



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY  
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS  
AND BIOMECHANICS

## POPIS ROZLOŽENÍ NAPĚTÍ V OKOLÍ BIMATERIÁLOVÉHO VRUBU POMOCÍ ZOBECNĚNÉHO FAKTORU INTENZITY NAPĚTÍ

A STUDY OF THE STRESS DISTRIBUTION AROUND THE BIMATERIAL NOTCH TIP IN THE  
TERMS OF THE GENERALIZED STRESS INTENSITY FACTOR

DIPLOMOVÁ PRÁCE  
MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

Bc. MIROSLAV HRSTKA

VEDOUCÍ PRÁCE  
SUPERVISOR

doc. Ing. TOMÁŠ PROFANT, Ph.D.

BRNO 2012



Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky  
Akademický rok: 2011/12

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

student(ka): Bc. Miroslav Hrstka

který/která studuje v **magisterském studijním programu**

obor: **Inženýrská mechanika a biomechanika (3901T041)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

### **Popis rozložení napětí v okolí bimateriálového vrubu pomocí zobecněného faktoru intenzity napětí**

v anglickém jazyce:

### **A study of the stress distribution around the bimaterial notch tip in the terms of the generalized stress intensity factor**

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Vrub je běžnou součástí technických konstrukcí a také možným zdrojem problémů jejich provozu a užití, zejména v příp. vrubů sestavených z více jak jednoho typu materiálu. Z hlediska rozložení napětí se vrub chová jako jeho koncentrátor způsobující nukleaci a následný růst trhlin ze svého kořene. Cílem uchazeče bude vyjádřit zobecněné faktory intenzity napětí pomocí teorie psi-integrálu a tzv. přímé metody s následným popisem rozložení napětí v blízkosti kořene bimateriálového vrubu a příp. aplikací základních principů lomové mechaniky na vyhodnocování iniciace a budoucího růstu trhlin v jeho okolí.

Cíle diplomové práce:

1. Aplikace teorie lomové mechaniky na některé konfigurace trhliny, vrubu a bi-materiálového rozhraní.
2. Analytický popis napětí v okolí bimateriálového vrubu.
3. Určení koeficientů intenzity napětí bimateriálového vrubu pomocí analytických metod v kombinaci s MKP.

Seznam odborné literatury:

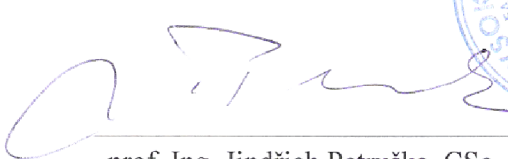
Broberg, K. B., Cracks and Fracture, Academic Press, 1999.


Ševeček, O. Solution of genral stress concetrators in anisotropic media by combination of FEM and the complex potential theory, disertační práce, 2009

Vedoucí diplomové práce: Ing. Tomáš Profant, Ph.D.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2011/12.

V Brně, dne 29.10.2010

  
prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.  
Ředitel ústavu

  
prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.  
Děkan

## Abstrakt

Předkládaná diplomová práce se zabývá problémem stanovení zobecněného faktoru intenzity napětí a následného popisu rozložení napětí v okolí bimateriálového vrubu kombinací analytických a numerických metod. Práci je možné rozdělit do tří částí. První část pojednává o základech lomové mechaniky a mechanice kompozitních materiálů. Druhá část se zabývá metodami řešení rovinné anizotropní pružnosti, za základě kterých jsou ve třetí části sestaveny výpočtové modely. První z nich slouží k určení vlastní hodnoty exponentu singularity pomocí Lechnicky-Eshelby-Strohova formalismu. Druhý výpočtový model slouží k stanovení zobecněného faktoru intenzity napětí metodou  $\Psi$ -integrálu založeného na Bettiho recipročním teorému. Všechny potřebné výpočty jsou prováděny v softwarech ANSYS 12, Maple 12 a Silverforst FTN95. Výsledky budou srovnány s hodnotami získanými metodou přímé extrapolace.

## Summary

The presented diploma thesis deals with a problem of a generalized stress intensity factor determination and a consecutive study of stress distribution around the bimaterial notch tip, combining analytical and numerical methods. This task is possible to sectionalize into three parts. The first part is dedicated to the fundamentals of the linear fracture mechanics and the mechanics of composite materials. The second part deals with methods of anisotropic plane elasticity solution. Pursuant to the solution the computational models in the third part are created. The first model makes for determination of a singularity exponent eigenvalue by dint of Lekhnitskii-Eshelby-Stroh formalism. The second model makes for determination of the generalized stress intensity factor using  $\Psi$ -integral method, which is based on the Betti reciprocal theorem. All needed calculation are performed in the software ANSYS 12, Maple 12 and Silverforst FTN95. Results will be compared with the values obtained from a direct method of the generalised stress intensity factor determination.

## Klíčová slova

Exponent singularity napětí, bimateriálový vrub, Bettiho věta, komplexní potenciál, LES formalismus, ortotropní materiál,  $\Psi$ -integrál, zobecněný faktor intenzity napětí.

## Keywords

Stress singularity exponent, bimaterial notch, Betti theorem, complex potential, LES formalism, orthotropic material,  $\Psi$ -integral, generalized stress intensity factor.



## **Bibliografická citace**

HRSTKA, M. *Popis rozložení napětí v okolí bimateriálového vrubu pomocí zobecněného faktoru intenzity napětí*. Diplomová práce. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2012. 83 s. Vedoucí doc. Ing. Tomáš Profant, Ph.D.





## **Prohlášení**

Prohlašuji, že předkládaná diplomová práce je mojí původní prací, kterou jsem vypracoval samostatně a pod vedením vedoucího diplomové práce a s použitím uvedené literatury.

V Brně dne 22. května 2012

.....  
Bc. Miroslav Hrstka



## **Poděkování**

Rád bych upřímně poděkoval vedoucímu mé diplomové práce doc. Ing. Tomáši Profantovi, Ph.D. za cenné znalosti, jež mi předal, za jeho ochotu a čas, který mi při řešení této práce věnoval. Dále bych chtěl poděkovat svým nejbližším, kteří mě při studiu podporovali.



# Obsah

<b>1. Úvod</b>	<b>15</b>
<b>2. Problémová situace</b>	<b>17</b>
2.1. Analýza problémové situace . . . . .	17
2.2. Typ problému . . . . .	17
2.3. Formulace problému . . . . .	17
2.4. Systém podstatných veličin . . . . .	18
2.4.1. Obecná úvaha o systému podstatných veličin . . . . .	18
2.4.2. Vytvoření systému podstatných veličin . . . . .	18
<b>3. Lineárně elastická lomová mechanika trhliny</b>	<b>21</b>
3.1. Módy zatěžování . . . . .	21
3.2. Napjatost a deformace v okolí trhliny . . . . .	21
3.3. Obecný singulární koncentrátor napětí . . . . .	23
3.4. Rozložení napětí v okolí obecného singulárního koncentrátoru . . . . .	24
<b>4. Mechanika kompozitních materiálů</b>	<b>25</b>
4.1. Definice a klasifikace kompozitních materiálů . . . . .	25
4.2. Mechanika dlouhvláknových kompozitů . . . . .	26
4.3. Konstitutivní vztahy pro anizotropní a ortotropní materiál . . . . .	28
4.3.1. Obecný anizotropní materiál . . . . .	28
4.3.2. Obecný ortotropní materiál . . . . .	29
4.3.3. Transverzálně ortotropní materiál . . . . .	31
4.3.4. Rovinný anizotropní a ortotropní materiál . . . . .	31
<b>5. Metody řešení rovinné anizotropní pružnosti</b>	<b>33</b>
5.1. Mušelišviliho komplexní potenciály . . . . .	33
5.2. Lechnického formalismus . . . . .	35
5.2.1. Výchozí diferenciální rovnice . . . . .	35
5.2.2. Obecné řešení . . . . .	37
5.2.3. Okrajové podmínky . . . . .	40
5.3. Strohův formalismus . . . . .	41
5.3.1. Obecné řešení . . . . .	42
5.3.2. Okrajové podmínky . . . . .	44
<b>6. Řešení problému</b>	<b>47</b>
6.1. Výpočtový model vrubu pro stanovení vlastní hodnoty exponentu singularity	47
6.1.1. Model geometrie a topologie vrubu . . . . .	47
6.1.2. Model okolí objektu . . . . .	48
6.1.3. Model aktivace vrubu z okolí . . . . .	48
6.1.4. Model vlastností struktury vrubu . . . . .	48
6.1.5. Model projevů vrubu . . . . .	48
6.2. Numericko-analytický algoritmus pro určení exponentu singularity . . . . .	48

6.2.1.	Napětí a posuvy v okolí koncentrátoru typu vrub . . . . .	49
6.2.2.	Stanovení komplexních potenciálů . . . . .	50
6.2.3.	Okrajové podmínky pro sestavení matice soustavy . . . . .	51
6.2.4.	Volba matematické teorie . . . . .	52
6.3.	Výpočtový model vrubu pro stanovení zobecněného faktoru intenzity napětí	53
6.3.1.	Volba matematické teorie . . . . .	53
6.3.2.	Model geometrie a topologie vrubu . . . . .	53
6.3.3.	Model okolí objektu . . . . .	55
6.3.4.	Model aktivace vrubu z okolí . . . . .	55
6.3.5.	Model vlastností struktury vrubu . . . . .	57
6.3.6.	Model projevů vrubu . . . . .	57
6.4.	Určení zobecněného faktoru intenzity napětí metodou $\Psi$ -integrálu . . . . .	57
6.5.	Určení zobecněného faktoru metodou přímé extrapolace . . . . .	60
<b>7.</b>	<b>Diskuse</b>	<b>61</b>
7.1.	Výpočet vlastní hodnoty exponentu singularity . . . . .	61
7.2.	Výpočet zobecněného faktoru intenzity napětí . . . . .	62
7.3.	Rozložení napětí v okolí bimateriálového vrubu . . . . .	66
7.4.	Výpočet zobecněného faktoru intenzity napětí metodou přímé extrapolace .	71
7.5.	Použitý hardware . . . . .	72
<b>8.</b>	<b>Závěr</b>	<b>73</b>
<b>9.</b>	<b>Seznam použitých veličin a symbolů</b>	<b>75</b>
	<b>Literatura</b>	<b>77</b>
<b>A.</b>	<b>Dodatek</b>	<b>81</b>
A.1.	Aplikace teorie funkcí komplexní proměnné na ortotropní materiály . . . . .	81

# 1. Úvod

V současné době je u konstrukčních materiálů kladen důraz na minimální hmotnost vzhledem k potřebným mechanickým vlastnostem. Místo konvenční oceli se stále ve větší míře uplatňují kompozitní materiály, jež vykazují výrazné směrové vlastnosti. To s sebou přináší problémy z hlediska posouzení jejich chování za provozu a stanovení mezních stavů. Takovou konstrukcí je například dopravní letadlo Boeing 787 Dreamliner, jehož nemalou část tvoří uhlíková vlákna. Stanovením odezvy takových materiálů se zabývá mechanika kompozitních materiálů. Jsou zpracovány rozsáhlé teorie, kdy při znalosti geometrie a mechanických vlastnosti jednotlivých komponent lze spolehlivě a přesně popsat odezvu při daném zatěžování. Reálné konstrukce však obsahují různé tvarové a materiálové změny, které způsobují koncentraci napětí, což s sebou přináší nebezpečí vzniku a šíření trhlin.

Posouzením napjatosti a deformace v okolí tvarových změn, materiálových nespojitostí a jejich koncentrátorů napětí se zabývá lomová mechanika, jež je jedna z nejmladších disciplín mechaniky těles. Její počátky sahají do období druhé světové války a za jejího zakladatele je považován A. A. Griffith, jenž se zabýval lomovou mechanikou trhlin. Nepochybně se zasadil o respekt k lomové mechanice jako vědního oboru, nicméně teoretické základy lomové mechaniky, aniž by někdo tušil o její existenci, položil Gury V. Kolosov v roce 1907 studiem napjatosti eliptického otvoru. Později došlo k zobecnění na singulární koncentrátor napětí, přičemž trhlinka je považována za jejich speciální případ. To umožnilo zkoumat napětí v okolí vrubů analogicky tomu u trhlin, kde je pole napětí charakterizováno faktorem intenzity napětí. V softwarech založených na metodě konečných prvků existují algoritmy, pomocí kterých lze faktor intenzity napětí vypočítat. Jejich použitelnost je omezena pouze pro případ trhlinky v homogenním izotropním materiálu. Vystává tedy potřeba spolehlivého a rychlého řešení, jak stanovit charakteristiku vrubu – zobecněný faktor intenzity napětí.

