UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Čtyř krokový proces řešení matematických a fyzikálních problémů vedoucí na kvadratické rovnice za využití programu Wolfram cloud.

DIPLOMAVÁ PRÁCE

Autor:	**Bc. Zdeněk Maňák**
Studijní program:	D21685
Studijní obor:	Učitelství matematiky pro ZŠ a učitelství fyziky pro SŠ
Forma studia:	Prezenční
Vedoucí práce:	**doc. RNDr. Tomáš Zdráhal, CSc.**
Rok:	2021

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval/a samostatně s vyznačením všech použitých pramenů a spoluautorství. Souhlasím se zveřejněním bakalářské práce podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách, ve znění pozdějších předpisů. Byl/a jsem seznámen/a s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, ve znění pozdějších předpisů.

V Olomouci dne .... *podpis bakaláře*

Poděkování:

Chtěl bych touto cestou poděkovat doc. RNDr. Tomáši Zdráhalovi, CSc. za vedení mé diplomové práce a cenné a hodnotné rady, které mně během psaní této práce dával společně s literaturou.

Bibliografická identifikace

Jméno a příjmení autora	Zdeněk Maňák
Název práce	Čtyř krokový proces řešení matematických a fyzikálních problémů vedoucí na kvadratické rovnice za využití programu Wolfram cloud.
Typ práce	Diplomová
Pracoviště	Katedra matematiky
Vedoucí práce	doc. RNDr. Tomáš Zdráhal, CSc.
Rok obhajoby práce	2023

Abstrakt

Diplomová práce: *„Čtyř krokový proces řešení matematických a fyzikálních problémů vedoucí na kvadratické rovnice za využití programu Wolfram cloud"* se zabývá kvadratickými rovnicemi v matematických a fyzikálních příkladech a jejich možným řešením. Práce je koncipována ve dvou směrech. Prvním z nich je současné ruční počítání, druhým směrem je využití matematických softwarů. S využitím softwarů je svázán koncept logického čtyř-krokového myšlení Conrada Wolframa. Toto myšlení zahrnuje kroky: *Define, Abstract, Compute, Interpret.* Čtyř krokový proces lze použít při řešení různých typů problémů. V práci naleznete různé typy příkladů řešené klasickou (ruční) metodou i za využití softwaru, konkrétně *Wolfram cloud.* Závěrem jsou shrnuty poznatky současné matematiky a pokus o její reformu v oblasti využívání IT v hodinách samotnými žáky.

Klíčová slova	Čtyř krokový proces, definuj, abstrahuj, vypočítej, představ výsledky, kvadratické rovnice, diskriminant, metody řešení, ruční počítání, matematický software
Počet stran	69
Počet příloh	2
Jazyk	Český

Bibliographical identification

Autor's first name and surname	Zdeněk Maňák
Title	Four-step process for solving math and physical problems leading to quadratic equations using the Wolfram cloud program.
Type of thesis	Thesis
Department	Department of mathematic
Supervisor	doc. RNDr. Tomáš Zdráhal, CSc.
The year of presentation	2023

Abstract

The thesis: "A four-step process of solving mathematical and physical problems leading to quadratic equations using Wolfram cloud" deals with quadratic equations in mathematical and physical examples and their possible solutions. The work is conceived in two directions. The first direction describes the currently used hand calculus, the second direction considers the use of a mathematical software. Tied to the use of software is Conrad Wolfram's concept of logical four-step thinking. This includes the following steps: Define, Abstract, Compute and Interpret. This four-step process can be used in solving different types of problems. In this thesis you will find different types of examples solved by A classical (manual) method and when using a software, specifically Wolfram cloud. Finally, the findings of contemporary mathematics and an attempt to reform this subject with a use of it in the classroom by the students themselves are summarized.

Keywords	Four-step process, define, abstract, calculate, present results, quadratic equations, discriminant, solution methods, hand counting, mathematical software
Number of pages	69
Number of appendices	2
Language	Czech

Obsah

Úvod

Nacházíme se v době, kdy by numerické počítání nemělo být vyžadováno. Na tuto skutečnost poukazuje *Conrad Wolfram*, známý britský obchodník a matematický reformátor. Wolfram jako vzdělaný člověk z Cambridge a ředitel technologické společnosti dospěl k názoru, že novodobá výuka matematiky je zastaralá, žáci by lépe využili čas ve škole, kdyby využívali počítač, nebo jiné zařízení pro rozvoj svých matematických schopností a dovedností.

Matematika je krásný jazyk. Je základem vědy, sociálních médií, samořídící techniky, automobilů a zároveň se vkládá do rozhodování o naší správě, dokonce do rozhodování o všem. Můžeme s nadhledem říct, že každému, kdo si vybaví předmět matematiky na ZŠ, vzpomene si na úmorné výpočty, které nikdy nekončí. Narážíme na nové téma, které je tajemné, ba nenáviděné, pro mnohé je mučivé, pro většinu irelevantní, a přesto vyžadované od všech. Je do značné míry nevyužívané v jiných činnostech nebo při rozhodování, s výjimkou kritického měřítka úspěchu a schopností a tím je využití PC v matematice a AI *(Artificial Intelligence)*.

Nabízí se dvě cesty řešení problému a tím je matematiky v reálném světě, matematika jako jeden z nejefektivnějších systémů lidstva pro řešení problémů. Matematika jako abstrakce myšlenkového systému, který je však stále více použitelný v obrovském rozsahu reálných, chaotických lidských problémů a přináší lepší odpovědi než dříve. Ten druhý je reforma matematické vzdělávání, kdyby měla reforma proběhnou celosvětově, protože již teď jsme v situaci, kdy hlavní proud matematiky ve vzdělávání se stává stále více izolující od širokého využití matematiky v reálném světě, přičemž se stále více klade důraz na výsledky a pozdější využití.

Moderní doba vyžaduje moderní postupy, ačkoliv si následují slova budou navzájem odporovat, mají také pravdu. Numerické počítání naučí žáky správnému postupu a budou si moci poradit v jakékoliv situaci, nicméně i mistr tesař se někdy utne. Na druhou stranu, využití technologií zajistí také správné řešení, a to v krátké době, získáme tak čas navíc, který můžeme využít k další práci, pokroku, … Řada firem by reformu matematiky přivítala, neboť by nemusela své budoucí zaměstnance tak velmi školit v oblasti IT. Tito lidé (zatím žáci) by se učili matematiku, která je momentálně aktuální, využívaná ve společnosti a měli by v budoucnu lepší šanci v profesním uplatním. Opak je pravdou, pokud ale nebudou tito lidé schopni sami vykonat nejzákladnější operace, budou schopni dále vynalézat moderní technologie? Na tuto otázku neznáme odpověď, snad na ni časem dokážeme odpovědět.

Je zřejmé, že tento problém není snadné vyřešit, a přesto je v jeho jádru jen jedna příčina *„počítač"*. Kolem tohoto jediného slova, které v mnoha ohledech definuje naši dobu, tak ji můžeme popsat jedinou větou, která vystihuje podstatu tohoto rozdělení matematiky. *"In real world maths, computers do almost all the calculating; by contrast, in educational maths, people do almost all the calculating."* [9] Volně přeloženo: *„V reálné matematice se téměř všechny výpočty provádějí na počítačích, naproti tomu ve školské matematice, ve vzdělávání téměř vše počítají lidé."* Ačkoli je toto tvrzení velmi jednoduché, představuje základní problém, který je jádrem problému dnešní krize matematického vzdělávání. Právě kvůli této problematice se tako práce zabývá jak ručním počítáním, tak využitím softwarů v hodinách matematiky.

Cílem je žákům přiblížit kvadratické rovnice, nahlédnout na průběh této funkce za různých podmínek a odvodit si diskriminant. Následně vyhledat v dostupné literatuře matematické a fyzikální příklady, jejichž zadání bude možné vyřešit jen pomocí kvadratické rovnice. Tyto příklady následně spočítáme klasickou metodou – ručně, následně využijeme matematický software – *Wolfram Cloud* pro ověření výsledků. Ukážeme, že cesta k výsledku není vždy *trnitá,* jak se žákům zdá. Ukážeme si metodu/hodinu matematiky s využitím softwaru. Závěrem budeme formulovat možnou změnu ve výuce matematiky s požadavkem zařazení matematických softwarů do výuky matematiky.

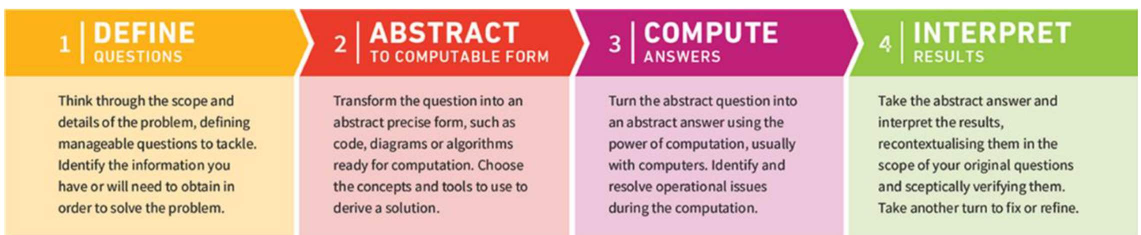
1. The 4-step Maths

Abychom pochopili cíl tohoto procesu, je důležité pochopit současné principy a směr matematiky a vzdělávání obecně.

I'll do this by defining the problem, abstracting it and trying to compute the best conceptual answer that we can slot back into the reality of today's world, hopefully to make progress. Actually, this will loosely follow the very same 4-step problem-solving process that will become familiar as a central backbone of the maths I describe—Define, Abstract, Compute, Interpret— though I will take many detours from this process as we proceed through it. [9] Volně přeloženo: *„Dělám to tak, že definuji problém, abstrahuji ho a snažím se vypočítat nejlepší koncepční odpověď, kterou můžeme zasadit zpět do reality dnešního světa a doufat v pokrok. Vlastně se budeme volně řídit stejným čtyřkrokovým postupem řešení problému, který se stane známým jako ústřední páteř mnou popisované matematiky – Definuj, Abstrahuj, Vypočítej, Interpretuj -, i když se od tohoto postupu v průběhu mnohokrát odchýlím.“*

Obrázek 1: Four steps

Abychom čtyř-krokový proces pochopili, musíme si uvědomit co je matematika, co je její podstata, jak matematiku učíme a jak se díky vývoji výpočetní techniky změnila. Když si uvědomíme, co všechno se v matematice učí: geometrie (obrazce, tělesa, přímky, úhly, …), aritmetika (počítání podle vzorce, výpočet proměnných, …), finanční matematika, … přijdeme na odpověď, že s využitím PC je možné matematiku shrnout do čtyř-krokového procesu řešení problémů. Tento proces se může několikrát opakovat, jednotlivé kroky mohou trvat několik sekund nebo celý život a proces se nemusí vůbec podařit, ale i to se stává. To je základem technologické revoluce posledních 50 let.



Obrázek 2: Four step enlarged

Jak vypadá výpočetní řešení problémů? Zajímavým aspektem z jedné Conradovy přednášky bylo, jak modeloval proces řešení problémů pomocí výpočtů. Ve všech příkladech problémů nastínil, že výpočetní řešení problémů probíhá ve stejném čtyř-krokovém procesu: [10]

- Definujete otázku: Studenti se zamyslí nad rozsahem a podrobnostmi problému a definují otázky, na které lze odpovědět.
- Abstrahují je do vypočitatelné podoby: Na základě poskytnutých informací studenti převedou otázku do přesné abstraktní (matematické) podoby, například do diagramu nebo algoritmu, aby ji mohl vyřešit počítačový program/software.
- Počítání s PC: Pomocí výpočetní techniky studenti vyřeší abstraktní otázku a vyřeší případné problémy během procesu výpočtu.
- Interpretace výsledků: Studenti interpretují a rekontextualizují abstraktní odpověď, aby získali užitečné výsledky. Pokud se objeví problémy, studenti svou práci zpřesní nebo opraví. Celý proces mohou opakovat.

1.1.Define

Nejdříve si definujme otázku, kterou chceme skutečně vyřešit. To, co chceme skutečně řešit? Otázku nebo otázky musíme definovat tak, aby bylo možné podrobit je výpočetnímu postupu? Co potřebujeme předpokládat nebo co nevíme, co by mohlo být rozhodující?

Každé nové téma nebo kapitola v matematice by měla začínat příkladem z reálného života a měla by obsahovat tyto otázky: *Zkuste odhadnout! Najděte nejpravděpodobnější řešení!* Žáci by měli bezprostředně po předčtení zadání začít nad situací přemýšlet a hledat faktory na niž dané zadání staví, tzn. pokládat si doplňují otázky, kterou souvisí s otázkou. Prvním krokem je vyložit všechny důležité předpoklady, kterých jsou si vědomi. Je třeba pracovat s faktory a rozlišovat, které faktory jsou pro danou situaci důležité a které nikoliv. Může se stát, že vyloučíme faktor, a nakonec se ukáže, že byl pro naše výpočty důležitý. Faktory pak pomáhají dojít ke správné odpovědi. Dnešní matematické vzdělávání je špatně nastaveno, klade důraz na nejednotnost, kdy se žáci memorují postupy, místo toho, aby se nad otázkou pozastavili a přišli klidně i s vlastním řešením. Ne, každý naučený postup může vést k výsledku, jediná změna proměnné může žáka natolik rozhodit, že v tu chvíli ztuhne a neví, jak dále postupovat. Není připraven řešit situace, nýbrž opakovat postup stále dokola.

Proto, abychom získali nějakou odpověď prostřednictvím kroku výpočtu, musíme místo memorování žáky připravit na definování a práci s více parametry. I když by se žáci dobrali výsledku, bez postupu, je toto řešení správné? Je to správné z pohledu vzdělávací instituce? Wolfram tvrdí, že ano.

Zjednodušeně: Promyslete rozsah a podrobnosti problému a definujete zvládnutelné dílčí problémy, které je třeba řešit. Určete informace, které máte k dispozici nebo které budete muset získat k vyřešení problému.

1.2.Abstract

Klíčový krok, kdy je potřeba přeložit zadání do abstraktní podoby matematického jazyka, který se týká konkrétního problému, ale který představuje nejlepší nástroje pro jeho řešení. Cílem tohoto kroku je správně položenou otázku (ideálně celé zadání) transformovat do jazyka výpočetní techniky. K nalezení správné odpovědi využijeme dostupné nástroje. Soubor nástrojů pro řešení problémů se s nástupem výkonných počítačů a strojového učení výrazně rozšířil. Conrad Wolfram ve své knize: *The Math(s) Fix* zdůrazňuje, že pro efektivní řešení problémů, a to i těch každodenních, je velmi důležité znát celou řadu praktických sad nástrojů, včetně numerických (ručních) a počítačových technik. Proces abstrakce zahrnuje odstranění kontextu a prosazení přesnosti výpočtu, což dává procesu řešení problémů obrovskou sílu. Abstrakt pojednává o složitosti vztahu mezi používaným jazykem, sadou nástrojů, stylem myšlení a mechanizací výpočtů. Vývoj výpočetní techniky se od 80. let minulého století výrazně vyvinul a rozšířil soubor nástrojů, které jsou k dispozici pro řešení problémů. Zatímco dříve bylo možné řešit problémy jedinou metodou: ruční počítání, nyní je pro zvládnutí rozsahu a složitosti některých výpočtů nezbytná počítačová technika. Strojové učení je ukázkovým příkladem nástroje, který ke své účinnosti vyžaduje výkon moderních počítačů. Uvědomme si, že síla výpočetní techniky není jen v rychlosti výpočtu, ale v možnosti posunout se každým dnem o kus dál. Bez počítačů byla doba, kdy jeden výpočet trval i týden, dneska se maximálně dostáváme řádově do jednotek sekund.

