



Pedagogická
fakulta
Faculty
of Education

Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Technické křivky v geometrii

Vypracoval: Bc. Lukáš Marhoun
Vedoucí práce: Mgr. Roman Hašek, Ph.D.

České Budějovice 2013

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Technické křivky v geometrii jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejich internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích

Poděkování

Děkuji tímto panu Mgr. Romanu Haškovi, Ph.D. za odborné vedení práce, cenné připomínky a ochotné konzultace, které mi věnoval.

Anotace

Práce se zabývá některými kinematickými křivkami, jejich stručnou historií, matematickým popisem a uvádí příklady z jejich využití v technice. Obsahuje přehled základních pojmů a definic z deskriptivní a analytické geometrie převzatých z literatury nutných k vysvětlení problematiky a lepšímu doplnění práce na samostatnou publikaci. Práce se nezabývá diferenciální geometrií.

The bachelor's thesis deals with some kinematic curves, their brief history, the mathematical description and examples of their use in technology. It contains an overview of basic concepts and definitions of descriptive and analytic geometry from the literature to better explain the issues and to better complete the thesis to become a separate publication. The work does not deal with differential geometry.

Obsah

1	Úvod	5
2	Geometrie křivek	6
2.1	Soustavy souřadnic	6
2.2	Křivky v kinematické geometrii	11
2.3	Matematický zápis křivek	21
3	Křivky v technice	23
3.1	Cyklické křivky	23
3.1.1	Cykloida	23
3.1.2	Evolventa kružnice	25
3.1.3	Epicykloida	26
3.1.4	Hypocykloida	27
3.1.5	Pericykloida	29
3.2	Kardioida	30
3.3	Konchoida	33
3.4	Spirály	35
3.4.1	Archimédova spirála	35
3.4.2	Logaritmická spirála	36
3.5	Kuželosečky	38
3.5.1	Elipsa	39
3.5.2	Hyperbola	40
3.5.3	Parabola	41
3.6	Šroubovice	43
3.7	Brachistochrona	45
4	Závěr	47

1 Úvod

Zadáním práce bylo vyjasnění původu technických a jiných zajímavých křivek, se kterými se běžně setkáváme, vysvětlení vzniku, jejich matematický popis a znázornění pomocí vhodného CAS¹ programu.

Práce je rozdělena do tří částí. Začíná popisem a vysvětlením potřebných pojmů a vztahů z kinematické a analytické geometrie, dále obsahuje hlavní část o kinematických křivkách v technice, kam jsem vybral křivky využívané zejména ve strojírenství, je zde vysvětlen vznik a využití křivek spolu s matematickým popisem a příklady použití. Práce se zaměřuje na popis a prezentaci křivek, nikoli na řešení křivek tak, jak se to provádí v diferenciální geometrii. Nepopisují také konstrukční postupy, křivky jsou vytvořeny programem GeoGebra a grafické soubory jsou uloženy jako přílohy k práci.

Do práce, která je spíše kompilativní, jsem nezahrnul křivky počítačové grafiky ani charakteristické křivky některých grafů z fyziky nebo matematické analýzy či časových řad, ačkoli i takové křivky se mezi technické někdy řadí. Grafické nebo empirické křivky, jak se tyto označují, nelze popsat pomocí jednoduchého matematického vyjádření a nevyhovovaly by ani celkovému pojetí práce.

¹ CAS = Computer Algebra System

2 Geometrie křivek

V historii, ale i v současných zdrojích, které se křivkami často zabývají jinak než tato práce, je možné se setkat s rozdílnými definicemi křivek i s rozdílným přístupem při jejich vyšetřování. Popis v minulosti vždy odpovídal dostupnému matematickému aparátu, v současnosti jde spíše o to, jaké úlohy ve spojení s křivkami řešíme. Jinak se zabývali křivkami ve starověku, kdy již byla popsána řada křivek v této práci uváděných, a kdy se obdobné problémy řešili pouze geometricky a jinak dnes, kdy se například při řešení úloh v technické mechanice využívá diferenciální geometrie a výpočetní technika. Já jsem si ve většině případů vybral způsob obvyklý v kinematické geometrii a nejvíce vyhovující vybraným křivkám a jejich použití. S pomocí literatury připomenu základní pojmy a pravidla, se kterými je možné se při takovém popisu křivek setkat. Začnu popisem základního prostoru a souřadnicových soustav, pomocí kterých se křivky matematicky zpracovávají.

2.1 Soustavy souřadnic

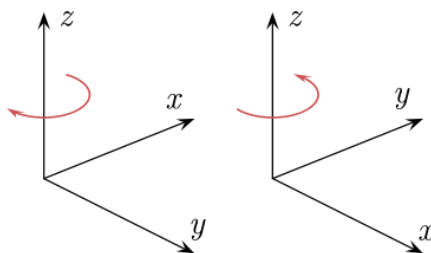
Se zavedením souřadných soustav a následným rozvojem analytické, jinak také souřadnicové geometrie bylo možné začít řešit geometrické problémy algebraickými prostředky. Použití souřadných systémů umožňuje vyjádřit polohu každého bodu v prostoru ve vztahu k jinému a zavést tak mezi jednotlivými body matematické vztahy vyjádřené vzorci. Další možnosti pak nabízí vektorový počet formulovaný později, který je na systému souřadnic také založen. Nyní k samotným souřadným systémům.

Eukleidovský prostor pojmenovaný po Eukleidovi², ve kterém se zavádí následující souřadné systémy, a na který se ostatní základní definice odkazují, zahrnuje rovinu, která se značí E_2 , a trojrozměrný prostor, který se označuje E_3 . Jde o prostor, ve

² Eukleidés (asi 325 př. n. l. – asi 260 př. n. l.) – alexandrijský matematik a geometr

kterém platí Eukleidovská geometrie³, tedy souhrn pravidel popisujících například vlastnosti základních geometrických útvarů jako jsou přímka, úsečka, trojúhelník nebo také definici vzdáleností, čili metriku. S takovým vymezením prostoru a vlastnostmi objektů, které se v něm nalézají, jsme zvyklí pracovat již ze základní školy. Kromě tohoto totiž ještě existují prostory zavedené později, které do určité míry Eukleidovskému prostoru odpovídají, ale nemusí splňovat všechny jeho podmínky. Jde například o prostory zakřivené, uvažované v moderní fyzice.

Kartézská soustava souřadnic, u jejíhož zrodu stál René Descartes⁴, považovaný spolu s Pierrem de Fermatem⁵ za zakladatele analytické geometrie, je základní a zároveň nejrozšířenější a nejznámější souřadnou soustavou. Jde o pravoúhlou pravotočivou anebo levotočivou soustavu – vždy podle orientace os x a y .



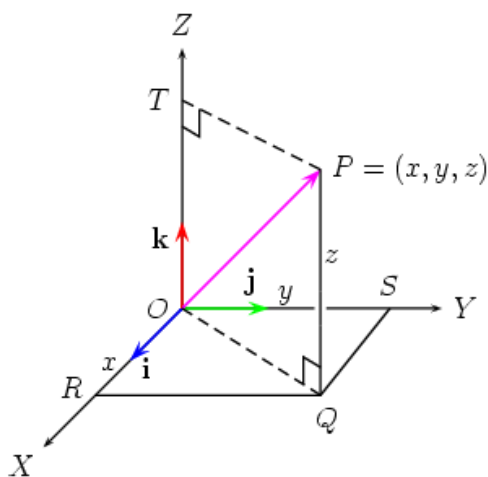
Obrázek 1 - Levotočivá a pravotočivá kartézská soustava souřadnic

Na jednotlivých k sobě navzájem kolmých číselných osách x , y , z vedoucích z počátku, tedy bodu O se souřadnicemi $(0,0,0)$ - odtud také označení $Oxyz$, se odečítají vzdálenosti právě od počátku k průmětu nějakého bodu, které potom vyjádřené například i pomocí proměnných tvoří jednotlivé souřadnice tohoto bodu v prostoru.

³ Zde odkazovaná pravidla popsal Eukleidés v souboru knih *Základy*

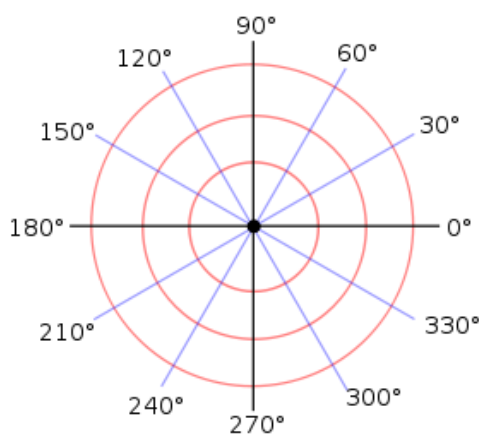
⁴ René Descartes (1596 - 1650) - latinsky Renatus Cartesius, adj. Cartesian, odtud také název kartézská soustava, francouzský matematik a filosof

⁵ Pierre de Fermat (asi 1601 - 1665) – francouzský právník, v matematice spíše amatér, přesto spolu s Blaisem Pascalem (1623 - 1662) zakladatel kombinatoriky, podílel se na rozvoji teorie čísel a diferenciálním počtu



Obrázek 2 - Kartézská soustava souřadnic v prostoru. Bod P o souřadnicích (x,y,z) , jeho průmět Q do roviny xy a vyznačené jednotkové vektory $i(1,0,0)$, $j(0,1,0)$, $k(0,0,1)$, které určují bázi vektorového prostoru v této souřadné soustavě.

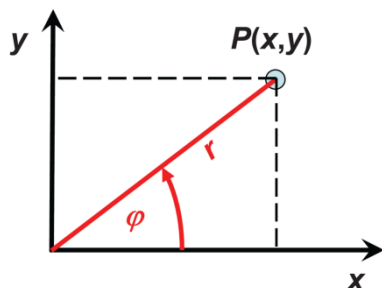
Polární soustava souřadnic se používá pro zaznamenávání souřadnic v rovině, kdy se poloha libovolného bodu v rovině vzhledem k bodu pevně zvolenému, který je obdobou počátku v kartézské soustavě, určuje pomocí vzdálenosti od tohoto bodu a úhlu svíraného s pevně zvoleným směrem. Vhodná je zejména u útvarů nebo pohybů symetrických podle počátku nebo i složitějších, ale s ohledem na tuto podmínku jednoduchou matematickou závislostí popsatelných – nejvhodnějším případem je kružnice nebo spirála. Samotná myšlenka zaznamenávání údajů o poloze pomocí úhlu a rádiusu pochází již z 1. tisíciletí př. n. l.⁶



Obrázek 3 - Síť polárních souřadnic

⁶ Podle [5]

Souřadnice zadané v jedné soustavě lze převádět do jiné. Převod polárních souřadnic na kartézské a naopak je možný následovně:



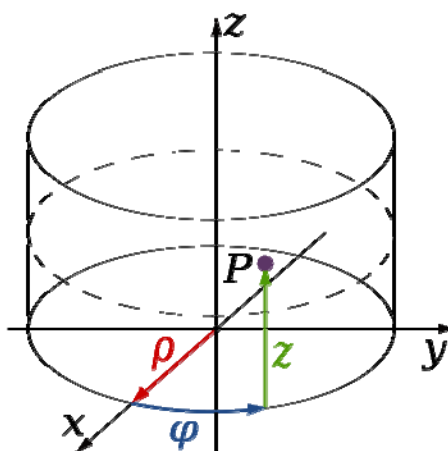
$$\begin{aligned} x &= r \cos(\varphi) & r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ y &= r \sin(\varphi) & \varphi &= \operatorname{arctg}2(y, x) \end{aligned}$$

Obrázek 4 - Naznačení vztahu mezi polárními a kartézskými souřadnicemi

Funkce $\operatorname{arctg}2(y,x)$ se zavádí z toho důvodu, že cyklotrická funkce $\operatorname{arctg}(\varphi)$, tedy inverzní funkce ke goniometrické funkci $\operatorname{tg}(\varphi)$, je definována pomocí restrikce původního intervalu a nabývá hodnot $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Funkce $\operatorname{arctg}2(y,x)$ má následující význam:

$$\operatorname{arctg}2(y, x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0 \wedge y > 0 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi, & x > 0 \wedge y < 0 \end{cases}$$

Cylindrická (válcová) soustava souřadnic je rozšířením polárních souřadnic do prostoru. Je vhodná například pro popis křivky na válcové ploše, jakou je šroubovice.



