



**Bakalářská práce na téma:**

## **VYUŽITÍ MODELŮ TEORIE FRONT PRO ROZHODOVÁNÍ**

**Vypracoval: Lukáš Lopatář**

**Vedoucí bakalářské práce: Ing. Ludmila Dömeová CSc.**

2007 ©

## **PROHLÁŠENÍ**

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma „Využití modelů teorie front pro rozhodování“ zpracoval samostatně za použití uvedené literatury a po odborných konzultacích s Ing. Ludmilou Dömeovou, CSc.

## **PODĚKOVÁNÍ**

Děkuji tímto paní Ing. Ludmile Dömeové, CSc. za odborné vedení a rady při zpracování bakalářské práce. Zároveň děkuji panu Ladislavu Brzybohatému za ochotu při poskytování potřebných podkladů pro praktickou část práce.

# Využití modelů teorie front pro rozhodování

## **Souhrn:**

Tato práce je zaměřena na teorii hromadné obsluhy a popis jejich základních modelů. Je rozdělena na dvě části. První část se zabývá teoretickými poznatky o modelech teorie front, popisem jejich základních charakteristik a možných způsobů řešení těchto modelů. Druhá část se zabývá praktickým využitím této teorie na vybraném modelu z praxe.

Na reálných datech je zde ukázána možnost ekonomického rozhodování za využití modelů teorie front. Na závěr jsou pak prezentovány výsledky tohoto praktického modelu a je popsán jejich význam pro budoucí použití.

## **Klíčová slova:**

Požadavek, fronta, intenzita příchodu, intenzita obsluhy, kapacita obsluhy  
Kendallova klasifikace, optimalizace nákladů

# Queuing Theory in Decision Making

## **Summary:**

This work is aimed for Queuing Theory and describes its basic models. Work is divided into two parts. First part puts mind to theoretical knowledge about Queuing Theory, and describes its basic characteristics and possibilities of their resolution methods. Second part puts mind to practical utilization of this theory on chosen model as analysis practice.

Taking the objective data shows the way and mean of usage Queuing Theory in economical decision-making. At the end, there are presented results of this practical model and there is also described their sense for future application.

## **Keywords:**

Demand, queue, arrival rate, service rate, service capacity, Kendall's classification, costs optimalization

<b>1</b>	<b>ÚVOD</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>CÍL PRÁCE A METODIKA</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>LITERÁRNÍ REŠERŠE</b>	<b>2</b>
<b>3.1</b>	<b>Teorie hromadné obsluhy</b>	<b>2</b>
3.1.1	Modelování HO	3
3.1.2	Typy modelů	4
<b>3.2</b>	<b>Základní pojmy teorie HO</b>	<b>4</b>
3.2.1	Zdroj požadavků	6
3.2.2	Vstup jednotek do systému	7
3.2.2.1	Poissonovo rozdělení	8
3.2.3	Režim fronty	8
3.2.4	Chování ve frontě	9
3.2.5	Parametry obsluhy	9
3.2.6	Výstup jednotky ze systému	10
<b>3.3</b>	<b>Charakteristiky typů modelů</b>	<b>10</b>
3.3.1	Model M/M/1	11
3.3.2	Model M/M/c s čekáním	11
3.3.3	Analýza a řešení systémů HO	12
3.3.3.1	Analytické řešení základních charakteristik	12
3.3.3.2	Simulační řešení	13
3.3.4	Optimalizace nákladů	14
<b>4</b>	<b>POPIS MODELOVÉ SITUACE</b>	<b>14</b>
4.1	Základní charakteristika	17
4.2	Vstupní proměnné	18
<b>5</b>	<b>ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ</b>	<b>20</b>
5.1	Cíl řešení	20
5.2	Kvantifikace vstupních proměnných	21
<b>6</b>	<b>VÝSLEDKY MATEMATICKÉHO MODELU</b>	<b>23</b>
<b>7</b>	<b>ZÁVĚR</b>	<b>28</b>
<b>8</b>	<b>SEZNAM LITERATURY</b>	<b>29</b>
<b>9</b>	<b>PŘÍLOHY</b>	<b>30</b>
	<b>PŘEHLED ZÁKLADNÍCH POJMŮ</b>	<b>32</b>

# 1 Úvod

Poprvé se o teorii front už v roce 1909 zmínil dánský inženýr Agner Erlang, který pracoval v kodaňské telefonní ústředně. Potřeboval vymyslet postup, jak v jednom okamžiku umožnit hovor co největšímu počtu volajících účastníků.

Odborně se teorii front říká také teorie hromadné obsluhy (dále HO). Teorie HO využívá teorii pravděpodobnosti, matematickou statistiku, teorii náhodných procesů a toků. Toto odvětví aplikované matematiky zkoumá činnost systémů, které se vyznačují požadavky na obsluhu jednotkami vstupujícími do systému, které jsou popsány na základě pravděpodobnostních termínů. Tyto požadavky jsou uspokojovány opakovanými homogenními operacemi. Vlivem rozdílné doby obsluhy a nerovnoměrnými vstupy požadavků na obsluhu však vznikají fronty. V praxi to může být například fronta u pokladny v supermarketu, cestující, kteří čekají na odbavení na letišti, nebo automobily čekající na opravu v autoservisu.

Obsluha jednotek v systému je spojena s určitými náklady na provoz. Snahou teorie HO je minimalizace těchto nákladů a doby obsluhy, tedy minimální čas strávený jednotkami v systému za nejnižší režie na provoz a obsluhu. Hledá se tedy optimální řešení počtu obslužných linek v daném systému. Podle počtu těchto linek rozlišujeme jednotlivé modely a také způsoby řešení jednotlivých modelů.

Obecně se uplatňují dva takové způsoby řešení. Analytické řešení spočívá v popsání systému matematickými funkcemi a výpočtem jednotlivých charakteristik. V praxi se častěji objevují systémy složitější, kde nelze jednoduše všechny parametry systému vypočítat. V takových případech se využívá simulačních postupů, kde jsou procesy probíhající v systému modelovány na počítači. Charakteristiky systému jsou pak odvozeny z pozorování této simulace.

Výsledky těchto způsobů řešení následně poskytují potřebné informace k rozhodnutí kolik obslužných linek je potřeba provozovat, aby systém pracoval co nejefektivněji z pohledu ekonomického na provoz obsluhy, nebo dalších faktorů, jako je optimální délka fronty, spokojenost zákazníků apod.

## **2 Cíl práce a metodika**

Cílem této práce je uvést základní modely systému hromadné obsluhy a na reálném příkladu z praxe demonstrovat využití jejich řešení pro rozhodování. Teoretická část popisuje, kde se můžeme se systémy HO v praxi setkat a co je cílem teoretického popisu a analýzy těchto systémů. Následuje popis všech základních typů modelů a vysvětlení základních pojmů. Je zde uveden popis všech jednotlivých součástí systému a jejich možných typů pro různé kategorie systémů hromadné obsluhy. Celkově tak dává teoretická část pojem o celém fungování těchto systémů a o jednotlivých fázích průběhu zpracování hromadné obsluhy. Na vysvětlených základních modelech jsou uvedeny způsoby a přínos jejich řešení.

Nejčastějším přístupem pro řešení těchto modelů v praxi je z pohledu jejich finanční analýzy a nákladového ohodnocení. Optimalizace takto popsaného modelu pak přináší potřebné údaje pro ekonomické rozhodování, nebo o případné modifikaci daného modelu. Na reálném modelu z praxe je pak demonstrována možnost takového rozhodování na základě ekonomických údajů. Pro tuto situaci je v praktické části popsán příklad fungování hromadné dopravy osob, pomocí přívozu, z jednoho břehu Vltavy na druhý v oblasti Klecánky – Roztoky. Nejprve jsou teoreticky popsány jednotlivé komponenty systému a jejich finanční ohodnocení. Data pro tuto práci byla získána z reálného fungování přívozu dlouhodobým pozorováním jeho obsluhy. Jsou to tedy střední hodnoty údajů náhodného charakteru a co možná nejlépe popisují objektivně danou realitu. Pomocí analytického řešení jsou pak vyhodnoceny výsledky tohoto modelu a jejich interpretace pro praktické použití.

V závěru práce je uvedeno celkové zhodnocení přínosu takového řešení modelu hromadné obsluhy a popis dalších možností jak podobné problémy řešit.

## **3 Literární rešerše**

### ***3.1 Teorie hromadné obsluhy***

Se systémy hromadné obsluhy se v praxi setkáváme velmi často. Jedná se například o výrobní linku, dopravní situaci, kde se zkoumá tvořící se fronta vozidel

na křižovatce, obsluha v maloobchodě apod. Teorie hromadné obsluhy pak zkoumá charakteristické vlastnosti těchto systémů.