Nicméně i když může být technika použita jak lidmi, tak počítači, může být méně účinná než alternativy využívající pouze počítač. Například návrh křídel letadel se kdysi prováděl pomocí konformního mapování, což byla ruční technika, kterou bylo možné provádět pouze symbolicky. Přestože přinášela působivé výsledky, byla omezena na tvary křídel, které bylo možné konformně mapovat ručně. Jakmile se počítače staly dostatečně výkonnými, začalo se místo toho používat numerické modelování, které umožnilo uvažovat o jakémkoli tvaru křídla. V současné době přinášejí špičkové výsledky hybridní přístupy mezi jednotlivými technikami. Navzdory rozšíření výpočetních nástrojů je moderní matematické vzdělávání stále zaměřeno na ruční počítání. To vede ke zkresleným zkušenostem s abstrakcí, nedochází k rozvoji logického myšlení a celá výuka matematiky je postavena na memorování vzorců a jejich následném použití. Síla abstrakce však spočívá v odstranění kontextu a vynucení

přesnosti, což umožňuje její opakované použití v různých problémech a oblastech. To umožňuje vyvinout malý počet vysoce efektivních systémů, které lze použít ve zcela nových problémech. Tyto systémy lze navíc nyní účinně automatizovat pomocí počítačů.

Abstrakce v praxi má obvykle podobu počítačových programů nebo matematických vzorců. Vztah mezi použitým jazykem, souborem nástrojů, které umožňuje, a stylem myšlení, který podporuje, je velmi složitý. Styl myšlení navíc ovlivňuje i to, do jaké míry je člověk schopen sadu nástrojů použít, jak dobře ji zná a kolik zkušeností a kreativity může při jejím používání uplatnit. Lze potřeba poznamenat, že je potřeba být s nástroji seznámen a znát, jak s nimi zacházet. Pokud si to převedeme do školního procesu, můžeme žáky vždy s učivem seznámit, ukázat si, jak se daný vzorec používá, že se musí dbát na podmínky atd…, a pak můžeme spoléhat, že si žák v případě nouze vzpomene, nebo vyhledá na internetu, protože tu možnost díky IT v matematice má. Jako učitelé posléze vyhodnotíme jeho přístup a řešení. Na jednu stranu je potřeba se řádně připravit, ale na druhou stranu předáme žákům více něž při například počítání ze sbírky.

Abstrakce je při řešení problémů vysoce koncepční a intelektuální proces vyžadující intuici a zkušenosti. Čtyř-krokový proces vyzývá ke změně zaměření základního informatického vzdělávání tak, aby odráželo měnící se soubor nástrojů moderní doby. Tvůrci musí pochopit požadavky moderního přístupu k řešení problémů ve druhém kroku, který musí zahrnovat rozmanitý soubor nástrojů ručních a počítačových technik a zaměřit se na rozvoj intuice a zkušeností s používáním různých jazyků výpočetní abstrakce. Rozvoj výpočetní techniky výrazně rozšířil soubor nástrojů, které jsou k dispozici pro řešení problémů, a moderní matematické vzdělávání se musí zaměřit pouze na počítačové techniky. Síla abstrakce navíc spočívá v její schopnosti zbavit se kontextu a vynutit si přesnost, díky čemuž je možné ji opakovaně použít v různých kontextech a oblastech. Proto je abstrakce při řešení problémů vysoce komplexní proces vyžadující intuici a zkušenost a je třeba jí dnes v základním informatickém a matematickém vzdělávání věnovat více pozornosti.

Zjednodušeně: Převeďte otázku do přesné abstraktní formy, jako je rovnice, diagramy nebo algoritmy připravené k výpočtu. Dále vyberete pojmy a nástroje, které použijete k odvození řešení.

1.3.Compute

Obor matematiky prošel v posledních letech výraznou proměnou. V minulosti byl při výuce matematiky kladen důraz na zvládnutí kroku výpočtu, který spočíval v ručním řešení složitých matematických úloh. S nástupem počítačů se však tento důraz stal zastaralým. V současné době je třeba přesunout důraz matematického vzdělávání z kroku výpočtu na proces informatického myšlení. Je potřeba uvědomovat si, jakým směrem jde sám průmysl a jaké dovednosti a schopnosti se od budoucích zaměstnanců očekávají.

Výpočetní myšlení spočívá v tom, že se abstraktní otázka převede na abstraktní odpověď. Tento krok je klíčový pro řešení složitých problémů v řadě oborů, od strojírenství přes finance až po zdravotnictví. V minulosti bylo pro řešení matematických problémů zásadní umět počítat ručně. Díky mechanizaci lze nyní využívat IT a provádět výpočty během několika sekund, čímž se lidská schopnost počítat stává do značné míry bezpředmětnou, nikoliv nepotřebnou. Pro samotný proces jsme potřební. Dnes je práce při provádění tohoto kroku z velké části o řízení automatizace počítačů, nikoli o provádění vlastních výpočtů. To vyžaduje jiný soubor dovedností, než kdybychom výpočet prováděli sami. Řízení automatizace zahrnuje porozumění technologii, znalost toho, kdy je třeba zasáhnout a kdy je třeba nechat počítač, aby úkon zvládl sám. Výzvou při řízení počítačového dalšího kroku je vědět, kdy zasáhnout a kdy nechat počítač pracovat samostatně. To vyžaduje hlubokou znalost technologie a smysl pro úsudek. Někdy může v důsledku nedostatečného zásahu dojít ke katastrofálnímu selhání, zatímco příliš mnoho zásahů může omezit schopnosti stroje. Jde o křehkou rovnováhu, která vyžaduje vyvážený přístup.

Umět provádět výpočty ručně není jediným řešením. Zaprvé, lidské výpočetní schopnosti jsou ve srovnání s počítači omezené. Za druhé, styly selhání jsou obvykle odlišné, takže znalost lidského postupu nemusí být dostatečná k zachycení chyb počítače. Místo toho se musíme zaměřit na rozvoj lidských dovedností nezbytných pro zvládnutí automatizace výpočtů. Tyto dovednosti zahrnují porozumění technologii, znalost toho, kdy zasáhnout a kdy nechat stroj, aby úkol zvládl. Rozdíl mezi matematickým vzděláním a výpočetní technikou spočívá v požadovaných dovednostech a očekáváních reálného světa. Dnes se musíme zaměřit spíše na výuku dovedností potřebných pro zvládnutí výpočetní automatizace než na zvládnutí kroku výpočtu. To vyžaduje posun v myšlení od tradičního matematického vzdělávání k informatickému myšlení. Musíme studenty naučit, jak přistupovat ke složitým problémům, rozložit je na menší části a vytvořit algoritmy pro jejich jednotlivá řešení. To bude vyžadovat spolupráci mezi pedagogy a odborníky z průmyslu při vytváření učebních osnov, které budou odpovídat potřebám moderní pracovní síly.

Závěrem lze říci, že mechanizace změnila obor matematiky. V současné době je třeba přesunout těžiště výuky matematiky z kroku výpočtu na proces informatického myšlení. Musíme žáky naučit dovednostem potřebným ke zvládnutí automatizace výpočtů, spíše než se zaměřovat na zvládnutí kroku výpočtu. Tím můžeme zajistit, aby naši studenti byli připraveni na výzvy budoucnosti a mohli uspět ve stále se vyvíjejícím světě technologií.

Zjednodušeně: Převést abstraktní otázku na abstraktní odpověď pomocí výpočetní techniky, obvykle pomocí počítačů – softwarů. Identifikovat a vyřešit problémy během výpočtu.

1.4. Interpret

Proces informatického myšlení zahrnuje čtyři kroky: pochopení problému, navržení plánu, provedení plánu a interpretaci výsledků. Čtvrtý krok: *Interpretace*, je nezbytná k zajištění toho, aby odpověď získaná v kroku: *Compute* odpovídala původní otázce a neuváděla řešitele na omyl. Interpretace zahrnuje kladení otázek, například zda lze odpověď pochopit v kontextu původní otázky, zda je rozumnou odpovědí a zda nevyžaduje další upřesnění.

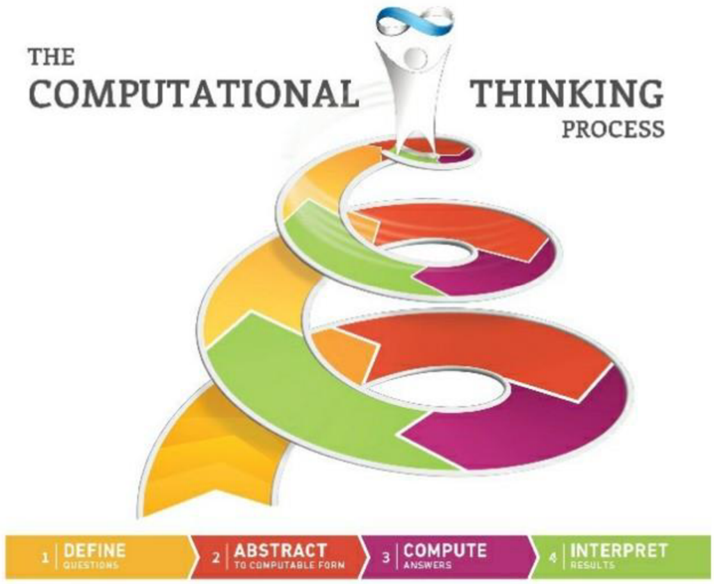
Interpretace výsledků však není vždy jednoduchá a často jsou nutné doplňující otázky nebo upřesnění. V některých případech může být nutné výpočetní proces zopakovat, aby bylo možné získat spolehlivější odpověď. Pro ověření užitečnosti a spolehlivosti získané odpovědi je zásadní mít zkušenosti s tím, co lze očekávat, jaké druhy problémů mohou nastat a kde stojí za to pokusit se získat lepší odpověď. Tato zkušenost je nezbytná pro řešení skutečných, složitých problémů, které vyžadují výpočet, a často se jí v tradičním matematickém vzdělávání nevěnuje pozornost. Jedním z častých omylů při interpretaci výsledků je přesvědčení, že znalost ručních výpočtů je jediným způsobem, jak získat potřebné zkušenosti pro ověření výsledků. I když to může být způsob, jak zlepšit výsledky, je stále vzácnější, že tyto znalosti jsou užitečné, a mohou dokonce bránit lepším rozhodnutím, která by bylo možné učinit pomocí širšího spektra technik. Proto je nezbytné si uvědomit omezení tradičního matematického vzdělávání a prozkoumat alternativní metody získávání potřebných zkušeností pro efektivní interpretaci výsledků.

Interpretace informatického myšlení má zásadní význam pro zajištění toho, aby získaná odpověď byla užitečná a spolehlivá a neuváděla řešitele na omyl. K dosažení tohoto cíle je třeba mít zkušenosti s tím, co lze očekávat, jaké druhy problémů mohou nastat a kde stojí za to pokusit se získat lepší odpověď. Kromě toho je nezbytné si uvědomit, že tradiční matematické vzdělání nemusí poskytnout potřebné dovednosti a znalosti pro účinnou interpretaci výsledků, a je třeba prozkoumat alternativní metody získávání zkušeností. Při dodržování těchto zásad může být informatické myšlení mocným nástrojem pro řešení složitých problémů a přijímání informovaných rozhodnutí.

Zjednodušeně: Vezměte abstraktní odpověď a interpretujte její výsledky, dejte je do kontextu s původními otázkami a skepticky je ověřte. Není-li vaše odpověď dostatečná, ověřte doplňující otázky.

2. Computational Thinking

Computational Thinking neboli výpočetní myšlení pojednává o použití procesu informačního myšlení, který zahrnuje čtyři kroky: *define, abstrakt, compute* a *interpret*. Aby si lidé mohli tento proces lépe pochopit, navrhuje autor Conrad Wolfram představit jej jako šroubovici, přičemž každá rampa představuje jeden ze čtyř kroků. Stoupání a délka spirály závisí na problému, strojích a zkušenostech. U spirálového výpočetního myšlení je však naděje, že se zvedne s uspořádaným spěchem a vyhne se zmatku, i když složitosti mohou způsobit, že nalezení jasné odpovědi bude frustrující. Někdy se může stát, že problém nelze vyřešit pomocí výpočetního myšlení, nebo že jedinec bude muset najít správný přístup či techniku, aby se vyšplhal po výpočetní šroubovici. Tato kapitola celkově zdůrazňuje význam informatického myšlení při řešení problémů a poskytuje užitečné vizuální znázornění tohoto procesu.



Obrázek 3: Computational Thinking

Sám Wolfram zdůrazňuje význam zkušeností při uplatňování procesu informatického myšlení. Tvrdí, že zkušenost se skutečnými, komplexními problémy je klíčem k pochopení toho, jak interpretovat výsledky a určit, kdy proces nefunguje. Zjednodušené, bezkontextové problémy neposkytují potřebnou zkušenost pro zvládnutí tohoto procesu. Pro získání potřebných zkušeností jsou vhodnější spíše komplexní problémy s konceptualizací a interpretační složitostí, jako je návrh webových stránek nebo analýza dat. Wolfram také uvádí, že zaměření procesu závisí na požadovaném výsledku a rozhodnutí, které nemusí být na začátku jasné. Po zdlouhavé cestě práce a sbírání zkušeností dospějeme do stavu kdy zjistíme, že klíčem k úspěchu v oblasti informatického myšlení jsou zkušenosti, které poskytují schopnost orientovat se ve složitosti procesu a správně jej interpretovat. Wolfram naopak tvrdí, že pro získání potřebných zkušeností k přesné interpretaci výsledků je rozhodující průběh celého procesu. Proces informatického myšlení může nutit k jasnějšímu uvažování o hledání cílů a souvisejících složitostech, ale pokud je špatně pochopen, může být interpretována jako informace, které nikdo neporozumí. Je potřeba se vyvarovat zaslepení kvantitativními jistotami nebo výpočetní složitostí a zdůrazňovat důležitost pochopení reálné situace. Wolfram dochází k závěru, že podstatou matematiky je spíše život než výpočet, přičemž matematika je pomíjivým mechanismem okamžiku k dosažení cílů řešení problémů a rozhodování.

Wolfram Conrad se zabývá rozdíly mezi tradiční matematikou a moderním přístupem k řešení problémů pomocí informatického myšlení. Výpočetní myšlení zahrnuje čtyři kroky: definování otázky, abstrakci, výpočet a interpretaci. To jsou podle něj čtyři pilíře, na nichž nestojí jen informatické myšlení a matematika, ale myšlení jako takové. Tento proces může přispět k jasnějšímu uvažování o hledaném cíli a s ním spojených složitostech.

Jedním z klíčových rozdílů mezi tradičním matematickým a informatickým myšlením je analýza nákladů a přínosů mezi čtyřmi kroky procesu. Před příchodem moderních počítačů byl třetí krok – *Compute* – nákladný a prováděl se ručně, takže v krocích *define* a *abstrakt* bylo třeba více uvažovat předem. S rozvojem moderních technologií a nástupem PC se výpočty staly mnohem efektivnějšími, což umožnilo experimentálnější přístup s volnější počáteční otázkou. Toto nové čtyř-krokové informatické myšlení by nemělo být považováno za cíl sám o sobě, ale spíše za mechanismus k dosažení cílů řešení problémů a rozhodování.

Mezi nejcennější rady od Wolframa Conrada patří právě proces informatického myšlení, který zahrnuje výše zmíněné čtyři klíčové kroky: definování problému, abstrakci problému, výpočet řešení a interpretaci výsledků. Je třeba si uvědomit, že zatímco tradiční matematika kladla velký důraz na výpočetní krok, moderní výpočetní technika přesunula důraz na první dva kroky, to nyní umožňuje vědecký a experimentální přístup s méně závislou výchozí otázkou. Pokud se rozhodneme čtyř-krokovým procesem řídit, je třeba dbát na správné pochopení struktury procesu, protože pokud není správně použita a pochopena může dojít různým problémů, z řad dezinformací.

3. Podstata matematiky

Zamysleme se nad otázkami týkajícími se používání nových strojů v matematice, včetně toho, zda splňují požadavky pro učení a zájem žáků. Jejich výhody a nevýhody, jejich potenciální dopad na obor a dovednosti potřebné k jejich efektivnímu používání. Může být obtížné se v těchto otázkách orientovat a určit správný okamžik pro přijetí nových nástrojů, ale pokrok v matematickém výzkumu je rozhodující.

