UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

KATEDRA MATEMATIKY

Diplomová práce

Bc. Ing. Soňa Kořínková

MATEMATICKÉ SOUTĚŽE V ČESKÉ REPUBLICE

Olomouc 2023

vedoucí práce: Mgr. David Nocar, Ph.D.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci na téma Matematické soutěže v České republice vypracovala samostatně a použila pouze uvedenou literaturu a zdroje.

V Olomouci 25.5.2023 Soňa Kořínková

Poděkování

Ráda bych poděkovala vedoucímu své diplomové práce Mgr. Davidu Nocarovi, Ph.D. za odborné vedení a cenné rady, které mi během psaní diplomové práce poskytoval. Dále bych ráda poděkovala paní Mgr. Jitce Chloupkové, Ph.D. za odbornou pomoc a konzultace v průběhu psaní diplomové práce.

Obsah

Úvod

Matematika je jednou z klíčových disciplín vzdělávání. Její hlavní význam spočívá nejen v tom, že nám pomáhá pochopit svět kolem nás, ale také rozvíjí naše analytické a logické myšlení. Stále častěji se setkáváme s názory, že matematika patří k nudným, nezajímavým předmětům a její popularita a oblíbenost u žáků klesá. Právě matematické soutěže tak přinášejí do matematického vzdělávání zábavu, soutěživost, vzrušení a radost z výhry.

Téma Matematické soutěže v České republice jsem si zvolila hned ze dvou důvodů. Jednak matematika vždy patřila k mým oblíbeným předmětům a také jsem se několikrát postavila do role soutěžícího v matematických soutěží.

Cílem teoretické části práce je zařazení matematických soutěží do širšího kontextu, objasnění jejich významu a uvedení uceleného seznamu populárních matematických soutěží na 2. stupni základních škol. Mezi takové soutěže bezesporu řadíme Matematickou olympiádu, Matematického klokana, Pythagoriádu, Pangeu a další matematické soutěže. Praktická část se poté zaměřuje na cíle dílčí, konkrétně jaká je míra úspěšnosti žáků při řešení zadaných úloh, která skupina žáků je při řešení zadaných úloh úspěšnější a jakých chyb se žáci dopouštějí nejčastěji.

Celá práce je strukturována celkem do pěti kapitol, které jsou členěny na jednotlivé podkapitoly. V první kapitole teoretické části se zaměřujeme na matematické soutěže všeobecně, na jejich význam, motivaci a rozdíl mezi transmisivním a konstruktivistickým pojetím výuky matematiky. Druhá kapitola se již zaměřuje na populární matematické soutěže, které jsou v České republice pořádány. U každé soutěže je vždy zmíněna její historie, charakteristika soutěže a její pravidla. Třetí kapitola se věnuje řešením vybraných úloh z jednotlivých soutěží. Jsou vybrány úlohy různé náročnosti a bodového hodnocení, čímž si náhodný čtenář může povšimnout rozdílů nejen mezi jednotlivými úlohami, ale také mezi jednotlivými soutěžemi. Každá vybraná úloha obsahuje vždy postup řešení, tematický okruh, číslo výstupu (RVP), očekávaný školní výstup, učivo a ročník, ve kterém by bylo možné úlohu při výuce matematiky zařadit. Čtvrtá kapitola se zaměřuje na tvorbu a návrh vlastních soutěžních úloh. Při tvorbě úloh kladu důraz na pět důležitých okruhů učiva základní školy, a to: dělitelnost přirozených čísel, Pythagorova věta a její užití, lineární rovnice, procenta a zlomky, trojúhelník, střední příčka v trojúhelníku. Úlohy jsou vytvořeny tak, aby měly soutěžní charakter, nejsou to tedy úlohy typicky početní, ale spíše logické a nestandartní. Každá úloha vždy obsahuje postup řešení, tematický okruh, číslo výstupu (RVP), očekávaný školní výstup, učivo a ročník, ve kterém by bylo možné úlohu při výuce matematiky zařadit. Poslední kapitola se pak věnuje již samotnému výzkumu a metodologii. Pomocí didaktického testu, který obsahuje navržené soutěžní úlohy, ověříme, jak jsou žáci schopni řešit jednotlivé úlohy, v čem žáci nejčastěji chybují a zda test dokáží lépe řešit žáci s výukou matematiky Hejného metodou nebo žáci ostatní. Testovanou skupinou jsou žáci 9. ročníků vybraných základních škol v České republice.

TEORETICKÁ ČÁST

1 Matematická soutěž a její význam

Soutěže jsou s lidskou společností spjaty prakticky od jejích počátků. Již v rané historii byli lidé nuceni soutěžit, aby docházelo k uspokojování jejich lidských potřeb.

Pojem soutěž můžeme chápat jako zápolení dvou nebo více subjektů o něco, co je zajímavé, cenné nebo čeho není dostatek pro všechny. Matematickou soutěží rozumíme činnosti žáka, které úzce souvisí s řešením matematických a logických úloh, realizované soutěživou formou. Tyto činnosti mohou být realizovány v rámci třídy, školy či instituce s širší regionální působností. Mohou se odehrávat mezi jednotlivci, skupinami nebo mezi jednotlivými školami. Při organizování jakýchkoliv soutěží musí být vždy přesně stanovena pravidla, podle kterých daná soutěž bude probíhat a podle kterých následně bude vyhodnocena (Petty, 2014).

Soutěže jsou jednou z hlavních didaktických forem v prostředcích vzdělávání. Je přitom evidentní, že děti zájem soutěžit projevují již od útlého věku (Kalhous, 2002). Platí také, že to, co prohlubuje vztah dětí k matematice, jsou právě především matematické soutěže. Ty žáky zároveň motivují jak k lepším výsledkům, tak i výkonům. Ukazují žákům, že matematická věda není jen nezáživnou nebo namáhavou prací, a nenásilně je o tom přesvědčují. Pokud se matematika vyučuje zábavnou formou, může přinášet všem zúčastněným příjemné zážitky i uspokojení (Petty, 2014).

Matematické soutěže a úlohy, které obsahují, také v neposlední řadě umožňují u dětí rozvíjet logické myšlení. To se u každého jedince vyvíjí postupně v závislosti na věku. Polák (2019) uvádí, že lidský mozek je od narození strukturován a naprogramován. Podotýká, že každý jedinec má základy pro logické myšlení. Vhodnými metodami a aktivitami lze tedy toto myšlení dále rozvíjet a zdokonalovat, což úlohy v matematických soutěžích umožňují.

1.1 Motivace k výuce a účasti v matematických soutěžích

Motivaci je možné definovat mnoha způsoby. Tento termín vychází z latinského slova „movere“ – hýbat se, pohybovat (Rheinberg, Vollmeyer, 2019). Průcha, Walterová a Mareš (2013, s. 135) definují motivaci jako *„souhrn vnitřních i vnějších faktorů, které:*

1) *vzbuzují, aktivují, dodávají energii lidskému jednání a prožívání;*
2) *zaměřují toto jednání a prožívání určitým směrem;*
3) *řídí jeho průběh, způsob dosahování výsledků;*
4) *ovlivňují též způsob reagování jedince na své jednání a prožívání, jeho vztahy k ostatním lidem a ke světu“.*

Vágnerová (2002, s. 174) termín „motivace“ vysvětluje jako *„psychický stav, který stimuluje aktivitu, která je zaměřená na dosažení dobrého výkonu, a udržuje ji po určitou dobu“.*

Motivace vychází nejen z vnitřních, ale i z vnějších zdrojů člověka. Pokud je člověk vysoce motivován, dokáže zmobilizovat všechny síly, aby dosáhl vytyčeného cíle (Rheinberg, Vollmeyer, 2019). Ve školním prostředí tedy motivace slouží ke zvyšování výkonnosti žáka během výuky. Měli bychom se proto zamyslet nad tím, jaké jsou nejčastější motivační faktory žáků nejen při výuce, ale zejména při účasti na matematických soutěžích. Je dobře známo, že motivace sama o sobě zvyšuje efektivitu učení a současně rozvíjí zájem, potřeby i vůli (Pavelková, 2002). Ideální motivace by proto měla zasáhnout každého žáka, a to buď prostřednictvím vzbuzení řady podnětů, které budou zajímavé pro všechny, nebo individualizací výuky. Primárním a hlavním cílem pedagogů by měla být motivace dlouhodobá, nikoliv jen pro konkrétní hodinu. Je tedy zřejmé, že jde o celkový rozvoj žákových potřeb a zájmů, což je věc nesnadná (Hrabal, Pavelková 2010).

Jak uvádí Petty (2014), hlavním cílem učení je naučit se novým dovednostem a znalostem. Mezi nejčastější důvody, proč se chce žák učit, řadí Petty (2014) tyto:

1. žák se učí to, co je pro něj užitečné;
2. žák se učí proto, aby získal potřebnou kvalifikaci;
3. žák si díky dobrým výsledkům zvyšuje sebevědomí (to bývá hlavní motivace pro většinu žáků, i těch nepříliš motivovaných, a jde také o jeden z důvodů, proč jsou žáci v učení soutěživí);
4. žák se obává „trestu“, resp. nepříjemných následků neučení se;
5. žák se učí to, co je zajímavé a podněcuje jeho zvědavost;
6. zábava (přestože se daný předmět jako zábavný nejeví, bude-li zábavná a neotřelá jeho výuka, bude pro žáky zajímavá).

Motivace je v tomto procesu jednou z nejdůležitějších věcí, neboť mj. rozhoduje i o žákově zájmu o učení. Správná motivace pak u žáků vzbuzuje a rozvíjí pozitivní zájem o výuku a učení (Lokšová, Lokša, 1999). Je nezbytné si uvědomit, že žáky baví zpravidla jen to, co jim jde, a právě naopak je nebaví to, co jim nejde. Je tedy důležité žákům zdůrazňovat a ukazovat využití poznatků v praxi. Pokud je totiž budeme nutit učit se např. matematice, ale už jim nevysvětlíme, proč se jí mají učit, budou z ní mít nejspíše strach a nesnášet ji (deCharms, 1976). Jakmile však žáci pochopí, k čemu získané dovednosti a vědomosti využijí ve svém životě, budou současně motivováni k jejich získávání. Důležitým hnacím motorem bude také snaha dosáhnout přiměřeného uznání, ať už od učitele, či od spolužáků a rodiny. A jako jeden z motivačních faktorů mohou působit soutěže (Petty, 2014).

1.2 Výukové metody

Přestože tato podkapitola zdánlivě nesouvisí s hlavním tématem práce, je nutné si všeobecně klasifikovat i nejčastější výukové metody, abychom se dostali ke klasifikaci netradičních výukových metod, mezi něž patří i hry a soutěže, a pochopili je tak ještě z jiného hlediska.

Platí, že veškeré výukové metody patří mezi základní kategorie školní didaktiky a v té nejobecnější charakteristice shledáváme každou metodu zároveň cestou k cíli. Výuková metoda je tedy v didaktice chápána hlavně jako cesta, resp. způsob cesty zaměřující se na plnění výchovně-vzdělávacích cílů vyučování.

Interakce mezi učitelem a žákem je ve výuce realizována prostřednictvím výukových metod. Chápeme ji jako vzájemnou spolupráci, při níž učitel akceptuje psychologické, sociální a také somatické individuální zvláštnosti žáka a žák se převážně na základě svých osobních svobodných aktivit poté ztotožňuje se stanoveným výukovým cílem (Skalková, 1999).

Jednotlivé výukové metody v závislosti na cílech a obsahu vyučování určují charakter činnosti učitele a žáka. Mají své specifické zvláštnosti, a to nejen vzhledem k povaze daného osvojovaného předmětu, ale i k jeho obsahu. Pokud chceme zajistit, aby zvolená výuková metoda byla didakticky účinná, je žádoucí, aby splňovala kritéria, jež formuloval již Mojžíšek v roce 1975:

1) *„Je informativně nosná, tj. předává plnohodnotné informace a dovednosti obsahově nezkreslené.*
2) *Je formativně účinná, tj. rozvíjí poznávací procesy.*
3) *Je racionálně a emotivně působivá, tj. pochopitelná, a aktivizuje žáka k prožitku učení a poznávání.*
4) *Respektuje systém vědy a poznání.*
5) *Je výchovná, tj. rozvíjí morální, sociální, pracovní a estetický profil žáka.*
6) *Je přirozená ve svém průběhu i důsledcích.*
7) *Je použitelná v praxi i ve skutečném životě a přibližuje školu životu.*
8) *Je přiměřená jak žákům, tak učiteli.*
9) *Je didakticky ekonomická.*
10) *Je hygienická.“* (Mojžíšek In: Kalhous, 2002, s. 94–95)

V posledních desetiletích 20. století se inovace nejrůznějších výukových metod rozvíjely ve velmi pestrém spektru (a platí to jistě i pro nové století, resp. tisíciletí – stále se totiž hledají nejrůznější alternativní metody). Jde přitom o metody, které umožňují aktivitu žáků při formulaci cílů a plánování procesu učení a zároveň podporují individuální i kolektivní strategie učení, přičemž vytvářejí prostor pro iniciativní a tvořivé činnosti i získávání osobních zkušeností – to vše pro seberealizaci žáků. Současně přispívají k omezování úzkosti, strachu ze školního vyučování i nudy během něj nebo vedou k sebekontrole a vlastní odpovědnosti žáků (Skalková, 1999).

Vzhledem k mnohotvárnosti metod výuky je však zároveň jejich klasifikace, která by se opírala jen o jediné kritérium, velmi obtížná. Můžeme se setkat s tříděním metod podle zdroje získávání poznatků, podle charakteru poznávací činnosti žáků, podle druhu užitého logického postupu atp. Velmi podnětným příkladem pro pedagogy je např. klasifikace podle Maňáka (1995), který dělí základní metody výuky z hlediska pramene poznání a typu poznatků (tedy zdůrazňuje aspekt didaktický), z hlediska aktivity a samostatnosti žáků (aspekt psychologický), dále rozlišuje charakteristiku metod z hlediska myšlenkových operací (aspekt logický), varianty metod z hlediska fází výchovně-vzdělávacího procesu (aspekt procesuální), varianty metod z hlediska výukových forem a prostředků (aspekt organizační) a doplňující aktivizující metody s interaktivním aspektem (Maňák, Švec, 2003).

1.2.1 Hra jako výuková metoda

Netradiční metody se v úhrnu vyznačují tím, že se zaměřují zejména na rozvoj aktivity, tvořivosti a iniciativy žáků. Podporují tím nejen jejich individuální formu, ale povětšinou i kolektivní spolupráci. Hodinu tedy zpestřují a vnášejí do ní hravé a zábavné prvky, které žáci vždy vítají.

Jednou ze základních didaktických forem v procesu vyučování matematickým předmětům je samozřejmě vyučovací hodina, stejně jako jeho základní jednotkou. Vyučovací hodiny si můžeme dle typu rozdělit na výkladové, procvičovací, prověřovací a kombinované, jež jsou nejčastější (Krejčová, Volfová, 1995).

Mezi další didaktické formy však patří také tzv. matematické hry a soutěže, jež jsou pro většinu žáků zajímavější a přitažlivější a současně zvyšují jejich zájem o problematiku matematiky, čímž je povzbuzují k získání lepších výsledků v tomto předmětu. To je zároveň téma, jemuž je v této práci věnováno nejvíce prostoru. Na tomto místě je potřeba zdůraznit, že *„zařazování her do vyučování má velký význam zejména v počátečních ročnících základní školy, kde jsou nejvýraznějšími rysy dětské osobnosti takové vlastnosti, jako je např. spontaneita, hravost a aktivita“* (Merkoutová, 2002, s. 20).

Podle Duplinského (2004) je hra tím nejspecifičtějším projevem dětského chování a patří mezi základní potřeby dítěte. I z toho důvodu o dětskou herní aktivitu jevili zájem myslitelé v podstatě již od starověku.

Propagátorem myšlenky využít hry ve školním prostředí se stal významný český pedagog a filozof Jan Ámos Komenský (1592–1670). Komenský je známý svými inovativními vzdělávacími myšlenkami a jednou z jeho nejvýznamnějších koncepcí byla *Schola ludus* (Škola hrou). Ta vznikla v roce 1651 v Blatném Potoku v Uhrách (území dnešního Maďarska), kam byl Komenský pozván, aby reformoval tamní školu.

Základem spisu *Schola ludus* byla *Janua linguarum reserata*, vytvořená v letech 1630–1631. Tato kniha byla napsána latinsky, protože latina byla tehdy jazykem církve, vzdělanců a vědců. Po latinském vydání následovalo vydání české, pod názvem *Brána jazyků otevřená*. Tato učebnice byla velmi náročná, proto Komenský hledal cesty a nové metody, jak výuku latinského jazyka usnadnit. Snažil se najít způsob, jak učení zpříjemnit a učinit pro žáky méně úporným. Zdůrazňoval, že školní hra není pouze zdrojem zábavy, ale funguje také jako prostředek výchovy a vzdělávání.

Komenský tedy vytvořil tři jazykové učebnice. Nejobtížnější byla *Brána jazyků*, která počítala především s pamětí. Učebnice *Schola ludus* měla úroveň obtížnosti nižší, neboť byla založena na činnosti žáka a učebnice *Orbis pictus* se stala nejoblíbenější na světě, protože spojila jazykové vyučování s názorným poznáváním věcí a s činností žáka (Kopecký, 2015).

Hry, jež jsou určeny především k výchovným a vzdělávacím účelům, se nazývají tzv. didaktické hry a nepřímo se řadí i mezi ostatní soutěže, protože je můžeme koncipovat i tak, že např. odměníme vítěze. Plně souhlasíme s autorkami Krejčovou a Volfovou, jež ve své knize z roku 1995 tvrdí, že *„hry jsou jednou z hlavních potřeb dítěte“* (Krejčová, Volfová, 1995, s. 12). Vyvolávají totiž v dětech nejen radost, ale také vyšší práceschopnost, zájem a uspokojení.

Můžeme tvrdit, že z tohoto důvodu v současné době mnohé inovační proudy akcentují význam hry jako výukové metody na kterémkoliv stupni ZŠ. Přestože ji trvale využívají spíše učitelé nejnižších ročníků, hra má své místo i při práci se staršími žáky (Maňák, 2001).

Hry jakožto netradiční výukové metody můžeme rozdělit následovně:

- **Námětové hry.** Napodobují život dospělých a odrážejí jejich životní kulturu. Tak se děti učí komunikovat a poznávat kupříkladu význam jednotlivých profesí – např. hra „na učitele“, „na prodavače“, „na kuchařku“ atd.
- **Inscenace** – hry rolí. Představují zcela reálnou situaci. Mají blízko k námětovým hrám a lze je využívat při rozvoji nejrůznějších komunikativních dovedností, při rozborech literárních děl, řešení konfliktů aj. – např. hra „na setkání s cizincem“, „chování se ve společnosti“ atd.
- **Dramatizace.** Jsou to názorná předvedení příběhu nebo události dětem. Mohou lépe vtáhnout žáky do obsahu vyprávění nebo pohádky. Jednotlivé role zde hrají žáci. Při dramatizaci se žáci jednak seznámí s daným obsahem, jednak rozvíjejí své výrazové schopnosti, učí se vystupovat a společensky se chovat.
- **Didaktické hry.** Patří k aktivizujícím učebním metodám. Na rozdíl od běžných her však mají stanoven svůj výchovný a učební cíl. Didaktické hry zapojují žáky velmi intenzivně do vyučovacího procesu a přinášejí tvořivou, až uvolněnou atmosféru a současně emoční prožívání, které je z hlediska učení více než důležité. Využíváme např. křížovky, bludiště, doplňovačky, kvízy, šifrované texty a spousty dalších.

- **Soutěže.** Lze je pokládat za zvláštní skupinu her. Jejich výsledek se posuzuje s ohledem na umístění účastníků v určitém pořadí. Soutěže učí smyslu pro fair play, toleranci, vyvinutí maximálního úsilí a odpovědnosti za celek. Neměly by přitom podněcovat k samoúčelné konkurenčnosti či nezdravé rivalitě nebo dokonce až k dosažení vítězství za každou cenu.
- **Rozcvičky.** Obsahují jak prvky soutěží, tak ostatních typů her. Zařazují se především na počátek hodiny a působí tak jako velmi účinný motivační prostředek. Mohou sloužit též k rychlému a zábavnému zopakování již probraného učiva. Jejich příprava a realizace by měla být co nejméně náročná (Grecmanová, Urbanovská, Novotný, 2000).

V posledních letech v České republice dochází také k rozvoji gamifikace ve vzdělávání. Tento trend se k nám dostává ze zahraničí a v době uzavření škol v souvislosti s pandemií Covidu-19 došlo k ještě rychlejšímu začleňování gamifikačních prvků do výuky (Kurilenko, Biryukova, Akhnina, 2020).

Gamifikace znamená aplikování prvků hry do jiného, nehraného kontextu, např. do vzdělávání. Gamifikace umožňuje žákům učit se skrze herní prvky a hry. Tím se snaží motivovat žáky, aby se aktivněji účastnili výuky a zlepšili své výsledky. V této souvislosti si můžeme položit otázku, zda se dá gamifikace aplikovat i ve výuce matematiky. Ačkoliv se to může zdát zvláštní, protože matematika bývá velmi často označována jako obtížný a „nudný" předmět, právě díky gamifikaci se může matematika pro mnohé žáky stát zajímavou a atraktivní (Dicheva et al., 2015).

Zapojení počítačových her je bezesporu motivačním prvkem. Jejich hraní je pro žáky přitažlivé a zábavné. Pokud jsou využity i při výuce, mohou žáky motivovat k učení a zvyšovat tak jejich zájem o danou problematiku. Většina počítačových her vyžaduje, aby hráči řešili různé problémy a situace, které mohou pomoci u žáků rozvíjet kritické myšlení, pracovat s informacemi a hledat řešení. V neposlední řadě počítačové hry také okamžitě poskytují zpětnou vazbu, která je velmi důležitá. Hráč ihned získává odezvu na akci, kterou provedl, a může tak rychle pochopit, co funguje a co naopak ne (Kapp, 2012).

1.3 Tradiční výuka matematiky

Výuka matematiky je proces realizovaný kombinací tradičního (transmisivního) a konstruktivistického přístupu ke vzdělávání a poměr těchto přístupů je ovlivněn učivem, kompetencemi učitele, dostupnými didaktickými prostředky atd.

Tradiční vyučování je zaměřeno zejména na výkon žáka. Učitel se v tradičně vedené výuce snaží předat žákům již hotové znalosti, a žák tak funguje spíše jako pasivní příjemce a ukladatel vědomostí do paměti, aniž by se kladl velký důraz na jejich vzájemné propojení. Tento způsob výuky je u velké většiny učitelů považován za nejlehčí a nejrychlejší cestu k poznání. Roli učitele tak můžeme lehce shrnout jako roli trenéra, který své svěřence vede k podávání maximálního výkonu při životně důležitých zkouškách. Při výuce tak s žáky cvičí typové úlohy, které mohou očekávat u zkoušek, a ukazuje jim postupy, díky kterým dokážou daný typ úlohy vyřešit. Od žáků se vyžaduje, aby se daná fakta naučili, osvojili si je a dokázali je rychle a správně aplikovat. Tradiční metoda však mnohdy vede k úskalí: poznatky jsou velmi často pouze formalistické. Žáci sice zvládnou odříkat definice a poučky zpaměti, v nejednom případě jim ale uniká základní myšlenka problematiky (Growa, 1991 In: Mareš, 1998).

1.4 Konstruktivismus ve výuce matematiky

Průcha (2013, s. 9) uvádí, že konstruktivismus je *„široký proud teorií ve vědách o chování a sociálních vědách, zdůrazňující aktivní úlohu subjektu v poznávání světa, význam jeho vnitřních předpokladů v pedagogických a psychologických procesech, důležitost jeho interakce s prostředím a společností“*. Z dané charakteristiky je tedy zcela zřejmé, že nejde o jednoznačný pojem. Učení je z hlediska konstruktivismu koncipováno jako aktivní, záměrný a sociální proces, při němž dochází ke konstruování znalostí a vědomostí z předem daných informací, které byly žákům předány, a také z jejich získaných zkušeností. Ve výuce je tedy podporováno tvořivé myšlení, upřednostňuje se práce ve skupinách a omezuje se používání drilu, spojeného s transmisivní výukou (Zormanová, 2012).

Při konstruktivistickém pojetí výuky je potřeba klást důraz na správné výukové metody. Volíme proto takové výukové metody, které vedou k aktivizaci žáka, k rozvoji logického a kritického myšlení a v neposlední řadě také k představivosti a samostatnosti žáků. Nedochází tedy pouze k přenosu informací a znalostí, ale důležitá je aktivní účast žáků v procesu učení. Žáci na základě předložených informací samostatně konstruují postupy, které vedou k vyřešení daného problému. Učitel zde vystupuje jako mentor (průvodce), který respektuje názory žáků (Zormanová, 2012).

Jak uvádí Stehlíková, Cachová (2006), nelze podat návod, jak by učitel měl vést konstruktivistické vyučování, neboť podstatou tohoto přístupu je autentičnost, hledání a zejména využívání vlastních zkušeností. Pro učitele je tedy tato metoda o něco náročnější než metoda tradiční. Aby výuka byla vedena konstruktivisticky, je nezbytné dodržet pět zásad:

1) Učitel probouzí zájem dítěte o matematiku a její poznávání. Velmi důležitou roli zde hraje motivace, která je podstatou podnětného vyučování. Učitel by měl být tedy schopen žáka motivovat natolik, aby měl sám žák zájem o poznání matematiky.
2) Učitel předkládá žákům podnětná prostředí a vhodně s nimi pracuje. Podnětné prostředí je nezbytné, abychom zajistili aktivní činnost žáků během výuky a nedocházelo tak k pouhému pasivnímu přijímání nových informací.
3) Učiteli jde především o žákovu aktivní činnost. Jak již bylo řečeno, je nezbytné, aby učitel v konstruktivistickém pojetí výuky vystupoval jako mentor, nikoliv jako „trenér“ předávající veškeré informace a postupy svým žákům.
4) Učitel nahlíží na chybu jako na vývojové stadium žákova chápání matematiky. Tato teze je v konstruktivistickém pojetí matematiky velmi zásadní, neboť ve školní praxi stále převládá negativní názor, že chyba je něco špatného, čeho by se žák neměl dopouštět. Pro podnětné vyučování je ale naopak chyba přirozeným stupněm vývoje poznání. Právě díky chybě může učitel odhalit, že došlo k nepochopení daného pojmu, a sjednat nápravu.
5) Učitel se u žáků orientuje na diagnostiku porozumění spíše než na reprodukci odpovědi. Konstruktivismus podporuje aktivní myšlení žáků a zaměřuje se na systematické rozvíjení matematického světa, nikoliv však na formální výstupy, které ve školské praxi převládají. Žáci pak pouze reprodukují informace a poznatky, které jim učitel předložil. Podnětné vyučování se ale zaměřuje na každého žáka, aby danému učivu správně porozuměl, pochopil jej.

Existuje velké množství názorů na to, která z výše uvedených metod je při výuce matematiky vhodnější. Každá z nich má mnoho výhod i nevýhod. Šedivý (2010) hodnotí jako nejlepší cestu k výuce matematiky použití obou metod. Upozorňuje na důležitý fakt, že základní poznatky nelze žákům předat jinak než právě výkladem učitele. Následně je však na základě počátečních vědomostí možné využít konstruktivistický přístup. Za velmi důležitou považuje motivaci žáků tak, aby u nich právě tvořivou činností došlo k trvalému osvojení znalostí. Upozorňuje, že je zásadní, aby si každý žák vždy dokázal odpovědět na otázku „Proč se to učím?“ a následně se zabýval otázkou „Jak se to vše naučím?“.

Je však třeba si uvědomit, že nezáleží pouze na výběru metody. Každý dobrý učitel matematiky musí mít dostatečné znalosti, musí být schopen žáky správně motivovat a upozorňovat na všechna možná využití získávaných poznatků v praxi (Blažková, Matoušková, Vaňurová, 2007). Hodiny matematiky je vhodné „oživit“ formou didaktických her a soutěží, které mohou žáky nejen motivovat, ale také u nich probudit zájem o danou látku a problematiku. Učitelé však velmi často upozorňují na fakt, že zařazení těchto aktivit do běžných hodin výuky není zcela jednoduché. Je nezbytné, aby učitel vždy správně odhadl, jaký typ soutěže či hry má do své hodiny zařadit, její časovou náročnost a také návaznost probíraného učiva (Zormanová, 2012).

1.5 Hejného metoda

Naučit žáky počítat, to je jeden z hlavních cílů každého učitele matematiky. V minulosti v českém školství převládala zejména její tradiční výuka, při níž nácvikem a opakovaným drilem docházelo ke kýženému výsledku – žáci si osvojili dovednosti sčítání, odčítání, násobení, dělení aj. Jak však již bylo zmíněno, problémem takového drilu u některých žáků je nedostatečná propojenost, až izolovanost jednotlivých úrovní. Právě proto se v posledních letech ve více školách od tradiční výuky odstupuje a učitelé začínají v hodinách využívat konstruktivismu (Málková, 2014). Do konstruktivistického vyučování je řazena také Hejného metoda, která přispívá k rozvoji matematického myšlení, podněcuje komunikační schopnosti a dovednosti a v neposlední řadě také tvořivost žáků. Sám Milan Hejný však tvrdí, že se nejedná o striktní konstruktivismus, ale o výuku a vyučování orientované na budování schémat (Hejný, Kuřina, 2015).

Schéma je souhrn navzájem propojených znalostí vztahujících se ke známému prostředí. V mysli každého z nás je celá řada takových schémat: schéma domu, ve kterém bydlíme, schéma budovy, v níž pracujeme, schéma vesnice, kde žijeme, ale také schéma naší rodiny, příbuzných či mezilidské vztahy na pracovišti. Děti si již od narození taková schémata vytváří v hlavě a právě pomocí nich objevují nové poznatky, které pro ně mají trvalou hodnotu, a učí se jim. Tento postup však můžeme převést také do budování matematických poznatků. Žáci si ve své mysli vytvoří schémata jednotlivých matematických pojmů, jevů, ale i procesů (Hejný, 2012).

Za zakladatele Hejného metody je považován slovenský matematik a didaktik prof. RNDr. Milan Hejný, CSc. Jeho myšlenky byly poprvé publikovány v roce 1987. Hejný staví na poznatcích svého otce Víta Hejného, který analyzoval příčiny, proč se žáci nesnaží porozumět jednotlivé problematice, ale raději si pamatují složité vzorce. Vít Hejný usiloval vytvořit nový přístup k vyučování matematiky, ale kvůli politické situaci nebyly jeho poznatky rozšířeny a nijak publikovány. Vít Hejný vytvářel nové, nestandardní úlohy, při kterých žáci nemohli využívat naučené postupy, ale museli pochopit danou problematiku a porozumět jí, díky čemuž pak byli schopni vytvořit vlastní osobité řešení. Tyto úlohy Vít Hejný testoval na svém synovi Milanovi, který si tak díky svému otci sám na sobě různé přístupy k matematice vyzkoušel a v dospělosti na ně sám navázal (Bachratý, Hejný, 2012).

Od roku 2006 profesor Milan Hejný spolu se svým týmem pracoval na učebnicích matematiky pro 1. stupeň ZŠ, vytvořil také příručky pro učitele a různorodý doprovodný materiál. Roku 2013 pak založil společnost H-mat, o. p. s., která si klade za cíl dále rozvíjet a šířit Hejného metodu výuky matematiky. V tomto roce také profesor Hejný a jeho kolektiv začínají psát učebnice pro 2. stupeň ZŠ (H-mat/a, 2022).

V roce 2017 bylo možné Hejného metodu poprvé „ověřit“, neboť deváté ročníky opustily první děti, které započaly používat Hejného metodu a pilotní učebnice na druhém stupni. Přijímací zkoušky na střední školy v tomto roce tak sloužily jako srovnání matematických dovedností žáků s tradiční metodou výuky a žáků vyučovaných Hejného metodou. Žáci s Hejného metodou dosáhli v matematice o 12 % lepšího výsledku (H-mat, 2017).

V letech 2015 a 2019 proběhlo výzkumné šetření TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study), které se zaměřilo na žáky 4. tříd základních škol vyučovaných Hejného metodou. Hlavním cílem výzkumu bylo ověřit, zda Hejného metoda vede k lepšímu porozumění matematice, dále pak zda mají žáci díky ní k matematice lepší postoje. Analýza jednotlivých dat výzkumu TIMSS ukazuje, že žáci, kteří jsou ve škole vyučováni Hejného metodou, mají oproti ostatním žákům v matematice lepší výsledky. Tito žáci také lépe zvládají řešení náročnějších úloh (Studie ÚVRV, 2022).

1.5.1 12 klíčových principů Hejného metody

Hejného metoda je primárně založena na respektování 12 klíčových principů, které jsou uskupeny do uceleného konceptu tak, aby každé dítě objevovalo matematiku samostatně a s radostí. Tyto principy vychází z poznatků, které se v dějinách matematiky objevují již od starověkého Egypta (H-mat/b, 2022).

1) Budování schémat

   Jak již bylo řečeno, schéma je souhrn navzájem propojených znalostí vztahujících se ke známému prostředí.

   Za první matematické schéma považujeme první obecnější poznání, které u žáka vznikne na základě jeho konkrétních zkušeností a velmi často se dostaví kýžený „aha efekt“. Jednotlivá matematická schémata jsou velmi silně propojena, a proto je nezbytné je budovat od samého základu.

2) Práce v prostředí

   Profesor Hejný specifikuje 40 didaktických prostředí, která se prolínají všemi ročníky základní školy a obsahují sérii na sebe navazujících úloh se stejným námětem. Uvádí, že právě díky známému prostředí nedochází u žáků k rozptýlení a žáci se mohou pak lépe na danou úlohu soustředit. Žáci se v každém prostředí postupně seznamují s jednotlivými úlohami, přičemž postupují od úloh jednoduchých k úlohám složitějším. Žáci v prostředí pracují opakovaně a díky tomu se i nová prostředí postupně stávají známými, žáci zde nabývají jistoty a ztrácejí strach z matematiky.

3) Prolínání témat

Díky neustálému prolínání témat dochází k lepšímu vybavení si již probraného učiva. K lepšímu porozumění také napomáhá již zmíněné budování matematických schémat. Nové informace jsou tedy žákům předávány pomocí již známého a osvojeného schématu.

4) Rozvoj osobnosti

Během tradiční výuky se učitel snaží předat žákům již hotové znalosti, a žák tak funguje spíše jako pasivní příjemce. V Hejného metodě je však role učitele zcela jiná. Jeho hlavním úkolem je s žáky komunikovat a naučit je také komunikovat mezi sebou. Velmi důležitá je zde rovněž práce s chybou a názory druhých, neboť ty mohou být využity k podpoře vlastního myšlení.

5) Skutečná motivace

Každý z nás má v životě potřebu poznávat nové, nepoznané. Motivace je tak hybnou silou poznávacího procesu a hraje významnou roli v celém procesu učení. Děti jsou velmi zvídavé, zajímá je svět, který je obklopuje, a jejich potřeba poznávat nové věci je obrovská. Motivace dítěte se značně liší od motivace dospělého člověka. U dítěte je motivace naléhavá, těkavá, protože dítě se zaměřuje prakticky na vše, co se v jeho prostoru pozornosti odehrává, a v neposlední řadě je jeho motivace širokospektrální. Hejného metoda vychází ze zkušeností žáků a díky známému prostředí, ve kterém se žáci pohybují, jsou neustále motivováni postupovat dál.

6) Reálné zkušenosti

Vlastní reálné zkušenosti žáků, které byly v průběhu jejich života postupně vybudovány, hrají velkou roli v základních principech Hejného metody. Při řešení každé úlohy z matematiky žáci postupně sbírají zkušenosti. Jak můžeme pozorovat již u předškolních dětí, jejich prvotní počítání např. třech jablek probíhá postupným ukazováním a počítáním jedna, dvě, tři. V průběhu času však dochází k zobecnění a „aha efektu", kdy je dítě schopno říci „tři je tolik" a ukázat na prstech. Prsty se stávají generickým modelem a dítě je schopno postupně prsty nahradit číslicí 3. Je nutno si však uvědomit, že zkušenosti se nedají přenést, ale lze je pouze.

7) Radost z matematiky

Je zcela zřejmé, že ta nejúčinnější motivace přichází v momentě úspěchu, z radosti žáka, jak dobře vyřešil nelehký úkol. Radost a motivace vychází z vlastních pokroků a schopnosti řešit postupně náročnější úkoly. Proto jsou úkoly v Hejného metodě nastaveny tak, aby i slabší žáci mohli zažívat úspěch, a tedy i radost z matematiky.

8) Vlastní poznatek

Hejného učebnice jsou sestaveny tak, aby žáci postupně vlastní úvahou získávali nové poznatky a matematiku sami objevovali, protože vlastní poznatek, který žáci získají úvahou, je kvalitnější než poznatek převzatý.

9) Role učitele

Jak již bylo zmíněno, během tradiční výuky se učitel snaží předat žákům již hotové znalosti a žáci jsou nuceni k mechanickému memorování učiva. Učivo většinou není nijak propojeno, což vede k poměrně rychlému zapomínání toho, co již bylo probráno a zvládnuto. Role učitele v Hejného metodě je však zcela odlišná. Vystupuje zde jako rádce a organizátor hodiny, pobízí žáky k činnosti a řídí jejich společnou diskuzi. Důležitá je zde i práce s chybou, učitel jednotlivé návrhy žáků nehodnotí, ale obrací se na kolektiv třídy, zda s daným návrhem souhlasí. Dochází tedy k analyzování chyb, a to nejen vlastních, ale také chyb spolužáků.

10) Práce s chybou

Chyba je v lidském životě přirozený jev, a to zejména pokud se každý z nás učí něčemu novému. V tradiční výuce je všeobecně na chybu nahlíženo jako na něco nežádoucího, často se také dostaví trest v podobě špatné známky a na žáky je tak vyvíjen tlak. Jak však bylo uvedeno, u Hejného metody je práce s chybou nezbytně důležitá. Právě vhodná analýza chyb vede žáky k pochopení dané problematiky a žáci je nevnímají jako negativní a nežádoucí jev.

11) Přiměřené výzvy

Jak již bylo zmíněno, učebnice Hejného matematiky a úlohy v nich jsou odstupňovány podle obtížnosti, aby i slabší žáci mohli zažívat pocity úspěchu, díky tomu, že i oni jsou schopni úlohu vyřešit, a zároveň aby složitější úlohy předcházely pocitu nudy u talentovanějších žáků.

12) Podpora spolupráce

Během tradiční výuky se primárně využívá samostatná práce žáků a komunikace mezi nimi se hodnotí jako nežádoucí. V Hejného metodě je tomu ale naopak. Žáci si volí, zda budou pracovat samostatně, ve dvojicích či ve větší skupině. Učitelem je komunikace mezi žáky podporována, neboť společná diskuze pomáhá nalézt řešení složitějších úloh a vyvrátit chybné představy (H-mat/b, 2022).

2 Matematické soutěže v České republice

Matematickou soutěž chápeme jako činnost žáka, která úzce souvisí s řešením úloh realizovaných soutěživou formou. Tento typ činnosti může probíhat buďto jednorázově, nebo v dlouhodobějším časovém intervalu. Soutěže mohou být pořádány v rámci třídy či školy nebo organizovány pro všechny školy v daném regionu (Sedlář, 1957).

