3.16}$$



Obr. 3.6: Derivácia trojuholníkového pulzu

Po vyriešení týchto rovníc obdržíme koeficienty

$$k = \frac{4}{\varepsilon^2},$$

$$q = -\frac{4}{\varepsilon^2}T + \frac{2}{\varepsilon}.$$

Dosadením do 3.15 dostaneme rovnicu priamky  $y_1$ :

$$y_1 = \frac{4}{\varepsilon^2}t - \frac{4}{\varepsilon^2}T + \frac{2}{\varepsilon}. \quad (3.17)$$

Podobným postupom určíme rovnicu pre priamku  $y_2$ . Do vzťahu 3.15 dosadíme body  $[T; \frac{2}{\varepsilon}]$  a  $[T + \frac{\varepsilon}{2}; 0]$ . Tým obdržíme sústavu rovníc:

$$\frac{2}{\varepsilon} = kT + q,$$

$$0 = k\left(T + \frac{\varepsilon}{2}\right) + q. \quad (3.18)$$

Jeho vyriešením získame koeficienty

$$k = -\frac{4}{\varepsilon^2},$$

$$q = \frac{4}{\varepsilon^2}T + \frac{2}{\varepsilon},$$

ktoré opäť dosadíme do vzťahu 3.15. Tým sme odvodili rovnicu priamky  $y_2$ :

$$y_2 = -\frac{4}{\varepsilon^2}t + \frac{4}{\varepsilon^2}T + \frac{2}{\varepsilon}. \quad (3.19)$$

V tejto chvíli nasleduje výpočet momentov pre určenie optimálnych parametrov  $\hat{\alpha}$  a  $\hat{\sigma}$ . K tomu využijeme rovnice 3.5 a 3.6. Pre trojuholníkový pulz a jeho deriváciu tieto vzťahy vyzerajú nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{aligned} m_0 &= \int_0^{\infty} f^2(t) dt = \int_{T-\frac{\varepsilon}{2}}^T \left( \frac{4}{\varepsilon^2}t - \frac{4}{\varepsilon^2}T + \frac{2}{\varepsilon} \right)^2 dt + \int_T^{T+\frac{\varepsilon}{2}} \left( -\frac{4}{\varepsilon^2}t + \frac{4}{\varepsilon^2}T + \frac{2}{\varepsilon} \right)^2 dt, \\ m_1 &= \int_0^{\infty} t f^2(t) dt = \int_{T-\frac{\varepsilon}{2}}^T t \left( \frac{4}{\varepsilon^2}t - \frac{4}{\varepsilon^2}T + \frac{2}{\varepsilon} \right)^2 dt + \int_T^{T+\frac{\varepsilon}{2}} t \left( -\frac{4}{\varepsilon^2}t + \frac{4}{\varepsilon^2}T + \frac{2}{\varepsilon} \right)^2 dt, \\ m_{-1} &= \int_0^{\infty} \frac{1}{t} f^2(t) dt = \int_{T-\frac{\varepsilon}{2}}^T \frac{1}{t} \left( \frac{4}{\varepsilon^2}t - \frac{4}{\varepsilon^2}T + \frac{2}{\varepsilon} \right)^2 dt + \int_T^{T+\frac{\varepsilon}{2}} \frac{1}{t} \left( -\frac{4}{\varepsilon^2}t + \frac{4}{\varepsilon^2}T + \frac{2}{\varepsilon} \right)^2 dt, \\ \mu_1 &= \int_0^{\infty} t (f'(t))^2 dt = \int_{T-\frac{\varepsilon}{2}}^T t \left( \frac{4}{\varepsilon^2} \right)^2 dt + \int_T^{T+\frac{\varepsilon}{2}} t \left( -\frac{4}{\varepsilon^2} \right)^2 dt = \int_{T-\frac{\varepsilon}{2}}^{T+\frac{\varepsilon}{2}} t \left( \frac{4}{\varepsilon^2} \right)^2 dt. \end{aligned}$$

V koeficientoch  $m_0$ ,  $m_1$  a  $m_{-1}$  integrujeme druhú mocninu priamok  $y_1$  (od bodu  $T - \frac{\varepsilon}{2}$  po bodu  $T$ ) a  $y_2$  (od bodu  $T$  po bodu  $T + \frac{\varepsilon}{2}$ ). Pre výpočet  $\mu_1$  integrály od  $T - \frac{\varepsilon}{2}$  do  $T$  a od  $T$  do  $T + \frac{\varepsilon}{2}$  vieme zlúčiť, pretože výrazy  $\left(\frac{4}{\varepsilon^2}\right)^2$  a  $\left(-\frac{4}{\varepsilon^2}\right)^2$  sa rovnajú.

Vyriešením rovníc pre týchto koeficientov dostaneme vzťahy:

$$\begin{aligned} m_0 &= \frac{4}{3\varepsilon}, \\ m_1 &= \frac{4}{3\varepsilon} T, \\ m_{-1} &= \frac{4}{\varepsilon^4} \left[ -4\varepsilon T - 8\varepsilon T \ln(T) + (4T^2 + \varepsilon^2 + 4\varepsilon T) \ln\left(T + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \right. \\ &\quad \left. - (4T^2 + \varepsilon^2 - 4\varepsilon T) \ln\left(T - \frac{\varepsilon}{2}\right) \right], \\ \mu_1 &= \frac{16}{\varepsilon^3} T. \end{aligned}$$

Teraz ukážeme aj pre trojuholníkovú náhradu, že pre  $\varepsilon \rightarrow 0$  pomer optimálnych

parametrov  $\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\sigma}}$  sa blíži k  $T$ :

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\sigma}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{m_0}{m_{-1}} = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{3\varepsilon}}{\frac{4}{\varepsilon^4} \left[ -4\varepsilon T - 8\varepsilon T \ln(T) + (4T^2 + \varepsilon^2 + 4\varepsilon T) \ln\left(T + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \right.} = \\
&\quad \left. - (4T^2 + \varepsilon^2 - 4\varepsilon T) \ln\left(T - \frac{\varepsilon}{2}\right) \right]}{\varepsilon^3} \quad (3.20) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{3 \left[ -4\varepsilon T - 8\varepsilon T \ln(T) + (4T^2 + \varepsilon^2 + 4\varepsilon T) \ln\left(T + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \right.}{3 \left[ -4\varepsilon T - 8\varepsilon T \ln(T) + (4T^2 + \varepsilon^2 + 4\varepsilon T) \ln\left(T + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \right.} \\
&\quad \left. - (4T^2 + \varepsilon^2 - 4\varepsilon T) \ln\left(T - \frac{\varepsilon}{2}\right) \right]}{\left. - (4T^2 + \varepsilon^2 - 4\varepsilon T) \ln\left(T - \frac{\varepsilon}{2}\right) \right]} .
\end{aligned}$$

Ak v tejto chvíli dosadíme nulu za  $\varepsilon$  do predchádzajúcej rovnice, čitateľ zlomku sa bude rovnať nule. Z menovateľa dostaneme:

$$\begin{aligned}
3 \left[ -4\varepsilon T - 8\varepsilon T \ln(T) + (4T^2 + \varepsilon^2 + 4\varepsilon T) \ln\left(T + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \right. \\
\left. - (4T^2 + \varepsilon^2 - 4\varepsilon T) \ln\left(T - \frac{\varepsilon}{2}\right) \right] &= 3 \left[ 4T^2 \ln(T) - 4T^2 \ln(T) \right] = 0.
\end{aligned}$$

Takže aj menovateľ, aj čitateľ vzťahu 3.20 sa rovná nule po výpočte limity. Z toho dôvodu využijeme L'Hospitalovo pravidlo. Derivácia čitateľa je  $3\varepsilon^2$ , deriváciou menovateľa podľa  $\varepsilon$  dostaneme výraz:

$$\begin{aligned}
3 \left[ -4T - 8T \ln(T) + (4T + 2\varepsilon) \ln\left(T + \frac{\varepsilon}{2}\right) + (4T - 2\varepsilon) \ln\left(T - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \right. \\
\left. + \frac{4T^2 + \varepsilon^2 + 4\varepsilon T}{2T + \varepsilon} + \frac{4T^2 + \varepsilon^2 - 4\varepsilon T}{2T - \varepsilon} \right] \quad (3.21)
\end{aligned}$$

Tým sme z limity 3.20 po použití L'Hospitalova pravidla dostali:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{3\varepsilon^2}{3 \left[ -4T - 8T \ln(T) + (4T + 2\varepsilon) \ln\left(T + \frac{\varepsilon}{2}\right) + (4T - 2\varepsilon) \ln\left(T - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \right.} \\
\left. + \frac{4T^2 + \varepsilon^2 + 4\varepsilon T}{2T + \varepsilon} + \frac{4T^2 + \varepsilon^2 - 4\varepsilon T}{2T - \varepsilon} \right]} \quad (3.22)
\end{aligned}$$

Opäť skúsime dosadiť nulu za premennú  $\varepsilon$  do vzťahu 3.22. Na prvý pohľad vidíme, že čitateľ zlomku sa rovná nule, z menovateľa po dosadení dostaneme:



$$\begin{aligned}
& 3 \left[ -4T - 8T \ln(T) + (4T + 2\varepsilon) \ln\left(T + \frac{\varepsilon}{2}\right) + (4T - 2\varepsilon) \ln\left(T - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{4T^2 + \varepsilon^2 + 4\varepsilon T}{2T + \varepsilon} + \frac{4T^2 + \varepsilon^2 - 4\varepsilon T}{2T - \varepsilon} \right] = \\
& = 3 \left[ -4T - 8T \ln(T) + 4T \ln(T) + 4T \ln(T) + \frac{4T^2}{2T} + \frac{4T^2}{2T} \right] = 0.
\end{aligned}$$

Vidíme, že aj menovateľ sa rovná nule. To znamená, že opäť využijeme L'Hospitalovo pravidlo. Derivácia čitateľa je  $6\varepsilon$ , po derivácii menovateľa obdržíme vzťah:

$$3 \left[ 2 \ln\left(T + \frac{\varepsilon}{2}\right) - 2 \ln\left(T - \frac{\varepsilon}{2}\right) \right]. \quad (3.23)$$

Z toho napíšeme limitu:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{6\varepsilon}{3 \left[ 2 \ln\left(T + \frac{\varepsilon}{2}\right) - 2 \ln\left(T - \frac{\varepsilon}{2}\right) \right]} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\ln\left(T + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \ln\left(T - \frac{\varepsilon}{2}\right)} = \frac{0}{0}. \quad (3.24)$$

Vidíme, že zase sme dostali výraz typu „ $\frac{0}{0}$ “. Z toho dôvodu aj tretíkrát využijeme L'Hospitalovo pravidlo. Deriváciu menovateľa vypočítame nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \left[ \ln\left(T + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \ln\left(T - \frac{\varepsilon}{2}\right) \right]}{\partial \varepsilon} &= \frac{1}{T + \frac{\varepsilon}{2}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{T - \frac{\varepsilon}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \dots = \\
&= \frac{4T}{4T^2 - \varepsilon^2},
\end{aligned} \quad (3.25)$$

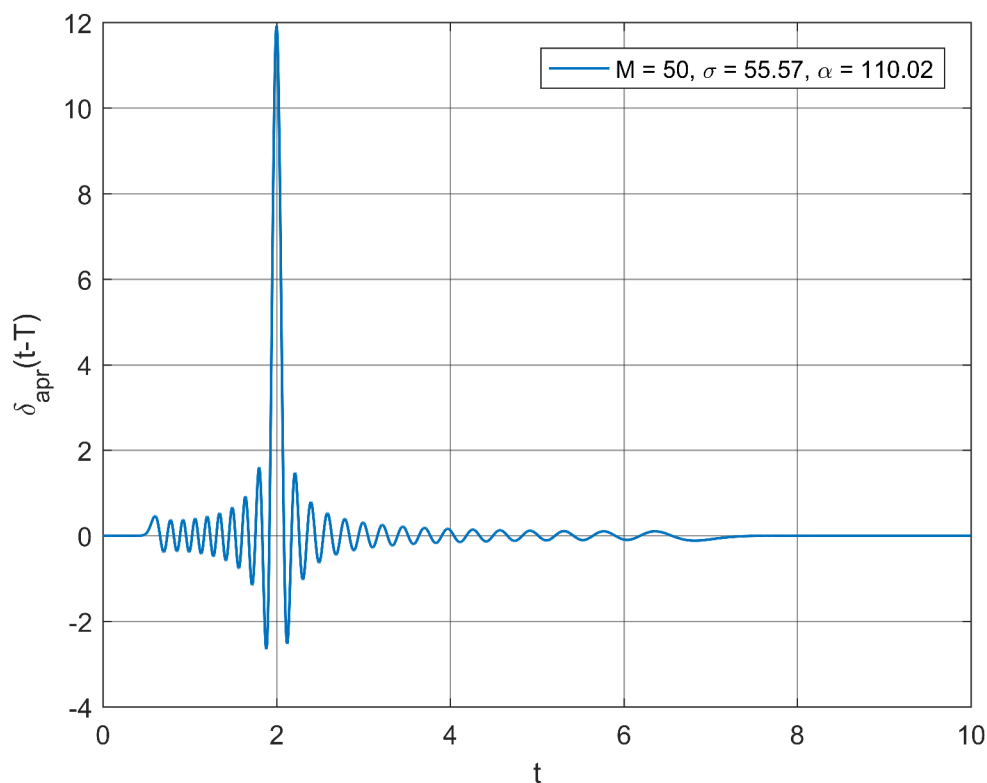
derivácia čitateľa sa rovná jednej. Po dosadení do vzťahu 3.24 dostaneme limitu:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\ln\left(T + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \ln\left(T - \frac{\varepsilon}{2}\right)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{4T}{4T^2 - \varepsilon^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{4T^2 - \varepsilon^2}{4T} = \frac{4T^2}{4T} = T. \quad (3.26)$$

S tým sme dokázali aj s trojuholníkovou náhradou Diracovho impulzu, že pomer optimálnych parametrov  $\hat{\alpha}$  a  $\hat{\sigma}$  pre  $\varepsilon \rightarrow 0$  je:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\sigma}} = T. \quad (3.27)$$

Teraz nasledujú grafické ukážky aproximácií s odvodenými optimálnymi parametrami. Pre  $\hat{\alpha}$  a  $\hat{\sigma}$  vypočítané pomocou trojuholníkovej náhrady Diracovho impulzu dostaneme hodnoty  $\hat{\alpha} = 110,02$  a  $\hat{\sigma} = 55,57$ . Tieto parametre sme získali pre  $T = 2$  a  $\varepsilon = 1,25$ . Výslednú aproximáciu vidíme na obrázku 3.7.



Obr. 3.7: Diracov impulz s optimálnymi parametrami pomocou trojuholníkovej náhrady,  $\varepsilon = 1,25$ ;  $T = 2$

Aproximáciu Diracovho impulzu ukážeme aj pre nižšiu hodnotu dopravného oneskorenia, pre  $T = 1$ . To je znázornené na obrázku 3.8, kde vypočítané optimálne parametre majú hodnoty  $\hat{\alpha} = 25,76$  a  $\hat{\sigma} = 26,91$ . Premennú  $\varepsilon$  sme zvolili rovnako, ako v predchádzajúcom prípade,  $\varepsilon = 1,25$ .