Obrázek 5 - Poloha bodu P v cylindrických souřadnicích

Převod cylindrických souřadnic na kartézské a naopak je obdobný jako v případě souřadnic polárních, rozšířených o osu z :

$$\begin{aligned}
 x &= \rho \cos \varphi & \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
 y &= \rho \sin \varphi & \varphi &= \begin{cases} 0, & \text{pro } x = 0 \wedge y = 0 \\ \arcsin\left(\frac{y}{\rho}\right), & \text{pro } x \geq 0 \\ -\arcsin\left(\frac{y}{\rho}\right) + \pi, & \text{pro } x < 0 \end{cases} \\
 z &= z
 \end{aligned}$$

Existují i další souřadné systémy, které se ale pro svůj specifický účel použití tak často nevyskytují. Z těch známějších lze například zmínit souřadnice eliptické nebo sférické, používané při určování zeměpisné polohy.

2.2 Křivky v kinematické geometrii

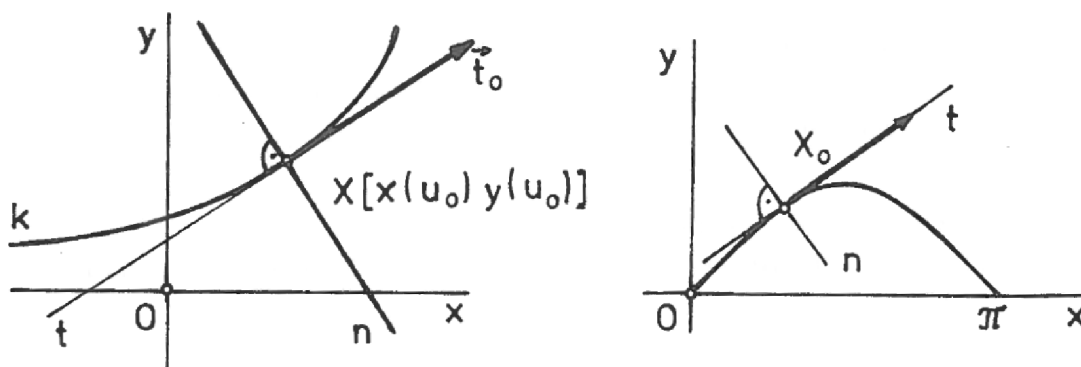
Kinematická geometrie jako součást deskriptivní geometrie zkoumá geometrické vlastnosti pohybu, nezabývá se rychlostí a zrychlením. Následuje výběr základních pojmů a pravidel používaných dále v textu nebo při popisu křivek vůbec.

Rovinná křivka, tedy křivka v E_2 je jednoparametrická množina bodů $\{X(u)\}$, jejichž souřadnice jsou dány funkcemi:

$$\begin{aligned}x &= x(u), & u \in J, & & J \subset \mathbb{R} \\ y &= y(u)\end{aligned}$$

Křivka se nazývá jednoparametrická proto, že pohyb bodu, kterým je tvořena, lze vyjádřit jako závislost na jednom parametru.

Tečna (tangenta) t je přímka, která se dotýká křivky v jednom bodě – je určena tímto bodem dotyku a tečným vektorem \vec{t}_0 v něm.



Obrázek 6 - Tečna t , tečný vektor \vec{t}_0 a normála křivky n

Tečný vektor $\vec{t} = \left(\frac{dx}{du}, \frac{dy}{du}\right)$ získáme derivací souřadnicových funkcí křivky po složkách.

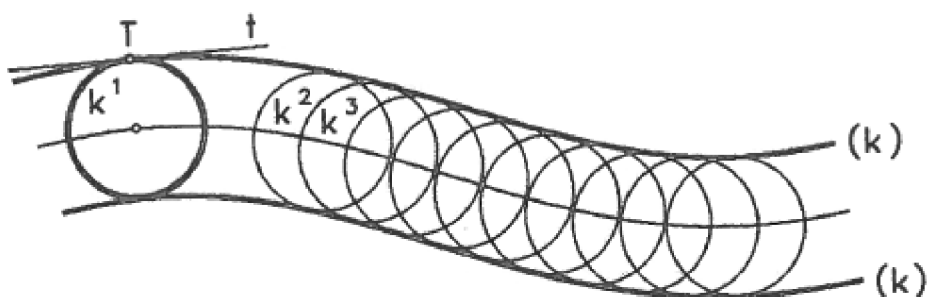
Normála n křivky k je kolmice k tečně v bodě dotyku X_0 . Na normále leží střed oskulační kružnice.

Trajektorie je stopa, kterou vytváří bod při svém pohybu. Nahlížíme-li na parametr u jako na čas, můžeme říci, že jednoparametrická množina

$$\{X[x(u), y(u)]\}, \quad u \in J$$

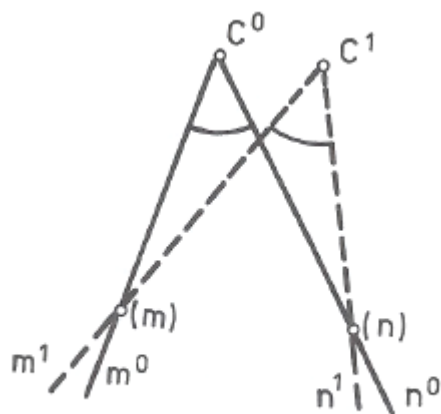
je trajektorií pohybujícího se bodu. V kinematice se křivka běžně definuje jako trajektorie nějakého pohybu.

Obálka (k) je křivka, která má s každou polohou křivky k společnou tečnu v bodě dotyku T . Je to další možnost, jakou může být určena křivka nebo obecněji i pohyb v rovině.



Obrázek 7 - Vznik křivky jako obálky

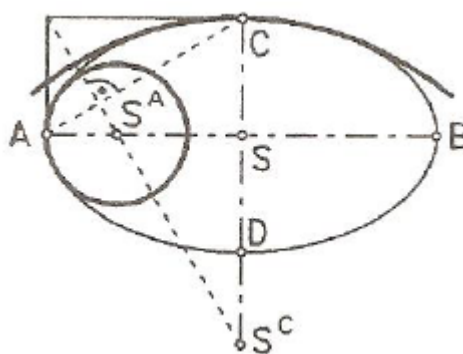
Bodová obálka (m) je speciálním typem obálky křivky, kterou tvoří bod - křivka při pohybu prochází stále tímto jedním bodem (m). Opět jde o další způsob, jakým může být určen pohyb, tedy i křivka, která takovým pohybem vzniká.



Obrázek 8 - Bodové obálky (m) a (n) křivek m a n

Asymptota je přímka, která se s rostoucími souřadnicemi limitně blíží ke křivce, křivku tak ohraničuje. Jde o tečnu křivky v jejím nevlastním bodě – v nekonečnu.

Oskulační kružnice⁷ nejlépe aproximuje, tzn. dostatečně přesně opisuje křivku v okolí určitého bodu. Je tedy možné takovou kružnicí křivku v okolí tohoto bodu nahradit.



Obrázek 9 - Oskulační kružnice elipsy, naznačeno nalezení středu oskulační kružnice

⁷ z latinského osculum - polibek

Křivost křivky udává velikost zakřivení křivky v bodě a je to převrácená hodnota poloměru křivosti. Kružnice tak má konstantní křivost rovnou převrácené hodnotě jejího poloměru.

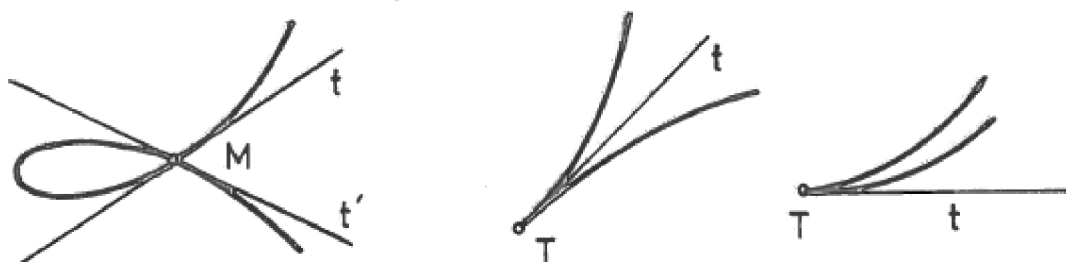
Poloměr křivosti křivky je poloměr oskulační kružnice – vzdálenost středu oskulační kružnice od tečného bodu. Poloměr křivosti R křivky zadané parametrickými rovnicemi

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

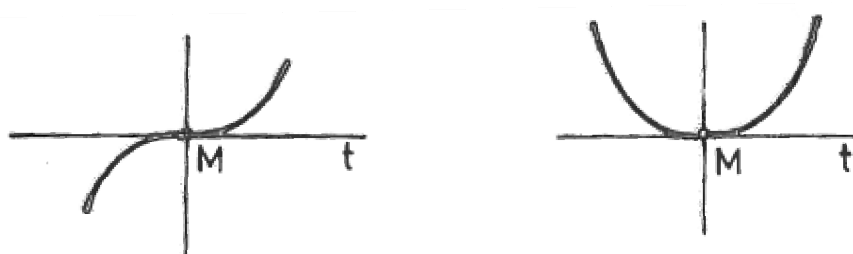
lze vypočítat následovně⁸:

$$R = \frac{\sqrt{([x'(t)]^2 + [y'(t)]^2)^3}}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}$$

Specifické body křivek jsou určité charakteristické body, které napomáhají popisu křivek a jsou uvedeny na následujících obrázcích:



Obrázek 10 - Vlevo uzlový bod M , vpravo bod vratu T



Obrázek 11 - Vlevo inflexní bod M , vpravo plochý bod M

⁸ Jako důsledek odvození v [3] s. 28

Kromě toho ještě rozlišujeme body obecněji:

- **Singulární bod** je bod, ve kterém není možné sestavit tečnu, protože tečný vektor je nulový nebo neexistuje. Jde například o uzlový bod (také násobný bod) nebo inflexní bod (bod obratu) a bod vratu, který má dvě opačně orientované tečny, které splývají. Méně formálně řečeno, jde o bod, ve kterém se vyšetřovaná křivka „nechová“ normálně, náhle změní směr, protíná sama sebe a podobně – křivka se stává degenerovanou. Singulární bod se také označuje jako singularita a naopak.
- **Regulární bod** je bod, který není singulární - v takovém bodě existuje tečna.

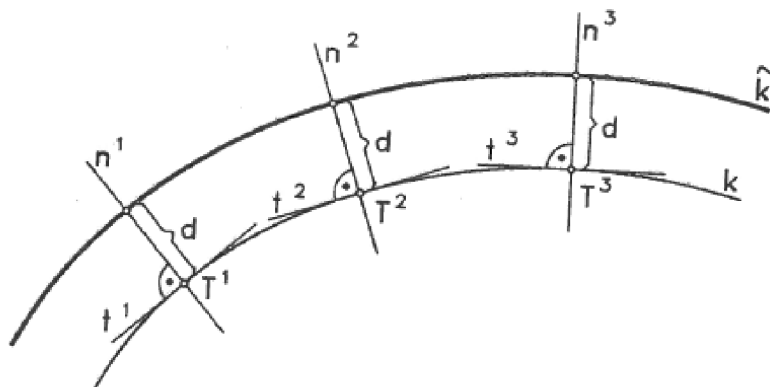
Ekvidistanta nebo také paralelní křivka je obálka přímků rovnoběžných ve stálé vzdálenosti s tečnami dané křivky nebo také obálka přímků kolmých k normálám dané křivky a vzdálených od tečného bodu křivky na obě strany o stálou délku, ale také obálka kružnic stálého poloměru, jejichž středy leží na dané křivce. U obecné křivky jde o obdobu rovnoběžných přímků nebo soustředných kružnic. Pro křivku zadanou parametricky rovnicemi

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

lze ekvidistantu vyjádřit rovnicemi⁹

$$X = x(t) \mp \frac{\varepsilon y'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}}$$
$$Y = y(t) \pm \frac{\varepsilon x'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}}$$

⁹ [3] s. 64



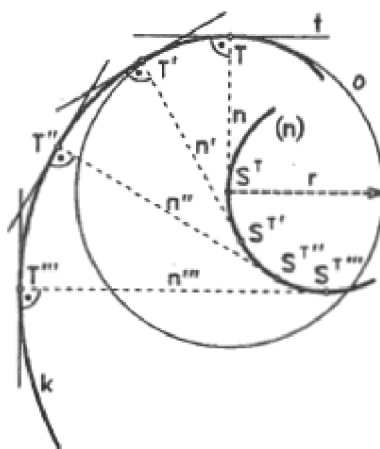
Obrázek 12 - Vznik ekvidistanty: Původní křivka k s ekvidistantou \tilde{k} a konstantní vzdálenost d na normálách n – vzdálenost d odpovídá symbolu ε v rovnicích výše

Je zřejmé, že pro každé d (ε) existují dvě různé ekvidistanty – tutéž vzdálenost je možné nanést i na druhou stranu normály původní křivky, v tomto případě pod původní křivku k .