Znalost napjatosti a deformace v okolí singulárního koncentrátoru je nezbytná pro určení podmínek iniciace a růstu trhlin. Pro posuzování se používají analytické a numerické metody. Historicky starší analytický přístup je založen na řešení parciálních diferenciálních nebo integrálních rovnic. Mezi numerickými metodami hraje dominantní roli metoda konečných prvků. Analytické metody vyžadují velmi idealizované modely geometrie a zatížení, nicméně jsou důležité pro pochopení procesů v blízkosti kořene koncentrátoru a k ověření přesnosti numerických výsledků. Navzdory vysoké výpočtové rychlosti a kapacity dnešní výpočetní techniky se musí oba přístupy kombinovat.

Obecně platí, že napjatost v okolí obecného koncentrátoru je určena exponentem singularity a zobecněným faktorem intenzity napětí, podobně jako u trhlinky. Cílem předkládané diplomové práce je sestavení výpočtových modelů a algoritmů pro stanovení těchto veličin. Zaměříme se na bimateriálový vrub složený ze dvou ortotropních materiálů, o jejichž vlastnostech je pojednáno v kapitole 4. Samostatná kapitola je věnována přehledu metod řešení rovinné anizotropní pružnosti, na základě kterých je pak sestaven algoritmus pro určení vlastní hodnoty exponentu singularity. Pro stanovení zobecněného faktoru intenzity napětí je použita metoda  $\Psi$ -integrálu (v literatuře také označována jako metoda H-integrálu). Ta je založena na platnosti Bettiho recipročního teorému umožňujícího

kombinovat vzájemné odezvy různých stavů napjatosti, např. bimateriálových vrubů a kombinovat tak analytického a numerického přístupu, např. metodou konečných prvků.



## 2. Problémová situace

„Problémová situace je nestandardní situace, odlišná od situace běžné, a to v tom, že její vyřešení vyžaduje použít i jiné, než rutinní, tj. známé, resp. i algoritmizované, činnosti“<sup>1</sup>. Znamená to, že řešitel musí použít činnosti informační, hodnotící, tvůrčí a rozhodovací a hledat metody řešení. Problém je nestandardní stav entity, který vyžaduje řešení. V souladu s [9] byl vytvořen proces řešení problémové situace.

V okolí vrubů dochází ke koncentraci a přerozdělení napětí, což může mít za následek nežádoucí vznik plastických deformací, iniciaci trhlin a konečnou destrukci tělesa. Aby bylo možné tyto stavy kvantitativně a kvalitativně posoudit, je nutné si uvědomit principy zákonů lomové mechaniky, předpoklady a důsledky jejich aplikace.

### 2.1. Analýza problémové situace

Výsledkem analýzy problémové situace je vytvoření dostatečné poznatkové a zkušenostní báze pro formulaci problému [9]. Ta je tvořena informačními zdroji uvedenými v přehledu použité literatury, na jejich základě je formulován proces řešení problémové situace. V kapitolách 3, 4 a 5 jsou shrnuty teorie popisu anizotropních materiálů a řešení anizotropní pružnosti, na jejich základě jsou sestaveny výpočtové modely.

### 2.2. Typ problému

Z hlediska příčinnosti je problém stanovení rozložení napětí v okolí vrubu problémem přímým. Používá se struktura systému podstatných veličin, která bude uvedena v odstavci 2.4. Pro přímou metodu je charakteristické, že vstupem do algoritmu jsou podmnožiny S0 až S5. Výstupem, tedy řešením, jsou podmnožiny S6 a S7.

### 2.3. Formulace problému

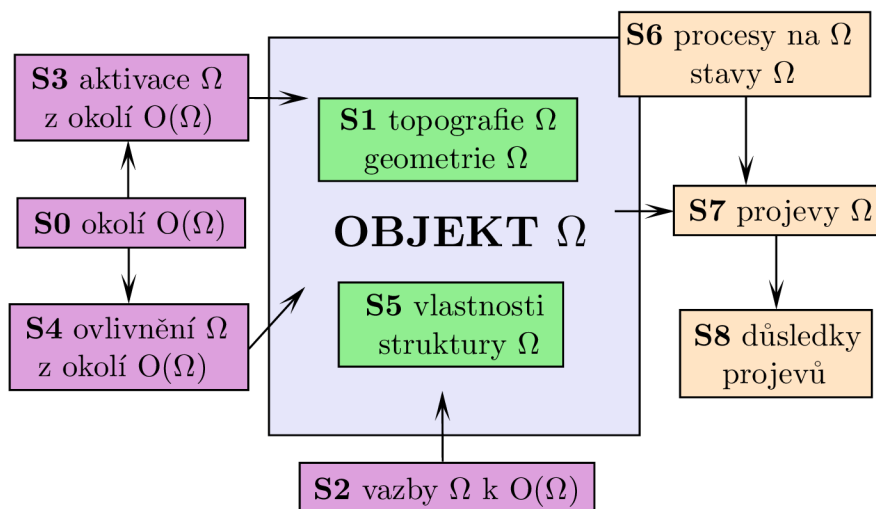
Podle Janíček [9] je cíl subjektem naformulovaný výrok o úmyslu v budoucnosti něco vytvořit nebo vykonat, přičemž impuls k úmyslu vychází ze subjektu samého nebo z jeho okolí na základě úkolů, požadavků či výzev.

#### Cíle práce jsou:

1. Aplikace teorie lomové mechaniky na některé konfigurace vrubu a bimateriálového rozhraní.
2. Určení zobecněných faktorů intenzity napětí bimateriálového vrubu pomocí analytických metod v kombinaci s MKP.
3. Analytický popis napětí v okolí bimateriálového vrubu.

---

<sup>1</sup>JANÍČEK, P. *Systémové pojetí vybraných oborů pro techniky : Hledání souvislostí*, s. 32.



Obr. 2.1: Podmnožiny systému podstatných veličin  $\Sigma(\Omega)$ .

Na základě výše uvedených cílů práce definujeme dílčí problémy, a to problém stanovení vlastní hodnoty exponentu singularity a problém určení zobecněného faktoru intenzity napětí, o jejichž procesu řešení je pojednáno v kapitole 6.

## 2.4. Systém podstatných veličin

Na základě atributu o strukturovatelnosti objektu [9, s. 22] je možné vytvořit systém podstatných veličin  $\Sigma(\Omega)$  podle jednotného scénáře událostí. Ten lze považovat za abstraktní objekt se systémovými vlastnostmi a lze tedy na něj aplikovat systémový přístup.

### 2.4.1. Obecná úvaha o systému podstatných veličin

Janíček [9] říká, že vše, co se děje, má převážně příčinný charakter. Pro každý objekt je charakteristické, že má určité okolí, zaujímá určitou polohu a má určitý tvar. S okolím má určité vazby, přes které se realizují interakce, jež objekt aktivují a ovlivňují. Aktivace vyvolává na objektu procesy, ty mění jeho stavy. Objekt se do svého okolí určitým způsobem projevuje, což má určité důsledky. Uvedené entity se strukturovaně shrnují do systému podstatných veličin složených S0 až S8.

### 2.4.2. Vytvoření systému podstatných veličin

Zkoumanou entitou je objekt  $\Omega_T$ , strukturně spojitě těleso, ve kterém existuje bimateriálový vrub (podobjekt). Ten je konkrétním případem obecného singulárního koncentrátoru napětí. Koncentrátor v sobě zahrnuje materiálové a geometrické nespojitosti, jako jsou trhliny a vruby různých tvarů. Vrub má tzv. kořen, v jehož okolí vrubu dochází při zatěžování součásti ke koncentraci napětí.

## Podmnožina S0 - veličiny popisující okolí entity

Entita je vázána k okolním objektům pomocí různých vazeb. Zkoumaný objekt může být samostatné těleso, které je k okolí vázáno kinematickými vazbami, jako například zkušební CT těleso upnuté ve zkušebním stroji pomocí podpor nebo vetknutím. Nebo je oblast  $\Omega_T$  součástí většího spojitého celku a hranice této oblasti jsou tedy myšlené. Podstatnou veličinou je tedy tuhost okolí, která je reprezentována maticí tuhosti (případně poddajnosti). Pokud by byla úloha teplotního charakteru, dalšími důležitými veličinami by se staly tepelné vlastnosti okolí, např. tepelná kapacita, tepelná vodivost, atd. a s tím spojené creepové charakteristiky.

## Podmnožina S1 - geometrie a topologie entity

Objektovými veličinami jsou rozměry hranice objektu, poloha a tvar bimateriálového rozhraní a především geometrická konfigurace vrubu, která je dána úhly  $\omega_1$  a  $\omega_2$  od bimateriálového rozhraní. Střed souřadnicového systému je v kořeni vrubu. Problém je uvažován jako rovinný, všechny řezy v libovolném místě osy  $z$  jsou stejné. Výpočtový algoritmus umožňuje zvolit mezi stavem rovinné deformace nebo rovinné napjatosti. Napětí je ovlivněno přítomností různých nehomogenit a defektů ve struktuře materiálu, tyto ovlivňující charakteristiky můžeme označit jako metalurgické.

## Podmnožina S2 - vazby a interakce entity s okolím

Jak již bylo řečeno, zkoumaný objekt může být samostatné těleso a hranice entity jsou pak shodné s tvarem tělesa. Nebo je objekt součástí většího tělesa a hranice pak vymezuje vznik singularit. Vazbovou veličinou při mechanickém namáhání je síla (měkké zatěžování), příp. deformace (tvrdé zatěžování), která na entitu působí prostřednictvím vazeb. Ve vazbách by mělo docházet k minimálním ztrátám energie.

## Podmnožina S3 - aktivace entity s okolím

Vrub je aktivován dvěma způsoby zatížení součásti. První způsob je silové zatěžování, kdy zatížení tělesa je dáno silovou soustavou. Silová aktivace se pak označuje jako měkké zatěžování. Druhým způsobem je zatížení deformačně – tvrdé zatěžování. To nastává tehdy, jsou-li primárně v určitých oblastech tělesa zadány posuvy. Podle směru zatížení rozlišujeme různé zatěžovací stavy, tzv. módy zatěžování. Existují tři základní módy zatěžování – rozevírání (mód I), smyk (mód II) a stříh (mód III) (viz kapitola 3). Vrub však může být namáhán obecně. Tohoto stavu lze vždy dosáhnout kombinací základních módů zatěžování.

## Podmnožina S4 - ovlivňování entity s okolím

Změna zatěžovacího stavu vzniká změnou deformačního a napětového pole v okolí vrubu. Tady vzniká oblast, kde dochází k plastické deformaci – plastická zóna. Její tvar, a tedy i tvar matematických vzorců, ovlivňuje, zda nastane prostorová napjatost, nebo prostorová deformace.

### Podmnožina S5 - oborové vlastnosti entity

Podstatné jsou materiálové vlastnosti obou materiálů, ze kterých je bimateriálový vrub složen, tj. Youngův modul pružnosti  $E_i$ , Poissonovo číslo  $\nu_{ij}$  a modul pružnosti ve smyku  $G_{ij}$ . Materiál entity je ortotropní, což znamená, že materiál má v různých, na sebe kolmých směrech, různé mechanické vlastnosti. Matice elastických koeficientů potom obsahuje 9 nezávislých elastických konstant. Konkrétně je uvažován speciální typ ortotropního materiálu – transversálně ortotropní, který umožňuje problém řešit jako rovinný. Existuje rovina kolmá na směr vláken, ve které se materiál chová isotropně. Počet nezávislých elastických konstant se potom snižuje na 5, tj.  $E_1$ ,  $\nu_{12}$ ,  $E_2$ ,  $\nu_{23}$  a  $G_{12}$ , kde 1, 2, 3 jsou hlavní materiálové směry. Dále je podstatnou veličinou zobecněný faktor intenzity napětí  $H_i$ , který, podobně jako faktor intenzity napětí u trhliny, udává charakter singularity v okolí vrubu. Do této kategorie lze zařadit i geometrii entity, tj. úhly  $\omega_1$  a  $\omega_2$ .