2.1 Historie matematických soutěží a jejich význam

S prvními matematickými soutěžemi a hrami se setkáváme již ve starověkém Egyptě. V této době hry a soutěže sloužily především pro zábavu a určitou společenskou prestiž. V současnosti účast v matematické soutěži napomáhá žákům lépe pochopit význam daného předmětu, umožňuje jim rozšířit si své znalosti a dovednosti a podporuje tvořivost i zájem o daný předmět. Mimo vzdělávací charakter mají soutěže také výchovný význam (Calábek et al., 2010). U žáků dochází k rozvoji povahových vlastností a jejich nadání. Hlavním posláním matematických soutěží je jednak snaha u žáků prohloubit jejich zájem o matematiku a motivovat je k hledání nových informací, jednak pomoci vyhledávat a podporovat mladé matematické talenty. Soutěže žákům umožňují také porovnávat své vlastní postupy a výsledky s postupy a výsledky jiných žáků a podporují tak vzájemnou výměnu zkušeností. Jednotlivé úlohy v soutěžích musí být přitažlivé a zajímavé, zároveň však musí mít přiměřenou náročnost vzhledem k věku a dosud nabytým zkušenostem a znalostem. Zadání jednotlivých úloh by mělo být vždy psáno srozumitelně, aby mu žák porozuměl a byl schopen dané úlohy řešit (Novotná, 2012).

Historicky první zmínka o školní matematické soutěži pochází z roku 1885, kdy se v Bukurešti konala nejstarší matematická soutěž pro studenty nižších ročníků gymnázií. Této soutěže se účastnilo celkem 70 soutěžících a 11 nejlepších bylo oceněno. V Maďarsku v roce 1894 se pak uskutečnila matematická soutěž „moderního“ typu pro studenty gymnázií – soutěž Loránda Eötvöse. Tato soutěž obsahovala nestandardní typy úloh a vyžadovala vysokou kreativitu k jejich vyřešení.

Matematické soutěže byly v minulosti velmi často také zveřejňovány v některých časopisech. Za nejstarší je považována soutěžní rubrika „Gazeta matematică“, která byla publikována v rumunském časopise a to již od roku 1902. Tato rubrika inspirovala také naše matematiky k vytvoření podobné čtenářské soutěže, a to od roku 1922, v časopise *Rozhledy matematicko-přírodovědecké* (Berinde, Pâltânea, 2004).

Poměrně velké zázemí v oblasti matematických soutěží můžeme pozorovat v evropské části Ruska. Zde byla roku 1934 pořádána Leningradská městská matematická olympiáda a o rok později proběhl také 1. ročník Moskevské matematické olympiády. Tyto soutěže měly za úkol vyhledávat a následně rozvíjet matematické talenty středních škol obou velkých ruských měst. Soutěže byly zřízeny centrálně a jejich podoba a struktura je zachována dodnes.

Zejména v důsledku druhé světové války a dění v poválečném období se matematické soutěže začaly postupně rozšiřovat z Ruska do zemí tehdejšího lidově-demokratického bloku střední a východní Evropy, tedy konkrétně do Polska, Československa, Jugoslávie, Rumunska, Bulharska, Maďarska a samozřejmě také do Německé demokratické republiky (Platonova, 2020).

Za velmi významný historický milník ve vývoji matematických soutěží bezesporu považujeme rok 1959. V tomto roce se poprvé uskutečnila historicky první Mezinárodní matematická olympiáda, které se mohli účastnit všichni talentovaní středoškolští studenti (Calábek et al., 2010). V současné době je Mezinárodní matematická olympiáda řazena k největším mezinárodním soutěžím. V roce 2022 se jí zúčastnilo 589 studentů ze 104 zemí celého světa a Česká republika získala tři medaile – jedno stříbro a dva bronzy (IMO, 2022).

V 70. letech minulého století pak došlo ke vzniku a rozvoji dalších matematických soutěží nejen na úrovni jednotlivých států, ale i na úrovni mezinárodní. Právě matematické soutěže jsou jedna z možných forem, jak mohou pedagogové pracovat s nadanými žáky a jejich nadání a talent v oblasti matematiky dále rozvíjet (Calábek et al., 2010).

Matematických soutěží v České republice je poměrně mnoho. Zaměřují se jak na žáky 1. stupně, tak 2. stupně základních škol a na žáky škol středních. V České republice se koná také Mezinárodní matematická soutěž Vojtěcha Jarníka, která je určena pro studenty vysokoškolské. Vzhledem k oboru studia, zaměřujícímu se na výuku matematiky na 2. stupni ZŠ, se bude tato diplomová práce soustřeďovat převážně na matematické soutěže pro žáky 2. stupně ZŠ, i když u některých soutěží v tomto ohledu dochází k prolínání, a spadají tak do kategorie soutěží pro ZŠ i SŠ.

2.2 Matematická olympiáda

Matematická olympiáda se v České republice řadí mezi nejstarší předmětové soutěže. V dnešní době je určena nejen žákům základních škol, ale také žákům středních škol a víceletých gymnázií. Na přípravě a organizaci Matematické olympiády se podílí Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy České republiky (MŠMT), Jednota českých matematiků a fyziků (JČMF) a Matematický ústav Akademie věd České republiky (MO, 2023).

Obrázek 1. Logo Matematické olympiády

2.2.1 Historie

Československá Matematická olympiáda byla založena roku 1951 matematikem Eduardem Čechem (1893–1960). Vzorem pro tuto soutěž se staly olympiády, které se konaly v SSSR, a další podobné soutěže pořádané v socialistických zemích, zejména v Polsku. První československé Matematické olympiádě předcházelo mnoho podobných soutěží, které byly v krajském měřítku pořádány zejména učiteli Olomouckého a Ostravského kraje. Eduard Čech jako první podal návrh, aby byl ustanoven Přípravný výbor Matematické olympiády, který by měl na starosti nejen veškerou administrativu, ale také by jednal jak s Ministerstvem školství, věd a umění (MŠVU), tak také s Československým svazem mládeže (ČSM). Tento výbor byl ustanoven v září 1951.

Soutěž probíhala ve třech kolech, přičemž první kolo mělo charakter přípravný, kdy měli studenti řešit zadané úkoly sami doma. Druhé kolo probíhalo v tzv. oblastech, které byly zřízeny v městech s vysokou školou, jako např. Bratislava, Košice, Brno, Olomouc nebo Praha, přičemž do každé oblasti bylo sdruženo několik krajů. Toto kolo mělo za úkol eliminovat část soutěžících. První i druhé kolo se konaly ve dvou kategoriích A a B, přičemž do kategorie A byli zařazeni žáci 3. a 4. tříd škol třetího stupně a do kategorie B pak žáci 1. a 2. tříd těchto škol. Třetí, celostátní kolo pak bylo určeno pouze pro soutěžící v kategorii A.

První ročník Matematické olympiády se konal ve školním roce 1951/1952 a studenti při řešení úkolů mohli dosáhnout celkem pěti úrovní: výborné, chvalitebné, dobré, dostatečné nebo nedostatečné. Aby byl student v prvním kole soutěže úspěšný, musel ze šestnácti zadaných úloh vyřešit minimálně devět a hodnocení nesmělo být horší než „dobré“. Ve druhém a třetím kole pak museli soutěžící ze čtyř úloh vyřešit alespoň dvě s minimálním hodnocením „dobré“ (Vyšín, Zelinka, 1952).

Jeden z hlavních důvodů vzniku Matematické olympiády bylo vzbudit v žácích zájem o studium matematiky a objevit mezi nimi ty nadané a talentované.

Druhý ročník Matematické olympiády (1952/1953) proběhl beze změn, avšak třetí ročník (1953/1954) zaznamenal výrazné změny. Nově byly zavedeny 4 kategorie – A, B, C a D. V kategorii A soutěžili nejen žáci 3. a 4. tříd výběrových škol, ale také žáci 11. ročníků všeobecně vzdělávacích škol. Kategorie B byla určena pro žáky 2. tříd výběrových škol a pro žáky 10. ročníků všeobecně vzdělávacích škol. V kategorii C soutěžili žáci 1. tříd výběrových škol a žáci 9. ročníků všeobecně vzdělávacích škol. Poslední kategorie D pak byla určena žákům 8. ročníků a jednoletým učebním kurzům všeobecně vzdělávacích škol. Kategorie D byla zřízena za účelem zvýšení úrovně vyučování matematiky na školách druhého stupně a právě tímto ročníkem přestala být Matematická olympiáda určena pouze žákům výběrových škol (Zelinka, 1954).

Další ročníky probíhaly prakticky bez výrazných změn. V 19. ročníku Matematické olympiády (1969/1970) dochází k přejmenování kategorie D na kategorii Z, která byla určena žákům 9. tříd ZŠ. Ve 25. ročníku soutěže (1975/1976) byla kategorie Z rozšířena také pro žáky 8. tříd ZŠ. V průběhu dalších ročníků se Matematická olympiáda postupně rozšiřovala směrem k nižším věkovým kategoriím. V 31. ročníku (1981/1982) došlo ke změně prvního kola, které již nemělo přípravný charakter, ale byla zavedena jeho školní část (Moravčík, 1983).

2.2.2 Charakteristika soutěže

V České republice se Matematická olympiáda koná pravidelně každý rok. Tuto soutěž vyhlašuje MŠMT. Tematické zaměření jednotlivých kategorií, pravidla a veškeré informace jsou zveřejňovány Ústřední komisí Matematické olympiády, a to nejen na webových stránkách www.matematickaolympiada.cz, ale také v letácích. Účast v této soutěži je zcela dobrovolná a nikterak nesouvisí s klasifikací žáků v matematice. Ve školním roce 2022/2023 proběhl již 72. ročník Matematické olympiády v České republice. Mohou se jí zúčastnit žáci 5.–9. ročníků základních škol a také žáci jim odpovídajících ročníků víceletých gymnázií a žáci středních škol. Hlavním cílem a posláním této soutěže je stále zejména snaha probudit u žáků zájem o matematiku, vyhledat matematické talenty a následně s nimi také pracovat (MO, 2023).

2.2.3 Organizace a pravidla soutěže

Matematické olympiády pro ZŠ se účastní žáci 5.–9. ročníků ZŠ a žáci víceletých gymnázií. Žáci soutěží obvykle v kategorii, která odpovídá jejich studijnímu ročníku, mohou ale soutěžit i v kategorii, která je určena žákům vyšších ročníků.

Tabulka 1. Rozdělení žáků ZŠ a víceletých gymnázií do kategorií

Ročník			Kategorie
ZŠ	8leté G	6leté G	
9	4	2	Z9
8	3	1	Z8
7	2	–	Z7
6	1	–	Z6
5	–	–	Z5

Soutěž v kategorii Z9 probíhá ve třech kolech, a to ve školním, okresním a krajském. Naopak kategorie Z8, Z7, Z6 a Z5 mají kola pouze dvě – školní a okresní. Každé školní kolo je organizováno na školách a žáci ve svém volném čase řeší celkem šest úloh, které jsou uvedeny na webu Matematické olympiády. Úlohy jsou hodnoceny stupnicí „výborně“, „dobře“ a „nevyhovuje“. Žáci ve školním kole musí odevzdat alespoň čtyři úlohy hodnocené „výborně“ či „dobře“. Veškeré výsledky škola zasílá okresní komisi Matematické olympiády a ta vybere nejlepší řešitele, kteří se následně zúčastní okresního kola.

V průběhu okresního kola řeší žáci kategorie Z9 čtyři soutěžní úlohy v průběhu čtyř hodin, u kategorie Z6–Z8 pak žáci řeší tři úlohy v průběhu tří hodin. Žáci kategorie Z5 řeší tři úlohy v časovém limitu 90 minut. Ve všech kategoriích se jednotlivé úlohy obodují a podle počtu získaných bodů se sestaví pořadí jednotlivých účastníků. Nejlepší účastníci jsou pak oceněni.

Průběh krajského kola je prakticky stejný jako u kola okresního, avšak je stanoveno jednoznačné pořadí úspěšných řešitelů a nejlepší řešitelé jsou vyhlášeni vítězi.

Na úrovni středních škol nalezneme celkem tři kategorie: A, B a C. Nejlepší řešitelé kategorie A pak v rámci družstva reprezentují Českou republiku v Mezinárodní matematické olympiádě (IMO) a Středoevropské matematické olympiádě (MEMO). Osmičlenné družstvo je tvořeno šesti soutěžícími, hlavním vedoucím a pedagogickým vedoucím (MO, 2023).

2.3 Matematický klokan

Mezinárodní soutěž Matematický klokan je oproti Matematické olympiádě přístupnější mnohem širšímu počtu žáků jak základních, tak také středních škol. Vzhledem k náročnosti Matematické olympiády je proto žáky i pedagogy Matematický klokan hodnocen jako přijatelnější a zajímavější. Pořadatelem této soutěže v České republice je Jednota českých matematiků a fyziků ve spolupráci s Katedrou matematiky Pedagogické fakulty Univerzity Palackého v Olomouci a Katedrou algebry a geometrie Přírodovědecké fakulty této univerzity (Matematický klokan, 2023).

Obrázek 2. Mezinárodní a česká verze loga Matematického klokana

2.3.1 Historie

Matematický klokan byl vytvořen na základě podobné soutěže, která probíhala v Austrálii v 80. letech minulého století z podnětu prof. Petera O'Hallorana (1931–1994). Prof. O'Halloran si kladl za cíl vytvořit takovou matematickou soutěž, která by nebyla jen pro ty nejlepší a nejtalentovanější žáky, ale především pro ty „normální". Žákům se snažil ukázat, že matematika nemusí být jen nudným a obávaným předmětem ve škole. Jeho snahou bylo vytvořit příklady tak, aby mohly poskytnout žákům radost ze soutěžení při řešení netradičních matematických úloh. Tato soutěž matematiku značně popularizovala a rozšířila se nejen v Austrálii, ale i v dalších zemích Evropy.

První ročník Matematického klokana v Evropě uspořádali francouzští matematici 15. května 1991 ve Francii. Pojmenovali ji *Kangourou* (klokan), aby vzdali hold australským kolegům. O rok později se soutěž rozšířila i do Polska, Rumunska, Bulharska a několika dalších evropských zemí. V červnu 1994 byla ve Štrasburku ustanovena mezinárodní asociace Kangourou sans frontières (Klokan bez hranic) se sídlem v Paříži, sdružující zástupce 11 evropských zemí (Francie, Španělsko, Velká Británie, Itálie, Polsko, Maďarsko, Slovinsko, Nizozemí, Rusko, Moldávie, Lucembursko) a Austrálie. Hlavním cílem asociace Kangourou sans frontières je rozšířit matematiku všemi možnými dostupnými způsoby v podobě soutěže, která se ve všech zemích pořádá ve stejný den a stejnou hodinu. Ve Štrasburku byla také formulována pravidla soutěže a postupně byly vytvořeny jednotlivé kategorie. První ročník Matematického klokana v České republice se konal 23. března 1995.

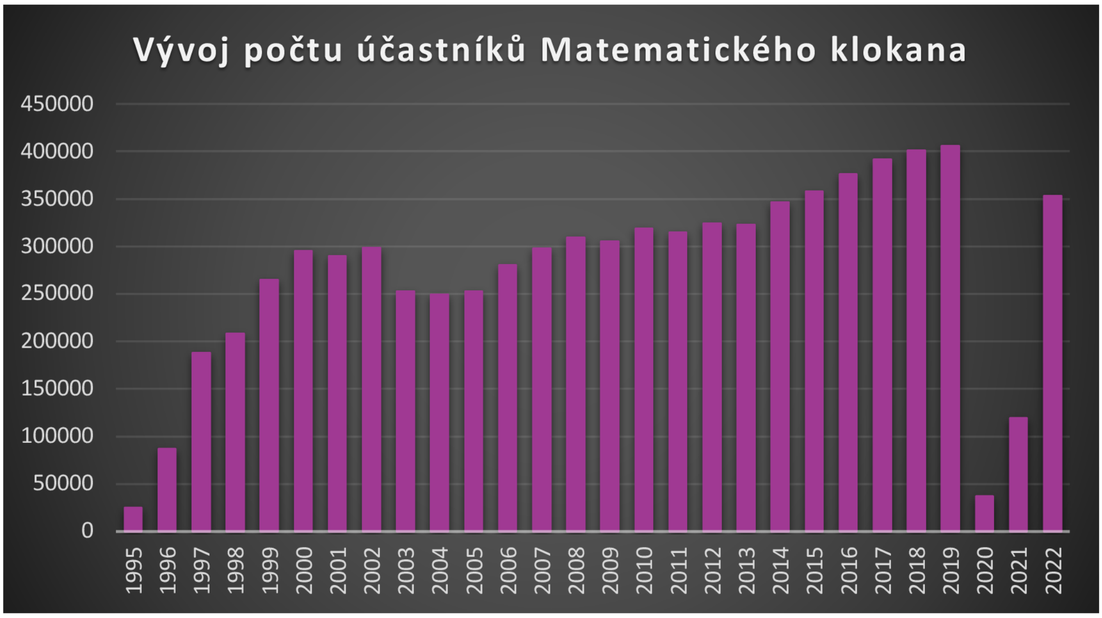
V průběhu let pak docházelo postupně ke zpřesňování pravidel soutěže. Její popularita byla obrovská a počet účastnických zemí i účastníků se rychle zvyšoval. Ve školním roce 2022/2023 se Klokana účastnilo 99 států. Roku 2019 se do soutěže zapojilo přes 6 milionů účastníků, avšak z důvodu pandemie Covidu-19 pak v letech 2020 a 2021 jejich počet poklesl na cca 3,5 milionu. Nyní již má účast v soutěži opět stoupající tendenci a roku 2022 se jí zúčastnilo 4,5 milionu zájemců (Akveld, Dolinar, 2023).

2.3.2 Charakteristika soutěže

V České republice se Matematický klokan koná pravidelně každý rok. Ve školním roce 2022/2023 proběhl již 29. ročník a v březnu 2024 proběhne jubilejní 30. ročník soutěže. Je to mezinárodně koordinovaná soutěž pro žáky základních a středních škol. Do roku 2022 byla soutěž vyhlašována Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy (MŠMT). Od roku 2023 soutěž vyhlašuje Jednota českých matematiků a fyziků (JČMF). Tematické zaměření jednotlivých kategorií, pravidla a veškeré informace jsou zveřejňovány Výborem Matematického klokana na webových stránkách www.matematickyklokan.net. Účast v této soutěži je zcela dobrovolná a nikterak nesouvisí s klasifikací žáků v matematice.

Soutěž je určena nejen pro žáky základních škol, a to již od 2. ročníku, ale i pro žáky středních škol. Soutěží se ve všech krajích České republiky v jednom termínu. Žáci ve stanoveném čase řeší testové úlohy, přičemž vybírají vždy jednu z pěti nabízených možností.

Jak již bylo zmíněno, Matematický klokan je soutěž, která není určena jen talentovaným a nadaným žákům. Jejím hlavním cílem je zejména popularizovat matematiku, umožnit uspět každému žákovi a ukázat všem, že matematika není jen nudným a obávaným předmětem. Popularita soutěže stále výrazně narůstá nejen ve světě, ale i u nás a počet nových soutěžících je každým rokem větší, vyjma let 2020 a 2021, výrazně poznamenaných covidovou pandemií (Calábek et al., 2021).



Graf 1. Vývoj počtu účastníků Matematického klokana v ČR v letech 1995–2022

2.3.3 Organizace a pravidla soutěže

Jedná se o jednorázovou individuální soutěž, účastníci tedy pracují vždy samostatně pod dozorem zabezpečujícím její regulérnost. Soutěž probíhá zpravidla v polovině měsíce března. Pro letošní rok byl stanoven tzv. Kangaroo day na 16. března. Ohledně termínu konání existuje pro jednotlivé země určitá benevolence a ČR má stanovené pravidlo pro termín konání na pátek po třetím čtvrtku v březnu. Setkání zástupců pořadatelských zemí probíhá vždy na podzim a jeho cílem je příprava dalšího ročníku Matematického klokana jak po stránce obsahové, tak také organizační.

Matematický klokan je rozdělen dle věku účastníků do šesti kategorií. Kategorie Cvrček je určena žákům 2.–3. třídy, Klokánek pro žáky 4.–5. třídy, Benjamín pro 6.–7. třídu a Kadet žákům 8.–9. třídy ZŠ. Soutěž je ale určena také žákům středních škol, pro které jsou vyhrazeny kategorie Junior (1.–2. ročník SŠ) a Student (3.–4. ročník SŠ).

Účastnici soutěže vypracovávají test, jenž obsahuje 24 úloh (u kategorie Cvrček 18 úloh), na jejichž řešení je vymezen čas 60 minut, vyjma kategorie Junior a Student, kde je časový rámec 75 minut. V testových úlohách účastníci vybírají jednu z pěti nabízených možností. Úlohy jsou v testech uspořádány podle gradující obtížnosti. Za správné řešení 1.–8. úlohy mohou účastníci získat 3 body, za správné řešení 9.–16. úlohy 4 body a za správně řešení 17.–24. úlohy 5 bodů. Pokud účastník soutěže nezvolí žádnou odpověď, nezíská žádný bod, avšak v případě chybné odpovědi bod ztratí. Aby účastníci nedosahovali záporných bodů, vstupuje každý z nich do soutěže s bonusem 24 bodů (kategorie Cvrček 18 bodů). Své odpovědi účastníci zaznamenávají do „karty odpovědí“ zatržením nejvýše jedné z nabízených možností (Calábek et al., 2021).

Na podobném principu jako soutěž Matematický klokan byly ve světě v různých státech založeny další soutěže typu „klokan“. Mezi takové soutěže můžeme zařadit Jazykového klokana, „informatického klokana“ (český oficiální název soutěže je Bobřík informatiky) nebo např. Přírodovědného klokana, který vznikl v České republice (Přírodovědný klokan, 2023).

2.3.4 Přírodovědný klokan

Soutěž Přírodovědný klokan vznikla v roce 2006 a jejím pořadatelem je Přírodovědecká fakulta Univerzity Palackého v Olomouci ve spolupráci s Pedagogickou fakultou této univerzity. Přírodovědný klokan je určen nejen žákům základních škol, ale také středních škol. Soutěž probíhá každoročně a jejím cílem je podpořit zájem žáků o přírodní vědy. Úlohy jsou formulovány tak, aby byly zajímavé, ale zároveň i náročné a aby podporovaly kritické myšlení a tvůrčí přístup k řešení problémů.

Obrázek 3. Logo soutěže Přírodovědný klokan

Soutěž se skládá z řady zajímavých úloh, které testují znalosti a schopnosti žáků v oblasti matematiky, fyziky, chemie a biologie. Její pravidla jsou obdobná jako v Matematickém klokanovi. Kategorie jsou zde pouze dvě, a to Kadet, kde mohou soutěžit žáci 8. a 9. tříd ZŠ a žáci odpovídajících tříd víceletých gymnázií, a Junior, kde soutěží žáci 1. a 2. ročníku SŠ a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií. Soutěž probíhá každoročně v půlce října.

V obou kategoriích řeší soutěžící celkem 24 úloh v časovém limitu 40 minut. Úlohy jsou rozděleny do tří skupin podle bodování – za 3, 4 a 5 bodů. Stejně jako u Matematického klokana, i zde účastník vstupuje do soutěže s 24 body. Za každou správnou odpověď získá soutěžící příslušný počet bodů, za nevyřešenou úlohu nezíská žádný bod a za špatně zodpovězenou úlohu se naopak bod odečte. Z každé kategorie jsou vybráni tři nejlepší řešitelé (Přírodovědný klokan, 2023).

2.4 Pythagoriáda

Matematická soutěž Pythagoriáda je určena všem žákům 6.–9. tříd základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií. Pythagoriáda je stejně jako Matematický klokan řazena mezi matematické soutěže, které jsou na rozdíl od Matematické olympiády určeny širšímu okruhu žáků (Pythagoriáda, 2023).

Obrázek 4. Logo Pythagoriády

2.4.1 Historie

Pythagoriáda vznikla na Slovensku v době, kdy ještě Matematický klokan neexistoval, a díky obětavosti řady pedagogů je zachována dodnes. V minulosti se setkáváme převážně s Matematickou olympiádou, jakožto soutěží sloužící k vyhledávání matematických talentů. Přínos takové soutěže byl nesporný, avšak objevovala se stále větší potřeba zavést do škol také soutěže, které nebudou určeny jen matematickým talentům, ale umožní zažít pocit vítězství i „běžným“ žákům. Dne 3. 11. 1978 se odehrálo setkání výboru Výzkumného ústavu pedagogického, jehož hlavním úkolem bylo vytvořit koncepci a stanovy nové matematické soutěže. Výsledkem byl vznik Pythagoriády ČSSR, jejíž první kolo se uskutečnilo ve školním roce 1978/1979. Soutěž byla určena výhradně žákům 2. stupně základní školy a měla za úkol podnítit jejich zájem o matematiku. Bylo dohodnuto, že úkoly v soutěži nebudou překračovat rámec osnov matematiky na základní škole a že soutěž proběhne ve dvou kolech, školním a okresním.

Na základě stanovených zásad byla zpracována pravidla, kterými se soutěž Pythagoriáda ČSSR řídila, a byly vytvořeny úlohy jak pro kolo školní, tak pro kolo okresní. První ročník soutěže probíhal pouze v 6. třídách na základních školách. Ale již po něm se ukázalo, že o tento typ soutěže je velký zájem.

V dalších letech tak Pythagoriáda probíhala nejen v 6., ale také v 7. třídách. Roku 1982 došlo k vytvoření úloh jak ve školním, tak okresním kole i pro žáky 5. ročníků základních škol (Brant, 1984).

Ve školním roce 2019/2020 veškerou organizaci týkající se Pythagoriády přebrala Základní škola Sirotkova 36 v Brně, pod vedením Mgr. Marcely Cvrkalové.

2.4.2 Charakteristika soutěže

Pythagoriáda se koná každoročně na území České republiky a je určena všem žákům 6.–9. ročníků ZŠ a příslušných ročníků víceletých gymnázií. Informace k soutěži, včetně termínů konání jednotlivých kol, jsou vždy zveřejněny na webových stránkách www.pythagoriada.cz. Ve školním roce 2022/2023 proběhl již 45. ročník. Soutěž probíhá ve dvou kolech, školním a okresním. Veškerá zadání a řešení úloh jsou rozesílána pracovníkům krajských úřadů zodpovědných za soutěž v jednotlivých krajích. Ti pak zajišťují dodání úloh do jednotlivých škol v příslušném kraji.

Jak již bylo řečeno, matematická soutěž Pythagoriáda není určena jen matematickým talentům, jejím hlavním cílem je zejména zvýšit zájem o matematiku a rozvíjet tvořivé a logické myšlení (Pythagoriáda, 2023).

2.4.3 Organizace a pravidla soutěže

Jedná se o individuální soutěž, účastníci tedy pracují zcela samostatně, pod dozorem zabezpečujícím regulérnost soutěže.

Pythagoriáda probíhá ve dvou kolech, školním a okresním. Má celkem 4 kategorie, které odpovídají jednotlivým ročníkům základní školy. Každý soutěžící řeší celkem 15 úloh ve stanoveném limitu 60 minut. Soutěžící může za každou správnou odpověď získat 1 bod, za nesprávné odpovědi se na rozdíl od Matematického klokana body neodečítají.

Úspěšným řešitelem školního kola je každý žák, který získal 9 a více bodů. Do okresního kola však postupují z každé školy a každé kategorie pouze řešitelé, kteří dosáhli nejvyššího počtu bodů.

Okresní kolo se stejně jako školní skládá celkem z 15 úloh a časového rámce 60 minut. Úspěšným řešitelem okresního kola se stává účastník, který získá 10 a více bodů (Pythagoriáda, 2023).

2.5 Pangea

Matematická soutěž Pangea je určena všem žákům 4.–9. tříd základních škol a nižších ročníků víceletých gymnázií. Tato soutěž se zaměřuje na provázanost matematiky s běžným životem, pracuje tedy s reálnými příklady ze života, čímž se od ostatních značně odlišuje. V České republice je tato soutěž pořádána matematickým spolkem Meridian (Kovář, 2019).

Obrázek 5. Logo matematické soutěže Pangea

2.5.1 Historie

Pangea se řadí mezi poměrně mladé matematické soutěže. Vznikla v roce 2007 v Německu, kde také sídlí její vedení. Odtud se pak postupně rozšířila do dalších zemí a její popularita rychle rostla. Již v roce 2013 se této soutěže účastnilo téměř 400 000 žáků z více než 17 zemí Evropy. V České republice proběhla soutěž poprvé ve školním roce 2013/2014, od roku 2016 se jí zúčastňují také žáci z české třídy Evropské školy v Bruselu. Od roku 2018 existuje také možnost využít online verze soutěže.

Tato soutěž získala název podle prehistorického uspořádání kontinentů, které byly v minulosti spojeny v jeden celek, označovaný jako Pangea. A přesně takový cíl si soutěž stanovila – znovusjednocení žáků jednotlivých zemí v oblasti matematiky (Pangea, 2023).

2.5.2 Charakteristika soutěže

Pangea se koná každoročně na území České republiky a jejím pořadatelem je Meridian matematický spolek. Tematické zaměření, pravidla a veškeré informace jsou zveřejňovány na webových stránkách www.pangeasoutez.cz. Účast v této soutěži je zcela dobrovolná a nikterak nesouvisí s klasifikací žáků v matematice. Ve školním roce 2022/2023 proběhl již 10. ročník. Úlohy v soutěži Pangea jsou tematicky zaměřovány zejména na oblast společenských věd a přírodovědných oborů. Pro ročník 2022/2023 byla zvolena témata „dějiny“ a „zvířata“.

Celoevropská filozofie soutěže Pangea se zaměřuje na motivaci žáků a budování jejich vztahu k matematice. Snaží se zdůraznit význam matematiky jak v běžném životě, tak také v tom profesním. Soutěž tedy necílí pouze na matematické talenty, ale také na žáky, kteří neřadí matematiku mezi své oblíbené předměty. Organizátoři se proto snaží připravovat zadané úlohy tak, aby zaujaly většinu žáků a aby alespoň polovinu z nich byli žáci schopni vyřešit (Kovář, 2019).

2.5.3 Organizace a pravidla soutěže

Soutěž Pangea probíhá ve dvou kolech, a to v kole školním a kole finálním. Jedná se o individuální soutěž, účastníci tedy pracují vždy samostatně pod dozorem zabezpečujícím její regulérnost.

Školní kolo soutěže je prvním kolem a koná se zpravidla v termínu mezi polovinou února a polovinou března. Přesný termín si určuje vždy každá škola sama. Školní kolo může každá škola pořádat ve dvou verzích, a to v tištěné či online verzi. Soutěžící řeší celkem 15 otázek v časovém rámci 45 minut. Na regulérnost soutěže dohlíží zástupci jednotlivých škol. Pangea se současně snaží o co nejmenší zatížení pedagogů, a proto je vyhodnocení školního kola organizováno centrálně.

Finálové, tedy ústřední kolo je určeno nejlepším řešitelům ze školního kola. Toto kolo probíhá v červnu v Nové budově Národního muzea v Praze. Zde již soutěžící řeší 20 otázek v časovém rámci 60 minut. Vyhlašována jsou první tři místa v každé kategorii, avšak každý účastník získá certifikát za účast v soutěži.

V roce 2022/2023 byla soutěž pořádána celkem v šesti kategoriích, které odpovídají ročníkům základní školy (Pangea, 2023).

2.6 Další matematické soutěže

Výše zmíněné soutěže se řadí na základních školách k těm nejoblíbenějším. Existuje ale celá řada dalších matematických soutěží, kterých se žáci základních škol mohou účastnit.

2.6.1 Logická olympiáda

Logická olympiáda je soutěží, která je určena všem stupňům vzdělání a je pořádána od roku 2008 Mensou České republiky. Tato soutěž se zakládá na logických úlohách, které vyžadují samostatný a kreativní přístup. Nezáleží v ní na naučených znalostech, hlavní je schopnost samostatně uvažovat a pohotově rozhodovat.

Soutěž je vyhlašována v několika kategoriích. Kategorie MŠ se mohou účastnit mateřské školy. Kategorie A1 je určena žákům 1. třídy, kategorie A2 pak žákům 2. třídy. Pro žáky 3.–5. tříd je vyhrazena kategorie A, žáci druhého stupně a jim odpovídajících ročníků víceletých gymnázií řadíme do kategorie B. Soutěže se mohou zúčastnit také žáci středních škol, kteří soutěží v kategorii C.

Pro kategorie MŠ, A1, A2 je soutěž jednokolová a výstupem je pouze informace o umístění. Ostatní kategorie – A, B, C – mají kola tři: základní, krajské a finále. Účastníci soutěže se registrují na webových stránkách www.logickaolympiada.cz.

Základní kolo probíhá online formou. Do krajského kola postupuje v každém kraji a kategorii 44–60 nejlepších soutěžících. Finálové kolo je složeno z několika bloků, ve kterých soutěžící řeší logické úkoly s důrazem na správné a rychlé řešení (Logická olympiáda, 2022).

2.6.2 MaSo

MaSo je týmová matematická soutěž, kterou každoročně organizuje Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy v Praze ve spolupráci s korespondenčním seminářem Pikomat. Je určena žákům 6.–9. tříd základních škol a jim odpovídajících ročníků víceletých gymnázií. Koná se dvakrát ročně, na jaře a na podzim.

Soutěž MaSo vznikla v roce 2006, od té doby se jí již zúčastnilo více než tisíc žáků z 90 škol. Jde v ní zejména o týmovou spolupráci, soutěží se v 3–4členných týmech. Principem této soutěže je hra, která je každý rok jiná. Soutěžící řeší matematické příklady a jejich vyřešením získají tahy do hry (MaSo, 2022).

2.6.3 PraSe (Pražský Seminář)

Matematický korespondenční seminář PraSe je celoroční matematická soutěž, která je pořádaná studenty Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze. První ročník tohoto semináře se konal již v roce 1981/1982, čímž se řadí mezi nejstarší korespondenční semináře u nás.

Pražský seminář je určen žákům základních a středních škol, kteří soutěží jednotlivě. Soutěž se dělí do dvou kategorií, první je vyhrazena žákům základních škol, druhá pak žákům škol středních. Seminář má dvě části, jarní a podzimní, a žáci se mohou zapojit buď pouze do jedné části, nebo do obou.

Soutěžící dostávají v průběhu celého školního roku úlohy, jejichž řešení následně odesílají elektronicky nebo poštou, organizátoři je poté vyhodnotí. Úlohy jsou zadávány ve čtyřech sériích v podzimní části a ve čtyřech sériích v jarní části. Zvláštností této soutěže je čtvrtá série podzimní části, která je zadávána v anglickém jazyce a i řešení musejí soutěžící odevzdat v angličtině. Prvních sedm sérií je složeno z osmi úloh seřazených dle náročnosti. Poslední série pak obsahuje úloh sedm rozdělených na dvě části (PraSe, 2022).

2.6.4 Pikomat

Korespondenční seminář Pikomat vznikl po vzoru korespondenčních seminářů pro žáky středních škol na Slovensku. Název Pikomat je zkratkou názvu PIonýrský KOrespondenční MATematický seminář a poprvé byl zorganizován roku 1981 v Bratislavě. V Praze se poprvé objevil ve školním roce 1987/1988 na gymnáziu W. Piecka.

V současné době je Pikomat celoroční matematická soutěž, která je určena především žákům 6.–9. tříd základních škol. Tato soutěž je organizována studenty

Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze. Probíhá po celý školní rok.

Pro soutěžící je postupně připravena série šesti úloh. Ty jsou svou náročností srovnatelné s úlohami z Matematické olympiády, což umožňuje vyhledávat matematické talenty. Jednotlivé úlohy jsou zakomponovány do nějakého příběhu na pokračování, což činí soutěž pro žáky zajímavou. Po celkovém vyhodnocení jsou pak nejlepší žáci pozváni na závěrečné soustředění, jehož program se zaměřuje na poznávání okolí a snahu nenásilnou formou žákům přiblížit matematiku (Pikomat, 2022).

PRAKTICKÁ ČÁST

Teoretická část diplomové práce se zaměřuje, jak název sám vypovídá na matematické soutěže v České republice. Vzhledem k zaměření výuky se práce zaměřuje na oblíbené matematické soutěže na druhém stupni základních škol. Práce se zmiňuje o důležitém významu matematických soutěží. Mimo jiné se také práce zmiňuje o metodách výuky matematiky na školách v České republice.

První část praktické části diplomové práce se věnuje řešení vybraných soutěžních úloh z oblíbených matematických soutěží. Jednotlivé úlohy a jejich řešení tak ukazuje na rozdílnost v každé soutěži. U Matematické olympiády můžeme vidět, že úlohy jsou složitější, neboť cílí na matematické talenty a jejich řešení není jednoduché a na první pohled ani zjevné. Naopak u úloh ze soutěže Matematický klokan se náročnost úloh postupně zvyšuje, za což soutěžící mohou získat vyšší bodové hodnocení. V Pythagoriádě se objevují úlohy jednodušší, ale i složitější. Pangea se pak zaměřuje na úlohy ze života a každý ročník se vždy zaměřuje na nějaké důležité téma. Žákům tak ukazuje důležitost matematiky v běžném životě. Všechny vybrané úlohy pro tuto práci byli z kategorií pro žáky 9. ročníků základní školy a jim příslušné nižší ročníky víceletých gymnázií.

Druhá část praktické části se věnuje tvorbě vlastních úloh. Tyto úlohy se zaměřují na důležité oblasti matematiky, které by měli žáci 9. ročníků dle očekávaných výstupů RVP již ovládat. Každá úloha obsahuje jeho analýzu a předpokládaný postup řešení, který ale nemusí být jediným možným řešením. Úlohy jsou vždy otevřené s jednou správnou odpovědí.

Třetí část praktické části se pak věnuje již samotnému výzkumu. Studium teoretických pramenů týkajících se matematických soutěží, které na území České republiky probíhají, vytvořilo základ pro realizaci vlastního výzkumu. Tato část zahrnuje také vyhodnocení jednotlivých výsledků. Výzkum byl uskutečněn v průběhu února a března roku 2023.

3 Řešení vybraných úloh z matematických soutěží

3.1 Vybrané úlohy z Matematické olympiády

Matematická olympiáda se svou náročností řadí mezi soutěže, které jsou primárně určeny talentovaným žákům. Každý soutěžící musí ovládat elementární matematiku, aby byl následně schopen řešit příklady z Matematické olympiády, neboť velká většina úloh z této soutěže přesahuje požadavky RVP a v běžných hodinách matematiky se tento typ příkladů nevyskytuje. Pro tuto práci byly vybrány některé úlohy z kategorie Z9 domácího kola 2019/2020 (69. ročník), kategorie Z8 domácího kola 2015/2016 (65. ročník) a kategorie Z7 a Z6 domácího kola 2021/2022 (71. ročník). Přesné zadání jednotlivých úloh bylo převzato z oficiálního zadání Matematické olympiády pro jednotlivé ročníky.

Úloha Z6-I-6, MO 2021/2022

Pětice kamarádů porovnávala, kolik starého železa přivezli do sběru. Průměrně to bylo 55 kg, avšak Ivan přivezl jen 43 kg. Kolik kg v průměru přivezli bez Ivana?