Evoluta je obálka normál křivky nebo také množina všech středů oskulačních kružnic, tedy množina všech středů křivostí. Pro evolutu křivky zadané parametricky jako v případě ekvidistanty platí rovnice¹⁰

$$x = x(t) - y'(t) \frac{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}$$

$$y = y(t) + x'(t) \frac{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}$$



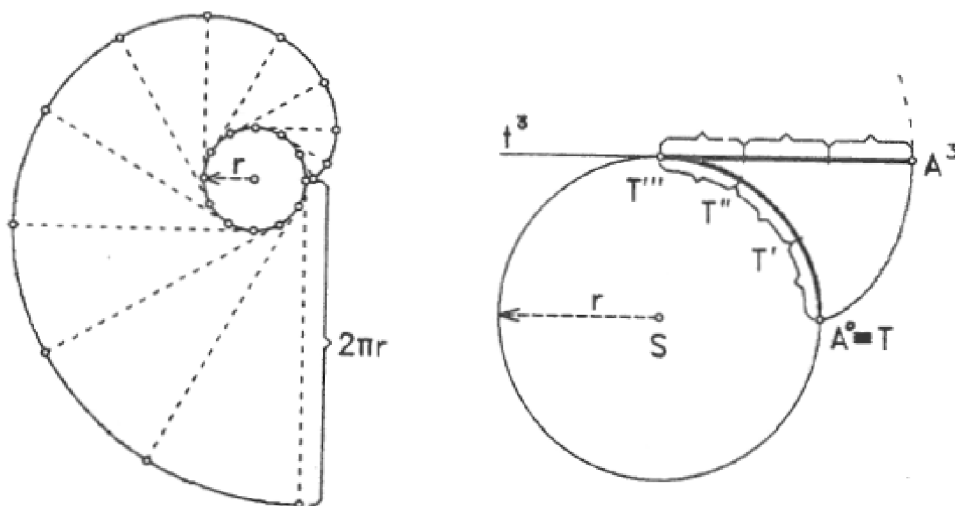
Obrázek 13 - Vznik evoluty

¹⁰ [3] s. 40

Evolventa je křivka, která vzniká odvalováním tečny po vlastní křivce. Evolventu vykresluje pevně zvolený bod tečny. Speciálním případem, který je podrobněji popisován v samostatné kapitole, je potom evolventa kružnice. Při zadání křivky parametrickými rovnicemi jako v případě evoluty platí pro evolventu rovnice¹¹

$$x = x(t) - \frac{x'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} \int \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

$$y = y(t) - \frac{y'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} \int \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$



Obrázek 14 - Vznik evolventy

Poslední dvojice křivek se zpravidla uvádí dohromady. Platí, že původní křivka je evolventou své evoluty a zatímco evoluta dané křivky existuje vždy jen jedna, evolvent je nekonečně mnoho – evolventou dané křivky je také každá ekvidistanta této evoluty. Nejedná se ale o jediné asociované křivky – křivky dané jinými křivkami nebo definované pomocí jiných křivek.

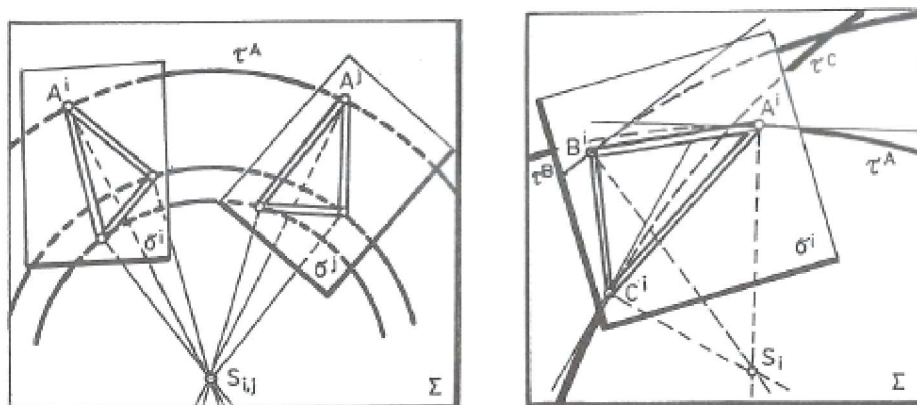
Neproměnná rovinná soustava je označení množiny geometrických útvarů ležících v jedné rovině, jejichž vzájemná poloha a jejichž tvar se při pohybu nemění¹². Dále se zavádí **pevná soustava** Σ a **hybná soustava** σ . Hybná, uvnitř neproměnná

¹¹ [3] s. 42

¹² Podle [8]

rovinná soustava se pohybuje po pevné rovinné soustavě – pevná soustava tedy určuje pravidla pohybu hybné soustavy - a její jednotlivé body nebo objekty pohybem tvoří trajektorii nebo obálku takového pohybu.

Okamžité otáčení je označení náhradního pohybu, tedy náhradního otáčení, které nahrazuje pohyb mezi dvěma sousedními, dostatečně blízkými polohami σ^i, σ^j hybné soustavy - pojem vyplývá z tvrzení¹³ dokázaného v kinematické geometrii, kdy každý pohyb v rovině lze převést na elementární pohyb otáčení nebo posunutí. Následující pojmy jsou důsledkem zavedení okamžitého otáčení.



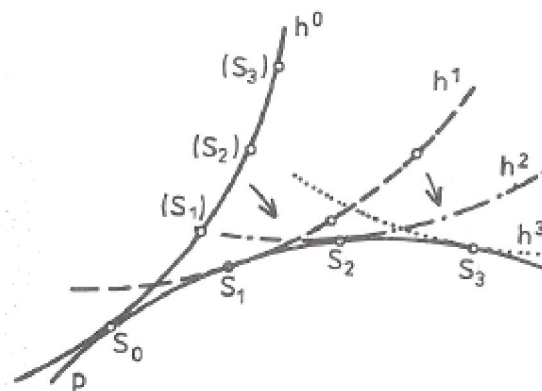
Obrázek 15 - Elementární pohyb otáčení (vlevo) a okamžité otáčení (vpravo)

Pól pohybu (okamžitý střed otáčení) S_i je průsečík všech normál trajektorií bodů a obálek křivek v každé dílčí poloze (v každém dílčím okamžiku). Jedná se o důsledek výše uvedeného tvrzení.

Pevná polodie je množina pólů pohybu, tedy bodů, které jsou okamžitými středy otáčení pro příslušné polohy pohybu.

Hybná polodie je množina bodů v hybné soustavě, které se během pohybu stanou okamžitými středy otáčení, tyto body jsou tedy „budoucí“ póly pohybu.

¹³ [1] s. 88



Obrázek 16 - Odvalování křivky h po křivce p

Nejlépe se dá vznik pevné a hybné polodie pochopit na odvalování jedné kružnice po druhé jako na obrázku 14. Kružnice, po které se odvaluje jiná kružnice, je pevná polodie takového pohybu - je to skutečně množina bodů, které pro každý okamžik pohybu představují okamžitý střed otáčení. Naproti tomu kružnice, která se odvaluje, představuje skutečně budoucí středy otáčení, protože každým částečným odvalením se ztotožní tečné body obou kružnic – okamžitý střed otáčení i do té doby budoucí. Zavedením polodií, které se někdy označují také jako poloidy, lze každý pohyb v rovině s výjimkou pohybů, které mají pouze jeden pól nebo nemají žádné póly v E_2 (jsou v ∞), převést na odvalování (kotálení) křivky po křivce. Pevná polodie je jinak také základní nebo pevná křivka, po které se odvaluje hybná polodie, tvořící křivka. Zavedení polodií není samoúčelné, kromě již zmíněného převodu různých druhů pohybů na odvalování dvou křivek po sobě mají využití například při vyšetřování mechanismů strojů.

Vratný pohyb je takový pohyb, u kterého vzájemně zaměníme hybnou polodii za pevnou. I zde totiž platí, že pohyb je relativní – záleží na poloze pozorovatele. Platí, že pohyby jsou navzájem vratné.

GeoGebra je volně dostupný software¹⁴ pro výuku a řešení úloh z matematiky a geometrie. Je možné přímo generovat Java aplety pro použití na webových stránkách. S jeho pomocí jsem připravil obrázky jednotlivých křivek, které jsou dostupné jako

¹⁴ www.geogebra.org – díky otevřenosti komunity lze postupy tvorby jednotlivých křivek nalézt nejen zde ale i na www.youtube.com nebo <http://geogebrawiki.wikispaces.com/GB+GeoGebra+Tutorials>

přílohy k této práci – po otevření *ggb* souboru je možné v menu *View - Construction Protocol* zapnout konstrukční protokol a zjistit, jaký byl zvolen postup.

MapleTM je systém počítačové algebry pro výuku a využití matematiky napříč vědními obory. Umožňuje provádění symbolických i numerických matematických výpočtů, jejich vizualizaci, dokumentování i publikaci a export dat. Programem jsem zpracoval zjednodušenou úlohu o brachystochroně, která je také přiložena k práci v nativním Maple formátu.

2.3 Matematický zápis křivek

Křivky zadané explicitně odpovídají zápisu $y = f(x)$, který je běžný v matematické analýze a takto zadanou křivku lze chápat jako graf funkce f s definičním oborem D . Příkladem může být parabola, kterou lze zapsat jako funkci

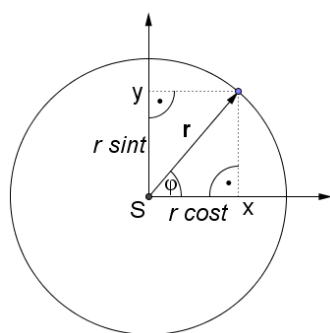
$$y = px^2 + q$$

Křivky zadané implicitně odpovídají zápisu $F(x,y) = 0$, který můžeme získat vyjádřením z explicitního popisu následovně: $y - f(x) = 0$. V případech, kdy $F(x,y)$ je polynom, tedy:

$$F(x,y) = \sum_{p+q=0}^m a_{pq}x^p y^q$$

se křivka nazývá algebraická. Stupeň rovnice (polynomu) je potom stupněm křivky. Křivka, která není algebraická, to znamená že funkce $F(x,y)$ není algebraická, se nazývá transcendentní. Jde například o křivky funkcí goniometrických, cyklometrických či logaritmických nebo o některé křivky v této práci zmíněné – například cykloиду či řetězovku.

Parametrické vyjádření křivek je vhodné z několika důvodů. Například kružnice zadaná kanonickou, tedy její „normální“ rovnicí se středem v počátku odvozená z Pythagorovy věty



$$x^2 + y^2 = r^2$$

neumožňuje jednoduchý zápis v podobě závislosti $y = f(x)$ nebo $x = h(y)$.

Při vyjádření

$$x = \pm\sqrt{r^2 - y^2}$$

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

získáme stejně rovnice se dvěma funkcemi v každé z nich. Nadto každá z rovnic představuje pouze část kružnice, což jistě není vhodné¹⁵:

Vrchní část:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Pravá strana:

$$y = \sqrt{r^2 - y^2}$$

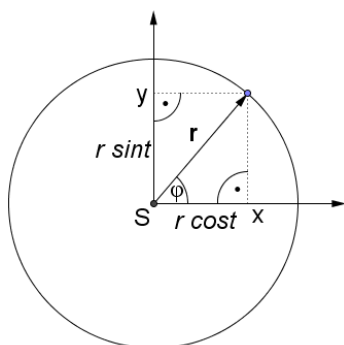
Spodní část:

$$y = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

Levá strana:

$$y = -\sqrt{r^2 - y^2}$$

Kromě toho existuje řada křivek, u kterých zápis formou funkční závislosti není možný. Proto se zavádí parametrické rovnice křivek, kdy se namísto definice způsobem $y = f(x)$ nebo $x = h(y)$ zavádí parametr, nejčastěji t , který se při kinematickém vnímání křivky považuje za čas. Rovnice pro x a y se potom zapisují jako $x = f(t)$ a $y = g(t)$. Každá hodnota t definuje bod $(x,y) = (f(t), g(t))$. Jednodušší je i určení (výpočet) směrového vektoru takto zadané křivky. Příkladem mohou být parametrické rovnice zmíněné kružnice se středem v počátku, kde parametr t představuje v čase proměnný úhel φ a r poloměr kružnice nebo také vzdálenost tvořícího bodu od počátku. Jde tak o vyjádření polárních souřadnic v kartézské soustavě:



$$x(t) = r \cos t$$

$$y(t) = r \sin t$$

Existují i křivky, které nelze vyjádřit matematickým zápisem. Patří sem různé empirické, interpolační nebo tvarově složité křivky.