### Podmnožina S6 - procesy a stavy

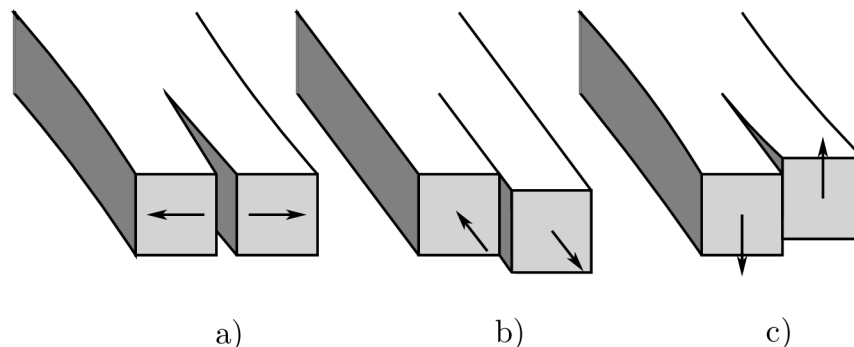
Procesy probíhající ve struktuře objektu posuzujeme na úrovni mechaniky kontinua. Napětí v okolí vrubu se vypočte podle vztahů uvedených v kapitole 3. Pro bimateriálový vrub je počet singulárních členů roven  $n = 2$ , proto z řešení dostaneme dvě vlastní hodnoty exponentu singularity  $\delta$ . Stanovení zobecněného faktoru intenzity napětí se stanoví na základě teorie  $\Psi$ -integrálu, která využívá Bettiho recipročního teorému.

### Podmnožina S7 - projevy entity

Vlivem vnějšího zatížení dojde k vyvolání napětí v okolí entity. Toto napětí zpravidla není homogenní (nemá tedy konstantní hodnotu v oblasti  $\Omega_T$ ), ale má své lokální extrémny. Pokud toto napětí překročí mez kluzu, k čemuž dochází i při malém vnějším zatížení, dojde k plastizaci podoblasti. Tento stav je z hlediska mezních stavů nežádoucí, neboť existuje nebezpečí vzniku trhliny. Možnost vzniku trhliny kvantifikuje zobecněný faktor intenzity napětí. Pokud je jeho hodnota menší, než kritická hodnota zobecněného faktoru intenzity napětí  $H_{crit}$ , trhlina se nebude šířit, nebo se bude šířit stabilně (v případě cyklické únavy). Po překročení této hodnoty se bude trhlina šířit nestabilně. Chováním entity nad mezí kluzu není předmětem problému.

### Podmnožina S8 - důsledky projevů

Mezním stavem projevů je nestabilní šíření trhliny, která byla iniciována v nebezpečných místech vrubu. Tímto místem je zpravidla kořen vrubu. Míra pravděpodobnosti vzniku trhliny závisí na ostrosti kořene vrubu, tj. poloměru jeho zaoblení.



Obr. 3.1: Módy zatěžování trhliny. a) Rozevírání, b) Smyk, c) Střih [7].

## 3. Lineárně elastická lomová mechanika trhliny

Teorie lomové mechaniky je založena na posuzování napjatosti a mezního stavu stability trhliny. Pro popis rozložení napětí v okolí bimateriálového vrubu se vychází z pojmů, které popisují vlastnosti trhliny, protože základním typem porušování je vznik a nestabilní šíření trhliny. Vztahy odvozené pro trhlínu lze pak pro vrub zobecnit. Lineárně elastická lomová mechanika (LELM) je použitelná, předpokládáme-li mezi napětím a deformací lineární závislost, tj. platí Hookeův zákon. Existují dva přístupy posouzení trhliny. Prvním je Griffithův princip energetické bilance, druhým je Irwinův přístup faktoru intenzity napětí (K-koncepce) [27].

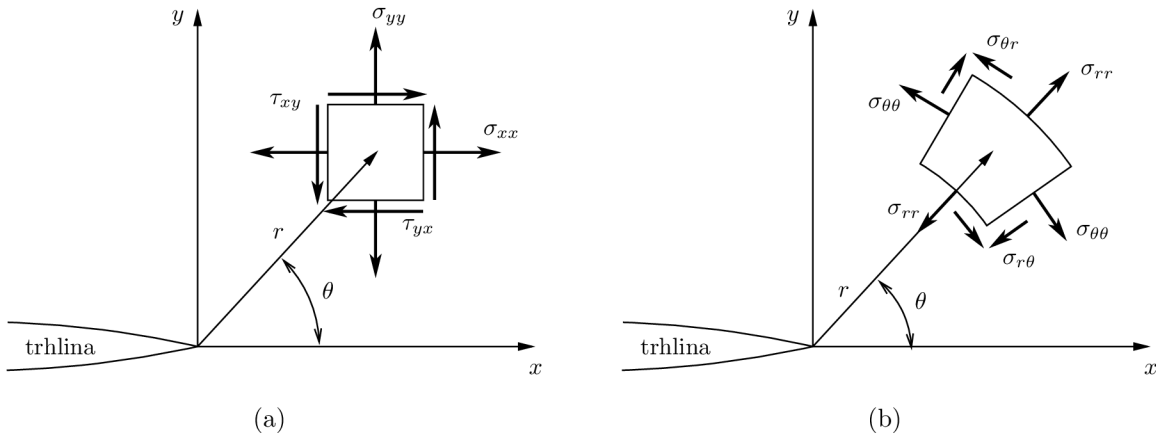
### 3.1. Módy zatěžování

Na napjatost v okolí trhliny má vliv typ otevírání trhliny. Existují tři zatěžovací módy, jimiž může být trhlina namáhána (obrázek 3.1). Tyto módy, které zavedl Irwin (1960), hrají důležitou roli při posuzování trhlín z hlediska koncepce součinitele intenzity napětí.

- a) **Mód I** – označuje se jako rozevírací, dochází k rozevírání trhliny. Napětí působí kolmo na rovinu trhliny (Obr. 3.1a).
- b) **Mód II** – způsobuje smyková napětí, která jsou rovnoběžná s rovinou trhliny a kolmá na její čelo. Nazývá se smyk (Obr. 3.1b).
- c) **Mód III** – vyvolává smyková napětí rovnoběžná jak s rovinou, tak s čelem trhliny. Z hlediska mechanismu je označován jako střih (Obr. 3.1c).

### 3.2. Napjatost a deformace v okolí trhliny

Historicky nejstarší metodou pro popis singularity před čelen trhliny je K-koncepce založena Irwinem (1960) vycházející z prací Westergaarda a Williamse [29], [30]. Je prakticky



**Obr. 3.2:** Napětí působící na element v kartézském (a) a polárním (b) souřadnicovém systému s počátkem v kořeni vrubu. Poloha elementu je určena polárními souřadnicemi  $(r, \theta)$  [7].

použitelná jen u materiálů, u nichž při šíření trhliny vzniká v okolí jejího čela jen malá plastická oblast. Např. [18] uvádí, že velikost plastické oblasti nesmí přesáhnout 2% tloušťky tělesa.

Uvažujme spojitě těleso s trhlinou s ostrým kořenem (poloměr zaoblení se blíží nule, viz obrázek 3.2). Předpokládáme-li lineárně pružný materiál, tak napětí a posuvy před čelem trhliny lze popsat rovnicemi

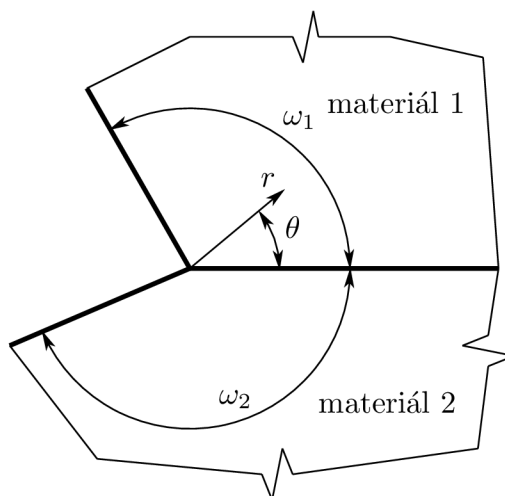
$$\sigma_{ij} = \frac{K_k}{\sqrt{2\pi r}} f_{ijk}(\theta), \quad k = I, II, III, \quad (3.1a)$$

$$u_i = \frac{2K_k(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_i(\theta, \nu), \quad k = I, II, III \quad (3.1b)$$

kde  $K_k$ ,  $k = I, II, III$  se nazývá faktor singularity napětí [4]. Funkce  $f_{ijk}$  resp.  $g_i$  jsou funkce, které závisí pouze na souřadnici  $\theta$ , resp. na souřadnici  $\theta$  a Poissonově čísle  $\nu$ . Uvažujme mód zatěžování I, který je z hlediska šíření trhliny nejnebezpečnější. Rovnice 3.1 se potom zapíše ve tvaru [18]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right], \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right], \\ \sigma_{xy} = \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}, \end{aligned} \quad (3.2a)$$

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{2K_I(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right], \\ u_y &= \frac{2K_I(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[ 2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]. \end{aligned} \quad (3.2b)$$



**Obr. 3.3:** Bimateriálový vrub charakterizovaný úhly  $\omega_1$  a  $\omega_2$ , materiály 1, 2 a polárním souřadnicovým systémem  $(r, \theta)$  s počátkem v kořeni vrubu [7].

Řešení obsahuje člen  $\frac{1}{\sqrt{r}}$ , který pro  $r \rightarrow 0$  roste nade všechny meze a určuje oblast dominantní singularity v okolí trhliny způsobující v něm velkou koncentraci napětí. Jestliže dochází k obecné nespojitosti trhliny, tj. nastává kombinace základních případů, dostaneme napjatost a deformaci v malém okolí kořene trhliny superpozicí dílčích zatěžovacích stavů.

Jiný přístup popisu napjatosti v okolí trhliny představuje Airyho funkce napětí. Uvažujme zatěžování módem  $I$ . Zavedeme Airyho funkci  $\Phi$ , která je biharmonická, tj. vyhovuje biharmonické rovnici

$$\Delta\Delta\Phi = 0, \quad (3.3)$$

kde  $\Delta$  je Laplaceův operátor. Pak jsou napětí v okolí trhliny popsána vztahy

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = \tau_{xy} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}, \quad (3.4)$$

kdy se partikulární řešení získá na základě okrajových podmínek. Podrobnosti jsou uvedeny v [4, s. 667], [19].

### 3.3. Obecný singulární koncentrátor napětí

Obecný singulární koncentrátor napětí je prvek tělesa, který způsobuje růst napětí. Můžeme si ho představit jako obecný vrub z jednoho nebo více materiálů, dislokaci, osamělou sílu, různé otvory atd. Speciálním případem je bimateriálový vrub, jehož existence je spojena s geometrickými nespojitostmi a skokovými změnami materiálových vlastností. Jeho geometrie je dána úhly  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  (obrázek 3.3) a materiálové charakteristiky odpovídající materiálu 1 a 2 jsou určeny Youngovými moduly  $E_i$  a Poissonovými čísly  $\nu_{ij}$ , kde  $i = 1, 2$  [10].

### 3.4. Rozložení napětí v okolí obecného singulárního koncentrátoru

V blízkosti kořene vrubu má pole napětí singulární charakter. V okolí obecného singulárního koncentrátoru může být napětí vyjádřeno vztahem

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{H_k}{\sqrt{2\pi}} r^{-p_k} F_{ijk}, \quad (3.5)$$

kde  $n$  je počet odpovídajících singulárních členů.  $H_k$  představuje zobecněný faktor intenzity napětí (ZFIN). Indexy  $(i, j)$  značí polární souřadnice  $(r, \theta)$  s počátkem v kořeni koncentrátoru, funkce  $F_{ijk}$  je výsledkem limitního analytického řešení problému a závisí na úhlu  $\theta$ , geometrii koncentrátoru a použitém materiálu.

Hodnota  $p_k$  se nazývá exponent singularity napětí a je závislá na konkrétních okrajových podmínkách a konfiguraci koncentrátoru (geometrie, materiál) [12]. Exponent singularity napětí zobecňuje první člen Irwinova vztahu [4, s.79] pro napjatost v okolí čela trhliny a říká tedy, že trhlina v homogenním materiálu je speciální případ obecného singulárního koncentrátoru napětí s exponentem singularity  $p_k = 1/2$  a faktorem intenzity napětí  $K_i$ , kde  $i = I, II, III$  odpovídá módu zatěžování [17]. Obecně pak pro ostré vruby nabývá  $p_k$  hodnot z intervalu  $(0, 1)$ .