<u>Komentář a postup možného řešení:</u>

Úloha na jeden ze statistických údajů – aritmetický průměr. Je nutno, abychom tento pojem znali, pokud chceme úlohu řešit.

Víme, že Ivan přivezl 43 kg, což je o 12 kg méně, než aritmetický průměr jeho kamarádů ($55 - 43 = 12\ kg$).

Těchto 12 kg musíme průměrně rozdělit na zbylé 4 kamarády: $12 : 4 = 3\ kg$.

Nyní již víme, že průměrně zbylý 4 kamarádi přivezli 58 kg ($55 + 3 = 58\ kg$).

Bez Ivana v průměru jeho 4 kamarádi přivezli 58 kg železa.

Tematický okruh: Závislosti, vztahy a práce s daty.

Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-2-01 žák vyhledává, vyhodnocuje a zpracovává data.

Učivo: Aritmetický průměr

Ročník: 6.

Úloha Z7-I-5, MO 2021/2022

Honza vyrazil do světa s rancem buchet. Na prvním rozcestí potkal Dlouhého, Širokého a Bystrozrakého a spravedlivě se s nimi o své buchty rozdělil – každý dostal čtvrtinu buchet – Honza ze svého dílu ujedl dvě buchty a vyrazil dál.
Na druhém rozcestí potkal Jeníčka a Mařenku a i s nimi se spravedlivě rozdělil – každý dostal třetinu zbylých buchet. Honza ze svého dílu snědl dvě buchty a se zbylými vyrazil dál.
Na třetím rozcestí potkal Sněhurku. I s tou se spravedlivě rozdělil, takže oba měli polovinu zbylých buchet. Když Honza snědl opět svoje dvě buchty, byl ranec prázdný, a tak se vrátil domů.
S kolika buchtami vyrazil Honza do světa?

<u>Komentář a postup možného řešení:</u>

Tento typ úloh je nejlepší řešit vždy odzadu:

Víme, že na třetím rozcestí Honza snědl poslední 2 buchty ,které tvořily přesně polovinu z toho, co na toto rozcestí přinesl.

⇒ 3. rozcestí = 4 buchty ($\frac{1}{2}$ $ze\ 4 = 2\ buchty, co\ Honza\ snědl$)

Z druhého rozcestí si Honza odnášel 4 buchty. Víme, že i na tomto rozcestí snědl 2 buchty což znamená, že jich musel mít po rozdělení 6. 6 buchet tvořilo třetinu toho, co na toto rozcestí přinesl. Na toto rozcestí musel Honza přinést 18 buchet, aby se spravedlivě rozdělil s Jeníčkem a Mařenkou.

⇒ 2. rozcestí = 18 buchet

Z prvního rozcestí si Honza přinesl 18 buchet, snědl zde 2 buchty, což znamená, že jich měl celkem 20. Těchto 20 buchet tvořilo čtvrtinu z toho, co si odnesl z domova (zde se rozdělil s Dlouhým, Širokým a Bystrozrakým). Na toto rozcestí musel Honza dorazit s 80 buchtami, aby se mohl postupně spravedlivě rozdělit s každým, koho potkal.

⇒ 1. rozcestí = 80 buchet

Jednotlivé úvahy si můžeme zaznačit také do tabulky, která může být přehlednější:

rozcestí	**Zbylo buchet**	**Přinesl buchet**
třetí	0	$2 \cdot 2 = 4$

druhé	4	$(4+2)\cdot 3=18$
první		$(18+2)\cdot 4=80$

Honza si z domu odnesl celkem 80 buchet.

Tematický okruh: Nestandardní aplikační úlohy a problémy

Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-4-01, žák užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problém ů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací

Učivo: Logické úlohy

Ročník: 7.

Úloha Z9-I-1, MO 2019/2020

Ondřej, Matěj a Kuba se vracejí ze sbírání ořechů, celkem jich mají 120. Matěj si stěžuje, že Ondra má jako vždy nejvíc. Otec přikáže Ondrovi, aby přisypal ze svého Matějovi tak, aby mu počet ořech zdvojnásobil. Nyní si stěžuje Kuba, že nejvíc má Matěj. Na otcův příkaz přisype Matěj Kubovi tak, že mu počet ořechů zdvojnásobí. Na to se zlobí Ondra, že nejméně ze všech má teď on. Kuba tedy přisype Ondrovi tak, že mu počet ořechů zdvojnásobí. Teď mají všichni stejně a konečně je klid. Kolik ořechů měl původně každý z chlapců?

Komentář a postup možného řešení:

V první řadě vycházíme z prohlášení a teď mají všichni stejně. Víme, že ořechů bylo 120, tedy (*120 : 3 = 40*).

Nyní si označíme původní počty ořechů písmeny *x*, *y* a *z* a jednotlivé transakce si zaneseme do tabulky pro lepší přehlednost.

	ONDRA	MATĚJ	KUBA
Původně	x	y	z
Ondra dal Matějovi	$x-y$	$2\cdot y$	z
Matěj dal Kubovi	$x-y$	$2\cdot y-z$	$2\cdot z$
Kuba dal Ondrovi	$2\cdot(x-y)$	$2\cdot y-z$	$2\cdot z-(x-y)$

Dle zadání tedy platí následující:

$$2\cdot(x-y)=40$$
$$2\cdot y-z=40$$
$$2\cdot z-(x-y)=40$$

Nyní si můžeme jednotlivé rovnice postupně upravit a řešit soustavu rovnic pomocí dosazovací metody:

Víme, že rovnost $2\cdot(x-y)=40$ je ekvivalentní $(x-y)=20$.

Nyní můžeme dosadit $(x-y)=20$ do rovnosti $2\cdot z-(x-y)=40$ a dostaneme tedy $2\cdot z=60$ což je ekvivalentní $\boldsymbol{z=30}$. Nyní již můžeme vyřešit druhou rovnici

$2 \cdot y - z = 40$, abychom získali druhou neznámou. A dostáváme tedy $2y = 70$, což je ekvivalentní $\boldsymbol{y = 35}$. A nakonec z rovnosti $(x - y) = 20$ získáme poslední neznámou, tedy $\boldsymbol{x = 55}$.

Nyní jsme již schopni odpovědět na otázku. **Ondra měl původně 55 ořechů, Matěj 35 a Kuba 30 ořechů.**

Tematický okruh: Číslo a proměnná
Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-1-08, žák formuluje a řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav
Učivo: Soustava lineárních rovnic, metoda dosazovací
Ročník: 9.

Úloha Z9-I-4, MO 2019/2020

Maty dopadl padákem na ostrov obývaný dvěma druhy domorodců: Poctivci, kteří vždy mluví pravdu, a Lháři, kteří vždy lžou. Před dopadem zahlédl v dálce přístav, ke kterému se hodlal dostat.

Na prvním rozcestí potkal Maty jednoho domorodce a opodál viděl druhého. Požádal prvního, aby se zeptal toho druhého, zda je Lhář, nebo Poctivec. První domorodec Matymu vyhověl, šel se zeptat a když se vrátil, oznámil Matymu, že druhý domorodec tvrdí, že je Lhář. Poté se Maty prvního domorodce zeptal, která cesta vede k přístavu. Ten mu jednu cestu ukázal a dál si Matyho nevšímal.

Má, nebo nemá Maty domorodci věřit? Vede, nebo nevede ona cesta k přístavu?

Komentář a postup možného řešení:

Logický typ úlohy, který se v obdobné podobě vyskytuje u mnoha matematických soutěží a bývá také velmi často součástí přijímacích testů na vysoké školy. U komplikovanějších úloh většinou může být žákům nápomocno grafické schéma či tabulka.

V první řadě je nezbytné si uvědomit, že Poctivec o sobě nemůže říct, že je Lhář, neboť by lhal, což vzhledem k zadání není možné. Ale ani Lhář nemůže o sobě říci, že je Lhář, neboť by mluvil pravdu, což se opět vylučuje. Což nás tedy dovede k úsudku:

První domorodec nemohl mluvit pravdu a je to tedy Lhář. Maty by tedy prvnímu domorodci věřit neměl a cesta, kterou mu poradil nevede do přístavu.

Další možný postup:

Označíme si Lháře (L) a Poctivce (P).

A vypíšeme si všechny možnosti:

1. domorodec	2. domorodec	
P	P	×
P	L	×
L	P	OK
L	L	OK

Varianta PP:

1. domorodec – Jsi P nebo L?

2. domorodec – Jsem P.

1. domorodec – Je to P.

Varianta není vhodná.

Varianta PL:

1. domorodec – Jsi P nebo L?

2. domorodec – Jsem P.

1. domorodec – Je to P.

Varianta není vhodná.

Varianta LP:

1. domorodec – Jsi P nebo L?

2. domorodec – Jsem P.

1. domorodec – Je to L.

Varianta je vhodná.

Varianta LL:

1. domorodec – Jsi P nebo L?

2. domorodec – Jsem P.

1. domorodec – Je to L.

Varianta je vhodná.

Poslední dvě varianty nám tedy říkají, že první domorodec musí být lhář.

Tematický okruh: Nestandardní aplikační úlohy a problémy

Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-4-01, žák užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problém ů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací

Učivo: Logické úlohy

Ročník: 9.

Úloha Z9-I-5, MO 2019/2020

> Majka zkoumala vícemístná čísla, ve kterých se pravidelně střídají liché a sudé číslice. Ta, která začínají lichou číslicí, nazvala komická a ta, která začínají sudou číslicí, nazvala veselá.
> Majka vytvořila jedno trojmístné komické číslo a jedno trojmístné veselé číslo, přičemž šest použitých číslic bylo navzájem různých a nebyla mezi nimi 0. Součet těchto dvou čísel byl 1617. Součin těchto dvou čísel končil dvojčíslím 40.
> Určete Majčina čísla a dopočítejte jejich součet.

<u>Komentář a postup možného řešení:</u>

V první řadě si musíme uvědomit, kolikamístné mohou být součiny trojmístných čísel. Součiny dvou trojmístných čísel mohou být alespoň pětimístné a nanejvýš šestimístné. Nyní si můžeme zapsat to, co již ze zadání víme. Neznámá čísla si označíme různými písmeny, řekneme si, že velká písmena budou odpovídat sudým číslům a naopak malá písmena pak lichým.

$$\begin{array}{r} a\ B\ c \\ +\ D\ e\ F \\ \hline 1\ 6\ 1\ 7 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} a\ B\ c \\ \cdot\ D\ e\ F \\ \hline ?\ ?\ ?\ 0 \\ ?\ ?\ ?\ ?\ \\ ?\ ?\ ?\ ?\ \\ \hline ?\ ?\ ?\ ?\ 4\ 0 \end{array}$$

Nyní postupuje postupně, aby mohla být ve výsledku součinu poslední číslice 0, pak číslo c musí být 5, tedy $\boldsymbol{c = 5}$. Zároveň má být poslední číslice součtu 7, tedy musí platit, že $\boldsymbol{F = 2}$.

V součtu na místě desítek máme 1, tedy součet $B + e = 11$. Hledáme tedy pro B sudé číslo různé od 2 (jak vyžaduje zadání, použitá čísla totiž musí být různá a není mezi nimi 0). Pro e hledáme číslo liché různé (vyjma 5, tu jsme již použili), jehož součet s číslem B bude 11.Tyto podmínky splňují dvě možné kombinace. $B = 4, e = 7$ nebo $B = 8, e = 3$.

Předpokládejme tedy, že $B = 4, e = 7$.

$$\begin{array}{r} a\;4\;5 \\ +\;D\;7\;7 \\ \hline 1\;6\;1\;7 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} a\;4\;5 \\ \cdot\;D\;7\;2 \\ \hline ?\;?\;9\;0 \\ ?\;?\;1\;5\; \\ ?\;?\;?\;?\;\; \\ \hline ?\;?\;?\;?\;4\;0 \end{array}$$

V tomto předpokladu vychází v součinu poslední dvojčíslí 40, což odpovídá i našemu zadání.

Předpokládejme tedy, že $B = 8, e = 3$.

$$\begin{array}{r} a\;8\;5 \\ +\;D\;3\;7 \\ \hline 1\;6\;1\;7 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} a\;8\;5 \\ \cdot\;D\;3\;2 \\ \hline ?\;?\;7\;0 \\ ?\;?\;5\;5\; \\ ?\;?\;?\;?\;\; \\ \hline ?\;?\;?\;?\;2\;0 \end{array}$$

V tomto předpokladu vychází v součinu poslední dvojčíslí 20, což neodpovídá našemu zadání. Tato možnost vede ke sporu a můžeme ji tedy vyloučit.

Máme prozatím určeno, že $\boldsymbol{B = 4, c = 5, e = 7, F = 2}$.

Aby součet začínal dvojčíslím 16, musí platit, že $a + D = 15$ (předchozí krok – přechod přes desítku). Hledáme tedy liché *a* (vyjma 5 a 7) a sudé *D* (vyjma 0, 2 a 4). Tuto podmínku však splňuje pouze možnost, že $\boldsymbol{a = 9}$ **a** $\boldsymbol{D = 6}$.

Hledaná Majčina čísla jsou tedy číslo komické 945 a číslo veselé 872. Jejich součin pak je 635 040.

Tematický okruh: Nestandardní aplikační úlohy a problémy

Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-4-01, žák užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problém ů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací

Učivo: Algebrogramy

Ročník: 9.

Úloha Z8-I-2, MO 2015/2016

Na louce se pasou koně, krávy a ovce, dohromady jich je méně než 200. Kdyby bylo krav 45krát víc, koní 60krát víc a ovcí 35krát víc, než kolik jich je nyní, jejich počty by se rovnaly. Kolik se na louce pase koní, krav a ovcí dohromady?

Komentář a postup možného řešení:

Na louce máme koně, krávy a ovce, označíme si je jako neznámé následovně:

Koně	x
Krávy	y
Ovce	z

Ze zadání úlohy platí, že:

$$x + y + z < 200$$

Víme, že pokud bude krav 45krát víc, koní 60krát víc a ovcí 35krát více, jejich počty se budou rovnat, tedy:

$$45x = 60y = 35z$$

Tento typ úlohy nyní můžeme řešit určením nejmenšího společného násobku $n\,(60, 45, 35)$.

Existuje několik způsobů, jak můžeme určit nejmenší společný násobek, vysvětlíme si zde dva nejčastěji používané způsoby:

1. Nejmenší společný násobek můžeme určit rozkladem daných násobků na součin prvočísel:

   $$45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$$
   $$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$
   $$35 = 5 \cdot 7$$

   Nejmenší společný násobek je roven součinu všech prvočísel, které se vyskytují alespoň v jednom rozkladu (v nejvyšší mocnině, v jaké se vyskytují):

   $$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 1260$$

2. Další možností, jak můžeme určit nejmenší společný násobek, je metodou postupného násobení. Tento způsob spočívá v postupném násobení čísel tak, aby se dosáhlo nejmenšího společného násobku.

   Násobky čísla 45:

   $45, 90, 135, 180, 225, 270, 315, 360, 405, 450, 495, 540, 585, 630, 675, 720, 765, 810, 855, 900, 945, 990, 1\ 035, 1\ 080, 1\ 125, 1\ 170, 1\ 215, \mathbf{1\ 260}, 1305, \ldots$

   Násobky čísla 60:

   $60, 120, 180, 240, 300, 360, 420, 480, 540, 600, 660, 720, 780,$
   $840, 900, 1\ 020, 1\ 080, 1\ 140, 1\ 200, \mathbf{1\ 260}, 1320, \ldots$

   Násobky čísla 35:

   $35, 70, 105, 140, 175, 210, 245, 280, 315, 350, 385, 420, 455, 490, 525, 560,$
   $595, 630, 665, 700, 735, 770, 805, 840, 875, 910, 945, 980, 1\ 015, 1\ 050,$
   $1\ 085, 1\ 120, 1\ 155, 1\ 190, 1\ 225, \mathbf{1\ 260}, 1\ 295, \ldots$

   Nejmenší společný násobek čísel 45, 60 a 35 je číslo 1 260. Jak můžeme vidět, tento postup je poměrně zdlouhavý a může tak snadno docházet k chybám, zejména pokud se bude jednat o velká čísla.

   Námi nalezený největší společný násobek nyní vydělíme číslem, o které se má zvětšit počet krav, koní a ovcí:

   Krávy $1\ 260 : 45 = 28$
   Koně $1\ 260 : 60 = 21$
   Ovce $1\ 260 : 35 = 36$

   Jednotlivé hodnoty sečteme: $x + y + z = 21 + 28 + 36 = 85$

Na louce se pase 85 koní, koz a ovcí.

Zadání udává, že na louce je dohromady méně jak 200 zvířat, je tedy nutné ověřit, zda neexistuje více možných řešení.

Určíme další společný násobek $n(45{,}60{,}35) = 2\ 520$. Stejně jako v předchozím kroku společný násobek vydělíme čísly, kterými se má počet zvířat na louce zvětšit:

Krávy	$2\,520 : 45 = 56$
Koně	$2\,5200 : 60 = 42$
Ovce	$2\,520 : 35 = 72$

Sečteme jednotlivé hodnoty: $x + y + z = 42 + 56 + 72 = 170$.
Jak vidíme, číslo 170 je menší, než číslo 200 a tedy je zde i další řešení:
Na louce se dohromady pase buď 85, nebo 170 krav, koní a ovcí.

Můžeme si ještě ověřit, zda neexistuje další řešení (ačkoliv k velikosti druhého výsledku je toto nepravděpodobné).
Další společný násobek $n(45,60,35) = 3\,780$. Na louce by se ale páslo 255 krav, koní a ovcí. To však již nevyhovuje zadané podmínce, že zvířat je méně než 200.

Na louce se tedy pase buď 85, nebo 170 krav, koní a ovcí.

Tematický okruh: Číslo a proměnná
Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-1-03, žák modeluje a řeší situace s využitím dělitelnosti v oboru přirozených čísel.
Učivo: Dělitelnost přirozených čísel, prvočíslo, násobek, dělitel
Ročník: 6.

3.2 Vybrané úlohy z Matematického klokana

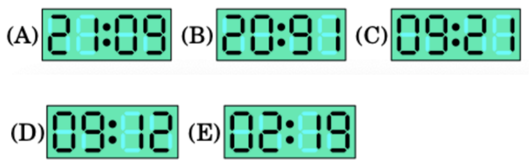
Matematický klokan je soutěž, která se snaží svým typem úloh přiblížit většímu okruhu žáků. Vtipnou a nenásilnou formou se pomocí úloh snaží u žáků rozvíjet zájem o matematiku, zaujmout je a ukázat jim, že i matematika nemusí být strašákem. Pro tuto práci byly vybrány některé úlohy z kategorie Benjamín a kategorie Kadet, roč. 2015, 2016, 2018, 2019, 2020 a 2022. Přesné zadání jednotlivých úloh bylo převzato z oficiálního zadání Matematický klokan umístěných na webových stránkách soutěže.

3.2.1 Kategorie Benjamín

ÚLOHY ZA 3 BODY

Úloha 4., kategorie Benjamín 2019

Na digitálních hodinách je zobrazen čas 20:19. co uvidíme na displeji, až se tam poprvé objeví čas zapsaný stejnými číslicemi?



<u>**Komentář a postup možného řešení:**</u>

Při řešení této úlohy si musíme uvědomit, že se jedná o určení času, kdy pracujeme se znalostí šedesátkové soustavy.

Naším úkolem je určit takový čas, který by mohl být na hodinách vyobrazen a zároveň který z nich nastane jako první. Když se podíváme na možnosti A–E všimneme si, že možnost B je možno ihned vyškrtnout, protože 91 minut na digitálních hodinách nikdy nenastane. Nejbližší možností je tedy možnost A.

Správná odpověď je A.

Tematický okruh: Nestandardní aplikační úlohy a problémy

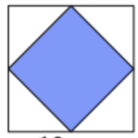
Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-4-01, žák užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problém ů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací

Učivo: Logické úlohy

Ročník: 6., 7.

Úloha 5., kategorie Benjamín 2016

Katka narýsovala čtverec o délce strany 10 cm. Dále sestrojila menší čtverec s vrcholy ve středech stran původního čtverce (viz obr.) Vypočti obsah menšího čtverce.



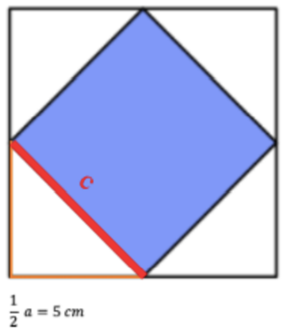
(A) 10cm^2 (B) 20 cm^2 (C) 25cm^2

(D) 40 cm^2 (E) 50 cm^2

<u>Komentář a postup možného řešení:</u>

K vyřešení této úlohy využijeme Pythagorovu větu. Pythagorova věta popisuje vztah mezi délkami stran pravoúhlých trojúhelníků. V každém pravoúhlém trojúhelníku platí $c^2 = a^2 + b^2$, kde c je délka přepony, a, b jsou délky odvěsen.

Velký čtverec má délku strany $a = 10\ cm.$ Vrcholy menšího čtverce rozdělují větší čtverec přesně v polovině (viz. obr. 6.).



Obrázek 6. Zvýraznění poloviny strany a a přepony c

Známe tedy délky odvěsen pravoúhlého trojúhelníku, což nám umožní dopočítat třetí stranu pravoúhlého trojúhelníku – přeponu:

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = 5^2 + 5^2$$
$$c^2 = 25 + 25$$
$$c^2 = 50$$
$$c = \sqrt{50}$$

Výsledek bychom mohli odmocnit, ale museli bychom číslo zaokrouhlit. My však s touto hodnotou budeme dále počítat, a tak ji ponecháme v daném tvaru.

Nyní je potřeba vypočítat obsah malého čtverce, což je velmi jednoduché a dosadíme pouze do vzorce pro obsah čtverce:

$$S = c^2$$
$$S = (\sqrt{50})^2$$
$$S = 50\ cm^2$$

Správná odpověď je E.

Tematický okruh: Geometrie v rovině a prostoru.

Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-3-01 žák zdůvodňuje a využívá polohové a metrické vlastnosti základních rovinných útvarů při řešení úloh a jednoduchých praktických problémů, využívá potřebnou matematickou symboliku.

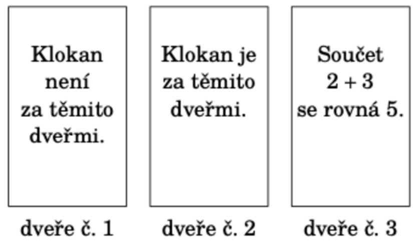
Učivo: Pythagorova věta, užití Pythagorovy věty v úlohách, obsah čtverce.

Ročník: 7.

ÚLOHY ZA 4 BODY

Úloha 12., kategorie Benjamín 2018

Za jedněmi dveřmi je klokan. Na každých dveřích je napsán výrok, z nichž pouze jediný je pravdivý. Za kterými dveřmi je klokan?



(A) Za dveřmi č. 1
(B) Za dveřmi č. 2
(C) Za dveřmi č. 3
(D) Může být za každými dveřmi.
(E) Může být za dveřmi č. 1 i č. 2.

Komentář a postup možného řešení

Na dveřích jsou napsány výroky a jak samo zadání říká – pouze jeden je pravdivý. Na první pohled je tedy zřejmé, že údaj uvedený na třetích dveřích musí být pravdivý, protože platí, že:

$$2 + 3 = 5$$

Výroky na prvních a druhých dveřích jsou tedy nepravdivá.

Z toho vyplývá, že klokan musí být za dveřmi č. 1, protože tvrzení uvedené na těchto dveřích: "Klokan není za těmito dveřmi." Není pravdivé.

Správná odpověď je A.

Tematický okruh: Nestandardní aplikační úlohy a problémy

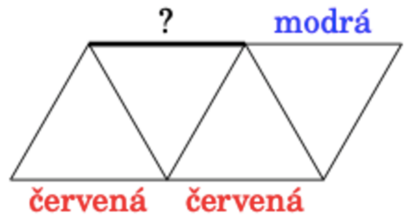
Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-4-01, žák užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problém ů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací

Učivo: Logické úlohy

Ročník: 7.

Úloha 14., kategorie Benjamín 2015

Na obrázku vidíš ornament složený z jednobarevných tyčinek. Tyčinky jsou modré, zelené a červené. Ve všech trojúhelnících má každá strana jinou barvu. Kterou barvu má tyčinka označená otazníkem?



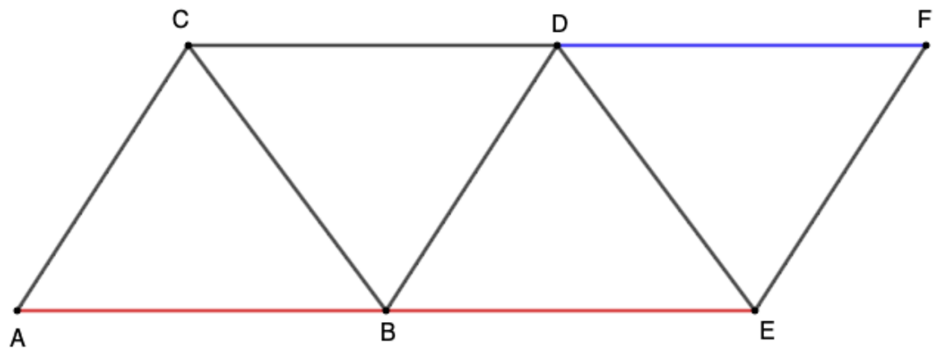
(A) Jen modrou (B) jen červenou (C) jen zelenou

(D) modrou nebo červenou (E) barvu tyčinky není možné určit

Komentář a postup možného řešení

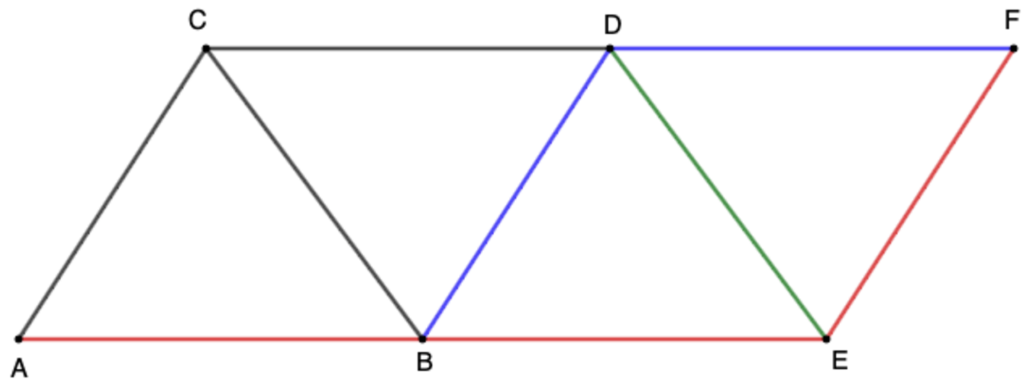
Musíme vycházet ze zadání. Ve všech trojúhelnících má každá strana jinou barvu.

Pro lepší orientaci si jednotlivé trojúhelníky popíšeme a vyznačíme si barevnost jednotlivých stran (viz. obr. 7).



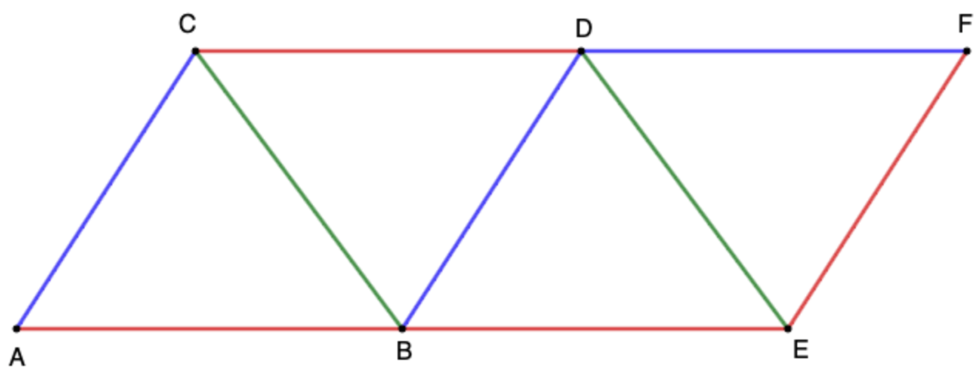
Obrázek 7. Vyznačení stran trojúhelníků

Strana ED je společná pro dva trojúhelníky a to trojúhelník BED a trojúhelník EFD. Strana BE má již červenou barvu a strana DF má barvu modrou, jejich společná strana ED tedy musí mít barvu zelenou. Trojúhelník EFD doplníme poslední barvou, a to je barva červená. Trojúhelník BED můžeme doplnit o třetí barvu a to modrou – strana BD (viz. obr. 8).



Obrázek 8. Vyznačení strany ED

V dalším kroku budeme postupovat stejně jako v prvním kroku. Opět máme dva trojúhelníky a to trojúhelník ABC a trojúhelník BDC. Strana AB má již červenou barvu a strana BD má barvu modrou, jejich společná strana BC tedy musí mít barvu zelenou. Doplníme zbylé strany dle zadání, tedy, že každá strana trojúhelníku má jednu barvu (viz. obr. 9).



Obrázek 9. Vyznačení barevnosti zbylých stran

Správná odpověď je B.

Tematický okruh: Nestandardní aplikační úlohy a problémy
Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-4-01, žák užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací
Učivo: Logické úlohy, kombinatorika
Ročník: 6.

Úloha 14., kategorie Benjamín 2016

Babička koupila krmení pro své čtyři kočky na příštích 12 dnů. Při zpáteční cestě našla dvě zatoulané kočky a vzala je domů. Pokud teď bude dávat všem kočkám stejnou porci krmení každý den, nakolik dní jí krmení vydrží?

(A) 8 (B) 7 (C) 6 (D) 5 (E) 4

Komentář a postup možného řešení:

Tento typ úlohy nám nabízí více možných řešení. Úlohu můžeme řešit za pomoci výpočtu, ale také pomocí grafického znázornění a logického úsudku.

Víme, že krmivo pro čtyři kočky babičce vydrží 12 dnů. Nyní má však babička dvě kočky navíc. Tyto dvě kočky tvoří o $\frac{1}{3}$ více koček, krmivo pro ně tedy musí vydržet o $\frac{1}{3}$ kratší dobu. Bude se tedy jednat o nepřímou úměrnost a příklad můžeme řešit pomocí trojčlenky.

Zápis:

4 kočky ……………………… 12 dnů

<u>6 koček ……………………… x dnů</u>

$$\frac{4}{6} = \frac{x}{12} \quad | \cdot 12$$

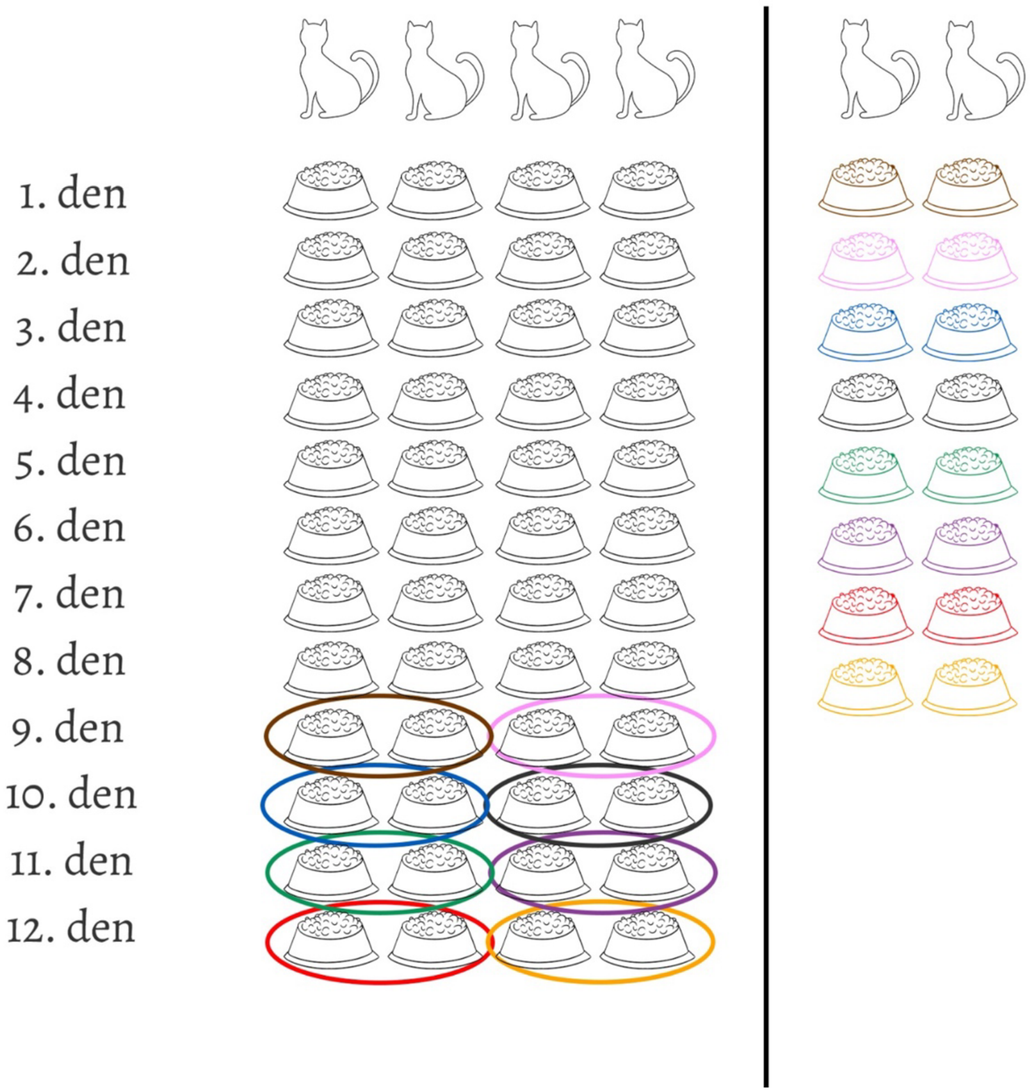
$$x = 8$$

Správná odpověď je A.

Další možný postup:

Pro mnohé žáky je jednodušší řešit úlohu grafickým znázorněním. Ukážeme si tedy i tento postup řešení.

Máme původně čtyři kočky a k nim si nakreslíme celkem 12 porcí krmiva. Babočka si však vzala dvě zatoulané kočky, proto si dokreslíme tyto dvě kočky a postupně budeme našim čtyřem kočkám odebírat dvě porce, a to tak dlouho, dokud nebude mít všech šest koček stejný počet porcí (viz. obr. 10).



Obrázek 10. Grafické znázornění úlohy

Tematický okruh: Závislosti, vtahy a práce s daty

Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-2-03, žák určuje vztah přímé a nepřímé úměrnosti

Učivo: Přímá a nepřímá úměrnost, trojčlenka.

Ročník: 7.

ÚLOHY ZA 5 BODY

Úloha 18., kategorie Benjamín 2018

Pět míčků označených písmeny A, B, C, D, E váží 30 g, 50 g, 50 g, 50 g a 80 g. Podle obrázku rovnoramenných vah urči, který míček váží 30 g.

(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

<u>Komentář a postup možného řešení:</u>

Úlohu můžeme řešit úvahou. Napoví nám obrázek, který je součástí úlohy. Z druhého obrázku vidíme, že váhy jsou v rovnováze a můžeme tedy tento vztah zapsat následovně:

$$A + D = B + C + E$$

Druhý obrázek si můžeme zapsat následovně:

$$B + E > A + C$$

Z rovnosti vah u druhého obrázku je zřejmé, že míčky A a D mají hmotnost 80 g a 50 g, jejich součet je 130 g. Míčky B, C a E pak mají v součtu také 130 g a mají hmotnost 50 g, 50 g a 30 g. 30 g tedy může mít jeden z těchto míčků.

První obrázek nám napoví, že míčky $A + C$ musí mít menší váhu (míčky tedy musí mít nižší závaží), než míčky $B + E$.

Míček A tedy bude mít závaží 50 g, míček C bude vážit 30 g, míček B bude vážit 50 g, míček E také 50 g a míček D má 80 g. Dosadíme tyto hodnoty do naší rovnice a nerovnice a ověříme si, zda jsme míčky určili správně:

$$A + D = B + C + E$$

$$50 + 80 = 50 + 30 + 50$$

$$130 = 130$$

$$B + E > A + C$$

$$50 + 50 > 50 + 30$$

$$100 > 80$$

Správná odpověď je C.

Další možný postup:

Úlohu je možné řešit také pomocí rovnic a nerovnic.

Víme, že:

$$A + D = B + C + E$$

a

$$B + E > A + C$$

Jestliže tedy platí, že $B + E > A + C$, pak musí také platit $B + E + C > A + C + C$. Dosazením do rovnice pak získáváme:

$$A + D = B + C + E > A + C + C$$

A tedy:

$$D > 2C$$

Tomu vyhovuje pouze možnost $D = 80\ g\ a\ C = 30\ g$.

Tematický okruh: Nestandardní aplikační úlohy a problémy, číslo a proměnná

Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-4-01 žák užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací.

M-9-1-08, žák řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav.

Učivo: logické úlohy, rovnice, nerovnice.

Ročník: 7., 8.

Úloha 18., kategorie Benjamín 2015

Jana si v obchodě koupila 3 různé čokoládové tyčinky. Za první z nich zaplatila polovinu svých peněz a 1 Kč k tomu. Za druhou tyčinku zaplatila polovinu zbývajících peněz a 2 Kč k tomu. Za třetí zaplatila polovinu zbývajících peněz a 3 Kč. Žádné peníze jí nezbyly. Kolik korun Jana zaplatila celkem?

(A) 28 Kč (B) 32 Kč (C) 34 Kč (D) 36 Kč

(E) 45 Kč

Komentář a postup možného řešení:

Existuje více způsobů, jak můžeme tento typ úlohy řešit.

Jedním z postupů je využití lineárních rovnic. Celkovou částku, kterou má Jana v peněžence neznáme, a proto si tuto hodnotu označíme x. A zapíšeme si dle zadání to, co víme:

Celková částka ………………….. x

První tyčinka …………………… $\frac{1}{2}x + 1$

Druhá tyčinka …………………… $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x - 1\right) + 2 = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$

Třetí tyčinka …………………… $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x - \frac{5}{2}\right) + 3 = \frac{1}{8}x + \frac{7}{4}$

$$\frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{2} + \frac{1}{8}x + \frac{7}{4} = x$$

$$\frac{4x + 8 + 2x + 12 + x + 14}{8} = x \quad | \cdot 8$$

$$7x + 34 = 8x$$

$$x = 34\ Kč$$

Správná odpověď je C.

Další možný postup:

Další možnost, jak úlohu řešit, je úvahou. U těchto typů úloh je vhodné vždy postupovat odzadu.

Víme, že Janě nezůstaly po koupi třetí tyčinky žádné peníze. Třetí tyčinka stála polovinu zbývajících peněz a 3 Kč k tomu, což znamená, že polovina zbytku peněz jsou také 3 Kč: $3 + 3 = 6\ Kč$. Jana měla naposled v peněžence 6 Kč, než si koupila poslední čokoládovou tyčinku.