¹⁵ Podle [7]

3 Křivky v technice

V technice má využití zpravidla pouze část křivky z těch, které budu popisovat, a to například navzájem se odvalující boky ozubených kol nebo součástí různých mechanismů, některé převody pohybů a podobně. Technikou rozumím pro účely této práce stroje a podobná zařízení nebo také stavby, kde se tvary křivek v této práci popisovaných také mohou vyskytovat. Pro popis jednotlivých křivek je vhodné uvést nejdříve jednotlivé druhy pohybu, pomocí kterých takové křivky vznikají. Potom následují konkrétní příklady s matematickým vyjádřením a příklady z praxe.

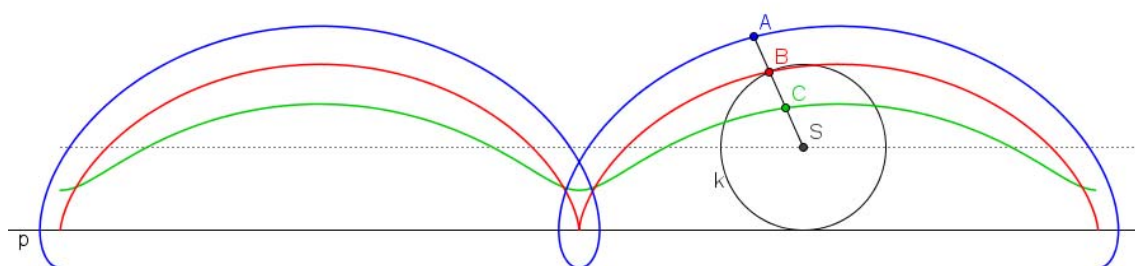
3.1 Cyklické křivky

Cyklický pohyb je takový druh pohybu, jehož polodie jsou obě kružnice anebo jedna přímka a druhá kružnice. Křivky vzniklé tímto pohybem se nazývají cykloidy, ve speciálních případech také trochoidy¹⁶, nebo evolventy kružnic.

3.1.1 Cykloida

Cykloidální pohyb vzniká odvalováním kružnice po přímce a cykloida je křivka tvořená bodem pevně spojeným s kružnicí, která se odvaluje po přímce. Střed cykloidy se pohybuje po přímce rovnoběžné s přímkou odvalovací. Leží-li bod vně kružnice (bod A na obrázku 17), vytvoří se při odvalování smyčka a jedná se o cykloidu prodlouženou, leží-li uvnitř, vytvoří se vlna (bod C) a jde o cykloidu zkrácenou a nakonec, leží-li na obvodu, vzniká cykloida prostá (bod B).

¹⁶ Z řeckého trochos – kolo, trochoidy se také nazývají kotálnice



Obrázek 17 - Vznik cykloidy

Parametrické rovnice cykloidy¹⁷:

$$x = rt - rsint$$

$$y = r - rcost$$

kde $r > 0$ je rádius odvalované kružnice a t je úhel, o který byla tvořící kružnice otočena. Takto vyjádřené rovnice lze jednoduše odvodit, uvědomíme-li si, že jde současně o posun a rotaci bodu.

Obdobně potom pro zkrácenou ($d > r$) i prodlouženou ($d < r$) cykloidu platí¹⁸:

$$x = rt - dsint, \quad y = r - dcost$$

$$r > 0, \quad d > 0, \quad r \neq d$$

Cykloida byla studována a pojmenována Galileem v roce 1599. Následné studium vlastností cykloidy mnoha dalšími matematiky vedlo i mimo jiné až k vyřešení problému brachistochrony v roce 1696 Johannem Bernoullim¹⁹.

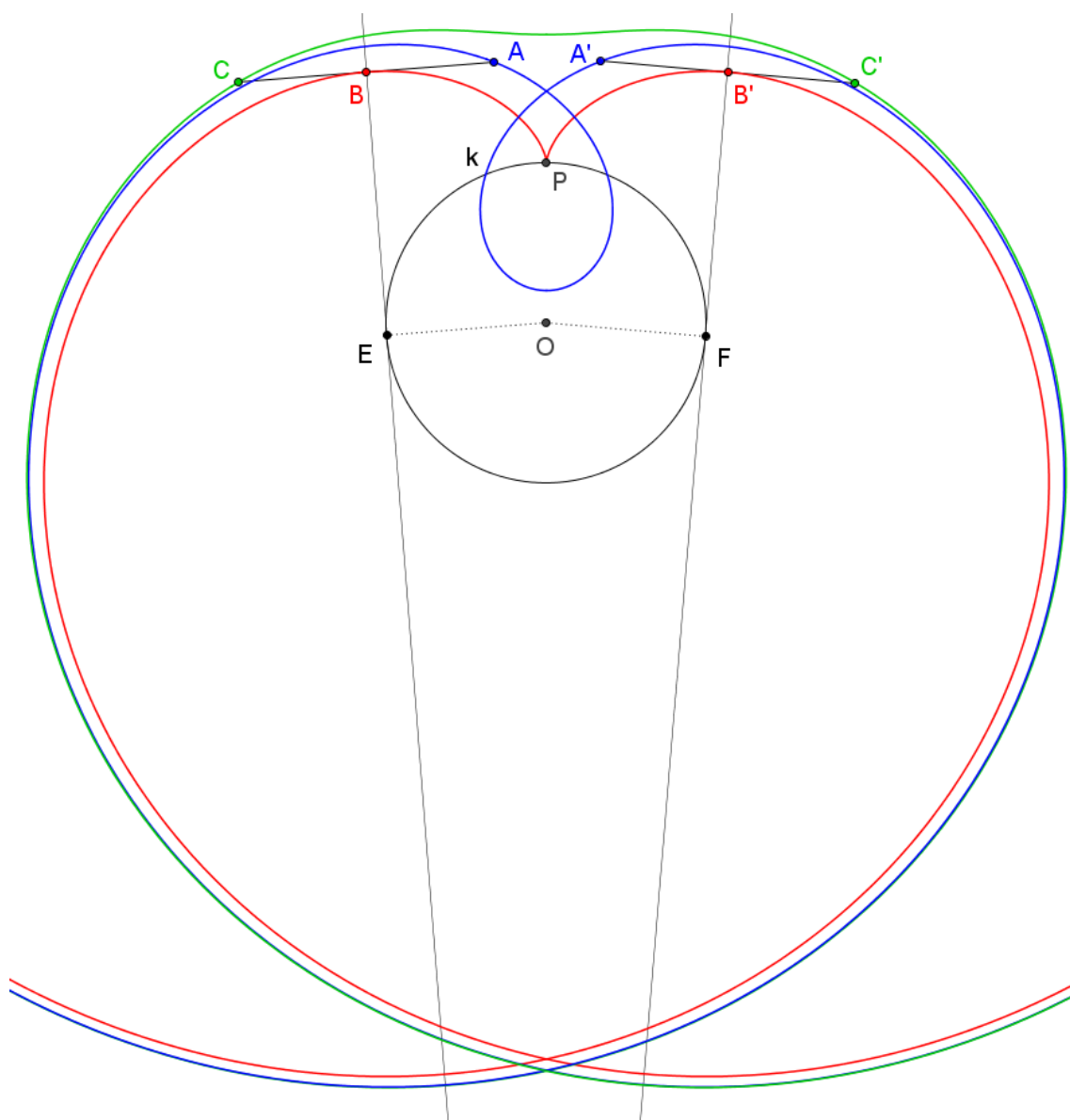
¹⁷ [3] s. 186

¹⁸ [3] s. 147

¹⁹ [9]

3.1.2 Evolventa kružnice

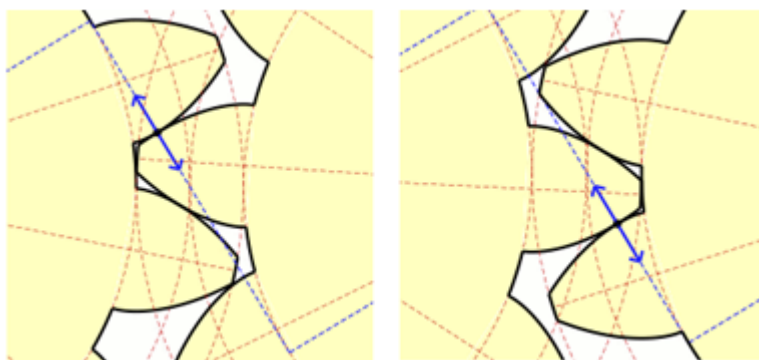
Evolventní pohyb vzniká odvalováním přímky po kružnici. Jde o vratný pohyb k pohybu cykloidálnímu a evolventa, jinak také odvinovka je trajektorií evolventního pohybu. Tvoří ji bod, který je pevně spojený s přímkou odvalovanou po kružnici. Obdobně jako u cykloidy je možné i u evolventy vytvořit zkrácenou a prodlouženou variantu.



Obrázek 18 - Evolventa kružnice

Evolventa v praxi odpovídá například odvíjení provázku z cívky – odtud také odvinovka.

Příklady použití: Cykloidy a evolventy se využívají jako tvořící křivky zubů ozubených kol, kde splňují podmínku, aby jejich společná normála při odvalování stále procházela tečnou obou základních kružnic a tím zůstal zachován nezměněný převodový poměr.

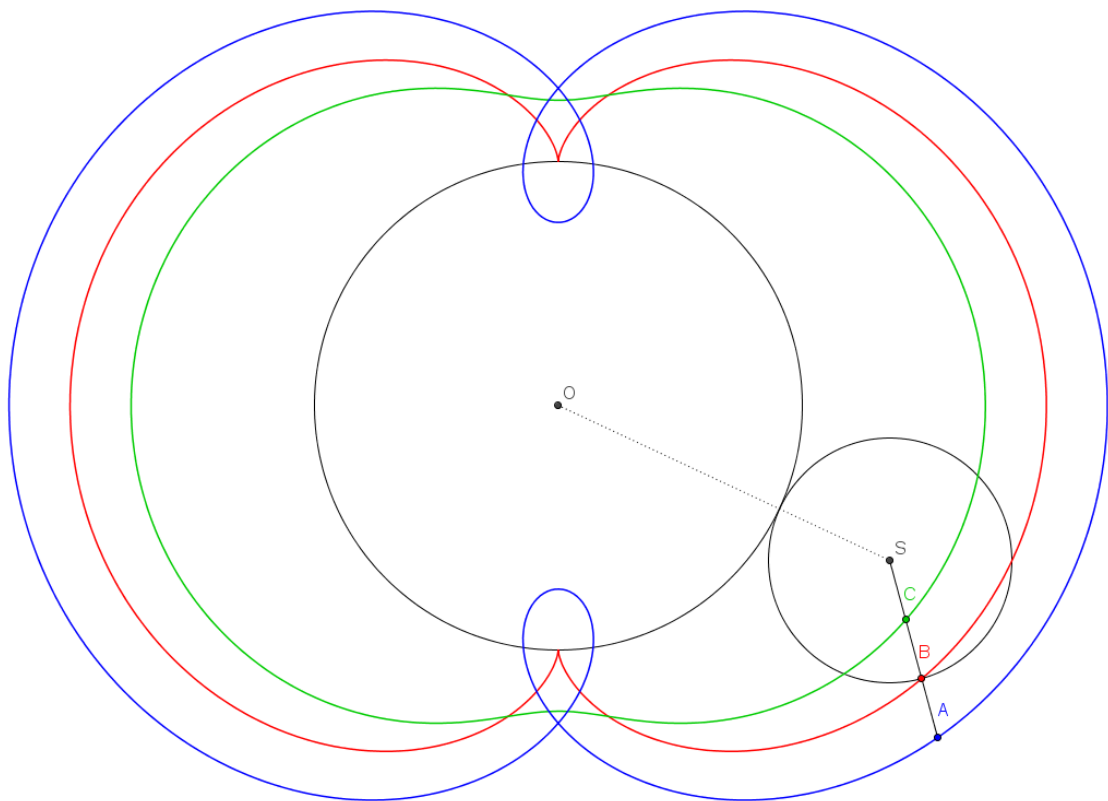


Obrázek 19 - Přenos převodu odvalováním zubů

Křivky cyklického pohybu, jehož polodie jsou obě kružnice, je možné rozdělit do tří skupin podle vzájemného pohybu a určení pevných a hybných polodií, jak je uvedeno dále.