Snad nejdůležitější otázkou této knihy je: *„What is the essence of our core computational subject?“*. Volně přeloženo: *„Co je podstatou našeho klíčového výpočetního předmětu?* Pokud na tuto otázku neodpovíme, nemůžeme očekávat, že nastavíme nové vzdělávání, které bude optimalizovat učení. Jak dnes technologie ovlivňuje proces učení? To, jak dnes vychováváme naše potomky je v této podstatě řízeno MŠMT, řediteli škol a dokumenty jako jsou RVP a ŠVP dané školy. Nicméně nějak podvědomě cítíme, že je potřeba do procesu učení zavést technologie. Protože mimo vzdělávací instituce se v nimi žáci setkávají. Matematika nebo výpočetní myšlení je proces řešení problémů projevuje se opakováním čtyř kroků. Tyto kroky jsme již probrali v předchozí kapitole. Podstatou nebo smyslem matematiky pro každého je řešit problémy tak, abyste mohli dělat lepší rozhodnutí. Tím, že budeme v hodinách matematiky ručně počítat docílíme jen u malé části žáků pochopení. To není špatně. Ale stále přetrvává trend několik hodin ručního počítání, které vede sice k úspěšnému zapamatování postupu, ale pro život je to absolutně nepodstatné. Zamysleme se nad otázkou, zda takový druh výuky dovede (spíše zvládá) připravit žáky na přijímací zkoušky na střední školy?

Již dnes existuje řada programů či aplikací, které mohou výuku obohatit, učitelé si mohou připravit téma tak, že dokonce zaujme žáky. Žáci se stanou obratnými ve využívání IT technologií, a protože změna, budou se i na tyto hodiny těšit. Nemělo by se zapomínat, že už nikdo ve svém zaměstnání ručně nepočítá ale naopak využívá technologie, které mu doba přináší. Zamysleme se na nad reformou školství z pohledu poptávky na trhu práce, toho, jaké přístroje a techniky máme. Budou-li žáci seznáme s technikou dříve nežli v zaměstnání, budeme jako společnost dosahovat větších a lepších výsledků ve zlomcích času, a to povede i k pokroku. Vždyť nás samotné by nebavilo několik let studia, které by nás nepřipravilo na svět, a ještě bychom ve volných chvílích doháněli vědomosti které víme, že budeme potřebovat.

4. Kvadratická funkce

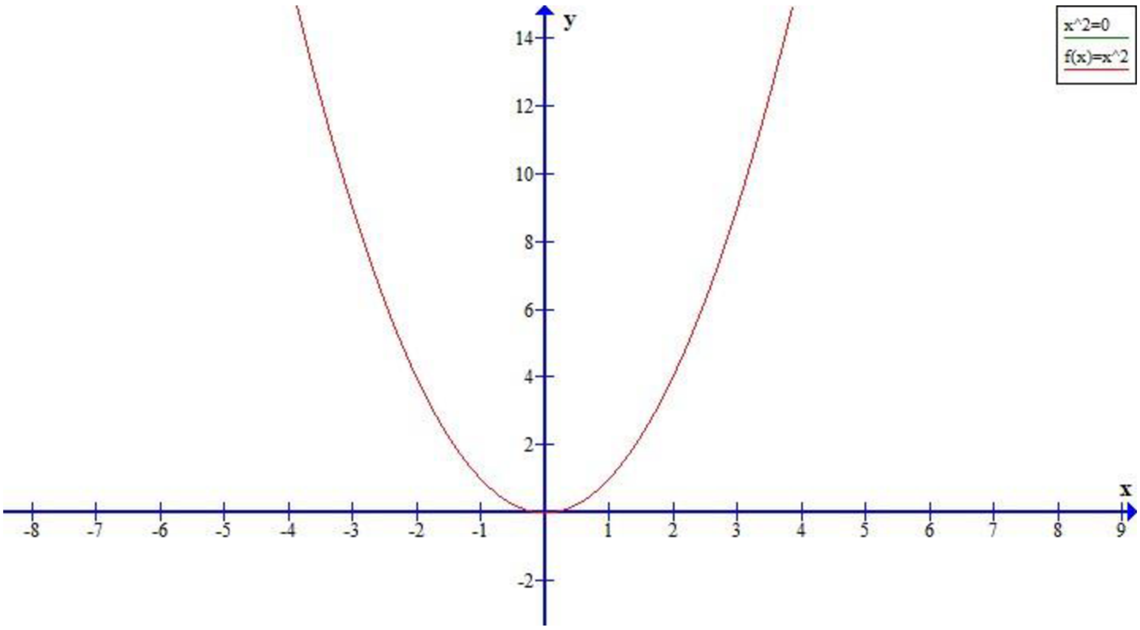
V této kapitole se budeme věnovat rozboru kvadratických funkcí. Rozebereme tvary kvadratické rovnice, její správné znázornění a typy řešení kvadratických rovnic a nerovnic. Mezi metody, které budeme nejčastěji při výpočtech využívat patří diskriminant. Grafy v této kapitole jsou zpracování programem: *Graph*.

4.1.Definice kvadratické funkce

Kvadratickou funkcí je každá funkce, která je ve tvaru:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, D(f) = \mathbb{R}, \text{ kde } a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0.$$

V každé kvadratické funkci jsou dvě proměnné (neznámé). V naší funkci je y závislá proměnná a x nezávislá proměnná. Jak je uvedeno výše, definičním oborem ($D(f)$) jsou reálná čísla, není-li uvedeno jinak. S definičním oborem také souvisí obor hodnot ($H(f)$), který se odvíjí od koeficientů: a, b, c. Grafem kvadratické funkce je parabola. Osa paraboly je rovnoběžná s osou y. Je-li $b, c = 0$, pak je parabola umístěná v počátku souřadného systému.



Obrázek 4: Graf kvadratické funkce

Pro $a > 0$ je pro $x < 0$ funkce klesající a pro $x > 0$ je rostoucí. Tato funkce je zdola omezená (není omezená shora). Analogicky platí, že pro $a < 0$ je funkce rostoucí pro $x < 0$ a klesající pro $x > 0$. Kvadratická funkce, pro kterou platí $a < 0$, je omezená shora a není omezená zdola. Pokud budeme předpokládat, že koeficienty b, c jsou pořád stejné, pak parabola, kde $|a| > 1$ je užší než pro $|a| = 1$ a naopak pro $|a| < 1$ je širší.

4.2.Průběh funkce

Podle obr.č.4 již víme, jak bude graf kvadratické funkce vypadat. Abychom lépe určili parabolu a její okolí využijeme extrémů naší funkce. Z předchozí kapitoly známe definiční obor $D(f)$ i obor hodnot $H(f)$, otevřenost i uzavřenost v závislosti na koeficientu a. Dále je potřeba určit:

a) Limity v nevlastních bodech:

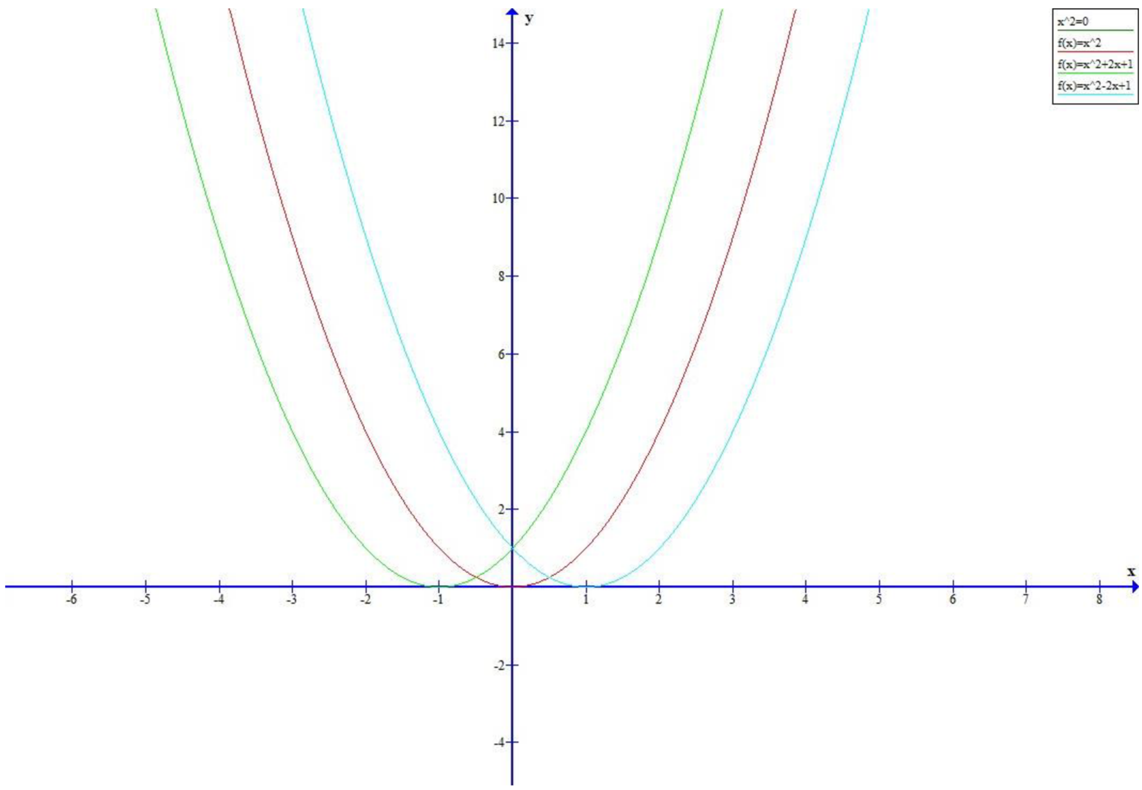
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty, \text{ pro } a > 0$$

Je-li koeficient a záporný, obě limity budou rovno $-\infty$.

b) První derivací a dosazením za $x = 0$ nalezneme bod, kdy je funkce rovna nule. Někdy se hovorově říká: nulový bod.

c) Lokální extrém u paraboly kvadratické rovnice určuje vrchol paraboly. Je-li $a > 0$, pak má funkce minimum. Je-li $a < 0$ pak má funkce maximum.

d) Monotónnost vychází z první derivace funkce a nulového bodu. Dělí funkci na dva intervaly. Pokud $a < 0$ pak parabola rostena na intervale $(-\infty, x_0)$, je-li $a > 0$ pak parabola klesá na intervale (x_0, ∞).



Obrázek 5: Kvadratické funkce závislé na různých parametrech a, b, c

4.3. Tvary kvadratické funkce

Obecný tvar kvadratické rovnice:

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad \text{kde } a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0.$$

ax^2 – je kvadratický člen

bx – lineární člen

c – absolutní člen

a – koeficient kvadratického členu

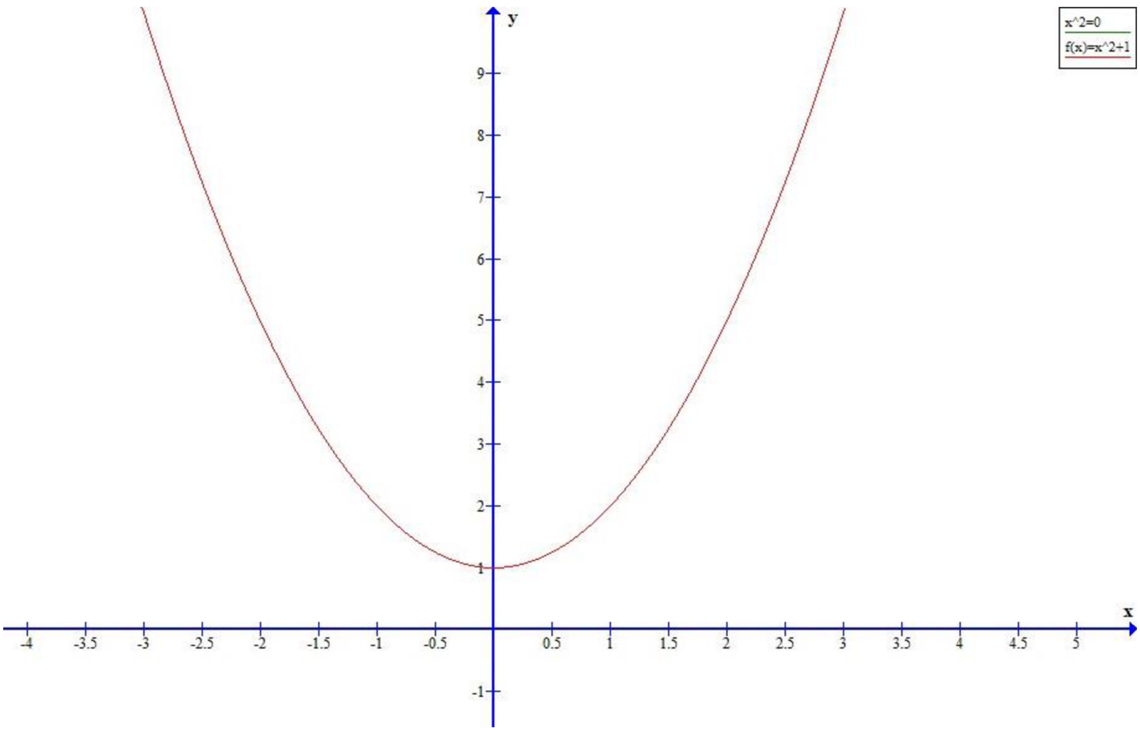
b – koeficient lineárního členu

a) Ryze kvadratická rovnice:

$$ax^2 + c = 0, \qquad \text{kde } a, c \in \mathbb{R}; a \neq 0.$$

Ekvivalentní úpravou (dělením) získáme: $x^2 = \frac{c}{a}$, tento výraz odmocníme a dostaneme výraz: $|x| = \sqrt{-\frac{c}{a}}$, za podmínky že, $\frac{c}{a} \leq 0$, jsou kořeny rovnice:

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \qquad \text{a} \qquad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$



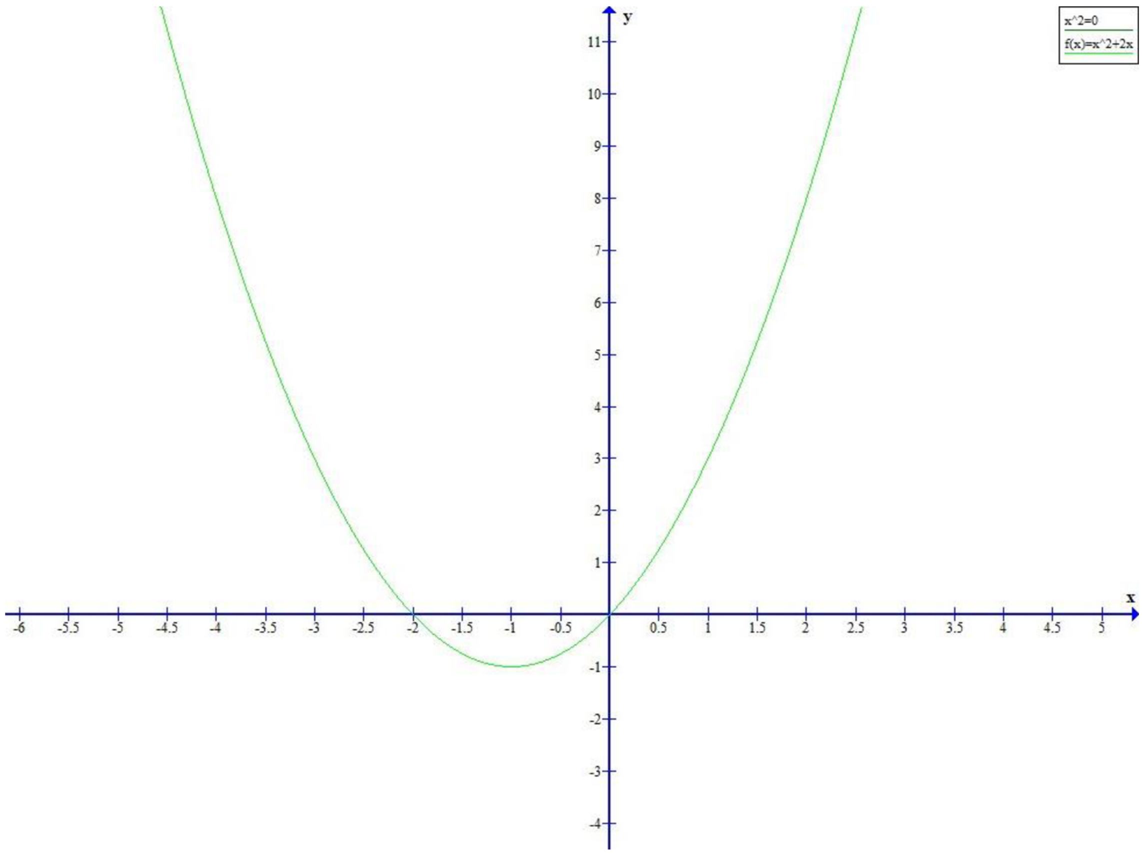
Obrázek 6: Ryze kvadratická rovnice

b) Kvadratická bez absolutního členu:

$$ax^2 + bx = 0, \qquad \text{kde } a, b \in \mathbb{R}; a \neq 0.$$

Rovnici upravíme tak, že vytkneme neznámou x: $x(ax + b) = 0$. Kořeny rovnice jsou:

$$x = 0 \qquad \vee \qquad x = -\frac{b}{a}$$



Obrázek 7: Bez absolutního členu

c) V normovaném tvaru:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0, \qquad \text{kde } a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0.$$

Jde o speciální tvar rovnice, my budeme připisovat $a = 1$. Dostaneme nový vztah ve tvaru:

$$x^2 + px + q = 0, \qquad \text{kde } p = \frac{b}{a}, q = \frac{c}{a}.$$

Mezi kořeny rovnice a koeficienty kvadratické rovnice platí tzv. *Vietovy vzorce:*

$$x_1 + x_2 = -p = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 \cdot x_2 = q = \frac{c}{a},$$

kde x_1, x_2 jsou kořeny kvadratické rovnice.