Dále víme, že druhá tyčinka stála polovinu zbytku peněz po koupi první tyčinky a 2 Kč k tomu. K 6 Kč přičteme tedy 2 Kč: $6 + 2 = 8\ Kč$, získáváme polovinu hledaného zbytku a z toho vyplývá, že Jana musela mít po koupi první tyčinky v peněžence celkem 16 Kč.

První tyčinka stála polovinu peněz a 1 Kč k tomu. Po nákupu první tyčinky Janě zůstalo 16 Kč, přičteme 1 Kč: $16 + 1 = 17\ Kč$, dvojnásobek je pak roven celkovému množství peněz, které měla Jana v peněžence: $17 + 17 = 34\ Kč$.

Jednotlivé hodnoty je možno si také pro lepší orientaci zaznačit do příslušné tabulky:

Tyčinka	Zbylo v peněžence	Zaplatila
3.	0 Kč	$3 + 3 = 6\ Kč$
2.	6 Kč	$(6 + 2) \cdot 2 = 16\ Kč$
1.	16 K4	$(16 + 1) \cdot 2 = 34\ Kč$

Tematický okruh: Nestandardní aplikační úlohy a problémy, číslo a proměnná

Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-4-01 žák užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací.

M-9-1-08, žák řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav.

Učivo: logické úlohy, rovnice.

Ročník: 7., 8.

Úloha 22., kategorie Benjamín 2015

Na obrázku vidíš klokaní hlavolam. Kolika způsoby můžeš 3 klokany umístit do čtvercových polí tak, aby nikdy nebyli 2 klokani ve dvou spolu sousedících polích? (Do každého pole můžeš umístit nejvýše jednoho klokana.)

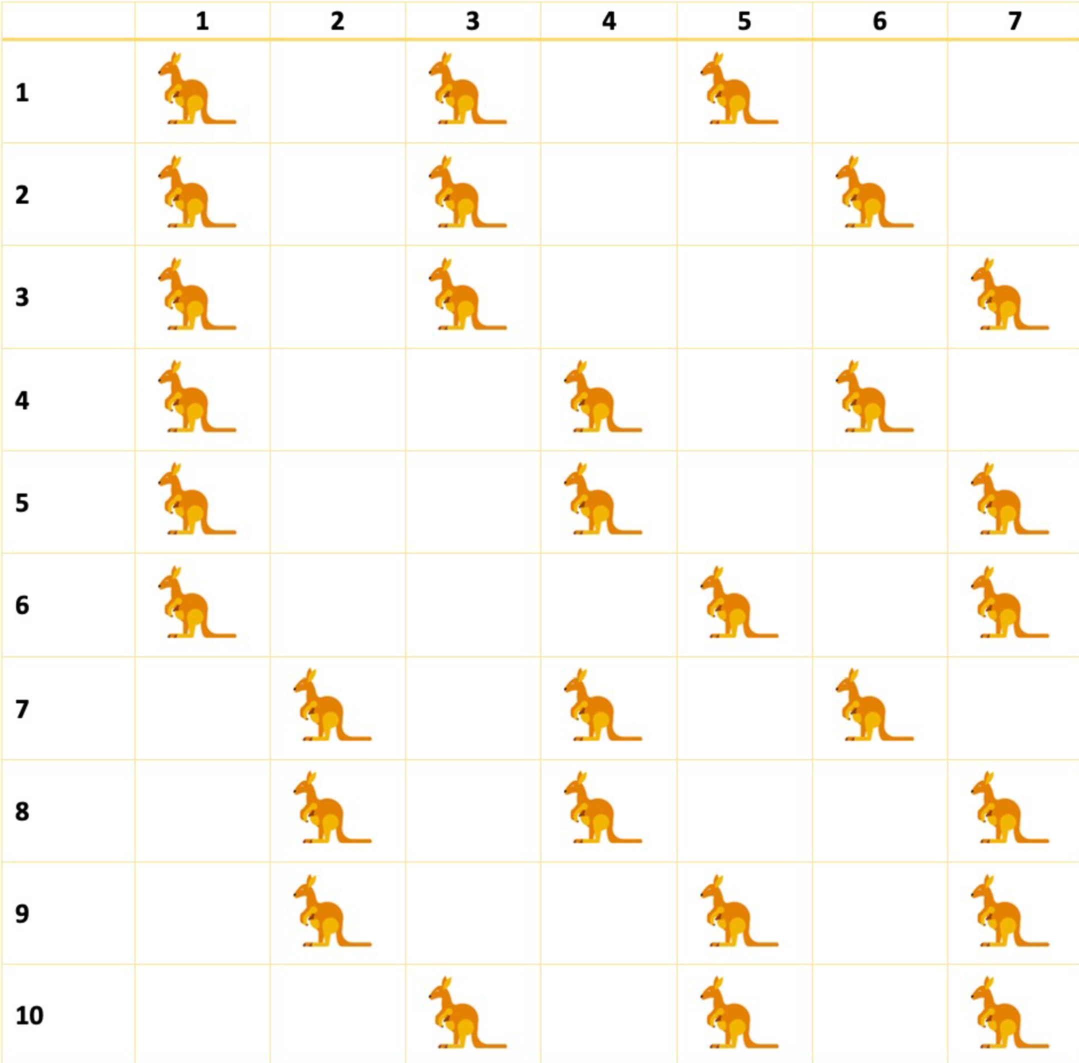
(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11

Komentář a postup možného řešení:

V úloze je nutno umístit klokany do čtvercových polí tak, aby nikdy nedošlo k tomu, že by byli 2 klokani ve dvou polích vedle sebe. Pro lepší orientaci je možné úlohu graficky znázornit.

V prvním kroku umístíme klokana do prvního pole, další pole vynecháme, dalšího klokana umístíme do pole č. 3 a posledního do pole č. 5. V druhém kroku u prvních dvou klokanů postupujeme stejně, ale třetího umístíme do pole č. 6 a ve třetím kroku pak můžeme klokana umístit do pole č. 1, 2 a 7.

Tímto způsobem postupuje i dále v dalších krocích, dokud nevyčerpáme všechny možnosti kombinací (viz. obr. 11).



Obrázek 11. Znázornění možností, jak umístit klokany

Jak je možné na grafickém znázornění vidět, celkem máme 10 možností.

Správná odpověď je D.

Tematický okruh: Nestandardní aplikační úlohy a problémy.

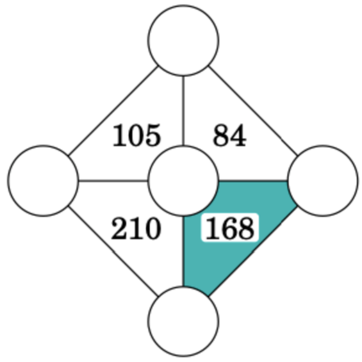
Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-4-01 žák užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací.

Učivo: logické úlohy, kombinatorika.

Ročník: 7.

Úloha 23., kategorie Benjamín 2022

Čísla 3, 4, 5, 6, 7 zapiš do pěti kroužků tak, aby číslo uvnitř každého trojúhelníku bylo součinem všech tří čísel v jeho vrcholech. Urči součet tří čísel ve vrcholech vybarveného trojúhelníku.



(A) 12 (B) 14 (C) 15

(D) 17 (E) 18

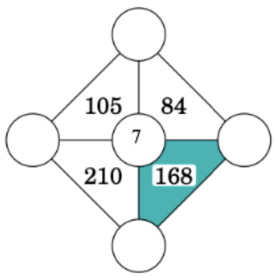
<u>Komentář a postup možného řešení:</u>

Při řešení úlohy si musíme uvědomit, co víme ze zadání. Každé číslo uvnitř každého trojúhelníku je součinem tří čísel nacházejících se ve vrcholcích daného trojúhelníku. K řešení tedy využijeme rozklad jednotlivých čísel v trojúhelníku na součin tří činitelů, a to z množiny $\{3, 4, 5, 6, 7\}$.

Rozložíme si tedy jednotlivá čísla na součin tří činitelů:

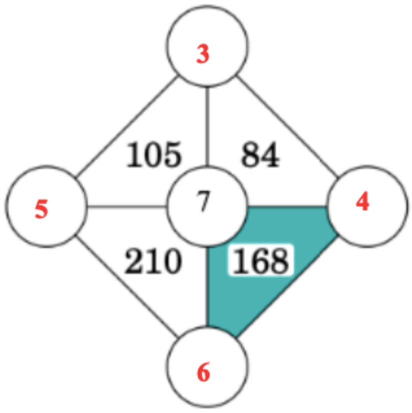
$$168 = 7 \cdot 6 \cdot 4$$
$$84 = 7 \cdot 4 \cdot 3$$
$$105 = 7 \cdot 5 \cdot 3$$
$$210 = 7 \cdot 6 \cdot 5$$

Jak můžeme vidět je to právě číslo 7, které se objevuje v každém rozkladu a bude tedy náležet do prostředního kroužku (viz. obr. 12).



Obrázek 12. vyznačení 7 do prostředního kruhu

Sousedící trojúhelníky pak budou mít vždy u jednoho vrcholu jedno číslo společné. Tedy pro trojúhelník 168 a 84 bude v jejich společném vrcholu číslo 4, pro trojúhelník 84 a 105 pak číslo 3, pro trojúhelník 105 a 210 číslo 5 a pro trojúhelník 210 a 168 to bude číslo 6 (viz. obr. 13).



Obrázek 13. Doplnění čísel do vrcholů trojúhelníků

Nyní jsme již schopni určit součet čísel ve vrcholcích vybarveného trojúhelníku:
$6 + 4 + 7 = 17.$

Správná odpověď je D.

Tematický okruh: Číslo a proměnná, nestandardní aplikační úlohy a problémy.
Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-1-03 žák modeluje a řeší situace s využitím dělitelnosti v oboru přirozených čísel.
M-9-4-01 žák užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací.
Učivo: dělitelnost přirozených čísel, násobek, dělitel, logické úlohy.
Ročník: 6.

3.2.2 Kategorie Kadet

ÚLOHY ZA 3 BODY

Úloha 4., kategorie Kadet 2022

Z Jardova auta upadla poznávací značka. Omylem ji přidělal zpět obráceně, ale naštěstí v tom nebyl žádný rozdíl. Která z následujících značek by mohla být Jardova?

(A) 04 NSN 40 (B) 60 HOH 09 (C) 80 BNB 08
(D) 03 HNH 30 (E) 08 XBX 80

Komentář a postup možného řešení

Úloha se zaměřuje na procvičení osové souměrnosti. Jakýkoliv útvar, číslo či písmeno můžeme označit za osově souměrný, pokud je v osové souměrnosti obrazem sebe sama.

Z nabízených možností můžeme postupně vyřadit jednotlivé možnosti. Jarda značku nalepil obráceně, tedy otočenou o 180 °.

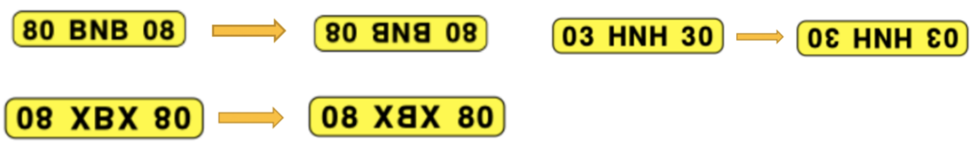
V případě varianty (A) dojde při otočení značky o 180° k „obrácení" 4 opačně, nebude tedy totožná (obr. 14).

Obrázek 14. Otočení značky možnost A

V případě možnosti (B) se při otočení značka nijak nezmění. Nabízí se tedy, že tato varianta je správná (obr. 15).

Obrázek 15. Otočení značky možnost B

Otočení pro ukázku provedeme i u ostatních variant, abychom vyloučili správnost dalších možností:



Obrázek 16. Otočení značky možnosti C–E

Správná odpověď je B.

Tematický okruh: Geometrie v rovině a prostoru.

Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-3-08 žák načrtne a sestrojí obraz rovinného útvaru ve středové a osové souměrnosti, určí osově a středově souměrný útvar.

Učivo: Obraz, obrazce ve středové souměrnosti.

Ročník: 7.

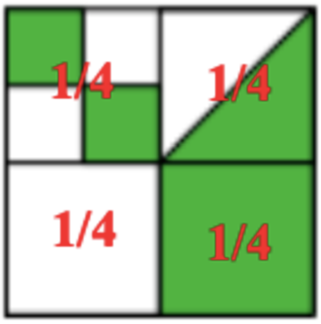
Úloha 4., kategorie Kadet 2020

Velký čtverec na obrázku je rozdělen na menší čtverce. V jednom ze čtverců je zakreslena uhlopříčka. Jaká část obsahu velkého čtverce je bílá?

(A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{4}{9}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{1}{2}$

Komentář a postup možného řešení:

Čtverec je zde rozdělen na 4 menší čtverce, přičemž každý menší čtverec představuje $\frac{1}{4}$ čtverce velkého (viz. obr. 17.).



Obrázek 17. Rozčlenění čtverce na čtvrtiny

Dále se zaměříme na vrchní čtverce, u obou můžeme vidět, že bílá plocha zabírá ½ malého čtverce, tedy $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

Posčítáním jednotlivých bílých ploch čtverců získáme výsledek $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$.

Správná odpověď je tedy E.

Další možný postup:

Velký čtverec je tvořen čtyřmi menšími. Zeleně je vybarveno: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 2\ čtverce.$

Bílé čtverce máme 2 ze 4, tedy $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Tematický okruh: Číslo a proměnná

Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-1-01, žák provádí početní operace v oboru celých a racionálních čísel

Učivo: Početní operace se zlomky

Ročník: 7.

Úloha 6., kategorie Kadet 2020

Eva násobí tři různá čísla z těchto čísel: - 5, - 4, -1, 2, 3, 6. Kterou nejmenší hodnotu může takto získat?

(E) – 120 (B) – 90 (C) – 48 (D) – 15 (E) 6

Komentář a postup možného řešení:

Pokud máme získat nejmenší hodnotu, musíme využít největší záporné číslo a dále dvě největší čísla kladné, tedy $(-5) \cdot 3 \cdot 6 = -90$.

Dále můžeme uvažovat i součin tří nejmenších záporných čísel (aby byl výsledek záporný, a přitom co možná nejmenší). V této úloze by se však nejednalo o nejmenší hodnotu, ale při jiných hodnotách by tomu tak mohlo být.

Správná odpověď je B.

Tematický okruh: Číslo a proměnná

Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-1-01, žák provádí početní operace v oboru celých a racionálních čísel

Učivo: Početní operace s celými čísly

Ročník: 7.

Úloha 7., kategorie Kadet 2018

Lev se ukrývá v jednom ze tří pokojů. Na dveřích pokoje č. 1 je napsáno: „Lev je tady.“ Na dveřích pokoje č. 2 vidíme: „Lev tady není.“ Na dveřích pokoje č. 3 čteme: „2+3 = 2 x 3.“ Právě jedno z těchto tvrzení je pravdivé. Kde je lev ukrytý?

(A) V pokoji č. 1
(B) V pokoji č. 2
(B) Může být v pokoji č. 1 nebo 2.
(D) Může být v každém pokoji.
(E) V pokoji č. 3

Komentář a postup možného řešení:

Logický typ úlohy, kterou je možné řešit úvahou či grafickým znázorněním.

Obrázek 18. Znázornění dveří dané úlohy

Na první pohled je zcela zřejmé, že údaj uvedený na třetích dveřích je nepravdivý, protože

$$2 + 3 \neq 2 \times 3$$

Ze zadání víme, že PRÁVĚ jedno tvrzení je pravdivé, může to tedy být pouze jedno z tvrzení na dveřích č.1 nebo č. 2.

Dveře č. 1 nám říkají, že lev je tady, pokud by se jednalo o pravdivé tvrzené, muselo by pak být pravdivé také tvrzení na dveřích č. 2. To však není možné, pravdivé je právě jedno tvrzení.

Dveře č. 2 nám říkají, že lev tady není, pokud by toto tvrzení bylo nepravdivé a lev by za dveřmi byl, pak by bylo také tvrzení na dveřích č. 1 nepravdivé. Všechny tři tvrzení by tedy byla nepravdivá, což také není možné.

Zbývají nám tedy dveře č. 3. V případě, že by lev byl právě za těmito dveřmi, pak by tvrzení na dveřích č. 1 bylo nepravdivé, tvrzení na dveřích č. 2 pravdivé a tvrzení na dveřích č. 3 nepravdivé. Bude tedy splněno, že právě jedno tvrzení je pravdivé a lev se nachází za dveřmi č. 3.

Správná odpověď je E.

Tematický okruh: Nestandardní aplikační úlohy a problémy

Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-4-01, žák užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací

Učivo: Logické úlohy

Ročník: 9.

ÚLOHY ZA 4 BODY

Úloha 16., kategorie Kadet 2022

Zebra lže pouze v pondělí, úterý a středu. Panter lže pouze čtvrtek, pátek a sobotu. Mauglí se ptal zebry a pantera, jaký je den. Zebra řekla: „Včera byl jeden z mých oblíbených dnů, kdy lžu.“ Panter odvětil: „Včera byl jeden z mých prolhaných dnů.“ Který den se Mauglí ptal?

(A) Ve čtvrtek (B) v pátek (C) v sobotu (D) v neděli (E) v pondělí

<u>Komentář a postup možného řešení:</u>

Úlohu řešíme úvahou a rozebereme si pro ukázku každý den.

Jestliže je dnes:

- PONDĚLÍ ⇒ včera byla **<u>neděle</u>**
  - Zebra mluví pravdu v neděli, v pondělí lže. Její výrok by zněl: „VČERA JSEM LHALA.“ (souhlasí)
  - Panter mluví pravdu jak v neděli, tak v pondělí. Jeho výrok by zněl: „VČERA JSEM MLUVIL PRAVDU.“ (nesouhlasí)
- ÚTERÝ ⇒ včera bylo **<u>pondělí</u>**
  - Zebra v pondělí i úterý lže. Její výrok by zněl: „VČERA JSEM MLUVILA PRAVDU.“ (nesouhlasí)
  - Panter mluví pravdu jak v pondělí, tak v úterý. Jeho výrok by zněl: „VČERA JSEM MLUVIL PRAVDU.“ (nesouhlasí)
- STŘEDA ⇒ včera bylo **<u>úterý</u>**
  - Zebra v úterý i středu lže. Její výrok by zněl: „VČERA JSEM MLUVILA PRAVDU.“ (nesouhlasí)
  - Panter mluví pravdu jak v úterý, tak ve středu. Jeho výrok by zněl: „VČERA JSEM MLUVIL PRAVDU.“ (nesouhlasí)
- ČTVRTEK ⇒ včera byla **<u>středa</u>**
  - Zebra ve čtvrtek mluví pravdu, ve střddu lže. Její výrok by zněl: „VČERA JSEM LHALA.“ (souhlasí)
  - Panter ve čtvrtek lže, ve středu mluví pravdu. Jeho výrok by zněl: „VČERA JSEM LHAL.“ (souhlasí)

- PÁTEK $\Rightarrow$ včera byl **čtvrtek**
    - Zebra mluví pravdu v pátek i ve čtvrtek. Její výrok by zněl: „VČERA JSEM MLUVILA PRAVDU." (nesouhlasí)
    - Panter lže jak v pátek, tak ve čtvrtek. Jeho výrok by zněl: „VČERA JSEM MLUVIL PRAVDU." (nesouhlasí)
- SOBOTA $\Rightarrow$ včera byl **pátek**
    - Zebra mluví v sobotu i pátek pravdu. Její výrok by zněl: „VČERA JSEM MLUVILA PRAVDU." (nesouhlasí)
    - Panter lže jak v sobotu, tak v pátek. Jeho výrok by zněl: „VČERA JSEM MLUVIL PRAVDU." (nesouhlasí)
- NEDĚLE $\Rightarrow$ včera byla **sobota**
    - Zebra mluví v neděli i sobotu pravdu. Její výrok by zněl: „VČERA JSEM MLUVILA PRAVDU." (nesouhlasí)
    - Panter mluví pravdu v neděli, v sobotu lže. Jeho výrok by zněl: „VČERA JSEM LHAL." (souhlasí)

Správná odpověď je A.

Tematický okruh: Nestandardní aplikační úlohy a problémy

Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-4-01, žák užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací

Učivo: Logické úlohy

Ročník: 9.

Úloha 11., kategorie Kadet 2020

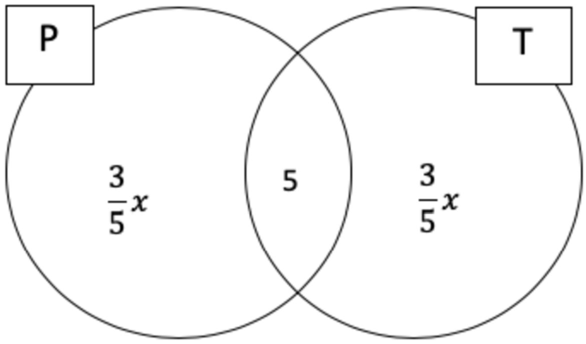
Každý žák ve třídě plave nebo tančí nebo obojí. Tři pětiny třídy plavou a tři pětiny třídy tančí. Pět žáků plave i tančí. Kolik žáků je ve třídě?

(A) 15 (B) 20 (C) 25 (D) 30 (E) 35

Komentář a postup možného řešení:

Musíme si uvědomit skutečnosti, které ze zadání víme. $\frac{3}{5}$ žáků plave, $\frac{3}{5}$ tančí, 5 dělá obojí. Můžeme si to pro lepší představu i naznačit (P – představuje skupinu žáků, kteří plavou, T skupinu žáků, kteří tančí, viz. obr. 19).

Zajímá nás, kolik žáků navštěvuje třídu celkem, označíme si tuto hodnotu jako x.



Obrázek 19. Vyznačení skupiny žáků

Nyní si můžeme sestavit rovnici:

$$\frac{3}{5}x + \frac{3}{5}x - 5 = x$$

$$\frac{6}{5}x - 5 = x$$

$$\frac{1}{5}x = 5$$

$$x = 25$$

Správná odpověď je C.

Tematický okruh: Číslo a proměnná

Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-1-01, žák provádí početní operace v oboru celých a racionálních čísel.

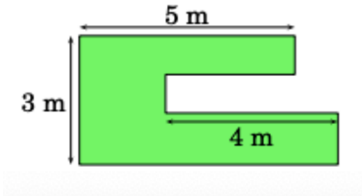
M-9-1-08 žák formuluje a řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav.

Učivo: Početní operace se zlomky, lineární rovnice

Ročník: 8.

Úloha 12., kategorie Kadet 2020

Všechny strany zahrady, kterou vidíš na obrázku, jsou buď navzájem rovnoběžné, nebo navzájem kolmé. Některé z rozměrů jsou uvedeny v obrázku. Urči obvod zahrady.

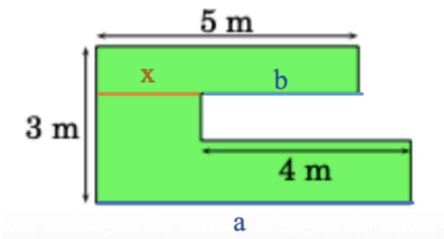


(A) 22 m (B) 23 m (C) 24 m (D) 25 m

(E) 26 m

Komentář a postup možného řešení:

Nejprve si popíšeme obrázek a doplníme si stranu b o x (viz. obr. 20).



Obrázek 20. Znázornění zahrady s popisem stran

Vyjádříme si, co víme a vytvoříme soustavu lineárních rovnic:

$b \quad = 5 - x$

$\underline{a \qquad = 4 + x}$

$a + \ b \quad = 9$ (tuto hodnotu následně využijeme při výpočtu obvodu).

Obvod zjistíme sečtením jednotlivých stran, přičemž víme, že levá svislá strana je 3 m, u pravé strany zahrady sice nevíme, kolik jednotlivé části měří, víme však, že dohromady musíme mít opět hodnotu 3 m:

$o = 3 + 3 + 5 + 4 + a + b$

$o = 3 + 3 + 5 + 4 + 9$

$o = 24\,m$

Správná odpověď je C.

Tematický okruh: Číslo a proměnná, geometrie v rovině a v prostoru

Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-1-08 žák formuluje a řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav.

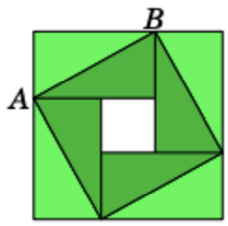
M-9-3-04, žák odhaduje a vypočítá obsah a obvod základních rovinných útvarů.

Učivo: Soustava lineárních rovnice, obvod rovnoběžníku

Ročník: 9.

Úloha 14., kategorie Kadet 2020

Velký čtverec na obrázku je složen ze čtyř shodných obdélníků a malého čtverce. Obsah velkého čtverce je 49 cm^2 a délka úhlopříčky AB jednoho z obdélníků je 5 cm. Vypočítejte obsah malého čtverce.



(A) 1 cm^2 (b) 4 cm^2 (C) 9 cm^2 (D) 16 cm^2

(E) 25 cm^2

Komentář a postup možného řešení:

Víme, že úhlopříčka je 5 cm, můžeme si z obrázku všimnout, že tmavě zelené trojúhelníčky spolu s bílým čtvercem vytváří čtverec, tedy pokud je úhlopříčka 5 cm, pak pro obsah tohoto čtverce musí platit, že $S = 5 \cdot 5 = 25\ cm^2$.

Když tuto hodnotu odečteme od obsahu velkého čtverce, dostaneme:

$S = 49 - 25 = 24\ cm^2$, čímž získáme obsah světle zelené části, tedy čtyř světle zelených trojúhelníků. Obsah každého světle zeleného trojúhelníku musí tedy být $6\ cm^2$, protože platí, že $24 : 4 = 6\ cm^2$.

Vidíme, že světlý a tmavý trojúhelník vytváří obdélník a jeho obsah tedy je $S = 2 \cdot obsah\ trojúhelníku = 12\ cm^2$. Z toho plyne, že obsah všech čtyř obdélníků je $S = 4 \cdot 12 = 48\ cm^2$.

Nyní jsme již schopni zjistit obsah malého bílého čtverce, známe totiž obsah velkého čtverce a obsah čtyř shodných obdélníků, platí tedy: $S_{č} = 49 - 48 = 1\ cm^2$.

Správná odpověď je A.

Tematický okruh: Geometrie v rovině a v prostoru

Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-3-13 žák analyzuje a řeší aplikační geometrické úlohy s využitím osvojeného matematického aparátu.

Učivo: Obsah čtverce, obsah trojúhelníku, obsah obdélníku.

Ročník: 7.

Úloha 13., kategorie Kadet 2022

Doma máme dvoje hodiny. Jedny se každou hodinu předbíhají o jednu minutu a ty druhé se každou hodinu zpožďují o dvě minuty. Včera jsem oboje hodiny nastavil na správný čas, když jsem se na ně dnes podíval, jedny ukazovaly čas 11:00 a druhé 12.00. Kdy jsem je včera nastavil?

(A) ve 23.00 (B) v 19.40 (C) v 15.40 (D) ve 14.00
(E) v 11.20

Komentář a postup možného řešení:

Dle zadání víme, že se každou hodinu zvětší rozdíl mezi hodinami o 3 minuty, protože jedny hodiny jdou o minutu napřed a druhé se naopak o dvě minuty zpožďují.
Za každou reálně uplynulou hodinu se rozdíl mezi hodinami zvětší o 3 minuty, v současné době ukazují jedny hodiny 11 hodin a druhé 12 hodin. Rozdíl 3 minuty tedy naskočil celkem dvacetkrát, protože platí: $3 \cdot 20 = 60\ minut.$
Z toho vyplývá, že hodiny jsme museli přenastavit před 20 hodinami. Tuto hodnotu odečteme od hodin, které nám ukazují 11 h a přičteme k nim 40 minut, protože se dvacetkrát o 2 minuty opozdily (hodiny totiž v současnou dobu neukazují správný čas, víme, že se opozdily dvacetkrát o 2 minuty, takže správný čas na hodinách nyní musí být 11:40. Ptáme se však na to, v kolik hodin jsme čas nastavovali, a proto od skutečného času, tedy 11:40 musíme odečíst 20 hodin). Výsledný čas, kdy jsme přenastavili hodiny je 15:40.
Správná odpověď je C.

Tematický okruh: Nestandardní aplikační úlohy a problémy
Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-4-01, žák užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací
Učivo: Logické úlohy
Ročník: 9.

ÚLOHY ZA 5 BODŮ

Úloha 22., kategorie Kadet 2022

Na přímce bylo vyznačeno několik červených bodů. V prvním kroku Petr mezi každé dva sousední červené body vyznačil tužkou jeden bod, a nakonec nově vyznačené body obarvil červeně. Tento krok zopakoval ještě třikrát. Na přímce bylo nakonec vyznačeno 225 červených bodů. Kolik červených bodů bylo vyznačeno na přímce na počátku?

(A) 10 (B) 12 (C) 15 (D) 16 (E) 25

Komentář a postup možného řešení:

Úlohu je možné řešit více způsoby.

1. způsob řešení:

Pokud vyznačujeme body mezi jiné body, tak vyznačených je vždy o jeden bod méně než bodů původních.

Na začátku máme bodů x.

Při prvním přidání přibylo $x - 1$.

Celkem tedy máme $2x - 1$, protože platí $(x + x - 1) = 2x - 1$

Při druhém přidání přibylo $2x - 1 - 1 = 2x - 2$

Celkem máme $2x - 1 + 2x - 2 = 4x - 3$

Při třetím přidání přibylo $4x - 3 - 1 = 4x - 4$

Celkem máme $2x - 1 + 2x - 2 + 4x - 4 = 8x - 7$

Při čtvrtém přidání přibylo $8x - 7 - 1 = 8x - 8$

Celkem máme $2x - 1 + 2x - 2 + 4x - 4 + 8x - 8 = 16x - 15$

Na konci bylo vyznačeno 225 červených teček, platí tedy:

$$16x - 15 = 225$$

$$16x = 240$$

$$x = 15$$

Správná odpověď je C.

2. způsob řešení:

Abychom úlohu nemuseli řešit pomocí lineární rovnice, ukážeme si i jiný možný postup řešení.

Abychom zjistili předchozí počet bodů, tak jeden chybějící bod „přidáme“ ke konečnému počtu 225 bodů a vydělíme 2:

$$(224 + 1) : 2 = 113$$

Tato hodnota nám udává počet bodů před posledním čtvrtým přidáním. A může opět postupovat stejně:

$$(113 + 1) : 2 = 57$$

Před třetím přidáním bylo 57 bodů. Zjistíme, kolik bylo bodů před druhým přidáním:

$$(57 + 1) : 2 = 29$$

Před druhým přidáním bylo 29 bodů a nyní si jen zjistíme, kolik bylo bodů na počátku:

$$(29 + 1) : 2 = 15$$

Na počátku bylo celkem 15 bodů a správná odpověď je tedy C.

Správná odpověď je C.

Tematický okruh: Číslo a proměnná, nestandardní aplikační úlohy a problémy.

Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-1-08 žák formuluje a řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav.

M-9-4-01 žák užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací.

Učivo: Soustava lineárních rovnice, logické úlohy.

Ročník: 9.

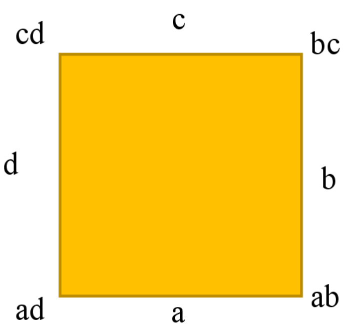
Úloha 20., kategorie Kadet 2020

Soňa připsala ke každé straně čtverce kladné celé číslo. Potom připsala ke každému vrcholu tohoto čtverce součin čísel napsaných u stran, které z tohoto vrcholu vycházejí. Součet čísel napsaných u všech vrcholů je 15. Urči součet čísel napsaných u všech stran čtverce.

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 10 (E) 15

<u>Komentář a postup možného řešení:</u>

K vyřešení úlohy si načrtneme obrázek, aby se nám lépe orientovalo, jednotlivé strany a vrcholy si popíšeme (viz. obr. 21).



Obrázek 21. Čtverec s vyznačenými stranami

$a, b, c, d \in \mathbb{N}$

Ze zadání víme, že součet čísel napsaných u vrcholů je roven 15:

$ab + bc + cd + ad = 15$

U první dvojice výrazu vytkneme společné b a u druhého výrazu společné d:

$b \cdot (a + c) + d \cdot (a + c) = 15$

$(a + c) \cdot (b + d) = 15 = 3 \cdot 5$ (jinak nelze zapsat, máme využít pouze kladná čísla)

Nyní můžeme zjistit také součet: $(a + c) + (b + d) = 3 + 5 = 8$.

Další možný postup:

Tento typ příkladu bychom mohli také řešit tak, že budeme postupně dosazovat jednotlivá kladná čísla za hodnoty a, b, c, d. Vytvořili bychom součiny u vrcholů a postupovali tak dlouho, dokud by se součet čísel u vrcholů nerovnal 15. A následně už bychom jen sečetli čísla u stran čtverce.

Správná odpověď je C.

Tematický okruh: Číslo a proměnná

Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-1-07 žák matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných, určí hodnotu výrazu, sčítá a násobí mnohočleny, provádí rozklad mnohočlenu na součin pomocí vzorců a vytýkáním.
Učivo: Číselné výrazy, určení hodnoty číselného výrazu.
Ročník: 8.

Úloha 24., kategorie Kadet 2022

V sedmi parcích žije dohromady 2022 klokanů a několik koal. V každém parků se počet klokanů rovná celkovému počtu koal ve všech ostatních parcích. Kolik koal žije celkem ve všech sedmi parcích?

(A) 288 (B) 337 (C) 576 (D) 674 (E) 2022

Komentář a postup možného řešení:

Pro lepší orientaci si každý park označíme písmeny A, B, C, D, E, F, G. A vše si zaneseme do tabulky. V jednom sloupci budeme mít pouze klokany, v druhém koaly. Ze zadání víme, že počet klokanů v parku A je rovna počtu koal v parcích B, C, D, E, F, G. V parku B je pak počet klokanů roven počtu koal v parcích A, C, D, E, F, G a tak dále.

	Klokani	**Koaly**
1	A	B, C, D, E, F, G
2	B	A, C, D, E, F, G
3	C	A, B, D, E, F, G
4	D	A, B, C, E, F, G
5	E	A, B, C, D, F, G
6	F	A, B, C, D, E, G
7	G	A, B, C, D, E, F

Pokud sečteme sloupec klokanů dostaneme 2022, to stejné bychom však dostali, pokud bychom sečetli sloupec koal, ale každý park, který jsme do tabulky zapsali, je zde zapsán celkem šestkrát. Sečteme-li tedy sloupec koal získáme hodnotu 2022, tuto hodnotu však musíme vydělit 6, tedy $2022 : 6 = 337$.

Koal je tedy celkem 337.

Správná odpověď B.

Tematický okruh: Nestandardní aplikační úlohy a problémy

Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-4-01, žák užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací

Učivo: Logické úlohy, práce s množinami.

Ročník: 9.

Úloha 24., kategorie Kadet 2015

Včera jsem si zapsal telefonní číslo svého přítele Emila. Telefonní číslo na mém lístečku má šest číslic, ale vzpomínám si, že Emilovo číslo má číslic sedm. Vůbec si nevzpomínám, kterou z číslic jsem zapomněl napsat ani kde se v telefonním čísle nacházela. Najděte nejmenší možný počet různých telefonních čísel, které budu muset zkusit, abych měl jistotu, že mezi nimi je správné telefonní číslo. (Telefonní číslo může začínat jakoukoliv číslicí včetně 0.)

(A) 55 (B) 60 (C) 64 (D) 70 (E) 80

Komentář a postup možného řešení:

Tento typ úlohy se zaměřuje na kombinatoriku, která je na základních školách opomíjená. Máme zapsaných pouze šest čísel ze sedmi, je tedy nutné dosazovat jednotlivá čísla na volné pozice.

První možnost je doplnění jakékoliv číslice 0-9 před nám známé číslo (označíme si toto číslo pro lepší orientaci písmeny A B C D E F). Celkem tedy máme 10 možností, které můžeme doplnit před číslo A B C D E F.

Chybějící číslo však můžeme dosadit i na jiné pozice. Pokud budeme číslici dosazovat na druhou pozici, bude možné doplnit jen 9 číslic, protože v jednom případě dojde ke shodě čísel mezi zařazením na první a druhou pozici např. mám-li číslo 1 2 3 4 5 6 a na první pozici doplním číslici 1 získáme číslo 1 1 2 3 4 5 6 a pokud stejnou číslici doplním naopak na druhou pozici získám opět stejné číslo 1 1 2 3 4 5 6. Čísla jsou stejná a je nutno je počítat pouze jednou.

Stejně budeme postupovat u všech dalších pozic, vždy budeme mít 9 možností, protože pokaždé dojde ke shodě čísel, kromě první možnosti. Pro lepší představu si to sepíšeme:

10	A	B	C	D	E	F
A	**9**	B	C	D	E	F
A	B	**9**	C	D	E	F
A	B	C	**9**	D	E	F
A	B	C	D	**9**	E	F
A	B	C	D	E	9	F
A	B	C	D	E	F	**9**

Sečteme jednotlivé možnosti: $10 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 = 64$.

Správná odpověď C.

Další možný postup:

Máme celkem šest číslic, doplňovat tedy můžeme na sedm různých pozic:

- A - B - C - D - E - F

Na každé číslo můžeme doplnit deset číslic (můžeme doplňovat 0–9), máme tedy celkem 70 možností. Avšak kolem každé původní číslice doplněním stejné číslice zprava i zleva nám přináší stejnou možnost. Mezi 70 možnostmi je tedy šest stejných dvojic čísel, proto tuto hodnotu musíme odečíst: $70 - 6 = 64$.

Máme tedy celkem 64 možných telefonních čísel.

Tematický okruh: Nestandardní aplikační úlohy a problémy

Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-4-01, žák užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací

Učivo: Logické úlohy, kombinatorika.

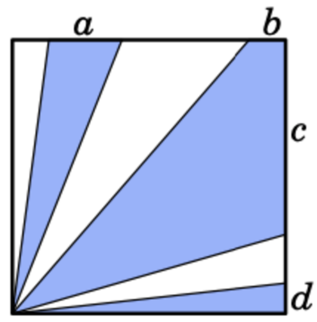
Ročník: 9.

Úloha 17., kategorie Kadet 2016

Uvnitř čtverce jsou tři vybarvené oblasti podobně, jak vidíte na obrázku vpravo. Obsah čtverce je 36 cm^2, celkový obsah vybarvených oblastí je 27 cm^2. Vypočtěte součet délek úseček $a + b + c + d$.