Základním prvkem je zákazník, který vstupuje do systému s požadavkem na obsluhu. Vstup prvků do systémů je nepravidelný a stejně tak doba obsluhy může mít různé trvání. To způsobuje různou dobu strávenou jednotkami v systému, v závislosti na velikosti vytvořené fronty a čekání na obsluhu. Cílem modelování pak bývá minimalizace této doby strávené jednotkami v systému a zároveň snaha o co nejnižší náklady na obsluhu jednotek provozovatelem systému.

### 3.1.1 Modelování HO

Každý systém HO má v závislosti na počtu obslužných linek (kanálů obsluhy) a jejich produktivitě určitou kapacitu (propustnost), která mu dovoluje více nebo méně úspěšně se vyrovnat s proudem vstupujících požadavků. Předmět modelování HO spočívá právě ve vyhledávání a analýze závislostí mezi charakterem vstupu požadavků, produktivitou jednotlivých linek, počtem linek a efektivností obsluhy. [1]

Existují dva pohledy na systém HO a to z pohledu zákazníka a z pohledu provozovatele, který obsluhu zajišťuje.

**Zákazník**, již před samotným vstupem do systému, se může rozhodovat o čase kdy do systému vstoupit. Jedná tak na základě vlastní zkušenosti, již předešlého procesu obsluhy. Jeho cílem je strávit v systému co nejkratší dobu. Proto si volí čas kdy je fronta obvykle co nejkratší. Případně se může rozhodovat i pro jiné místo obsluhy, například jiná plocha pro přistání letadla, nebo jiný obchod. Takovýto údaj o preferenci zákazníka mezi místem obsluhy může být velice cenný pro potřeby marketingu v rámci analýzy konkurenčního prostředí podniku.

**Provozovatel** přistupuje k systému z pohledu minimalizace nákladů na provoz systému a intenzitu provozu, tedy na maximální počet spokojených obslužených zákazníků.

Systémy HO se pak na základě těchto údajů modelují pro potřeby řešení optimalizace nebo pro návrh nových systémů. V závislosti na konstrukci modelů pak vzniká hlavní rozdíl ve způsobu jejich řešení. Jednoduché matematické modely, se dají řešit analyticky, modely se složitější strukturou, u nichž ani nemůžeme přesně stanovit konkrétní hodnoty, řešíme experimentálně simulací chování systému.



### 3.1.2 Typy modelů

Základní členění modelů HO je podle způsobu řešení na:

**Analytické** – při tomto způsobu řešení je analytik schopen odvodit konkrétní hodnoty pro jednotlivé charakteristiky systému a dopočítat pomocí vzorců další údaje. Toto řešení však lze použít jen pro modely, u kterých lze předem předpokládat jak se bude chovat, jelikož neobsahuje příliš složité vztahy mezi prvky systému, jako je například omezená trpělivost požadavků, preference mezi frontami apod.

**Simulační** – simulací se rozumí experimentování s daným modelem na počítači. Tak jak se systém chová ve skutečnosti navenek je implementováno pomocí programové reprezentace modelu. Uživatel pak pouze definuje vstupy do systému a získá simulovaná data z výstupu pro další zpracování.

Podle [1] rozlišujeme různé typy HO podle dalších kritérií:

- **Systémy s konečným počtem linek**
- **Systémy s nekonečným počtem linek**

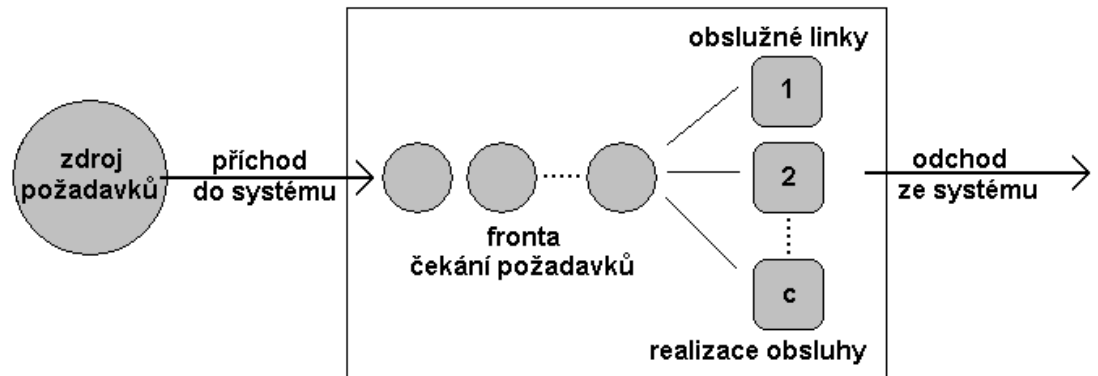
Pokud je obslužná linka volná, požadavek je ihned přijat a obsluha zahájena. V případě, že linka není volná, pak rozlišujeme:

- **Systémy s čekáním (tj. požadavek čeká na obsluhu a vytváří se fronta)**
- **Systémy se ztrátami (tj. požadavek systém ihned opouští bez obsluhy a fronty se nevytváří)**
- **Systémy smíšené**

Další členění je možné podle oblasti uplatnění modelů event. i podle dalších charakteristik.

### 3.2 Základní pojmy teorie HO

Každý systém sestává z prvků a návazností mezi nimi. Obecná struktura systému HO je naznačena na obrázku č.1 podle [4]. Dále pak následuje seznam základních proměnných systému a jejich stručná charakteristika.



Obrázek 1 - Systém hromadné obsluhy

**Intenzita vstupu ( $\lambda$ )** – počet požadavků, které do systému vstoupí za jednotku času.

V případě, že je zadán čas mezi dvěma po sobě následujícími příchody jedná se o **interval mezi příchody**.

**Intenzita obsluhy ( $\mu$ )** – počet obslužených jednotek za jednotku času.

**Počet kanálů obsluhy ( $c$ )** – jedná se o počet míst schopných obsloužit jednu jednotku v systému.

**Intenzita provozu ( $\rho$ )** – vyjadřuje vytíženost kanálů obsluhy

Dále je systém charakterizován jednotlivými časovými údaji **doba čekání ve frontě**, **doba obsluhy**, **doba strávená jednotkou v systému**, počty jednotek v systému a pravděpodobnostmi určujícími aktuální stav systému. Pro přehlednost jsou tyto proměnné seřazeny v tabulce č. 1.

Tabulka 1 - Přehled základních proměnných

Název proměnné	Symbol
Intenzita vstupu jednotek do systému	$\lambda$
Interval mezi vstupy po sobě následujících jednotek	$X_1, X_2, \dots$
Intenzita obsluhy	$\mu$
Počet kanálů obsluhy	$c$
Intenzita provozu systému HO	$\rho$
Střední doba čekání ve frontě	$T_Q$
Střední doba obsluhy	$T_S$
Střední hodnota celkové doby v systému, tj. doba čekání plus doba obsluhy	$T$
Střední počet jednotek ve frontě	$L_Q$
Střední počet jednotek v kanálech obsluhy	$L_S$
Střední počet jednotek v systému	$L$
Pravděpodobnost, že v systému není žádná jednotka	$P_0$
Pravděpodobnost, že v systému je $n$ jednotek	$p_n$
Pravděpodobnost, že počet jednotek v systému je větší nebo roven počtu kanálů obsluhy, tj. pravděpodobnost, že všechny kanály obsluhy jsou obsazeny	$p\{L \geq c\}$
Pravděpodobnost, že počet jednotek v systému je větší než libovolné číslo $k$	$p\{L > k\}$

### 3.2.1 Zdroj požadavků

Jedná se o jednotky vstupující do systému za účelem realizace obsluhy. V literatuře se pro tyto požadavky užívá pojmenování **potencionální zákazník** [1]. Počet těchto potencionálních zákazníků může být **konečný**, například vzhledem k registrovanému počtu pacientů v ordinaci, nebo je tento počet teoreticky omezený počtem obyvatel v jednom městě, ale celkově je tato hodnota natolik vysoká, že takový zdroj považujeme za **nekonečný**. Skutečně konečný počet potencionálních zákazníků se tak dá předpokládat pouze u systému, který má přesně definovaný malý

počet vstupních jednotek. Například opravárenská dílna pro 5 zemědělských strojů jednoho podniku.

### 3.2.2 Vstup jednotek do systému

Další důležitou charakteristikou je okamžik vstupu jednotek do systému. Tento proces se nazývá **vstupní tok**. Rozlišujeme dva typy, **regulární tok** a **náhodný, Poissonovský tok** (viz dále 3.2.2.1), podle toho, zda jednotky vstupují do systému v pevných časových krocích, nebo náhodně s určitým pravděpodobnostním rozdělením. Pro potřeby výpočtu modelu je pro nás podstatný údaj kolik jednotek vstoupí do systému za jednotku času pomocí hodnoty *intenzita vstupu* a nebo stanoveným *intervalem příchodu* mezi jednotlivými jednotkami v případě **pevného časového okamžiku** mezi dvěma vstupy. Takovýto deterministický příchod jednotek do systému je typický například pro automatickou výrobní linku.