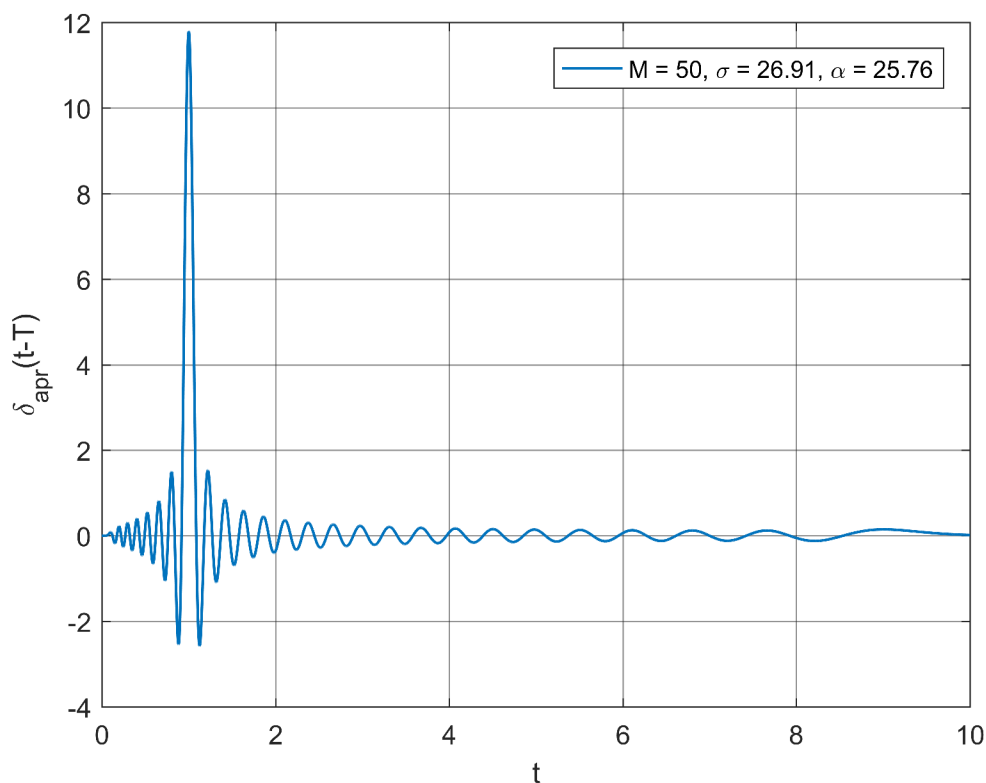
Ak porovnáme výsledné aproximácie pre  $T = 2$  (obr. 3.7) a  $T = 1$  (obr. 3.8) vidíme, že výsledky sú veľmi podobné napriek tomu, že veľkosť dopravného oneskorenia je odlišná pre obidve prípady. Dôvodom toho je, že hodnota premennej  $\varepsilon$  je pre obidve obrázky rovnaká, takže aproximujeme pomocou tej istej náhrady Diracovho impulzu.

Ak vypočítame pomer získaných optimálnych parametrov  $\hat{\alpha}$  a  $\hat{\sigma}$  pre uvedené aproximácie, dostaneme hodnoty:

$$\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\sigma}} = \frac{110,02}{55,57} = 1,98 \approx 2$$

pre aproximáciu na obr. 3.7 a

$$\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\sigma}} = \frac{25,76}{26,91} = 0,96 \approx 1$$



Obr. 3.8: Diracov impulz s optimálnymi parametrami pomocou trojuholníkovej náhrady,  $\varepsilon = 1,25$ ;  $T = 1$

pre aproximáciu na obr. 3.8. Vidíme, že výsledky sa zhodujú s veľkosťou dopravného oneskorenia, čo je v súlade s rovnicou 3.27. Odchýlky sú spôsobené veľkou hodnotou premennej  $\varepsilon$ .

Môžeme sa ešte pokúsiť vyhodnotiť použité náhrady Diracovho impulzu, obdĺžnikový a trojuholníkový pulz. Ak porovnáme obrázok 3.3 s obrázkom 3.7 a obrázok 3.4 s obrázkom 3.8 (veľkosti dopravných oneskorení sú zhodné v obidvoch prípadoch) si všimneme, že sú veľmi podobné. To spočíva v tom, že vypočítané optimálne parametre  $\hat{\alpha}$  a  $\hat{\sigma}$  majú skoro rovnaké hodnoty. To ale neznamená, že obdĺžnikový a trojuholníkový pulz by boli rovnocenné náhrady Diracovho impulzu. V obidvoch prípadoch sú značné rozdiely vo voľbe hodnoty  $\varepsilon$ . V podkapitole 3.2.1  $\varepsilon = 0,5$  a v tejto časti práce  $\varepsilon = 1,25$ . Ďalší rozdiel spočíva v parametre  $\xi$ . Túto premennú sme zaviedli deriváciou obdĺžnikového pulzu a zvolili sme ho  $\xi = \frac{\varepsilon}{2}$ , čo je najhoršia možná voľba (z dôvodu numerických výpočtov v Matlbe). V prípade trojuholníkového pulzu derivácia je jednoznačná, nie je potreba zaviesť ďalší parameter.

Z vyššie popísaných rozdielov vyplýva, že nie sme schopní presne určiť, ktorá náhrada Diracovho impulzu vyhovuje lepšie pre aproximáciu. Hlavným dôvodom je, že v prípade obdĺžnikového pulzu figuruje ďalšia premenná  $\xi$ .

### 3.3 Potrebné vzťahy k určeniu optimálnych parametrov jednoduchých Laguerrových funkcií

Doteraz k aproximácii posunutého Diracovho impulzu sme používali zobecnené Laguerrove funkcie. V tejto časti porovnáme výsledky s jednoduchými Laguerrovými funkciami. Definičný vzťah pre tieto funkcie vyzerá nasledujúcim spôsobom:

$$\lambda_m(\sigma; t) = \sqrt{\frac{\sigma m!}{\Gamma(m+1)}} \sum_{n=0}^m (-1)^n \binom{m}{m-n} \frac{(\sigma t)^n}{n!} e^{-\sigma t/2}, \quad (3.28)$$

kde  $\lambda_m(\sigma; t)$  značí jednoduché Laguerrove funkcie. Rovnicu 3.28 sme získali tak, že sme dosadili  $\alpha = 0$  do rovnice 1.5.

Pre realizáciu jednoduchých Laguerrových funkcií v Matlabe opäť využijeme rekurzívny vzťah 1.8 kde parameter  $\alpha$  nahradíme nulou. Týmto spôsobom dostaneme:

$$\lambda_m(\sigma; t) = \sqrt{\frac{\sigma m! e^{-\sigma t}}{\Gamma(m+1)}} \frac{(2m+1 - \sigma t) l_m(\sigma; t) - m l_{m-1}(\sigma; t)}{m+1}. \quad (3.29)$$

Pretože v prípade jednoduchých Laguerrových funkcií  $\alpha$  sa rovná nule, jediný parameter pre ktoré potrebujeme určiť optimálnu hodnotu je  $\sigma$ . Touto problematikou sa zaoberá článok [9], kde autor odvodí nasledujúci vzťah:

$$p = \sqrt{\frac{M_2}{M_1}}. \quad (3.30)$$

Medzi premenným  $p$  a voľným parametrom  $\sigma$  je súvislosť  $\sigma = 2p$ . Z toho dostaneme vzťah pre výpočet parametru  $\sigma$  pre jednoduché Laguerrove funkcie:

$$\sigma = 2p = 2\sqrt{\frac{M_2}{M_1}}. \quad (3.31)$$

V rovniciach 3.30 a 3.31 premenné  $M_1$  a  $M_2$  sú miery signálu.  $M_1$  reprezentuje ako rýchlo,  $M_2$  ako hladko signál  $f(t)$  klesá. Platia pre nich vzťahy [9]:

$$M_1 = \frac{\int_0^{\infty} t f^2(t) dt}{\int_0^{\infty} f^2(t) dt}, \quad (3.32)$$

$$M_2 = \frac{\int_0^{\infty} t (f'(t))^2 dt}{\int_0^{\infty} f^2(t) dt}. \quad (3.33)$$

Dosadením rovníc 3.32 a 3.33 do vzťahu 3.31 dostaneme finálny vzťah pre parameter  $\sigma$ :

$$\sigma = 2\sqrt{\frac{M_2}{M_1}} = 2\sqrt{\frac{\int_0^{\infty} t(f'(t))^2 dt}{\int_0^{\infty} t f^2(t) dt}}. \quad (3.34)$$

Ak sa pozrieme na túto rovnicu, môžeme si všimnúť, že výraz v čitateli zlomku je moment  $\mu_1$ , výraz v menovateli je moment  $m_1$ . Tieto premenné sú definované rovnicami 3.5 a 3.6 v podkapitole 3.2.1. Z toho vyplýva, že rovnicu 3.34 môžeme písať vo tvaru

$$\sigma = 2\sqrt{\frac{\mu_1}{m_1}}. \quad (3.35)$$

Aby sme vedeli určiť optimálnu hodnotu parametru  $\sigma$  pomocou rovnice 3.35, opäť potrebujeme nahradiť Diracov vhodnými funkciami. Tieto funkcie budú obdĺžnikový a trojuholníkový pulz (podobne ako v podkapitole 3.2).

### 3.4 Aproximácia Diracovho impulzu jednoduchými Laguerrovými funkciami pomocou obdĺžnikového pulzu

V podkapitole 3.2.1 bolo ukázané ako zvolíme obdĺžnikovú náhradu Diracovho impulzu. K aplikovaniu vzťahu 3.35 potrebujeme premenné  $\mu_1$  a  $m_1$ . Ich hodnoty pre obdĺžnikový pulz sú taktiež odvodené v podkapitole 3.2.1, ale pre úplnosť ich uvedieme znova:

$$m_1 = \frac{1}{\varepsilon} T,$$

$$\mu_1 = \frac{2}{\xi} T.$$

Tieto hodnoty dosadíme do vzťahu 3.35 a dostaneme:

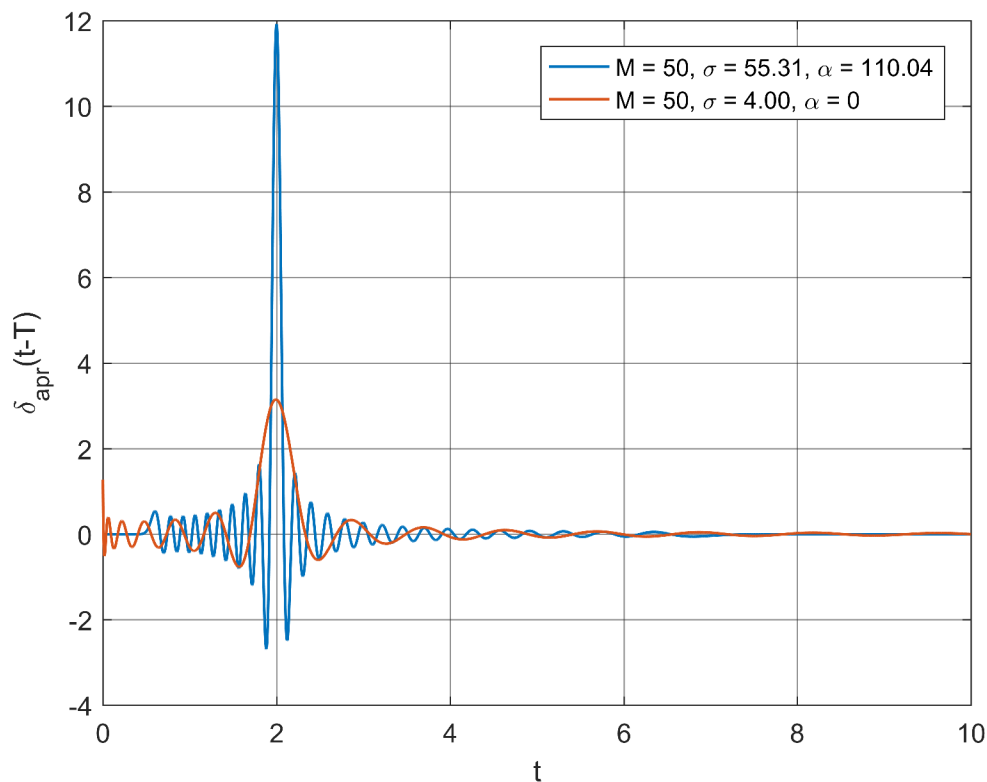
$$\sigma = 2\sqrt{\frac{\mu_1}{m_1}} = 2\sqrt{\frac{\frac{2}{\xi} T}{\frac{1}{\varepsilon} T}} = 2\sqrt{2\frac{\varepsilon}{\xi}}. \quad (3.36)$$

V tejto chvíli je dôležité si všimnúť, že rovnica 3.36 neobsahuje premennú  $T$ . To znamená, že dopravné oneskorenie nemá vplyv na hodnotu parametru  $\sigma$  (bude konštantné pre rôzne  $T$ ).

Pomocou rovnice 3.36 už sme schopní aproximovať Diracov impulzu jednoduchými Laguerrovými funkciami. Parametre  $\varepsilon$  a  $\xi$  zvolíme rovnako ako v podkapitole 3.2.1:  $\varepsilon = 0,5$  a  $\xi = 0,25$ . Na obrázku 3.9 vidíme takto získané výsledky. Modrý priebeh reprezentuje zobecnené, červený jednoduché Laguerrove funkcie. V legende obrázku vidíme hodnoty voľných parametrov. Pre jednoduché Laguerrove funkcie pomocou rovnice 3.36 sme dostali

$$\sigma = 2\sqrt{2\frac{\varepsilon}{\xi}} = 2\sqrt{2\frac{0,5}{0,25}} = 4.$$

Vidíme, že týmto parametrom sme obdržali oveľa horšie výsledky než v prípade zobecnených Laguerrových funkcií, kde  $\alpha = 110,04$  a  $\sigma = 55,31$ .