(A) 6 cm (B) 7 cm (C) 8 cm

(D) 9 cm (E) 10 cm



Komentář a postup možného řešení:

Ze zadání víme, že obsah čtverce je 36 cm^2, obsah čtverce vychází ze vzorce:

$$S = a^2$$

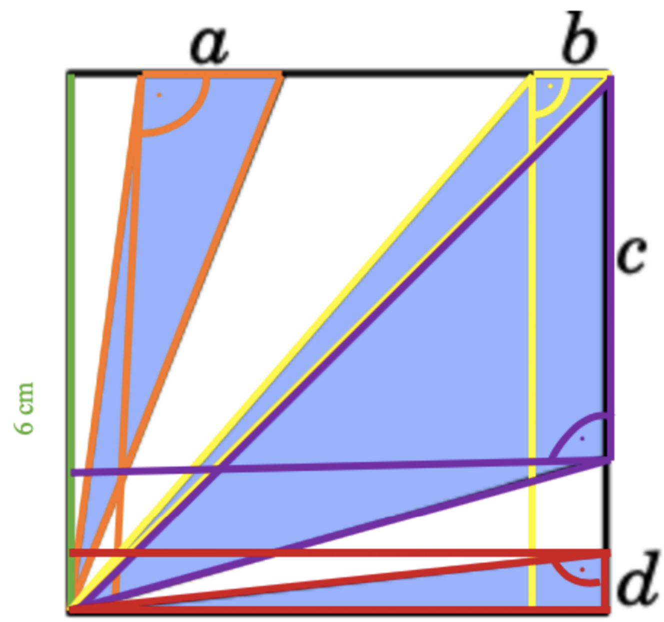
Délka strany čtverce je tedy:

$$36 = a^2$$

$$\sqrt{36} = a$$

$$a = 6\ cm.$$

Vybarvená část čtverce je tvořena 4 trojúhelníky, jejichž výška je 6 cm, znázorníme si to graficky pro lepší představu (viz. obr. 22):



Obrázek 22. barevné vyznačení trojúhelníků

Obsah vybarvených částí můžeme vyjádřit jako součet obsahu čtyř trojúhelníků:

$$S = \frac{a \cdot 6}{2} + \frac{b \cdot 6}{2} + \frac{c \cdot 6}{2} + \frac{d \cdot 6}{2}$$

ze zadání víme, že obsah vybarvené části čtverce je 27 cm^2.

Tedy:

$$27 = \frac{a \cdot 6}{2} + \frac{b \cdot 6}{2} + \frac{c \cdot 6}{2} + \frac{d \cdot 6}{2}.$$

Rovnici si upravíme:

$$27 = 3a + 3b + 3c + 3d$$

$$27 = 3 \cdot (a + b + c + d) \ | : 3$$

$$9 = a + b + c + d.$$

Součet délek úseček $a + b + c + d$ je 9 cm.

Správná odpověď D.

Tematický okruh: Geometrie v rovině a prostoru, nestandardní aplikační úlohy a problémy.

Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-3-04 žák odhaduje a vypočítá obsah a obvod základních rovinných útvarů.

M-9-4-02, žák řeší úlohy na prostorovou představivost, aplikuje a kombinuje poznatky a dovednosti z různých tematických a vzdělávacích oblastí.

Učivo: Logické úlohy, obsah čtverce, úprava rovnic.

Ročník: 9.

3.3 Vybrané úlohy ze soutěže Pythagoriáda

Pythagoriáda se řadí stejně jako Matematický klokan k soutěžím, které jsou určeny širšímu okruhu žáků. Pro tuto práci byly vybrány některé úlohy z Pythagoriády roč. 2016/2017, okresního kola, roč. 2020/2021, školního kola a roč. 2022/2023, okresního kola. Přesné zadání jednotlivých úloh bylo převzato z oficiálního zadání Pythagoriády umístěných na webových stránkách soutěže.

Úloha 13., kategorie pro 6. ročník, 2016/2017, okresní kolo

Malá Klárka ze sedmi běžných hracích kostek (součet puntíků na protilehlých stěnách je sedm) slepila těleso, které vidíme na obrázku. Celkový počet puntíků na dvou stěnách, které k sobě lepila, byl vždy roven sedmi.

Kolik je celkem puntíků na třiceti viditelných stěnách jejího tělesa?

Na viditelných stěnách je celkem …………… puntíků.

__Komentář a postup možného řešení:__

Úloha se zaměřuje jednak na prostorovou představivost a jednak na početní operace. Musíme si představit, jak jsou jednotlivé kostky umístěny v prostoru a jaké strany zůstanou, jakmile slepíme dvě kostky k sobě.

Na každé kostce se nachází 21 puntíků, celkem máme sedm kostek, které nám vytvoří těleso na obrázku v zadání, ale na jedné kostce (středové) jsou všechny puntíky zcela zakryty a nebudou tedy viditelné. Počet puntíků na zbývajících 6 kostkách je 126 ($6 \cdot 21 = 126$.) Klárka vždy lepila, dle zadání, k sobě strany, jejichž součet je roven sedmi. Postupně tedy využije všechna čísla 1–6, vidět tedy nepůjde 21 puntíků. Viditelných tedy bude: $126 - 21 = 105$ puntíků.

Na viditelných stěnách je celkem 105 puntíků.

Tematický okruh: Nestandardní aplikační úlohy a problémy.

Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-4-02, žák řeší úlohy na prostorovou představivost, aplikuje a kombinuje poznatky a dovednosti z různých tematických a vzdělávacích oblastí.

Učivo: Logické úlohy, trojrozměrné útvary.

Ročník: 6.

Úloha 1., kategorie pro 9. ročník, 2020/2021, školní kolo

Jak daleko bydlí Vráťova babička, když k ní jede hodinu a 24 minut vlakem a pak jde ještě jednu sedminu vzdálenosti pěšky? Vlak jede průměrnou rychlostí 45 km/h.
Vráta má babičku …………………… km daleko.

Komentář a postup možného řešení:

Vráťa jede celkem 84 minut k babičce vlakem, což je $\frac{84}{60}\ hod. = \frac{7}{5} hod.$

Vzdálenost, kterou ujede vlak: $\frac{7}{5} \cdot 45 = 63\ km$.

Pak jde ještě jednu sedminu vzdálenosti pěšky. Vzdálenost vlaku tedy odpovídá $\frac{6}{7}$ z celé vzdálenosti.

$63\ km = \frac{6}{7}x$

$x = 73{,}5\ km$.

Vráťa má babičku 73,5 km daleko.

Tematický okruh: Číslo a proměnná

Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-1-01, žák provádí početní operace v oboru celých a racionálních čísel.

M-9-1-08 žák formuluje a řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav.

Učivo: Početní operace se zlomky, lineární rovnice

Ročník: 8.

Úloha 7., kategorie pro 9. ročník, 2020/2021, školní kolo

Jsou dána dvě čísla. Jejich součet je 40 a rozdíl jejich druhých mocnin je 240. Jaké je větší z čísel?

Větší z čísel je ………………………

Komentář a postup možného řešení:

Řešením toho typu příkladu je soustava rovnic. První neznáme číslo si označíme jako x a druhé neznáme číslo si zapíšeme jako y. Nyní si pomocí těchto neznámých zapíšeme to, co známe ze zadání:

$x + y = 40$

$x^2 - y^2 = 240$

Nyní si můžeme první rovnici upravit jako: $x = 40 - y$ a to dosadit do druhé rovnice. Tedy: $(40 - y)^2 - y^2 = 240$.

Závorku si upravíme dle vzorce pro úpravu výrazů $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

$$
\begin{aligned}
(40 - y)^2 - y^2 &= 240 \\
(1600 - 80y + y^2) - y^2 &= 240 \\
1600 - 80y &= 240 \\
y &= 17
\end{aligned}
$$

Tuto hodnotu již můžeme dosadit do první rovnice:

$x = 40 - y \Rightarrow x = 40 - 17 \Rightarrow x = 23$.

Větší z čísel je číslo 23.

Tematický okruh: Číslo a proměnná

Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-1-07 žák matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných, určí hodnotu výrazu, sčítá a násobí mnohočleny, provádí rozklad mnohočlenu na součin pomocí vzorců a vytýkáním.

M-9-1-08, žák řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav.

Učivo: Číselné výrazy, určení hodnoty číselného výrazu, lineární rovnice.

Ročník: 8.

Úloha 13., kategorie pro 9. ročník, 2020/2021, školní kolo

Jaký výsledek získáme, když třetinu třetiny vydělíme jednou třetinou? Výsledek je ……………

Komentář a postup možného řešení:

Jako první si musíme uvědomit kolik je třetina třetiny. Můžeme to zapsat následovně: $\frac{1}{3}\ z\ \frac{1}{3}$, tedy: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$. Tuto $\frac{1}{9}$ nyní vydělíme $\frac{1}{3}$. Je potřeba myslet na to, že dělení dvou zlomků, je to stejné jako násobení prvního zlomku převrácenou hodnotou toho druhého.

$\frac{1}{9} : \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{1} = \frac{1}{3}$

Výsledek je $\frac{1}{3}$.

Tematický okruh: Číslo a proměnná

Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-1-01, žák provádí početní operace v oboru celých a racionálních čísel**.**

Učivo: Početní operace se zlomky.

Ročník: 8.

Úloha 15., kategorie pro 9. ročník, 2022/2023, okresní kolo

Ježibaba připravila dětem košík perníčků. Jeníček snědl tři osminy celkového počtu. Mařenka snědla o 3 perníčky méně než dvě třetiny toho, co snědl Jeníček. Poté, co se děti najedly, zůstalo v košíku ještě 42 perníčků. Kolik perníčků měla Ježibaba původně v košíku?

V košíku bylo původně ……………… perníčků.

Komentář a postup možného řešení:

Úloha se zaměřuje jednak na početní operace se zlomky a také na schopnosti žáka na základě zadání sestavit lineární rovnici. Nejprve si dle zadání zapíšeme, co víme a známe.

Zápis:

Celkem perníčků ………………………………. x

Jeníček snědl ………………………………….. $\frac{3}{8}x$

Mařenka snědla ……………………………….. $\frac{2}{3}\left(\frac{3}{8}x\right) - 3$

Zbylo ………………………………………….. 42

Sestavíme si lineární rovnici:

$$\frac{3}{8}x + \frac{2}{3}\left(\frac{3}{8}x\right) - 3 + 42 = x$$

Upravíme:

$$\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}x - 3 + 42 = x$$

$$39 = x - \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}x$$

$$39 = \frac{8x - 3x - 2x}{8}$$

$$39 = \frac{3}{8}x \quad | \cdot 8$$

$$312 = 3x$$

$$104 = x$$

V košíku bylo původně 104 perníčků.

Tematický okruh: Číslo a proměnná

Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-1-01, žák provádí početní operace v oboru celých a racionálních čísel.

M-9-1-08, žák řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav.

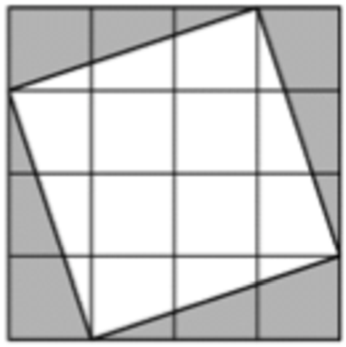
Učivo: Početní operace se zlomky, lineární rovnice.

Ročník: 9.

Úloha 11., kategorie pro 6. ročník, 2022/2023, okresní kolo

Princezna přišla s nápadem na rekonstrukci hradního nádvoří. Z původních čtvercových dlaždic o obsahu 16 dm^2 s oprýskanými hranami se nové získají otesáním šedých částí podle obrázku. Jaký obsah budou mít nové dlaždice?

Obsah nových dlaždic je ……………….. dm^2.



Komentář a postup možného řešení:

Tuto úlohu můžeme řešit více způsoby. Můžeme si povšimnout, že šedá plocha jsou pravoúhlé trojúhelníky. Známe obsah původního čtvercového nádvoří, to je 16 dm^2. Ze vzorce pro obsah čtverce $S = a \cdot a = a^2$ snadno odvodíme délku strany.

$$S = a^2$$

$$16 = a^2$$

$$a = 4\ dm$$

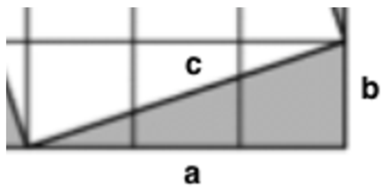
Každý čtvereček ve čtvercové síti je roven 1 dm^2 a strana má délku 1 dm.

Délka stran trojúhelníku tedy bude:

$$a = 3\ dm$$

$$b = 1\ dm$$

$$c = ?\ dm$$



Obrázek 23. Znázornění stran pravoúhlého trojúhelníku

Nyní máme prakticky dvě možnosti, jak můžeme dále postupovat:

1. *způsob řešení*

   V prvním způsobu si vypočítáme obsah trojúhelníku, vynásobíme čtyřmi, protože trojúhelníky jsou celkem 4 a tuto hodnotu následně odečteme od původního obsahu čtvercového nádvoří.

$$S_{\Delta} = \frac{a \cdot b}{2}$$

$$S_{\Delta} = \frac{3 \cdot 1}{2}$$

$$S_{\Delta} = 1{,}5\ dm^2$$

Máme čtyři trojúhelníky:

$$4 \cdot S_{\Delta} = 6\ dm^2$$

Odečteme hodnotu obsahu trojúhelníků od původní hodnoty:

$$S - S_{\Delta} = 10 - 6 = 10\ dm^2$$

Obsah nových dlaždic je 10 dm^2.

2. *způsob řešení*

V druhém způsobu si pomocí Pythagorovy věty dopočítáme stranu *c*, čímž získáme stranu našeho nového čtverce a můžeme vypočítat nový obsah.

Pythagorova věta:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 3^2 + 1^2$$

$$c^2 = 10$$

$$c = \sqrt{10}\ dm$$

Zde je nutné zachovat výsledek pod odmocninou, aby nedocházelo k zaokrouhlení a následně nepřesnému výsledku.

Nyní, když známe stranu *c*, můžeme si vypočítat obsah nového čtverce:

$$S_{\blacksquare} = a^2$$

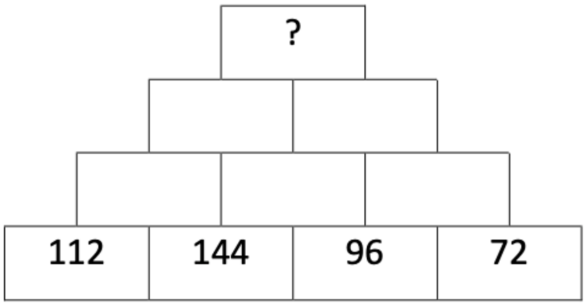
$$S_{\blacksquare} = \left(\sqrt{10}\right)^2$$

$$S_{\blacksquare} = 10\ dm^2$$

Obsah nových dlaždic je 10 dm^2.

Úloha 13., kategorie pro 7. ročník, 2022/2023, okresní kolo

V každém políčku je největší společný dělitel čísel, zapsaný v políčkách přímo pod ním. Jaké číslo je ukryto pod otazníkem?



Pod otazníkem je ukryto číslo ……………….

<u>Komentář a postup možného řešení:</u>

U této úlohy musíme určit největší společný dělitel dvou čísel. Existuje několik způsobů, jak určit největšího společného dělitele.

Největší společný dělitel (NSD) dvou celých čísel je největší číslo, které beze zbytku dělí obě čísla.

Pro určení NSD využijeme metodu prvočíselného rozkladu. Obě čísla rozepíšeme jako součin prvočísel, výsledný NSD je součin prvočísel vyskytujících se v obou rozkladech umocněných na příslušné nejmenší exponenty.

Rozklad čísel 112 a 144:

$$112 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$$

$$144 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3.$$

Pro nalezení NSD musíme najít největší mocninu každého prvočísla, která se vyskytuje v obou rozkladech. Tedy:

$$NSD\ (112, 144) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16.$$

Tímto způsobem postupujeme dále.

Rozklad čísla 96:

$$96 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

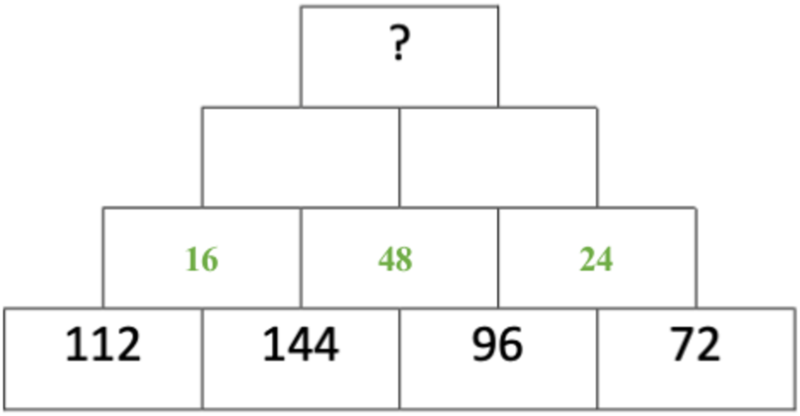
$$NSD\ (144, 96) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 48.$$

Rozklad čísla 72:

$$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$$NSD\ (96, 72) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24.$$

Doplníme údaje do pyramidy:



Obrázek 24. Doplnění druhého řádku pyramidy

A budeme pokračovat třetím řádkem pyramidy:

Rozklad čísel 16 a 48:

$$16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

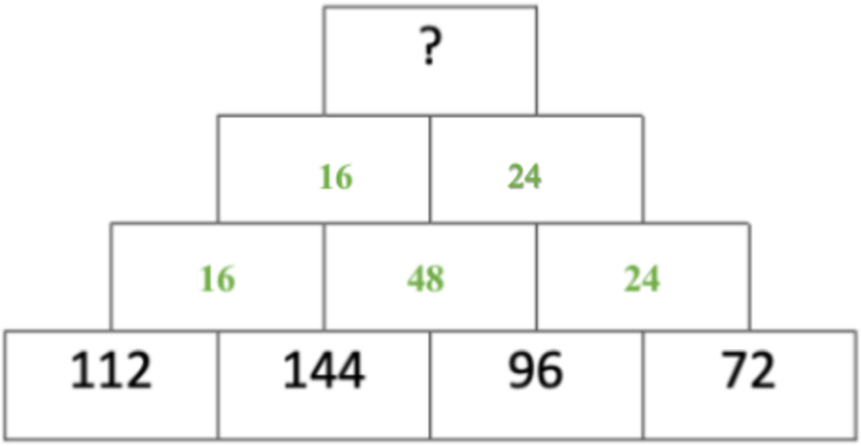
$$NSD\ (16, 48) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16.$$

Rozklad čísel 24:

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$NSD\ (48, 24) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24.$$

Doplníme hodnoty do pyramidy:



Obrázek 25. Doplnění třetího řádku pyramidy

Zbývá určit poslední číslo místo otazníku, tedy určit $NSD\ (16, 24)$:

$$NSD\ (16, 24) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

Místo otazníku tedy bude číslo 8.

Tematický okruh: Číslo a proměnná

Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-1-03, žák modeluje a řeší situace s využitím dělitelnosti v oboru přirozených čísel.

Učivo: Dělitelnost přirozených čísel, prvočíslo, násobek, dělitel

Ročník: 6.

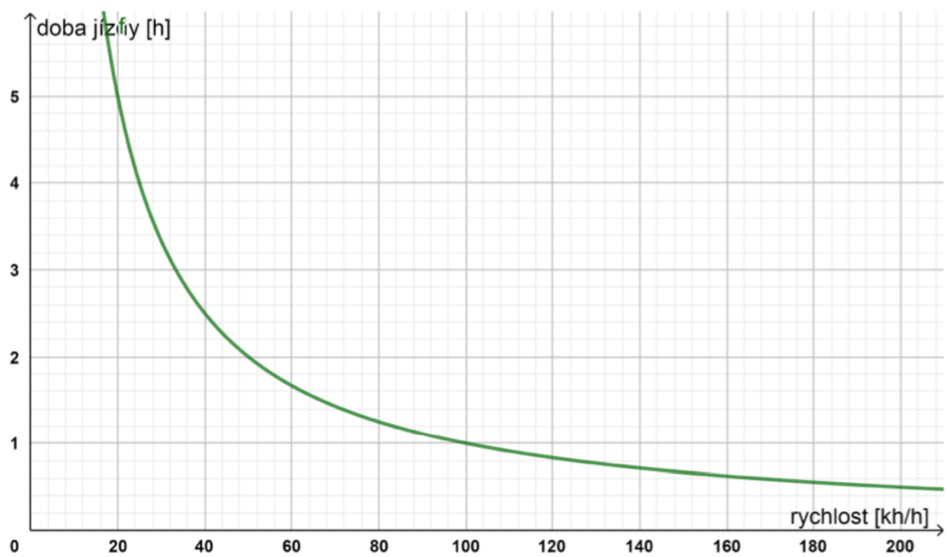
3.4 Vybrané úlohy ze soutěže Pangea

Matematická soutěž Pangea se primárně zaměřuje na provázanost matematiky s běžným životem, v soutěži tedy můžeme vidět reálné příklady ze života. Pro tuto práci byly vybrány některé úlohy z Pangei, ročník 2020 ze školního kola, ročník 2020 finálové kolo, ročník 2021 finálové kolo. Přesné zadání jednotlivých úloh bylo převzato z oficiálního zadání Pangea umístěných na webových stránkách soutěže.

Úloha 3., kategorie pro 9. ročník, 2020 Finále (příklad za 3 body)

SPĚCHEJ POMALU

Stejnojmenný graf prezentuje na svých stránkách BESIP – organice, která se snaží vzdělávat účastníky silničního provozu v pravidlech bezpečnosti. Graf ukazuje závislost doby jízdy (svislá osa, *h*) na rychlosti (vodorovná osa, *km/h*) při konstantní vzdálenosti 100 km. Která z uvedených tvrzení z grafu nevyplývá?



a) Při rychlosti 40 km/h by cesta trvala 2,5 hodiny.
b) Při rychlosti 80 km/h by cesta trvala 1 hodinu a 15 minut.
c) Zvýšení rychlosti o 10 km/h z původních 40 km/h ušetří 30 minut z celkového času jízdy.
d) Zvýšení rychlosti o 10 km/h z 80 km/h ušetří jen asi 8 minut z celkového času jízdy.
e) Čím vyšší rychlostí jedeme, tím větší vliv má další zvýšení rychlosti na celkový čas jízdy.

Komentář a postup možného řešení:

Tento typ úlohy se zaměřuje na porozumění informací, které žák získá z grafu nepřímé úměrnosti mezi dobou jízdy a rychlostí. Postupujeme tak, že čteme jednotlivá tvrzení v nabízených odpovědích a posuzujeme, zda daná tvrzení jsou či nejsou pravdivá. Naším úkolem je identifikovat tvrzení, které z grafu nevyplývá.

Tvrzení a) je pravdivé, neboť z grafu je zcela patrné, že při rychlosti 40 km/h by cesta trvala 2,5 hodiny. Stejně tak tvrzení b), které uvádí, že při rychlosti 80 km/h by trvání cesty bylo 1 hodinu a 15 minut.

Tvrzení c) je rovněž pravdivé, zvýšíme-li rychlost o 10 km/h cesta bude o 30 minut kratší. Při rychlosti 40 km/h trvá cesta 2,5 hodiny. Bude-li naše rychlost 50 km/h bude cesta trvat 2 hodiny.

Zůstávají nám tvrzení d) a e), u kterých musíme ověřit pravdivost. Tvrzení d) se jeví jako pravdivé, 8 minut tvoří $\frac{2}{15}$ hodin a rozdíl v hodnotách grafu 80 km/h a 90 km/h by mohl představovat $\frac{2}{15}$ délky strany velkého čtverce na grafu. Avšak abychom si ověřili pravdivost tohoto tvrzení, musíme se podívat na tvrzení e). Poslední tvrzení zcela jistě není pravdivé. Z grafu je zřejmé, že vyšší rychlost a její další zvyšování má jen minimální vliv na celkový čas jízdy. Vidíme, že klesání grafu postupně zpomaluje, což znamená, že i při vyšších rychlostech je změna v čase relativně malá.

Správná odpověď je E.

Tematický okruh: Závislosti, vztahy a práce s daty.

Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-2-04 žák vyjádří funkční vztah tabulkou, rovnicí, grafem.

Učivo: Grafy a diagramy

Ročník: 8.

Úloha 5., kategorie pro 9. ročník, 2020 Školní kolo (příklad za 4 body)

TÍSŇOVÉ LINKY I

Čísla tísňového volání známe všichni. Určete, které z nich má po rozkladu na součin prvočísel nejvíce činitelů.

150	Hasičský záchranný sbor
155	Zdravotnická záchranná služba
158	Policie České republiky
156	Městská / obecní policie
112	Evropské číslo tísňového volání

a) 150 b) 155 c) 158 d) 156 e) 112

Komentář a postup možného řešení:

Prvočíslo je číslo dělitelné pouze jedničkou a samo sebou. Rozdělíme si tedy všechny čísla na rozklad prvočísel.

$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$

$155 = 5 \cdot 31$

$158 = 2 \cdot 79$

$156 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13$

$112 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$

Správná odpověď je E.

Tematický okruh: Číslo a proměnná

Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-1-03, žák modeluje a řeší situace s využitím dělitelnosti v oboru přirozených čísel.

Učivo: Dělitelnost přirozených čísel, prvočíslo.

Ročník: 6.

Úloha 13., kategorie pro 9. ročník, 2020 Finále (příklad za 5 bodů)

ZÁCHRANNÉ SBORY

V této úloze vystupuje pět mužů, každý pracuje v jiném záchranném sboru a má jiný oblíbený sport.

Policista se nejmenuje Václav, ale každopádně hraje fotbal nebo hokej. Záchranář hraje ping-pong nebo fotbal a určitě se nejmenuje Cyril. Petr si vždycky rád zahraje basketbal a oblíbeným sportem hasiče je ping-pong. Cyrila neláká cyklistika ani ping-pong. Václav je příznivcem fotbalu nebo hokeje. Marek je už osm let příslušníkem Armády ČR. Člen horské služby nemá zrovna v oblibě cyklistiku. Jeden z mužů se jmenuje Daniel. Vyber pravdivé tvrzení.

a) Hasič Cyril má v oblibě cyklistiku.
b) Policista se jmenuje Petr nebo Václav
c) Člen horské služby rád hraje basketbal.
d) Daniel je záchranář
e) Oblíbeným Markovým sportem je ping-pong.

Komentář a postup možného řešení:

Jedná se o typ úlohy zebra, která bývá označována také jako kombinační hlavolam. Jedná se o tzv. logické hříčky, které trénují logické uvažování. Cílem je sestavit dle zadaných podkladů a závislostí ucelené množiny informací, které budou přesně odpovídat zadání. U úlohy je nutno porozumět textu a zaměřovat se na jednotlivé vztahy a vazby mezi informacemi, aby nedošlo ke zbytečné chybě.

Cílem této úlohy je vybrat pravdivé tvrzení. K lepší orientaci je u těchto úloh vhodné vytvořit diagram. Víme:

- **Marek** je příslušníkem **Armády ČR** (uvedeno přímo v zadání)
- **Petr hraje basketbal** (uvedeno v zadání)
- **Hasič** má oblíbený sport **ping pong** (uvedeno v zadání)
- Záchranář hraje ping-pong nebo fotbal. Zde již můžeme ping pong vyloučit, bylo nám totiž řečeno, že je to oblíbený sport hasiče a víme, že každý příslušník záchranného sboru má mít jiný oblíbený sport.

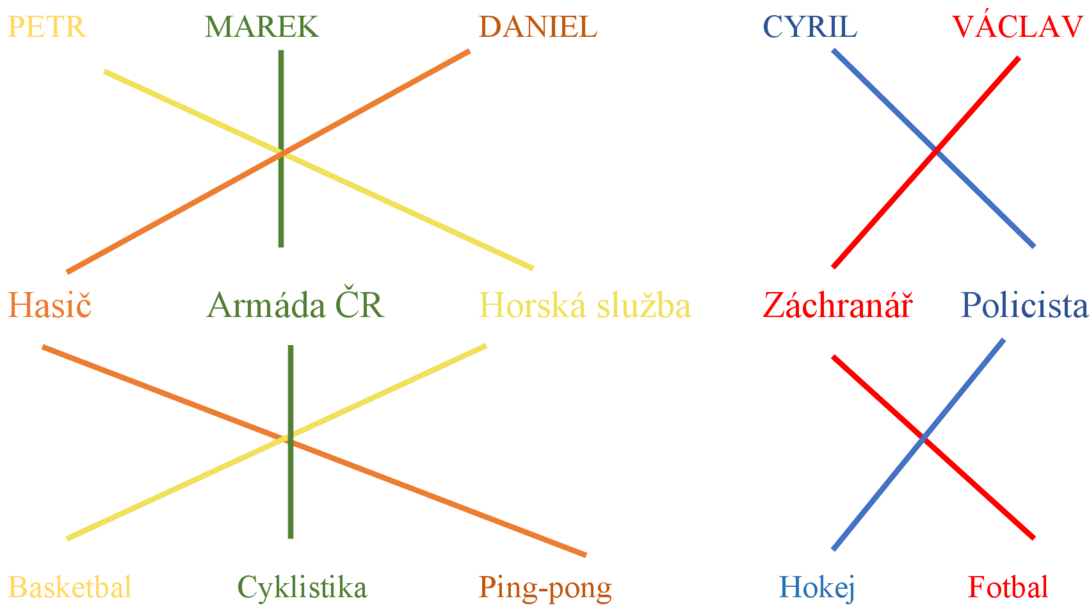
  Záchranář tedy hraje fotbal.

- Policista hraje fotbal nebo hokej, opět můžeme vyloučit fotbal, ten hraje záchranář.

  <u>Policista hraje hokej.</u>
- Víme, že Cyril nemá rád cyklistiku ani ping-pong, nemůže mít rád ani basketbal, protože basketbal hraje Petr. Cyril není záchranář, tedy nemůže hrát fotbal. Jeho oblíbeným sportem tedy může být jedině hokej a to znamená, že **<u>Cyril je policista</u>**
- Václav má rád buď fotbal nebo hokej, víme ale, že hokej je oblíbeným sportem Cyrila, což znamená, že Václavův oblíbený sport je fotbal.

  <u>Václav je záchranář.</u>
- **<u>Člen horské služby</u>** nemá rád, takže na něj zbývá jedině **<u>basketbal.</u>**

  <u>Petr</u> hraje basketbal a musí tedy být **<u>členem horské služby</u>**.
- Příslušníkovi Armády ČR tedy zbyl jediný sport a tím je cyklistika
- Z toho všeho nám vyplývá, že **<u>Daniel</u>** musí být **<u>hasič</u>** (jiný záchranný sbor nám již nezbývá).



Po vytvoření diagramu se všemi známými informacemi jsme již schopni vyloučit nepravdivá tvrzení a odhalit správnou odpověď. Z diagramu vyplývá, že jediným pravdivým tvrzením je odpověď c).

Správná odpověď je C.

Tematický okruh: Nestandardní aplikační úlohy a problémy

Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-4-01, žák užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací

Učivo: Logické úlohy, kombinatorika.

Ročník: 9.

Úloha 14., kategorie pro 7. ročník, 2021 Finále (příklad za 5 bodů)

TOALETNÍ PAPÍR

Bez toaletního papíru si již náš život nedokážeme představit. Co ale stojí za výrobou tohoto vynálezu? Denně se vyrobí na světě přes 83 milionů ruliček, na které je nutné pokácet asi 27 000 stromů.

Recyklací 1 tuny papíru zachráníme přibližně 17 stromů. Kolik tun papíru bychom museli denně na světě recyklovat, abychom snížili spotřebu stromů na 75 % současného stavu?

Výsledek uvádějte zaokrouhlený na stovky tun.

a) 200 tun b) 400 tun c) 800 tun d) 1200 tun

e) 1600 tun

<u>Komentář a postup možného řešení:</u>

Při výpočtu si musíme uvědomit, jaké hodnoty známe a co potřebujeme zjistit. Tento typ slovní úlohy se zaměřuje na řešení úloh přímé úměrnosti.

Nejprve si vyřešíme, kolik bude potřeba vyrobit ruliček toaletního papíru, abychom snížili spotřebu stromů na 75 %:

83 000 000 ruliček …………………….. 100 %

<u>x ruliček ……………………………….. 75 %</u>

$$x = \frac{75 \cdot 83\,000\,000}{100}$$

$$x = 62\,250\,000$$

Při snížené spotřebě 75 % se vyrobí 62 250 000 ruliček.

Dále víme, že na 83 mil. ruliček toaletního papíru je potřeba 27 000 stromů. Vypočítáme si tedy, kolik stromů bude potřeba na 62 250 000 ruliček:

83 000 000 ruliček …………………….. 27 000 stromů

<u>62 250 000 ruliček ……………………….. x stromů</u>

$$x = \frac{62\,250\,000 \cdot 27\,000}{83\,000\,000}$$

$$x = 20\ 250$$

Na výrobu 62 250 000 ruliček by bylo potřeba 20 250 stromů.

Rozdíl vykácených stromů při snížené spotřebě je: $27\ 000 - 20\ 250 = 6\ 750$ stromů.

1 tuna recyklovaného papíru zachrání 17 stromů, abychom tedy snížili spotřebu na 75 % musíme zjistit kolik tun recyklovaného papíru zachrání 6 750 stromů:

$$6\ 750 : 17 = 397{,}1\ t$$

Údaje máme zaokrouhlovat na stovky tun. Museli bychom tedy denně recyklovat 400 tun papíru, abychom snížili spotřebu stromů na 75 %.

Správná odpověď je B.

Tematický okruh: Závislosti, vtahy a práce s daty

Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-2-03, žák určuje vztah přímé a nepřímé úměrnosti

Učivo: Přímá a nepřímá úměrnost, trojčlenka.

Ročník: 7.

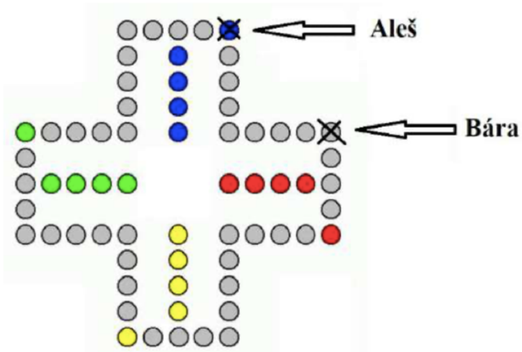
Úloha 19., kategorie pro 8. ročník, 2022 Finále (příklad za 6 body)

ČLOVĚČE, NEZLOB SE

Při hře Člověče, nezlob se začali Aleš a Bára v jistou chvíli hrát špatně vyváženými kostkami. Alešova pořád hází jen pětky, Bářina jen trojky. Aleš a Bára mají figurky v pozici tak, jak je ukázáno na obrázku. I s vadnými kostkami hrají dál klasické Člověče, nezlob se. Nyní je na tahu Aleš.

Po kolika tazích Bářinu figurku vyhodí?

(Pozn. Ani jeden nemá červenou, takže v těsné blízkosti svého domečku není ani jeden z nich.)



a) Po dvou.
b) Po třech.
c) Po čtyřech.
d) Nevyhodí – předejde ji a oba bezpečně dojedou do svých domečků.
e) Nevyhodí – předejde ji a za chvíli Bára vyhodí jeho

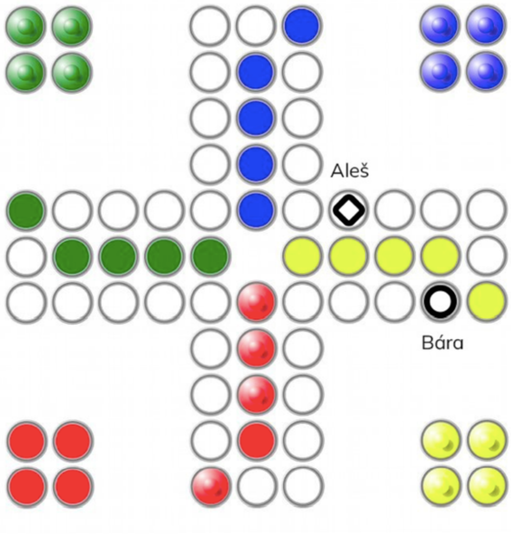
<u>Komentář a postup možného řešení:</u>

Tento typ úlohy můžeme řešit bez jakéhokoliv výpočtu graficky s pomocí obrázku v zadání, a to následovně.

Víme, že:

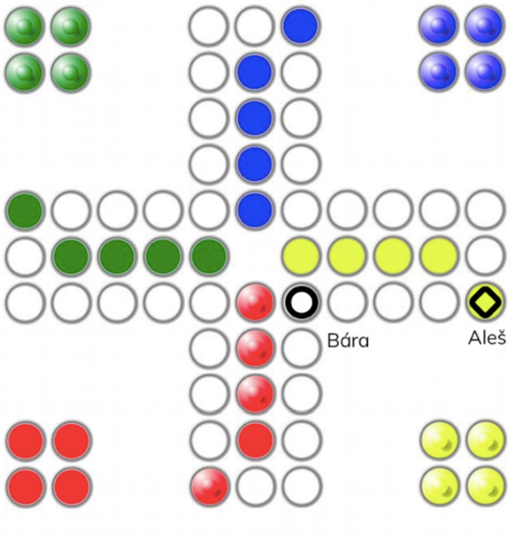
- Aleš hází 5
- Bára hází 3

Na tahu je Aleš a v prvním tahu se pouze posune o 5 políček a po té Bára o tři, na herním poli to tedy po prvním tahu bude vypadat následovně:



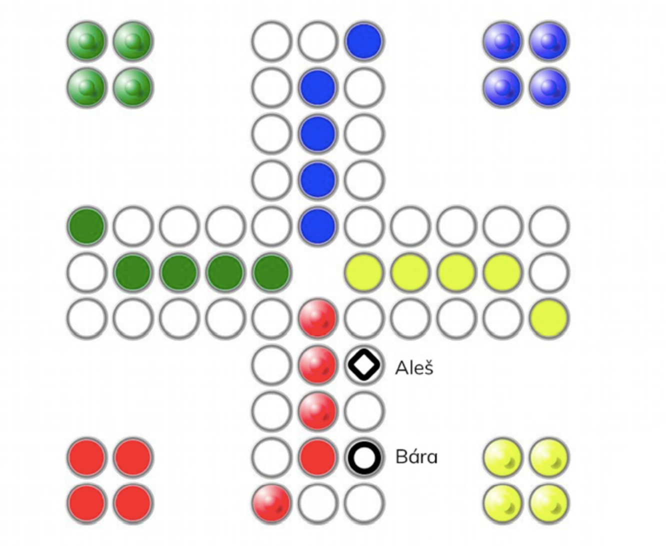
Obrázek 26. První tah obou hráčů

Při druhé tahu budeme postupovat stejně, k vyhození Báry však nedojde. Aleš bude stále za Bárou.



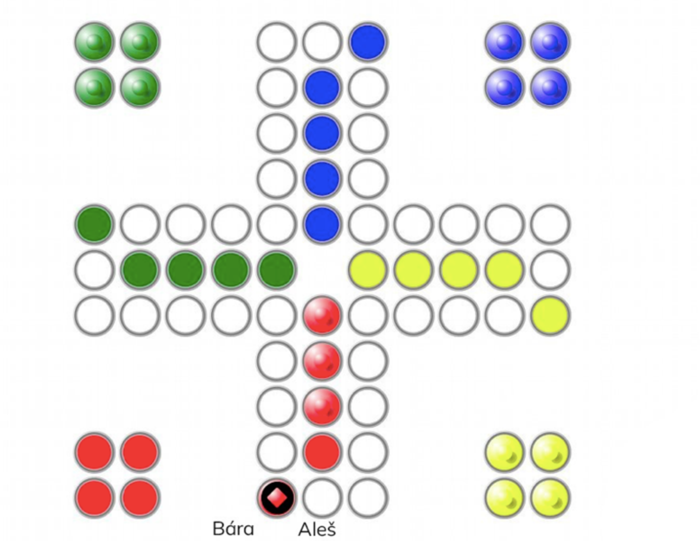
Obrázek 27. Druhý tah obou hráčů

V třetím tahu Aleš přeskočí Báru a hned po hodu kostkou Báry dojde opět k přeskočení Aleše.