4.4.Diskriminant

Diskriminant polynomu je výraz, který můžeme vyjádřit pomocí kořenů polynomu (diskriminant n neurčitých) nebo pomocí koeficientů daného polynomu (homogenní polynom vzhledem k těmto koeficientům). Jeho hodnota vypovídá o povaze kořenů polynomu. [8]

Odvození diskriminantu:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{2b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|}\right)^2 = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|}\right) = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Je-li $D > 0$, rovnice má dva kořeny, pokud $D = 0$, rovnice má jeden dvojnásobný kořen, pokud $D < 0$, rovnice má řešení, dva různé imaginární kořeny komplexně sdružené.

5. Výzkumná část

5.1. Metoda klasického řešení – matematické příklady

Příklad č.1: Obdélníková dvojgaráž bungalovu B59 má plochu 60 m^2, jedna její stěna je o 7 m delší než druhá stěna. Ze zadaných údajů urči rozměry stěn garáže?

První stěna … $a = x$

Druhá stěna … $b = x + 7$, $+7$ znamená že je strana delší

Výpočet … $S = a \cdot b = x \cdot (x + 7)$

Dostaneme rovnici:

$$60 = x \cdot (x + 7)$$

$$60 = x^2 + 7x$$

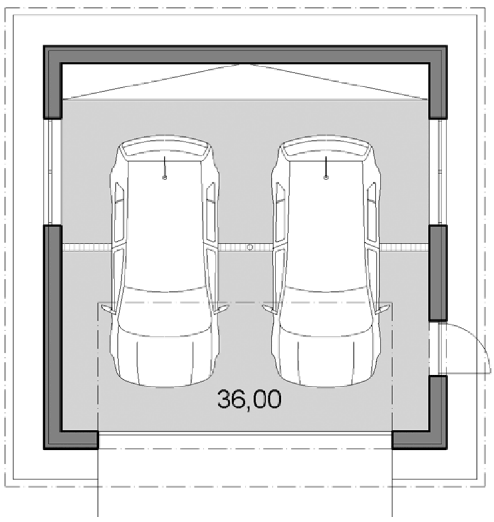
$$x^2 + 7x - 60 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot (-60)}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{-7 \pm 17}{2}.$$

$$x_1 = 5 \text{ m}$$

$$x_2 = -12 \text{ m}$$

Máme-li vypočítat rozměry garáže pak první řešení $x_1 = 5$ m je jediné reálné řešení. Druhé řešení $x_2 = -12$ m také vyhovuje rovnici, ale nejedná se o reálné řešení. Není možné sestrojit/postavit stěnu garáže o délce -12 m.



Obrázek 8: Ilustrativní obrázek garáže

Příklad č. 2: Urči rozměry lichoběžníku víš-li, že jedna základna je o pětinu větší než výška lichoběžníku. Druhá základna je 1 cm větší něž výška. Plocha lichoběžníku je 115 m^2.

První základna	…	$a = v + \frac{1}{5}v = \frac{6}{5}v$
Druhá základna	…	$c = v + 1$
Výška lichoběžníku	…	v
Plocha	…	$S = 115\ \mathrm{m}^2$
Výpočet	…	$S = \frac{(a+c)\cdot v}{2}$

Dostaneme rovnici:

$$S = \frac{(a+c)\cdot v}{2} = \frac{\left(\frac{6}{5}v + (v+1)\right)\cdot v}{2}$$

$$S = \frac{\left(\frac{11}{5}v + 1\right)\cdot v}{2} = \frac{11}{10}v^2 + \frac{1}{2}v$$

$$115 = \frac{11}{10}v^2 + \frac{1}{2}v$$

$$\frac{11}{10}v^2 + \frac{1}{2}v - 115 = 0$$

$$\frac{11}{5}v^2 + v - 230 = 0$$

$$v_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot\frac{11}{5}\cdot(-230)}}{2\cdot\frac{11}{5}} = \frac{-1 \pm \sqrt{2025}}{\frac{22}{5}} = \frac{-1 \pm 45}{\frac{22}{5}}$$

$$v_1 = 10\ \mathrm{m}$$

$$v_2 = -\frac{115}{11}\ \mathrm{m}$$

Máme-li vypočítat rozměry lichoběžníku pak první řešení $v_1 = 10$ m je jediné reálné řešení. Druhé řešení $v_2 = -\frac{115}{11}$ m také vyhovuje rovnici, ale nejedná se o reálné řešení. Není možné sestrojit/postavit výšku lichoběžníku o rozměru $-\frac{115}{11}$ m. rozměry lichoběžníku jsou: $a = 12$ cm, $c = 11$ cm, $v = 10$ cm.

Příklad č.3: Pravoúhlý trojúhelník ABC má přeponu o délce $c = 13$ dm. Určete délku odvěsen trojúhelníku ABC víte-li, že obvod trojúhelníku je 30 dm.

Přepona … $c = 13$ dm

1.odvěsna … $a = x$

2.odvěsna … $b = y$, lze napsat ve tvaru: $y = O - x - 13$

Obvod … $O = 30$ dm

Nejprve musíme ze vzorce pro obvod vyvodit 2.odvěsnu:

$$O = a + b + c = x + y + 13$$

Protože je trojúhelník pravoúhlí platí Pythagorova věta:

$$c^2 = a^2 + b^2 = x^2 + y^2$$

Po sloučení rovnic získáme:

$$c^2 = x^2 + (O - x - 13)^2$$

$$13^2 = x^2 + (30 - x - 13)^2$$

$$13^2 = x^2 + (17 - x)^2$$

$$169 = x^2 + 289 - 34x + x^2$$

$$2x^2 - 34x + 120 = 0$$

$$x^2 - 17x + 60 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \cdot 60}}{2} = \frac{17 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{17 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = 5 \text{ m}$$

$$x_2 = 12 \text{ m}$$

Obě řešení jsou reálná, po dosazené do přepisu: $y = O - x - 13$, zjistíme že:

$$y_1 = 12 \text{ m}$$

$$y_2 = 5 \text{ m}$$

Délky odvěsen pravoúhlého trojúhelníku ABC jsou: $a_1 = 5$ cm; $a_2 = 12$ cm, $b_1 = 12$ cm; $b_2 = 5$ cm.

Příklad č. 4: Cena 1 litru sirupu vzrostla během roku o tolik procent, kolik korun stál litr na začátku roku. Urči původní cenu sirupu, jestliže na konci roku stál 47,25 Kč.

Cena na začátku roku … x Kč

Cena na konci roku … $x\left(1+\frac{x}{100}\right)$ Kč

Cena sirupu na konci roku … 47,25 Kč

$$x\left(1+\frac{x}{100}\right)=47{,}25$$

$$x\left(1+\frac{x}{100}\right)=47{,}25$$

$$x+\frac{x^2}{100}=47{,}25$$

$$100x+x^2=4725$$

$$x^2+100x-4725=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-100\pm\sqrt{100^2-4\cdot(-4725)}}{2}=\frac{-100\pm\sqrt{28900}}{2}=\frac{-100\pm 170}{2}$$

$$x_1=35\text{ Kč}$$

$$x_2=-135\text{ Kč}$$

Obě řešení odpovídají rovnici, ale jen $x_1 = 35$ Kč je jediné reálné řešení, protože při druhém řešení $x_2 = -135$ Kč, není možné, aby cena sirupu byla záporná, protože by to znamenalo, že za koupi sirupu dostane ještě nakupující zaplaceno.

Příklad č. 5: Motocyklista ujede při jízdě po dálnici na 1 litr benzínu o 3 km více než při jízdě ve městě. Při současné jízdě ujel motocyklista 136 km po dálnici a 155 km ve městě a spotřeboval 9 litrů benzínu. Kolik kilometrů ujede motocyklista na 1 litr benzínu ve městě?

Dálnice: 1 l……… $(x + 3)$ km

Město: 1 l……… x km

Musí platit, že počet litrů na dálnici je stejný jako počet litrů ve městě:

$$\frac{136}{x+3} + \frac{155}{x} = 9,$$

rovnici upravíme na tvar:

$$136x + 155(x + 3) = 9x(x + 3)$$

$$136x + 155x + 465 = 9x^2 + 27x$$

$$9x^2 - 264 - 465 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{264 \pm \sqrt{(-264)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-465)}}{2 \cdot 9} = \frac{264 \pm \sqrt{86436}}{18} = \frac{264 \pm 294}{18}$$

$$x_1 = 31 \text{ m}$$

$$x_2 = -\frac{5}{3} \text{ m}$$

Obě řešení splňují platnost rovnice. Motocyklista ujede ve městě na jeden litr benzínu 31 kilometrů.

Příklad č. 6: Máme zjistit, zda existuje mnohoúhelník mající 35 úhlopříček. [7] – příklad č. 20.

Pro počet úhlopříček n-úhelníku platí vzorec:

$$\frac{n(n-3)}{2}.$$

Pokud hledáme n-úhelník mající 35 úhlopříček, pak výše zmíněný vzorec položíme rovno číslu 35. A řešíme rovnici o jedné neznámé.

$$\frac{n(n-3)}{2} = 35$$

$$n(n-3) = 70$$

$$n^2 - 3n = 70$$

$$n^2 - 3n - 70 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-70)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{3 \pm 17}{2}$$

$$x_1 = 10$$

$$x_2 = -7$$

Obě řešení splňují platnost rovnice. Avšak jen první kořen splňuje zadání. Hledaný mnohoúhelník je desetiúhelník. Druhý kořen je záporný, záporné číslo nemůže označovat počet.

Příklad č. 7: Čtverec o straně 10 cm proměňte v obdélník téhož obvodu, jehož obsah je roven 64 % obsahu čtverce. Určete rozměry obdélníka. [7] – příklad č. 20.

$$a = 10 \text{ cm}$$
$$O_č = 40 \text{ cm}$$
$$S_č = 100 \text{ cm}^2$$

$$a = ? \text{ cm}$$
$$b = ? \text{ cm}$$
$$O_o = O_č = 40 \text{ cm}$$
$$S_o = 64\%\, S_č$$

Je-li obsah čtverce 100 cm^2pak obsah obdélníku je 64 cm^2. Ze vzorce pro obsah obdélníku si vyjádříme jednu stranu:

$$S_o = a \cdot b \quad => \quad a = \frac{S_o}{b} = \frac{64}{b}$$

Protože obvody obou útvarů jsou stejné, můžeme psát: $O_o = O_č$ a tuto rovnice si můžete rozšířit o vzorec obvodu obdélníka:

$$O_o = O_č = 2 \cdot (a + b) = 40.$$

Do rovnice s obvody dosadíme za neznámou stranu *a* z vyjádření obsahu a vyřešíme rovnici:

$$2 \cdot \left(\frac{64}{b} + b\right) = 40$$
$$\left(\frac{64}{b} + b\right) = 20$$
$$64 + b^2 = 20b$$
$$b^2 - 20b + 64 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (64)}}{2} = \frac{20 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{20 \pm 12}{2}$$

$$x_1 = 16$$
$$x_2 = 4$$

Rozměry obdélníku, který vznikne ze čtverce při zachování obvodu jsou 16 cm a 4 cm.

Příklad č. 8: Určete tři čísla o vzájemném poměru 3 : 4 : 5, jejichž součet čtverců je 1250. [7] – příklad č. 21.

x … dílek

pak lze poměr přepsat do tvaru: $3x : 4x : 5x$. Poměr hledaných čísel je zachován. Nyní si součet čtverců těchto čísel přepíšeme do následujícího tvaru a řešíme rovnici:

$$(3x)^2+(4x)^2+(5x)^2 = 1250$$

$$9x^2+16x^2+25x^2 = 1250$$

$$50x^2 = 1250$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \sqrt{25}$$

$$x = 5$$

Dílek, který zachová poměr je roven číslu pět. Hledaná čísla jsou pak: 15, 20 a 25.

Příklad č. 9: Pravoúhlý trojúhelník mající délku odvěsen v poměru 5 : 12, má přeponu 26 m dlouhou. Jak dlouhé jsou odvěsny? [7] – příklad č. 23.

Vyjdeme z Pythagorovy věty pro pravoúhlý trojúhelník.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Označíme si jeden dílek jak *x*, a zakomponujeme do poměru $5x : 12x$, poměr je stále zachován. Z uvažovaných vztahů sestavíme rovnici:

$$(5x)^2 + (12x)^2 = 26^2$$

$$25x^2 + 144x^2 = 676$$

$$169x^2 = 676$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2$$

Dílek, který zachová poměr je roven číslu dva. Hledané odvěsny pak mají rozměry 10 metrů a 24 metrů.

Příklad č. 10: Čitatel zlomku je o 3 větší než jeho jmenovatel, poměr hodnoty zlomku a jeho převrácené hodnoty je 64 : 25. Který je to zlomek. [7] – příklad č. 30.

Hledaný zlomek bude ve tvaru:

$$\frac{x+3}{x}$$

Hledaný zlomek a jeho převrácenou hodnotu dáme do vzájemného poměru a položíme rovno poměru ze zadání:

$$\frac{\frac{x+3}{x}}{\frac{x}{x+3}} = \frac{64}{25}$$

Řešíme složený zlomek:

$$\frac{(x+3)^2}{x^2} = \frac{64}{25}$$

$$\frac{x^2+6x+9}{x^2} = \frac{64}{25}$$

$$25x^2 + 150x + 225 = 64x^2$$

$$-39x^2 + 150x + 225 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-150 \pm \sqrt{(150)^2 - 4 \cdot 225 \cdot (-39)}}{2 \cdot (-39)} = \frac{-150 \pm \sqrt{57600}}{-78} = \frac{-150 \pm 240}{-78}$$

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = -\frac{15}{13}$$

Hledaný zlomek je ve tvaru:

$$\frac{x+3}{x} = \frac{8}{5}$$

a

$$\frac{x+3}{x} = -\frac{8}{5}.$$

5.2. Metoda klasického řešení – fyzikální příklady

Příklad č.1: Určete výšku, do které je třeba zvednout těleso nad povrch Země, aby se gravitační síla, která na těleso působí, zmenšila dvakrát. Poloměr Země je přibližně 6 400 km. [1] - úloha 120

Na těleso ležící na povrchu zemi působí síla:

$$F_g = G\frac{M_z \cdot m}{R_z^2},$$

kde G je gravitační konstanta, M_z je hmotnost Země, m je hmotnost tělesa, R_z je poloměr Země.

Máme-li těleso zvednou do výšky h, pak síla je funkcí výšky, bude platit:

$$F_g(h) = G\frac{M_z \cdot m}{(R_z + h)^2}.$$

Dále platí:

$$F_g = 2 \cdot F_g(h).$$

Dosadíme za vzorec a vypočteme neznámou výšku h.

$$G\frac{M_z \cdot m}{R_z^2} = 2 \cdot G\frac{M_z \cdot m}{(R_z + h)^2}$$

$$\frac{1}{R_z^2} = \frac{2}{(R_z + h)^2}$$

$$(R_z + h)^2 = 2 \cdot R_z^2$$

$$h^2 + 2R_z h - R_z^2 = 0$$

Využijeme přepis pro kvadratickou rovnici, kde si vyjádříme proměnou h:

$$h_{1,2} = \frac{-2R_z \pm \sqrt{4R_z^2 + 4R_z^2}}{2} = -R_z \pm \sqrt{2}R_z = R_z\left(\pm\sqrt{2} - 1\right).$$

$$h_1 = 2\ 650\ 967\ \mathrm{m}$$

$$h_2 = -15\ 450\ 967\ \mathrm{m}$$

Máme-li těleso zvednout do výšky h, pak existuje jen jedno správné řešení je $h_1 = 2\ 650\ 967\ \mathrm{m}$. Druhý kořen rovnice poztrácí smysl, protože je záporný, tudíž bychom těleso nezvedali.