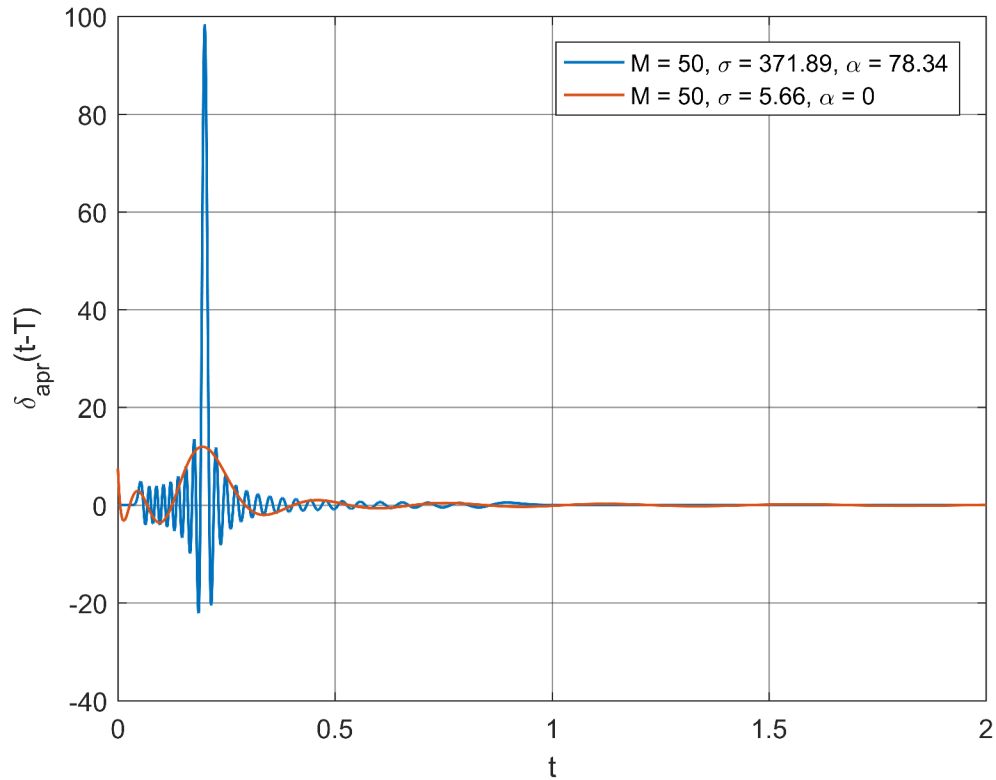


Obr. 3.9: Porovnanie aproximácií Diracovho impulzu pomocou obdĺžnikovej náhrady,  $\varepsilon = 0,5$ ;  $\xi = 0,25$ ;  $T = 2$

Aproximácie ukážeme aj pre menšiu hodnotu dopravného oneskorenia, pre  $T = 0,2$ . To vidíme na obrázku 3.10. Parametre  $\varepsilon$  a  $\xi$  sme zvolili nasledujúcim spôsobom:  $\varepsilon = 0,01$  a  $\xi = 0,0025$ . Voľný parameter  $\sigma$  má v tomto prípade hodnotu

$$\sigma = 2\sqrt{2\frac{\varepsilon}{\xi}} = 2\sqrt{2\frac{0,01}{0,0025}} = 5,66.$$

Pretože dopravné oneskorenie má menšiu veľkosť než v predchádzajúcich príkladoch, dokázali sme znížiť aj hodnotu premenných  $\varepsilon$  a  $\xi$ . Z toho dôvodu sme dostali lepšie aproximácie, ale vylepšenie u zobecnených Laguerrových funkcií je názornejšie, než u jednoduchých.



Obr. 3.10: Porovnanie aproximácií Diracovho impulzu pomocou obdĺžnikovej náhrady,  $\varepsilon = 0,01$ ;  $\xi = 0,0025$ ;  $T = 0,2$

### 3.5 Aproximácia Diracovho impulzu jednoduchými Laguerrovými funkciami pomocou trojuholníkového pulzu

V tejto časti ukážeme aproximáciu Diracovho impulzu jednoduchými Laguerrovými funkciami pomocou trojuholníkovvej náhrady. V podkapitole 3.2.2 bolo vysvetlené ako zvoliť trojuholníkovú pulz a ako určiť jeho deriváciu. Ďalej boli odvodené potrebné vzťahy pre premenné  $\mu_1$  a  $m_1$ , ktoré tu uvedieme ešte raz:

$$m_1 = \frac{4}{3\varepsilon} T,$$

$$\mu_1 = \frac{16}{\varepsilon^3} T.$$

Tieto hodnoty dosadíme do rovnice 3.35 a dostaneme:

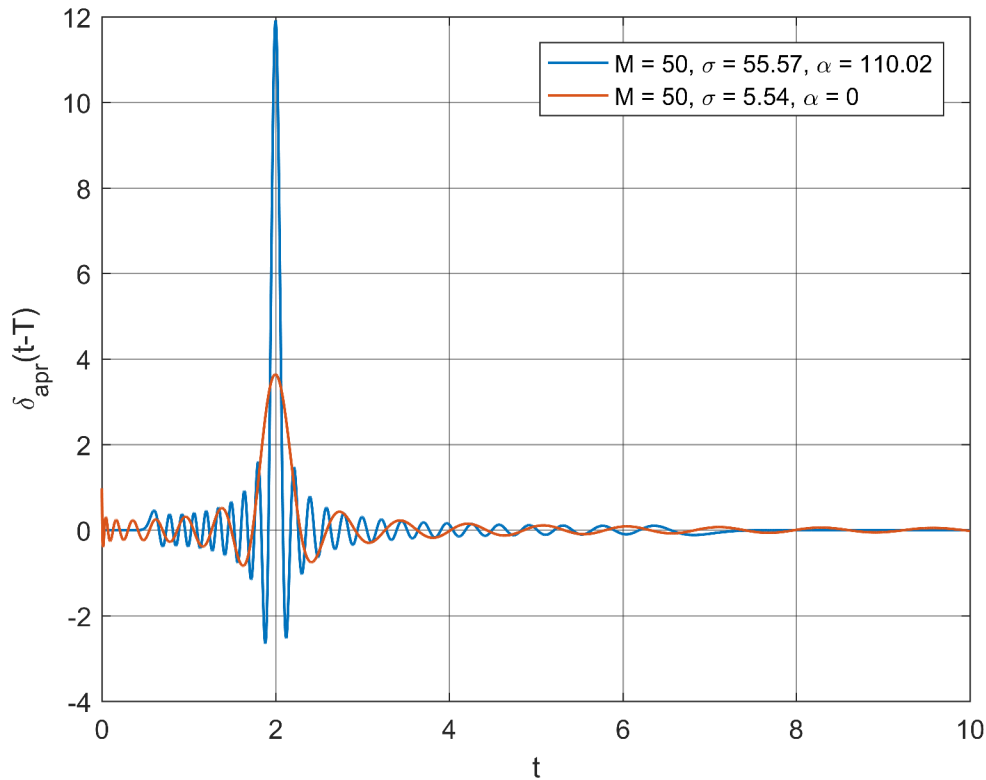
$$\sigma = 2\sqrt{\frac{\mu_1}{m_1}} = 2\sqrt{\frac{\frac{16}{\varepsilon^3} T}{\frac{4}{3\varepsilon} T}} = 2\sqrt{\frac{12}{\varepsilon^2}}. \quad (3.37)$$

Vidíme, že výsledná rovnica 3.37 pre výpočtu parametru  $\sigma$  neobsahuje premennú  $T$ , takže  $\sigma$  opäť nie je závislá na veľkosti dopravného oneskorenia.

Aproximácie pomocou jednoduchých Laguerrových funkcií s trojuholníkovou náhradou Diracovho impulzu ukážeme aj graficky (obrázok 3.11). Pre premennú  $\varepsilon$  zvolíme hodnotu  $\varepsilon = 1,25$ . Z toho vypočítame parameter  $\sigma$ :

$$\sigma = 2\sqrt{\frac{12}{\varepsilon^2}} = 2\sqrt{\frac{12}{1,25^2}} = 5,54.$$

Opäť vidíme, že jednoduchými Laguerrovými funkciami sme dostali horšie výsledky ako zobecnenými.



Obr. 3.11: Porovnanie aproximácií Diracovho impulzu pomocou trojuholníkovej náhrady,  $\varepsilon = 1,25$ ;  $T = 2$

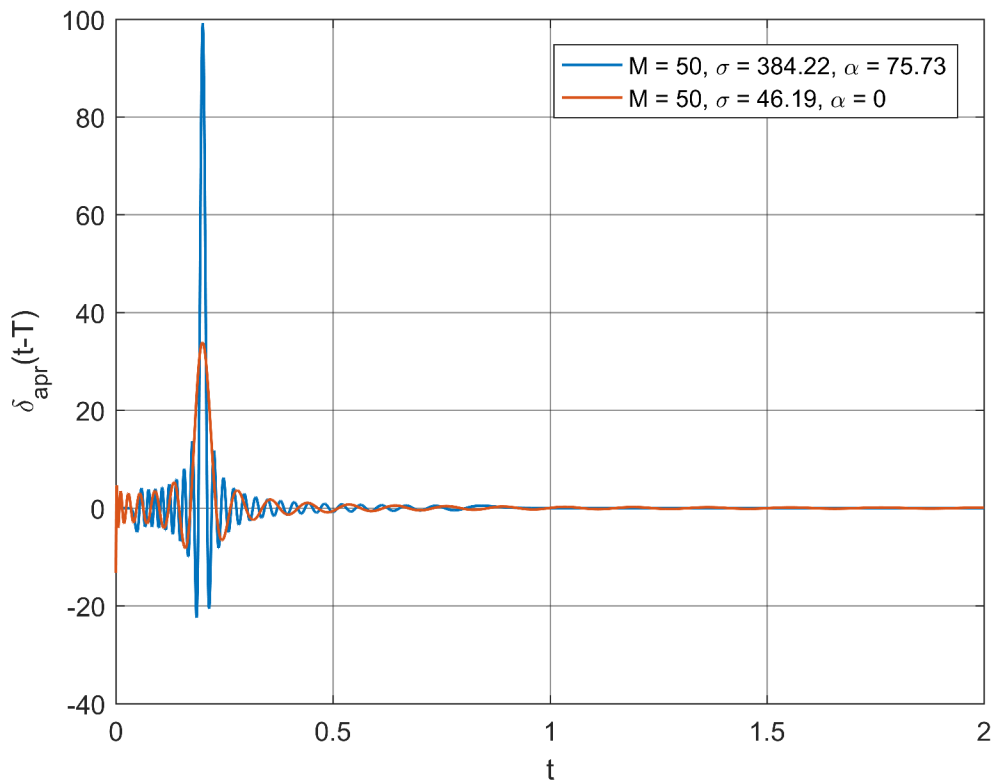
Aproximácie ukážeme aj pre menšiu veľkosť dopravného oneskorenia, pre  $T = 0,2$ . Pre túto hodnotu si môžeme znížiť  $\varepsilon$ , zvolíme  $\varepsilon = 0,15$ . Z toho určíme parameter  $\sigma$ :



$$\sigma = 2\sqrt{\frac{12}{\varepsilon^2}} = 2\sqrt{\frac{12}{0,15^2}} = 46,19.$$

Výslednú aproximáciu vidíme na obrázku 3.12. Ak tento obrázok porovnáme s obr. 3.10, môžeme si všimnúť, že hodnoty voľných parametrov zobecnených Laguerrových funkcií sú približne rovnaké, parameter  $\sigma$  je ale odlišný v prípade jednoduchých Laguerrových funkcií. Túto vlastnosť dokážeme vysvetliť, ak porovnáme rovnice 3.36 (náhrada Diracovho impulzu obdĺžnikovým pulzom) a 3.37 (trojuholníková náhrada). V prvom prípade hodnota  $\sigma$  je závislá na premenných  $\varepsilon$  a  $\xi$ , presná závislosť je

$$\sigma = 2\sqrt{2\frac{\varepsilon}{\xi}}.$$



Obr. 3.12: Porovnanie aproximácií Diracovho impulzu pomocou trojuholníkovej náhrady,  $\varepsilon = 0,15$ ;  $T = 0,2$

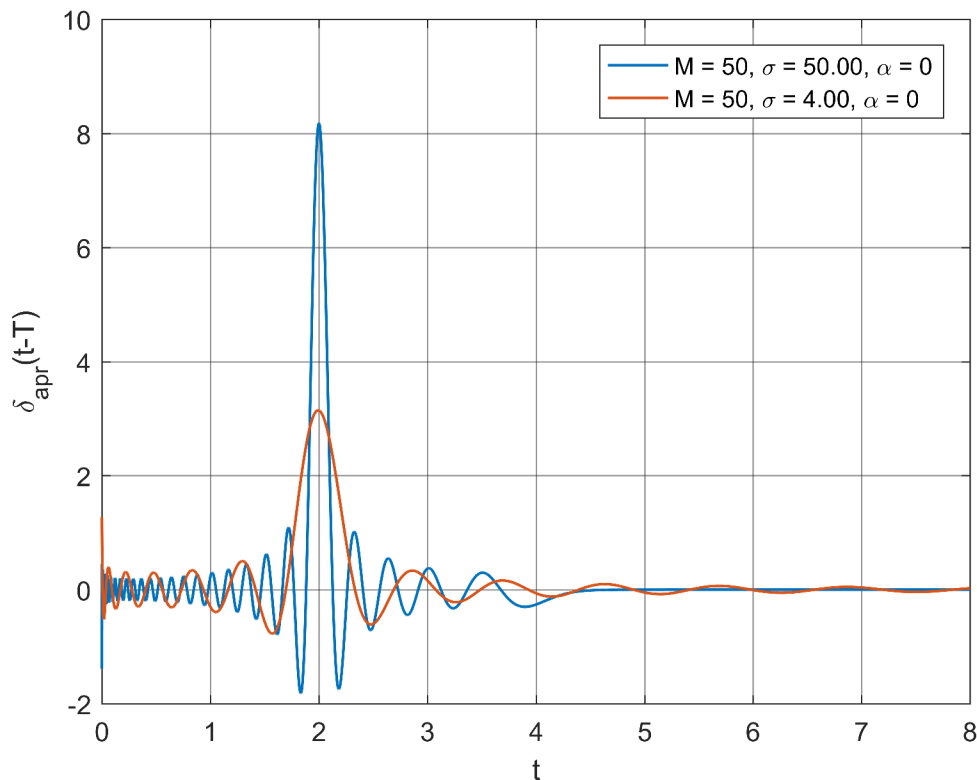
Z toho vyplýva, že ak znížime tieto parametre ale ich pomer zostane konštantný, hodnota  $\sigma$  bude nezmenená. V druhom prípade závislosť  $\sigma$  na premennej  $\varepsilon$  je udávaná výrazom

$$\sigma = 2\sqrt{\frac{12}{\varepsilon^2}}.$$

Z toho je jasné, že čím menšiu hodnotu má  $\varepsilon$ , tým väčšia bude  $\sigma$ . Kvôli tejto vlastnosti dostaneme lepšie aproximácie trojuholníkovou náhradou v prípade jednoduchých Laguerrových funkcií. To ale môže prinášať otázku o ďalšom zvýšení hodnoty parametru  $\sigma$ . V ďalšej podkapitole ukážeme, ako to ovplyvní aproximácie jednoduchými Laguerrovými funkciami.

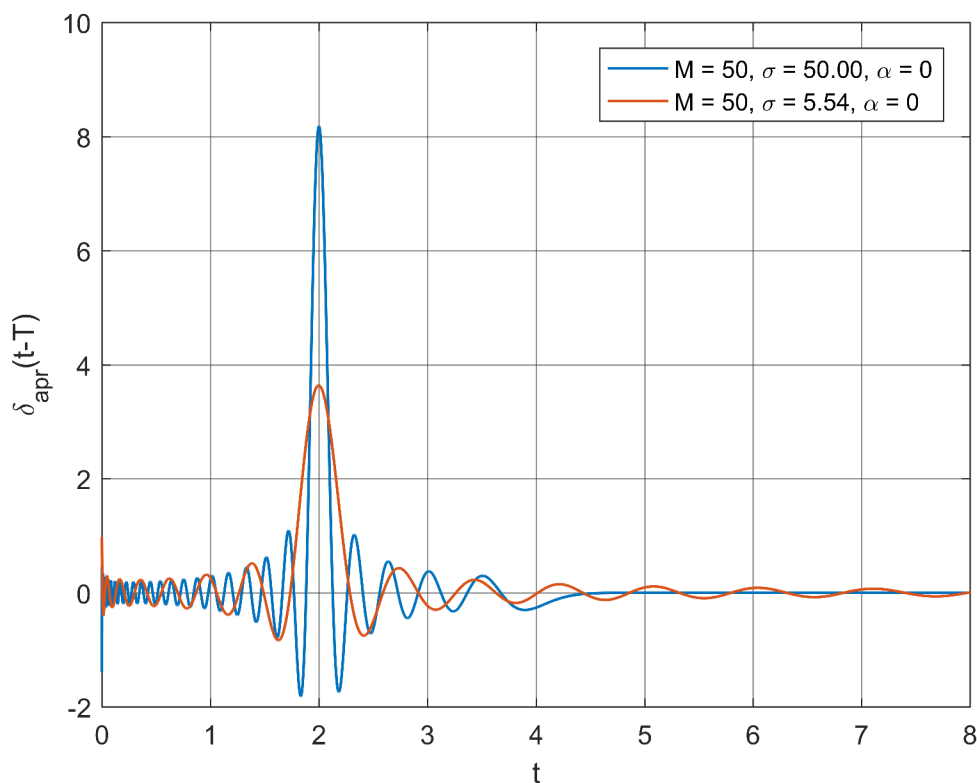
### 3.6 Vyššie hodnoty parametru $\sigma$ pre jednoduché Laguerrove funkcie

V tejto časti práce ukážeme aproximáciu jednoduchými Laguerrovými funkciami pre vyššie hodnoty parametru  $\sigma$  než to bolo odvodené v predchádzajúcich podkapitolách. Na obrázku 3.13 vidíme aproximáciu pomocou obdĺžnikovej, na obrázku 3.14 pomocou trojuholníkovej náhrady. Parameter  $\sigma$  má hodnotu 50 pre obidve príklady.