Obrázek 28. Třetí tah obou hráčů

Ve čtvrtém tahu se ale Aleš dostává přesně tři políčka před Báru a pokračuje Bára, která však hází 3 a Aleše tímto tahem vyhodí.



Obrázek 29. Čtvrtý tah obou hráčů

Správná odpověď je E.

Tematický okruh: Nestandardní aplikační úlohy a problémy

Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-4-01, žák užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací

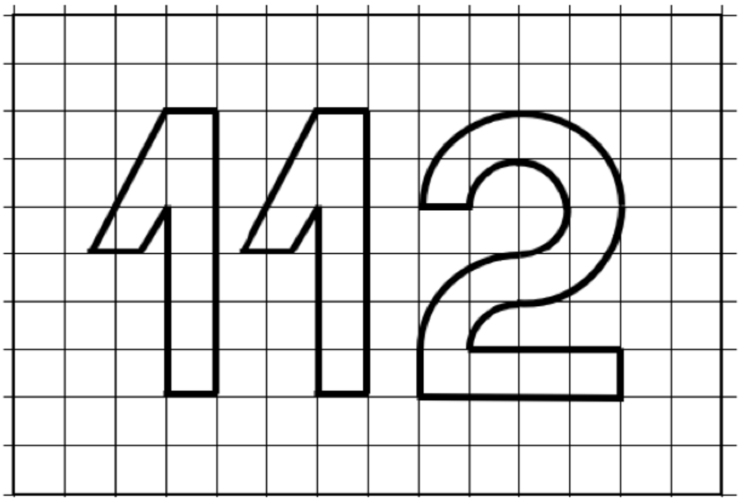
Učivo: Logické úlohy.

Ročník: 9.

Úloha 13., kategorie pro 9. ročník, 2020 Školní kolo (příklad za 6 body)

STODVANÁCTKA I

Vypočítejte celkový obsah číslic na obrázku. Délka strany jednoho čtverečku je 1.

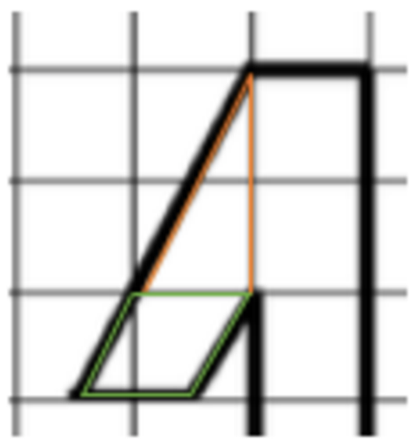


a) $18 + 3\pi$ b) $20 + 3\pi$ c) $20 + 2\pi$ d) $22 + 2\pi$

e) $22 + 3\pi$

<u>Komentář a postup možného řešení:</u>

Při výpočtu si musíme uvědomit, z jakých útvarů je číslo složeno a znát výpočet pro jejich obsahy. Je možné si samozřejmě i postupně skládat a počítat jednotlivé čtverečky, které číslo zabírá. Pokud ale využijeme první možnost, tak obsah takového čísla bude následně určen jako součet dílčích obsahů. „Noha“ jedničky je složena ze šesti plných čtverců, tedy víme, že tato část má obsah 6 (resp. 12 jednotek čtverečních, neboť máme jedničky dvě). Teď ale musíme vyřešit „zobáček“ jedničky. „Zobáček“ si můžeme rozdělit na pravoúhlý trojúhelník a kosodélník (viz. obr. 30). Pravoúhlý trojúhelník má odvěsnu délky jedna a odvěsnu délky dva, jak je patrné z obrázku. Jeho obsah je tedy $S_{\Delta} = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1\, j^2$. Kosodélník má stranu délky



Obrázek 30. Vyznačení a rozdělení jedničky

jedna a k ní příslušná výška je také jedna, jsme schopni vypočítat i jeho obsah, $S = a \cdot v_a = 1 \cdot 1 = 1j^2$. Nyní víme, že obsah jedné jedničky je $S = 6 + 1 + 1 = 8\,j^2$.
Číslice dvě je tvořena obdélníkem skládajícím se ze čtyř čtverců, mezikružím kružnic o poloměru dva a jedna, $S = S_1 - S_2 = \pi r_1^2 - \pi r_2^2 = 4\pi - \pi = 3\pi$
Celkový obsah zadané číslice je $S = 8 + 8 + 4 + 3\pi = 20 + 3\pi$.
Správná odpověď je B.

Tematický okruh: Geometrie v rovině a prostoru.
Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-3-04 žák odhaduje a vypočítá obsah a obvod základních rovinných útvarů.
Učivo: Obsah čtverce, obsah trojúhelníku, obsah kosodélníku.
Ročník: 7.

4 Návrh soutěžních úloh

Úloha 1.

Princ Jiří se rozhodl získat si srdce princezny Anny. Aby ji však mohl požádat o ruku, musí splnit tři nelehké úkoly. Jeho prvním úkolem bylo uhlídat stádo ovcí. Ráno si všechny ovce spočítal. Při pastvě ovcí přišel Jiří na to, že kdyby si ovce seřadil do skupinky po 3, 4, 5, 6, 8 nebo 10, vždy mu budou dvě ovce přebývat. Zjistil však, že pokud je seřadí po 7, žádná ovce mu nezbyde. Kolik ovcí musí Jiří uhlídat, aby splnil první úkol, víme-li, že ovcí nebylo více než 1 000?

Analýza úlohy: tento typ úlohy se zaměřuje na problematiku dělitelnosti přirozených čísel, v tomto typu příkladu konkrétně se zaměřujeme na nejmenší společný násobek. Žák musí také porozumět textu a se všemi známými fakty být schopen pracovat.

Tematický okruh: Číslo a proměnná

Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-1-03, žák modeluje a řeší situace s využitím dělitelnosti v oboru přirozených čísel.

Učivo: Dělitelnost přirozených čísel

Ročník: 6.

Předpokládaný postup řešení:

V první řadě si žák vypočítá nejmenší společný násobek čísel 3, 4, 5, 6, 8 a 10, neboť zadání nám říká, že pokud si ovce seřadí do příslušných skupin, vždy mu budou dvě ovce přebývat.

$\boldsymbol{n}\,(3,4,5,6,8,10) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 120$

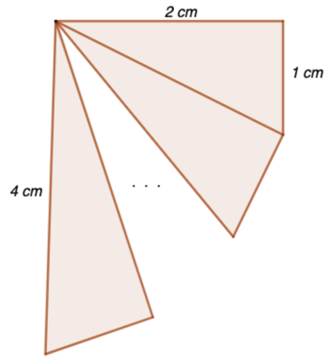
Nyní si žák musí uvědomit, že mohou nastat následující možnosti: 120 + 2; 240 + 2; 360 + 2; 480 + 2; 600 + 2; 720 + 2; 840 + 2; 960 + 2. Více možností nastat nemůže, ze zadání příkladu víme, že ovcí nebylo více než 1 000.

Nyní stačí jen zjistit, které z daných možností čísel je dělitelné 7, což je číslo 602.

Správná odpověď: Jiří musí uhlídat 602 ovcí.

Úloha 2.

Z malého domečku myšky Hrabalky vedou točité schody, které se postupně rozšiřují do velkého sklepa plného zásob. Jednotlivé schody mají tvar pravoúhlých trojúhelníků a každý má hloubku 1 cm (kratší odvěsna). Kolik vede z domečku schodů, když první schod je široký 2 cm (delší odvěsna) a poslední schod má délku 4 cm (přepona)?



Analýza úlohy: tento typ úlohy se zaměřuje jednak na porozumění textu a jednak na porozumění vztahů mezi informacemi. Z textu je žák upozorněn, že se jedná o schody ve tvaru pravoúhlého trojúhelníku. Musí si tedy uvědomit, že je nezbytné využít vztahu Pythagorovy věty, která žákovi umožní dopočítat vždy třetí stranu trojúhelníku. Žák při řešení úlohy dokáže využívat polohové a metrické vlastnosti.

Tematický okruh: Geometrie v rovině a prostoru

Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-3-01, žák vysvětlí a využívá matematický vztah mezi stranami pravoúhlého trojúhelníku.

Učivo: Pythagorova věta a její užití.

Ročník: 8.

Předpokládaný postup řešení: každý schod představuje pravoúhlý trojúhelník, u prvního trojúhelníku víme délky jejich odvěsen a jsme tedy schopni dopočítat přeponu. Ta pak u dalšího schodu bude tvořit délku nové odvěsny. Délka schodu je po celou dobu schodiště zachována v délce *1 cm*.

Při výpočtu budeme využívat vzorec: $c^2 = a^2 + b^2$

U prvního trojúhelníku:

$c^2 = 2^2 + 1^2$

$c^2 = 5$

$c = \sqrt{5}$

Tímto postupem budeme pokračovat tak dlouho, dokud nezískáme hodnotu přepony rovnu 4 cm, neboť to je poslední šířka schodu.

Správná odpověď: Z domečku do sklepa vede celkem 12 schodů.

Úloha 3.

Rovnoramenné váhy mají červenou a modrou misku. V červené misce leží 8 dřevěných kostek a 5 gramových závaží. V modré misce leží 6 dřevěných kostek a 12 půlgramových závaží. Váhy ukazují, že červená miska je o 3 gramy těžší. Kolik váží 5 dřevěných kostek?

Analýza úlohy: tento typ úlohy se zaměřuje na typ slovní úlohy, kterou můžeme řešit pomocí lineární rovnice. Žák musí být schopen porozumět textu, aby vytvořil na základě informací ze zadání lineární rovnici a příklad vyřešil.

Tematický okruh: Číslo a proměnná.

Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-1-08 žák formuluje a řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav.

Učivo: Lineární rovnice.

Ročník: 7.

Předpokládaný postup řešení: Na základě zadání žák sestaví lineární rovnici, která povede k řešení celého příkladu. Řešíme kolik váží dřevěné kostky. Musíme tedy pomocí lineární rovnice ověřit nejprve váhu jedné dřevěné kostky. Rovnici si sestavíme následovně:

$$8x + 5 = 6x + 12 \cdot 0{,}5 + 3$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

Jedna dřevěná kostka váží 2 gramy. Nyní jednoduše zjistíme, kolik váží 5 dřevěných kostek:

$$5x = ?$$

$$x = 5 \cdot 2$$

$$x = 10$$

Správná odpověď: Pět dřevěných kostek váží 10 gramů.

Úloha 4.

V zoologické zahradě ve městě Šňufákov žijí spokojená zvířata. Z afrického kontinentu pochází $\frac{2}{3}$ zvířat. Savci tvoří 75 % afrických zvířat. Stádo žiraf tvoří $\frac{2}{9}$ afrických savců, z nichž 30 % tvoří žirafa síťovaná a zbylých 28 žiraf tvoří vzácná žirafa masajská. Kolik žije v zoologické zahradě zvířat, které nepochází z Afriky?

Analýza úlohy: tento typ úlohy se zaměřuje na porozumění vztahu celku a jeho části (tedy zlomky, procenta a jejich aplikace). Žák musí být ale také schopen porozumět textu a informacemi v něm. V úloze žák postupuje od posledních zadaných údajů.

Tematický okruh: Číslo a proměnná.

Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-1-04 žák užívá různé způsoby kvantitativního vyjádření vztahu celek – část (přirozeným číslem, poměrem, zlomkem, desetinným číslem, procentem).

Učivo: Procenta, zlomky.

Ročník: 7.

Předpokládaný postup řešení:

1) Postupuje od posledních údajů vždy dopočítáváním na celek. Víme tedy, že 30 % žiraf je žirafa síťovaná, tzn. 70 % tvoří žirafa masajská a víme, že těchto žiraf je 28.

   Procenta si můžeme zapsat také pomocí zlomků, neboť platí, že jedno procento je to stejné jako jedna setina, tedy 70 % $= \frac{70}{100} = \frac{7}{10}$.

   $\frac{7}{10}x = 28$

   $x = 40$

   Dohromady máme 40 žiraf, které tvoří $\frac{2}{9}$ afrických savců.

2) 40 žiraf tvoří $\frac{2}{9}$ afrických savců.

   $\frac{2}{9}x = 40$

   $x = 180$

V zoo máme celkem 180 savců, kteří tvoří 75 % afrických zvířat.

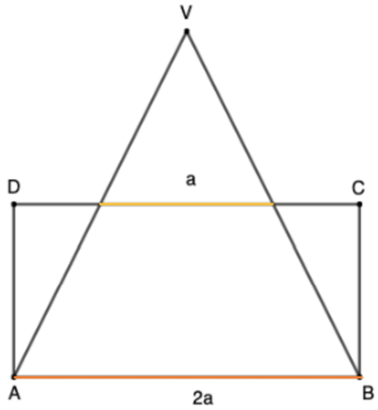
3) 75 % afrických zvířat tvoří 180 savců. Opět si převedeme procenta na zlomek:
$\frac{75}{100}x = 180$
$x = 240$
V zoo žije celkem 240 afrických zvířat, které tvoří $\frac{2}{3}$ zvířat v zoologické zahradě. Nás však zajímá počet zvířat nepocházejících z Afriky.

4) V posledním kroku si tedy vypočteme celkový počet zvířat v zoo a následně zbylou $\frac{1}{3}$ zvířat.
$\frac{2}{3}x = 240$
$x = 360$
Celkem v zoo žije 360 zvířat, od tohoto počtu odečteme počet afrických zvířat, abychom získali počet zvířat, které nepochází z Afriky.
$x = 360 - 240 = 120$

Správná odpověď: V Zoo žije 120 zvířat, které nepocházejí z Afriky.

Úloha 5.

Kouzelník Fukoson nakreslil podivný obraz a ptá se svého pomocníka Wilsona: „Jestliže trojúhelník *ABV* má obsah *10 cm²*, jaký bude obsah obdélníku *ABCD*?“.



Analýza úlohy: tento typ úlohy se zaměřuje na geometrickou úlohu. Žák na základě obrázku určí a charakterizuje základní prostorové útvary, analyzuje jejich vlastnosti a dokáže řešit tento typ aplikační geometrické úlohy. Žák musí znát vztahy a pojmy trojúhelník, obdélník a střední příčka trojúhelníku.

Tematický okruh: Geometrie v rovině a prostoru

Číslo výstupu (RVP) a očekávány školní výstup: M-9-3-05, M-9-3-06, žák vysvětlí pojmy trojúhelník, střední příčky a výšky, těžnice, kružnice trojúhelníku vepsaná a opsaná. Žák umí sestrojit trojúhelník a jeho náležitosti.

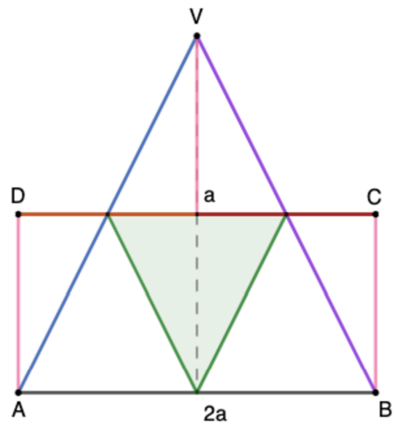
Učivo: Trojúhelníky.

Ročník: 6.

Předpokládaný postup řešení:

Z obrázku si řešitel povšimne, že úsečka *a* je střední příčkou trojúhelníku. Střední příčka trojúhelníku je spojnice středů dvou stran, střední příčka *a* je rovnoběžná se stranou *AB* a má poloviční velikost této strany. Střední příčka tedy půlí boční strany trojúhelníku.

Když si trojúhelník „rozřežeme“ a vyznačíme si jednotlivé úsečky se stejnou délkou zjistíme, že část trojúhelníku nad obdélníkem je shodná s pravoúhlými trojúhelníky v obdélníku, a tedy i obsah tohoto obdélníku je shodný s obsahem velkého trojúhelníku.



Obrázek 31. Vyznačení jednotlivých úseček

Správná odpověď: Obsah obdélníku *ABCD* je shodný s obsahem trojúhelníku *ABV*.

5 Test „POJĎ SI ZASOUTĚŽIT“ na základních školách

Studium teoretických pramenů týkajících se matematických soutěží v České republice, problematika tradičních metod výuky a Hejného metody vytvořily základ pro realizaci vlastního výzkumu. Ten má ověřit jednak, jak jsou žáci schopni řešit jednotlivé navržené úlohy, odhalit případně v čem nejčastěji chybují a zda si s logickými úlohami dokáží lépe poradit žáci s výukou matematiky Hejného metodou či žáci ostatní.

Při tvorbě jednotlivých úloh zaštiťujeme důležité okruhy učiva, a to: dělitelnost přirozených čísel, Pythagorova věta a její užití, lineární rovnice, procenta a zlomky, trojúhelník, střední příčka v trojúhelníku. Tyto okruhy učiva jsou vyučovány v jednotlivých ročnících na základních školách a měl by je tedy ovládat každý žák po absolvování základní školy. Úlohy jsou vytvořeny tak, aby měly soutěžní charakter, nejedná se o úlohy typicky početní, ale spíše logické a nestandardní. Úlohy jsou otevřené s krátkou odpovědí, aby nedocházelo k tomu, že žáci si jen „vytipují“ správnou odpověď. Časový limit na vyplnění všech úloh byl stanoven na 40 minut. Jednotlivé úlohy byly obodovány pouze pro potřeby diplomové práce a žáci nebyli s bodovým hodnocením konfrontováni. Bodové hodnocení je následovné: správně vyřešená úloha 1 bod, úloha nevyřešená 0 bodů, špatně vyřešená úloha -1 bod.

Testovanou skupinou byli žáci 9. ročníků základních škol, neboť všichni žáci téměř na konci základního vzdělávání by měli být schopni řešit zadané úlohy, které se týkají učiva z let předešlých.

Výsledky byli získány pomocí didaktického testu. Test můžeme definovat jako *„zkoušku, úkol, identický pro všechny zkoumané osoby s přesně vymezenými způsoby hodnocení výsledků a jejich číselného vyjádření“* (Michalička, 1969 cit. podle Chráska, 2016, s. 184). Základním charakteristickým rysem didaktického testu je zejména jeho objektivita a také exaktně měřitelné výsledky, což vylučuje subjektivní hodnocení (Chráska, 2016). Test byl v rámci výzkumu předkládán během února a března roku 2023.

5.1 Cíle a výzkumné otázky

Pro tento výzkum byly stanoveny dílčí cíle a následně pak výzkumné otázky.

Dílčí cíle výzkumu:

1. Zjistit míru úspěšnosti žáků při řešení zadaných úloh
2. Zjistit, zda jsou žáci s Hejného metodou výuky úspěšnější než žáci ostatní.
3. Zjistit, jakých chyb se žáci při řešení úloh dopouštějí nejčastěji.

Výzkumné otázky:

1. Jakých výsledků dosahují žáci při řešení zadaných úloh?
2. Která skupina žáků je při řešení zadaných úloh úspěšnější?
3. Jakých chyb se žáci dopouštějí nejčastěji?

5.2 Výběr a charakteristika základních škol

Žáci měli za úkol vyřešit test s pěti otevřenými otázkami. Test byl zadáván na náhodných základních školách po celé České republice. Výběr každé školy byl zejména ovlivněn ochotou pedagogů spolupracovat na tomto výzkumu. Z důvodu prosby některých pedagogů záměrně neuvádíme názvy škol, ale pouze jejich charakteristiku a zda je ve výuce matematiky využívá na Hejného metoda či nikoliv. Do výzkumu bylo zapojeno celkem 9 základních škol po celé České republice. Otestováno bylo celkem 378 žáků, z toho 186 žáků se vyučuje Hejného metodou, 192 žáků je zařazeno do skupiny ostatní, u nichž jsou využívány běžné výukové metody.

Základní škola č. 1

Základní škola se nachází v kraji Vysočina. Je to úplná základní škola s prvním i druhým stupněm. Kapacita školy je 480 žáků. V 9. ročníku jsou dvě třídy, v jedné třídě se vyučuje matematika Hejného metodou, v druhé třídě jsou ve výuce matematiky využívány metody výuky ostatní. Škola se zaměřuje na rozvoj osobnosti žáků, jejím hlavním cílem je připravovat samostatně, aktivní absolventy, kteří jsou schopni komunikovat a řešit problémy.

Základní škola č. 2

Základní škola se nachází v Praze. Je to úplná základní škola s prvním i druhým stupněm. V současné době školu navštěvuje 600 žáků a svým počtem se škola řadí mezi středně velké školy. Ve výuce matematiky jsou využívány metody výuky ostatní. Škola klade velký důraz na výuku jazyků.

Základní škola č. 3

Základní škola se nachází ve Zlínském kraji. Jedná se o školu úplnou, s prvním i druhým stupněm a s kapacitou 800 žáků a svým počtem se řadí mezi středně velké školy. Ve výuce matematiky jsou využívány metody výuky ostatní. V 9. ročníku se nachází celkem 4 třídy.

Základní škola č. 4

Základní škola se nachází ve Zlínském kraji. Jedná se o školu úplnou, s prvními druhým stupněm, s celkovou kapacitou 530 žáků. Škola je profilována jako základní škola s rozšířenou výukou jazyků. Ve výuce matematiky jsou využívány metody výuky ostatní.

Základní škola č. 5

Základní škola se nachází ve Středočeském kraji. Jedná se o školu úplnou, s prvním i druhým stupněm a celkovou kapacitou 600 žáků. Škola se kromě výuky angličtiny zaměřuje také na rozšířenou výuku přírodovědných předmětů. Ve škole se nachází celkem tři 9. ročníky, přičemž Hejného metoda je vyučována ve dvou třídách.

Základní škola č. 6

Základní škola se nachází ve Středočeském kraji. Je to škola soukromá, kde se matematika Hejného metodou vyučuje během prvního i druhého stupně. V 9. ročníku se nachází pouze 14 žáků. Kapacita školy je 160 dětí. Škola se řadí ke školám alternativním, která dbá na individuální rozvoj dětí a vede je k sebehodnocení.

Základní škola č. 7

Základní škola se nachází v Pardubickém kraji. Jedná se o školu úplnou, s prvním i druhým stupněm a celkovou kapacitou 520 žáků. Výuka v 9. ročníku probíhá ve dvou paralelních třídách a matematika je vyučována na prvním i druhém stupni Hejného metodou.

Základní škola č. 8

Základní škola se nachází v Moravskoslezském kraji. Jedná se o školu úplnou, s prvním i druhým stupněm a celkovou kapacitou 320 žáků. Matematika je vyučována Hejného metodou a škola se podporuje logické a samostatné myšlení žáků.

Základní škola č. 9

Základní škola se nachází v Praze. Jedná se o školu úplnou, s prvním i druhým stupněm a celkovou kapacitou 600 žáků. Matematika je vyučována Hejného metodou jak na prvním, tak také na druhém stupni. Výuka v 9. ročníku probíhá ve dvou paralelních třídách.

Tabulka 2. Přehled počtu testovaných žáků na jednotlivých základních školách

ZÁKLADNÍ ŠKOLA	POČET ŽÁKŮ
Základní škola č. 1	44
Základní škola č. 2	63
Základní škola č. 3	80
Základní škola č. 4	25
Základní škola č. 5	42
Základní škola č. 6	14
Základní škola č. 7	47
Základní škola č. 8	20
Základní škola č. 9	43

5.3 Způsob zpracování dat

Pro účely této diplomové práce byl zvolen výzkum kvantitativní, jehož filozofickým základem je pozitivismus. Jak uvádí Chráska (2016, s. 11): „*Pokud hovoříme o kvantitativně orientovaném výzkumu v pedagogice, můžeme jej vymezit* *jako záměrnou a systematickou činnost, při které se empirickými metodami zkoumají hypotézy o vztazích mezi pedagogickými jevy.*“

Získaná data byla přepsána do tabulek v Microsoft Office Excel. Následně byla data uspořádána do kontingenčních tabulek obsahujících absolutní a relativní četnost (v procentech, zaokrouhlených na jedno desetinné místo) a byly využity prostorové sloupcové a prostorové výsečové grafy.

Pro vizualizaci kvantitativních dat byl využit krabicový graf (boxplot), ze kterého pak bylo možné vyčíst zvolené charakteristiky polohy (medián) a odpovídající míry variability (kvartily). Medián ($\tilde{x}$) je prostřední hodnota z celé řady hodnot, které jsou seřazeny podle velikosti. Tato hodnota rozděluje soubor dat na dvě stejné části. Dolní kvartil Q_1 je hodnota, která odděluje čtvrtinu nejmenších hodnot, a naopak horní kvartil Q_3 odděluje čtvrtinu největších hodnot (Chráska, 2016).

Dále bylo nutné ověřit normalitu rozložení jednotlivých proměnných, abychom zvolili vhodný dvouvýběrový test. Existuje celá řada přístupů, jak můžeme posoudit normalitu dat. V případě diplomové práce jsme zvolili grafickou metodu ověření pomocí Q-Q plot (kvantilově-kvantilový graf), který na osu x vykreslí kvantily hypotetického normálního rozdělení a na osu y pak kvantily zkoumaného souboru. Pokud leží všechny body grafu „na“ regresní přímce, pak data vykazují normální rozdělení (Wang et al., 2016). Jelikož data našeho výběrového souboru se nikterak neodchylují od regresní přímky, můžeme s nimi pracovat, jako s daty pocházejícími z normálního rozdělení a k jejich dalšímu zpracování můžeme použít parametrické testy (v opačném případě by bylo nutno využít testy neparametrické).

K posouzení datového souboru tedy použijeme parametrický dvouvýběrový test o shodnosti rozptylů dvou nezávislých výběrů, tedy Fisherův-Snedecorův F-test. Tento test nám může poskytnout odpověď na otázku, zda dva soubory dat vykazují přibližně stejný rozptyl. Jak uvádí Chráska (2016, s.120): *„U tohoto testu významnosti se rozptyly posuzují pomocí testového kritéria F, které se vypočítá ze vztahu*

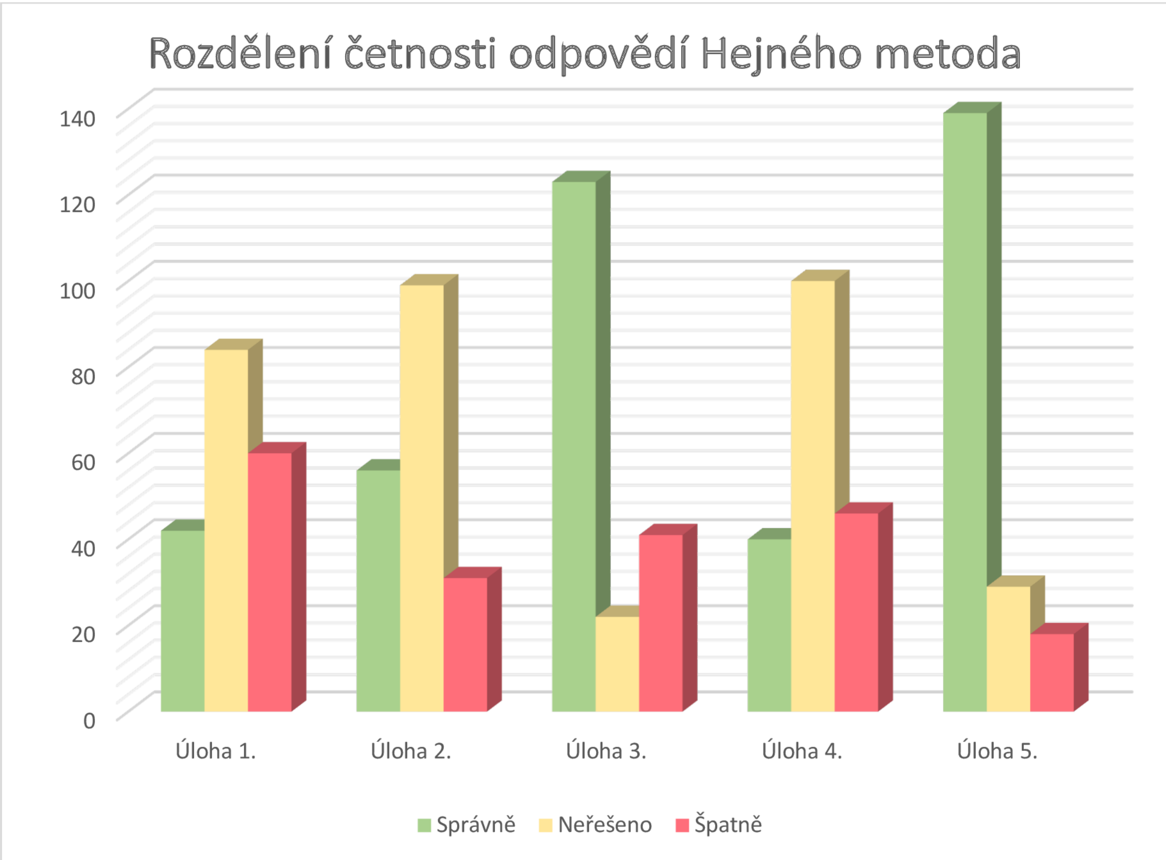
$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{\sum(x_{1i} - \bar{\bar{x}}_1)^2}{\sum(x_{2j} - \bar{\bar{x}}_2)^2} \cdot \frac{n_2 - 1}{n_1 - 1}$$

Kde s_1^2 je rozptyl v první skupině, s_2^2 je rozptyl ve druhé skupině, x_{1i} jsou hodnoty v první skupině, x_{2j} jsou jednotlivé hodnoty ve druhé skupině, $\bar{\bar{x}}_1$, $\bar{\bar{x}}_2$ jsou aritmetické průměry hodnot v obou skupinách a n_1, n_2 jsou četnosti v obou skupinách.“

5.4 Výsledky výzkumu a jejich hodnocení

5.4.1 Úspěšnost žáků při řešení jednotlivých úloh

Celkem bylo vyplněno a vyhodnoceno 378 testů, přičemž 186 testů bylo zadáno ve třídách, kde se matematika vyučuje Hejného metodou a 192 testů pak ve třídách ostatních. Testy byly zadány výhradně v 9. ročnících vybraných základních škol.



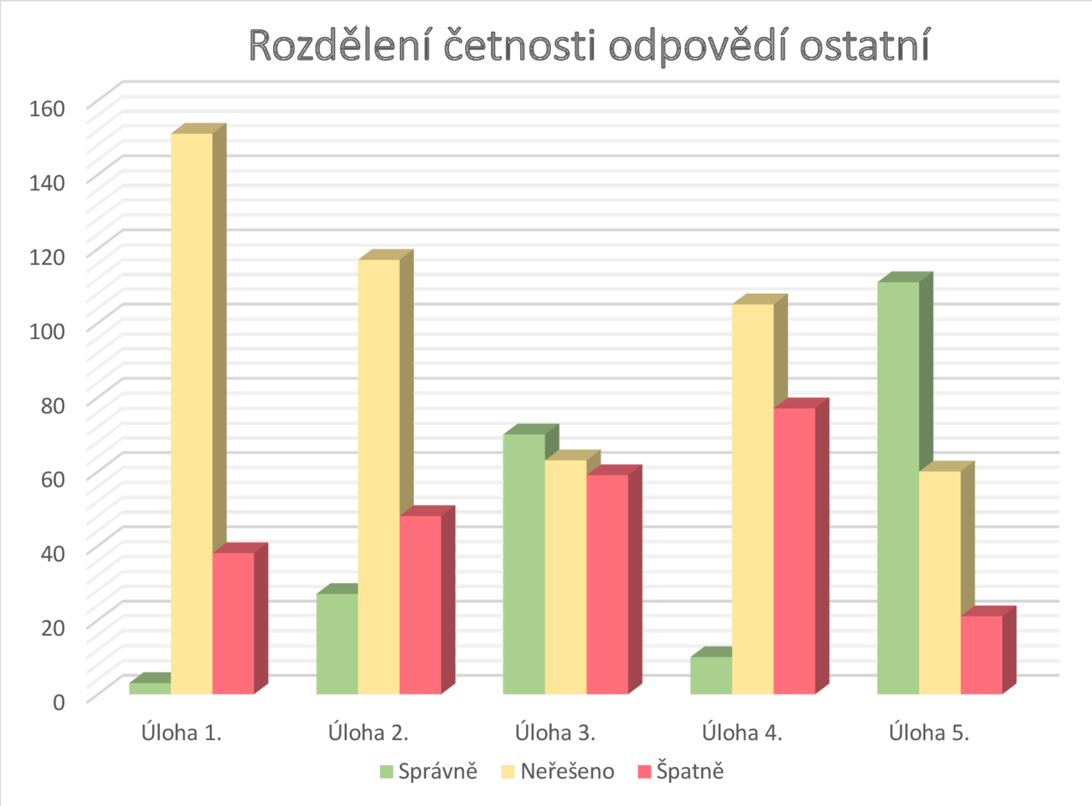
Graf 2.Rozdělení četnosti odpovědí u žáků s výukou matematiky Hejného metodou

Z výsledků plyne, že pro žáky s Hejného metodou byla nejtěžší úloha 4. a úloha 1. Úlohu 4. dokázalo správně vyřešit pouze 40 žáků, úlohu 1. pak celkem 42 žáků.

Naopak nejúspěšnější v řešení byli žáci u úlohy 5. a u úlohy 3. Způsob, jakým žáci tyto úlohy řešili jsou prakticky totožné. Úlohu 3. vyřešilo správně celkem 123 žáků z celkového počtu 186 žáků. Úlohu 5. dokonce vyřešilo správně 139 žáků.

Velké množství žáků pak nevyřešilo, či zcela vynechávalo řešení u úlohy 2. a 4. Celkem 12 testů bylo odevzdáno bez snahy pokusit se jakoukoliv úlohu vyřešit.

Zejména u úlohy 2. se velmi často vyskytovaly testy, kdy žáci začali úlohu řešit správně, ale po dvou výpočtech řešení vzdali.



Graf 3. Rozdělení četnosti odpovědí u žáků ostatních

U druhé skupiny žáků můžeme vidět, že absolutně největší problém byl u úlohy 1., její správně vyřešení zvládli pouze 3 žáci z celkového počtu 192 žáků. Vyřešit úlohu, i když špatně se pokusilo jen 38 žáků, 151 ji neřešilo vůbec.

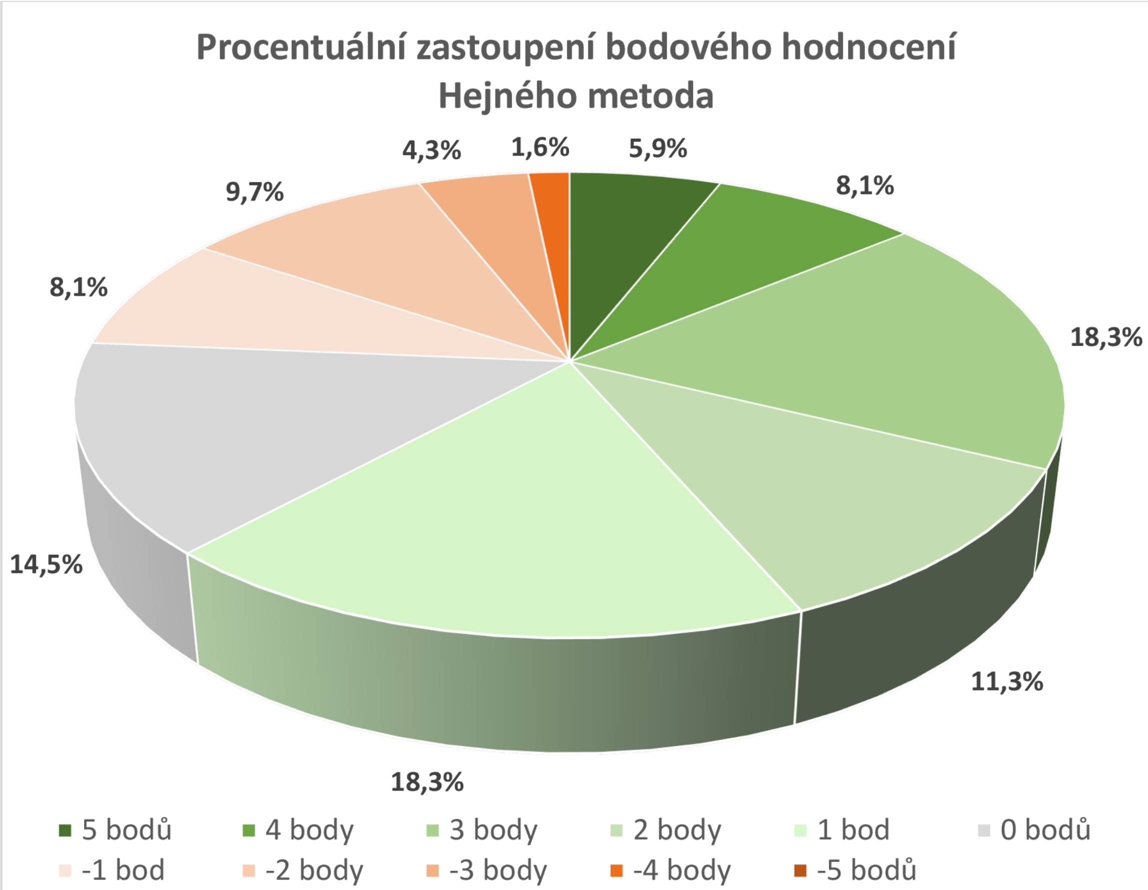
Dále pak také úloha 4. činila velké obtíže, pouze 10 žáků tuto úlohu dokázalo vyřešit správně. Špatně úlohu řešilo celkem 77 žáků a 105 žáků danou úlohu neřešilo vůbec.

Mnohem lépe se žákům dařilo při řešení úlohy 5. stejně jako předešlé skupině s Hejného metodou. Správně ji vyřešilo celkem 111 žáků a pouze 21 žáků ji řešilo chybně.

Také v této skupině byla úloha 2. poměrně problémová a s jejím řešením si nevědělo rady 117 žáků, 48 žáků ji pak řešilo chybně a ke správnému výsledku se dopracovalo pouze 27 žáků.