3.1.3 Epicykloida

Epicykloidální pohyb – hybná polodie (tvořící kružnice) se odvaluje po vnějším obvodu polodie pevné (základní kružnice). Stejně jako v přechozích případech, i nyní lze vytvořit zkrácenou a prodlouženou variantu. Střed základní kružnice je v počátku.



Obrázek 20 - Epicykloida

Červeně vykreslená epicykloida se nazývá nefroida – aby vznikla, musí platit $r = R/2$.

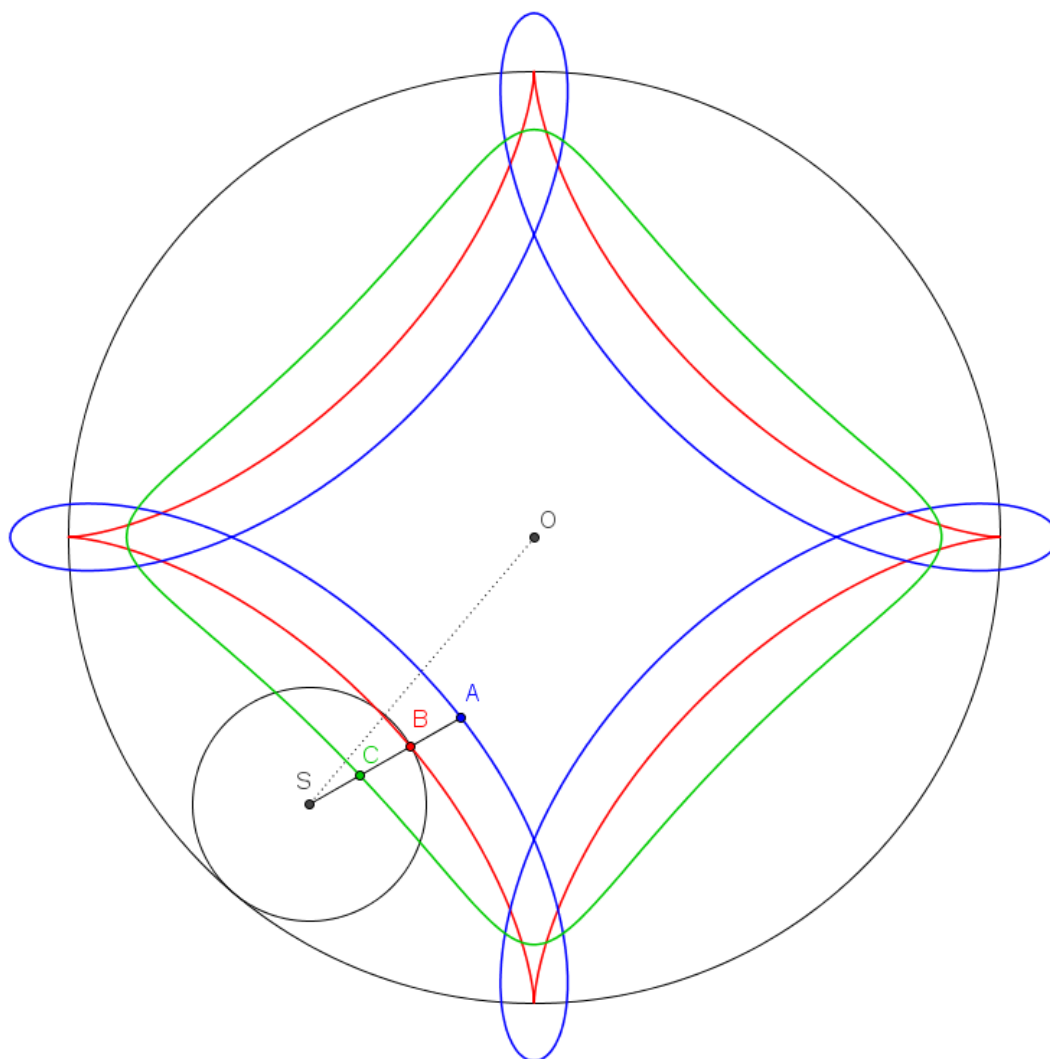
Parametrické rovnice epicykloidy²⁰ jsou:

$$\begin{aligned}
 x &= (R + mR) \cos mt + mR \cos(t + mt), \\
 y &= (R + mR) \sin mt - mR \sin(t + mt), \\
 R > 0, \quad m &= \frac{p}{q}, \quad p \in N, \quad q \in N, \quad NSD(p, q) = 1
 \end{aligned}$$

3.1.4 Hypocykloida

Hypocykloidální pohyb – hybná polodie se odvaluje vnějším obvodem po vnitřním obvodu pevné polodie. Na obrázku opět prostá, zkrácená a prodloužená hypocykloida.

²⁰ [3] s. 191



Obrázek 21 - Hypocykloida

Červeně znázorněná křivka se nazývá asteroida, jde o případ, kdy $r = R/4$. Střed O je počátek.

Parametrické rovnice hypocykloidy²¹:

$$\begin{aligned}x &= (R - mR) \cos mt + m \cos(t - mt), \\y &= (R - mR) \sin mt - m \sin(t - mt), \\R &> 0, \quad m = \frac{p}{q}, \quad p \in N, \quad q \in N, \quad NSD(p, q)\end{aligned}$$

3.1.5 Pericykloida

Pericykloidální pohyb – hybná polodie se odvaluje vnitřním obvodem po vnějším obvodu polodie pevné. Parametrické rovnice jsou:

$$\begin{aligned}x &= (R + mR) \cos mt - mR \cos(t + mt), \\y &= (R + mR) \sin mt - mR \sin(t + mt), \\R &> 0, \quad m = -\frac{p}{q} < -1, \quad p \in N, \quad q \in N, \quad NSD(p, q) = 1\end{aligned}$$

Pericykloidy odpovídají epicykloidám, proto je neznázorňuji.

Příklady použití²²: Poslední tři speciální typy cykloid se vyskytují například u Wankelova motoru, Rootsova dmyhadla, různých druhů rotačních čerpadel, apod.

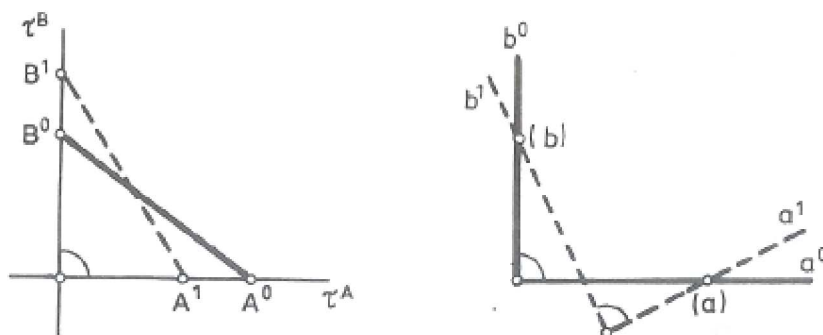
²¹ [3] s. 224

²² [4] s. 22

3.2 Kardioida

Kardioidický pohyb je určený dvěma bodovými obálkami (a) , (b) přímkou a , b , $\angle ab = konst.$ Jde o vratný pohyb k pohybu eliptickému, který pro úplnost uvádím již v této kapitole, i když elipsa je popisována dále spolu s kuželosečkami.

Eliptický pohyb je určený dvěma přímkovými trajektoriemi T^A , T^B bodů A , B , $|AB| = konst.$

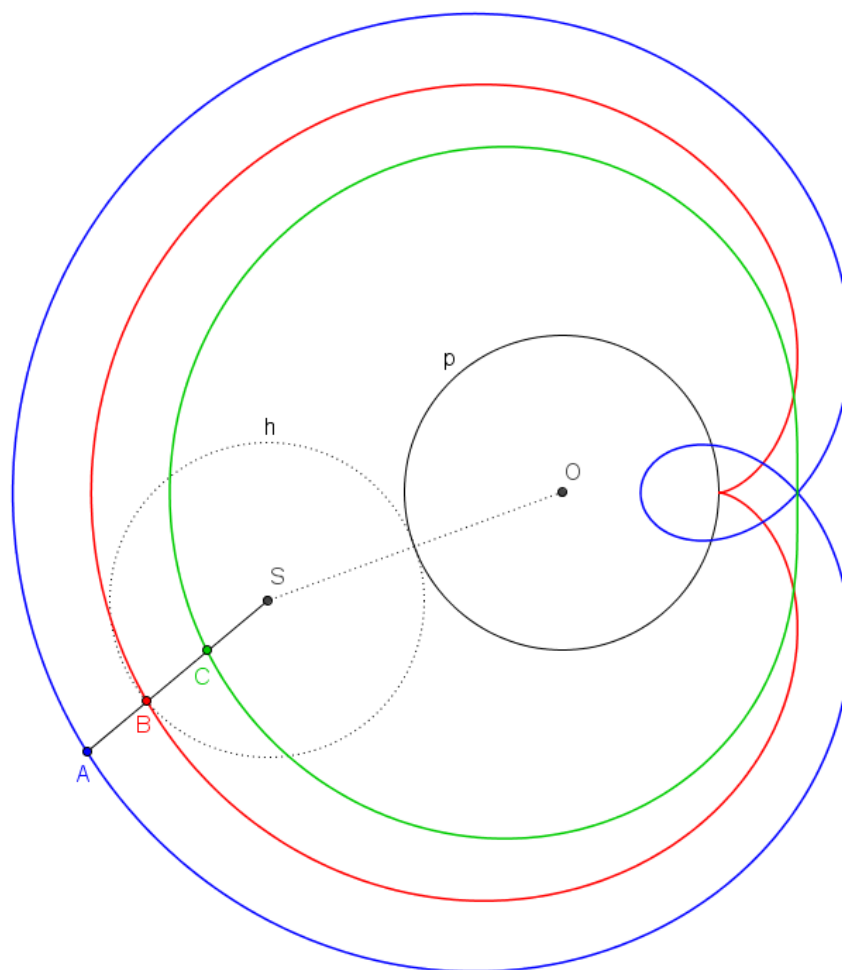


Obrázek 22 – Eliptický (vlevo) a kardioidický pohyb

Lze poměrně jednoduše dokázat²³, že polodie kardioidického a eliptického pohybu jsou kružnice. Stačí si uvědomit, že pevná polodie je množina pólů pohybu a tedy průsečíků normál trajektorií bodů A , B v daném okamžiku. U eliptického pohybu se hybná polodie dotýká pevné uvnitř a prochází jejím středem²⁴. Vzhledem k tomu, že tyto pohyby jsou navzájem vratné, stačí tak zaměnit hybnou polodii za pevnou a můžeme tak pomocí speciálního případu epicykloidy, resp. hypocykloidy sestavit trajektorie obou těchto pohybů. Výsledek je na následujících obrázcích – pevné polodie označené p a hybné polodie h .