Obr. 3.13: Porovnanie hodnôt parametru  $\sigma$  pri použití jednoduchých Laguerrových funkcií obdĺžnikovou náhradou Diracovho impulzu,  $\varepsilon = 0,5$ ;  $\xi = 0,25$ ;  $T = 2$

Z uvedených obrázkov vidíme, že vyššia hodnota parametru  $\sigma$  vylepšil aproximáciu v oboch prípadoch. To môže prinášať otázku o správnosti odvodených



Obr. 3.14: Porovnanie hodnôt parametru  $\sigma$  pri použití jednoduchých Laguerrových funkcií trojuholníkovou náhradou Diracovho impulzu,  $\varepsilon = 1,25$ ;  $T = 2$

vzťahov v kapitole 3.3. Odvodenie vychádza z rovnice 3.30, ktorý pochádza z článku [9]. Autor tento vzťah dostal minimalizáciou kvadratického kritéria vo tvare

$$J_k(p) = \frac{\int_0^{\infty} \left( f(t) - \sum_{m=0}^M C_m \lambda_m(p; t) \right)^2 dt}{\int_0^{\infty} f^2(t) dt}, \quad (3.38)$$

kde  $\lambda_m(p; t)$  reprezentuje jednoduché Laguerrove funkcie s parametrom  $p$  (platí  $\sigma = 2p$ ). To znamená, že rovnica 3.30 udáva optimálnu voľbu premennej  $p$  z hľadiska tohto kritéria. My ale optimálnu hodnotu parametru  $\sigma$  počítame pre náhrady Diracovho impulzu. Z toho dôvodu získame slabé výsledky, ktoré by sa dali vylepšiť zmenšením hodnôt  $\varepsilon$  a  $\xi$ . Samozrejme to isté platí aj pre zobecnené Laguerrove funkcie, kde sme obmedzení z výpočtového hľadiska. Z dôvodu správneho porovnania výsledkov sme ale používali tie isté hodnoty premenných  $\varepsilon$  a  $\xi$  aj pre jednoduché Laguerrove funkcie v predchádzajúcich častiach kapitoly.

## 4 Vyhodnotenie presnosti aproximácie Diracovho impulzu z hľadiska energie

Pre matematické vyhodnotenie aproximácií sa používajú rôzne chyby, kritéria a normy. Tieto metódy predpokladajú, že aproximovaná funkcia má všade konečné hodnoty. To ale neplatí pre Diracov impulz, pretože v nule jeho hodnota sa rovná nekonečnu. Z toho vyplýva, že pre vyhodnotenie aproximácií Diracovho impulzu potrebujeme zvoliť inú metódu, budeme počítat energiu.

### 4.1 Odvodenie potrebných vzťahov pre výpočet energie

Platí, že čím väčšia je energia aproximácie Diracovho impulzu, tým lepšia je táto aproximácia.

Pre energiu signálov môžeme napísať vzťah [7]:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt. \quad (4.1)$$

Pretože zobecnené Laguerrove funkcie majú len reálne hodnoty a platí  $t \geq 0$ , rovnicu 4.1 môžeme zjednodušiť na tvar:

$$E = \int_0^{\infty} f^2(t) dt. \quad (4.2)$$

V rovniach 4.1 a 4.2  $f(t)$  je aproximovaná funkcia, v našom prípade aproximácia Diracovho impulzu. Z toho dôvodu využijeme vzťah 2.4 a dostaneme:

$$\int_0^{\infty} f^2(t) dt = \int_0^{\infty} f(t) \cdot f(t) dt = \int_0^{\infty} \left[ \sum_{m=0}^M C_m \lambda_m^{(\alpha)}(\sigma; t) \cdot \sum_{n=0}^N C_n \lambda_n^{(\alpha)}(\sigma; t) \right] dt. \quad (4.3)$$

V tejto chvíli môžeme používať vzťah:

$$\sum_{i=s}^m a_i \cdot \sum_{j=t}^n b_j = \sum_{i=s}^m \sum_{j=t}^n a_i b_j, \quad (4.4)$$

a z rovnice 4.3 dostaneme

$$\int_0^{\infty} \left[ \sum_{m=0}^M C_m \lambda_m^{(\alpha)}(\sigma; t) \cdot \sum_{n=0}^N C_n \lambda_n^{(\alpha)}(\sigma; t) \right] dt = \int_0^{\infty} \left[ \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N C_m \lambda_m^{(\alpha)}(\sigma; t) C_n \lambda_n^{(\alpha)}(\sigma; t) \right] dt. \quad (4.5)$$

Konštanty vytkneme pred integrál:

$$\int_0^{\infty} \left[ \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N C_m \lambda_m^{(\alpha)}(\sigma; t) C_n \lambda_n^{(\alpha)}(\sigma; t) \right] dt = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N C_m C_n \int_0^{\infty} \lambda_m^{(\alpha)}(\sigma; t) \lambda_n^{(\alpha)}(\sigma; t) dt. \quad (4.6)$$

Teraz využijeme ortonormálnosť zobecnených Laguerrových funkcií. Pre integrál vo výraze 4.6 platí rovnica 1.12, t.j. integrál má hodnotu 1 v prípade, že  $m = n$ , a hodnotu 0 v ostatných prípadoch ( $m \neq n$ ). Využitím tejto vlastnosti z 4.6 dostaneme

$$\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N C_m C_n \cdot \int_0^{\infty} \lambda_m^{(\alpha)}(\sigma; t) \lambda_n^{(\alpha)}(\sigma; t) dt = \sum_{m=0}^M \sum_{m=0}^M C_m C_m. \quad (4.7)$$

Všimneme si, že na pravej strane rovnice index  $n$  bol nahradený indexom  $m$ . To je korektná úprava, pretože rovnica 4.6 má nulovú hodnotu ak neplatí  $m = n$ .

Zo vzťahu 4.7 dostaneme

$$\sum_{m=0}^M \sum_{m=0}^M C_m C_m = \sum_{m=0}^M C_m^2. \quad (4.8)$$

Tým sme obdržali finálny vzťah pre výpočet energie aproximovaného Diracovho impulzu:

$$E = \sum_{m=0}^M C_m^2, \quad (4.9)$$

kde pre Diracov impulz platí  $C_m = \lambda_m^{(\alpha)}(\sigma; T)$ , čo je hodnota zobecnenej Laguerrovej funkcie v bode  $T$ .

V tejto chvíli využijeme substitúciu  $x = \sigma t$ , čo sme používali k odvodeniu vzťahu 1.5. Tentokrát ale vzťah bude vo tvaru  $x = \sigma T$ , pretože vo funkcii  $\lambda_m^{(\alpha)}(\sigma; T)$  sa vyskytuje premenná  $T$  namiesto  $t$ . Dôvodom využitia tejto substitúcie je, aby sme znížili počet premenných a uľahčili ďalšiu prácu s energiou. Rovnica pre zobecnené Laguerrove funkcie vyzerá nasledujúcim spôsobom:

$$\lambda_m^{(\alpha)}(\sigma; T) = \sqrt{\frac{\sigma m!}{\Gamma(m + \alpha + 1)}} \sum_{n=0}^m (-1)^n \binom{m + \alpha}{m - n} \frac{(\sigma T)^{n + \frac{\alpha}{2}}}{n!} e^{-\sigma \frac{T}{2}}.$$

Z tohto vzťahu vidíme, že jedine pod odmocninou sa nachádza parameter  $\sigma$  bez premennej  $T$ . Z toho dôvodu upravíme túto rovnicu:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{\sigma m!}{\Gamma(m + \alpha + 1)}} \sum_{n=0}^m (-1)^n \binom{m + \alpha}{m - n} \frac{(\sigma T)^{n + \frac{\alpha}{2}}}{n!} e^{-\sigma \frac{T}{2}} = \\ & \sqrt{\frac{\sigma T m!}{T \Gamma(m + \alpha + 1)}} \sum_{n=0}^m (-1)^n \binom{m + \alpha}{m - n} \frac{(\sigma T)^{n + \frac{\alpha}{2}}}{n!} e^{-\sigma \frac{T}{2}} = \\ & \sqrt{\frac{1}{T}} \sqrt{\frac{\sigma T m!}{\Gamma(m + \alpha + 1)}} \sum_{n=0}^m (-1)^n \binom{m + \alpha}{m - n} \frac{(\sigma T)^{n + \frac{\alpha}{2}}}{n!} e^{-\sigma \frac{T}{2}}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Teraz už sme schopní využiť substitúciu  $x = \sigma T$  a dostaneme:

$$\lambda_m^{(\alpha)}(\sigma; T) = \sqrt{\frac{1}{T}} \sqrt{\frac{x m!}{\Gamma(m + \alpha + 1)}} \sum_{n=0}^m (-1)^n \binom{m + \alpha}{m - n} \frac{x^{n + \frac{\alpha}{2}}}{n!} e^{-\frac{x}{2}}. \quad (4.11)$$

Pre energiu s využitím rovníc 4.9 a 4.11 dostaneme:

$$E = \frac{1}{T} \sum_{m=0}^M \left\{ \frac{x m!}{\Gamma(m + \alpha + 1)} \left[ \sum_{n=0}^m (-1)^n \binom{m + \alpha}{m - n} \frac{x^{n + \frac{\alpha}{2}}}{n!} e^{-\frac{x}{2}} \right]^2 \right\}. \quad (4.12)$$

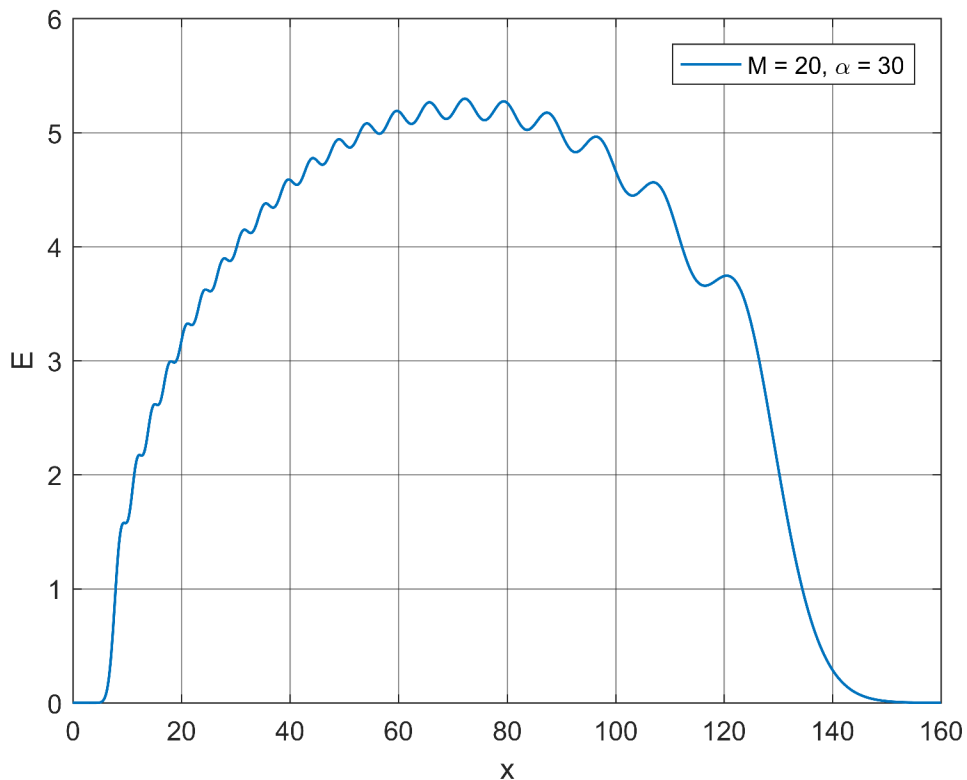
Všimneme si že v rovnici 4.12 sa stále vyskytuje premenná  $T$ . V tejto chvíli môže pripadať zbytočné, že sme využili vyššie spomenutú substitúciu, pretože jeden z nahradených parametrov je stále v odvodenom vzťahu. Premenná  $T$  (dopravné oneskorenie) je ale konštanta. To znamená, že ak vypočítame energiu v závislosti na niektorom parametre, násobenie s  $\frac{1}{T}$  ovplyvňuje len amplitúdu tejto funkcie.

## 4.2 Určenie závislosti energie aproximovaného Diracovho impulzu na parametroch zobecných Laguerrových funkcií

Parametre, na ktorých závisí energia aproximovaného Diracovho impulzu sú  $\alpha$ ,  $x$  a rád aproximácie  $M$ . Najprv ukážeme závislosť energie na  $x$ , ktorú získame pomocou Matlabe. To vidíme na obrázku 4.1. Pretože platí  $x = \sigma T$ , kde  $T$  je konštanta, závislosť na voľnom parametre  $\sigma$  by vyzeral rovnako ako závislosť na  $x$ , akurát s inou mierkou na vodorovnej osi.