Bezprostředně po vstupu jednotky, ještě než se začne řadit do fronty, nebo přejde rovnou k realizaci obsluhy, mohou probíhat další procesy. Tyto procesy jsou závislé na speciálním rysu systému HO. Tím je **omezení kapacity obsluhy**. Určujícím je stanovený možný maximální počet jednotek přítomných v systému v jednom časovém cyklu. Podle toho rozlišujeme **model s čekáním** a **model bez čekání**. Uvažujeme-li model vstupu zákazníka do obchodu, jedná se o model s čekáním, kdy si zákazník může zvolit, ve které frontě bude čekat, například podle její délky, nebo rychlosti obsluhy, případně si zvolit zda vůbec bude dále ochoten setrvávat v systému, či rovnou ze systému odchází neobsloužen. Tento případ může být častější, uvažujeme-li model příchodu paketů na server počítačové sítě, kdy vlivem přetížení serveru a nemožnosti obsluhy je paket (zákazník) rovnou "zahozen". Jedná se tedy o model bez čekání.

Výše popsané události se vztahují k předpokladu, že jednotky do systému vstupují jednotlivě. Jedná se tedy o **ordinární vstup**. Pokud ovšem jednotky vstupují po **skupinách**, v dávkách, jsou obsluhovány buďto jako jednotlivec, nebo se jako interval mezi příchody dosazuje nekonečně malá hodnota.

### 3.2.2.1 Poissonovo rozdělení

Toto rozdělení nejlépe vystihuje počet výskytů určitého jevu za jednotku zkoumaného časového intervalu. Důležitá je beznáslednost těchto jevů, kdy výskyt předcházejícího jevu neovlivňuje pravděpodobnost výskytu po něm následujícího. Vznikají tak náhodné intervaly mezi výskyty jednotlivých jevů a výsledkem je pak celkový součet těchto výskytů za jednotku času.

Při modelování reálné situace pak vycházíme z toho, že pravděpodobnost, že jednotka vstoupí do systému, má právě toto rozdělení, tedy výsledná *intenzita vstupu* je dána součtem těchto vstupů za určitý interval při dané pravděpodobnosti výskytu.

### 3.2.3 Režim fronty

Dalším stupněm v procesu obsluhy jednotek v systému je jejich řazení do front. Režim fronty pak dále určuje mechanismus, podle kterého jsou jednotky vybírány k obsluze. Podle literatury [4], jsou rozlišovány tyto základní typy:

1. **FIFO** (first-in / first-out) představuje situaci, kdy požadavky přecházejí z fronty do obsluhy v tom pořadí, v jakém do systému přišly. Někdy se pro označení tohoto režimu fronty používá zkratka **FCFS** (first-come / first-served). Jedná se o případ, který se vyskytuje v systémech hromadné obsluhy nejčastěji (samoobsluha, banka, benzínová stanice atd.).
2. **LIFO** (last-in / first-out) je opačný režim fronty. Požadavky jsou obsluhované v opačném pořadí, než v jakém do systému vstoupily. Ilustrací může být případ, kdy se před nějakým místem na výrobní lince hromadí polotovary tak, že jsou ukládány na sebe (například tabule skla). Následující výrobní stupeň je potom odebírá v opačném pořadí, než v jakém byly uloženy. Alternativní označení tohoto režimu fronty je **LCFS** (last-come / first-served).
3. Náhodný způsob přechodu z fronty do obsluhy - **SIRO** (selection in random order).
4. Přejechod z fronty do obsluhy podle zadaných priorit - režim **PRI**- V tomto režimu jsou požadavky obsluhované podle definovaných priorit. Pokud se vyskytne ve frontě současně několik požadavků s nejvyšší prioritou, potom jsou tyto obsluhované ve zvoleném režimu (například FIFO).

### 3.2.4 Chování ve frontě

V automatizovaném provozu je ochota čekání jednotek na obsluhu neomezená. Jisté omezení plyne pouze z charakteru trvanlivosti jednotky, například u potravinářských produktů, zboží apod. Rozhodování výběru fronty takovýchto jednotek tedy podléhá pravidlům nakládání se zásobami, skladovými kapacitami, výrobnímu programu linky atd.

Typické chování ve frontě lze tedy spíše sledovat na modelu zákazníka v obchodě. Každý jednotlivec se vyznačuje různou preferencí a ochotou čekat na obsluhu, tedy jeho **trpělivostí**. Může také přecházet z jedné fronty do druhé, pokud je to dovoleno, nebo pokud má zákazník k dispozici informaci o délce ostatních front.

### 3.2.5 Parametry obsluhy

**Doba obsluhy** může být v systému definována jako konstantní pro všechny typy požadavků na obsluhu. Tedy v systémech s deterministickou strukturou, například u výrobní linky jednoho výrobku. Častější je doba obsluhy jako náhodná veličina s exponenciálním rozdělením.

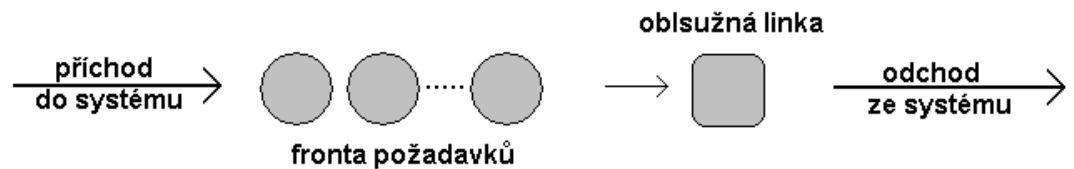
**Kapacita obsluhy** udává maximální počet požadavků, které se mohou v systému vyskytovat současně (počet linek).

**Dostupnost** je omezení, které zmenšuje počet požadavků, které mohou být obsluhovány v porovnání s plnou kapacitou obsluhy. U neúplně dostupných systémů musí pak být uvedeno trvání dob a frekvence vyřazených linek obsluhy.

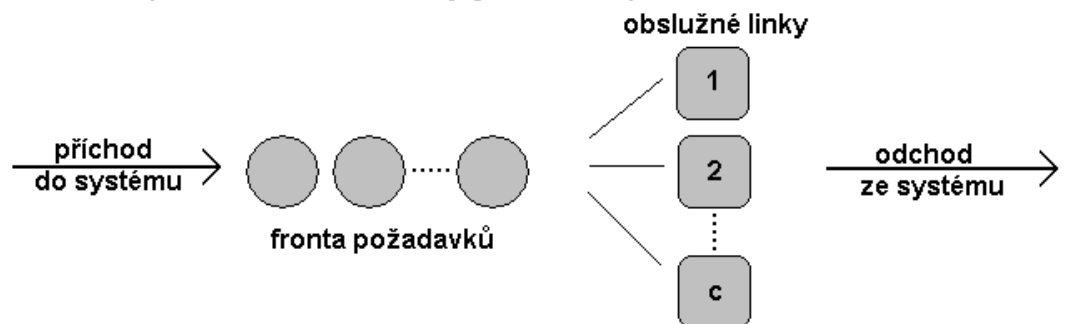
Počet obslužených jednotek za jednotku času pak udává **intenzitu obsluhy** v systému. Intenzita obsluhy je ovlivněna nejen dobou obsluhy, ale také strukturou obslužných linek v systému, tzv. **režimem obsluhy**. Celkově pak ovlivňuje délku front a čas strávený jednotkami v systému jako součet doby čekání ve frontě a dobou obsluhy.

Základní typy řazení linek obsluhy je patrný z obrázku č.2 podle [4].

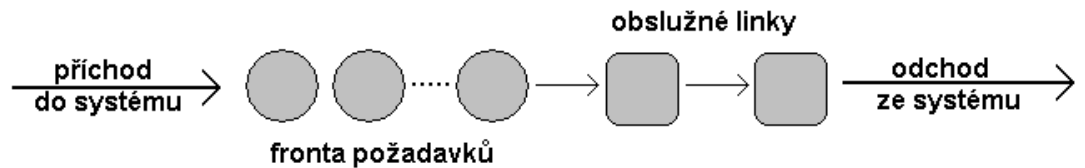
jedna obslužná linka



paralelně uspořádané obslužné linky (jedna fronta)



sériově uspořádané obslužné linky (2 linky)



Obrázek 2 - Uspořádání sítě obslužných linek

### 3.2.6 Výstup jednotky ze systému

Výstupní tok ze systému je také náhodnou veličinou. Záleží pak na dalším uspořádání systému, jestli je výstup konečný, nebo zda je výstup vstupem do další části obsluhy, například u sériového spořádání linek obsluhy.