Příklad č. 2: Těleso bylo vrženo svisle vzhůru počáteční rychlostí 40 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Za jakou dobu se bude nacházet ve výšce a) 60 m, b) 80 m, c) 100 m? Tíhové zrychlení je 10 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$. [1] - úloha 126.

Výšku, do které těleso vystoupá v tíhovém poli je určena vztahem:

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

a) Po dosazení číselných hodnot, kdy těleso vystoupá do výšky $h = 60$ m, dostaneme:

$$60 = 40t - \frac{1}{2} 10 t^2.$$

Upravíme na tvar:

$$12 = 8t - t^2$$

$$t^2 - 8t + 12 = 0$$

Získali jsme kvadratickou rovnici. Využijeme přepis pro kvadratickou rovnici, kde si vyjádříme proměnou t:

$$t_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 12}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$t_1 = 6 \text{ s}$$

$$t_2 = 2 \text{ s}$$

Oba výsledky jsou fyzikálně možné, protože se těleso ve výšce $h = 60$ m nachází ve dvou momentech. Poprvé když letí těleso nahoru a podruhé když těleso padá dolů.

b) Chceme-li zjistit, za jak dlouho těleso vystoupá do výšky $h = 80$ m, postupujeme stejně jako v případu za a). Dosadíme za proměnné a dostaneme:

$$80 = 40t - \frac{1}{2} 10 t^2.$$

Upravíme na tvar:

$$16 = 8t - t^2$$

$$t^2 - 8t + 16 = 0$$

Získali jsem kvadratickou rovnici. Využijeme přepis pro kvadratickou rovnici, kde si vyjádříme proměnou t:

$$t_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 16}}{2} = \frac{8}{2}$$

$$t_{1,2} = 4 \text{ s}$$

Z řešení rovnice vyplívá, že výška $h = 80$ m je maximální (vrchol paraboly), do které může těleso vystoupat za dobu 4 sekund. Proto je varianta c) $h = 100$ m nemožná.

Příklad č. 3: Dva kladné bodové náboje $Q_1 = Q$a $Q_2 = 4Q$ jsou pevně umístěny ve dvou bodech vzdálených od sebe 6 cm. Určete, kde je třeba na přímce spojující oba body umístit třetí kladný bodový náboj Q_0, aby na něj nepůsobila žádná síla. [3] - úloha 8.

Výslednice sil působící na náboj Q_0 má být nulová, tzn. náboj Q_0 se musí bezprostředně nacházet mezi náboji Q_1 a Q_2, a síly působící na náboj Q_0 musí mít stejnou velikost a navzájem opačný směr. Podle Coulombova zákona pro dva nabité náboje platí:

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_0}{x^2},$$

$$F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_2 Q_0}{(d-x)^2}.$$

Síly musí být stejné, aby výsledná síla byla nulová:

$$F_1 = F_2$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_0}{x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_2 Q_0}{(d-x)^2}$$

$$\frac{QQ_0}{x^2} = \frac{4QQ_0}{(d-x)^2}$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{4}{(d-x)^2}$$

$$(d-x)^2 = 4x^2$$

$$d^2 - 2dx - x^2 = 4x^2$$

$$3x^2 + 2dx - d^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2d \pm \sqrt{4d^2 + 4 \cdot 3d^2}}{2 \cdot 3} = \frac{-2d \pm \sqrt{16d^2}}{6} = \frac{-2d \pm 4d}{6}.$$

$$x_1 = \frac{2d}{6} = \frac{d}{3}\ \mathrm{m}$$

$$x_2 = \frac{-6d}{6} = -d\ \mathrm{m}$$

První řešení má zcela správný fyzikální význam, proto je $x_1 = \frac{d}{3}$ jediné správné řešení toho příkladu. Druhý kořen rovnice nám říká, že, kdybychom náboj Q_0 umístili do této vzdálenosti $x_2 = -d$, tak by na náboj Q_1, který by nyní ležel mezi Q_0 a Q_2 nepůsobila žádná síla, výslednice by byla nulová. Jinými slovy, náboj Q_1 by se stal nábojem Q_0.

Příklad č. 4: Ocelovou kuličku pustíme z klidu po hladké nakloněné rovině, na které se pohybuje se zrychlením 0,5 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Potom přejde na vodorovnou dráhu. Celkově ujede dráhu 20 metrů za čas 12 sekund. Jak dlouho se pohybuje po nakloněné rovině? Tření a odpor prostředí zanedbejte. [6] – úloha 110.

Kulička urazí celkovou dráhu $s = 20$ m. Tato dráha je rovna součtu drah (dílčích úseků pohybu), protože během pohybu se mění pohyb zrychlený (po nakloněné rovině s_1) v pohyb rovnoměrný (po rovině s_2).

$$s = s_1 + s_2$$

$$s = \frac{1}{2}at_1^2 + v_2 \cdot t_2$$

Protože, rychlost na konci zrychleného pohybu v_1 je zároveň počáteční rychlost při rovnoměrném pohybu v_2, platí vztah:

$$v_1 = a \cdot t_1 = v_2$$

Ze zadání víme, že celková doba pohybu je t, celkovou dobu si může vyjádřit jako:

$$t = t_1 + t_2 \qquad \rightarrow \qquad t_2 = t - t_1$$

Dosadíme vztahy pro rychlost a celkovou dobu do vzorce pro celkovou dráhu:

$$s = \frac{1}{2}at_1^2 + a \cdot t_1 \cdot (t - t_1)$$

$$s = \frac{1}{2}at_1^2 + att_1 - at_1^2$$

$$s = -\frac{1}{2}at_1^2 + att_1$$

Jediná neznámá v naší rovnici je t_1, doba, po kterou se ocelová kulička pohybuje po nakloněné rovině. Z rovnice nelze přímo vyjádřit člen t_1, protože je v druhé mocnině, proto si rovnici upravíme na tvar kvadratické rovnice:

$$\frac{1}{2}at_1^2 - att_1 + s = 0$$

$$t_1^2 - 2tt_1 + \frac{2s}{a} = 0$$

$$t_{1_{1,2}} = \frac{2t \pm \sqrt{(-2t)^2 + 4 \cdot \left(\frac{2s}{a}\right)^2}}{2} = \frac{2t \pm \sqrt{4t^2 + \frac{16s^2}{a^2}}}{2} =$$

$$t_{1_1} = 20 \text{ s}$$

$$t_{1_2} = 4 \text{ s}$$

Získali jsem dva kořeny, oba kladné, to je při řešení času pozitivní, nicméně i tak musíme ověřit jejich reálnou platnost. Doba $t_{1_1} = 20$ s je pro náš příklad nereálná hodnota, protože doba pohybu po nakloněné rovině nemůže být větší něž celková doba pohybu. Druhé řešení $t_{1_2} = 4$ s je reálné, a odpovídá hodnotě, která spadá do intervalu celkového pohybu ocelové kuličky.

Příklad č. 5: Jan se zdržel v práci a nyní spěchá na autobus. Jan přichází na autobusové nádraží a v tom se dá autobus do pohybu se zrychlením $a = 2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Jan se za autobusem rozbíhá rychlostí $v = 5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, aby stihl autobus. V okamžiku, kdy se autobus rozjede a Jan rozběhne je Jan od autobusu vzdálen $d = 25$ m. Určete, zda Jan autobus dostihne. Pokud ano, v jaké vzdálenosti od nádraží?

Má-li Jan dostihnout autobus, musí urazit vzdálenost mezi ním a autobusem $d = 25$ m, pro Jana bude platit rovnice:

$$s_1 = v \cdot t_1.$$

Protože se autobus rozjíždí se zrychlením $a = 2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, bude vzdálenost mezi ním a autobusem narůstat podle rovnice:

$$s_2 = d + \frac{1}{2}at_2^2.$$

Protože řešíme situaci, kdy se jejich dráhy setkají musí platit:

$$s_1 = s_2$$

$$v \cdot t_1 = d + \frac{1}{2}at_2^2$$

Uvědomíme-li si, že Jan a autobus začínají svůj pohyb ve stejný okamžik, můžeme psát:

$$t_1 = t_2$$

Po přepsaní rovnice pro dráhu dostaneme vztah:

$$v \cdot t = d + \frac{1}{2}at^2$$

$$5t = 25 + t^2$$

$$0 = t^2 - 5t + 25$$

$$t_{1_{1,2}} = \frac{2 \pm \sqrt{(-5)^2 + 4 \cdot 25}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-75}}{2} =$$

Diskriminant nám vyšel záporný: $D < 0$ $(D = -75)$. Záporný diskriminant, nám říká, že příklad nemá řešení. Jan tedy autobus nedostihne.
Na grafu č. 1 (v další kapitole) si zobrazíme rovnice, na kterých si představíme, proč příklad neměl řešení.

Příklad č. 6: Na schodišti výšky 3,6 m by se zvětšil počet stupňů o 3, kdyby se výška každého stupně zmenšila o 4 cm. Kolik stupňů má schodiště? [7] – příklad 22.

Celková výška schodiště 3,6 m je dána jako součin počtu schodů n a výšky jednoho schodu v. Platí vztah:

$$n \cdot v = 3{,}6 \text{ m}$$

Zmenší-li se výška schodu a celková výška schodiště má být zachována, pak se zvýší počet stupňů o 3. Můžeme psát:

$$(n + 3) \cdot (v - 0{,}04) = 3{,}6 \text{ m}$$

Máme k dispozici dvě rovnice o dvou neznámých. Z první si vyjádříme n a dosadíme do druhé rovnice. Řešení je pak:

$$\left(\frac{3{,}6}{v} + 3\right) \cdot (v - 0{,}04) = 3{,}6$$

$$3{,}6 - \frac{0{,}144}{v} + 3v - 0{,}12 = 3{,}6$$

$$3{,}6v - 0{,}144 + 3v^2 - 0{,}12v = 3{,}6v$$

$$3v^2 - 0{,}12v - 0{,}144 = 0$$

$$v_{1,2} = \frac{0{,}12 \pm \sqrt{(0{,}12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-0{,}144)}}{2 \cdot 3} = \frac{0{,}12 \pm \sqrt{1{,}7424}}{6} = \frac{0{,}12 \pm 1{,}32}{6}$$

$$v_1 = 0{,}24 \text{ m}$$

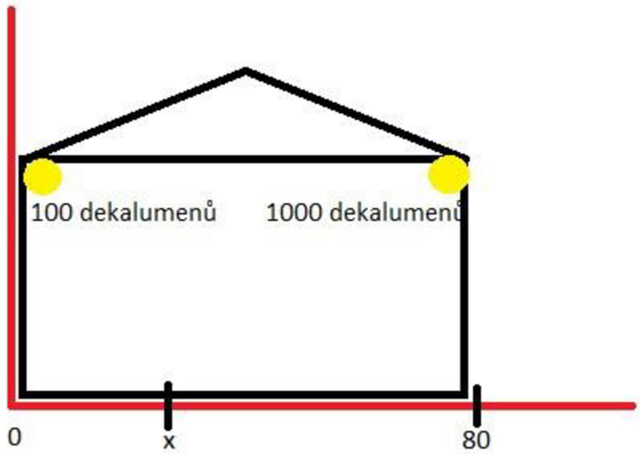
$$v_2 = -0{,}2 \text{ m}$$

Původní výška jednoho schodu byla 0,24 m, na schodišti bylo celkem 15 schodů. Po snížení všech schodů o 4 cm narostl počet schodů na 18.

Příklad č. 7: Na jednom konci tovární budovy dlouhé 80 m svítí žárovka o 100 dekalumenech, na druhém žárovka o 1000 dekalumenech. Které místo budovy je od obou světel stejně osvětleno? [7] – příklad 29.

Má-li být jedno místo stejně osvětleno ze dvou zdrojů, pak intenzita osvětlení z dvou zdrojů si musí být rovna. Pro intenzitu osvětlení platí:

$$E = \frac{I}{r^2} \cos \alpha$$



Obrázek 9:Továrna

Pomocí obrázku 9 sestavíme rovnici. Při výpočtu zanedbáme $\cos \alpha$.

$$E_1 = E_2 \rightarrow \frac{I_1}{{r_1}^2} = \frac{I_2}{{r_2}^2}$$

$$\frac{I_1}{{r_1}^2} = \frac{I_2}{{r_2}^2} \rightarrow \frac{I_1}{x^2} = \frac{I_2}{(80-x)^2}$$

$$(80-x)^2 \cdot I_1 = x^2 \cdot I_2$$

$$(80-x)^2 \cdot I_1 = x^2 \cdot I_2$$

$$6400\, I_1 - 160\, I_1 x + I_1\, x^2 = I_2 \cdot x^2$$

$$640000 - 16000x + 100x^2 = 1000x^2$$

$$900x^2 + 16000x - 640000 = 0$$

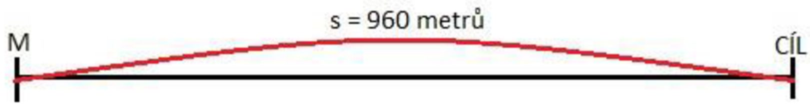
$$9x^2 + 160x - 6400 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-160 \pm \sqrt{(160)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-6400)}}{2 \cdot 9} = \frac{-160 \pm \sqrt{256000}}{18} = \frac{-160 \pm 505{,}964}{18}$$

$$x_1 = 19{,}22 \text{ m}$$
$$x_2 = -36{,}998 \text{ m}$$

Vyřešením kvadratické získáme dvě řešení. Obě řešení jsou správná, ale jen první splňuje zadání. Místo, které bude osvětleno stejně z obou zdrojů se nachází 19,22 metrů od zdroje s menší svítivostí. Druhé řešení je také správné, nicméně máme hledat místo uvnitř budovy, tzn. kdyby byla budova otevřená (bez stěn), bylo by toto druhé místo 36,998 m za slabším zdrojem směrem od druhého.

Příklad č. 8: Dva závodníci vyběhnou současně z místa M. První závodník, který běžel průměrnou rychlostí o 0,2 m/sec větší, doběhl do cíle 960 m vzdáleného o 20 sec dříve. Jaké byly jejich časy a rychlosti? [7] – příklad 34.



Obrázek 10: Cíl

První běžec:

$$v_1 = x$$
$$t_1 = \frac{s}{v_1} = \frac{960}{x}$$

Druhý běžec:

$$v_2 = v_1 - 0{,}2 = x - 0{,}2$$
$$t_2 = t_1 + 20$$

Vyjdeme z poslední rovnice, tzn. čas druhého běžce a dosadíme za neznáme časy, které si vyjádříme z rovnic pro rychlosti. Z rovnic získáme vztah:

$$t_2 = t_1 + 20 \quad \rightarrow \quad \frac{s}{v_2} = \frac{s}{v_1} + 20$$
$$\frac{s}{x - 0{,}2} = \frac{s}{x} + 20$$
$$sx = s(x - 0{,}2) + 20x(x - 0{,}2)$$
$$sx = s(x - 0{,}2) + 20x(x - 0{,}2)$$
$$sx = sx - 0{,}2s + 20x^2 - 4x$$

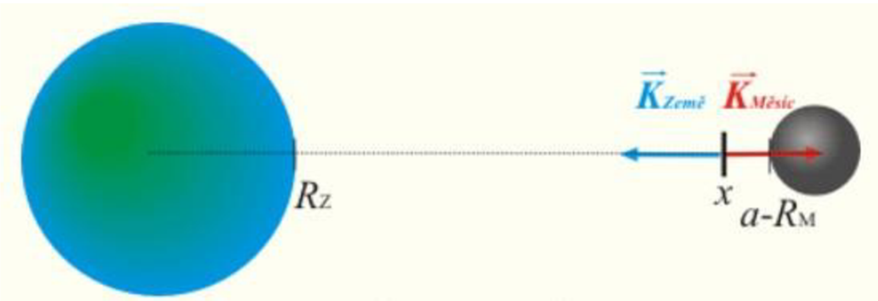
$$-0{,}2s + 20x^2 - 4x = 0$$
$$20x^2 - 4x - 192 = 0$$
$$5x^2 - x - 48 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-48)}}{2 \cdot 5} = \frac{1 \pm \sqrt{961}}{10} = \frac{1 \pm 31}{10}$$

$$x_1 = 3{,}2$$
$$x_2 = -3$$

Neznáme x má dvě řešení, pouze $x_1 = 3{,}2$ je však pravdivé. První běžec běží rychlostí $v_1 = 3{,}2\ \mathrm{m/s}$, dráhu uběhne za dobu $t_1 = 300$ sekund. Druhý běžec běží rychlostí $v_2 = 3\ \mathrm{m/s}$, dráhu uběhne za dobu $t_2 = 320$ sekund.