Teraz popíšeme niektoré dôležité vlastnosti závislosti energie na parametre  $x$  na obrázku 4.1. Ak sa pozrieme na začiatok priebehu, vidíme, že pre malé  $x$  má nulové hodnoty. To je spôsobené tým, že parameter  $\alpha$  posúva zobecné Laguerrove funkcie a s tým aj výsledné aproximácie doprava na časovej osi. Takže pre malé hodnoty  $x$ , čo má podobný vplyv ako  $\sigma$  (podrobnejšie popísane na začiatku práce),

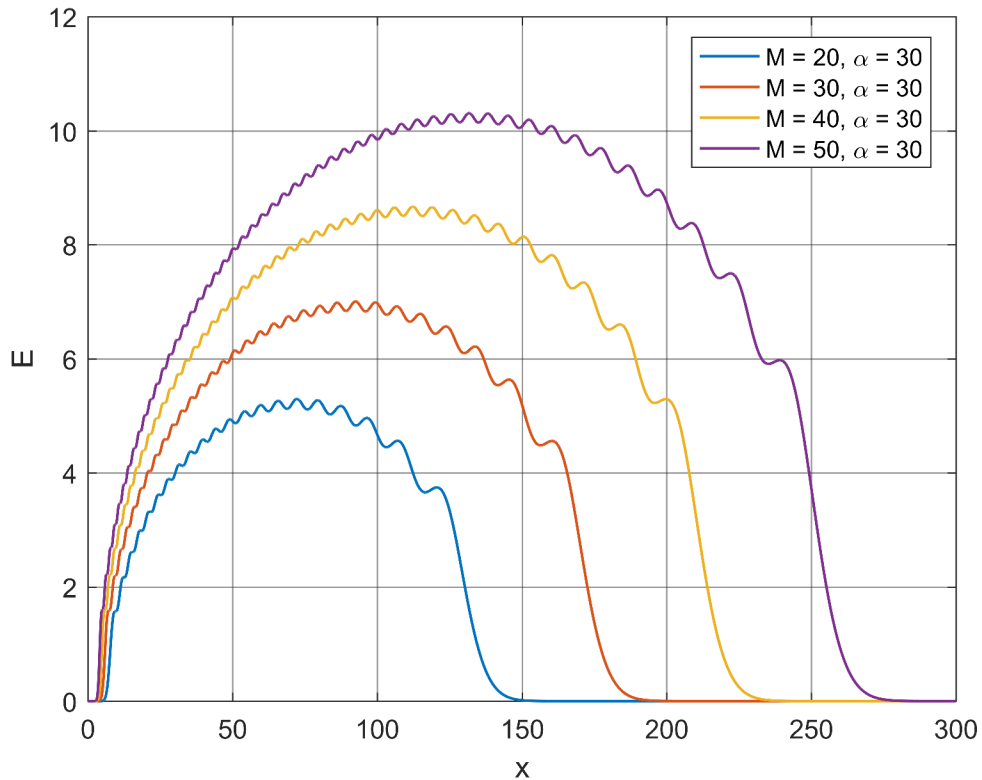
funkcie sa začínajú po bode dopravného oneskorenia. Ďalšia dôležitá časť je koniec priebehu, kde energia má opäť nulové hodnoty. To je naopak spôsobené príliš veľkými hodnotami parametru  $x$ . Zobecnené Laguerrove funkcie v tomto prípade sú príliš stlačené a z toho dôvodu aproximácie konvergujú k nule pred hodnotou dopravného oneskorenia. Posledná dôležitá vlastnosť je vlnovitý priebeh energie. Tvar zobecnenej Laguerrovej funkcie vidíme na obrázku 1.2. Pri sčítaní týchto funkcií sú časové body, kde viac vln má rovnakú fázu. To spôsobí mierne zvýšenie hodnoty aproximácie v týchto bodoch. Ak zmeníme parameter  $\sigma$  (alebo v tomto prípade parameter  $x$ ), zmeníme aj umiestnenie vln v jednotlivých zobecnených Laguerrových funkciách. Tým pádom aj body, kde vlny majú rovnakú fázu budú umiestnené inde. Ak jeden z týchto bodov bude v mieste dopravného oneskorenia (alebo dostatočne blízko), zvýšenie hodnoty výslednej aproximácie bude užitočné a mierne sa zvýši aj energia. To je dôvodom vzniku vlnovitého priebehu na obrázku 4.1.



Obr. 4.1: Energia aproximovaného Diracovho impulzu v závislosti na parametri  $x$ ;  
 $T = 2$

Na ďalšom obrázku (4.2) ukážeme, ako sa zmení priebeh energie v závislosti na parametri  $x$  ak zvýšime rád aproximácie. Dalo sa očakávať, že tvar priebehov pre rôzne hodnoty  $M$  bude podobný. Dôležité ale je, že energie pre vyššie rády majú

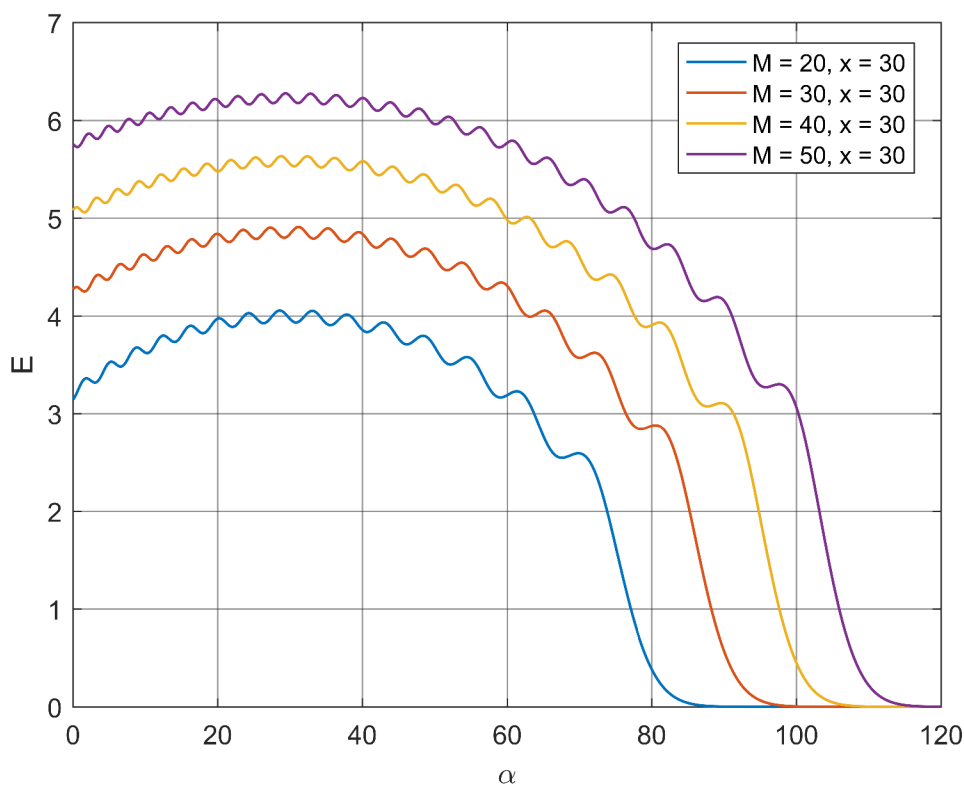
maximá pri vyšších časových hodnôt. Dôvodom je, že počet zobecnených Laguerrových funkcií v aproximáciach je  $M + 1$ . Tým pádom čím väčšiu hodnotu má  $M$ , tým viac funkcií používame, ktorých dĺžka rastie s rastúcim rádom. Z toho dôvodu potrebujeme zvýšiť hodnoty premennej  $x$  (má ten istý vplyv ako parameter  $\sigma$ ), aby sme viacej stlačili tieto funkcie.



Obr. 4.2: Energia aproximovaného Diracovho impulzu v závislosti na parametri  $x$  pre rôzne rády  $M$ ;  $T = 2$

Závislosť energie ukážeme aj na parametri  $\alpha$ , vidíme to na obrázku 4.3 pre rôzne rády  $M$ . Priebehy majú podobný tvar ako v predchádzajúcich prípadoch, odlišnosti vidíme pre malé hodnoty  $\alpha$ . To je spôsobené tým, že pre  $\alpha = 0$  dostaneme jednoduché Laguerrove funkcie, ktoré nie sú posunuté na časovej osi. Tieto funkcie sú vhodné pre aproximáciu (oproti funkciám s malou hodnotou parametru  $x$ ) a z toho dôvodu majú nenulovú energiu. Všimneme si ale, že priebehy na obrázku 4.3 majú maximá pre  $\alpha > 0$ . S tým je opäť potvrdené, že zobecnými Laguerrovými funkciami obdržíme lepšie aproximácie Diracovho impulzu.





Obr. 4.3: Energia aproximovaného Diracovho impulzu v závislosti na parametri  $\alpha$  pre rôzne rády  $M$ ;  $T = 2$

### 4.3 Optimálne voľné parametre pre aproximáciu Diracovho impulzu pomocou energie

V predchádzajúcej časti sme popísali ako závisí energia aproximovaného Diracovho impulzu na voľných parametroch. V tejto podkapitole ukážeme, ako zvoliť ich hodnoty optimálne. Ak sa pozrieme ešte raz na obrázok 4.3, vidíme že maximá priebehov sa nachádzajú približne v bode  $\alpha = 30$ . Určíme hodnotu parametru  $\sigma$  (veľkosť dopravného oneskorenia je  $T = 2$ ,  $x = 30$ ):

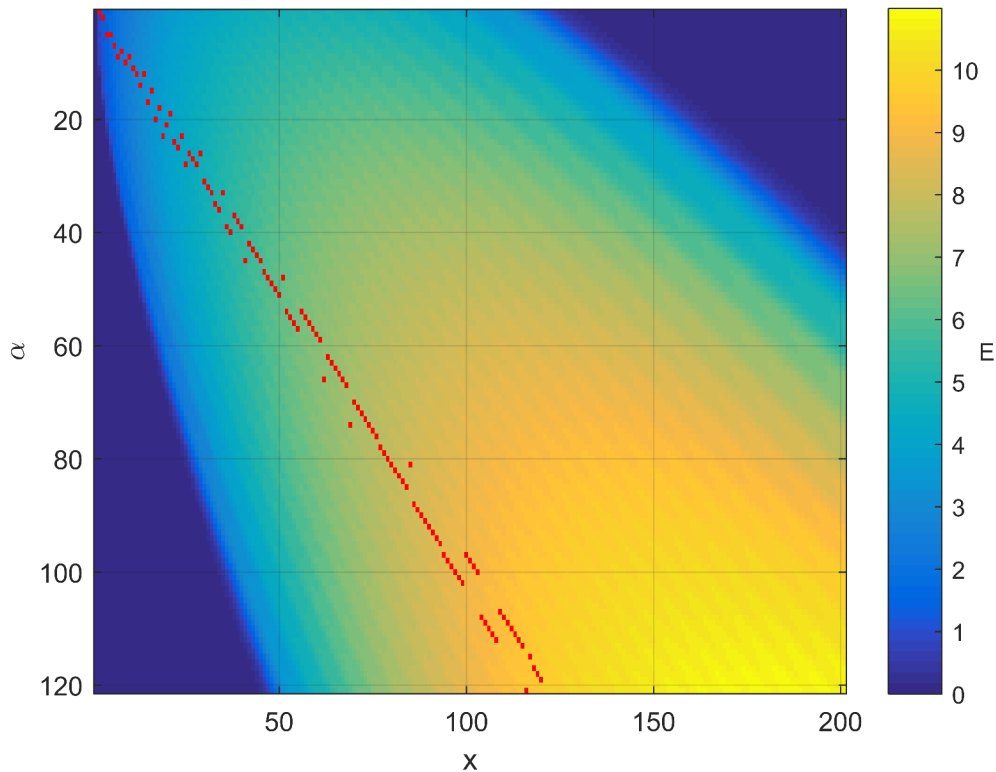
$$x = \sigma T \Rightarrow \sigma = \frac{x}{T} = \frac{30}{2} = 15.$$

Z toho pomer  $\frac{\alpha}{\sigma}$  je

$$\frac{\alpha}{\sigma} = \frac{30}{15} = 2,$$

čo je dopravné oneskorenie, t.j. platí rovnica 3.11. To znamená, že obrázok 4.3 potvrdzuje správnosť odvodených vzťahov v kapitole 3.

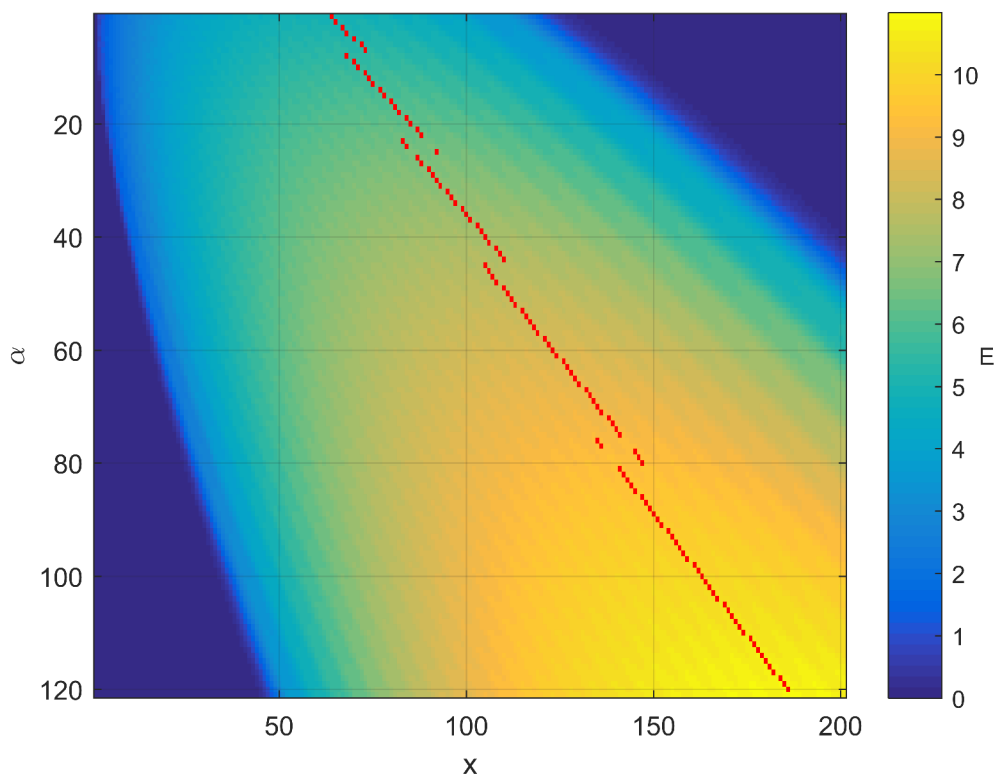
Teraz sa vrátime k obrázku 4.2, kde voľný parameter  $\alpha$  je 30. Podľa vzťahov v kapitole 3 pre optimálnu hodnotu parametra  $x$  by malo platiť  $x = \alpha$ . Vidíme ale, že to tak nie je, priebehy majú maximá pre väčšie hodnoty  $x$ . Pre vysvetlenie uvedieme ďalšie dva obrázky (4.4 a 4.5), kde vidíme závislosť energie na obidvoch voľných parametroch. K ich vytvoreniu sme vygenerovali maticu o rozmeroch  $122 \times 202$ . Táto matica obsahuje hodnoty energie (reprezentované farbami) pre každú kombináciu hodnôt  $\alpha = 0 \div 120$  a  $x = 0 \div 200$ . K výpočtu bola použitá rovnica 4.12.



Obr. 4.4: Maximálne hodnoty energie aproximovaného Diracovho impulzu pre parameter  $x$ ;  $T = 2$ ;  $M = 30$

Na obrázku 4.4 sú vyznačené maximálne hodnoty energie (červené body) ku každej hodnote  $x$ . To je v súlade s kapitolou 3 (a tým pádom aj s literatúrou [8]), pretože maximá sa približne nachádzajú v bodoch, kde  $\alpha = x$  ( $x = \sigma T$ ). Rozptyl je spôsobený vlnovitým priebehom energie a veľkým krokom parametrov  $\alpha$  a  $x$ .

Na obrázku 4.5 je zobrazená tá istá matica ako v predchádzajúcom prípade. Rozdiel spočíva jedine v označených hodnotách, ktoré sú maximálne energie pre každú hodnotu parametra  $\alpha$ . Všimneme si, že červené body na tomto obrázku reprezentujú vyššie energie, ako na obrázku 4.4.