### 3.3 Charakteristiky typů modelů

Vzhledem k počtu možných charakteristik modelů HO jsou tyto modely pro jednoduchost klasifikovány podle klíče, který zavedl Angličan D.G. Kendall, ten stanovil první tři parametry klasifikace. Odtud vznikla nyní používaná posloupnost symbolů, která je rozšířena o další 3 parametry a je označována jako **Kendalova klasifikace**. Obecný zápis symbolů podle [4] je **A/B/C/D/E/F** a jejich význam je následující:

- A** charakterizuje typ pravděpodobnostního rozdělení, popisujícího intervaly mezi příchody požadavků do systému. Pro exponenciální rozdělení je používán symbol **M**, pro konstantní intervaly mezi příchody symbol **D**, pro nespécifikované rozdělení s nějakou střední hodnotou a směrodatnou odchylkou symbol **G**.
- B** charakterizuje typ pravděpodobnostního rozdělení, popisující dobu trvání obsluhy. Používají se stejné symboly jako při popisu intervalů mezi příchody.
- C** je počet paralelně uspořádaných linek.
- D** je číslo, které udává kapacitu systému hromadné obsluhy – pokud není tato kapacita omezená, použije se symbol  $\infty$ .
- E** je číslo, udávající početnost zdroje požadavků – pokud je zdroj požadavků nekonečný, použije se opět symbol  $\infty$ .
- F** je režim fronty (FIFO, LIFO, PRI, SIRO).

### 3.3.1 Model M/M/1

Podle výše uvedené klasifikace je tento model s exponenciálním rozdělením pravděpodobnosti příchodu jednotek do systému. Je tedy stanovena **intenzita příchodu  $\lambda$** . Jako druhý parametr je **intenzita obsluhy  $\mu$** , která má rovněž exponenciální rozdělení pravděpodobnosti a která je odvozena od **střední doby trvání obsluhy**. V systému pracuje **jedna obslužná linka**, která je plně dostupná, tedy je-li volná, ihned přijímá další požadavek na obsluhu čekající ve frontě. Výjimkou jsou pouze poruchy, které se mohou v praxi vyskytnout a jejichž odstranění trvá určitou dobu. Zbývající 3 parametry nejsou uvedeny, předpokládají se tedy implicitně hodnoty  $\infty/\infty/\text{FIFO}$ , tzn. neomezený počet jednotek, zároveň se vyskytujících v systému (právě obsluhovaných plus čekajících ve frontě na obsluhu), neomezený počet jednotek, které mohou vstoupit do systému a režim fronty first-in / first out.

### 3.3.2 Model M/M/c s čekáním

System má stejné vlastnosti s rozdílem počtu obslužných linek, který je větší než 1. Kanály obsluhy jsou homogenní, tzn. , že mají stejnou **intenzitu obsluhy  $\mu$**  a



stejnou dostupnost. Intenzita jednoho kanálu obsluhy je pak rovna  $\mu/c$ . **Intenzita příchodu**  $\lambda$  je shodná s modelem M/M/1.

### 3.3.3 Analýza a řešení systémů HO

Při analýzách HO se zajímáme především o charakteristiky popisující fungování celého systému. Jejich řešení je u obou výše popsaných modelů obdobné a je dostupné analyticky za pomoci výpočetní techniky. Řešíme tedy základní časové charakteristiky týkající se požadavků na obsluhu, dále charakteristiky týkající se počtu jednotek v systému a pravděpodobnostní charakteristiky. Ty slouží především k analýzám vytíženosti systému HO a pravděpodobnostem výskytu jednotek ve frontě, nebo v kanále obsluhy, nebo zda linka právě pracuje, či není využita. V neposlední řadě se sleduje nákladová analýza, pakliže jsme schopni nákladově ohodnotit potřebné veličiny pro výpočet.

U modelu M/M/c navíc sledujeme aktuální stav obsluhy systému, který je daný větším počtem jednotek v kanálech obsluhy, tj. počet volných a počet obsazených kanálů obsluhy, případně stav front a počet požadavků ve frontách, jedná-li se o systém s více frontami.

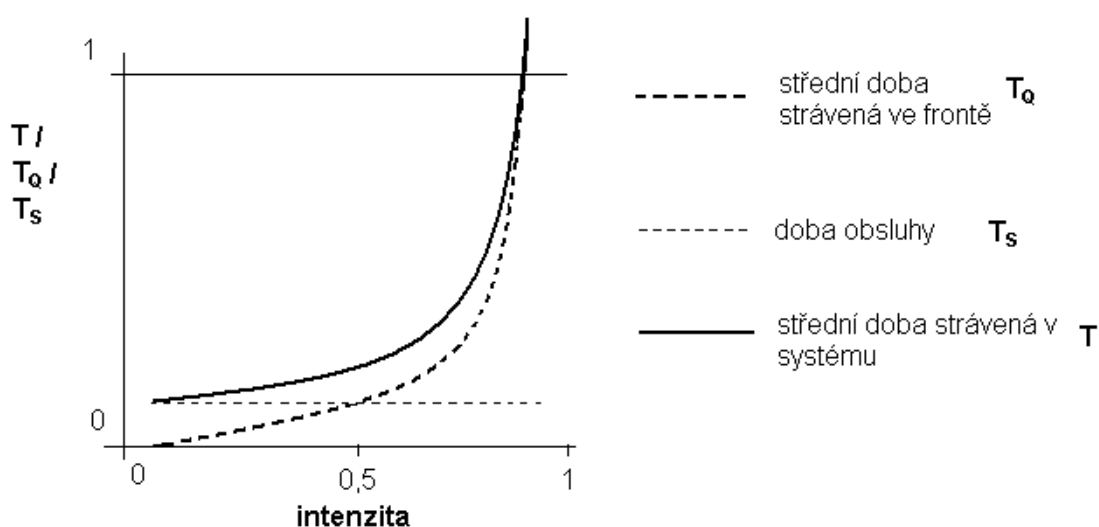
Řešení uvedených charakteristik a jejich analýza slouží pro potřeby nejen popisu systému stávajícího, ale především pro jeho možnost optimalizace, v případě, že se objeví možnost upravit stávající systém například vhodnější volbou počtu obslužných linek za účelem nižších nákladů, zvýšení obslužných kapacit, zkrácení čekacích prostoje uvnitř systému, nebo zvýšení zisku.

#### 3.3.3.1 Analytické řešení základních charakteristik

U obou modelů je dána intenzita vstupu  $\lambda$  a intenzita provozu  $\mu$ , potom podíl těchto hodnot je roven intenzitě provozu, značíme ji  $\rho$ . Intenzita provozu vyjadřuje vytíženost provozu, tedy jak vytížená je obsluha. Tato hodnota může dosáhnout 100% v případě, že se v systému neustále v každém okamžiku zkoumání vyskytuje alespoň jedna jednotka, která je právě obsluhována. To je však možné pouze u modelů deterministických. V praxi je častější stochastický model, kdy zákazník vstupuje do systému v nepravidelných intervalech. Obsluha je tak v některých okamžicích nevyužitá – právě nepracuje, nebo pokud právě obsluhuje, nově příchozí jednotka se

řadí do fronty. Pro větší hodnoty intenzity provozu je i vyšší hodnota doby strávené jednotkami ve frontě a i délka fronty. Pro hodnoty intenzity provozu větší než 1 platí, že příchod nových jednotek do systému je vyšší než schopnost kanálů obsluhy tyto jednotky odebírat, fronta tak roste nade všechny meze. V praxi je doporučená intenzita provozu do hodnoty 0,8. Jak intenzita provozu ovlivňuje dobu strávenou jednotkami v systému je názorné z obrázku č. 3 podle [1].

Podrobné výpočty základních charakteristik jsou shrnuty do tabulek a jsou uvedeny v příloze na konci práce.



Obrázek 3 - Závislost intenzity provozu a doby strávené jednotkami v systému

### 3.3.3.2 Simulační řešení

Způsob jak řešit složitější systémy je právě simulační řešení. Složitějšími systémy se rozumí ty, u kterých již není možné jednotlivé charakteristiky odvodit a matematicky vypočítat. U takovýchto modelů jsou děje uvnitř systému o mnoho složitější. Známe spíše pravděpodobnost s jakou se bude systém v danou chvíli chovat, protože jsou tyto děje popsány náhodnými jevy, které celý systém ovlivňují. Celkové řešení pak podléhá řízenému experimentu, kdy jsou získána výstupní data pořízena na základě zadaných vstupních dat. Zkouší se tak celá funkčnost systému.

Nejprve je však nutné vybrat vhodný model vhodnými prostředky naprogramovat a vytvořit jeho strukturu. Vzhledem k tomu, že se celý proces tvorby a simulace děje na počítači je možný simulační experiment vícekrát opakovat. Vytvořit dostatečný počet

opakování je také nutný postup k určení výsledků pro celkovou analýzu. Celkový výsledek je pak získán statistickým vyhodnocením dílčích opakování simulace.