## 4. Mechanika kompozitních materiálů

Aby bylo možné popsat napětí a posuvy v okolí vrubu, který se skládá z dvou ortotropních materiálů, je nutné globálně popsat odezvu tohoto materiálu na různý charakter zatěžování. Zaměříme se na anizotropní materiál, jenž je nejobecnějším případem kompozitních materiálů. Cílem následující kapitoly bude tvorba modelu materiálu pomocí základních materiálových charakteristik, jež je možné získat z tahové zkoušky. Ortotropní a izotropní materiály jsou pak speciálním případem materiálu anizotropního.

### 4.1. Definice a klasifikace kompozitních materiálů

Kompozitní materiály jsou složené materiály sestávající se ze dvou či více složek, které mají (většinou značně) odlišné materiálové charakteristiky, přičemž každá ze složek vykonává různou funkci. Materiál výztuže a matrice je možné kombinovat nejrůznějším způsobem za předpokladu, že mezi složkami je dokonalá adheze, dobrá smáčivost a vhodné deformační a napěťové vlastnosti. Není vhodná příliš rozdílná teplotní roztažnost [28]. Omezíme se na konstrukční kompozitní materiály. Ty se skládají z:

- výztuže - nosné části, která udává pevnostní charakteristiky
- matrice - složky udávající tvar tělesa

Základní úlohou mechaniky kompozitů je stanovení deformačních a pevnostních charakteristik kompozitu na základě známých mechanických charakteristik a známé geometrické struktury.

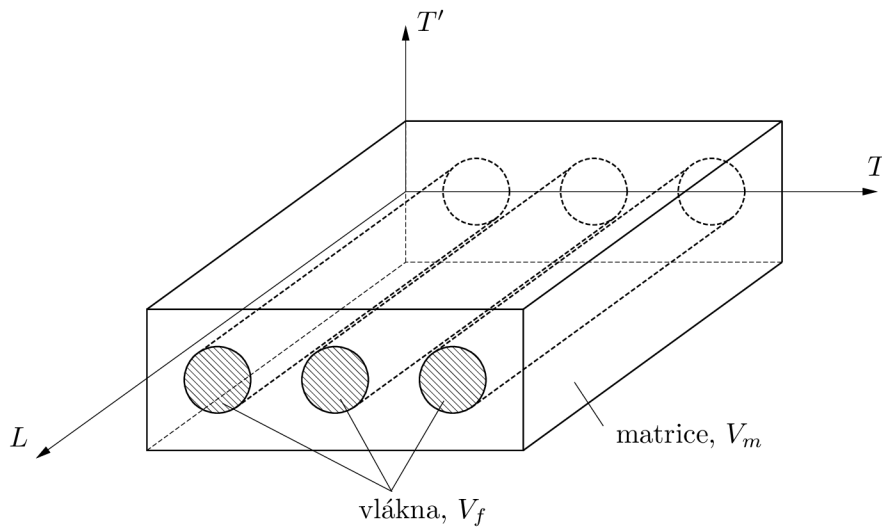
Kompozitní materiály se na základě vlastností jednotlivých složek rozdělují:

#### 1. Dle materiálu výztuže

- kompozity s kovovou výztuží (nejčastěji užívanými jsou W, Mo, Ti, Ni, Fe, ...)
- kompozity s nekovovou výztuží
  - anorganickou – např. keramické materiály ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ , SiC,  $\text{TiB}_2$ ), skla, uhlíková vlákna
  - organickou – např. čedičová vlákna, polymery (KEVLAR, pryskyřice), polyamidová vlákna (NYLON)

#### 2. Dle materiálu matrice

- kompozity s kovovou maticí (nejčastěji užívanými jsou Al, Ag, Fe, Mg, Co, ...)
- kompozity s nekovovou maticí
  - anorganickou – např. keramické materiály ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ , SiC,  $\text{SiO}_2$ ), skla, uhlík
  - organickou – např. polymery (polyestery, vinylestery, polyfenolické pryskyřice, epoxidy, polyamidy, ...)



**Obr. 4.1:** Hlavní materiálové směry  $L$ ,  $T$ ,  $T'$  kompozitní vrstvy dlouhovláknového kompozitu.

### 3. Dle geometrického tvaru výztuže

- vláknové kompozity
- částicové kompozity
- skeletové kompozity

## 4.2. Mechanika dlouhovláknových kompozitů

Vláknové kompozity se dále dělí podle globální orientace vláken na jednosměrné, dvou- směrné, vícesměrné a s náhodnou orientací a podle rozměrů vláken vzhledem k rozměrům struktury na dlouhovláknové a krátkovláknové. Pro dosažení požadovaných vlastností se v praxi používají kombinace těchto vlastností. Z hlediska geometrické struktury se vláknové kompozity rozdělují na

- jednovrstvé – kompozitní materiál se skládá z více vrstev stejně orientovaných
  - dlouhovláknové
  - krátkovláknové
- vícevrstvé – kompozitní materiál je složen z více vrstev různě orientovaných
  - lamináty – kompozit je z více vrstev stejného materiálu, různě orientovaných
  - hybridy – materiál, kde je kompozitní vrstva kombinována s vrstvou kovovou

Mechanické vlastnosti kompozitů se stanoví na základě mechanických charakteristik jednotlivých komponent a geometrického uspořádání struktury. Odvození výpočtového modelu vychází z jedné vrstvy jednosměrně uspořádaného kompozitního materiálu (obr. 4.1).

Hlavní materiálové směry jsou takové, že po zatížení v těchto směrech nedochází ke zkosu [8]. Ve směru vláken je to longitudinální (podélný) směr  $L$  a v transverzální rovině jsou to dva transverzální (příčné) směry  $T$  a  $T'$ . Veličiny, které se týkají vláken, se značí indexem  $f$  (z anglického „fibre“) a indexy týkající se matrice indexem  $m$  (z anglického „matrix“).

Pro stanovení vlastností kompozitu z vlastností komponent se používají směšovací pravidla, a to například pro hustotu, modul pružnosti nebo Poissonovo číslo. Nechť  $V_f$ , resp.  $V_m$  je objem vláken, resp. matrice v celkovém objemu kompozitu  $V_c$ . Objemový podíl vláken a matrice se vypočte podle vztahu

$$v_f = \frac{V_f}{V_c}, \quad v_m = \frac{V_m}{V_c}, \quad (4.1a)$$

nebo obecně při více komponentách

$$v_i = \frac{V_i}{V_c}, \quad i \dots \text{index komponenty}. \quad (4.1b)$$

Pro objemové podíly platí, že

$$\sum_i v_i = 1, \quad i \dots \text{index komponenty}. \quad (4.2)$$

Pro praktické výpočty je potřeba určit napětí v kompozitu. Při zatěžování v longitudinálním směru (podélné namáhání) se vychází z toho, že část celkové síly je přenášena vláknem a část maticí. Nechť tedy  $\sigma_f$  je napětí působící ve vlákně a  $\sigma_m$  napětí působící v matici. Celkové napětí ve dvousložkovém kompozitu  $\sigma_c$  je dáno vztahem

$$\sigma_c = \sigma_f v_f + \sigma_m v_m = \sigma_f v_f + \sigma_m (1 - v_f). \quad (4.3)$$

Na základě rovnice (4.3) lze sestavit tahový diagram (obr. 4.2), ze kterého se následně stanoví pevnost kompozitu  $\sigma_{P,c}$  a kritické přetvoření  $\varepsilon_{f,krit}$ . Proces probíhá ve čtyřech fázích:

**Oblast I** – oblast lineárního chování vlákna i matrice

**Oblast II** – oblast lineárního chování vlákna a nelineárního chování matrice

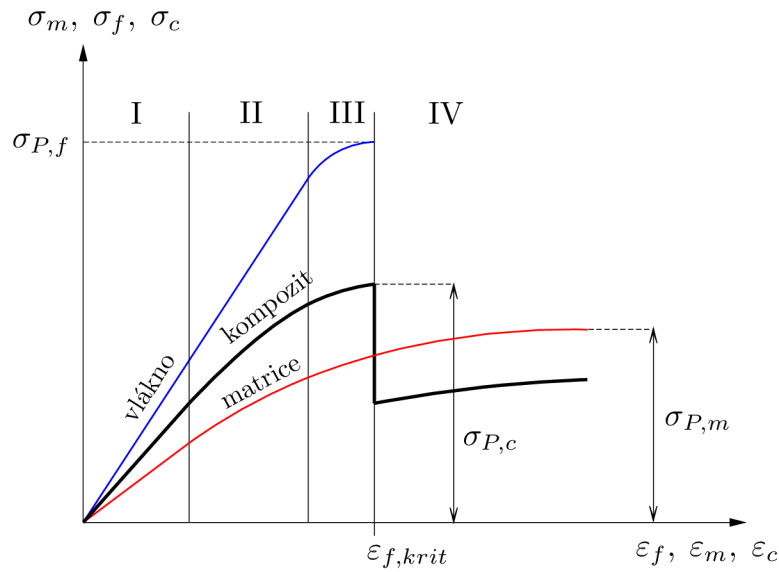
**Oblast III** – oblast nelineárního chování vlákna i matrice

**Oblast IV** – oblast lomu matrice

K prasknutí vlákna dochází mezi oblastí *III* a *IV*. Jestliže v tomto okamžiku dojde i k prasknutí celého materiálu, říkáme, že jde o dobře navržený kompozit [28]. Naopak pevnost špatně navrženého kompozitu je menší než pevnost matrice.

Při zatěžování v transverzálním směru (příčné namáhání) a zatížené smykem je pevnost kompozitu dána pevností matrice. Uvedeným způsobem zatěžování odpovídá 5 hodnot pevnosti, a to podélná pevnost v tahu  $\sigma_{Pt,L}$ , podélná pevnost v tlaku  $\sigma_{Pd,L}$ , příčná pevnost v tahu  $\sigma_{Pt,T}$ , příčná pevnost v tlaku  $\sigma_{Pd,T}$  a smyková pevnost  $\tau_{P,LT}$ .

Výše uvedené modely platí pro ideální kompozity. Existují i přesnější výpočtové modely, např. model Hahnův, Adamsův, o nichž je více pojednáno v [1], [5].



Obr. 4.2: Tahové diagramy vlákna, matrice a kompozitu.

### 4.3. Konstitutivní vztahy pro anizotropní a ortotropní materiál

Nyní přejdeme do výpočtového modelu, které se nazývá mechanické kontinuum, a uvedeme příslušné konstitutivní vztahy popisující skutečnou materiálovou a geometrickou strukturu. Z [8] víme, že při jednoosém tahovém zatěžování izotropního materiálu nedochází ke zkosům, pouze k přetvořením. Naopak při smykovém namáhání jsou nenulové zkosy a nulová přetvoření. U anizotropního materiálu, jenž se vyznačuje odlišnými směrovými vlastnostmi, to neplatí.

#### 4.3.1. Obecný anizotropní materiál

Předpokládejme lineární chování materiálu, tj. oblast I takového diagramu v obrázku 4.2. Potom mají konstitutivní vztahy tvar obecného Hookeova zákona [28]

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, \quad (4.4)$$

kde  $\sigma_{ij}$ , resp.  $\varepsilon_{kl}$  je symetrický tenzor napětí, resp. přetvoření.  $C_{ijkl}$  je tenzor materiálových konstant a obecný anizotropní materiál je z důvodu jeho symetrie charakterizován 21 nezávislými elastickými koeficienty matice tuhostí [3].