Obr. 4.5: Maximálne hodnoty energie aproximovaného Diracovho impulzu pre parameter  $\alpha$ ;  $T = 2$ ;  $M = 30$

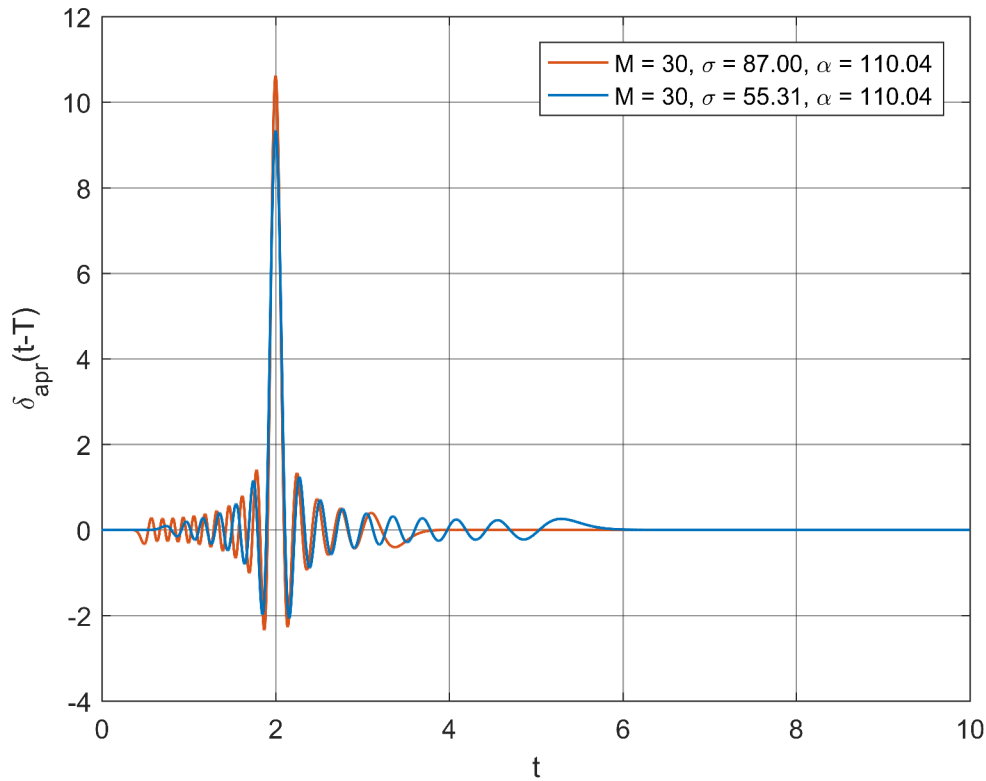
V tejto chvíli vzťahy používané pre nájdenie optimálnych parametrov zobecných Laguerrových funkcií v kapitole 3 môžu pripadať nedostatočné, pretože pre Diracov impulz sme schopní parametre zvoliť lepšie. Je ale dôležité, že všeobecne optimálne hodnoty parametrov  $\alpha$  a  $\sigma$  by boli  $\alpha, \sigma \rightarrow \infty$ . To môžeme vidieť z predchádzajúcich obrázkov, kde veľkosť energie rastie s rastúcimi voľnými parametrami. Nekonečná hodnota voľných parametrov ale samozrejme nie je realizovateľná. Práve z toho dôvodu sa zaoberáme s optimálnymi parametrami v kapitole 3. Už sme spomínali, že obrázok 4.4 je v súlade s tam popísanými vzťahmi. Dôvodom toho je, že pre ľubovoľné  $x$  (alebo  $\sigma$ ) nájdeme optimálne  $\alpha$  podľa rovnice  $\frac{\alpha}{\sigma} = T$  (v inom tvare  $\alpha = x$ ), čo potvrdzuje tento obrázok. V opačnom prípade ale, ak hľadáme optimálne  $\sigma$  (alebo  $x$ ) ku konkrétnej  $\alpha$ , tak existuje lepšia voľba, než to popisujú vzťahy v kapitole 3. Práve to vidíme na obrázku 4.5.

Aproximáciu Diracovho impulzu s parametrami, ktoré sme získali pomocou energie ukážeme aj graficky. To je znázornené na obrázku 4.6 červeným priebehom. Modrý priebeh je aproximácia obdĺžnikovou náhradou pomocou vzťahov z kapitoly 3. Parametre pomocou energie sme získali z matice na obrázku 4.5 nasledujúcim spôsobom. Pre hodnotu  $\alpha$ , ktorý sme obdržali pomocou vzťahov 3.9 a 3.10 sme

našli optimálne  $x$ . Dostali sme hodnotu  $x = 174$  a z toho sme vypočítali  $\sigma$ :

$$x = \sigma T \Rightarrow \sigma = \frac{x}{T} = \frac{174}{2} = 87.$$

Na obrázku 4.6 vidíme, že takto získané parametre dávajú naozaj lepšie výsledky. Tým sme ukázali, že pre  $\alpha$  dokážeme zvoliť  $\sigma$  vhodnejšie, než to udávajú vzorce v kapitole 3. Ak by sme zvýšili rád aproximácie, rozdiel medzi dvoma priebehmi by bol ešte názornejší. To vyplýva z obrázku 4.2, kde je ukázané, že s rastúcim rádom maximálnu energiu obdržíme pre väčšie hodnoty parametra  $x$ .



Obr. 4.6: Optimálne parametre pomocou energie pre rád  $M = 30$ ;  $T = 2$

Ako zhrnutie ešte vysvetlíme, kedy môže byť vyššie popísaný postup pomocou energie pri voľbe voľných parametrov výhodné alebo práve nevýhodné. Na obrázku 4.6 vidíme, že sme našli lepšiu hodnotu parametra  $\sigma$  pomocou energie. Pre toto  $\sigma$  ale sme schopní nájsť lepšie  $\alpha$  ak využijeme vzťah 3.11. Takto by sme mohli postupovať do nekonečna. Postup pomocou energie má ale jednu veľkú výhodu. Pre  $T > 1$  z rovnice  $\frac{\alpha}{\sigma} = T$  vyplýva, že hodnota parametra  $\alpha$  je väčšia, ako parameter  $\sigma$ . Z výpočtového hľadiska sme práve najviac obmedzení voľbou  $\alpha$ . Pomocou energie ale ku každej  $\alpha$  dokážeme nájsť väčšie  $\sigma$  (čo dáva lepšie výsledky), než pomocou rovnice 3.11. Takže ak chceme zistiť najlepšie parametre, pre ktoré ešte sme schopní

vypočítat zobecnené Laguerrove funkcie, vhodná cesta je zvolit parameter  $\alpha$  a pomocou energie získať optimálne  $\sigma$ . Pre  $T < 1$  ale  $\alpha$  bude menšia a obmedziť výpočty môže veľkosť  $\sigma$ . V tomto prípade stačí používať rovnicu 3.11.

## 5 Aproximácia vybraných LTI SISO systémov s dopravným oneskorením pomocou zobecnených Laguerrových funkcií

V predchádzajúcich častiach práce sme ukázali, že zobecnené Laguerrove funkcie sú vhodné pre aproximáciu Diracovho impulzu. V tejto kapitole sa pokúsime aproximovať konkrétne systémy s dopravným oneskorením. Pre vyhodnotenie výsledkov používame kvadratické kritérium v tvare

$$J_k = \frac{\int_0^{\infty} (f(t) - f_{apr}(t))^2 dt}{\int_0^{\infty} f^2(t) dt}, \quad (5.1)$$

čo je ekvivalentné rovnici 3.38. Vo vzťahu 5.1  $f(t)$  je funkcia ktorú aproximujeme,  $f_{apr}(t)$  je jeho aproximácia Laguerrovými funkciami.

### 5.1 Aproximácia vybraných systémov s dopravným oneskorením

Vybrané systémy definujeme ich operátorovým prenosom:

$$F_1(s) = \frac{1}{s+1} e^{-Ts}, \quad (5.2)$$

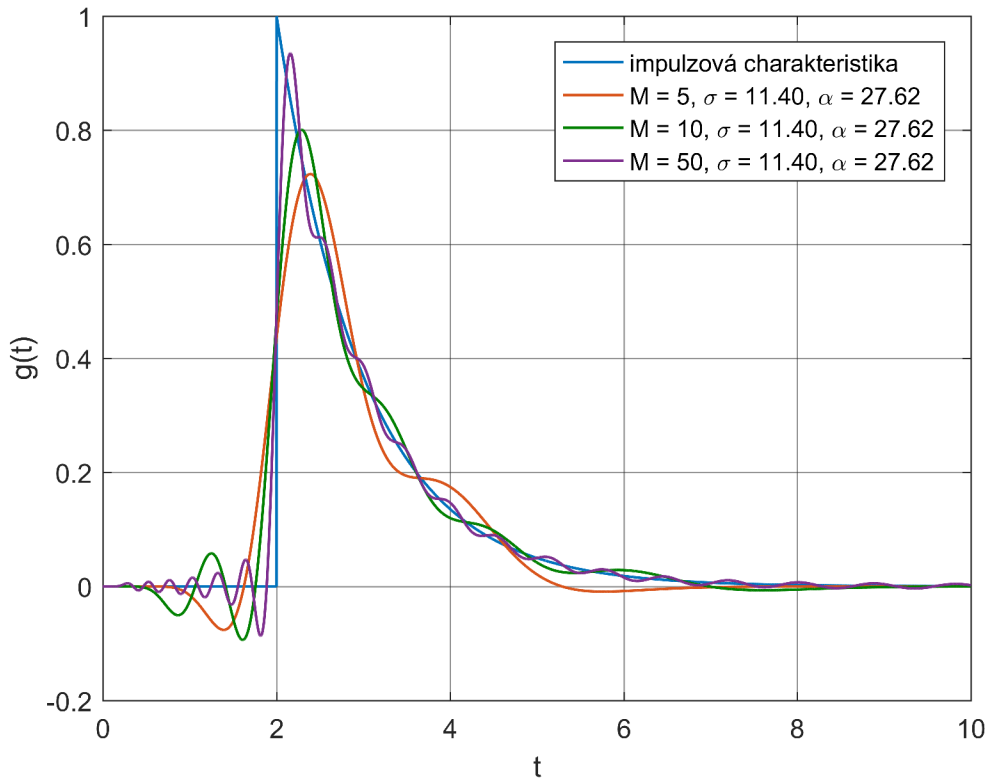
$$F_2(s) = \frac{10s}{(s+1)(s+3)} e^{-Ts}, \quad (5.3)$$

$$F_3(s) = \frac{10s}{\left(s + \frac{1}{2}\right)(s+1)(s+3)(s+4)} e^{-Ts}, \quad (5.4)$$

$$F_4(s) = \frac{1}{s^2 + s + 9,25} e^{-Ts}. \quad (5.5)$$

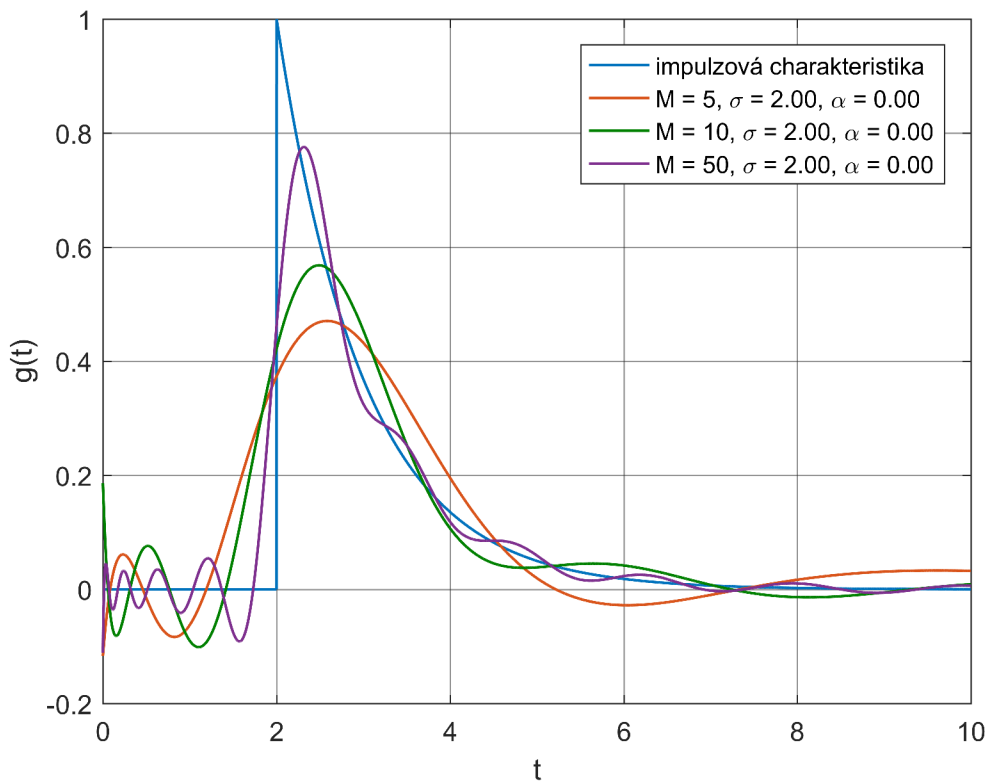
Pre aproximáciu systémov vychádzame zo vzťahu 2.3. Aby sme vedeli používať túto rovnicu, potrebujeme určiť hodnoty parametrov  $\alpha$  a  $\sigma$ . Pretože chceme porovnať aproximácie pomocou jednoduchých a zobecnených Laguerrových funkcií, využijeme vzťah 3.35 pre jednoduché a vzťahy 3.1 a 3.2 pre zobecnené funkcie z kapitoly 3. K tomu potrebujeme určiť momenty  $m_0$ ,  $m_1$ ,  $m_{-1}$  a  $\mu_1$  pre každý systém. Všetky uvedené koeficienty počítame numericky v programovom prostredí Matlab.

Prvý uvedený systém (popísaný rovnicou 5.2) je systém prvého rádu. Výsledné aproximácie sú na obrázkoch 5.1 a 5.2. Vidíme, že zobecnenými Laguerrovými funkciami sme obdržali lepšie výsledky než jednoduchými.

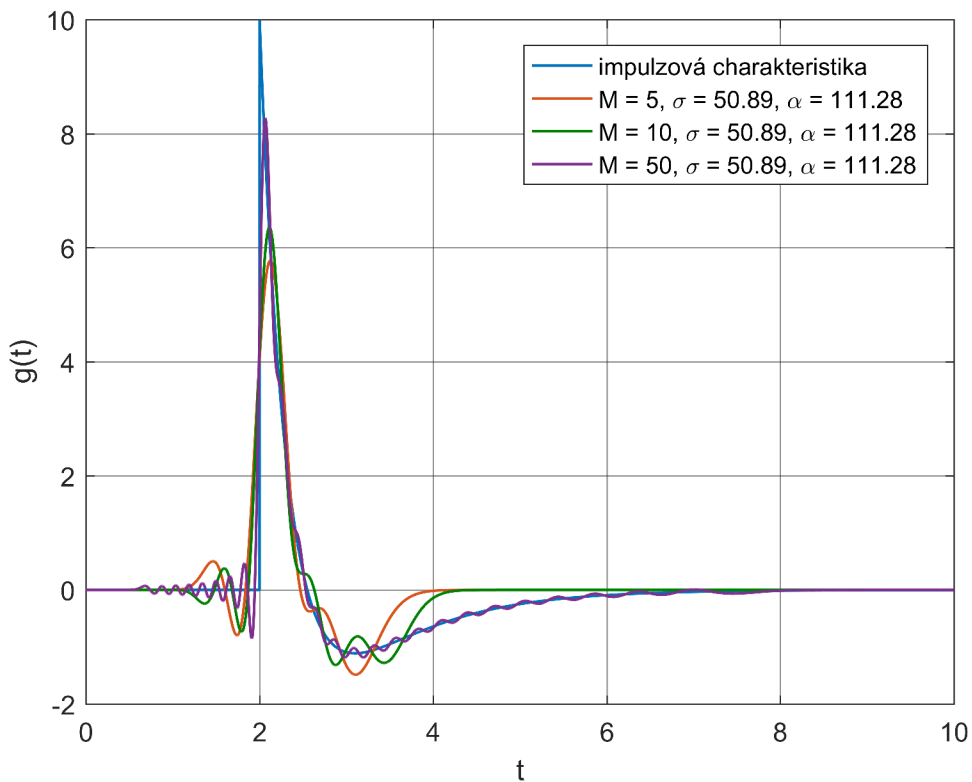


Obr. 5.1: Aproximácia systému prvého rádu zobecnenými Laguerrovými funkciami ( $M = 100, T = 2$ )

Systém popísaný operátorovým prenosom 5.3 je systém druhého rádu. Aproximácie tohto systému sú na ďalších dvoch obrázkoch (obr. 5.3 a obr. 5.4). Vidíme, že sme dostali horšie výsledky ako v predchádzajúcom prípade. To je spôsobené tým, že impulzová charakteristika systému v bode dopravného oneskorenia prudko narastie, po dosiahnutí maxima naopak prudko klesá. Zhoršenie aproximácií vidíme hlavne v prípade jednoduchých Laguerrových funkcií, zobecnené funkcie opäť dávajú lepšie výsledky.