Simulace modelů na počítači je také výhodná při postupech, kdy systémy ještě neexistují v reálném světě, jsou zatím jen zkoumány teoreticky a jejich výstavba je teprve plánována. Např. kdyby výstavba takového systému byla příliš nákladná. Teprve až po odzkoušení všech možných variant systému, se vybere ten nejlépe vyhovující daným podmínkám a může být přistoupeno k jeho realizaci.

### **3.3.4 Optimalizace nákladů**

Provoz systému je spojen se několika typy nákladů. Náklady na obsluhu se liší podle využití obsluhy. Druhým typem nákladů jsou fixní na provoz systému, například nájem za budovu. Dalším neméně významným nákladem je přímo vyčíslitelný náklad v souvislosti s pobytem jednotky ve frontě. Náklady z čekání zahrnují také náklady ušlé příležitosti, kdy netrpělivá jednotka pro dlouhé čekání systém opouští neobsložená a nerealizuje tržby. Takovéto náklady mohou vzniknout i v případě například kazícího se zboží, ztrátách na hmotnosti zemědělských produktů apod.

Pokud jsou dostupné konkrétní hodnoty těchto nákladů je možné vybraný model optimalizovat. Například podle minimálních nákladů na provoz systému, nebo podle minimálních nákladů na obsluhu, při kterých je systém ještě efektivní.

## **4 Popis modelové situace**

V okrese Praha-Východ je doprava mezi Klecánkami a Roztokami zajišťována přívozem. Přívoz jezdí pravidelně v půlhodinovém intervalu, který je upraven jízdním řádem viz tabulka č.2. Rozlišuje se v něm pracovní týden a víkend, kdy jezdí častěji. Přívoz je využíván pro přepravu osob, případně i malého počtu cyklistů, nebo motocyklů. Přepravu zajišťuje Městský úřad Klecany. Ten také stanovuje pravidla a podmínky provozu této dopravní služby a také ceník jízdného, který je uveden v tabulce č.3. Tato pravidla musí podléhat pravidlům plavebního provozu nákladních a osobních lodí na řece Vltavě, která vydává Povodí Vltavy a.s. a dále pravidlům bezpečné přepravy osob. Přívoz jezdí po celý rok, jsou však stanoveny výjimky:

1. V případě vyššího průtoku než je 450 m<sup>3</sup>/s vody, nesmí přívoz vyjet na řeku. Toto pravidlo se řídí pokyny plavební správy podniku Povodí Vltavy a.s.
2. Aby byla zajištěna bezpečná přeprava osob i v případě poruchy, musí být na přívoze funkční vesla, záchranné kruhy a další záchranné prvky zabezpečující přepravované osoby. Dále je přívoz jištěn ocelovým lanem, které je přes kladku připevněno k ocelovému lanu nataženému přes řeku.
3. Přívoz nesmí vyjet na řeku při velké nepřízni počasí, např. při silné bouři, větrech dosahujících velké rychlosti, které ohrožují bezpečný průběh přepravy. Zda je provoz v danou chvíli bezpečný nebo ne, je na uvážení obsluhy přívozu.

**Tabulka 2 - Plavební řád přívozu Klecánky - Roztoky**

<b>PONDĚLÍ – PÁTEK</b>		<b>SOBOTA, NEDĚLE, SVÁTKY</b>	
05.40	14.30	05.40	přestávka
06.10	15.00	06.10	13.00
07.10	15.30	06.40	13.30
07.30	16.00	07.10	14.00
08.00	16.30	07.30	14.30
08.30	17.00	08.00	15.00
09.00	17.30	08.30	15.30
přestávka	18.10	09.00	16.00
13.00	18.30	09.30	16.30
13.30	19.00	10.00	17.00
14.00	19.30	10.30	17.30
	20.00	11.00	18.10
		11.30	18.30
		12.00	

Počasí, v tomto způsobu přepravy osob, hraje velkou roli, proto její využití podléhá velkým sezónním výkyvům. Přes zimu je počet průměrně přepravených osob jen velmi malý a tržby z přepravy tak nejsou dostatečné ani na pokrytí nákladů. Opačně to pak je v letních dnech, nebo za dobrého počasí na podzim a na jaře, kdy je přívoz hojně využíván turisty a cyklisty. Za špičku provozu pak lze považovat víkendové dny, za slunného počasí v období květen-červen a září, a to v čase od 11.00 do 15.30. V tomto úzce vymezeném období je doprava natolik frekventovaná, že dochází k velkým frontám, delšímu čekání zákazníků na přepravu, což ovlivňuje zisky, které jsou pak klíčové pro financování období, kdy není provoz tolik výnosný. Čekání zákazníků má vliv na jejich rozhodnutí, zda využijí služeb přívozu, nebo budou dále pokračovat v cestě po stejném břehu. Obě tyto trasy jsou vedené v turistických a cyklistických mapách a jsou vybaveny možnostmi občerstvení a ostatními atraktivitami.

Pro analytické vyhodnocení a výpočet konkrétních hodnot je tedy nejzajímavější období, kdy dochází ke špičce v přepravě. Počet přepravených zákazníků je závislý na několika možných přístupech obsluhy přívozu a tím jsou ovlivněny i zisky z přepravy. V dalších odstavcích jsou tyto různé přístupy obsluhy popsány a vyhodnoceny z hlediska nákladů a zisku.

**Tabulka 3 - Ceny jízdného přívozu Klecánky**

<b>Přepravovaná osoba</b>	<b>Cena</b>
Děti do 6 let	---
Děti od 6 do 9 let	8,-
Dospělí	12,-
Invalidé TP a ZTP	---
Kolo dětské (včetně osoby)	10,-
Kolo pro dospělé (včetně osoby)	15,-
Moto	20,-
Dětský kočárek	5,-
Jízda mimo jízdní řád	20,-

#### **4.1 Základní charakteristika**

Konstrukčně je přívoz malé plavidlo s motorovým pohonem. Pro obsluhu a řízení je zapotřebí jedna osoba. Plavidlo má po bočních stranách připevněna sedadla pro cestující. Maximální počet osob, které smí být najednou přepraveny, je 15. Prostor a kapacita přívozu je dostatečná i v případě, že by všechny osoby měly kolo. Příklad, kdy přepravu využije osoba s kočárkem, nebo na motocyklu, není tak častý. To bude podrobněji popsáno v kapitole 4.2 Vstupní proměnné.

**Příchod zákazníků** je stochastický a je závislý na počasí, denní době a roční sezóně. V obvyklém nevytíženém provozu, jezdí přívoz v pravidelných půlhodinových intervalech tak, jak mu stanovuje plavební řád. Tento interval musí obsluha dodržet i pokud by měl převézt jen jednu osobu. Nemůže tak čekat, než se naplní celá dávka požadavků, kterou je možné obsloužit současně. Pokud je počet příchozích během intervalu čekání na jízdu větší než 15, musí tyto zákazníci čekat až na další interval spoje. To však může způsobit netrpělivost jednotky, která odejde a pokračuje v cestě po jiné trase.

**Obsluhou** se rozumí čas, kdy jednotka nastupuje, poté doba jízdy k druhému břehu a vystoupení z lodi. Tato celková doba obsluhy je velice proměnlivá podle počtu právě přepravovaných osob, prodlev při placení jízdného a celkového chování pasažérů při nastupování a vystupování.

**Náklady** jsou u tohoto modelu dány spotřebou paliva pro přepravu, které jsou variabilní podle četnosti obsluhy během dne a nájmem za budovu pro pobyt převozníka za měsíc.

Podle výše uvedeného je tedy uvažován model M/M/1 nebo M/D/1 podle toho zda se obsluha rozhodne jet navíc i mimo plavební řád, nebo zda k obsluze dochází deterministicky ve stanovených intervalech. Zdroj požadavků je nekonečný. Dávka najednou obslužených jednotek je proměnná hodnota od 1 do 15 a odvíjí se od ní velikost tržby při konstantních nákladech za jednu jízdu. Režim fronty je FIFO, nově příchozí jednotky se řadí do fronty a čekají zda se vejdou do dávky 15 osob pro přepravu, jinak čekají na další interval spoje.