²³ [1] s. 104

²⁴ [1] s. 105

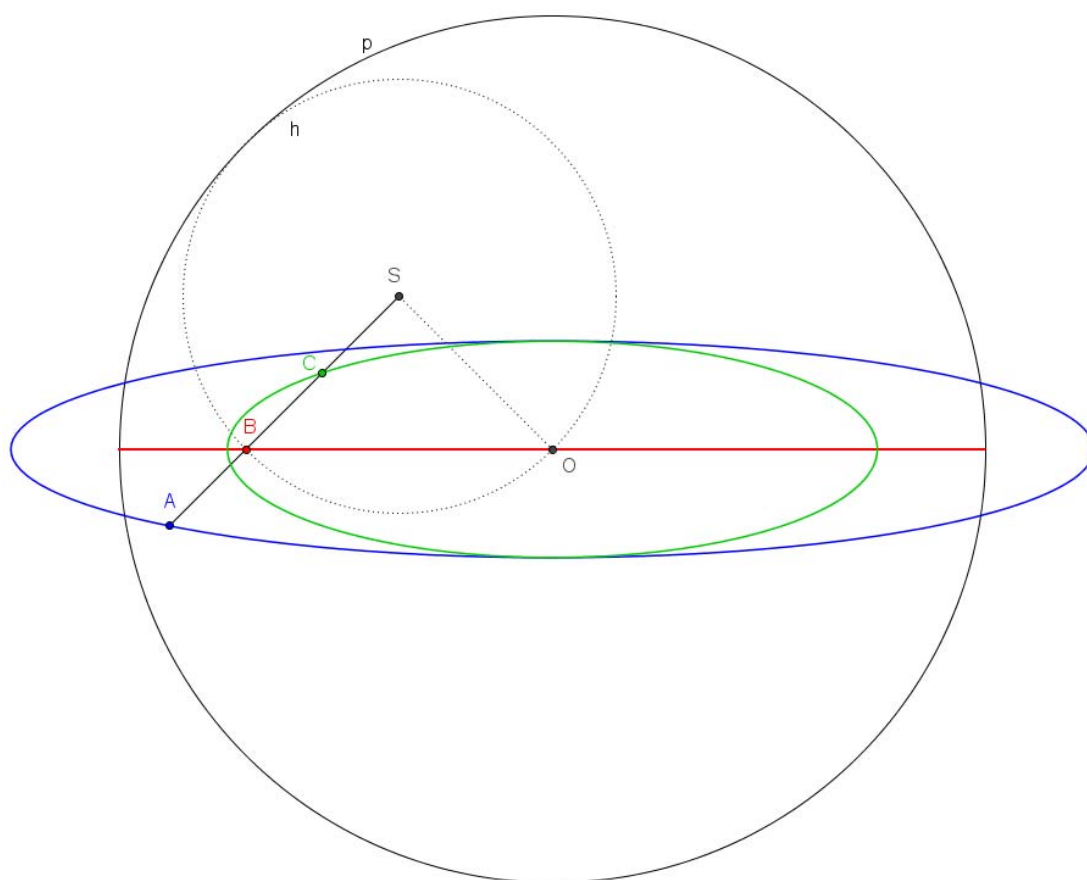


Obrázek 23 - Pascalovy závitnice (konchoidy)

Trajektorie kardioidického pohybu jsou konchoidy a nazývají se Pascalovy závitnice. Červeně zobrazená křivka se nazývá kardioida a vzniká v případě, že $r = R$. Střed pevné polodie je umístěn v počátku. Parametrické rovnice kardioidy²⁵:

$$x = 2rcost - rcos2t, \quad y = 2rsint - rsint2t$$

²⁵ Podle [3] s. 100

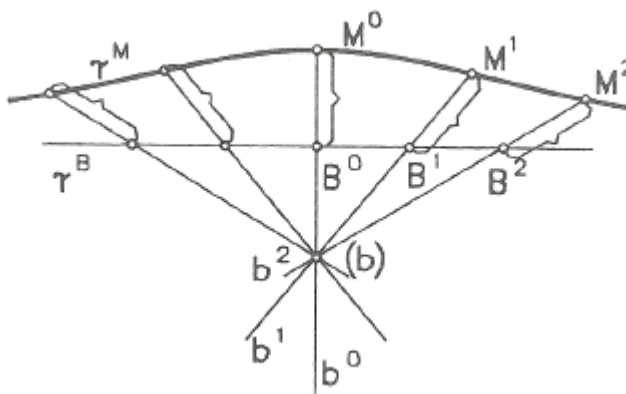


Obrázek 24 – Elipsy jako trajektorie eliptického pohybu

Pokud tvořící bod leží na hybné polodii, jsou trajektoriemi eliptického pohybu úsečky, v ostatních případech jsou to elipsy, které jsou jako kuželosečky uváděny v samostatné kapitole.

3.3 Konchoida

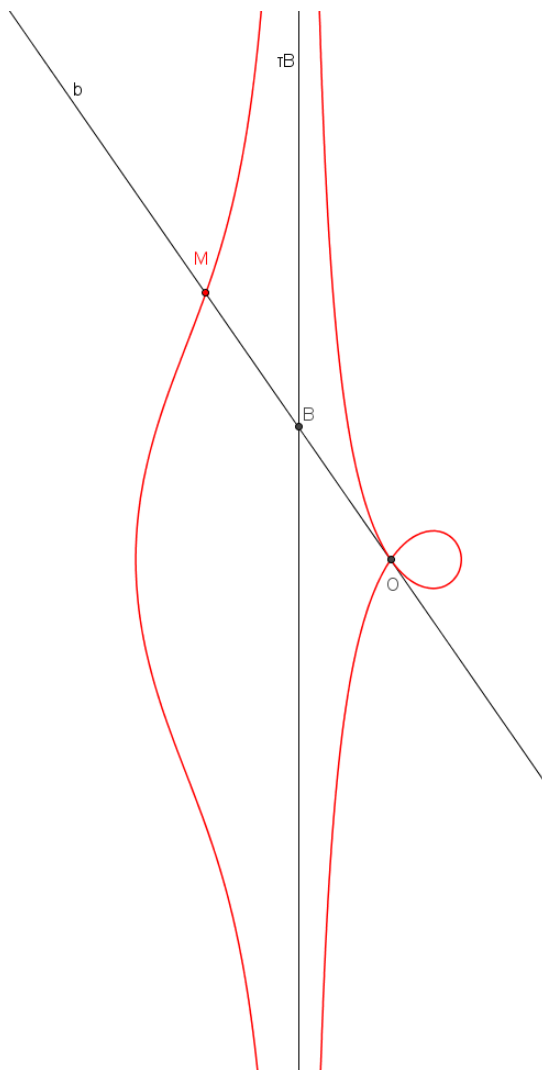
Konchoidální pohyb je určen bodovou obálkou (b) přímky b a trajektorií T^B bodu B . Bod tvořící bodovou obálku nazýváme pólem a trajektorii T^B nazýváme řídicí křivkou. Konchoida je trajektorií konchoidálního pohybu, kterou tvoří bod M . V případě, že bod M leží na přímce b , jde o konchoidu přímou, pokud leží mimo ni, jedná se o kosou konchoidu.



Obrázek 25 - Vznik konchoidálního pohybu

Nicomedova konchoida²⁶ je přímou konchoidou přímky o dvou větvích s řídicí přímkou jako asymptotou. Více na obrázku, kde je pól umístěn v počátku.

²⁶ Nicomedes (asi 280 př. n. l. – asi 210 př. n. l.) – řecký matematik



Obrázek 26 - Nicomedova konchoida

Parametrické rovnice Nicomedovy konchoidy²⁷:

$$x = a \cotg t \pm l \cos t, \quad y = a \pm l \sin t, \quad a > 0, \quad l > 0$$

V případech, kdy je řídicí přímka nahrazena kružnicí, mluvíme o konchoidách kružnic a jako trajektorie takového pohybu vznikají opět Pascalovy závitnice, které již byly uvedeny.

Příklady použití: Větev s vlnou se vyskytuje jako párovod – pákový mechanismus pro přímočarý pohyb.

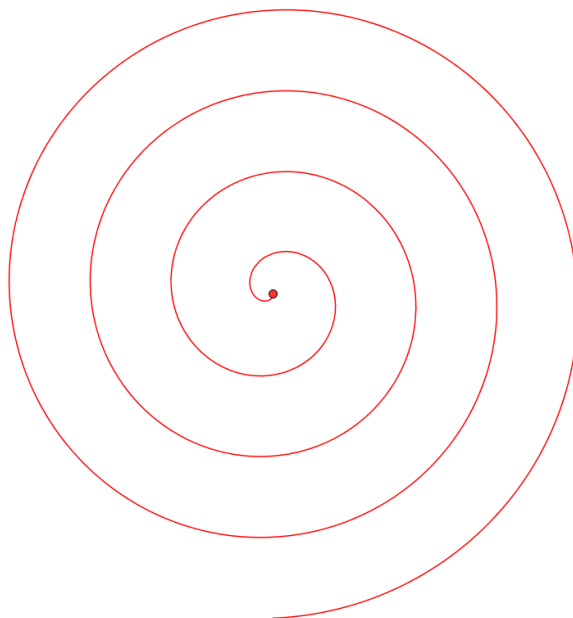
²⁷ Podle [3] s. 128

3.4 Spirály

Spirálu nebo jinak také závitnici vytvoří bod, který se podle nějakého předpisu pohybuje po přímce, která se rovnoměrně otáčí kolem pevně zvoleného bodu. Je to vhodný případ pohybu pro zaznamenání v polárních souřadnicích. Otočením o 360° se vytvoří jeden závit spirály, kterých může být nekonečně mnoho.

3.4.1 Archimédova spirála

Tato spirála, kterou poprvé popsal Archimédes²⁸, a která se také nazývá rovnoměrná, vzniká v případě, kdy oba pohyby, posuvný i otáčivý, jsou rovnoměrné – s příslušným stále stejným otočením přímky kolem počátku se bod posune po přímce o stále stejnou vzdálenost. Dá se tedy říci, že se jedná o speciální případ prodloužené evolventy, kdy velikost prodloužení je stejná jako poloměr základní kružnice.



Obrázek 27 - Archimédova spirála

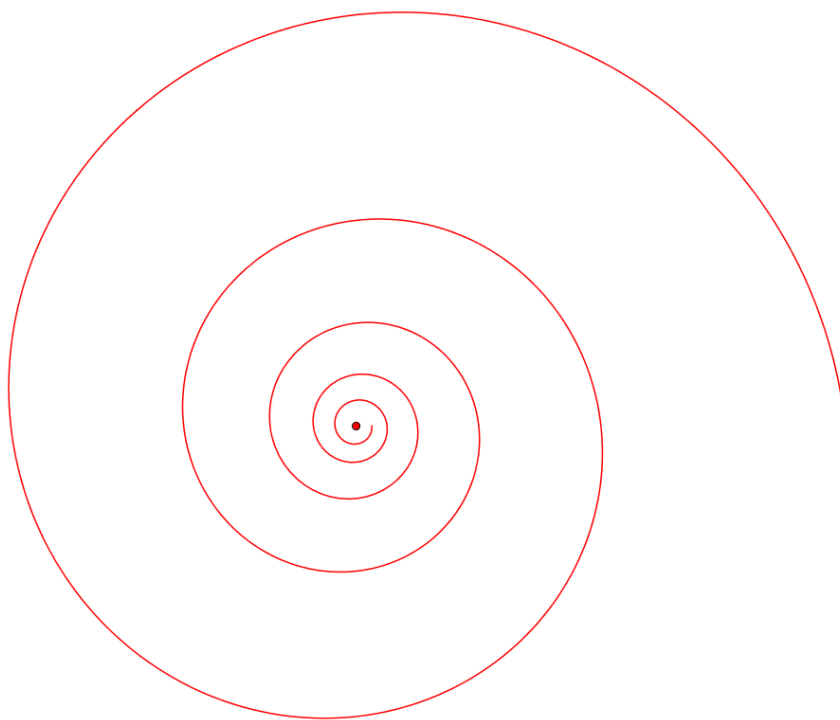
²⁸ Archimédés ze Syrakus (asi 287 př. n. l. – asi 212 př. n. l.) – řecký matematik, fyzik a vynálezce

Rovnice Archimédovy spirály v polárních souřadnicích:

$$\rho = a\varphi, \quad a > 0$$

3.4.2 Logaritmická spirála

Spirála, kterou poprvé popsal²⁹ René Descartes, má na rozdíl od Archimédovy spirály proměnlivou vzdálenost mezi jednotlivými závity – roste geometricky. Tato vlastnost má potom význam při jejím využití. Křivka zaujala Jakoba Bernoulliho³⁰ natolik, že jí nazval zázračnou spirálou.