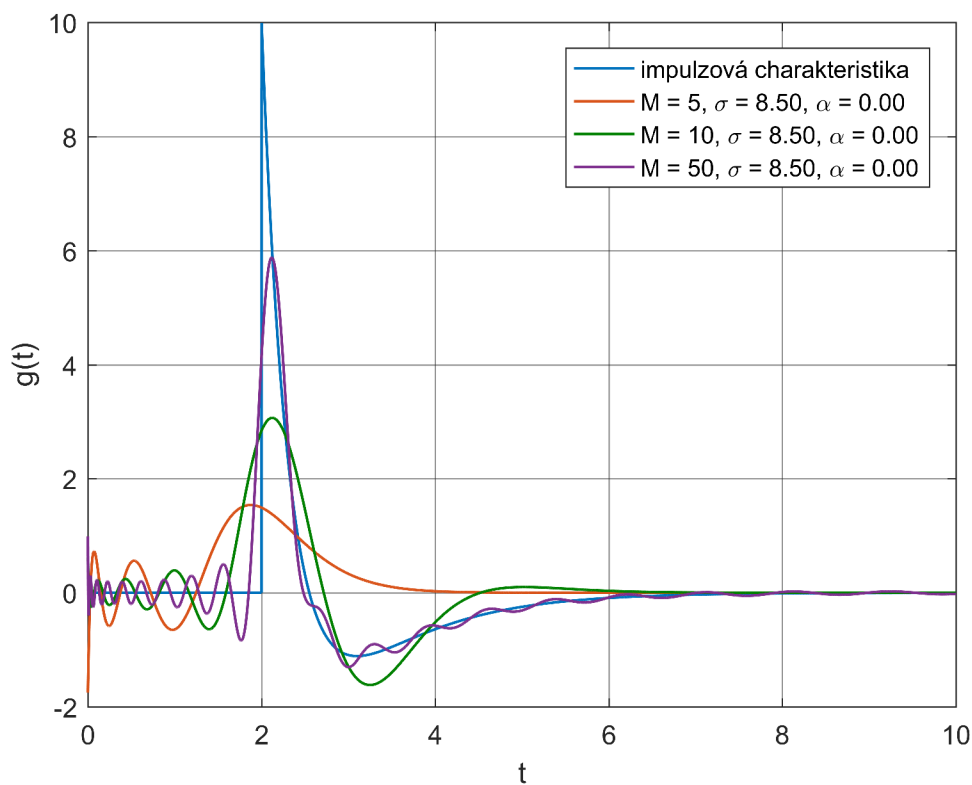


Obr. 5.2: Aproximácia systému prvého rádu jednoduchými Laguerrovými funkciami ( $M = 100; T = 2$ )



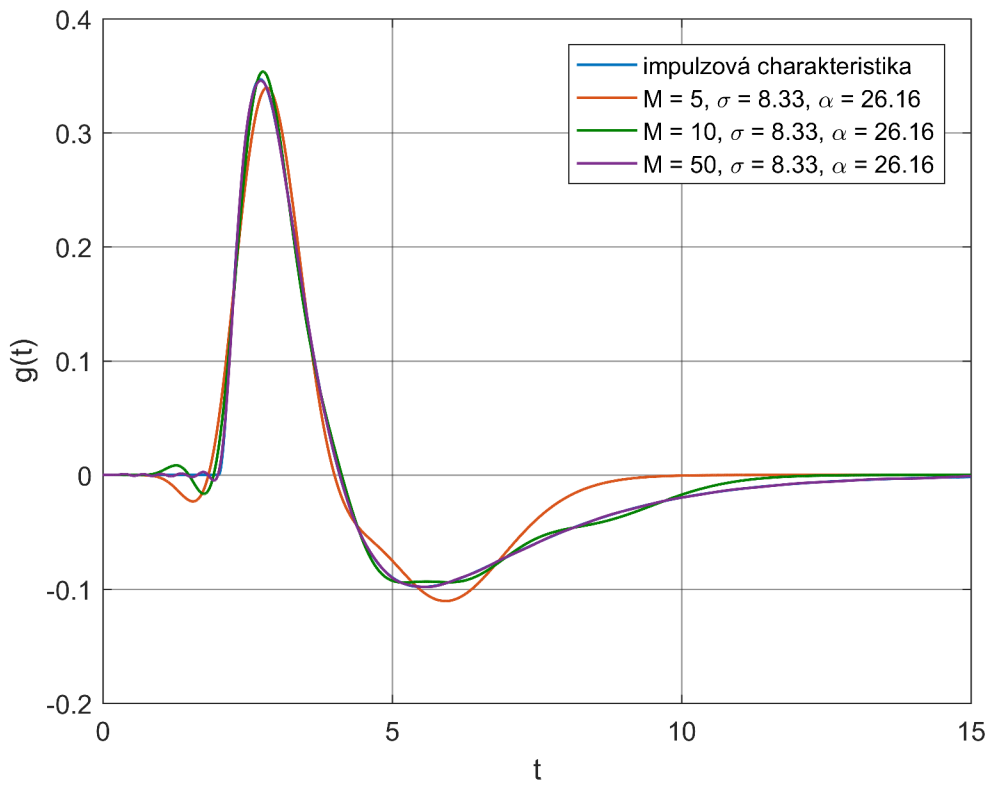
Obr. 5.3: Aproximácia systému druhého rádu zobecnenými Laguerrovými funkciami ( $M = 100; T = 2$ )



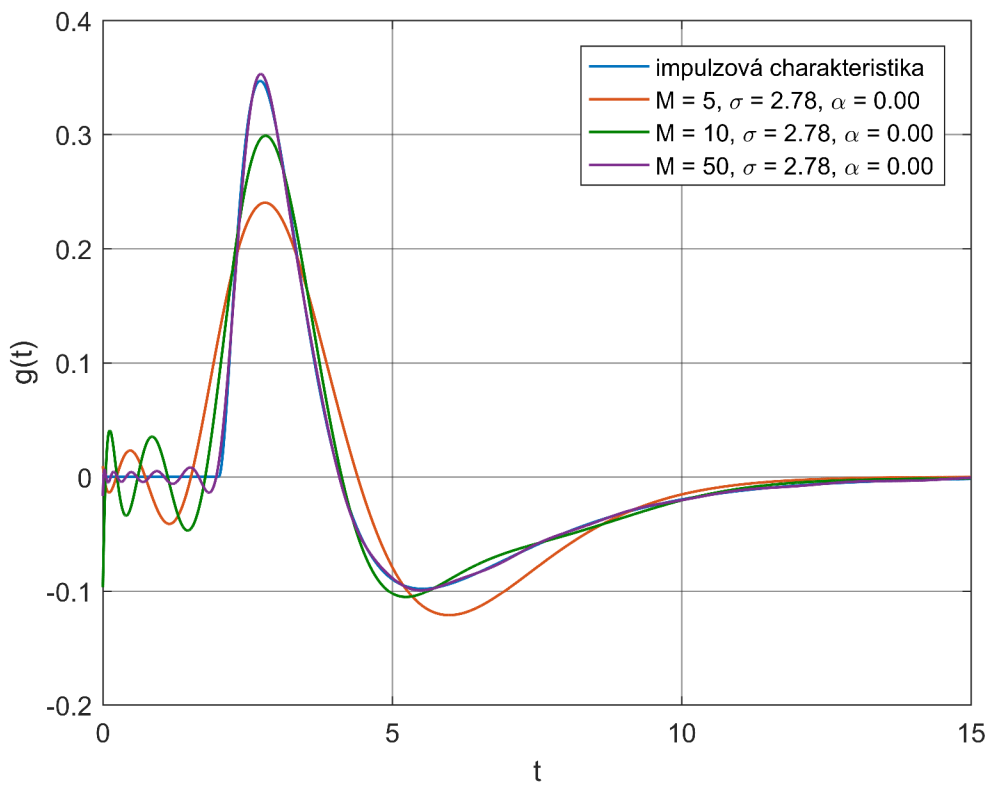


Obr. 5.4: Aproximácia systému druhého rádu jednoduchými Laguerrovými funkciami ( $M = 100$ ;  $T = 2$ )

Tretí uvedený systém je štvrtého rádu. Výsledné aproximácie vidíme na obrázkoch 5.5 a 5.6. Všimneme si, že výsledky pre tento systém sú oveľa lepšie než pre predchádzajúce. To je spôsobené tým, že jeho impulzová charakteristika má hladší priebeh. Tým pádom tento systém je vhodnejší na aproximáciu Laguerrovými funkciami ako predchádzajúce, kde impulzové charakteristiky obsahujú zlomy.

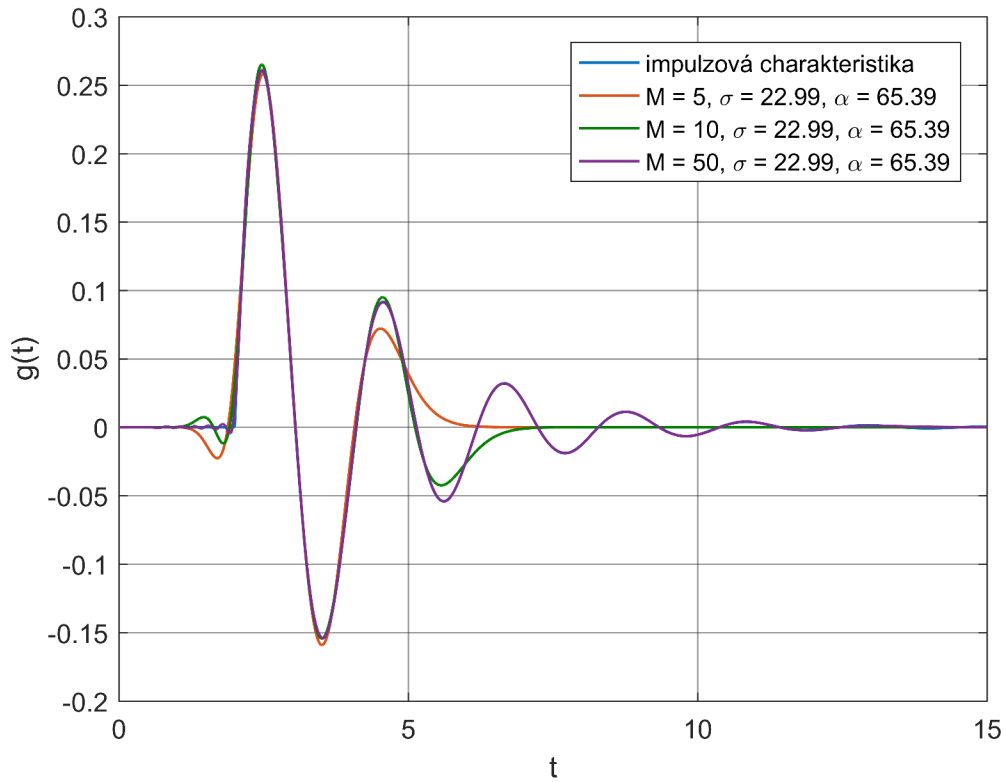


Obr. 5.5: Aproximácia systému štvrtého rádu zobecnenými Laguerrovými funkciami ( $M = 100; T = 2$ )

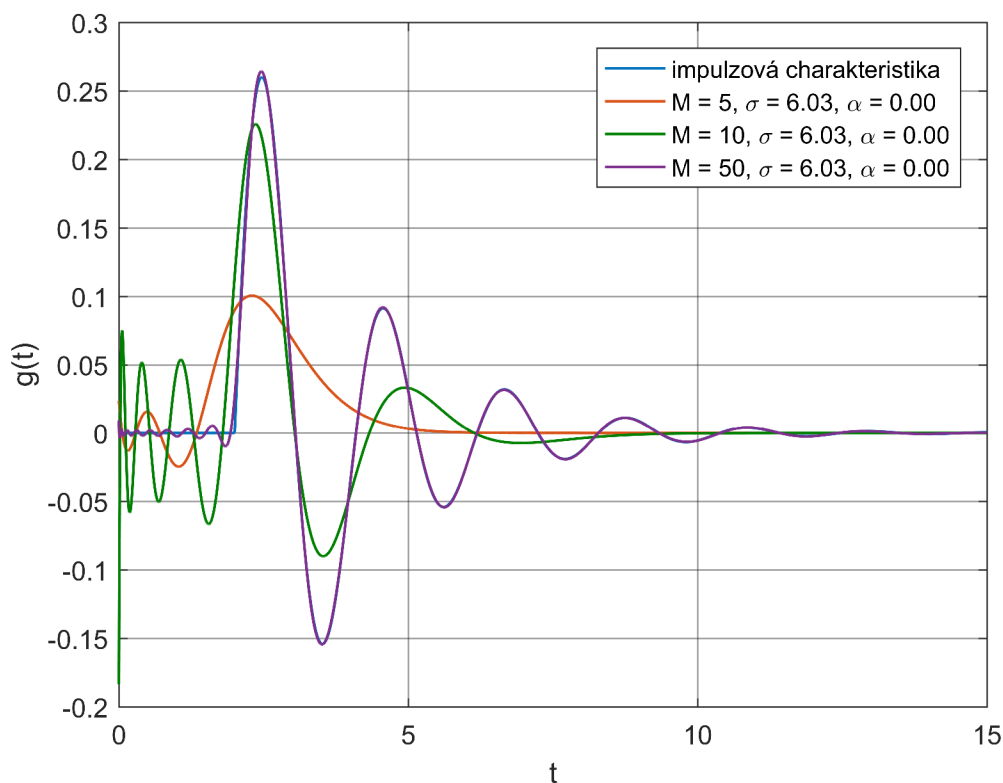


Obr. 5.6: Aproximácia systému štvrtého rádu jednoduchými Laguerrovými funkciami ( $M = 100; T = 2$ )

Štvrtý vybraný systém je systém s komplexnými pólmi. Z toho dôvodu jeho impulzová charakteristika má kmitavý priebeh. Z obrázku 5.8 vidíme, že aproximácia jednoduchými Laguerrovými funkciami pre nízke rády nedá dobré výsledky. Zobecnenými Laguerrovými funkciami ale obdržíme dobré aproximácie pre malé časové hodnoty aj s nízkym rádom.