V uvažované špičce obsluhy je téměř vždy určitý počet jednotek v systému čekajících na obsluhu. Úkolem obsluhy je proto rozhodnout, zda poskytne obsluhu na

základě pevného intervalu nebo podle počtu právě čekajících jednotek. Podle toho se tedy dají určit tři možnosti postupu:

1. Pravidelný 30-ti minutový interval obsluhy podle řádu. Tento přístup je použit pouze v případě, že počet jednotek čekajících na obsluhu je menší než 15. To je ovšem ve sledovaném období nepravděpodobné. Při dodržování 30-ti minutového intervalu při největší špičce provozu by tak docházelo k velkému počtu neobsloužených zákazníků a příliš velkým ztrátám na zisku, respektive obrovským nákladům ušlé příležitosti, proto je z dalšího řešení tento postup předem vyloučen.
2. Přívoz přejezdě na druhý břeh častěji, a to vždy, když je plná dávka 15-ti čekajících osob pro obsluhu. Dále se tento postup bude v textu označovat jako metoda A - plná kapacita dávky na jednu realizaci obsluhy.
3. Přívoz přejezdě na druhý břeh vícekrát za hodinu, častěji než při metodě A. To i v případě, že není plně využita kapacita obsluhy. Minimalizuje se tak čas při odbavování cestujících a obsluhu je tak možné realizovat po menších dávkách mnohem častěji. Zvýší se tak náklady na provoz, ale ve výsledku je možné přepravit více osob za časovou jednotku. Tento postup se bude dále v textu označovat jako metoda B - neúplná kapacita dávky na jednu realizaci obsluhy.

## **4.2 Vstupní proměnné**

**Intenzita vstupu** jednotek do systému je různá. Odvíjí se od konkrétního času a charakteru počasí sledovaného období. Situace, kdy je příliv zákazníků natolik velký, aby to bylo zajímavé pro řešení, nastává ve špičce turistické sezóny v konkrétním čase kolem poledních hodin. Pro náš případ bude tedy počítáno s více hodnotami pro větší přesnost modelu a dále bude následovat analytické řešení při těchto hodnotách spolu s vyhodnocením, kdy je pro kterou intenzitu vstupu jednotek výhodnější zvolená metoda obsluhy podle kritéria výše zisku pro převozníka.

Dalším vstupním parametrem modelu je **doba obsluhy**. Ta je různá podle zvolené metody obsluhy. Hlavní rozdíl spočívá v tom, že jedna metoda počítá s plným využitím kapacity přívozu pro převoz zákazníků. Větší počet převážených

lidí, ale způsobuje delší průtahy při jejich odbavování. Doba obsluhy, skládající se z nástupu, placení, převozu a konečného vystoupení cestujících, je tak celkově větší. Oproti tomu druhý způsob využívá kapacitu přívozu jen z poloviny, je tak zkrácena i průměrná doba odbavování cestujících a celková doba obsluhy se tím zkrátí. Obsluhu je tak možné realizovat vícekrát za hodinu, což ale způsobuje vyšší náklady na provoz za projetí benzín.

Další proměnnou modelu je **trpělivost jednotek** čekajících na obsluhu. Zákazníci mají možnost si zvolit při své trase, zda využijí služeb přívozu, nebo jestli budou dále pokračovat po stejném břehu. Případně svůj zájem o obsluhu odloží na jiný čas, kdy už není přívoz tolik plně vytížen a fronta se tolik netvoří. Tato trpělivost je stanovena pravděpodobnostně. Tato pravděpodobnost odchodu ze systému roste s délkou čekání ve frontě na obsluhu. Jednotka, která takto systém opustí, pak představuje náklady ušlé příležitosti za nerealizovanou tržbu.

Nejdůležitější proměnnou pro rozhodování obsluhy, který způsob přepravy zvolit je velikost zisku, který může za jednu jízdu realizovat. Ten se odvíjí od nákladů na provoz podle četnosti obsluhy a tržeb za jízdné od zákazníků přicházejících do systému. Nejen doba příchodu, ale i typ zákazníka, který do systému HO vstupuje je náhodná veličina. **Typ zákazníka** určuje i velikost tržby, kterou převozník za jednu jízdu inkasuje. Pravděpodobnost jaký typ zákazníka do systému vstoupí a velikost tržby při obslužených 100 zákaznících za hodinu ukazuje tabulka č.4.



Tabulka 4 - Pravděpodobnost výskytu typu zákazníka

Typ zákazníka	Pravděpodobnost výskytu	Tržba při obslužených 100 zákaznících / hodinu
Děti do 6 let	5%	0
Děti od 6 do 9 let	8%	64
Dospělí	30%	360
Invalidé TP a ZTP	2%	0
Kolo dětské (včetně osoby)	12%	120
Kolo pro dospělé (včetně osoby)	40%	600
Moto	1%	20
Dětský kočárek	2%	10
Jízda mimo jízdní řád*	---	---
<b>Tržba za hodinu celkem</b>		<b>1174</b>

\*Jízda mimo řád se v tomto způsobu přepravy neuvažuje, nejedná se o případ, kdy si jízdu mimo řád vyžádá sama jednotka.

**Náklady na provoz** jsou přímo úměrné četnosti obsluhy. Tržby realizované za převoz osob zmenšené o tyto náklady za projetí benzín, jsou pak ziskem, který tvoří celkovou rentu převozníka. Jeho snahou je tedy maximalizace těchto tržeb za minimálních nákladů za provoz. Náklady za pronájem budov pro pobyt převozníka v čase kdy právě neobsluhuje nejsou zahrnuty do řešení, protože se jedná o konstantní proměnou a ovlivňuje tak výši renty převozníka stále stejnou měrou, bez ohledu na to, jakou metodu obsluhy právě zvolí.

## 5 Analytické řešení

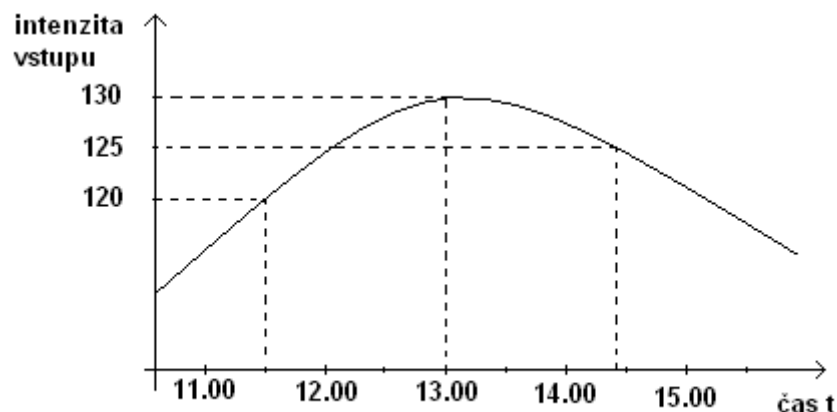
### 5.1 Cíl řešení

Analytické řešení spočívá v kvantifikaci vstupních proměnných modelu a takto určit hodnoty potřebné pro celkovou nákladovou analýzu modelu. Cílem řešení je z dosažených výsledků co možná nejlépe určit hodnoty potřebné pro rozhodování.

K oběma možným metodám přepravy osob je možné vypočítat konkrétní hodnoty nákladů na provoz a velikost tržeb a z toho odpovídající velikost zisku. Maximalizace tohoto zisku je pak hlavním motivem obsluhy pro rozhodování, kterou metodu obsluhy v daném okamžiku provozu právě použít.

## 5.2 Kvantifikace vstupních proměnných

Již v úvodu této části práce bylo uvedeno, že intenzita vstupu jednotek do systému je náhodná veličina se Poissonovým rozdělením pravděpodobnosti. Dále je tato veličina závislá na konkrétním čase, kdy uvažovanými jednotkami je počet příchozích zákazníků za hodinu. Intenzita vstupu je rozdílná i během špičky provozu, tedy v průběhu celého sledovaného období. Z praktického pozorování modelu v reálném provozu byly určeny hodnoty intenzity vstupu v průběhu sledovaného období. Podrobně je intenzita vstupu zachycena na obrázku č. 4.



Obrázek 4 - Intenzita vstupu jednotek ve sledovaném období

Pro potřeby analytického řešení budeme uvažovat tři hodnoty intenzity vstupu. Dopolodní 120, polední 130 a odpolední 125.

Doba obsluhy je také náhodná veličina s exponenciálním rozdělením pravděpodobnosti. Střední hodnota doby obsluhy se liší podle zvolené metody obsluhy s maximálním, nebo s neúplným využitím kapacity přívozu. Údaje naměřené z reálného provozu spolu s intenzitou obsluhy a počty jízd jsou uvedeny v tabulce č.5.

**Tabulka 5 - Intenzita obsluhy pro obě metody obsluhy**

<b>charakteristika</b>	<b>Metoda A – plně využita kapacita míst</b>	<b>Metoda B – neúplně využitá kapacita míst</b>
Doba obsluhy pro jednu dávku požadavků	5 min 10 sec	3 min 20 sec
Doba obsluhy pro cestu tam i zpět	10 min 20 sec	6 min 40 sec
Celková doba obsluhy*	15 min	7 min 30 sec
Počet požadavků obslužených v jedné dávce	15	8
Celkový počet obslužených jednotek	30	16
Počet jízd přívozu tam a zpět za hodinu	4	8
<b>Intenzita obsluhy osob/hodinu</b>	<b>120</b>	<b>128</b>

\* Celková doba obsluhy vychází z reality z více zprůměrovaných měření během sledovaného období. Je zde počítáno i s menší pauzou pro převozníka, mezi jednotlivými obsluhami.