Místo čtyřindexových symbolů je pro elastické koeficienty použito dvouindexové  $c_{\alpha\beta}$ , kde  $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 6$ . Index  $\alpha$  nahrazuje dvojici indexů  $i, j$  a index  $\beta$  dvojici indexů  $k, l$  takto [3]:

- je-li  $i = j$ , nebo  $k = l$ , je  $\alpha = i$  a  $\beta = k$ , např.  $C_{1122} = c_{12}$

- je-li  $i \neq j$  nebo  $k \neq l$ , je  $\alpha$  nebo  $\beta$  rovno zbývajícímu číslu z posloupnosti 1, 2, 3 zvětšenému o 3, např.  $C_{1233} = c_{63}$ ,  $C_{3123} = c_{54}$

Podobně zjednodušíme zápis prvků tenzoru napětí a přetvoření, a to:

- je-li  $i = j$ , resp.  $k = l$ , pak  $\sigma_{ij} = \sigma_i$ , resp.  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_i$
- je-li  $i \neq j$ , resp.  $k \neq l$ , pak  $\sigma_{ij} = \tau_{ij}$ , resp.  $\varepsilon_{ij} = \gamma_{ij}$

Častěji se Hookeův zákon zapisuje v inverzním tvaru

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, \quad (4.5)$$

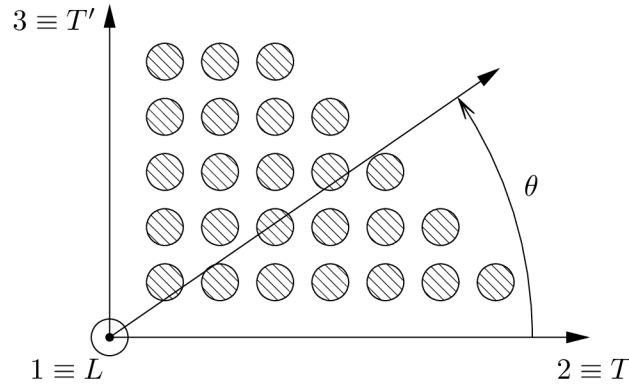
kde  $S_{ijkl}$  se nazývá tenzor elastických modulů, přičemž pro něj platí stejné vlastnosti uvedené pro tenzor materiálových konstant. Odtud a s použitím zkráceného indexování má maticový zápis inverzního Hookeova zákona tvar [28]

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

### 4.3.2. Obecný ortotropní materiál

U ortotropního materiálu existují tři vzájemně kolmé (ortogonální) směry 1, 2, 3. Platí ekvivalence materiálových směrů  $1, 2, 3 \leftrightarrow L, T, T'$ . Počet nezávislých elastických konstant matice poddajnosti se redukuje na 9 a Hookeův zákon se může zapsat v maticovém tvaru následovně

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$



**Obr. 4.3:** Řez jednosměrným ortotropním kompozitem v rovině kolmé na směr vláken  $L$ , směrové elastické charakteristiky nezávisí na úhlu  $\theta$ .

Jednotlivé prvky matice poddajnosti  $S_{ij}$  je možné vyjádřit pomocí inženýrských (fyzikálních) charakteristik  $E$ ,  $\nu$  a  $G$  [8] v daných materiálových směrech. Soustavu rovnic (4.7) lze potom vyjádřit ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Ze symetričnosti matice poddajnosti vyplývá, že

$$\frac{\nu_{\alpha\beta}}{E_\alpha} = \frac{\nu_{\beta\alpha}}{E_\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \quad (4.9)$$

nezávislé parametry jsou potom  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$ ,  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{13}$ ,  $\nu_{23}$ ,  $G_{23}$ ,  $G_{32}$ ,  $G_{12}$ .

Podobně jako u izotropního materiálu jsou hodnoty inženýrských konstant u obecného ortotropního materiálu jistým způsobem omezeny [8], a to

$$E_1, E_2, E_3 > 0, \quad G_{23}, G_{32}, G_{12} > 0, \quad (4.10a)$$

$$(1 - \nu_{23}\nu_{32}) > 0, \quad (1 - \nu_{13}\nu_{31}) > 0, \quad (1 - \nu_{12}\nu_{21}) > 0, \quad (4.10b)$$

$$\begin{aligned} |\nu_{21}| &< \left(\frac{E_2}{E_1}\right)^{\frac{1}{2}}, & |\nu_{12}| &< \left(\frac{E_1}{E_2}\right)^{\frac{1}{2}}, & |\nu_{32}| &< \left(\frac{E_3}{E_2}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ |\nu_{23}| &< \left(\frac{E_2}{E_3}\right)^{\frac{1}{2}}, & |\nu_{13}| &< \left(\frac{E_1}{E_3}\right)^{\frac{1}{2}}, & |\nu_{31}| &< \left(\frac{E_3}{E_1}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.10c)$$

### 4.3.3. Transverzálně ortotropní materiál

U transversálně ortotropního kompozitního materiálu existuje jedna hlavní ortotropní rovina 2, 3 (obr. 4.3), ve které jsou ve všech směrech mechanické vlastnosti stejné a materiál se chová izotropně. Tento případ nastává v praxi u jednosměrného dlouhovláknového kompozitu s dostatečně hustou sítí vláken. Úpravou Hookeova zákona získáme [28]

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{32} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{22} - S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Stejně jako u obecného ortotropního materiálu je možné prvky matice poddajnosti vyjádřit pomocí inženýrských materiálových konstant, tj.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_{23})}{E_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Výraz pro prvek  $S_{44}$  je přímou analogií s případem izotropního materiálu pro přepočítání mezi modulem pružnosti v tahu a ve smyku v ortotropní rovině

$$G_{23} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})} \quad (4.13)$$

a počet nezávislých elastických konstant se redukuje na 5, konkrétně  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{23}$ ,  $G_{12}$ .

### 4.3.4. Rovinný anizotropní a ortotropní materiál

Zvláštním případem obecného prostorového anizotropického materiálu je rovinný anizotropní materiál, který se používá jako výpočtový model tenké vrstvy kompozitu – laminy. Předpokládejme, že element leží v hlavní souřadnicové rovině 1, 2 a je v ní také zatěžován. Jde tedy o rovinnou napjatost, přičemž pro napětí v rovinách kolmých na 1, 2 platí následující [8]

$$\sigma_3 = 0, \quad \tau_{31} = 0, \quad \tau_{32} = 0. \quad (4.14)$$

K přepočtu na rovinnou deformaci slouží vztah (6.2) v kapitole 6.2. Pro případ anizotropního materiálu se vztah (4.6) redukuje na

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{26} \\ S_{61} & S_{62} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

a má 6 nezávislých prvků. V případě rovinné ortotropie materiálu předpokládejme, že vzájemně kolmé osy 1, 2 jsou hlavními ortotropními směry. Rovnice (4.7) se redukuje na

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Pokud použijeme inženýrských materiálových konstant, potom má inverzní Hookeův zákon podle (4.8) pro rovinný případ tvar

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Nezávislé elastické konstant jsou pro tento případ 4 a to  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\nu_{12}$ ,  $G_{12}$  [28].



## 5. Metody řešení rovinné anizotropní pružnosti

### 5.1. Mušelišviliho komplexní potenciály

Historicky nejstarším aparátém řešení rovinné pružnosti pomocí komplexní proměnné je metoda Mušelišviliho komplexních potenciálů. Je odvozena pro izotropní materiál a následující aparáty vychází z jejího zobecnění. Rovnice popisující napjatost a deformaci se vyznačují přítomností degenerovaných členů.

Pro řešení rovinných problémů se zavádí dva komplexní potenciály, kdy vztahy pro pole posuvů jsou stanoveny na základě Papkovičova řešení [21],

$$2G\mathbf{u} = 4(1 - \nu)\Psi - \text{grad}(\varphi + \mathbf{r} \cdot \Psi), \quad (5.1)$$

kde  $\mathbf{u} = u\hat{\mathbf{x}} + v\hat{\mathbf{y}} + w\hat{\mathbf{z}}$  je vektor přetvoření s jednotkovými vektory báze  $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$  v souřadnicových směrech  $x, y$  a  $z$ ,  $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$  je polohový vektor. Veličiny  $\varphi$  a  $\Psi = \psi_x\hat{\mathbf{x}} + \psi_y\hat{\mathbf{y}} + \psi_z\hat{\mathbf{z}}$  jsou skalární a vektorové potenciály, které vyhovují Laplaceovým rovnicím

$$\Delta\varphi = 0, \quad \Delta\Psi = 0. \quad (5.2)$$

Papkovičovo řešení vyhovuje rovnicím rovnováhy (bez zahrnutí setrvačných účinků)

$$c_p^2 \text{grad div } \mathbf{u} - c_s^2 \text{rot rot } \mathbf{u} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (5.3)$$

kde

$$c_p^2 = \frac{\kappa + 4G/3}{\rho}, \quad c_s^2 = \frac{G}{\rho}, \quad (5.4)$$

kde  $G$  je modul pružnosti ve smyku,  $\rho$  je hustota materiálu a  $\kappa$  je modul pružnosti v tlaku. Při podmínkách rovinné deformace, tj.  $u = u(x, y), v = v(x, y), w = 0$ , jsou potenciály pouze funkcemi  $x$  a  $y$  a  $z$  rovnice (5.1) vyplývá

$$\psi_z = 0. \quad (5.5)$$

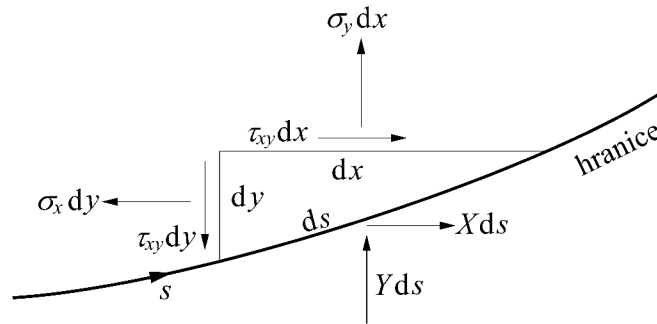
Jelikož jsou potenciály  $\varphi, \psi_x$  a  $\psi_y$  harmonické funkce, mohou být vyjádřeny pomocí reálné a imaginární části nějaké analytické funkce  $f(z)$  a  $g(z)$  v oblasti uzavřené hranicemi tělesa

$$\psi_x = \Re f(z), \quad \psi_y = \Im f(z), \quad \varphi = \Re g(z), \quad (5.6)$$

přičemž  $\Re$  značí reálnou a  $\Im$  imaginární část komplexního čísla. Z předchozích vztahů, Hookeova zákona a rovnice 5.1 lze odvodit následující vztahy pro napětí a posuvy

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4\Re[f'(z)], \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[\bar{z}f''(z) + g''(z)], \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$2G(u + iv) = \frac{1 + k^2}{1 - k^2}f(z) - z\overline{f'(z)} - \overline{g'(z)}. \quad (5.8)$$



**Obr. 5.1:** Vazebné hraniční síly  $X$  a  $Y$  v kartézských souřadnicích a jejich vztah k tenzoru napětí

kde  $k$  je tzv. Kolosovova konstanta<sup>1</sup>, pro kterou platí

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \quad \text{pro rovinnou deformaci,} \\ k^2 &= \frac{1 - \nu}{2} \quad \text{pro rovinnou napjatost.} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Stanovení napětí  $\sigma_z$  u rovinné deformace a  $\varepsilon_z$  u rovinné napjatosti plyne z rovnic

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1 - 2k^2}{2(1 - k^2)}(\sigma_x + \sigma_y) \quad \text{pro rovinnou deformaci,} \quad (5.10)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\nu}{1 - \nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = -\frac{1 - 2k^2}{2k^2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad \text{pro rovinnou napjatost.} \quad (5.11)$$

Nechť  $X ds$  a  $Y ds$  jsou složky síly působící na element hranice  $ds$ , kde  $s$  je délka křivky hranice, a necht' je splněna podmínka, že kladný směr  $s$  je orientován ke vnější normále hranice  $n$  stejně jako souřadnicový směr  $y$  k  $x$  (obr. 5.1), t.j. při pohybu v kladném směru  $s$  ukazuje vnější normála doprava. Potom

$$X ds = \sigma_x dy - \tau_{xy} dx, \quad Y ds = \tau_{xy} dy - \sigma_y dx, \quad (5.12)$$

$$(X + iY) ds = -\frac{i}{2} [(\sigma_y - \sigma_x - 2i\tau_{xy}) d\bar{z} + (\sigma_y + \sigma_x) dz]. \quad (5.13)$$

Dosazením vztahů (5.7) dostaneme rovnici

$$(X + iY) ds = -i d[f(z) + z\overline{f'(z)} + \overline{g'(z)}]. \quad (5.14)$$

Vztahy (5.14) se použijí v případě první okrajové úlohy (tj. na hranicích jsou předepsané síly). Pro případ druhé okrajové úlohy, kdy jsou na hranici předepsány posuvy, se aplikuje vztah (5.8) [4].

<sup>1</sup>Gury Kolosov – matematik, profesor Petrohradské univerzity (1893 – 1936). Zabýval se problematikou komplexních potenciálů v matematické teorii pružnosti. Jako první popsal singulární charakter napětí v okolí eliptického otvoru s malým poloměrem křivosti vzhledem k jeho délce (1909).