Obrázek 28 - Logaritmická spirála

Rovnice logaritmické spirály v polárních souřadnicích:

$$\rho = ae^{b\varphi}, \quad a > 0, \quad b > 0$$

²⁹ Podle [10]

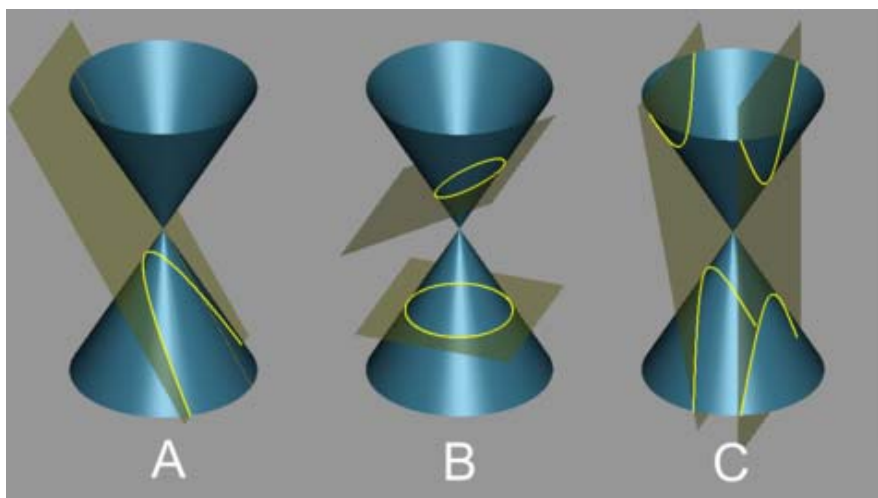
³⁰ Jacob Bernoulli (1655 - 1705) – švýcarský matematik a fyzik, bratr Johanna Bernoulliho

Různých druhů spirál je mnoho, ty již ovšem tak významné využití v technice jako tyto hlavní dvě nemají. Dále mezi spirály patří i již několikrát zmiňované Pascalovy závitnice.

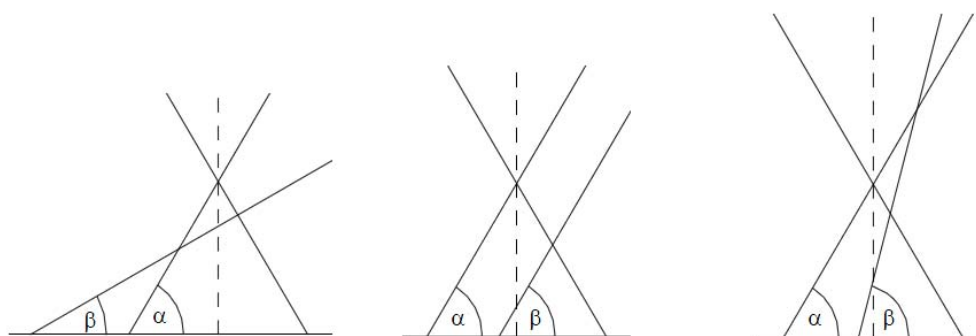
Příklady použití: U Archimédovy spirály jsou to zejména svinuté, navinuté pružiny nebo tvary pákových mechanismů pro převod pohybu z přímého na otočný, ale také tvary lopatek odstředivých čerpadel. U logaritmické spirály je to potom zejména křivka ostří řezacích nástrojů, kde je třeba brát v úvahu to, jakým způsobem nabíhá břit obráběcího nástroje do materiálu – tečna v každém bodě této spirály svírá s průvodičem tečného bodu stále stejný úhel, čímž je zaručen stejný úhel řezu.

3.5 Kuželosečky

Kuželosečky jsou křivky, které vznikají řezem na kuželové ploše nebo jinak řečeno průnikem roviny a kuželové plochy. Odtud také pochází jejich označení. Tímto způsobem je zkoumal již Apollónios z Pergy³¹ kolem roku 200 př. n. l., který dal jednotlivým kuželosečkám také jména.



Obrázek 29 – Vznik jednotlivých druhů kuželoseček



Obrázek 30 - Úhel svíraný rovinou řezu a úhel kuželové plochy
 $\alpha > \beta$ - elipsa, $\alpha = \beta$ - parabola, $\alpha < \beta$ - hyperbola

Rozlišují se kuželosečky singulární, jinak také degenerované nebo nevlastní a regulární, což jsou kuželosečky, které nejsou singulární, a které jsou na obrázcích výše. Singulární kuželosečky vznikají v případě, kdy rovina řezu neprochází kuželem

³¹ Apollónios z Pergy (asi 262 př. n. l. – asi 190 př. n. l.) – řecký geometr a astronom

tak, jako na výše uvedených obrázcích a nemají pro využití zvláštní význam – jde totiž o bod, nebo přímky, popř. o prázdný průnik - pro vrchol kuželu ležící v nekonečnu a rovinu řezu ležící mimo tento speciální kužel (válec).

Kuželosečky se také označují jako algebraické křivky druhého stupně, protože je lze zapisovat algebraickou rovnicí:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

Existuje několik možností³² k určení typu kuželosečky z různě zadaných rovnic. Pro účely práce nemá význam se jimi zabývat. Následuje popis jednotlivých kuželoseček a jejich využití.

3.5.1 Elipsa

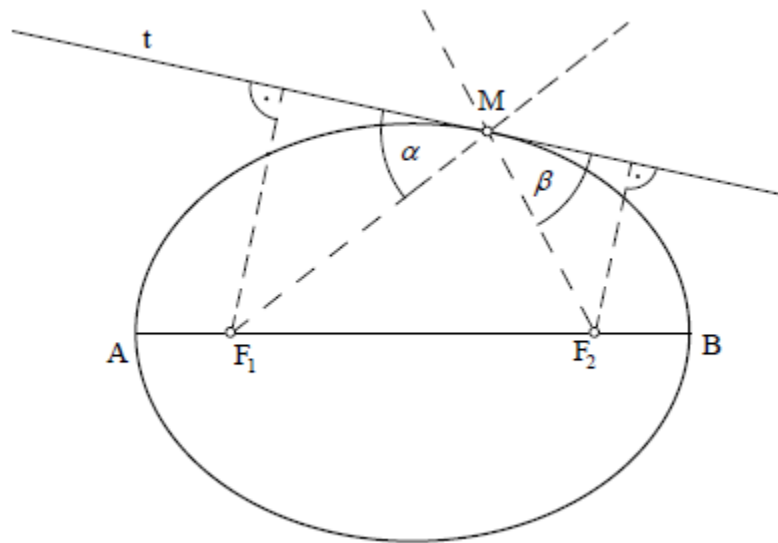
Elipsa je uzavřená křivka, pro kterou platí rovnice

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Geometricky se dá také definovat jako množina bodů v rovině, jejichž součet vzdáleností od daných bodů F_1, F_2 (ohnisek) je konstantní. Zároveň platí následující zásadní pravidlo³³ a to, že tečna elipsy pólí vnější úhly průvodičů bodu dotyku, jak je znázorněno na obrázku 30. To má zásadní význam pro ohniskové vlastnosti elipsy uvedené na závěr u použití.

³² Například v [3]

³³ [2] s. 19



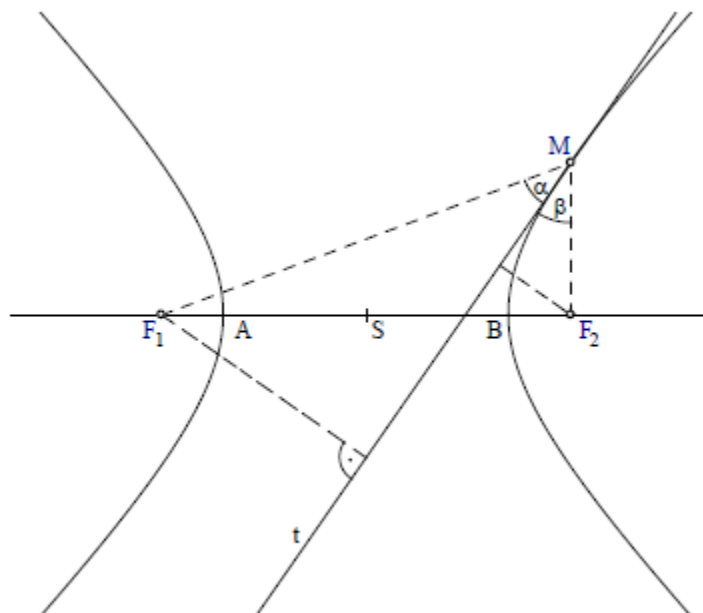
Obrázek 31 - Elipsa, tečna elipsy a průvodiče bodu dotyku

3.5.2 Hyperbola

Hyperbola je křivka, pro kterou platí rovnice

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Obdobně jako u elipsy můžeme hyperbolu geometricky definovat jako množinu bodů v rovině, jejichž rozdíl vzdáleností od daných bodů F_1, F_2 je konstantní. Tečna hyperboly pólí vnější úhly průvodičů bodu dotyku, jak je uvedeno na obrázku 31.



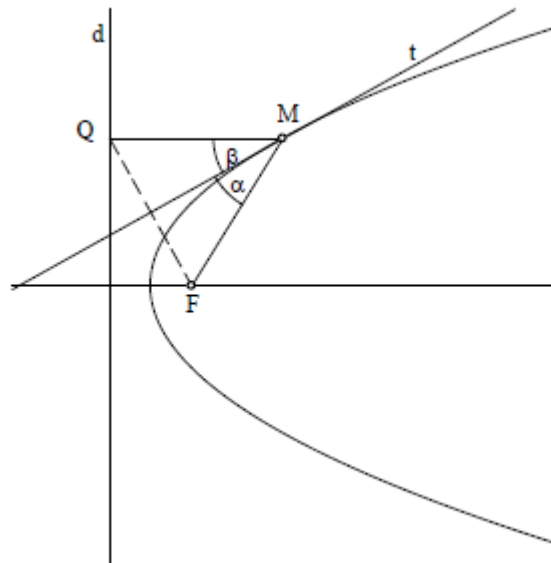
Obrázek 32 - Hyperbola, tečna hyperboly a průvodiče bodu dotyku

3.5.3 Parabola

Parabola je křivka, pro kterou platí rovnice:

$$y^2 = 2px, \quad p > 0$$

Základní definice paraboly je trochu jiná, než u předchozích dvou kuželoseček a to díky tzv. řídicí přímce (d). I tak lze definovat, že parabola je množina bodů v rovině, které mají od daného bodu F a dané přímky d stejnou vzdálenost. Tečna paraboly pólí vnější úhel průvodičů. Vše je patrné z obrázku 32.



Obrázek 33 - Parabola, tečna paraboly

Příklady použití: Kuželosečky jsou používány zejména pro své ohniskové vlastnosti. Jsou i jiné výskyty těchto křivek, například rotační hyperboloid jako chladičí věže elektráren, elipsa jako tvar eliptických převodů, anebo eliptické dráhy u různých kloubových mechanismů, ale právě vlastnosti tečen zmíněné u jednotlivých kuželoseček spolu se zákonem odrazu světla nebo obecněji vlnění způsobují, že se plochy tvořené jednotlivými kuželosečkami používají následujícím způsobem:

- Elipsa vždy odráží paprsek (světelný, tepelný, zvukový) vycházející z jednoho ohniska do ohniska druhého, což se využívá u elipsoidních reflektorů, které soustřeďují světlo do určité vzdálenosti
- Hyperbola má tu vlastnost, že paprsek jdoucí z jednoho ohniska se odráží tak, jako by vycházel z ohniska druhého, hyperbola tedy rozptyluje paprsky jdoucí z ohniska – z vnější i z vnitřní části
- Parabola odráží paprsek, který vychází z ohniska rovnoměrně s osou a naopak paprsky, které s osou rovnoměrně přicházejí, soustřeďuje v ohnisku. Toho se využívá všude tam, kde je třeba paprsky usměrňovat (světlomety, megafony) nebo soustřeďovat (astronomický zrcadlový dalekohled – reflektor)

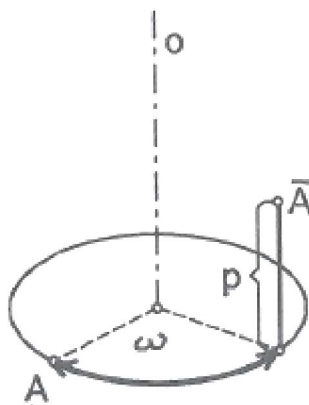
3.6 Šroubovice

Prostorová křivka tedy křivka v E_3 je jednoparametrická množina bodů $\{X[x,y,z]\}$, pro jejíž souřadnice platí:

$$\begin{aligned}x &= x(u), & u &\in I, & I &\subset \mathbb{R} \\y &= y(u) \\z &= z(u)\end{aligned}$$