Trpělivost jednotek je dána jejich ochotou čekat ve frontě. Z výše uvedených hodnot vyplývá, že intenzita obsluhy není dostatečná, aby pokryla počet požadavků na obsluhu v jedné dávce. Pravděpodobnostně se dá stanovit, že 50% zákazníků je ochotných čekat na další spoj, pokud se již nevešel do první dávky obsluhy. Polovina zákazníků, kteří do systému vstoupí nad možnosti obsluhy, tak tvoří vstup jednotek v dalším intervalu a druhá polovina představuje nerealizované tržby, neboli náklady ušlé příležitosti.

Typ zákazníka určuje velikost tržby, kterou převozník inkasuje při obsluze. Pokud máme zadané tři hodnoty intenzity vstupu, tedy počet příchozích zákazníků za hodinu, můžeme stanovit celkový objem tržeb za hodinu z obslužených zákazníků.

Posledním parametrem modelu potřebným pro výpočet a analýzu jsou náklady na provoz. Jsou závislé na četnosti obsluhy za hodinu vzhledem k projetému benzínu. Průměrná spotřeba benzínu je 0,160 litru na jednu jízdu tam i zpět. Chod motoru je za všech podmínek stejný, nezáleží na zaplnění kapacity míst přívozu, proto je spotřeba pro obě metody shodná. Rozhodující je proto jen četnost obsluhy za hodinu. Podrobně jsou kvantifikovány v tabulce č.6. Pro výpočet modelu byla použita aktuální cena benzínu 30,33 Kč/litr.

**Tabulka 6 - Náklady na provoz, spotřeba benzínu**

	<b>Počet jízd / hodinu</b>	<b>Spotřeba litru benzínu / jízdu</b>	<b>Cena benzínu / litr</b>	<b>Celk. náklady / hodinu</b>
Metoda A	4	0,160	30,33 Kč	19,4 Kč
Metoda B	8	0,160	30,33 Kč	38,8 Kč

## **6 Výsledky matematického modelu**

Nejprve je nutné vyhodnotit intenzitu provozu pro obě metody, abychom zjistili, kdy dochází k přetížení obsluhy systému a z fronty tak odchází neuspokojení zákazníci viz tabulka č. 7.

**Tabulka 7 - Výpočet intenzity provozu a neobsloužených jednotek**

<b>Metoda A</b>	<b>Intenzita vstupu <math>\lambda</math></b>		
	120	125	130
Intenzita obsluhy $\mu$	120	120	120
Intenzita provozu $\rho$	1,00	1,04	1,08
Počet obsloužených jednotek	120	120	120
Počet neobsloužených jednotek	0	5	10
<b>Metoda B</b>	<b>Intenzita vstupu <math>\lambda</math></b>		
	120	125	130
Intenzita obsluhy $\mu$	128	128	128
Intenzita provozu $\rho$	0,94	0,98	1,02
Počet obsloužených jednotek	120	125	128
Počet neobsloužených jednotek	0	0	2

Z této tabulky je zřejmé, že při intenzitě provozu vyšší než 1 daný systém nefunguje a začínají se tak vytvářet neúnosné fronty, které způsobí, že 50% neobsloužených zákazníků ze systému odejde a tím způsobí ztráty z nerealizované tržby.

V další části je tedy důležité stanovit tyto hodnoty tržeb a všech nákladů. Tržby jsou tvořeny poplatky za převoz. Tyto poplatky se liší podle typu zákazníka, který do systému vstoupí. Náklady na provoz jsou tvořeny spotřebou benzínu za hodinu. Velikost tržeb pro metodu A je uvedena v tabulce č.8, náklady metody A v tabulce č.9, velikost tržeb pro metodu B v tabulce č.10 a náklady metody B v tabulce č.11.

Tabulka 8 - Tržby metody A

Typ zákazníka	Pravděpodobnost výskytu	Cena za převoz	Počet výskytu	Tržba
Děti do 6 let	5	0	6	0
Děti od 6 do 9 let	8	8	9,6	76,8
Dospělí	30	12	36	432
Invalidé TP/ZTP	2	0	2,4	0
Kolo dětské	12	10	14,4	144
Kolo pro dospělé	40	15	48	720
Moto	1	20	1,2	24
Dětský kočárek	2	5	2,4	12
<b>Celkový součet</b>			<b>120</b>	<b>1408,8</b>

Tabulka 9 - Náklady metody A

Typ zákazníka	Pr. výskytu	Cena	Počet výskytu 1	Počet výskytu 2	Náklad 1	Náklad 2
Děti do 6 let	5	0	0,125	0,25	0	0
Děti od 6 do 9 let	8	8	0,2	0,4	1,6	3,2
Dospělí	30	12	0,75	1,5	9	18
Invalidé TP/ ZTP	2	0	0,05	0,1	0	0
Kolo dětské	12	10	0,3	0,6	3	6
Kolo pro dospělé	40	15	1	2	15	30
Moto	1	20	0,025	0,05	0,5	1
Dětský kočárek	2	5	0,05	0,1	0,25	0,5
<b>Celkový součet</b>			<b>2,5</b>	<b>5</b>	<b>29,35</b>	<b>58,7</b>

Tabulka 10 - Tržby metody B

Typ zákazníka	Pr. výskytu	Cena	Počet výskytu 1	Počet výskytu 2	Tržba 1	Tržba 2
Děti do 6 let	5	0	6,25	6,4	0	0
Děti od 6 do 9 let	8	8	10	10,24	80	81,92
Dospělí	30	12	37,5	38,4	450	460,8
Invalidé TP/ ZTP	2	0	2,5	2,56	0	0
Kolo dětské	12	10	15	15,36	150	153,6
Kolo pro dospělé	40	15	50	51,2	750	768
Moto	1	20	1,25	1,28	25	25,6
Dětský kočárek	2	5	2,5	2,56	12,5	12,8
<b>Celkový součet</b>			<b>125</b>	<b>128</b>	<b>1467,5</b>	<b>1502,72</b>

Tabulka 11 - Náklady metody B

Typ zákazníka	Pravděpodobnost výskytu	Cena za převoz	Počet výskytu	Náklad
Děti do 6 let	5	0	0,05	0
Děti od 6 do 9 let	8	8	0,08	0,64
Dospělí	30	12	0,3	3,6
Invalidé TP/ ZTP	2	0	0,02	0
Kolo dětské	12	10	0,12	1,2
Kolo pro dospělé	40	15	0,4	6
Moto	1	20	0,01	0,2
Dětský kočárek	2	5	0,02	0,1
<b>Celkový součet</b>			<b>1</b>	<b>11,74</b>

Pro každé hodnoty intenzity vstupů zákazníků zvlášť můžeme vyčíslit velikost zisku pro převozníka za hodinu podle toho, kterou metodou se při obsluze řídí. Rozdíl zisků obou metod je patrný z tabulky č.12 a tabulky č.13.

**Tabulka 12 - Velikost zisku při použití metody A**

<b>Metoda A</b>	<b>Intenzita vstupu <math>\lambda</math></b>		
	120	125	130
Velikost tržby	1408,8	1408,8	1408,8
Náklady na provoz	19,4	19,4	19,4
Nerealizovaná tržba	0	29,35	58,7
<b>Zisk</b>	<b>1389,4</b>	<b>1360,05</b>	<b>1329,9</b>

**Tabulka 13 - Velikost zisku při použití metody B**

<b>Metoda B</b>	<b>Intenzita vstupu <math>\lambda</math></b>		
	120	125	130
Velikost tržby	1389,4	1467,5	1502,72
Náklady na provoz	38,8	38,8	38,8
Nerealizovaná tržba	0	0	11,74
<b>Zisk</b>	<b>1350,6</b>	<b>1428,7</b>	<b>1452,18</b>

Z výsledků je patrné, že zisk je nejvíce závislý na počtu obslužených zákazníků, tedy na získané tržbě. Je to dáno poměrně nízkými náklady na provoz za projetí benzín. Z těchto důvodů je výhodnější řídit se metodou B, což znamená obsluhovat požadavky po menších dávkách a jezdit tak častěji, protože se tak dá převézt celkově více osob za hodinu. Náklady na provoz ovlivňují výši zisku jen minimálně. Další výhodou metody jsou menší náklady ušlé příležitosti než u metody A.

Hlavní rozdíl by nastal teprve v případně výrazného zvýšení nákladů na provoz, například při zdražení pohonných hmot, nebo pokud by se změnilo postavení převozníka jako zaměstnance, kde by pobíral mzdu za každou realizovanou obsluhu. V takovém případě by pak četnost obsluhy hrála důležitou roli v celkových nákladech za hodinu a snižovala by tak zisk mnohem výrazněji.