## 5.2. Lechnického formalismus

Základní rovnice anizotropní pružnosti se skládají z rovnic rovnováhy za podmínek statického zatěžování (5.15a), geometrických vztahů (5.15b) za podmínek malých deformací a konstitutivních vztahů (5.15c). To jsou

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0, \quad (5.15a)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (5.15b)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (5.15c)$$

kde indexy  $i, j, k, l = 1, 2, 3$ . Rovnice (5.15) tvoří soustavu 15 parciálních diferenciálních rovnic s 15 neznámými funkcemi  $u_i$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , jež jsou závislé na souřadnicích  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . V případě rovinné anizotropní pružnosti je pro stanovení neznámých funkcí výhodné zavést formulaci pomocí komplexní proměnné. V literatuře existují dva různé přístupy lineární anizotropní pružnosti komplexní proměnné. První z nich, Lechnického formalismus (1963, 1968), vychází z rovnic rovnováhy napětí a na ně následujících rovnic kompatibility. Druhý, Strohův formalismus (1958, 1962), vychází z rovnic kompatibility posuvů následovaných rovnicemi rovnováhy. O Strohově formalismu je pojednáno v oddílu 5.3.

### 5.2.1. Výchozí diferenciální rovnice

V Lechnického formalismu je pro dvoudimenzionální problém uvažovaná oblast ohraničená válcovou plochou. Její řez může být jak konečný, tak nekonečný.

V dalším textu změníme značení tenzorů a vektorů na konvenční, používané například v [8]. A to  $u_1 \rightarrow u$ ,  $u_2 \rightarrow v$ ,  $u_3 \rightarrow w$ ,  $2\varepsilon_{12} = \gamma_{xy}$ ,  $\sigma_{12} = \tau_{xy}$ ,  $C_{1112} = C_{16}$ ,  $4S_{2331} = S_{45}$ . Pak mohou být rovnice (5.15) vyjádřeny jako

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \end{aligned} \quad (5.16a)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= S_{11}\sigma_x + S_{12}\sigma_y + S_{13}\sigma_z + S_{14}\tau_{yz} + S_{15}\tau_{xz} + S_{16}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= S_{12}\sigma_x + S_{22}\sigma_y + S_{23}\sigma_z + S_{24}\tau_{yz} + S_{25}\tau_{xz} + S_{26}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_z &= S_{13}\sigma_x + S_{23}\sigma_y + S_{33}\sigma_z + S_{34}\tau_{yz} + S_{35}\tau_{xz} + S_{36}\tau_{xy}, \\ \gamma_{yz} &= S_{14}\sigma_x + S_{24}\sigma_y + S_{34}\sigma_z + S_{44}\tau_{yz} + S_{45}\tau_{xz} + S_{46}\tau_{xy}, \\ \gamma_{xz} &= S_{15}\sigma_x + S_{25}\sigma_y + S_{35}\sigma_z + S_{45}\tau_{yz} + S_{55}\tau_{xz} + S_{56}\tau_{xy}, \\ \gamma_{xy} &= S_{16}\sigma_x + S_{26}\sigma_y + S_{36}\sigma_z + S_{46}\tau_{yz} + S_{56}\tau_{xz} + S_{66}\tau_{xy}, \end{aligned} \quad (5.16b)$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{F}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} - \frac{\partial \hat{F}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0, \quad (5.16c)$$

kde  $\hat{F}$  je potenciál objemových sil  $\hat{f}_x, \hat{f}_y$  definovaný jako

$$\hat{f}_x = -\frac{\partial \hat{F}}{\partial x}, \quad \hat{f}_y = -\frac{\partial \hat{F}}{\partial y}. \quad (5.16d)$$

Všimněme si, že v (5.16c) jsou napětí závislá pouze na dvou souřadnicích a objemové síly působí v normálovém směru na válcovou plochu a nemění se v závislosti na poloze  $z$  této plochy.

Pro napětí  $\sigma_z$  platí vztah

$$\sigma_z = Ax + By + C - \frac{1}{S_{33}} (S_{13}\sigma_x + S_{23}\sigma_y + S_{34}\tau_{yz} + S_{35}\tau_{xz} + S_{36}\tau_{xy}), \quad (5.17)$$

kde  $A, B, C$  jsou libovolné konstanty a  $D$  je lineární funkce  $x$  a  $y$  definovaná jako

$$D = S_{33}(Ax + By + C). \quad (5.18)$$

Obecné vztahy pro posuvy jsou vyjádřeny pomocí rovnic

$$\begin{aligned} u &= -\frac{AS_{33}}{2}z^2 - \alpha yz + U(x, y) + \omega_2 z - \omega_3 y + u_0, \\ v &= -\frac{BS_{33}}{2}z^2 + \alpha xz + V(x, y) + \omega_3 x - \omega_1 z + v_0, \\ w &= (Ax + By + C)S_{33}z + W(x, y) + \omega_1 y - \omega_2 x + w_0, \end{aligned} \quad (5.19)$$

kde nové funkce  $U, V, W$ , jsou libovolné funkce  $x$  a  $y$  a jsou výsledkem integrace uvedené v [6, s. 32]. Konstanty  $\alpha, \omega_1, \omega_2$  jsou libovolné.

V obecném řešení (5.19) značí konstanty  $u_0, v_0, w_0$  posuvy tuhého tělesa a  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  rotaci tělesa vůči osám  $x, y, z$ ;  $\alpha$  je relativní úhel rotace kolem osy  $z$ , tj. úhel otočení střednicové plochy na jednotku délky.  $A$  a  $B$  charakterizují ohyb tělesa v rovinách  $x - z$  a  $y - z$ .

Ke stanovení neznámých funkcí  $U, V, W$  uvažujme nejprve rovnice rovnováhy (5.16c), které musí splňovat dvě Airyho funkce napětí  $\phi(x, y)$  a  $\psi(x, y)$  definované jako

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \hat{F}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \hat{F}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}, \quad \tau_{xz} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (5.20)$$

Aplikací (5.20) eliminujeme  $U, V, W$  a dostaneme systém diferenciálních rovnic, kde funkce napětí  $\phi(x, y)$  a  $\psi(x, y)$  musí splňovat

$$\begin{aligned} L_4 \phi + L_3 \psi &= -(\hat{S}_{12} + \hat{S}_{22}) \frac{\partial^2 \hat{F}}{\partial x^2} + (\hat{S}_{16} + \hat{S}_{26}) \frac{\partial^2 \hat{F}}{\partial x \partial y} - (\hat{S}_{11} + \hat{S}_{12}) \frac{\partial^2 \hat{F}}{\partial y^2}, \\ L_3 \phi + L_2 \psi &= -2\alpha + AS_{34} - BS_{35} + (\hat{S}_{14} + \hat{S}_{24}) \frac{\partial \hat{F}}{\partial x} + (\hat{S}_{15} + \hat{S}_{25}) \frac{\partial \hat{F}}{\partial y}, \end{aligned} \quad (5.21a)$$

kde  $L_2, L_3, L_4$  jsou diferenciální operátory druhého, třetího a čtvrtého řádu, které mají tvar

$$\begin{aligned} L_2 &= \hat{S}_{44} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\hat{S}_{45} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \hat{S}_{55} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ L_3 &= -\hat{S}_{24} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (\hat{S}_{25} + \hat{S}_{46}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (\hat{S}_{14} + \hat{S}_{56}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + \hat{S}_{15} \frac{\partial^3}{\partial y^3}, \\ L_4 &= \hat{S}_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2\hat{S}_{26} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + (\hat{S}_{12} + \hat{S}_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 2\hat{S}_{16} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + \hat{S}_{11} \frac{\partial^4}{\partial y^4}. \end{aligned} \quad (5.21b)$$

Řešením funkce napětí (5.21) jsou pak napětí, přetvoření a posuvy vyjádřeny pomocí rovnic (5.20), (5.17) a (5.16b). Konkrétnímu řešení těchto veličin se realizuje splněním předepsaných okrajových podmínek. Rovnice (5.21) potom tvoří systém 15 diferenciálních rovnic jako alternativu diferenciálních rovnic (5.16a)-(5.16c).

### 5.2.2. Obecné řešení

Obecné řešení (5.21) může být vyjádřeno ve tvaru

$$\phi = \phi^{(h)} + \phi^{(p)}, \quad \psi = \psi^{(h)} + \psi^{(p)}, \quad (5.22a)$$

kde

$$\begin{aligned} L_4 \phi^{(h)} + L_3 \psi^{(h)} &= 0, \\ L_3 \phi^{(h)} + L_2 \psi^{(h)} &= 0. \end{aligned} \quad (5.22b)$$

Potenciály  $\phi^{(p)}, \psi^{(p)}$  jsou partikulární řešení nehomogenního systému (5.21a). Partikulární řešení závisí na tvaru funkcí pravých stran (5.21a). V dalším textu se budeme zabývat řešením obecného řešení homogenního systému (5.22b). Eliminujeme např. funkci  $\psi^{(h)}$ . Z (5.22b)<sub>1</sub> a (5.22b)<sub>2</sub> získáme rovnici šestého řádu

$$(L_4 L_2 - L_3^2) \phi^{(h)} = 0. \quad (5.23)$$

Operátor šestého řádu  $L_4 L_2 - L_3^2$  může být rozložen do šesti lineárních operátorů prvního řádu, tj.

$$D_6 D_5 D_4 D_3 D_2 D_1 \phi^{(h)} = 0, \quad (5.24a)$$

kde

$$D_k = \frac{\partial}{\partial y} - \mu_k \frac{\partial}{\partial x}, \quad (5.24b)$$

a  $\mu_k$  jsou kořeny charakteristické rovnice diferenciální rovnice (5.23), tj.

$$l_4(\mu) l_2(\mu) - l_3^2(\mu) = 0, \quad (5.25a)$$

kde

$$\begin{aligned} l_2(\mu) &= \hat{S}_{55} \mu^2 - 2\hat{S}_{45} \mu + \hat{S}_{44}, \\ l_3(\mu) &= \hat{S}_{15} \mu^3 - (\hat{S}_{14} + \hat{S}_{56}) \mu^2 + (\hat{S}_{25} + \hat{S}_{46}) \mu - \hat{S}_{24}, \\ l_4(\mu) &= \hat{S}_{11} \mu^4 - 2\hat{S}_{16} \mu^3 + (2\hat{S}_{12} + \hat{S}_{66}) \mu^2 - 2\hat{S}_{26} \mu + \hat{S}_{22}. \end{aligned} \quad (5.25b)$$

Lechnický dokázal, že  $\mu_k$  není reálné, jestliže deformační energie je kladná. To znamená, že  $\mu_k$  je vždy komplexní nebo ryze imaginární a skládá se ze tří párů komplexně sdružených čísel, jestliže charakteristická rovnice (5.25) je algebraická rovnice šestého řádu s reálnými koeficienty. Označme

$$\mu_{k+3} = \bar{\mu}_k, \quad \Im \mu_k > 0, \quad k = 1, 2, 3, \quad (5.26)$$

Předpokládejme, že  $\mu_k$  jsou různé. (5.24a) bude potom řešeno jako šest rovnic prvního řádu:

$$D_1 \phi^{(h)} = \varphi_2, \quad D_2 \varphi_2 = \varphi_3, \quad D_3 \varphi_3 = \varphi_4, \quad D_4 \varphi_4 = \varphi_5, \quad D_5 \varphi_5 = \varphi_6, \quad D_6 \varphi_6 = 0. \quad (5.27)$$

Postupným řešením předchozí rovnice v pořadí  $\varphi_6, \varphi_5, \varphi_4, \varphi_3, \varphi_2, \phi^{(h)}$ , dostaneme

$$\phi^{(h)} = 2\Re \sum_{k=1}^3 \phi_k(z_k), \quad z_k = x + \mu_k y. \quad (5.28)$$

Podobně vyjádřením (5.23) pomocí  $\psi^{(h)}$  a řešením stejným postupem jako v (5.24), (5.25), (5.26), (5.27) obdržíme

$$\psi^{(h)} = 2\Re \sum_{k=1}^3 \psi_k(z_k). \quad (5.29)$$

$\phi_k$  můžeme definovat jako složenou funkci

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial x} = \frac{\partial \phi_k}{\partial z_k} \frac{\partial z_k}{\partial x} = \frac{\partial \phi_k}{\partial z_k}, \quad \frac{\partial \phi_k}{\partial y} = \frac{\partial \phi_k}{\partial z_k} \frac{\partial z_k}{\partial y} = \mu_k \frac{\partial \phi_k}{\partial z_k}, \quad (5.30)$$