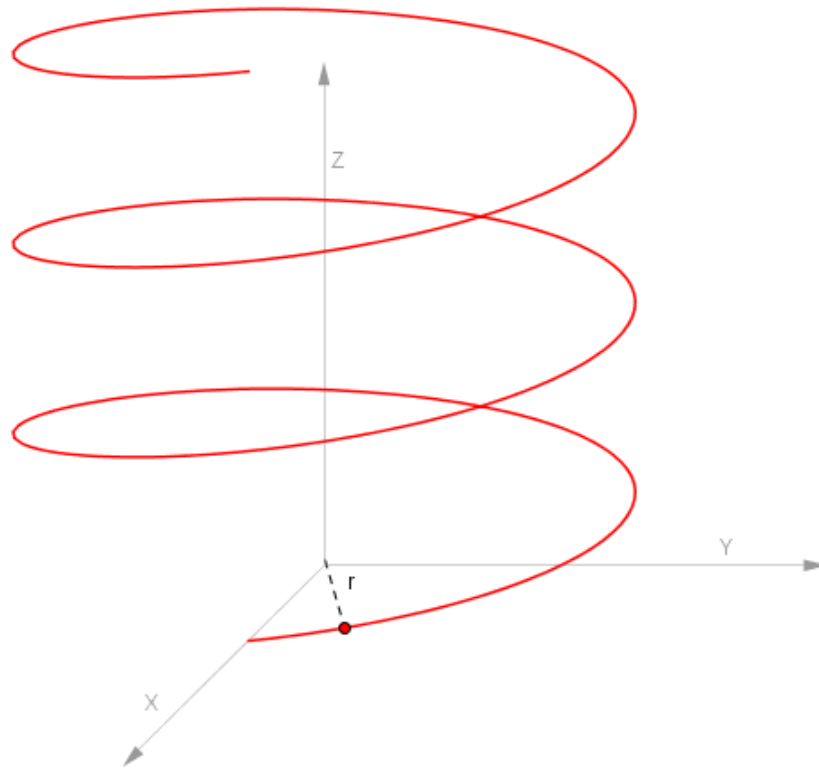
Tečný vektor křivky $\vec{t} = \left(\frac{dx}{du}, \frac{dy}{du}, \frac{dz}{du}\right)$, je obdobou tečného vektoru rovinné křivky.

Šroubový pohyb vzniká složením otáčení kolem osy o a posunutím ve směru osy o , přičemž velikost posunutí je přímo úměrná velikosti otočení. Je ideálním případem pro vyjádření ve válcových souřadnicích. Šroubový pohyb může být pravotočivý anebo levotočivý.



Obrázek 34 - Vznik šroubového pohybu

Šroubovice je prostorová křivka vzniklá šroubovým pohybem.



Obrázek 35 - Šroubovice

Parametrické rovnice v cylindrické soustavě vyplývají z předchozích informací o šroubovém pohybu a šroubovici:

$$r = a$$

$$y = a \sin t$$

$$z = bt$$

Příklady použití: Vinutá pružina, závit, šnekový dopravník, Archimédův šroub pro čerpání vody, točité schodiště, dvoušroubovice DNA

3.7 Brachistochrona

Brachistochrona je křivka nejkratšího času³⁴ nebo také nejrychlejšího sestupu či spádu. Představuje trajektorii, po které se hmotný bod nahrazující odvalující se kuličku dostane působením gravitační síly z jednoho výše položeného bodu do druhého za nejkratší dobu při zanedbání tření.

Brachistochrona je částí prosté cykloidy. Takové řešení, které lze dokázat poměrně složitým způsobem, přinesl v roce 1696 Johann Bernoulli³⁵. Následujícím postupem³⁶ lze potom odvodit vzorec pro výpočet času potřebného pro proběhnutí této dráhy.

S ohledem na zákon zachování energie vyjádříme rovnost energie potenciální a kinetické:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(y_A - y)$$

ze které vyjádříme rychlost

$$v^2 = 2g(y_A - y)$$

a při uvažování rovnice křivky

$$y = y(x)$$

vyjádříme rychlost jako

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}\right)^2} = \sqrt{1 + y'^2} \frac{dx}{dt}$$

odtud nás zajímá již jen ta část pohybu, kdy x-ová souřadnice roste s časem

$$dt = \frac{ds}{v} = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2g(y_A - y)}} dx$$

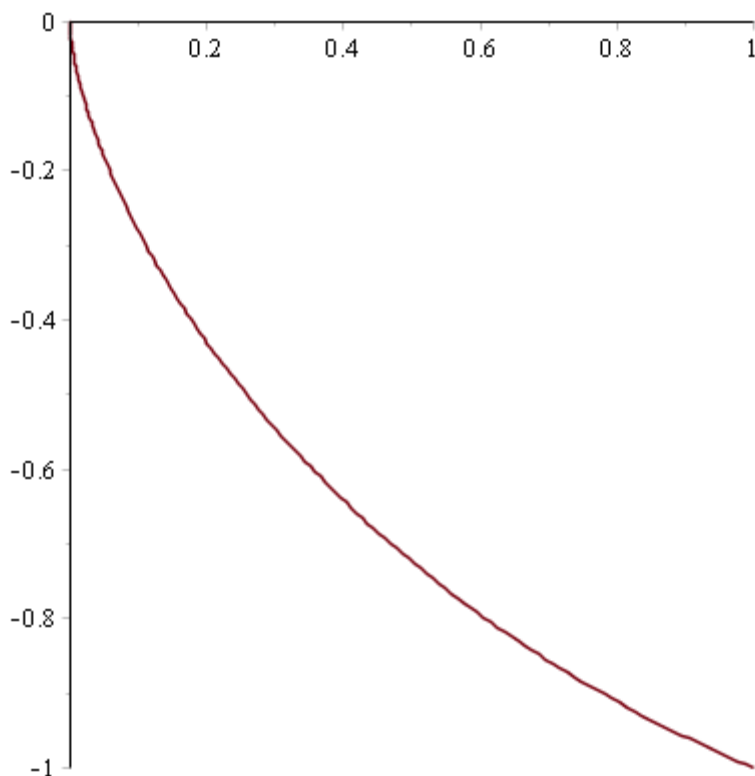
a odtud pro čas

³⁴ z řeckého brachistos - nejkratší, chronos - čas

³⁵ <http://www.matheraetsel.de/texte/FacharbeitChrBLP.pdf>

³⁶ Upraveno podle [11]

$$T = \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2g(y_A - y)}} dx$$



Obrázek 36 - Výsledná brachistochrona pro $y_A = 1$

Zpracování v programu Maple je v příloze *Brachistochrona.mw*.

Další podobnou aplikací převrácené (inverzní) cykloidy je tautochrona³⁷ - křivka stejného času, po které se hmotný bod stejně jako u brachistochrony bez prokluzu působením gravitace dostane do cílového bodu za stejnou dobou bez ohledu na to, z jakého bodu byl spuštěn. Jedná se o zajímavá užití cykloidy, na které je možné narazit. Jako doplňkem se proto těmito křivkami nezabývám podrobně.

³⁷ z řeckého tauto - stejný

4 Závěr

Zpracoval jsem téma, které je v různých obměnách zadávané a tím pádem i popisované poměrně často. Snažil jsem se najít vlastní působ pojetí, který by doplnil stávající práce. Zaměřil jsem se na podrobné vysvětlení způsobu popisu a prezentace křivek, uvedení původu jednotlivých křivek a nalezení vhodného příkladu z praxe. V teoretické části jsem se vlastními slovy snažil popsat to, co jsem jinde těžko sháněl a co podle mého názoru není vždy z dostupných zdrojů snadno pochopitelné. Doufám, že alespoň takovým podrobným popisem a přípravou vlastních kinematických křivek v GeoGebře jsem zadání splnil.

Zajímavé bylo zjištění, kolik různých způsobů vede ke vzniku stejné křivky nebo také to, jak zdánlivě nepodstatné detaily předurčují výběr křivky pro konkrétní použití. Obrázky typického použití křivek jsem nakonec téměř nepoužil. Zvolené slovní označení je, myslím, dostatečné a navíc volně dostupných obrázků podobně velikých, ze kterých by byl výskyt křivky jasný, mnoho není, někdy nejsou vůbec a práce by mi tak při kombinování různých fotografií připadala neuspořádaná.

Seznam použité literatury

- [1] Kargerová, M., Mertl, P., Veselý, Z.: *Inženýrská geometrie*, Praha: Vydavatelství ČVUT PRAHA, 1998, dotisk prvního vydání, 200 stran, ISBN 80-01-01147-X
- [2] Pech, P.: *Kuželosečky*³⁸, České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2004, I vydání, 149 stran, ISBN 80-7040-755-7
- [3] Shikin, E.V.: *Handbook and atlas of curves*, CRC Press, Inc, USA, 1995, 545 stran, ISBN 0-8493-8963-1
- [4] Šmejkal, J.: *Technické křivky geometrické v praxi*, Praha: Česká grafická unie, a.s., 1946, II. vydání, 178 stran
- [5] Wikipedia, the free encyclopedia: Polar coordinate system. [online]. [cit. 2013-5-13]. Dostupné z WWW: http://en.wikipedia.org/wiki/Polar_coordinate_system
- [6] Wikipedia, the free encyclopedia: Cylindrical coordinate system. [online]. [cit. 2013-5-13]. Dostupné z WWW: http://en.wikipedia.org/wiki/Cylindrical_coordinate_system
- [7] Paul's Online Math Notes: Parametric Equations and Curves. [online]. c 2003 - 2013 [cit. 2013-4-25]. Dostupné z WWW: <http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcII/ParametricEqn.aspx>
- [8] Juklová, L. VI. Kinematická geometrie. [online]. [cit. 2013-4-11]. Dostupné z WWW: <http://kag.upol.cz/juklova/3rocnik/KGE1.html>
- [9] WolframMathWorld. Cycloid. [online]. c 1999 – 2013 [cit. 2013-6-16] Dostupné z WWW: <http://mathworld.wolfram.com/Cycloid.html>
- [10] Wikipedia, the free encyclopedia: Logarithmic spiral [online]. [cit. 2013-6-5]. Dostupné z WWW: http://en.wikipedia.org/wiki/Logarithmic_spiral
- [11] Wikipedie, otevřená encyklopedie: Brachistochrona [online]. [cit. 2013-6-5]. Dostupné z WWW: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Brachistochrona>

³⁸ Kniha je dostupná v PDF formátu na stránkách katedry matematiky PF JČU <http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Kuzelosecky.pdf>

Seznam převzatých obrázků a jejich zdrojů

Obrázek 1	http://en.wikipedia.org/wiki/Cartesian_coordinate_system
Obrázek 2	http://www.maths.usyd.edu.au/u/MOW/vectors/vectors-7/v-7-2.html
Obrázek 3	http://en.wikipedia.org/wiki/Polar_coordinate_system
Obrázek 4	http://www.seos-project.eu/modules/laser-rs/laser-rs-c03-s01-p01.html
Obrázek 5	http://en.m.wikipedia.org/wiki/File:Cylindrical_Coordinates.svg
Obrázek 6	[1] s. 73
Obrázek 7	[1] s. 74
Obrázek 8	[1] s. 86
Obrázek 9	[1] s. 83
Obrázek 10	[1] s. 75
Obrázek 11	[1] s. 75
Obrázek 12	[1] s. 76
Obrázek 13	[1] s. 78
Obrázek 14	[1] s. 79
Obrázek 15	[1] s. 90
Obrázek 16	[1] s. 92
Obrázek 19	http://cs.wikipedia.org/wiki/Ozuben%C3%A9_kolo
Obrázek 22	[1] s. 103
Obrázek 25	[1] s. 103
Obrázek 29	http://cs.wikipedia.org/wiki/Ku%C5%BEelose%C4%8Dka
Obrázek 30	[2] s. 56
Obrázek 31	[2] s. 20
Obrázek 32	[2] s. 35
Obrázek 33	[2] s. 50
Obrázek 34	[1] s. 113

Přílohy

1. Brachistochrona.mw
2. Cykloida.ggb
3. Elipticky_polodie.ggb
4. Epicykloida.ggb
5. Evolventa.ggb
6. Hypocykloida.ggb
7. Kardiodicky_polodie.ggb
8. Konchoida.ggb
9. Sroubovice.ggb