Celkově je tedy za daných podmínek modelu výhodnější metoda obsluhy B v časech kdy je největší intenzita vstupu požadavků do systému. Dalším nespécifikovaným měřítkem je zde i minimalizace nespokojených zákazníků. V praxi



to pak znamená, že se obsluha nechová deterministicky a je stále dostupná pro různé velikosti dávky požadavků na obsluhu. Důvodem, proč se obsluha neřídí pouze metodou B je ovšem větší náročnost na čas obsluhy. Větší četnost jízd znamená pro převozníka méně času k odpočinku. Záleží tak na obsluze, zda v danou chvíli je pro ní přínosnější větší zisk, nebo více času pro odpočinek.

## 7 Závěr

Teoretická část této práce vycházela z literatury, kde se popis modelů hromadné obsluhy týkal především jednoduchých modelů, které je možno řešit analyticky. Jedním z těchto způsobů je optimalizovat modely pomocí jejich nákladové a finanční analýzy.

Pro tento případ byl zvolen příklad z praxe typický pro modely HO. Konkrétně se jedná o hromadnou dopravu osob, kterou zajišťuje přívoz mezi dvěma břehy Vltavy. Na vybraném modelu bylo zajímavé zkoumat jeho provozní vytížení v době jeho největšího využití turisty. Cílem řešení příkladu bylo určit, která ze dvou možných metod přístupu k obsluze je výhodnější z hlediska vyššího zisku pro provozovatele. Na základě dat, pořízených z reálného pozorování modelu, byly určeny všechny dostupné charakteristiky a jejich finanční ohodnocení pro výpočet finanční analýzy modelu. Z takto vypočtených hodnot je zřejmé, kterou metodu je vhodnější použít za daných okolností.

Nabízí se možnost, jak uvedenou praktickou část ještě dále použít a modifikovat. Jelikož příklad popisuje danou realitu pouze omezeně v rámci analytického řešení. Pro ještě dokonalejší pochopení sledovaného problému by se dalo tento model řešit simulační metodou. Pro analytické řešení je totiž zohledněno několik dalších pravděpodobnostních charakteristik, které by bylo možné do modelu zakomponovat právě pomocí simulace.

Celkově lze říci, že analytické řešení u takto jednoduchých modelů se svými výsledky blíží hodnotám jako při metodě simulační, pokud má dostatečný počet opakování simulace. Pokud by se v praxi vyskytl model řešící obdobnou situaci, mohly by se výsledky této práce použít jako teoretický základ, přenositelný i na další modely.

## 8 Seznam literatury

- [1] Dömeová L., Beránková M.: Systémy hromadné obsluhy I, PEF ČZU, Praha, 2004, ISBN 80-213-1193-2
- [2] Dömeová L.: Stochastické modely I, PEF ČZU, Praha, 2005, ISBN 80-213-1371-4
- [3] Gros I.: Kvantitativní metody v manažerském rozhodování, Grada, Praha, 2003
- [4] Jablonský J.: Operační výzkum, kvantitativní modely pro ekonomické rozhodování, Professional publishing, Praha, 2002
- [5] Dlouhý M.: Simulace pro ekonomy, VŠE v Praze, 2001
- [6] Lauber J., Hušek R.: Operační výzkum, MON, Praha, 1990

## Další zdroje

- <http://www.ceskatelevize.cz/program/port/clanek81> (navštíveno 3.6.2007)
- <http://access.feld.cvut.cz/view.php?cisloclanku=2005111601> (navštíveno 9.6.2007)
- <http://www.fm.vslib.cz/~ksi/cz/mater/oa/obsluha/index.html> (navštíveno 9.2.2007)

## 9 Přílohy

Tabulka 14 - Výpočet základních charakteristik pro model M/M/1

Charakteristika	značka/vzorec
Intenzita vstupu	$\lambda$
Intenzita obsluhy	$\mu$
Intenzita provozu	$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$
Střední doba čekání ve frontě	$T_Q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$
Střední doba obsluhy	$T_S = \frac{1}{\mu}$
Střední hodnota celkové doby v systému, tj. doba čekání plus doba obsluhy	$T = \frac{1}{\mu - \lambda}$
Střední počet jednotek ve frontě	$L_Q = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$
Střední počet jednotek v systému	$L = \frac{\rho}{1 - \rho}$
Pravděpodobnost, že v systému není žádná jednotka	$P_0 = 1 - \rho$
Pravděpodobnost, že v systému je n jednotek	$p_n = (1 - \rho)\rho^n$
Pravděpodobnost, že počet jednotek v systému je větší nebo roven počtu kanálů obsluhy, tj. pravděpodobnost že všechny kanály obsluhy jsou obsazeny	$p\{L \geq c\} = \rho^c$
Pravděpodobnost, že počet jednotek v systému je větší než libovolné číslo k	$p\{L > k\} = \rho^{k+1}$
Pravděpodobnost, že v systému je alespoň jedna jednotka	$p\{L > 0\} = (1 - P_0) = \rho$

Tabulka 15 - Výpočet základních charakteristik pro model M/M/c

Charakteristika	vzorec
Intenzita provozu	$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$
Střední doba strávená jednotkou ve frontě	$T_Q = \frac{P_0}{\mu} \cdot \frac{c^c \rho^c}{c!(1-\rho)^2}$
Střední doba strávená jednotkou v systému (ve frontě a obsluze)	$T = \frac{P_0}{\mu} \cdot \frac{c^c \rho^c}{c!(1-\rho)^2} + c$
Střední počet jednotek ve frontě	$L_Q = P_0 \cdot \frac{c^c \rho^{c+1}}{c!(1-\rho)^2}$
Střední počet jednotek v obsluze	$L_S = \rho \cdot c$
Střední počet jednotek v systému (ve frontě a obsluze)	$L = P_0 \cdot \frac{c^c \rho^{c+1}}{c!(1-\rho)^2} + \rho \cdot c$
Pravděpodobnost, že v systému není žádná jednotka	$P_0 = \frac{1}{\frac{c^c \rho^c}{c!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^{c-1} \frac{c^n \rho^n}{n!}}$
Pravděpodobnost, že v systému (ve frontě a obsluze) je právě n jednotek $n \geq c$	$p_n = P_0 \cdot \frac{c^n \rho^n}{c!}$
Pravděpodobnost, že v systému (ve frontě a obsluze) je právě n jednotek $1 \leq n \leq c$	$p_n = P_0 \cdot \frac{c^n \rho^n}{n!}$
Pravděpodobnost, že počet jednotek v systému je větší nebo roven počtu kanálů obsluhy	$p\{n > c\} = P_0 \cdot \frac{c^c \rho^c}{c!(1-\rho)}$
Pravděpodobnost, jednotka bude čekat ve frontě dobu delší než t	$p\{T_Q > t\} = P_0 \cdot \frac{c^c \rho^c}{c!(1-\rho)} \cdot e^{-(\mu-\lambda)t}$

## **Přehled základních pojmů**

***analytické řešení*** - spočívá ve výpočtu základních charakteristik systému dosazením jeho parametrů do vztahů odvozených pro odpovídající typ modelu hromadné obsluhy

***exponenciální rozdělení*** - jedno ze spojitých rozdělení používaných často v modelech hromadné obsluhy pro popis intervalů mezi příchody požadavků do systému a pro popis doby trvání obsluhy

***FIFO*** - režim fronty, při kterém požadavky přecházejí z fronty do obsluhy v pořadí, v jakém vstoupily do systému

***fronta požadavků*** - hromadění požadavků v důsledku toho, že všechny obslužné linky jsou obsazeny jinými požadavky

***intenzita obsluhy obslužné linky*** - průměrný počet požadavků který je schopna obslužná linka za jednotku času obsloužit

***intenzita obsluhy systému*** - průměrný počet požadavků, který je schopen obsloužit systém hromadné obsluhy za jednotku času

***intenzita provozu systému*** - poměr intenzity příchodů a intenzity obsluhy celého systému

***intenzita příchodů*** - průměrný počet požadavků, které do systému přicházejí za jednotku času za účelem obsluhy

***LIFO*** - režim fronty, při kterém přecházejí požadavky z fronty do obsluhy v opačném pořadí, než v jakém do systému vstoupily

***obslužná linka*** - zařízení, které realizuje obsluhu požadavků

***požadavek*** - jednotka, která přichází do systému hromadné obsluhy za účelem realizace obsluhy;

***simulační analýza*** - odvození základních charakteristik modelovaného systému hromadné obsluhy napodobením jeho reálného chodu na počítači

***systém hromadné obsluhy*** - prostředí, ve kterém se realizuje obsluha požadavků

***režim fronty*** - pravidlo, podle kterého přecházejí požadavky z fronty do obsluhy

***zdroj požadavků*** - zdroj, ze kterého vycházejí požadavky na obsluhu v systému mu hromadné obsluhy