Podobně se vyjádří  $\psi_k$ . Substituce (5.28) a (5.29) do (5.22b) povede k homogenním rovnicím

$$\begin{aligned} 2\Re \sum_{k=1}^3 \{l_4(\mu_k) \phi_k''''(z_k) + l_3(\mu_k) \psi_k''''(z_k)\} &= 0, \\ 2\Re \sum_{k=1}^3 \{l_3(\mu_k) \phi_k''''(z_k) + l_2(\mu_k) \psi_k''''(z_k)\} &= 0, \end{aligned} \quad (5.31)$$

kde symbol derivace ( $'$ ) značí derivaci podle komplexní proměnné  $z_k$ . Integrací první nebo druhé rovnice (5.31) podle  $z_k$  získáme vztah mezi  $\phi_k$  a  $\psi_k$ , tj.

$$\psi_k(z_k) = \eta_k \phi_k'(z_k) + a_k z_k + b_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad (5.32a)$$

kde

$$\eta_k = \frac{-l_3(\mu_k)}{l_2(\mu_k)} = \frac{-l_4(\mu_k)}{l_4(\mu_k)}, \quad (5.32b)$$

a  $a_k, b_k$  jsou libovolné konstanty. Uvažujme monoklinické materiály symetrické podle roviny  $z = 0$ . Koeficienty polynomu  $l_3(\mu)$  se vynulují a rovnice šestého řádu (5.25a) přejde na dvě rovnice:  $l_2(\mu) = 0$  a  $l_4(\mu) = 0$ . Nechť  $\mu_1$  a  $\mu_2$  jsou kořeny  $l_4(\mu) = 0$  a  $\mu_3$  kořeny  $l_2(\mu) = 0$ , tj.  $l_4(\mu_1) = l_4(\mu_2) = l_2(\mu_3) = 0$ , což vede k výsledku, že  $l_2(\mu_1), l_2(\mu_2), l_4(\mu_3) \neq 0$

za předpokladu různých  $\mu_k$ . Pak  $\eta_1 = \eta_2 = 0$  a  $\eta_3 \rightarrow \infty$ . Abychom se vyhnuli koeficientům, které se mohou blížit nekonečným hodnotám, zavedme

$$\lambda_1 = \eta_1 = \frac{-l_3(\mu_1)}{l_2(\mu_1)}, \quad \lambda_2 = \eta_2 = \frac{-l_3(\mu_2)}{l_2(\mu_2)}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{\eta_3} = \frac{-l_3(\mu_3)}{l_2(\mu_3)}. \quad (5.33)$$

Volbou  $a_k, b_k$  rovno nule a použitím (5.33), (5.32a), (5.28) a (5.29) dostaneme obecné vyjádření funkcí napětí jako

$$\begin{aligned} \phi &= 2\Re \{ \phi_1(z_1) + \phi_2(z_2) + \phi_3(z_3) \} + \phi^{(p)}, \\ \psi &= 2\Re \left\{ \lambda_1 \phi_1'(z_1) + \lambda_2 \phi_2'(z_2) + \frac{1}{\lambda_3} \phi_3'(z_3) \right\} + \psi^{(p)}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Poznamenejme, že  $\lambda_3$  může být pro určité materiály nulové. Abychom se vyhnuli nulovým koeficientům, můžeme tyto koeficienty zahrnout do funkce a vytvořit tak novou funkci napětí  $f_k(z_k)$ ,  $k = 1, 2, 3$

$$f_1(z_1) = \phi_1'(z_1), \quad f_2(z_2) = \phi_2'(z_2), \quad f_3(z_3) = \frac{1}{\lambda_3} \phi_3'(z_3). \quad (5.35)$$

Použitím těchto funkcí a substitucí (5.34) do (5.20) vyjádříme napětí jako

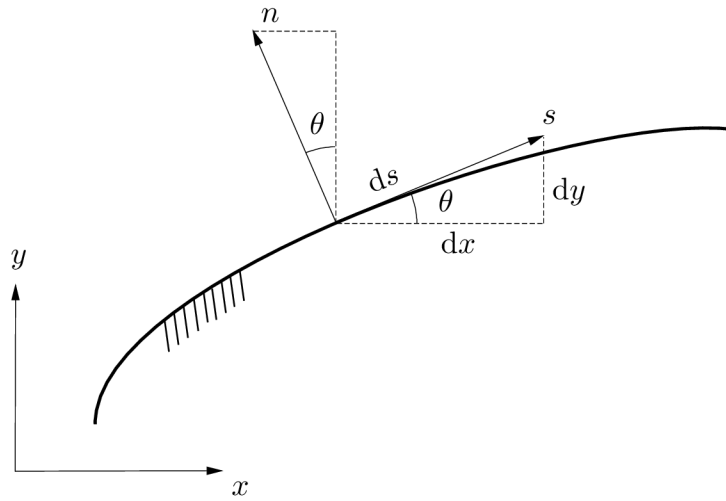
$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2\Re \left\{ \mu_1^2 f_1'(z_1) + \mu_2^2 f_2'(z_2) + \mu_3^2 \lambda_3 f_3'(z_3) \right\} + \frac{\partial^2 \phi^{(p)}}{\partial y^2} + \hat{F}, \\ \sigma_y &= 2\Re \left\{ f_1'(z_1) + f_2'(z_2) + \lambda_3 f_3'(z_3) \right\} + \frac{\partial^2 \phi^{(p)}}{\partial x^2} + \hat{F}, \\ \tau_{xy} &= -2\Re \left\{ \mu_1 f_1'(z_1) + \mu_2 f_2'(z_2) + \mu_3 \lambda_3 f_3'(z_3) \right\} - \frac{\partial^2 \phi^{(p)}}{\partial x \partial y}, \\ \tau_{xz} &= 2\Re \left\{ \mu_1 \lambda_1 f_1'(z_1) + \mu_2 \lambda_2 f_2'(z_2) + \mu_3 f_3'(z_3) \right\} + \frac{\partial \psi^{(p)}}{\partial y}, \\ \tau_{yz} &= -2\Re \left\{ \lambda_1 f_1'(z_1) + \lambda_2 f_2'(z_2) + f_3'(z_3) \right\} - \frac{\partial \psi^{(p)}}{\partial x}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Funkce  $U, V, W$  se podle [6, s. 36] naleznou jako

$$\begin{aligned} U &= 2\Re \sum_{k=1}^3 a_{1k} f_k(z_k) + U^{(p)}, \\ V &= 2\Re \sum_{k=1}^3 a_{2k} f_k(z_k) + V^{(p)}, \\ W &= 2\Re \sum_{k=1}^3 a_{3k} f_k(z_k) + W^{(p)}, \end{aligned} \quad (5.37a)$$

kde

$$\begin{aligned} a_{1k} &= p_1(\mu_k) + \lambda_k q_1(\mu_k), \\ a_{2k} &= [p_2(\mu_k) + \lambda_k q_2(\mu_k)] / \mu_k, \\ a_{3k} &= [p_4(\mu_k) + \lambda_k q_4(\mu_k)] / \mu_k, \quad k = 1, 2, \\ a_{13} &= \lambda_3 p_1(\mu_3) + q_1(\mu_3), \\ a_{23} &= [\lambda_3 p_2(\mu_3) + q_2(\mu_3)] / \mu_3, \\ a_{33} &= [\lambda_3 p_4(\mu_3) + q_4(\mu_3)] / \mu_3, \end{aligned} \quad (5.37b)$$



**Obr. 5.2:** Tečný a normálový směr hranice oblasti materiálu.

a

$$p_j(\mu_k) = \mu_k^2 \hat{S}_{j1} + \hat{S}_{j2} - \mu_k \hat{S}_{j6}, \quad q_j(\mu_k) = \mu_k \hat{S}_{j5} - \hat{S}_{j4}, \quad j = 1, 2, 4, 5, 6. \quad (5.37c)$$

Funkce  $U^{(p)}$ ,  $V^{(p)}$ ,  $W^{(p)}$  z (5.37a) jsou řešení rovnic [6, s. 32] a odpovídají funkcím  $\phi^{(p)}$ ,  $\psi^{(p)}$ ,  $\hat{F}$  a lineárním funkcím  $S_{ij}(Ax + By + C)$ ,  $\alpha y$ ,  $-\alpha x$ .

### 5.2.3. Okrajové podmínky

Obecné vyjádření napětí a posuvů v (5.36)a (5.37) obsahují libovolné neznámé komplexní funkce  $f_k(z_k)$ , které se určí splněním předepsaných okrajových podmínek. Ty jsou obvykle předepisovány pomocí výsledných sil a posuvů. Protože obecné vztahy pro napětí a posuvy jsou vyjádřeny pomocí funkcí  $f_k(z_k)$ , je tedy vhodné pomocí těchto funkcí vyjádřit také okrajové podmínky.

*První okrajová úloha:*

$$\sigma_x n_1 + \tau_{xy} n_2 = \hat{t}_x, \quad \tau_{xy} n_1 + \sigma_y n_2 = \hat{t}_y, \quad \tau_{xz} n_1 + \tau_{yz} n_2 = 0, \quad (5.38)$$

kde  $(\hat{t}_x, \hat{t}_y, 0)$  jsou vektory napětí předepsané podél hranice. Normálové vektory hranice jsou vyjádřeny jako

$$n_1 = -\sin \theta = -\frac{dy}{ds}, \quad n_2 = \cos \theta = \frac{dx}{ds}. \quad (5.39)$$

Tečný směr  $s$  je volen tak, že při pohybu v kladném směru  $s$  leží oblast materiálu po pravé straně (viz obr. 5.2). Dosazením (5.20) a (5.39) do (5.38) a integrováním výsledných rovnic podle  $s$  obdržíme

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \hat{t}_x(s) + c_1, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = \hat{t}_y(s) + c_2, \quad \psi = c_3, \quad (5.40a)$$



kde  $c_1, c_2, c_3$  jsou integrační konstanty a

$$\begin{aligned}\hat{t}_x(s) &= - \int_0^s \left( \hat{t}_x + \hat{F} \frac{dy}{ds} \right) ds, \\ \hat{t}_y(s) &= \int_0^s \left( \hat{t}_y - \hat{F} \frac{dx}{ds} \right) ds.\end{aligned}\tag{5.40b}$$

Substitucí (5.34) a (5.35) do (5.40a) získáme

$$\begin{aligned}2\Re \{ \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \mu_3 \lambda_3 f_3 \} &= \hat{t}_x(s) - \frac{\partial \phi^{(p)}}{\partial y} + c_1, \\ 2\Re \{ f_1 + f_2 + \lambda_3 f_3 \} &= \hat{t}_y(s) - \frac{\partial \phi^{(p)}}{\partial x} + c_2, \\ 2\Re \{ \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + f_3 \} &= -\psi^{(p)} + c_3.\end{aligned}\tag{5.41}$$

*Druhá okrajová úloha:*

$$u = \hat{u}, \quad v = \hat{v}, \quad w = \hat{w},\tag{5.42}$$

kde  $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$  jsou posuvy předepsané na hranici oblasti. Substitucí (5.37) do (5.42) obdržíme

$$\begin{aligned}2\Re \sum_{k=1}^3 a_{1k} f_k &= -U^{(p)} + \hat{U} + \omega_3 y - u_0, \\ 2\Re \sum_{k=1}^3 a_{2k} f_k &= -V^{(p)} + \hat{V} - \omega_3 x - v_0, \\ 2\Re \sum_{k=1}^3 a_{3k} f_k &= -W^{(p)} + \hat{W} - w_0,\end{aligned}\tag{5.43a}$$

kde  $\hat{U}, \hat{V}, \hat{W}$  jsou vyjádřeny jako [6]

$$\begin{aligned}\hat{U} &= \hat{u} + \frac{AS_{33}}{2} z_2 + \alpha y z - \omega_2 z, \\ \hat{V} &= \hat{v} + \frac{BS_{33}}{2} z_2 - \alpha x z + \omega_1 z, \\ \hat{W} &= \hat{w} + (Ax + By + C)S_{33} z - \omega_1 y + \omega_2 x.\end{aligned}\tag{5.43b}$$

### 5.3. Strohův formalismus

Strohův formalismus, stejně jako Lechnického formalismus, slouží k analýze dvoudimenzionální elastické deformace těles s materiálovou anizotropií. Rozdíl je ovšem v tom, že Lechnického formalismus vychází z rovnic pro napětí a je tedy reprezentován redukovanou maticí tuhosti, kdežto Strohův z rovnic pro deformace a je vyjádřen maticí poddajnosti. Lechnického formalismus může být použit k výpočtu obecnějších oblastí než Strohův formalismus pro čistě dvoudimenzionální problémy (např. tah a krut anizotropického prutu [6]). Strohův formalismus, jak bude zřejmé z následujícího, je však matematicky elegantnější a výpočtově stabilnější.