Příklad č. 9: Na kterém místě mezi Zemí a Měsícem se ruší přitažlivé síly obou těles, je-li hmota Měsíce rovna $\frac{1}{81}$ hmoty Země? [7] – příklad 37.



Obrázek 11: Spojnice Země Měsícem

Mají-li se přitažlivé síly obou těles vyrušit, musíme vyjít ze vzorce pro intenzitu gravitační pole, které je pro každé těleso jiné, ale v jisté vzdálenosti budou mít stejnou hodnotu. Pro intenzitu gravitační pole Země a Měsíce musí platit:

$$K_{Země} = K_{Měsíce}$$

Ve vzorci pro intenzitu nebude rozlišovat poloměry obou těles, ale pouze vzdálenost jejich středů. Soustavu Země Měsíc, kterou vidíme na obrázku převedeme do kartézského souřadného systému. Uvažujeme-li počátek soustavy ve středu Země pak můžeme psát:

$$G\frac{M_z}{x^2} = G\frac{M_M}{(a-x)^2}$$

kde a je spojnice Země a Měsíce, $a = 384\,000$ km.

$$\frac{M_z}{x^2} = \frac{\frac{1}{81}M_z}{(a-x)^2}$$

$$M_z(a-x)^2 = \frac{1}{81}M_z x^2$$

$$a^2 - 2ax + x^2 = \frac{1}{81}x^2$$

$$80x^2 - 162ax + 81a^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{162a \pm \sqrt{(-162a)^2 - 4 \cdot 81a^2 \cdot 80}}{2 \cdot 80} = \frac{162a \pm \sqrt{26244a^2 - 25920a^2}}{160}$$
$$= \frac{62208000 \pm 6912000}{160}$$

$$x_1 = 432000$$
$$x_2 = 345600$$

Místo mezi Zemí a Měsícem kde se vyruší přitažlivé síly obou těles je ve vzdálenosti 345600 km. Druhé řešení je větší než samotná spojnice, řešení by tak nebylo mezi tělesy.

Příklad č. 10: Nádržku naplníme pravým kohoutem o 4 hodiny, druhým o 9 hodin později než oběma současně. Za jakou dobu se naplní každým kohoutem zvlášť? [7] – příklad 25.

$$x = \frac{1}{\frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+9}}$$
$$\frac{x}{x+4} + \frac{x}{x+9} = 1$$
$$x^2 + 9x + x^2 + 4x = x^2 + 13x + 36$$
$$x^2 - 36 = 0$$
$$x = \pm 6$$

Prvním kohoutem naplníme nádržku za 10 hodin, druhým kohoutem za 15 hodin. Oběma současně za 6 hodin.

5.3. Cloudové řešení – matematické příklady

Příklad č.1: Obdélníková dvojgaráž bungalovu B59 má plochu 60 m^2, jedna její stěna je o 7 m delší než druhá stěna. Ze zadaných údajů urči rozměry stěn garáže?

```
In[28]:= a = x
         b = x + 7
         S1 = 60
         S2 = a * b
         Solve[S1 == S2]

Out[28]= x

Out[29]= 7 + x

Out[30]= 60

Out[31]= x (7 + x)

Out[32]= {{x → -12}, {x → 5}}
```

Příklad č. 2: Urči rozměry lichoběžníku víš-li že jedna základna je o pětinu větší než výška lichoběžníku. Druhá základna je 1 cm větší něž výška. Plocha lichoběžníku je 115 m^2.

```
In[38]:= a = v + (1 / 5) v
         c = v + 1
         S1 = 115
         S2 = ((a + c) * v) / 2
         Solve[S1 == S2]
```

Out[38]= $\frac{6\,v}{5}$

Out[39]= $1 + v$

Out[40]= 115

Out[41]= $\frac{1}{2} v \left(1 + \frac{11\,v}{5}\right)$

Out[42]= $\left\{\left\{v \to -\frac{115}{11}\right\}, \{v \to 10\}\right\}$

Příklad č.3: Pravoúhlí trojúhelník ABC má přeponu o délce $c = 13$ dm. Určete délku odvěsen trojúhelníku ABC víte-li že obvod trojúhelníku je 30 dm.

```
In[130]:= c = 13
          a = x
          b = y
          b = o - x - 13
          o = 30
          c^2 == a^2 + b^2 == x^2 + y^2
          Solve[c^2 == x^2 + y^2]

Out[130]= 13

Out[131]= x

Out[132]= 17 - x

Out[133]= 17 - x

Out[134]= 30

Out[135]= 169 == (17 - x)^2 + x^2 == (17 - x)^2 + x^2

Out[136]= {{x → 5}, {x → 12}}
```

Příklad č. 4: Cena 1 litru sirupu vzrostla během roku o tolik procent, kolik korun stál litr na začátku roku. Urči původní cenu sirupu, jestliže na konci roku stál 47,25 Kč.

```
In[153]:= zacatek = x
          konec1 = x * (1 + x / 100)
          konec2 = 47.25
          Solve[konec1 == konec2]

Out[153]= x

Out[154]= (1 + x/100) x

Out[155]= 47.25

Out[156]= {{x → -135.}, {x → 35.}}
```

Příklad č. 5: Motocyklista ujede při jízdě po dálnici na 1 litr benzínu o 3 km více než při jízdě ve městě. Při současné jízdě ujel motocyklista 136 km po dálnici a 155 km ve městě a spotřeboval 9 litrů benzínu. Kolik kilometrů ujede motocyklista na 1 litr benzínu ve městě?

```
In[∘]:= dalnice1 = x + 3
        mesto1 = x
        dalnice2 = 136
        mesto2 = 155
        spotreba = 9
        Solve[(dalnice2 / dalnice1) + (mesto2 / mesto1) == spotreba]

Out[∘]= 3 + x

Out[∘]= x

Out[∘]= 136

Out[∘]= 155

Out[∘]= 9
```

Out[∘]= $\left\{\left\{x \to -\frac{5}{3}\right\}, \{x \to 31\}\right\}$

Příklad č. 6: Máme zjistit, zda existuje mnohoúhelník mající 35 úhlopříček. [7] – příklad č. 20.

```
In[∘]:= u = 35
        S1 = 2 * u
        S2 = n * (n - 3)
        Solve[S1 == S2]

Out[∘]= 35

Out[∘]= 70

Out[∘]= (-3 + n) n

Out[∘]= {{n → -7}, {n → 10}}
```

Příklad č. 7: Čtverec o straně 10 cm proměňte v obdélník téhož obvodu, jehož obsah je roven 64 % obsahu čtverce. Určete rozměry obdélníka. [7] – příklad č. 20.

```
In[226]:= s = 64
          x = s / y
          o1 = 2 * (x + y)
          o2 = 40
          Solve[o1 == o2, y]

Out[226]= 64
```

$\text{Out[227]=}\ \frac{64}{y}$

$\text{Out[228]=}\ 2\left(\frac{64}{y}+y\right)$

```
Out[229]= 40

Out[230]= {{y → 4}, {y → 16}}
```

Příklad č. 8: Určete tři čísla o vzájemném poměru 3 : 4 : 5, jejichž součet čtverců je 1250. [7] – příklad č. 21.

```
In[•]:= a = 3 x
        b = 4 x
        c = 5 x
        a ^ 2 + b ^ 2 + c ^ 2 = 1250
        Solve[(3 x) ^ 2 + (4 x) ^ 2 + (5 x) ^ 2 == 1250, x]

Out[•]= 3 x

Out[•]= 4 x

Out[•]= 5 x
```

Set : Tag Plus in $9x^2 + 16x^2 + 25x^2$ is Protected.

```
Out[•]= 1 250

Out[•]= {{x → -5}, {x → 5}}
```

Příklad č. 9: Pravoúhlý trojúhelník mající délku odvěsen v poměru 5 : 12, má přeponu 26 m dlouhou. Jak dlouhé jsou odvěsny? [7] – příklad č. 23.

```
In[•]:= a = 5 x
        b = 12 x
        c = 26
        a^2 + b^2 = c^2
        Solve[(5 x)^2 + (12 x)^2 == 26^2, x]

Out[•]= 5 x

Out[•]= 12 x

Out[•]= 26

        ··· Set: Tag Plus in 25 x^2 + 144 x^2 is Protected.

Out[•]= 676

Out[•]= {{x → -2}, {x → 2}}
```

Příklad č. 10: Čitatel zlomku je o 3 větší než jeho jmenovatel, poměr hodnoty zlomku a jeho převrácené hodnoty je 64 : 25. Který je to zlomek. [7] – příklad č. 30.

```
In[•]:= f1 = (x + 3) / x
        f2 = (f1)^{-1}
        Solve[(f1 / f2) == 64 / 25, x]
```

Out[•]= $\frac{3+x}{x}$

Out[•]= $\left\{\frac{x}{3+x}\right\}$

Out[•]= $\left\{\left\{x \to -\frac{15}{13}\right\}, \{x \to 5\}\right\}$

5.4. Cloudové řešení – fyzikální příklady

Příklad č.1: Určete výšku, do které je třeba zvednout těleso nad povrch Země, aby se gravitační síla, která na těleso působí, zmenšila dvakrát. Poloměr Země je přibližně 6 400 km. [1] - úloha 120

```
In[184]:= h = x
          Rz = 64 * 10 ^ 5
          f1 = G * (M * m) / (Rz) ^ 2
          f2 = G * (M * m) / (Rz - h) ^ 2
          Solve[f1 == 2 * f2]
Out[184]= x
Out[185]= 6 400 000
```

Out[186]= $\dfrac{G\,m\,M}{40\,960\,000\,000\,000}$

Out[187]= $\dfrac{G\,m\,M}{(6\,400\,000 - x)^2}$

Out[188]= $\{\{G \to 0\}, \{m \to 0\}, \{M \to 0\}, \{x \to 6\,400\,000\,(1 - \sqrt{2})\}, \{x \to 6\,400\,000\,(1 + \sqrt{2})\}\}$

Příklad č. 2: Těleso bylo vrženo svisle vzhůru počáteční rychlostí 40 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Za jakou dobu se bude nacházet ve výšce a) 60 m, b) 80 m, c) 100 m? Tíhové zrychlení je 10 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$. [1] - úloha 126.

```
In[293]:= v = 40
h1 = 60
g = 10
h2 = v * t - (1 / 2) * g * t ^ 2
Solve[h1 == h2]
Plot[{h1, h2}, {t, 0, 10}]
```

Out[293]= 40

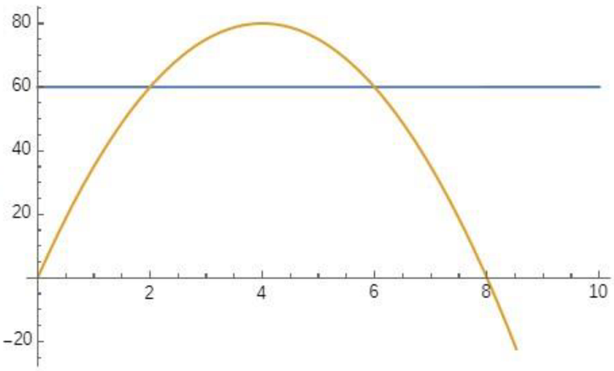
Out[294]= 60

Out[295]= 10

Out[296]= $40\,t - 5\,t^2$

Out[297]= {{t → 2}, {t → 6}}

Out[298]=




```
In[299]:= v = 40
h1 = 80
g = 10
h2 = v * t - (1 / 2) * g * t ^ 2
Solve[h1 == h2]
Plot[{h1, h2}, {t, 0, 10}]
```

Out[299]= 40

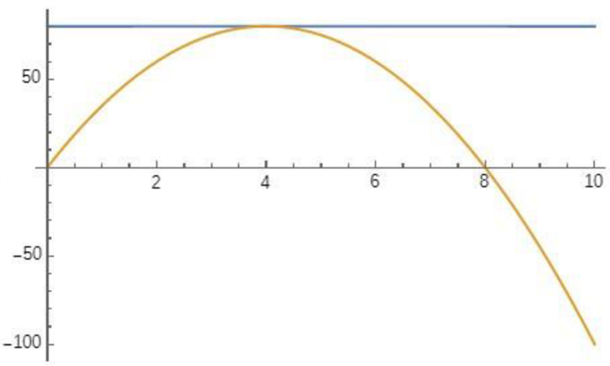
Out[300]= 80

Out[301]= 10

Out[302]= $40\,t - 5\,t^2$

Out[303]= {{t → 4}, {t → 4}}

Out[304]=

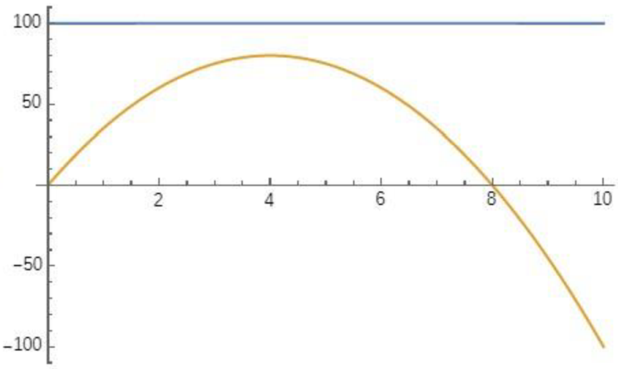


```
In[305]:= v = 40
          h1 = 100
          g = 10
          h2 = v * t - (1 / 2) * g * t ^ 2
          Solve[h1 == h2]
          Plot[{h1, h2}, {t, 0, 10}]

Out[305]= 40

Out[306]= 100

Out[307]= 10
```

Out[308]= $40\,t - 5\,t^2$

```
Out[309]= {{t → 4 - 2 i}, {t → 4 + 2 i}}
```

Out[310]=



Příklad č. 3: Dva kladné bodové náboje $Q_1 = Q$ a $Q_2 = 4Q$ jsou pevně umístěny ve dvou bodech vzdálených od sebe 6 cm. Určete, kde je třeba na přímce spojující oba body umístit třetí kladný bodový náboj Q_0, aby na něj nepůsobila žádná síla. [3] - úloha 8.

```
In[464]:= q1 = q
          q2 = 4 * q
          f1 = (1 / (4 * pi * e)) * ((q1 * q0) / x ^ 2)
          f2 = (1 / (4 * pi * e)) * ((q2 * q0) / (d - x) ^ 2)
          Solve[f1 == f2]

Out[464]= q

Out[465]= 4 q
```

Out[466]= $\dfrac{q\,q0}{4\,e\,pi\,x^2}$

Out[467]= $\dfrac{q\,q0}{e\,pi\,(6 - x)^2}$

```
Out[468]= {{q → 0}, {q0 → 0}, {x → -6}, {x → 2}}
```

Příklad č. 4: Ocelovou kuličku pustíme z klidu po hladké nakloněné rovině, na které se pohybuje se zrychlením $0{,}5\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$. Potom přejde na vodorovnou dráhu. Celkově ujede dráhu 20 metrů za čas 12 sekund. Jak dlouho se pohybuje po nakloněné rovině? Tření a odpor prostředí zanedbejte. [6] – úloha 110.

```
a = 1 / 2
draha = 20
cas = 12
rychlost1 = a * t1
rychlost2 = rychlost1
cas2 = cas - t1
s = draha
s1 = ((1 / 2) * a * (t1 ^ 2))
s2 = rychlost2 * cas2
Solve[s == s1 + s2]
Plot[{s1, s2}, {t1, 0, 25}]
```