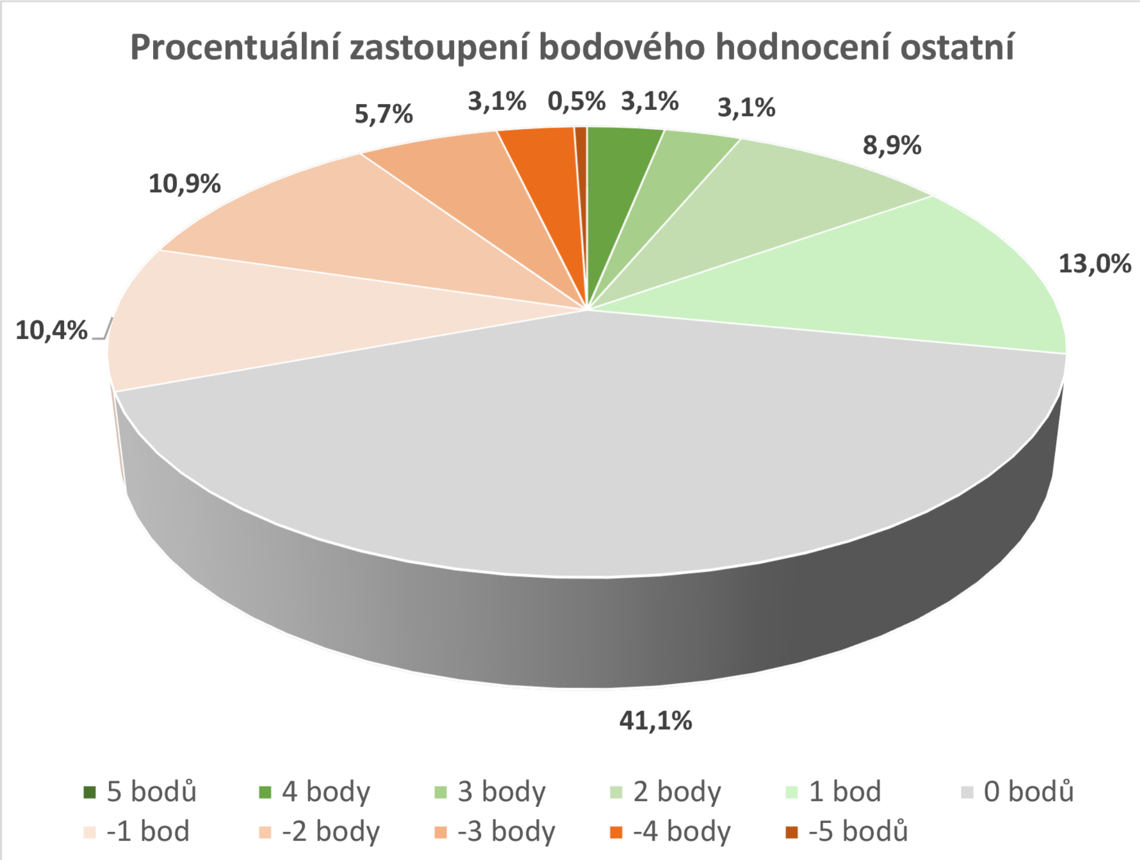
Úlohu 3. vyřešilo správně 70 žáků, což je méně než u skupiny s Hejného matematikou, avšak postup řešení se ve velké části shoduje s postupy, které využili žáci s Hejného matematikou. Chybně pak tuto úlohu řešilo 59 žáků.

Celkem 43 testů bylo odevzdáno bez snahy pokusit se jakoukoliv úlohu vyřešit.



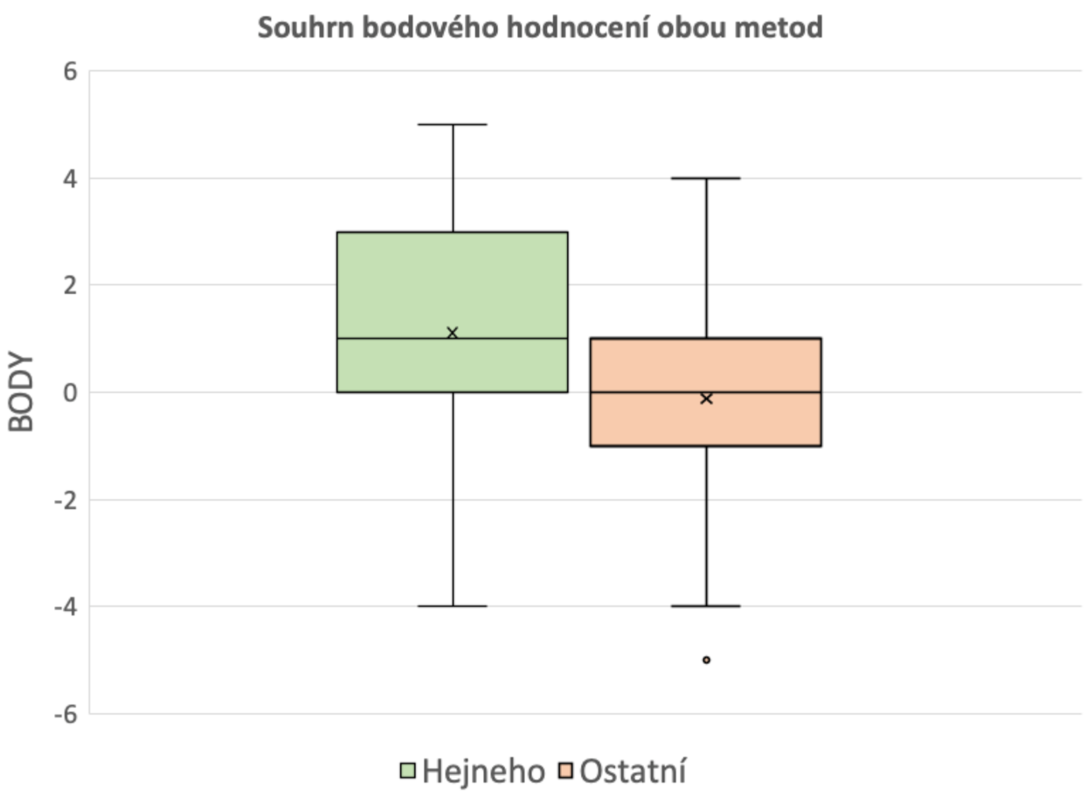
Graf 4. Procentuální zastoupení bodového hodnocení u žáků s výukou matematiky Hejného metodou

Z testu, který byl žákům předložen, bylo možné získat maximálně 5 bodů (1 bod za každou úlohu). Těchto 5 bodů získalo pouze 5,9 % žáků s výukou matematiky Hejného metodou. Nejvíce žáků získalo 3 body a 1 bod a to 18,3 %. Poměrně velké procento žáků získalo 0. U této skupiny se nesetkáme s testem, který by byl celý vyplněn chybně, tedy -5 bodů nezískal nikdo.



Graf 5. Procentuální zastoupení bodového hodnocení u žáků ostatních

U ostatní skupiny žáků můžeme pozorovat zcela odlišné hodnoty. V této skupině získalo 0 bodů celkem 41,1 % žáků, největšího bodového hodnocení 5 bodů naopak nezískal nikdo. Největšího bodové zisku 4 body získalo pouze 3,1 % žáků. Nejmenší bodový zisk -5 pak získal jeden žák.



Graf 6. Souhrn bodového hodnocení obou metod

Tabulka 3. Základní číselné charakteristiky bodového hodnocení

	Hejného metoda	**Ostatní**
Minimum	-4	-4
První kvartil	3	1
Medián	1	0
Aritmetický průměr	1,11	-0,12
Třetí kvartil	0	-1
Maximum	5	4

Krabicové grafy nám vizualizují základní číselné charakteristiky našeho souboru. Při posuzování obou skupin si můžeme povšimnout, že obě skupiny vykazují stejné minimum a -4 body, u skupiny ostatních žáků se nám vyskytuje také extrémní hodnota – 5 bodů, a to z důvodu, že se jeden z žáků pokusil vypočítat všech 5 úloh, avšak chybně. Velký rozdíl u obou skupin můžeme pozorovat u prvního kvartilu, kdy skupina s Hejného metodou dosahuje hodnot 3 bodů, a naopak skupina žáků ostatních dosahuje 1 bodu. Také aritmetický průměr obou skupin je značně odlišný, u Hejného metody je průměr 1,11 a naopak u skupiny ostatních žáků je aritmetický průměr záporný -0,12. Maxima žáci Hejného metody dosáhli v podobě 5 bodů, naopak u žáků ostatních skupiny bylo dosaženo maxima 4 bodů.

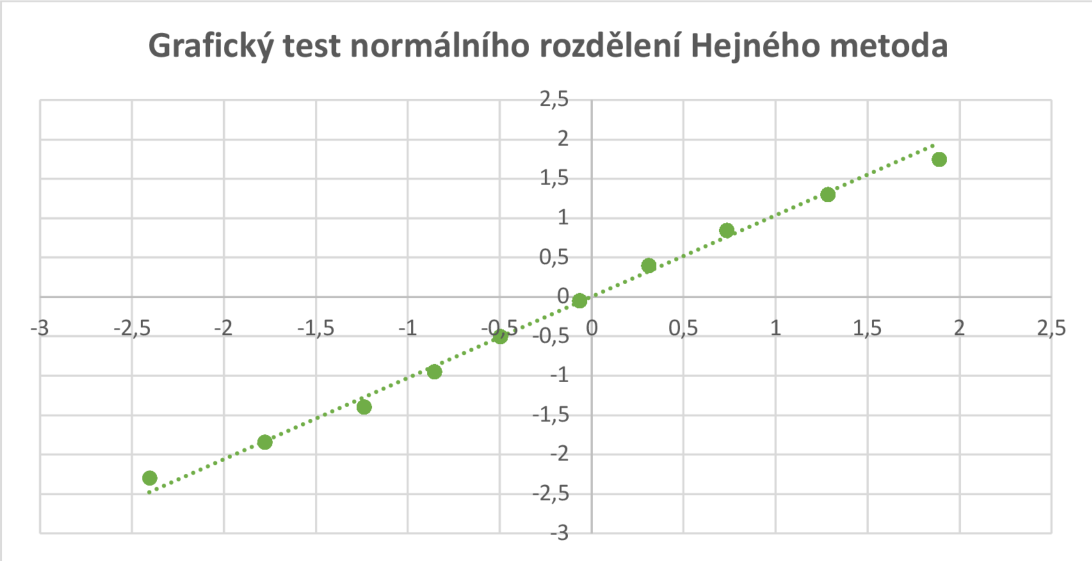
5.4.2 Verifikace vyrovnanosti úspěšnosti žáků skupin s Hejného metodou a ostatními metodami výuky v didaktickém testu

Z předchozí kapitoly je patrné, že žáci s výukou matematiky Hejného metodou dosahovali v průměru lepších výsledků než žáci s ostatními metodami výuky. Abychom rozhodli, zda se jedná jen o náhodné odchylky či obecnou vlastnost, byly výsledky didaktického testu podrobeny dalšímu zkoumání. Byly stanoveny následující **hypotézy:**

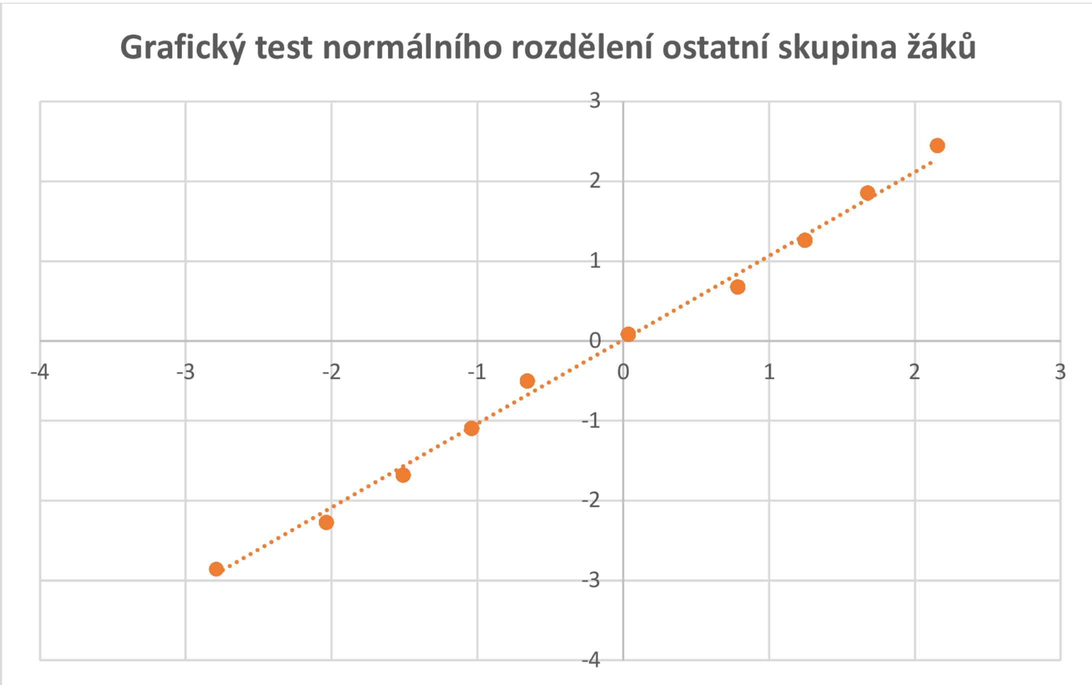
H_0: Mezi rozptyly bodového hodnocení žáků s Hejného metodou a žáků s ostatními metodami výuky není statisticky významný rozdíl ($s_1^2 = s_2^2$).

H_A: Mezi rozptyly bodového hodnocení žáků s Hejného metodou a žáků s ostatními metodami výuky je statisticky významný rozdíl ($s_1^2 \neq s_2^2$).

Aby bylo možné statisticky posoudit, zda jsou obě skupiny v testech vyrovnané či nikoliv, bylo nutno nejprve ověřit, zda náš soubor dat vykazuje normální rozdělení. K tomu jsme využili grafickou metodu ověření pomocí Q-Q plot.



Graf 7. Q-Q plot Hejného metoda



Graf 8. Q-Q plot ostatní skupina žáků

Jak můžeme pozorovat na grafu 7. a grafu 8., data našeho výběrového souboru (a to v obou případech, tedy jak u skupiny s Hejného metodou, tak u skupiny ostatních žáků) se neodchylují od regresivní přímky a můžeme s nimi tedy pracovat jako s daty pocházejícími z normálního rozdělení.

K posouzení datového souboru můžeme tedy využít parametrický dvouvýběrový test o shodnosti rozptylů dvou nezávislých výběrů. Tento test se označuje jako F-test neboli Fisherův-Snedecorův test. Zvolená hladina významnosti α byla 0,05.

Rozptyl skupiny žáků s Hejného metodou vychází ze vztahu:

$$s_1^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{\bar{x}})^2}{n_1 - 1}$$

Rozptyl skupiny žáků ostatních vychází ze vztahu:

$$s_2^2 = \frac{\sum(y_i - \bar{\bar{y}})^2}{n_2 - 1}$$

Vypočítanou hodnotu F srovnáváme s kritickou hodnotou tohoto kritéria pro zvolenou hladinu významnosti $\alpha = 0{,}05$ a počet stupňů volnosti 185 pro Hejného metodu ($f_1 = 186 - 1 = 185$) a 191 pro ostatní skupinu žáků ($f_2 = 192 - 1 = 191$). Jednotlivé hodnoty výpočtů jsou zobrazeny v následující tabulce.

Tabulka 4. Hodnoty klíčových veličin Fisher-Snedecorova testu

$\bar{x}$	1,11
$\bar{y}$	-0,12
n_1	186
n_2	192
s_1^2	4,96
s_2^2	2,95
F	**1,68**
$F_{0,05}(185, 191)$	**1,27**

Jak můžeme vidět hodnota testovacího kritéria překročila kritickou hodnotu a platí, že:

$$F > F_{0,05}(185, 191)$$

Nulovou hypotézu H_0 o shodě rozptylů bodového hodnocení žáků s Hejného metodou a žáků s ostatními metodami výuky **zamítáme** na hladině významnosti

α = *0,05* a **přijímáme** hypotézu alternativní H_A.

Mezi rozptyly je statisticky významný rozdíl, a tedy body žáků obou skupin nejsou vyrovnané. Obě skupiny žáků se statisticky významně liší v bodovém hodnocení a skupina žáků s Hejného metodou je úspěšnější.

5.4.3 Nejčastější chyby v jednotlivých úlohách

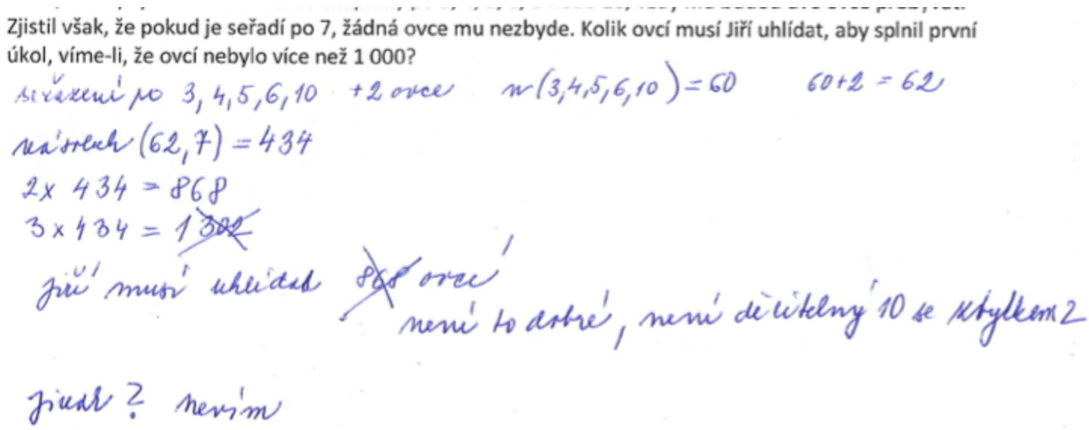
V této kapitole se budeme věnovat nejčastějším chybám v jednotlivých úlohách, kterých se žáci během testu dopouštěli. Uvedeme si také nejčastější správné postupy žáků.

5.4.3.1 Úloha 1.

<u>Zadání:</u>

Princ Jiří se rozhodl získat si srdce princezny Anny. Aby ji však mohl požádat o ruku, musí splnit tři nelehké úkoly. Jeho prvním úkolem bylo uhlídat stádo ovcí. Ráno si všechny ovce spočítal. Při pastvě ovcí přišel Jiří na to, že kdyby si ovce seřadil do skupinky po 3, 4, 5, 6, 8 nebo 10, vždy mu budou dvě ovce přebývat. Zjistil však, že pokud je seřadí po 7, žádná ovce mu nezbyde. Kolik ovcí musí Jiří uhlídat, aby splnil první úkol, víme-li, že ovcí nebylo více než 1 000?

Nejčastějších chyb se žáci u této úlohy dopouštěli hned na počátku řešení při stanovení nejmenšího společného násobku. Velmi často docházelo ke stanovení nejmenšího společného násobku na hodnotu 60, místo správné hodnoty 120. Po tomto kroku pak velmi často docházelo k vyřešení úlohy buď nesprávně, nebo úloha nebyla dokončena (viz. obr. 32).



Zjistil však, že pokud je seřadí po 7, žádná ovce mu nezbyde. Kolik ovcí musí Jiří uhlídat, aby splnil první úkol, víme-li, že ovcí nebylo více než 1 000?

seřazení po 3, 4, 5, 6, 10 +2 ovce   n(3,4,5,6,10) = 60   60+2 = 62

násobek (62,7) = 434

2x 434 = 868

3x 434 = 1 ~~302~~

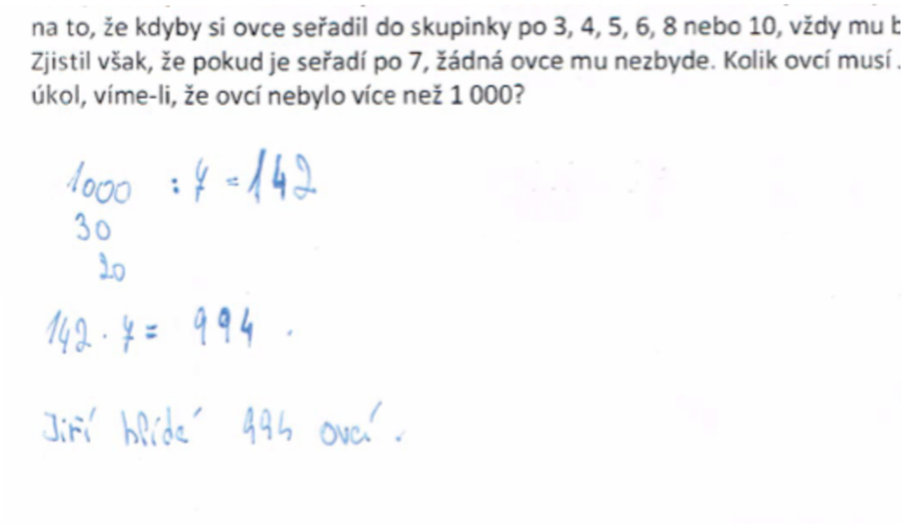
Jiří musí uhlídat ~~868~~ ovcí

není to dobré, není dělitelný 10 se zbytkem 2

jinak? nevím

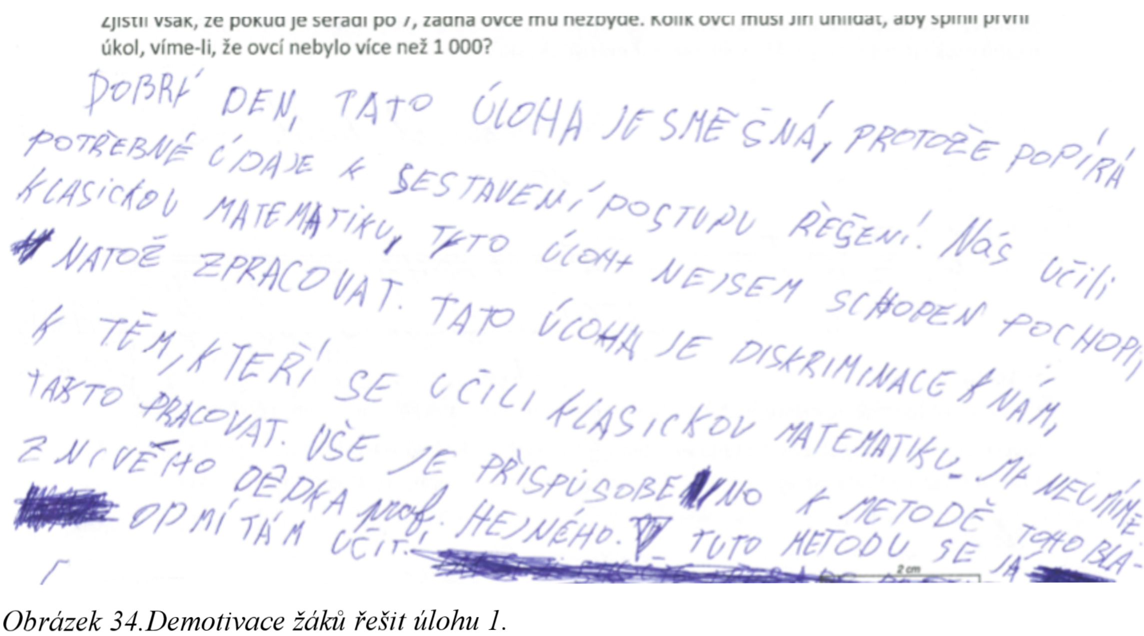
Obrázek 32. Úloha 1. – chybné řešení 1

Dalšího, velmi častého, chybného řešení se žáci dopouštěli tak, že hodnotu 1000 vydělili 7 a následně daný celý výsledek pouze vynásobili 7 (viz. obr. 33). Tento způsob řešení se nejčastěji vyskytuje u žáků s ostatními metodami výuky.



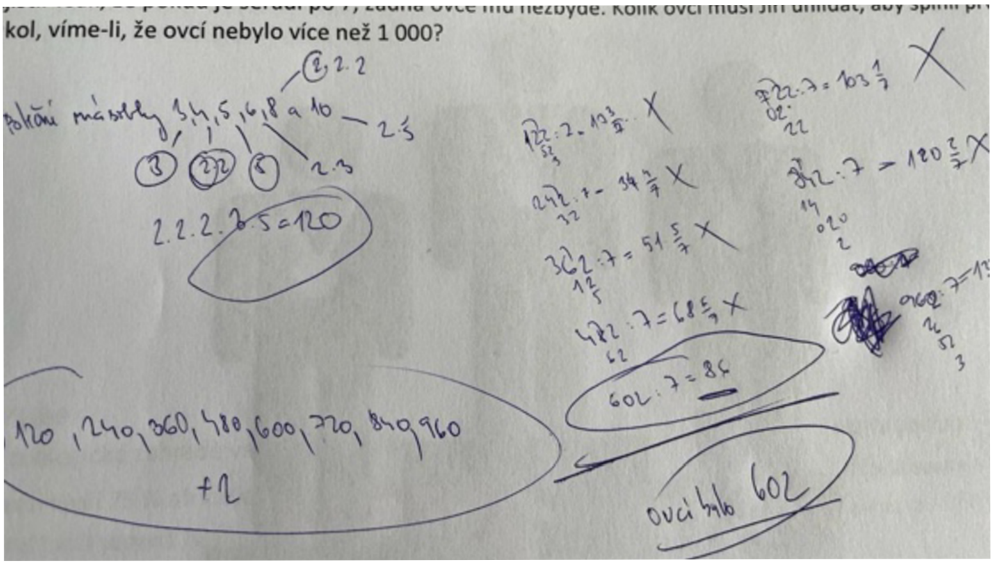
Obrázek 33. Úloha 1. – chybné řešení 2

Velmi často u této úlohy docházelo k nulovému pokusu, jakkoliv danou úlohu řešit, nebo se o to alespoň pokusit (obr. 34).



Obrázek 34.Demotivace žáků řešit úlohu 1.

Jak předešlé kapitoly upozorňují, tento typ úlohy činil žákům velké obtíže a správně jej vyřešilo 42 žáků s výukou matematiky Hejného metodou a pouze 3 žáci s ostatními metodami výuky.

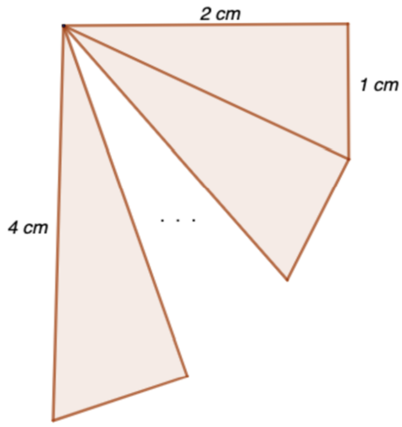


Obrázek 35. Úloha 1. – správné řešení

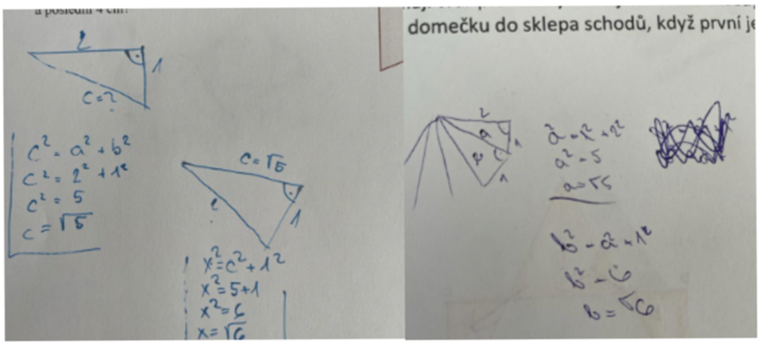
5.4.3.2 Úloha 2.

<u>Zadání:</u>

Z malého domečku myšky Hrabalky vedou točité schody, které se postupně rozšiřují do velkého sklepa plného zásob. Jednotlivé schody mají tvar pravoúhlých trojúhelníků a každý má hloubku 1 cm (kratší odvěsna). Kolik vede z domečku schodů, když první schod je široký 2 cm (delší odvěsna) a poslední schod má délku 4 cm (přepona)?

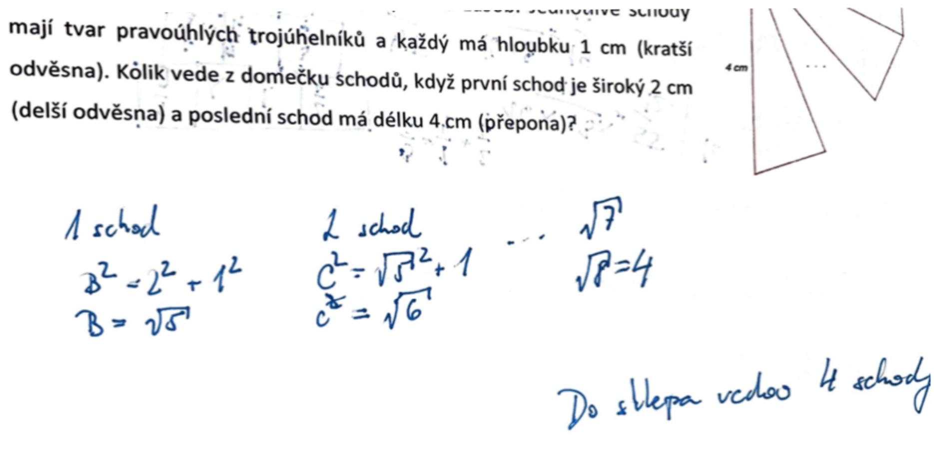


U druhé úlohy velmi často docházelo k tomu, že žáci úlohu začali počítat správně pomocí Pythagorovy věty, avšak ji nedokončili.



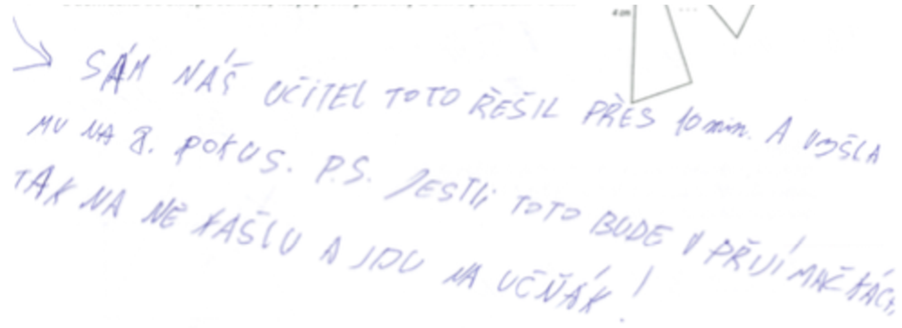
Obrázek 36. Úloha 2. - chybné řešení 1

Druhé nejčastější chyby se žáci dopouštěli špatně vyřešenou odmocninou: $\sqrt{8} = 4$. V tomto řešení pak vyřešili, že počet schodů vedoucích do sklepa jsou 4.



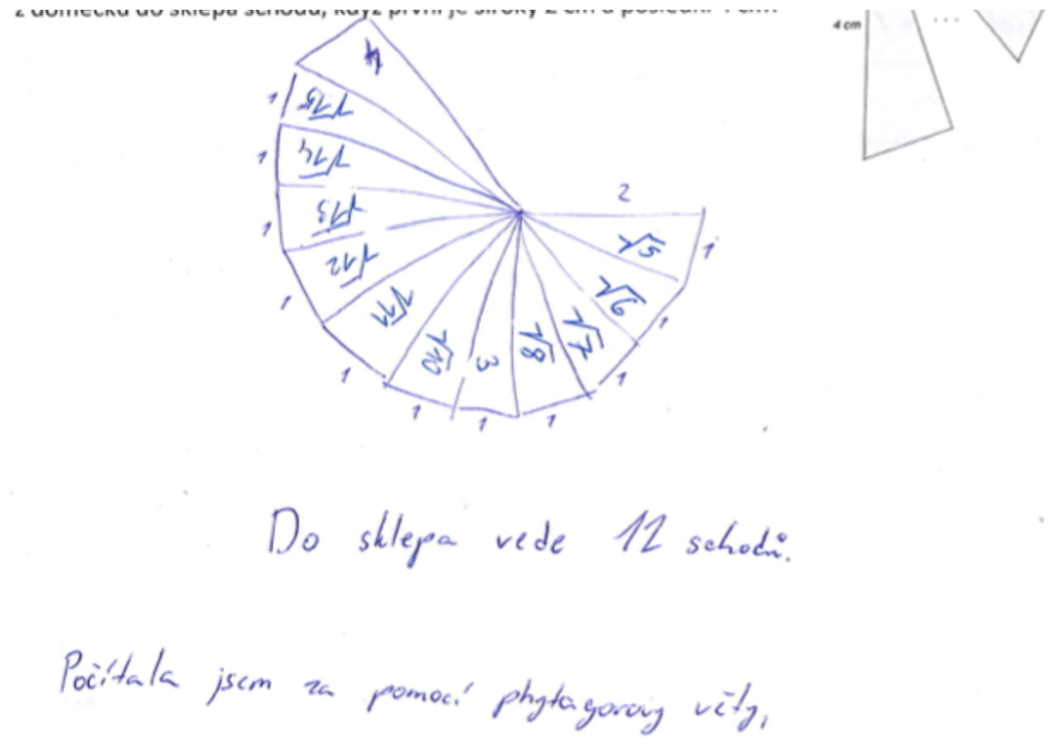
Obrázek 37. Úloha 2. - chybné řešení 2

U velké většiny žáků však docházelo k tomu, že tuto úlohu neřešili vůbec. Z celkového počtu 378 žáků ji zcela vynechalo 216 žáků. Neúspěch v řešení dané úlohy mohl být v důsledku nedostatečné znalosti daného učiva, nebo nepochopení zadání, či chybějící motivace dané úlohy, jakkoliv řešit.



Obrázek 38. Demotivace žáků řešit úlohu 2.

Správně vyřešit úlohu dokázalo 83 žáků z celkového počtu 378 a to vždy pomocí Pythagorovy věty.



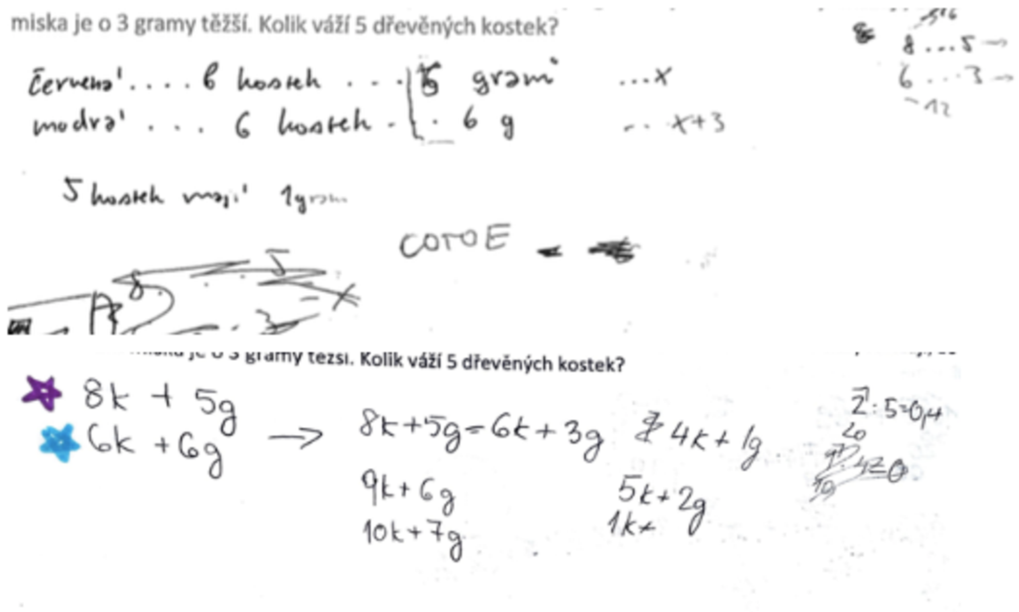
Obrázek 39. Úloha 2. - správné řešení

5.4.3.3 Úloha 3.

<u>Zadání:</u>

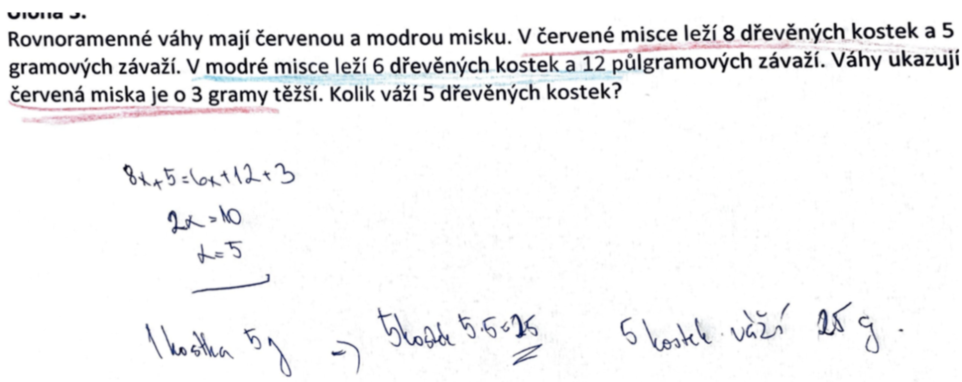
Rovnoramenné váhy mají červenou a modrou misku. V červené misce leží 8 dřevěných kostek a 5 gramových závaží. V modré misce leží 6 dřevěných kostek a 12 půlgramových závaží. Váhy ukazují, že červená miska je o 3 gramy těžší. Kolik váží 5 dřevěných kostek?

U této úlohy se chyby velmi často projevovaly špatným pochopením vztahů a docházelo tedy ke špatnému zapsání jednotlivých hodnot do rovnice. Bylo vidět, že některým žákům činí sestavení rovnice velký problém (obr. 40).



Obrázek 40. Úloha 3. - chybné řešení 1

Další častá chyba byla čistě numerická, v zadání se uvádí, že modrá miska má 12 půlgramových závaží, žáci s nimi však počítali jako se závažím gramovým (obr. 41).



Úloha 3.
Rovnoramenné váhy mají červenou a modrou misku. V červené misce leží 8 dřevěných kostek a 5 gramových závaží. V modré misce leží 6 dřevěných kostek a 12 půlgramových závaží. Váhy ukazují červená miska je o 3 gramy těžší. Kolik váží 5 dřevěných kostek?

$8x+5=6x+12+3$

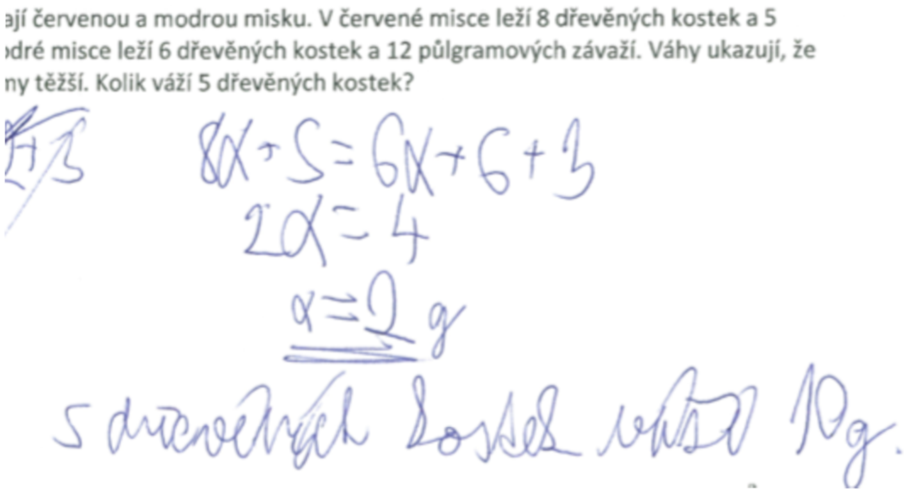
$2x=10$

$x=5$

1 kostka 5g → 5 kostek 5·5=25 5 kostek váží 25 g.

Obrázek 41. Úloha 3. - chybné řešení 2

Poměrně velká část žáků (193 celkem) však zvládla tuto úlohu vyřešit, a to pomocí správně sestavené rovnice.



ají červenou a modrou misku. V červené misce leží 8 dřevěných kostek a 5
odré misce leží 6 dřevěných kostek a 12 půlgramových závaží. Váhy ukazují, že
ny těžší. Kolik váží 5 dřevěných kostek?