Obr. 5.7: Aproximácia systému s komplexnými pólmi pomocou zobecnených Laguerrových funkcií ( $M = 100$ ;  $T = 2$ )



Obr. 5.8: Aproximácia systému s komplexnými pólmi pomocou jednoduchých Laguerrových funkcií ( $M = 100$ ;  $T = 2$ )

## 5.2 Vyhodnotenie aproximácií vybraných systémov pomocou kvadratického kritéria

Výsledky kvadratického kritéria pre zobecnené Laguerrove funkcie značíme premenným  $J_{kG}$ , pre jednoduché Laguerrove funkcie  $J_{kS}$ . V nasledujúcej tabuľke vidíme hodnoty získané pre vybrané systémy pomocou vzťahu 5.1.

Tab. 5.1: Výsledky kvadratického kritéria pre vybrané systémy

aproximovaný systém	$J_{kG}$			$J_{kS}$		
	$M = 5$	$M = 10$	$M = 50$	$M = 5$	$M = 10$	$M = 50$
$F_1(s)$	0,1165	0,0789	0,0371	0,2630	0,1906	0,0878
$F_2(s)$	0,2245	0,1757	0,0710	0,8193	0,4442	0,1797
$F_3(s)$	0,0319	0,0044	0,0001	0,1238	0,0409	0,0012
$F_4(s)$	0,0650	0,0231	0,0002	0,7660	0,2840	0,0012

Výsledky kvadratického kritéria potvrdia správnosť predchádzajúcich obrázkov. Zobecnenými Laguerrovými funkciami sme dostali menšie hodnoty pre každú apro-

ximáciu. Najväčšie rozdiely vidíme pre posledné dva systémy, kde jednoduché Laguerrove funkcie dávajú až desaťkrát horšie výsledky. Ďalej si všimneme, že s rastúcim rádom aproximácie sa znižuje veľkosť kritéria v každom prípade. Najlepší výsledok sme dosiahli pre tretí systém, kde zobecnými Laguerrovými funkciami pre  $M = 50$  hodnota kvadratického je  $J_{kG} = 0,01\%$ .

### 5.3 Systémy s nerealizovateľnými optimálnymi parametrami

Doteraz sme ukázali aproximácie zobecnými Laguerrovými funkciami na rôznych systémoch s dopravným oneskorením. K tomu sme potrebovali určiť voľné parametre  $\alpha$  a  $\sigma$ , čo sme robili pomocou rovníc 3.1 a 3.2. Existujú ale systémy, pre ktoré dostaneme príliš veľké hodnoty voľných parametrov pomocou týchto vzťahov. To znamená, že nedokážeme vypočítať zobecné Laguerrove funkcie a nevieme vytvoriť aproximáciu pomocou nich. Pre znázornenie modifikujeme prenos štvrtého systému ( $F_4(s)$ ) tak, že ho vynásobíme premennou  $s$ :

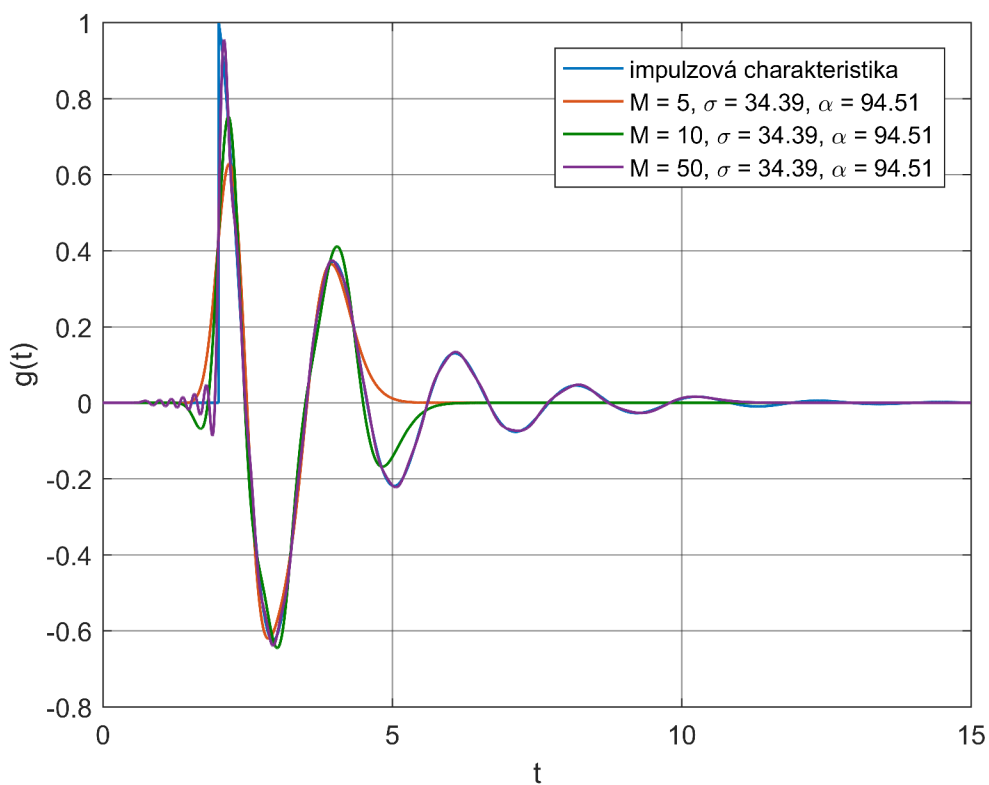
$$F_5(s) = \frac{s}{s^2 + s + 9,25} e^{-Ts}. \quad (5.6)$$

Pre tento systém určíme optimálne parametre pomocou Matlabu. Obdržíme hodnoty  $\hat{\alpha} = 567,05$  a  $\hat{\sigma} = 206,35$  pre ktoré Matlab už nie je schopný vypočítať zobecné Laguerrove funkcie. Tým pádom nedostaneme žiadne výsledky. V takých prípadoch ale môžeme znížiť veľkosť voľných parametrov. Dobrá voľba je znížiť hodnoty premenných  $\hat{\alpha}$  a  $\hat{\sigma}$  tak, aby sme zachovali ich pomer. Veľkosť parametru  $\alpha$ , pre ktorú dokážeme vypočítať zobecné Laguerrove funkcie je pre každý systém iná. Bezpečná voľba je znížiť hodnoty premenných tak, aby platilo  $\alpha < 100$ . V našom prípade vydelíme obidve parametre číslom šesť:

$$\alpha = \frac{567,05}{6} = 94,51,$$

$$\sigma = \frac{206,35}{6} = 34,39.$$

Pre tieto hodnoty už dokážeme pomocou Matlabu určiť aproximáciu systému (obrázok 5.9). Vidíme, že impulzová charakteristika prudko narastie v bode dopravného oneskorenia a po dosiahnutí maxima prudko klesá. Z toho vyplýva, že tento systém je náročné na aproximáciu a to je dôvodom toho, že dostaneme veľké optimálne parametre. Po zmenšení hodnôt  $\hat{\alpha}$  a  $\hat{\sigma}$  ale stále obdržíme dobré výsledky, ako to vidíme na obrázku 5.9.



Obr. 5.9: Aproximácia systému s nerealizovateľnými optimálnymi parametrami pomocou zobecnených Laguerrových funkcií ( $M = 100$ ;  $T = 2$ )

Aj pre tento systém určíme hodnoty kvadratického kritéria. Výsledky sú v tabuľke 5.2.

Tab. 5.2: Výsledky kvadratického kritéria pre systém s nerealizovateľnými optimálnymi parametrami

aproximovaný systém	$J_{kG}$		
	$M = 5$	$M = 10$	$M = 50$
$F_5(s)$	0,1725	0,0992	0,0222

Vidíme, že získané hodnoty sú dobré na to, že vypočítané optimálne parametre boli modifikované. Pre rád 50 sme dostali výsledok  $J_{kG} = 2,22\%$ , čo je lepšie, ako v prípade niektorých systémov z tabuľky 5.1

## 6 Záver

Hlavným cieľom diplomovej práce bolo ukázať možnosti aproximácie systémov s dopravným oneskorením pomocou zobecnených Laguerrových funkcií.

Na začiatku práce sú popísané zobecnené Laguerrove funkcie a vplyv voľných parametrov  $\alpha$  a  $\sigma$  na ich chovanie. Táto časť obsahuje aj overenie toho, že v Matlabe generované funkcie sú ortonormálne.

Ďalšia kapitola sa zaoberá aproximáciou impulzovej charakteristiky ideálneho systému. Sú odvodené potrebné vzťahy a je popísaný vplyv voľných parametrov na výsledné aproximácie.

Tretia časť práce sa zaoberá optimálnymi hodnotami voľných parametrov. Sú prezentované dve náhrady Diracovho impulzu, pre ktoré sú analyticky odvodené potrebné vzťahy. Je dokázané, že v prípade zobecnených Laguerrových funkcií pomer optimálnych parametrov je  $\frac{\hat{\alpha}}{\sigma} = T$ . Výsledné aproximácie sú prezentované graficky. V tejto časti sú odvodené vzťahy k nájdeniu vhodnej hodnoty parametra  $\sigma$  pre jednoduché Laguerrove funkcie. Výsledky sú opäť ukázané graficky a porovnané so zobecnenými Laguerrovými funkciami.

V ďalšej kapitole sú číselne vyhodnotené aproximácie Diracovho impulzu. Pre tento účel je zvolená energia, pretože kvôli špeciálnym vlastnostiam Diracovho impulzu klasické numerické kritéria nemôžeme aplikovať. Je ukázané, že v niektorých prípadoch dokážeme vylepšiť aproximácie získané pomocou odvodených vzťahov.

Posledná časť práce obsahuje vybrané LTI SISO systémy, na ktorých sú porovnané aproximácie jednoduchými a zobecnenými Laguerrovými funkciami. Na vyhodnotenie je použité kvadratické kritérium. Aj týmto kritériom, aj grafickými ukázkami je overené, že aproximácie zobecnenými Laguerrovými funkciami dávajú lepšie výsledky.

# Literatúra

- [1] BELT H. J. W., BRINKER A. C. den: *Optimal parametrization of truncated generalized Laguerre series*. IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1997. DOI: 10.1109/icassp. 1997 . 604708.
- [2] ZSITVA, N. Možnosti aproximace dopravního zpoždění zobecněnými Laguerrovými funkcemi. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, 2016. 44 s. Vedoucí bakalářské práce prof. Ing. Pavel Jura, CSc..
- [3] PARAND K., TAGHAVI A., SHAHINI M.: *Comparison Between Rational Chebyshev and Modified Generalized Laguerre Functions Pseudospectral Methods for Solving Lane–Emden and Unsteady Gas Equations*. Shahid Beheshti University, Tehran, Iran, 2009.
- [4] SHEN J.: *Stable and Efficient Spectral Methods in Unbounded Domains Using Laguerre Functions*. Department of Mathematics, Penn State University, University Park, PA 16802, 2000.
- [5] REKTORYS K. a spolupracovníci: *Přehled užití matematiky*. 7. vyd. Praha: Prometheus, 2000. ISBN: 978-807-1961-796.
- [6] FISCHER B.R., MEDVEDEV A.: *L2 Time Delay Estimation by Means of Laguerre Functions*. Lulea University of Technology, S-97187 Lulea, Sweden, 1999.
- [7] JURA P.: Signály a systémy, část 1: *Spojité signály*. Skriptum VUT, druhé opravené vydání, Brno, 2010.
- [8] BELT H. J. W., BRINKER A. C. den: *Optimal free parameters in orthonormal approximations*. IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 46, No. 8, 1998. 1053-587X(98)05216-7.
- [9] PARKS T. W.: *Choice of Time Scale in Laguerre Approximations Using Signal Measurements*. IEEE Transactions on Automatic Control, October, 1971.



# Zoznam symbolov, veličín a skratiek

<b>LTI SISO</b>	lineárne časovo invariantné systémy s jedným vstupom a výstupom - Linear Time-Invariant Single Input Single Output Systems
$l_m^{(\alpha)}(x)$	zobecnený Laguerrov polynóm rádu $m$
$\mathbb{R}^+$	množina kladných reálnych čísel
$\Gamma(n)$	gama funkcia
$\lambda_m^{(\alpha)}(\sigma; t)$	zobecnená Laguerrova funkcia rádu $m$
$\langle f(t), g(t) \rangle$	skalárny súčin funkcií $f(t)$ a $g(t)$
$ f(t) $	absolútna hodnota funkcie $f(t)$
$\delta(t)$	Diracov impulz
$H(t)$	jednotkový skok (Heavisideova funkcia)
$\hat{\alpha}, \hat{\sigma}$	optimálne hodnoty parametrov $\alpha$ a $\sigma$ pre zobecnené Laguerrove funkcie
$(a; b)$	otvorený interval
$[a, b]$	uzatvorený interval

# Zoznam príloh

A Obsah priloženého CD

74

# A Obsah priloženého CD

Zoznam súborov na CD:

- Diplomová práca vo formáte PDF.
- V zložke Matlab sa nachádzajú nasledujúce súbory:
  - calcLag.m - Funkcia pre výpočet zobecnených a jednoduchých Laguerrových funkcií.
  - LagFunkcie.m - Vykreslenie zobecnených Laguerrových funkcií pre nízke rády.
  - OrthMatrix.m - Výpočet matice ortogonalít pre zobecnené Laguerrove funkcie.
  - dirac\_M\_compare.m - Porovnanie aproximácií Diracovho impulzu a vykreslenie zobecnených Laguerrových funkcií pre rôzne rády .
  - dirac\_alfa\_compare.m - Porovnanie aproximácií Diracovho impulzu a vykreslenie zobecnených Laguerrových funkcií pre rôzne hodnoty parametru  $\alpha$ .
  - dirac\_sigma\_compare.m - Porovnanie aproximácií Diracovho impulzu a vykreslenie zobecnených Laguerrových funkcií pre rôzne hodnoty parametru  $\sigma$ .
  - dirac\_T\_compare.m - Porovnanie aproximácií Diracovho impulzu a vykreslenie zobecnených Laguerrových funkcií pre rôzne hodnoty dopravného oneskorenia.
  - dirac\_subs.m - Vykreslenie obrázkov pre obdĺžnikovú a trojuholníkovú náhradu.
  - dirac\_rectangle.m - Aproximácia Diracovho impulzu zobecnenými a jednoduchými Laguerrovými funkciami pomocou obdĺžnikovej náhrady.
  - dirac\_triangle.m - Aproximácia Diracovho impulzu zobecnenými a jednoduchými Laguerrovými funkciami pomocou trojuholníkovej náhrady.
  - energy\_compare.m - Výpočet energie v závislosti na parametroch alfa, x, M. Vykreslenie priebehov.
  - LagWithX.m - Výpočet Laguerrových funkcií s parametrom x v bode T (pre výpočtu energie).
  - energy\_table.m - Vykreslenie energie v závislosti na parametroch alfa a x. Nájdenie optimálnych parametrov pomocou energie.
  - optParameters.m - Numerický výpočet momentov pre optimálne parametre  $\hat{\alpha}$  a  $\hat{\sigma}$  pre zadaný systém.
  - optimal\_F.m - Aproximácia vybraných systémov zobecnenými a jednoduchými Laguerrovými funkciami.

Všetky súbory boli napísané v programe Matlab R2016b.