Out[177]= $\frac{1}{2}$

Out[178]= 20

Out[179]= 12

Out[180]= $\frac{t1}{2}$

Out[181]= $\frac{t1}{2}$

Out[182]= 12 - t1

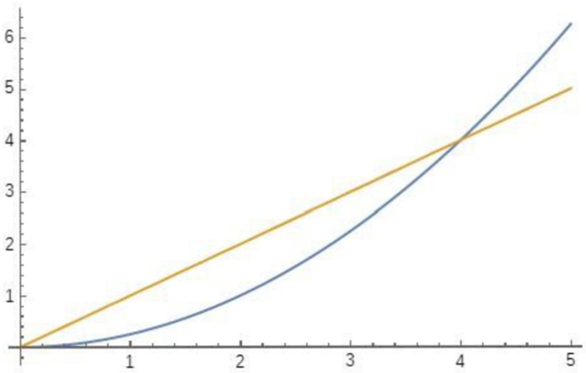
Out[183]= 20

Out[228]= $\frac{t1^2}{4}$

Out[229]= $\frac{1}{2}(12 - t1)\ t1$

Out[230]= {{t1 → 4}, {t1 → 20}}

Out[231]=



Příklad č. 5: Jan se zdržel v práci a nyní spěchá na autobus. Jan přichází na autobusové nádraží a v tom se dá autobus do pohybu se zrychlením $a = 2\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$. Jan se za autobusem rozbíhá rychlostí $v = 5\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$, aby stihl autobus. V okamžiku, kdy se autobus rozjede a Jan rozběhne je Jan od autobusu vzdálen $d = 25\ \mathrm{m}$. Určete, zda Jan autobus dostihne. Pokud ano, v jaké vzdálenosti od nádraží?

```
In[284]:= a = 2
          v = 5
          d = 25
          s = s1 + s2
          s1 = v * t1
          s2 = d + (1 / 2) * a * t2 ^ 2
          t1 = t2
          Solve[s1 == s2]
          Plot[{s1, s2}, {t2, -10, 10}]
```

Out[284]= 2

Out[285]= 5

Out[286]= 25

Out[287]= $25 + 5\ t2 + t2^2$

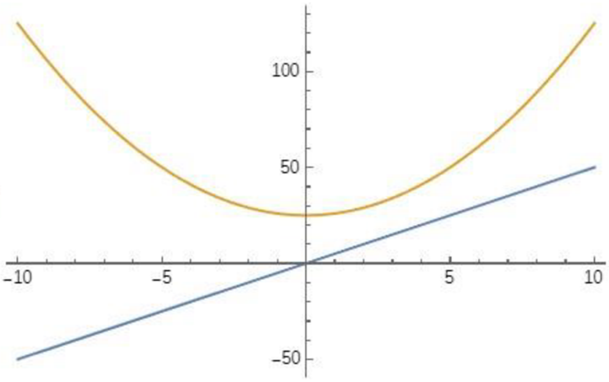
Out[288]= $5\ t2$

Out[289]= $25 + t2^2$

Out[290]= $t2$

Out[291]= $\left\{\left\{t2 \to \frac{5}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right)\right\}, \left\{t2 \to \frac{5}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)\right\}\right\}$

Out[292]=



Příklad č. 6: Na schodišti výšky 3,6 m by se zvětšil počet stupňů o 3, kdyby se výška každého stupně zmenšila o 4 cm. Kolik stupňů má schodiště? [7] – příklad 22.

```
In[231]:= x = 3.6 / v
          f = (x + 3) * (v - 0.04)
          Solve[f == 3.6]
```

Out[231]= $\frac{3.6}{v}$

Out[232]= $\left(3 + \frac{3.6}{v}\right)(-0.04 + v)$

··· Solve: Solve was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding e system and numericizing the result.

Out[233]= $\{\{v \to -0.2\}, \{v \to 0.24\}\}$

Příklad č. 7: Na jednom konci tovární budovy dlouhé 80 m svítí žárovka o 100 dekalumenech, na druhém žárovka o 1000 dekalumenech. Které místo budovy je od obou světel stejně osvětleno? [7] – příklad 29.

```
In[ ]:= d = 80
        I1 = 100
        I2 = 1000
        z = x
        y = d - x
        E1 = I1 / z^2
        E2 = I2 / y^2
        Solve[E1 == E2]
```

Out[ ]= 80

Out[ ]= 100

Out[ ]= 1 000

Out[ ]= x

Out[ ]= 80 − x

Out[ ]= $\frac{100}{x^2}$

Out[ ]= $\frac{1\,000}{(80 - x)^2}$

Out[ ]= $\left\{\left\{x \to \frac{80}{9}\left(-1 - \sqrt{10}\right)\right\}, \left\{x \to \frac{80}{9}\left(-1 + \sqrt{10}\right)\right\}\right\}$

Příklad č. 8: Dva závodníci vyběhnou současně z místa M. První závodník, který běžel průměrnou rychlostí o 0,2 m/sec větší, doběhl do cíle 960 m vzdáleného o 20 sec dříve. Jaké byly jejich časy a rychlosti? [7] – příklad 34.

```
In[•]:= v1 = x
        s = 960
        t1 = s / v1
        v2 = v1 - 0.2
        t2 = t1 + 20
        Solve[v1 * t1 == v2 * t2, x]
```

Out[•]= x

Out[•]= 960

Out[•]= $\frac{960}{x}$

Out[•]= $-0.2 + x$

Out[•]= $20 + \frac{960}{x}$

··· Solve: Solve was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding ex system and numericizing the result.

Out[•]= {{x → -3.}, {x → 3.2}}

Příklad č. 9: Na kterém místě mezi Zemí a Měsícem se ruší přitažlivé síly obou těles, je-li hmota Měsíce rovna $\frac{1}{81}$ hmoty Země? [7] – příklad 27.

```
In[•]:= Kz = G * (Mz / x ^ 2)
        Km = G * (Mm / (a - x) ^ 2)
        Mz = 6 * 10 ^ 24
        Mm = Mz / 81
        a = 384000
        Solve[Kz == Km, x]
```

Out[•]= $\frac{6\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,G}{x^2}$

Out[•]= $\frac{2\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,G}{27\,(384\,000 - x)^2}$

Out[•]= 6 000 000 000 000 000 000 000 000

Out[•]= $\frac{2\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000}{27}$

Out[•]= 384 000

Out[•]= {{x → 345 600}, {x → 432 000}}

Příklad č. 10: Nádržku naplníme pravým kohoutem o 4 hodiny, druhým o 9 hodin později než oběma současně. Za jakou dobu se naplní každým kohoutem zvláště? [7] – příklad 25.

```
In[11]:= a = 1 / (x + 4)
         b = 1 / (x + 9)
         f1 = 1 / (a + b)
         f2 = x
         Solve[f1 == f2, x]
```

Out[11]= $\frac{1}{4 + x}$

Out[12]= $\frac{1}{9 + x}$

Out[13]= $\frac{1}{\frac{1}{4+x} + \frac{1}{9+x}}$

Out[14]= x

Out[15]= $\{\{x \to -6\}, \{x \to 6\}\}$

6. Návrh změny výuky matematiky

Matematické vzdělávání je již dlouho dobu předmětem zkoumání a v hledáčku mnoho výzkumníků a pedagogů. Přijde jim, že současná výuka matematiky zpochybňuje aktuální požadavky technologické doby. Zatímco mnozí identifikovali problém, řešení není tak jednoznačné, nelze provést jen pár úprav.

Tým odborníků pod vedením Conrada Wolframa pracoval na nápravě posledních 15 let, což vyvrcholilo projektem computer-basedmath.org (CBM), který byl spuštěn v roce 2010. Tým zjistil, že potřebné změny jsou mnohem obsáhlejší, než se na začátku projektu předpokládalo. Místo samotné aktualizace již existujících učebních osnov modernějším obsahem musel tým změnit celou strukturu a pojetí matematiky, a především jejího předávání. Je třeba přehodnotit jádro výpočetního předmětu (omezit ruční počítání) a zaměřit se na skutečné problémy, které řeší skuteční lidé s využitím dnešních technologií. Výchozím bodem pro tento nový přístup je simulace reálných situací, aby bylo možné určit, jaké učení je nutné k jejich řešení. Tento problémově orientovaný přístup je rozhodující pro odvození obsahu učiva a jeho specifikaci. Klíčovou součástí této snahy je vypracování rozvržení výsledků, které odráží požadavky na vzdělávání v reálném životě a může být použito k měření úspěšnosti vzdělávání.

Tradiční výpočty se pro matematiku neosvědčily, zejména pokud jde o tvůrčí myšlení. Tým se potýkal s tím, jak proces myšlení znázornit ve formě, která je vhodná pro výuku, sdělitelná a použitelná pro učení a k následné intepretaci. Mapa výsledků musí mít rovnováhu mezi specifičností a abstrakcí, aby nedošlo k vyloučení tvořivosti nebo k přílišné specifikaci až odloučení.

Tyto otázky jsou zvláště důležité v době umělé inteligence, kdy jsou obavy o budoucnost lidského myšlení prvořadé. Matematické vzdělávání se musí vyvíjet tak, aby připravilo studenty na budoucnost, zajistilo jim práci, ale především je vybavilo dovednostmi potřebnými pro kreativní myšlení a řešení reálných problémů.

Projekt nabízí slibný přístup, který upřednostňuje řešení problémů, simulace reálného světa a mapování výsledků se zaměřením na znalosti i tvůrčí myšlení. Tento proces není nic jiného nežli více zmíněný čtyř-krokový proces (Define, Abstract, Compute, Interpret) a využití matematických softwaru v hodinách matematiky pro přiblížení reálné světa žákům a studentům.

6.1.Hranice mezi předměty

Matematika nebo informatika. Je nutnost si nastavit hranice? Nad touto otázkou je třeba se zamyslet. Doposud se na školách setkáváme s výukou, která se za posledních 30 let nezměnila, přitom se ale možnosti doby posunuly o velký kus vpřed. Když se podíváme do RVP (rámcového vzdělávacího plánu) nalezneme v něm termín: mezipředmětové vztahy a průřezová témata. V RVP je daná tématika obsažena, aniž by byl termín mezipředmětové vztahy explicitně vysvětlen. RVP se zabývají mezipředmětovou integrací, umožňují propojování jednotlivých oborů, vytváření jednoho předmětu z několika oborů či naopak (v RVP jsou uváděna mezipředmětová témata, která jsou zde nazývána průřezovými tématy, na jejich základě mohou vzniknout samostatné předměty, či jejich obsah může být začleněn do různých předmětů). Máme-li tyto možnosti již dnes, proč je nevyužíváme a jedeme stále v zajetých kolejích? Může za to průměrný věk učitelů, kteří nemají k IT vybavení takový cit, či snad vybavenost škol? Není jednoduché na tyto otázky odpovídat, ale můžeme alespoň odpovědět na otázky spojení s myšlením a výpočetním myšlením.

Výpočetní myšlení lze definovat jako schopnost používat techniky řešení problémů a výpočetní nástroje k analýze a řešení problémů. Zahrnuje oddělení složitých problémů na menší, lépe zvládnutelné části a použití algoritmů a logického uvažování k nalezení řešení. Výpočetní myšlení není jen o tom naučit se kódovat nebo používat počítače, ale také o rozvoji analytického, logického a kreativního myšlení. Výpočetní myšlení je v moderním světě, kde jsou technologie a data všudypřítomné, stále důležitější. Technologie nyní používá celá řada oborů, od vědy a techniky až po obchod a finance. Vědci mohou například využívat výpočetní myšlení k modelování složitých biologických systémů, inženýři zase k navrhování efektivnějších strojů. V podnikání lze výpočetní myšlení využít k analýze dat o zákaznících a optimalizaci marketingových strategií. Narážíme na odvětví, která mají velký záběr mezioborových disciplín a je potřeba podotknout, že jejich zaměstnanci si musí poradit i s postupy, které se zrovna neučili při svém studiu. Proto je potřeba se zamyslet nad propojeností oborů a stejně tak předmětů na školách.

Jedním z klíčových aspektů informatického myšlení je zaměření na řešení problémů. To zahrnuje identifikaci problému, jeho rozdělení na menší části a vypracování činného plánu k jeho vyřešení. Tento proces je iterativní, což znamená, že zahrnuje testování a zdokonalování řešení, dokud není uspokojivé. Zahrnuje také abstrakci, což znamená, že jsou odstraněny nepotřebné detaily, aby bylo možné se zaměřit na podstatné prvky problému. Dalším důležitým aspektem informatického myšlení je algoritmické myšlení. To zahrnuje rozdělení problému na řadu kroků, které lze provádět systematicky. Tento proces zahrnuje vypracování jasných a jednoznačných instrukcí, podle kterých může počítač problém vyřešit. Algoritmické myšlení je důležité nejen v počítačovém programování, ale také v mnoha dalších oborech, jako je strojírenství, finance a medicína. Výpočetní myšlení však není jen o dodržování předepsaného souboru kroků. Zahrnuje také kreativitu a inovace. To znamená, že k řešení problémů lze přistupovat mnoha různými způsoby a že k danému problému může existovat více řešení. Lidé, kteří se zabývají počítačovým myšlením, jsou podněcováni ke kreativnímu přemýšlení a hledání alternativních způsobů řešení problémů. Netřeba se obávat, že nás nahradí stroje, vždy tady budou pracovní pozice, které bude potřeba vykonávat. To znamená, že lidé z kreativním myšlení se v průmyslové revoluci 4.0 neztratí, ale naopak naleznou své místo na správném místě.

6.2.Počítač do hodin matematiky?

Provádění změn může být obtížný úkol, zejména pokud jde o vzdělávání. Vždy se objeví námitky, ať už jde o princip nebo praxi navrhované změny. Conrad Wolfram se setkal s mnoha námitkami proti svému návrhu na změnu způsobu výuky matematiky. Zjistili však, že častější, než odpor převládá zmatek. To není překvapivé, protože mnoho lidí o autorově návrhu nikdy předtím nepřemýšlelo. Mezi odpůrce patří hlavně rodiče, kteří mají zaužívaný styl výuky již ze svého studia a mají pocit, že je tento styl výuky je správný a je potřeba v těchto kolejích pokračovat. Wolfram uvádí argumenty proti námitkám, s nimiž se běžně setkává. Některé otázky vyžadují hluboké a komplexní odpovědi, které Wolfram poskytuje v naději, že vyvolá porozumění nebo další otázky.

Autor uznává, že existují lidé, kteří prostě nemohou přijmout jakoukoli změnu od ručně počítaného hlavního proudu matematického vzdělávání, ať už jsou předloženy jakékoli argumenty. Tito jedinci se domnívají, že proces počítání stále složitějších výrazů bez stroje je základem lidského bytí, nebo alespoň vzdělaného člověka. Jedná se o formu fundamentalismu, kterému nelze čelit racionálními argumenty, protože argumentace bez uznání mění téma. I když tito hluční odpůrci existují, autor zdůrazňuje, že tato skupina je sama o sobě malá a nakonec vyhoří. Autor však uznává, že při zpochybňování těchto zdánlivě jednoduchých „pravd“ chybí důvěra a soudržnost, což se snad podaří odstranit. Je důležité poznamenat, že Wolfram nechce zaměňovat skupinu „ručně počítat za každou cenu“ s těmi, kteří mají pevné přesvědčení, jež lze vyargumentovat, nebo se stále početnější skupinou, která rozumně zpochybňuje všechny aspekty toho, co autor navrhuje. Wolfram chce pomoci zpochybnit zdánlivě jednoduché "pravdy" a podpořit racionální skepsi.