$8x+5=6x+6+3$

$2x=4$

$x=2$ g

5 dřevěných kostek váží 10g.

Obrázek 42. Úloha 3. - správné řešení

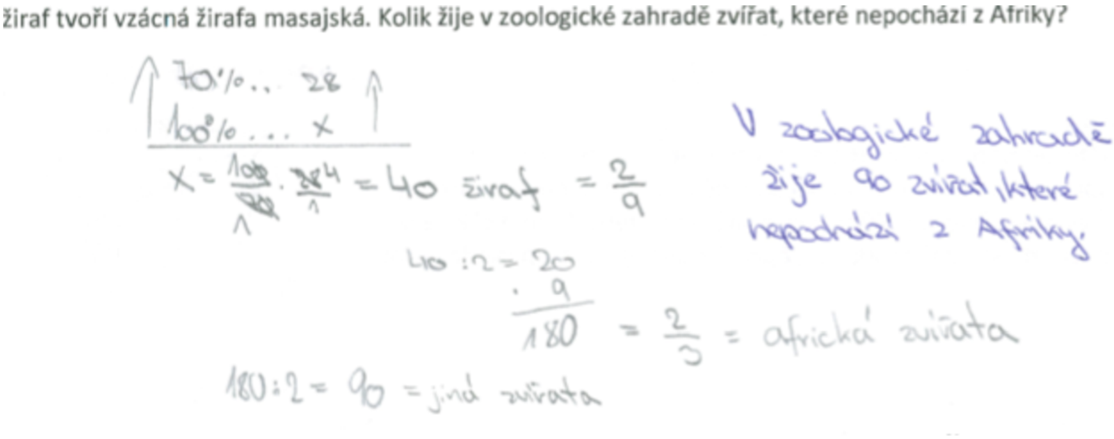
5.4.3.4 Úloha 4.

Zadání:

V zoologické zahradě ve městě Šňufákov žijí spokojená zvířata. Z afrického kontinentu pochází $\frac{2}{3}$ zvířat. Savci tvoří 75 % afrických zvířat. Stádo žiraf tvoří $\frac{2}{9}$ afrických savců, z nichž 30 % tvoří žirafa síťovaná a zbylých 28 žiraf tvoří vzácná žirafa masajská. Kolik žije v zoologické zahradě zvířat, které nepochází z Afriky?

Tento typ úlohy byl pro žáky poměrně problémový, nedokázali si dle zadání vyhodnotit jednotlivé vztahy a následně je dát do souvislostí. Žáci často použili operace ze zadání, ale neuvědomili si následně k jakým hodnotám patří. Chybně ji vyřešilo celkem 123 žáků.

Jedna z častých chyb byla při výpočtu savců, žáci správně vypočítali hodnotu 180 savců, ale následně tuto hodnotu označili, že odpovídá $\frac{2}{3}$ afrických zvířat (což je chybně). Tato chyba však následně ovlivnila jejich výsledek. Docházelo také k častým numerickým chybám, které měly vliv na výsledek správně vyřešené úlohy.


žiraf tvoří vzácná žirafa masajská. Kolik žije v zoologické zahradě zvířat, které nepochází z Afriky?

70 % ... 28
100 % ... x

$x = \frac{100}{70} \cdot 28 = 40$ žiraf $= \frac{2}{9}$

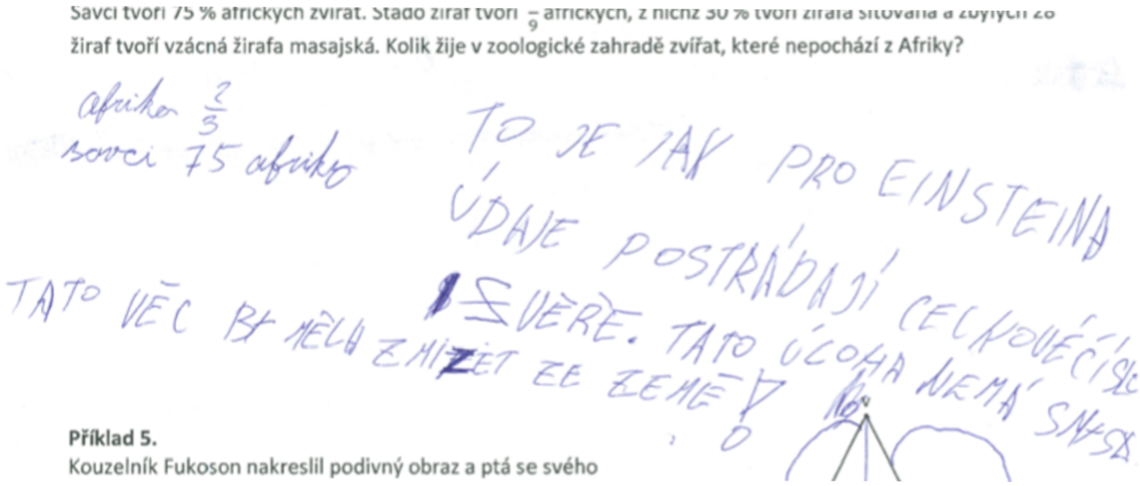
$40 : 2 = 20$
$\cdot 9$
$180 = \frac{2}{3}$ = africká zvířata

$180 : 2 = 90$ = jiná zvířata

V zoologické zahradě žije 90 zvířat, které nepochází z Afriky.

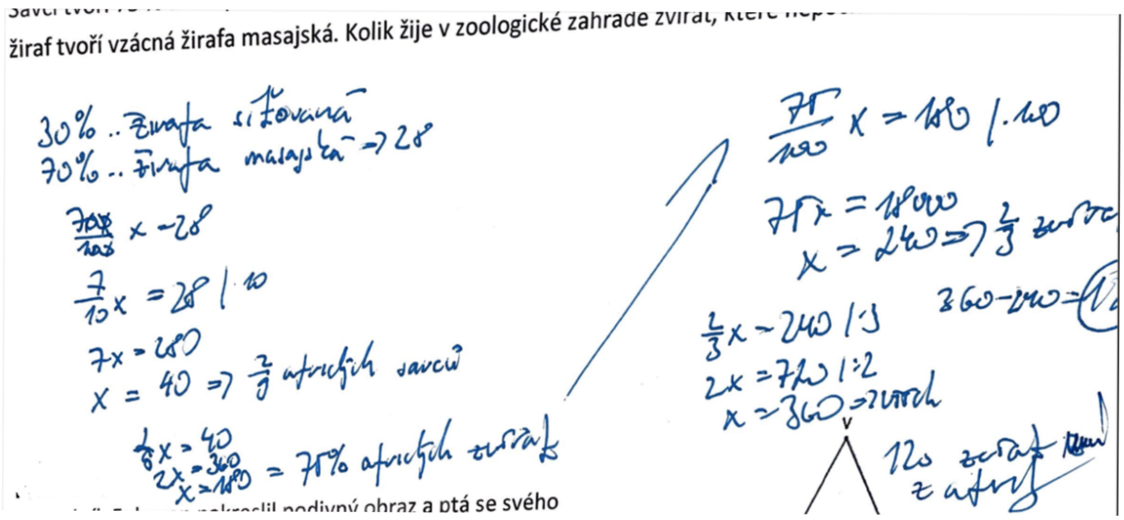
Obrázek 43. Úloha 4. - chybné řešení 1

Velký problém žákům dělalo samotné zadání a některé údaje zadány v procentech a jiné naopak ve zlomcích. Na základě zadání pak nedokázali sestavit hodnoty tak, aby byli schopni danou úlohu vyřešit a její další řešení tak vzdali. U této úlohy, stejně jako u první docházelo k častému vynechání bez snahy a motivace úlohu řešit. Někteří úlohu komentovali jako těžkou, složitou, či že zadání postrádá smysl.



Obrázek 44. Demotivace žáků řešit úlohu 3.

Správně tuto úlohu vyřešilo pouze 50 žáků. Velká většina ji pak řešila dopočítáváním na celek od posledního údaje (obr. 44).

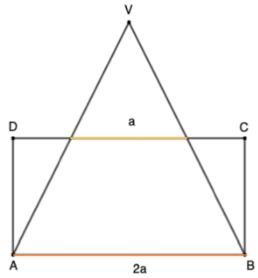


Obrázek 45. Úloha 4 - správné řešení

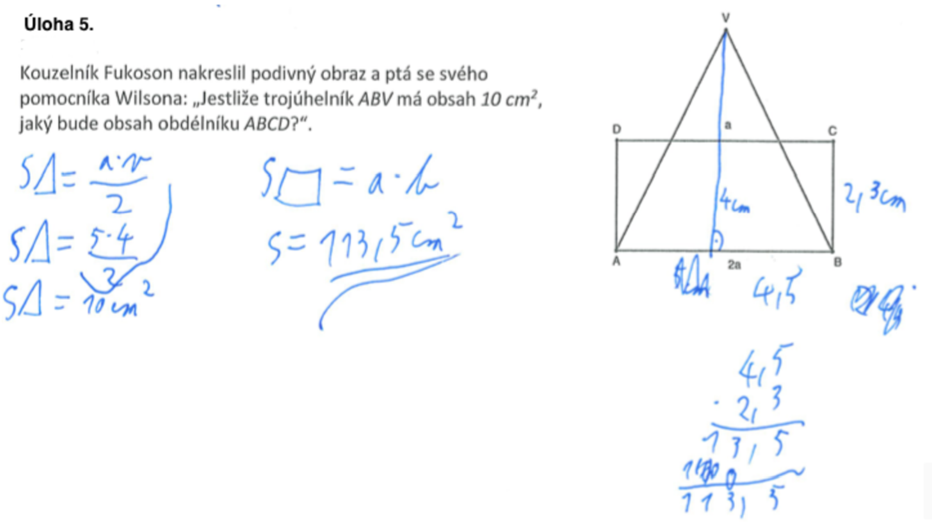
5.4.3.5 Úloha 5.

<u>Zadání:</u>

Kouzelník Fukoson nakreslil podivný obraz a ptá se svého pomocníka Wilsona: „Jestliže trojúhelník ABV má obsah 10 cm², jaký bude obsah obdélníku ABCD?“.

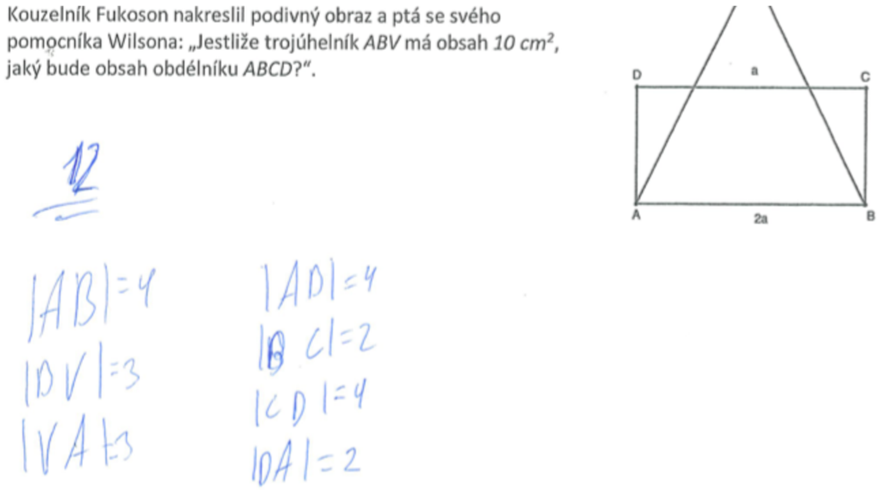


Pátou úlohu nevyřešilo správně pouze 39 žáků. Velmi často docházelo k řešení s použitím vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníku $S = \frac{a \cdot v}{2}$. Žáci ze zadání znali obsah trojúhelníku, avšak neznali žádný další údaj, jako stranu či výšku trojúhelníku. Mnoho z nich si určilo, že když je obsah trojúhelníku 10 cm², pak výška by mohla být 4 cm a strana 5 cm. Z takto chybně určených hodnot pak postupovali i u obsahu obdélníku a k chybné odpovědi (obr. 46). V podobné obměně se tato řešení objevovala u většiny testů s chybným řešením.



Obrázek 46. Úloha 5. - chybné řešení 1

K dalšímu chybnému řešení docházelo také určením velikosti jednotlivých stran jak trojúhelníku, tak obdélníku a následnému sečtení všech stran.

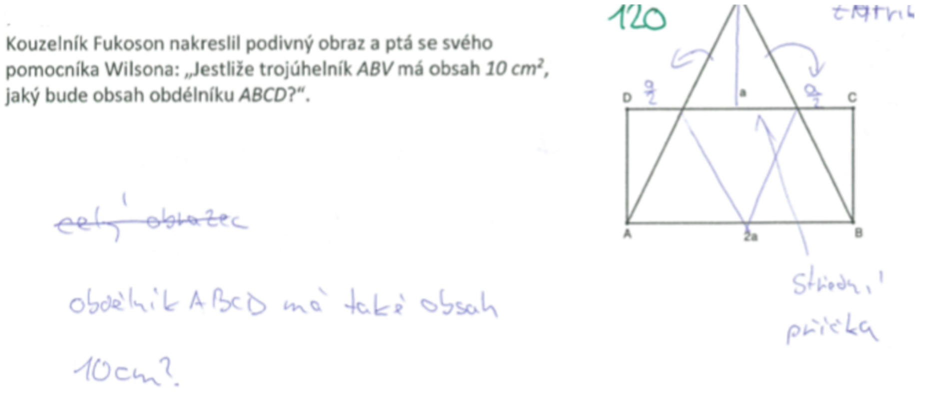


Obrázek 47. Úloha 5. - chybné řešení 2

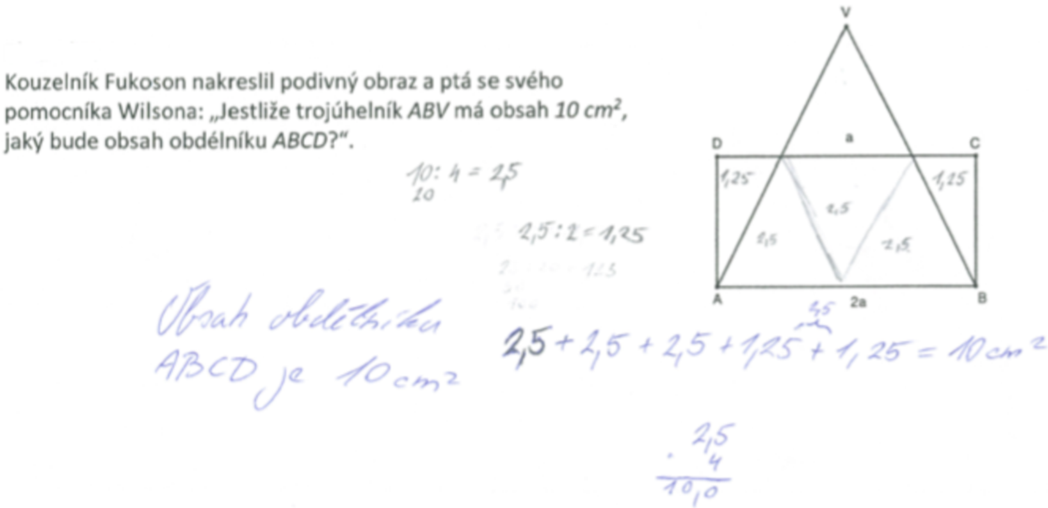
Úlohu nevyřešilo 89 žáků. Buď docházelo k odevzdání testu bez pokusu úlohu řešit, nebo žáci zanechali poznámku, že úloha je pro ně příliš těžká, složitá nebo neřešitelná.

Obrázek 48. Demotivace žáků řešit úlohu 5.

Správně dokázalo úlohu vyřešit 250 žáků z celkového počtu 378. Využili vlastnosti trojúhelníku a dokázali tak úlohu správně vyřešit.



Obrázek 49. Úloha 5. - správné řešení 1



Obrázek 50. Úloha 5. - správné řešení 2

ZÁVĚR

Tato diplomová práce se zaměřuje na problematiku matematických soutěží na 2. stupni základních škol a je rozdělena na teoretickou a praktickou část.

Teoretická část se věnuje matematickým soutěžím, zejména jejich významu a jaký mají vliv na motivaci žáků. Hlavní část je zaměřena na čtyři nejpopulárnější matematické soutěže, které se na základních školách těší velké oblibě. Mezi tyto soutěže řadíme Matematickou olympiádu, Matematického klokana, Pythagriádu a Pangeu. V práci jsou zmíněny také další matematické soutěže, které nemusí být vždy určeny pouze jednotlivcům, ale mohou se zaměřovat také na týmy, jako je tomu například u soutěže MaSo.

Praktická část se již věnuje řešení vybraných úloh ze čtyř výše zmíněných soutěží. Záměrně jsou vybrány různé typy úloh, aby bylo poukázáno na rozdílnost v řešení. Náhodný čtenář si tak může povšimnout, že úlohy z Matematické olympiády nejsou nikterak jednoduché a jejich řešení nemusí být na první pohled zřejmé. Naopak úlohy ze soutěže Pangea vycházejí přímo ze života a ukazují tak, jaká je propojenost matematiky s reálným životem. Součástí praktické části práce je také návrh vlastních soutěžních úloh, které mají soutěžní charakter a nejsou tedy pouze početní. Úlohy jsou zaměřeny na důležité oblasti učiva matematiky na základních školách (dělitelnost přirozených čísel, Pythagorova věta a její užití, lineární rovnice, procenta a zlomky, trojúhelník, střední příčka v trojúhelníku).

Poslední část praktické části se věnuje samotnému výzkumu a metodologii. Na základě navržených úloh byl vytvořen didaktický test „POJĎ SI ZASOUTĚŽIT“, který byl během února a března roku 2023 předložen žákům 9. tříd na vybraných základních školách po celé České republice. Úlohy byly předloženy žákům s výukou matematiky Hejného metodou a žákům ostatním. Záměrně byl žákům předkládán test s navrženými soutěžními úlohami (nikoliv úlohy ze soutěží z předešlých ročníků), aby nemohlo dojít ke zvýhodnění některých žáků, kteří v minulosti soutěžili a úlohy by tak znali.

Podkapitola 5.4 *Výsledky výzkumu a jejich hodnocení* se zaměřuje v první řadě na úspěšnost žáků při řešení jednotlivých úloh u obou skupin. Z výsledků vyplývá, že žákům s výukou Hejného metody činila největší potíže úloha 4. a úloha 1. Naopak nejvíce žáků řešilo správně úlohu 5. Druhá skupina žáků měla největší problém s úlohou 1., kterou správně vyřešili pouze 3 žáci z celkového počtu 192. Koláčový graf pak poukazuje na procentuální zastoupení bodového hodnocení jak u žáků s výukou Hejného metody, tak u žáků ostatních. Velmi zajímavý je výsledek jednoho žáka, který ačkoliv se snažil vyřešit všech 5 úloh, žádnou nevyřešil správně a dosáhl tedy celkového počtu bodů – 5. Vzhlede k tomu, že žáci s výukou matematiky Hejného metodou dosahovali v průměru lepších výsledků, rozhodla jsem se jejich výsledky podrobit dalšímu zkoumání a ověřit si tak, že se nejedná pouze o náhodné odchylky. K posouzení datového souboru byl využit Fisher-Snedecorův test o shodnosti rozptylů dvou nezávislých výběrů. Bylo zjištěno, že mezi rozptyly je statisticky významný rozdíl, a tedy body žáků obou skupin nejsou vyrovnané. Obě skupiny žáků se statisticky významně liší v bodovém hodnocení a skupina žáků s Hejného metodou je úspěšnější.

Poslední podkapitola je zaměřena na nejčastější chyby, kterých se žáci obou skupin nejčastěji dopustili. Tato podkapitola je také doplněna ukázkami žákovských řešení. Poměrně velký problém činila úloha 2., což pro mě bylo velkým překvapením. Úloha byla podrobně popsána, doplněna obrázkem, přesto velký počet žáků úlohu neřešilo vůbec. U této úlohy velmi často také docházelo k tomu, že žáci úlohu začali řešit správně, ale po druhém i třetím výpočtu řešení vzdali. Poměrně velká skupina žáků (zejména skupina žáků ostatních) neměla chuť a motivaci řešit jakýkoliv příklad, velmi často odevzdávali pouze prázdné papíry, zanechávali různé texty a kresby.

Závěrem lze konstatovat, že matematické soutěže představují důležitý prostředek pro rozvoj matematických dovedností, podporují rozvoj logického myšlení a v neposlední řadě jsou zdrojem motivace, který podporuje zájem o matematiku samotnou. Můžeme tedy říci, že matematické soutěže přinášejí mnoho výhod a jsou bezesporu cenným nástrojem pro podporu matematického vzdělávání a rozvoje žáků všech stupňů. Myslím si, že téma diplomové práce je velmi zajímavé a na práci by se dalo v mnoha směrech dále navázat.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

AKVELD, Melke; DOLINAR, Gregor. *A story of „Kangaroo of Mathematics"* [online]. Français, 2023. Dostupné z: http://www.aksf.org/history.xhtml.

BACHRATÝ, Hynek; HEJNÝ, Milan. *Archív Víta Hejného 1*. Žilina: Edis, 2012. ISBN 9788055406145.

BERINDE, Vasil; PÂLTÂNEA, Eugen. *Gazeta Mathematică: A Bridge Over Three Centuries*. Romanian: Mathematical Society, 2004. ISBN 9788930035490.

BLAŽKOVÁ, Růžena; MATOUŠKOVÁ, Květoslava; VAŇUROVÁ, Milena. *Poruchy učení v matematice a možnosti jejich nápravy*. Brno: Paido, 2007. ISBN 80-85931-89-3.

BRANT, Jiří. *Experimentální ověřování pojetí matematické soutěže Pythagoriáda*. Praha: Výzkumný ústav pedagogický, 1984.

CALÁBEK, Pavel; HÁTLE, Jiří; MOLNÁR, Juraj; ZATLOUKALOVÁ, Silvie. *Matematický klokan 2021* [online]. Olomouc: Univerzita Palackého, 2021 [cit. 2023-01-07]. ISBN 978-244-6038-3. Dostupné z: https://matematickyklokan.net/phocadownload/sborniky/sbornik_klokan_2021.pdf.

CALÁBEK, Pavel; ŠVRČEK, Jaroslav; VANĚK, Vladimír; ZHOUF, Jaroslav. *Péče o matematické talent*y. Olomouc: Univerzita Palackého, 2010. ISBN 978-80-244-2632-7.

DECHARMS, Christopher. *Enhancing Motivation: Change in the Classroomby.* San Francisco: The School Review, 1977. Bez ISBN.

DICHEVA, Darina; DICHEV, Christo; AGRE, Gennady; ANGELOVA, Galla. *Gamification in education: A systematic mapping study* [online]. USA, 2015 [cit. 2023-04-04]. Dostupné z:

https://www.researchgate.net/publication/270273830_Gamification_in_Education_A_Systematic_Mapping_Study.

DUPLINSKÝ, Josef; BRYCHTOVÁ, Šárka. *Psychologie*. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2004. ISBN 80-7194-673-7.

GRECMANOVÁ, Helena; URBANOVSKÁ, Eva; NOVOTNÝ, Petr. *Podporujeme aktivní myšlení a samostatné učení žáků*. Olomouc: Hanex, 2000. ISBN 80-85783-28-2.

HEJNÝ, Milan. *Úlohy pro rozvoj matematické gramotnosti*. Praha: Česká školní inspekce, 2012. ISBN 978-80-905370-0-2.

HEJNÝ, Milan; KUŘINA, František. *Dítě, škola a matematika*. Praha: Portál, 2015. ISBN 978-80-262-09901-0.

H-mat. *Přijímačky ukázaly, že „Hejného děti" se srovnání bát nemusí* [online]. Praha, 2017. [cit. 2022-11-2]. Dostupné z: https://www.h-mat.cz/media/2017/jednotne-prijimaci-zkousky.

H-mat/a. *Co je to „Hejného metoda"?* [online]. Praha, 2022. [cit. 2022-11-2]. Dostupné z: https://www.h-mat.cz/hejneho-metoda.

H-mat/b. *12 klíčových principů* [online]. Praha, 2022. [cit. 2022-11-2]. Dostupné z: https://www.h-mat.cz/principy.

HRABAL, Vladimír; PAVELKOVÁ, Isabella. *Jaký jsem učitel*. Praha: Portál, 2010. ISBN 978-80-247-5326-3.

CHRÁSKA, Miroslova. *Metody pedagogického výzkumu*. Praha: Grada Publishing a.s., 2016. ISBN 978-80-2471-369-4.

IMO - 63. *Mezinárodní matematická olympiáda* [online]. Brno: Masarykova univerzita, 2022 [cit. 2023-01-4]. Dostupné z: https://www.matematickaolympiada.cz/aktuality/63-mezinarodni-matematicka-olympiada

KALHOUS, Zdeněk. *Školní didaktika*. Praha: Portál, 2002. ISBN 80-7178-253-X.

KAPP, Karl M. *The Gamification of learning and instruction: Gamebased methods and Strategies for training and education.* New Jersey: John Wiley & Sons, 2012. ISBN 978-1-1-118-09634-5.

KOPECKÝ, Jaromír. *Škola hrou, nebo hraní si ve škole? Jaromír Kopecký o Komenského spisu Škola hrou* [online]. ASČ, 2023. [cit. 2023-04-04]. Dostupné z: https://www.ascestinaru.cz/skola-hrou-nebo-hrani-si-ve-skole-jaromir-kopecky-o-komenskeho-spisu-skola-hrou/#comments.

KOVÁŘ, Marek. *Matematická soutěž Pange*. *Rozhledy matematicko-fyzikální* [online]. Praha, 2019, vol. 94, No.4, 41-45 [cit. 2023-01-20]. Dostupné z: https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/148015/Rozhledy_094-2019-4_5.pdf.

KREJČOVÁ, Eva; VOLFOVÁ, Marta. *Inspiromat matematických her: soubor matematických her pro 1. stupeň základních škol: [Příručka pro učitele]*. Praha: Pansofia, 1995. ISBN 80-8580-475-1.

KREJČOVÁ, Eva; VOSYKOVÁ, Barbora. *Soutěže a soutěžení v hodinách matematiky z pohledu žáků a pedagogů.* Časopis Pedagogika – pro vědy o vzdělávání a výchově. Praha: 1/2011. ISSN 0031-3815.

KURILENKO, Viktoria; BIRYUKOVA, Yulia; AKHNINA, Kristina. *Gamification as successful foreign languafes e-learning for specific purposes* [online]. University of Silesia, 2020, [cit. 2023-04-04]. Dostupné z: https://us.edu.pl/wydzial/wsne/wp-content/uploads/sites/20/Nieprzypisane/el-2020-12-09.pdf.

LOKŠOVÁ, Irena; LOKŠA, Jozef. *Pozornost, motivace, relaxace a tvořivost dětí ve škole*. Praha: Portál, 1999. ISBN 80-7178-205-X.

LOGICKÁ OLYMPIÁDA. *Pravidla soutěže* [online]. Praha, 2022 [cit. 2022-12-01]. Dostupné z: https://www.logickaolympiada.cz/userfiles/pravidla/2022/Logická%20olympiáda%202022%20pravidla(1).pdf.

MÁLKOVÁ, Pavlína. *Příručka pro rodiče žáků s výukou matematiky podle metody prof. Milana Hejného* [online]. Ždírec nad Doubravou, 2014 [cit. 2022-11-12]. Dostupné z: https://www.h-mat.cz/sites/default/files/kestazeni/H-mat_Prirucka_pro_rodice.pdf.

MAŇÁK, Josef. *Nárys didaktiky*. Brno: Paido, 1995. ISBN 80-210-1124-6.

MAŇÁK, Josef. *Stručný nástin metodiky tvořivé práce ve škole*. Brno: Paido, 2001. ISBN 8073150026.

MAŇÁK, Josef; ŠVEC Vlastimil. *Výukové metody*. Brno: Paido, 2003. ISBN 80-7315-039-5.

MAREŠ, Jiří. *Styly učení žáků a studentů*. Praha: Portál, 1998. ISBN 80-7178-246-7.

MaSo. *MaSo: Týmová matematická soutěž pro žáky šestých až devátých tříd* [online]. Praha, 2022 [cit. 2022-12-02]. Dostupné z: https://maso.mff.cuni.cz.

MATEMATICKÝ KLOKAN. *Informace o soutěži* [online]. Olomouc, 2023 [cit. 2023-01-05]. Dostupné z: https://matematickyklokan.net/index.php/o-soutezi.

MERKOUTOVÁ, Markéta. *Matematické hry a soutěže*. Diplomová práce pro Pedagogickou fakultu Technické univerzity v Liberci. Liberec, 2002. Bez ISBN.

MO 2023. *Co je matematická olympiáda* [online]. Brno: Masarykova univerzita, 2023 [cit. 2023-01-4]. Dostupné z: https://www.matematickaolympiada.cz/co-je-mo.

MORAVČÍK, Jozef. *Třicátý ročník matematické olympiády: školní rok 1980-81: 22. mezinárodní matematická olympiáda*. Praha: SPN, 1983.

NOVOTNÁ, Jiřina. *Motivace nadaných žáků a studentů v matematice a přírodních vědách.* Brno: Masarykova univerzita, 2012. ISSBN 978-80-210-6144-6.

PANGEA. *Pravidla matematické soutěže* [online]. Praha, 2023 [cit. 2023-20]. Dostupné z: https://www.pangeasoutez.cz/files/public/rules.pdf.

PAVELKOVÁ, Isabella. *Motivace žáků k učení*. Praha: Karolinum 2002. ISBN 80-7290-092-7.

PETTY, Geoff. *Teaching Today: A Practical Guide: Fifth Edition*. London: Nelson Thomes, 2014. ISBN 978-14-0852-314-8.

PIKOMAT. *Matematika v každém kousku* [online]. Praha, 2022 [cit. 2022 – 12 – 02]. Dostupné z: https://pikomat.mff.cuni.cz.

PLATONOVA, Olga. *History of Mathematical Olympiads. World of transport and transportation* [online]. Russia, Moscow, 2020, vol. 18, Iss. 5, 172-189 [cit. 2022-12-12]. Dostupné z: https://mirtr.elpub.ru/jour/article/view/2022.

POLÁK, Josef. *Rozvoj logického myšlení žáků ve výuce matematiky. Učitel matematiky* [online]. Praha 2019, vol 27 (2019), No. 2, 96 – 110 [cit. 2022-10-10]. Dostupné z: https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/148603/UcitelMat_027-2019-2_4.pdf

PraSe. *Matematický korespondenční seminář* [online]. Praha, 2022 [cit. 2022-12-02]. Dostupné z: https://prase.cz/info/info.php.

PRŮCHA, Jan; WALTEROVÁ, Eliška; MAREŠ, Jiří. *Pedagogický slovník*. 7. aktualiz. a rozš. vyd. Praha: Portál, 2013. ISBN 978-80-2620-403-9.

PŘÍRODOVĚDNÝ KLOKAN. *Informace k soutěži Přírodovědný klokan* [online]. Olomouc, 2023 [cit. 2023-01-4]. Dostupné z: https://kag.upol.cz/prirodovednyklokan/info_pravidla.pdf.

PYTHAGORIÁDA. *Pravidla soutěže* [online]. Brno, 2023 [cit. 2023-01-18]. Dostupné z: https://www.pythagoriada.cz/organizacni-rad/.

RHEINBERG, Falko; VOLLMEYER Regina. *Motivation*. Stuttgart: W. Kohlhammer GmbH, 2019. ISBN 978-3-17-032954-6.

SEDLÁŘ, Richard. *Soutěžení ve škole*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1957. ISBN 74-3-11.

SKALKOVÁ, Jarmila. *Obecná didaktika*. Praha: ISV, 1999. ISBN 80-85866-33-1.

STEHLÍKOVÁ, Naďa; CACHOVÁ, Jana. *Konstruktivistické přístupy k vyučování a praxe*. Praha: JČMF, 2006. Bez ISBN.

STUDIE ÚVRV – *Hejného metoda výuky matematiky v mezinárodním výzkumu TIMSS – závěrečná zpráva březen 2022* [online]. Praha: ÚVRV, 2022 [cit. 2022-10-20]. Dostupné z: https://www.nadacecs.cz/data/documents/de/ncs-pf-timss-a4-digital.pdf.

ŠEDIVÝ, Ondřej. *„Ako" a „prečo" vo vyučování matematiky. In: Konštruktivizmuz vo vyučovaní matematiky a budovanie geometrických predstáv*. Nitra: UKF, 2010. ISBN 978-80-8094-723-1.

ŠIMONÍK, Oldřich. *Úvod do didaktiky základní školy*. Brno: MSD, 2005. ISBN 80-86633-33-0.

VÁGNEROVÁ, Marie. *Úvod do psychologie*. Praha: Karolinum, 2002. ISBN 80-246-0015-3.

VYŠÍN, Jan; ZELINKA, Rudolf. *První ročník matematické olympiády*. 1. vyd. Praha: SPN, 1952.

WANG, Yunsi; STEEL, Tyler; ZHANG, Eva. *QQ Plot* [online]. USA, 2016 [cit. 2022-05-12]. Dostupné z: https://math.illinois.edu/system/files/inline-files/Proj9AY1516-report2.pdf.

ZELINKA, Rudolf. *Druhý ročník matematické olympiády*. Praha: SPN, 1954.

ZORMANOVÁ, Lucie. *Výukové metody v pedagogice*. Praha: Graba Publishing, 2012. ISBN 978-80-247-4100-0.

SEZNAM OBRÁZKŮ

SEZNAM TABULEK

SEZNAM GRAFŮ

PŘÍLOHA

Test „POJĎ SI ZASOUTĚŽIT“

POJĎ SI ZASOUTĚŽIT

⇒40 minut

⇒5 úloh

⇒Vše piš do pracovního listu

⇒Žádné pomůcky (tabulky, kalkulačka)

⇒Vše je anonymní

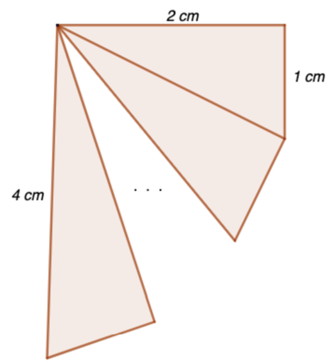
⇒Nepodváděj, není to na známky!

Úloha 1.

Princ Jiří se rozhodl získat si srdce princezny Anny. Aby ji však mohl požádat o ruku, musí splnit tři nelehké úkoly. Jeho prvním úkolem bylo uhlídat stádo ovcí. Ráno si všechny ovce spočítal. Při pastvě ovcí přišel Jiří na to, že kdyby si ovce seřadil do skupinky po 3, 4, 5, 6, 8 nebo 10, vždy mu budou dvě ovce přebývat. Zjistil však, že pokud je seřadí po 7, žádná ovce mu nezbyde. Kolik ovcí musí Jiří uhlídat, aby splnil první úkol, víme-li, že ovcí nebylo více než 1 000?

Úloha 2.

Z malého domečku myšky Hrabalky vedou točité schody, které se postupně rozšiřují do velkého sklepa plného zásob. Jednotlivé schody mají tvar pravoúhlých trojúhelníků a každý má hloubku 1 cm (kratší odvěsna). Kolik vede z domečku schodů, když první schod je široký 2 cm (delší odvěsna) a poslední schod má délku 4 cm (přepona)?



Úloha 3.

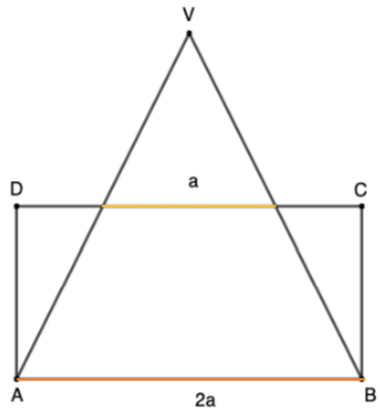
Rovnoramenné váhy mají červenou a modrou misku. V červené misce leží 8 dřevěných kostek a 5 gramových závaží. V modré misce leží 6 dřevěných kostek a 12 půlgramových závaží. Váhy ukazují, že červená miska je o 3 gramy těžší. Kolik váží 5 dřevěných kostek?

Úloha 4.

V zoologické zahradě ve městě Šňufákov žijí spokojená zvířata. Z afrického kontinentu pochází $\frac{2}{3}$ zvířat. Savci tvoří 75 % afrických zvířat. Stádo žiraf tvoří $\frac{2}{9}$ afrických savců, z nichž 30 % tvoří žirafa síťovaná a zbylých 28 žiraf tvoří vzácná žirafa masajská. Kolik žije v zoologické zahradě zvířat, které nepochází z Afriky?

Úloha 5.

Kouzelník Fukoson nakreslil podivný obraz a ptá se svého pomocníka Wilsona: „Jestliže trojúhelník *ABV* má obsah *10 cm*^{2}, jaký bude obsah obdélníku *ABCD*?“.



ANOTACE

Jméno a příjmení:	Bc. Ing. Soňa Kořínková
Katedra:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	Mgr. David Nocar, Ph.D.
Rok obhajoby:	2023

Název práce:	Matematické soutěže v České republice
Název v angličtině:	Mathematical competitions in the Czech republic
Anotace práce:	Diplomová práce se zabývá matematickými soutěžemi organizovanými v České republice pro žáky 2. stupně základních škol. Teoretická část se věnuje populárním soutěžím, jejich historií, charakteristikou a organizací. Vymezuje také rozdíl mezi transmisivním a konstruktivistickým pojetím výuky matematiky. Praktická část práce je rozdělena na tři části. První část je věnována řešení vybraných úloh z jednotlivých soutěží. Druhá část se věnuje návrhu vlastních soutěžních úloh. Ve třetí části jsou předchozí úlohy sestaveny do testu, který byl během února a března 2023 předkládán žákům 9. ročníků základních škol, na kterých je matematika vyučována Hejného metodou a žákům 9. ročníků ostatních základních škol. Cílem práce je nejen vytvořit ucelený soupis populárních matematických soutěží, ale také zjistit, která skupina žáků je při řešení zadaných úloh úspěšnější.

Klíčová slova:	Matematické soutěže, Matematická olympiáda, Matematický klokan, Pythagoriáda, Pangea, Hejného metoda, motivace, konstruktivismus.
Anotation:	The diploma thesis stems from mathematical competitions for middle school students organized in the Czech Republic. The thesis is divided into theoretical and practical part. The theoretical part describes popular competitions, their history, characteristics, organization and it also defines the difference between the transmissive and constructivist conceptions of teaching mathematics. The practical part of the thesis is divided into three sections. The first part is based on solving selected mathematical problems from individual competitions. The second part is focused on designing of the custom math exercises, which were subsequently solved by 9th grade primary school students. The test was taken in February and March 2023 by students who were and were not taught by Hejný's method and the influence of the educational approach on the results has been studied within this work. The aim of the thesis is not only to create a comprehensive inventory of popular mathematical competitions, but also to find out which group of students is more successful in solving the given problems.
Keywords:	Mathematical competitions, Mathematical Olympiad, Mathematical Kangaroo,

	Pythagoriad, Pangea, Hejny's method, motivation, constructivism.
Přílohy vázané v práci:	Test „Pojď si zasoutěžit“
Rozsah práce:	161 stran + 4 strany přílohy
Jazyk práce:	Český jazyk