Častou otázkou je, zda si studenti musí nejprve osvojit základy, než začnou používat počítač. Ačkoli se může zdát intuitivní naučit se něco ručně, než se spolehneme na technologie, tento předpoklad nemusí být vždy pravdivý. Ve skutečnosti je nezbytné definovat, co v této souvislosti rozumíme pod pojmem „základy“. Například naučit se řídit auto nevyžaduje naučit se vyrábět motor nebo dokonce servisovat motor. Stejně tak používání pera nevyžaduje jeho výrobu. Důležitější je, že v době technologií může být nejdůležitější dovednost, kterou je třeba se naučit, psaní na klávesnici, a není nutné se nejprve naučit psát perem. Zásadní je také poznamenat, že používání technologií může často zlepšit výuku tím, že ji učiní poutavější a interaktivnější. Přece jen je využívají žáci a studenti doma, přinejmenším každý z nich vlastní minimálně smartphone. Technologie mohou poskytnout okamžitou zpětnou vazbu a pomoci studentům identifikovat a opravit jejich chyby. Musíme si uvědomit, že u žáků nehledáme, zda něco umí, nebo ne, ale hledáme to, v čem vynikají, tím se mění atmosféra celé výuky a následně i postavení učitele. Učitel není vnímán negativně, ale jako zdroj vědomostí a správného nasměrování jedince. Používání technologií může také pomoci překlenout propast mezi abstraktními pojmy a aplikacemi v reálném světě, čímž se učení stane relevantnějším a smysluplnějším.

Ačkoli tedy může být prospěšné mít základní znalosti daného předmětu, není vždy nutné jej před použitím technologií zvládnout ručně. Místo toho by se pedagogové měli zaměřit na začlenění technologií do procesu výuky způsobem, který doplňuje a rozšiřuje tradiční metody. V konečném důsledku by mělo být cílem pomoci studentům rozvíjet kritické myšlení a dovednosti řešení problémů, které jim dobře poslouží v jakémkoli prostředí, ať už zahrnuje technologie, nebo ne.

Když mluvíme o osvojení „základů“ matematiky nebo výpočtů, je důležité zvážit, co přesně tyto základy zahrnují. Někdo by sice mohl namítnout, že zvládnutí ručních výpočtů nebo osvojení si tajů výpočetní techniky je nezbytným předpokladem, ale pro naprostou většinu žáků nejsou tyto dovednosti užitečné. Skutečné základy matematiky a výpočtů naopak zahrnují hluboké pochopení procesu řešení problémů a získání praktických zkušeností s nástroji a stroji, které se budou používat v reálných situacích.

Stejně jako může nový řidič začít nácvikem na uzavřeném kurzu nebo simulátoru, může být pro studenty matematiky a výpočetní techniky přínosné začít s jednoduššími, izolovanými problémy a teprve poté přejít ke složitějším a realističtějším scénářům. Je však důležité vyhnout se tomu, aby se příliš mnoho času věnovalo umělým nebo zastaralým metodám výpočtů, jako jsou klasické ruční výpočty nebo algoritmy, které mohou mít v moderním výpočetním prostředí jen omezený význam. Jak žáci postupují a získávají více zkušeností, mohou se začít zabývat pokročilejšími tématy a technikami, podobně jako si zkušení řidiči osvojují jemně vybroušené dovednosti a strategie pro zvládání složitých dopravních situací. Je však důležité si uvědomit, že ne všichni žáci se potřebují nebo chtějí stát odborníky na vnitřní fungování výpočtů nebo matematiky. Pro většinu lidí je prostě cílem stát se kompetentními uživateli těchto nástrojů, aniž by nutně museli rozumět každému detailu jejich fungování. Zde začíná naše práce budoucích kantorů.

Na úrovni základní školy by se měl klást důraz na rozvoj základních dovedností a smyslu pro čísla, nikoli na zdůrazňování konkrétních výpočetních technik nebo memorování vzorců. V digitální revoluci, není potřeba memorování, ale spíše vyhledávání, vyhledávání fakt a orientace v dezinformacích. Jakmile žáci přejdou na druhý stupeň základní školy a na střední školu, měli by se seznámit s širší škálou problémů a nástrojů s důrazem na praktické aplikace a scénáře z reálného světa. Po nástupu do zaměstnání využijí své vědomosti, ale díky rychlosti vyhledávání na internetu budou odborníky ve svém oboru a budou se soustředit jen na praxi.

Celkově lze říci, že klíčem k výuce matematiky a výpočtů je soustředit se na rozvoj dovedností, řešit problémy a praktické zkušenosti s moderními nástroji a technologiemi, a neváznout do zastaralých nebo nepodstatných technik. Důrazem na správné základy můžeme zajistit, aby byli žáci připraveni řešit výzvy moderního světa a co nejlépe využívat neuvěřitelnou sílu matematiky a výpočtů.

6.3. Znemožňují počítače matematiku?

Mezi některými lidmi roste přesvědčení, že počítačová matematika je *„otupělou“* verzí ručně počítané matematiky. Argumentem je, že počítače dělají intelektuálně náročnou práci a studenti jsou jen *„bezduchými ovladateli tlačítek“*. Tento argument však do značné míry převrací realitu. Ve skutečném světě používání počítačů v přírodních vědách, technologiích, inženýrství a matematice (STEM) nezpůsobilo, že by tyto předměty byly méně koncepční, intelektuální nebo náročné. Naopak, zvýšilo tempo, otevřelo nové oblasti a zkomplikovalo možnosti postupu. Používání počítačů rozšířilo možnosti, což vedlo k hlubšímu a komplexnějšímu stylu koncepčního myšlení.

Samozřejmě, že některé práce se staly méně kvalifikovanými, protože počítače nyní mohou vykonávat práci lidí. Z dlouhodobého hlediska se však rozsah toho, co se chce, zvýšil, aby tuto ztrátu kompenzoval. Intelekt je nyní vyžadován za jiných okolností a někdy i s jiným stylem koncepčního myšlení. Tento posun neznamená méně konceptualismu, ale jeho hlubší a komplexnější formu. Podobně v matematickém vzdělávání může používání počítačů ztížit řešení problémů, které vyžadují více konceptualismu, protože rozsah toho, co je proveditelné, se zvětšuje s tím, jak se informatické myšlení osvobozuje od omezení ručního počítání. Existují však případy, kdy mohou být počítače zneužity. Učitelé mohou například používat počítače k tomu, aby žákům předkládali bezmyšlenkovité úlohy, v nichž mohou uplatnit své dovednosti ručního počítání. Případně se mohou snažit nahradit učitele při vzdělávání studentů stále více procedurálními činnostmi, které by měly být místo toho ve velkém přesunuty na počítač. Při správném použití mohou počítače nahradit těžkou práci a posunout studenty do nových výšin informatického myšlení.

Jedním z příkladů je kalkulačka. Mnoho žáků matematiky ji používá k pomoci s domácími úkoly, ale někteří učitelé to považují za podvádění. Odpověď závisí na tom, jaký je podle vás účel domácího úkolu a jaký předmět představuje. Pokud jsou úlohy příliš hloupé nebo pokud se zaměřujete na nesprávné dovednosti, pak je použití kalkulačky (nebo jiného užitečného nástroje) přijatelné. Pokud je však cílem rozvíjet specifické dovednosti, které vyžadují ruční výpočty, pak by použití kalkulačky nebo *Wolfram Cloud* bylo považováno za podvádění.

6.4. Vlastní návrh změny

Matematika se mi vždy jevila jako předmět, kdy se má žák dopočítat správného řešení. Tedy numerické ruční počítání, které nikdy nekončí. Naučíme se jeden postup a ten aplikujeme na celou kapitolu. Přechodem na gymnázium a studiem přírodovědných předmětu jako je fyzika a chemie začneme narážet na problém, ten problém byla matematika, její logika. Rychle pochopíme, že znalost, jaký vzorec zrovna použít nemusí být vše co budeme pro řešení potřebovat. Další věcí byl předpoklad, že zapojíme své logické myšlení a použitý vzorec upravíme do formy jenž následně využijeme pro vyřešení situace. Tato dovednost u mnoha žáků chybí a je nezbytné ji rozvíjet. Stejně tak rozvíjet logiku k tématu, které zrovna probírají a klást žákům otázky, na které by mohli v životě narazit. Mimo jiné, žijeme v době IT, kdy chytrý telefon má každý žák a s jeho pomocí, má-li patřičné vědomosti, zvládne spočítat i vyšší formy matematiky. Proč se tedy moderní svět brání využívání matematických softwaru v hodinách matematiky, nevíme, ale víme, že je potřeba to změnit.

Můj návrh změny není sice elegantní, ale myslím, že by měl spočívat ve struktuře hodin. Když se podíváme do RVP ZV a ŠVP náhodně vybrané školy, zjistíme, že téměř na všech školách na prvním stupni mají žáci matematiku každý den, tedy 5x týdně. To by měl být dostatek hodin, aby žáci pochopili jednotlivé matematické operace, naučili se násobilku, … Na druhém stupni, kde již není matematika každý den, ale např: 5-4-4-5 bych jednotlivé hodiny rozdělit do jakých celků (uvažujeme-li, 4 hodiny týdně):

1. První hodina by se věnovala novému témata, žáci by se seznámili s problematikou na řešeném příkladu v učebnici. Dále by následovalo vysvětlení od učitele, na jakém principu příklad funguje, jaký se použije vzorec a k jakým závěrům se dojde. Následovalo by procvičování a společná rozprava o příkladech s jejich řešení. Na závěr hodiny by učitel ukázal, jak řešit matematických softwarů.
2. Druhá hodina by se z kraje zaměřila na opakování z minulé hodiny, zařadily by se těžší příklady a vždy po vyřešení by následovala ukázka jak příklad řešení pomocí PC.
3. Třetí hodina by už více aktivizovala žáky, neboť v předchozích hodinách nabili zkušenosti s novým tématem. Učitel by pro žáky připravil pracovní listy s příklady, a současně poskytl techniku (kalkulačky, softwary, tablety,

…) pro dvojí řešení. Žáci by měli za úkol část příkladů řešit ručně, část pomocí techniky, pracovní list by odevzdali učiteli, a řešení v PC by odeslali na e-mail.

4. Čtvrtá hodina už by byla forma reflexe, místo příkladů by nastoupili slovní úlohy a více otázkami na které musí žáci odpovědět. Navíc by musili interpretovat, co ty výsledky pro nás znamenají (v reálném světě). Využívali by jen vlastní zápisky, popřípadě učebnici, ale hlavně by pracovali v PC, aby získali své výsledky okamžitě, aby mohli tyto výsledky náležitě okomentovat a řešení s odpověďmi poslat vyučujícímu k opravě. Zde by byl kladem velký důraz na interpretaci.

Výše zmíněné čtyři hodiny se mohou zdát náročné na tvorbu podkladů pro vyučující, nicméně na druhou stranu mohou lépe žáky připravit do života. Problém výuky, nejen matematiky je podle mého názoru v průměrném věku vyučujících a v nedostatečném ohodnocením. Starší kolegové nemusí být kvalifikováni k užívání moderní techniky, nebo k ní spíše nemají cit, a mladí učitelé raději jedou v zajetých kolejích, jak je na to škola, hlavně okolí přizpůsobené. To může být jedna z mnoha příčin, proč se výuka za posledních 30 nezměnila.

Závěr

I když bychom se dobrali výsledku, bez postupu, je toto řešení správné? Je to správné z pohledu vzdělávací instituce? Wolfram tvrdí, že to je správné, že žáci jsou schopni pracovat s fakty a řešit reálné situace. Naučí se pracovat se softwary a využívat nabyté vědomosti k ověřování dalších faktů a skutečností.

Informatické myšlení je cennou dovedností, která je v moderním světě stále důležitější. Zahrnuje řešení problémů, algoritmické myšlení a kreativitu a může se uplatnit v mnoha různých oblastech. Rozvíjením dovednosti informatického myšlení se jednotlivci mohou stát analytičtějšími, logičtějšími a kreativnějšími mysliteli a mohou tyto dovednosti využívat k řešení složitých problémů a dosahování svých cílů. Wolfram se setkal s námitkami proti svému návrhu na změnu způsobu výuky matematiky. Ačkoli existují lidé, kteří nemohou přijmout žádnou změnu od numerického počítání, je potřeba podotknout, že hlavní proud matematiky je jiný.

Celkově lze říci, že klíčem k výuce matematiky a výpočtů je soustředit se na rozvoj dovedností řešit problémy a praktické zkušenosti s moderními nástroji a technologiemi, a neváznout do zastaralých nebo nepodstatných technik. Důrazem na správné základy můžeme zajistit, aby byli žáci připraveni řešit výzvy moderního světa a co nejlépe využívat neuvěřitelnou sílu matematiky a výpočtů.

Závěrem lze říci, že používání počítačů ve výuce matematiky neznamená, že matematika ztratí svůj význam nebo se utopí. Naopak, může ztížit řešení problémů, které vyžadují více koncepčnosti, protože rozsah toho, co je možné udělat, se zvětšuje, protože počítačové myšlení je osvobozeno od omezení ručního počítání. Počítače však mohou být zneužívány, což vede k bezmyšlenkovitým problémům pro žáky a k nahrazení učitele procedurálními činnostmi, které by měly být přesunuty na počítač. Použití kalkulačky nebo Wolfram Cloud pro domácí úkoly závisí na účelu domácího úkolu a konkrétních dovednostech, na které se zaměřuje. V konečném důsledku může počítačová matematika se správnými domácími úkoly a správnými nástroji pomoci žákům rozvíjet potřebné dovednosti a zároveň zvýšit jejich sebevědomí.

V práci jsme narazili na problematiku spojenou s kvadratickými rovnicemi. Jedna kapitola je věnována ručnímu počítání, zatímco druhá byla řešena pomocí softwaru Wolfram Cloud. Na první pohled je rozdíl v počtu řádků při řešení. To zásadně ovlivňuje práci s časem. Při využiti softwaru byla větší potřeba pracovat se zadáním, důkladně promyslet co je cílem a jakých výsledků chceme dosáhnout. Řešení vypočtené softwarem je důležité patřičně okomentovat, abychom si uvědomili podstatu odpovědi a zpětně pochopili, zda jsme odpověděli na otázku. Využití softwaru za mě přináší do matematiky novou formu studia, žáci mohou ušetření čas nad počítáním využít k závěrům, reflexi či aplikací do reálného světa. Bohužel v klasickém trendu hodin matematiky, jak ji známe dnes si učitelé nemohou dovolit počítat s reflexí, protože by jim nezbyl čas na další učivo, které by téma náležitě prohloubilo a zakořenilo v žácích potřebné zárodky pro následující studium.

Seznam použité literatury

[1] BARTUŠKA, Karel. *Sbírka řešených úloh z fyziky pro střední školy: Mechanika*. 2. vyd. Havlíčkův Brod: Prometheus, 1997. ISBN 978-80-7196-236-6.

[2] BARTUŠKA, Karel. *Sbírka řešených úloh z fyziky pro střední školy II: Molekulová fyzika a termika. Mechanické kmitání a vlnění*. 2. vyd. Praha: Prometheus, 1997. ISBN 80-719-6034-9.

[3] BARTUŠKA, Karel. *Sbírka řešených úloh z fyziky pro střední školy III: Elektřina a magnetismus*. Praha: Prometheus, 1998. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-035-7.

[4] HUDCOVÁ, Milada a Libuše KUBIČÍKOVÁ. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ, SOU a nástavbové studium*. 2. vyd. Praha: Prometheus, 2005. ISBN 80-719-6318-6.

[5] JANEČEK, František. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy*. 5. vyd. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-360-8.

[6] Ocelová kulička. *Sbírka řešených úloh: fyzika – mechanika* [online]. Praha MATFYZ, 2006, 4. 8. 2021 [cit. 2021-12-14]. Dostupné z: https://reseneulohy.cz/110/ocelova-kulicka

[7] *O řešení algebraických rovnic*. Praha: Mladá fronta, 1966. Škola mladých matematiků.

[8] HAŠEK. *Algebra 5* [online]. In: . [cit. 2023-04-15]. Dostupné z: doi:http://home.pf.jcu.cz/~hasek/Algebra5/ALG5_Diskriminant.pdf

[9] WOLFRAM, Conrad. *The Math(s) fix: An Education for the AI Age*. 2020. ISBN 978-1-57955-036-3.

[10] WHYTE, Bobby. Building a maths curriculum for a world shaped by computing. *Raspberrypi: Raspberrypi Foundation* [online]. 25th Oct 2022 [cit. 2023-04-15]. Dostupné z: https://www.raspberrypi.org/blog/maths-curriculum-conrad-wolfram-computing-ai-research-seminar/

[11] *Tackling a Pandemic: A Computer-Based Maths Approach* [online]. April 27, 2020 [cit. 2023-04-15]. Dostupné z: https://blog.wolfram.com/2020/04/27/tackling-a-pandemic-a-computer-based-maths-approach/

Seznam obrázků