### 5.3.1. Obecné řešení

Zanedbáme-li objemové síly  $f_i$ , základní vztahy lineární anizotropické elasticity jsou

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, \quad (5.44)$$

kde  $C_{ijkl}$  je tenzor materiálových konstant, který je symetrický a pozitivně definitní. Dosazením (5.44)<sub>2</sub> do (5.44)<sub>3</sub> za předpokladu plně symetrického tenzoru  $C_{ijkl}$  dostaneme

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}u_{k,l}. \quad (5.45)$$

Výsledná diferenciální rovnice splňující posuvy se získá dosazením (5.45) do (5.44)<sub>1</sub>, t.j.

$$C_{ijkl}u_{k,lj} = 0. \quad (5.46)$$

Výsledný vztah (5.46) je homogenní diferenciální rovnice druhého řádu pro 2D deformace, ve kterých  $u_k, k = 1, 2, 3$  závisí pouze na proměnných  $x_1$  a  $x_2$ . Obecné řešení pro  $u_k$  závisí na jedné složené proměnné – lineární kombinaci  $x_1$  a  $x_2$ . Zvolme

$$u_k = a_k f(z), \quad \text{nebo} \quad \mathbf{u} = \mathbf{a}f(z), \quad (5.47a)$$

kde

$$z = x_1 + \mu x_2. \quad (5.47b)$$

Konstanty  $\mathbf{a}$  a  $\mu$  jsou neznámé a je potřeba je určit,  $f$  je libovolná funkce komplexní proměnné  $z$ . Derivací složené funkce (5.47a) podle  $x_l$  se dostane

$$u_{k,l} = a_k \frac{df}{dz} \frac{dz}{dx_l} = a_k (\delta_{l1} + \mu \delta_{l2}) f'(z), \quad (5.48)$$

kde (') symbolizuje derivaci podle proměnné  $z$  a  $\delta_{ij}$  je Kroneckerovo delta [15]. Další derivací podle  $x_j$  a dosazením do (5.46) dostáváme

$$C_{ijkl}(\delta_{l1} + \mu \delta_{l2})(\delta_{j1} + \mu \delta_{j2})a_k = 0 \quad (5.49a)$$

nebo

$$\{C_{i1k1} + \mu(C_{i1k2} + C_{i2k1}) + \mu^2 C_{i2k2}\} a_k = 0. \quad (5.49b)$$

Rovnice (5.49b) může být přepsána do maticového tvaru jako

$$\{\mathbf{Q} + \mu(\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) + \mu^2 \mathbf{T}\} \mathbf{a} = \mathbf{0}. \quad (5.50)$$

Matice  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{T}$  jsou reálné matice  $3 \times 3$  definované jako

$$Q_{ik} = C_{i1k1}, \quad R_{ik} = C_{i1k2}, \quad T_{ik} = C_{i2k2}. \quad (5.51)$$

Z rovnice (5.51) je patrné, že  $\mathbf{Q}$  a  $\mathbf{T}$  jsou matice symetrické a pozitivně definitní, jestliže deformační energie je kladná [6]. Aby měla rovnice (5.50) netriviální řešení, musí platit

$$\det(\mathbf{Q} + \mu(\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) + \mu^2 \mathbf{T}) = 0, \quad (5.52)$$

což dává homogenní rovnici šestého řádu pro neznámou  $\mu$ . Protože  $\mu$  a  $\mathbf{a}$  stanovené z (5.52) a (5.50) závisí pouze na materiálových konstantách  $C_{ijkl}$ , nazývají se tyto vlastní hodnoty materiálu a vlastní vektory materiálu. Vlastní číslo  $\mu$  stanovené z (5.52) je ekvivalentní s vlastním číslem stanoveným podle Lechnického formalismu (5.25a) a jejich výchozí rovnice (5.46) a (5.23) jsou odvozeny ze stejných základních rovnic (5.44).

Po získání  $\mu$  a  $a_k$  pro posuvy (5.47) se napětí vypočítají dosazením (5.48) do (5.45)

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\delta_{l1} + \mu\delta_{l2})a_k f'(z) = (C_{ijk1} + \mu C_{ijk2})a_k f'(z), \quad (5.53a)$$

což může být přepsáno jako

$$\sigma_{i1} = (Q_{ik} + \mu R_{ik})a_k f'(z), \quad \sigma_{i2} = (R_{ik} + \mu T_{ik})a_k f'(z). \quad (5.53b)$$

Pro zjednodušení zavedeme z (5.50) a (5.53b) vektor  $\mathbf{b}$  definován

$$\mathbf{b} = (\mathbf{R}^T + \mu\mathbf{T})\mathbf{a} = -\frac{1}{\mu}(\mathbf{Q} + \mu\mathbf{R})\mathbf{a} \quad (5.54)$$

a napětí jsou potom vyjádřena vztahy

$$\sigma_{i1} = -\mu b_i f'(z), \quad \sigma_{i2} = b_i f'(z). \quad (5.55)$$

Stejně jako zavedení Airyho funkce v Lechnického formalismu, tak i rovnice rovnováhy (5.44)<sub>1</sub> jsou automaticky splněny, jestliže zavedeme funkci napětí  $\phi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  jako

$$\sigma_{i1} = -\phi_{i,2}, \quad \sigma_{i2} = \phi_{i,1}. \quad (5.56)$$

Jednotlivé složky napětí  $\phi_i$  jsou kvůli symetrii tenzoru napětí ( $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ ) na sobě závislé, což je dáno vztahy

$$\phi_{1,1} + \phi_{2,2} = 0. \quad (5.57)$$

Porovnáním (5.55) a (5.56) dostaneme

$$\phi_i = b_i f(z), \quad \text{nebo} \quad \boldsymbol{\phi} = \mathbf{b}f(z). \quad (5.58)$$

Rovnice (5.52) je rovnice pro polynom šestého stupně, jež dává šest kořenů pro  $\mu$ . Uvážíme-li předpoklad, že deformační energie je vždy kladná, přičemž nezáleží na typu deformace, tak lze dokázat, že  $\mu$  není reálné. Protože koeficienty v rovnici (5.52) jsou reálné, existují tři páry komplexně sdružených kořenů  $\mu$ . Jestliže  $\mu_k$  a  $\mathbf{a}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, 6$  jsou materiálová vlastní čísla a vlastní vektory, můžeme zvolit

$$\Im(\mu_k) > 0, \quad \mu_{k+3} = \bar{\mu}_k, \quad \mathbf{a}_k + 3 = \bar{\mathbf{a}}_k, \quad \mathbf{b}_k + 3 = \bar{\mathbf{b}}_k, \quad k = 1, 2, 3. \quad (5.59)$$

Předpokládejme, že kořeny  $\mu_k$  nejsou násobné. Obecné řešení se získá superpozicí šesti řešení z (5.47a) a (5.58):

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^3 \{ \mathbf{a}_k f_k(z_k) + \bar{\mathbf{a}}_k f_{k+3}(\bar{z}_k) \}, \quad \boldsymbol{\phi} = \sum_{k=1}^3 \{ \mathbf{b}_k f_k(z_k) + \bar{\mathbf{b}}_k f_{k+3}(\bar{z}_k) \}, \quad (5.60)$$

kde  $f_k, k = 1, 2, \dots, 6$  jsou libovolné funkce a

$$z_k = x_1 + \mu_k x_2. \quad (5.61)$$

Pro reálné řešení pole posuvů  $\mathbf{u}$  a funkce napětí  $\phi$  zavedme

$$f_{k+3} = \overline{f}_k, \quad k = 1, 2, 3 \quad (5.62)$$

a (5.60) přejde v

$$\mathbf{u} = 2\Re \left\{ \sum_{k=1}^3 [\mathbf{a}_k f_k(z_k)] \right\}, \quad \phi = 2\Re \left\{ \sum_{k=1}^3 [\mathbf{b}_k f_k(z_k)] \right\}, \quad (5.63)$$

což může být přepsáno do tvaru

$$\mathbf{u} = 2\Re \{ \mathbf{A} \mathbf{f}(z) \}, \quad \phi = 2\Re \{ \mathbf{B} \mathbf{f}(z) \}, \quad (5.64a)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \end{bmatrix}, \quad (5.64b)$$

$$\mathbf{f}(z) = \begin{bmatrix} f_1(z) & f_2(z) & f_3(z) \end{bmatrix}^T.$$

Kombinací posuvů a vektoru funkce napětí vytvoříme jeden sloupcový vektor, (5.64) je potom vyjádřeno jako [6]

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \overline{\mathbf{A}} \\ \mathbf{B} & \overline{\mathbf{B}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}(z) \\ \overline{\mathbf{f}(z)} \end{Bmatrix}. \quad (5.65)$$

### 5.3.2. Okrajové podmínky

Obecné řešení splňující 15 rovnic (5.44) je odvozeno ve vztazích (5.64) pro posuvy a funkce napětí, v kterých jsou matice  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  stanoveny z materiálových charakteristik a  $\mathbf{f}(z)$  je neznámá vektorová funkce, jež se stanoví ze znalosti okrajových podmínek. Pro stanovení těchto podmínek je výhodné vyjádřit okrajové podmínky přímo pomocí proměnné  $\mathbf{f}(z)$  nebo nepřímo pomocí  $\mathbf{u}$  a  $\phi$ . Posuvy předepsané podél hranice oblasti jsou předepsány použitím rovnice (5.63) jako

$$\mathbf{u} = 2\Re \{ \mathbf{A} \mathbf{f}(z) \} = \hat{\mathbf{u}}, \quad (5.66)$$

kde  $\hat{\mathbf{u}} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3)$ . Ke splnění okrajové podmínky vektoru napětí  $\mathbf{t}$  se musí najít jeho vztah k funkci napětí  $\phi$ . Podobně jako derivace (5.38), (5.39), (5.40) a (5.41) pro rovinný problém ( $n_3 = 0$ ) je  $t_i$  vyjádřena pomocí Cauchyho formule jako

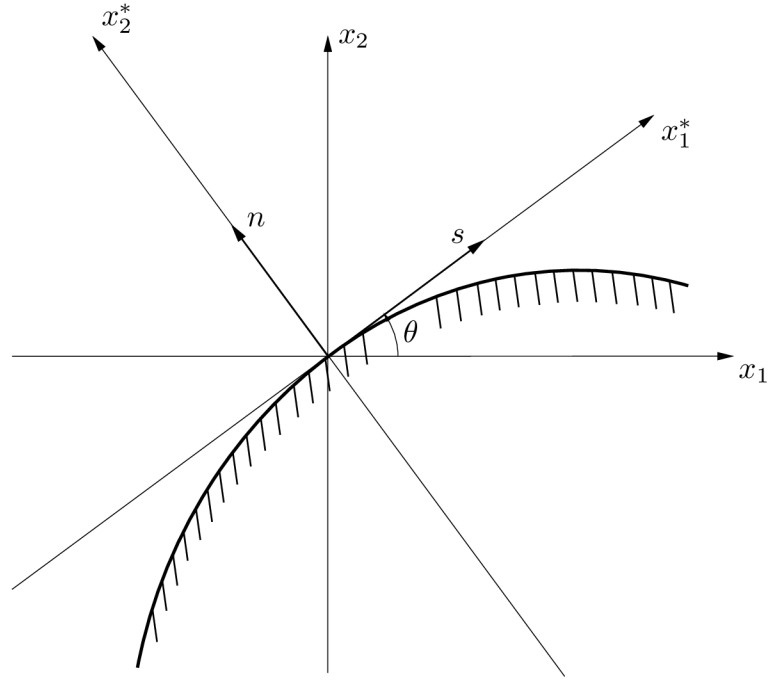
$$t_i = \sigma_{ij} n_j = \sigma_{i1} n_1 + \sigma_{i2} n_2. \quad (5.67)$$

Dosazením (5.56) a (5.39) do (5.67) obdržíme

$$t_i = \frac{d\phi_i}{dx_1} \frac{dx_1}{ds} + \frac{d\phi_i}{dx_2} \frac{dx_2}{ds} = \frac{d\phi_i}{ds} \quad (5.68)$$

nebo její vektorový tvar

$$\mathbf{t} = \frac{d\phi}{ds}. \quad (5.69)$$



**Obr. 5.3:** Původní a rotovaný souřadnicový systém.

Poznamenejme, že (5.39) byl použit při odvozování (5.69), a proto je nutné dodržet stejnou úmluvu, tj. že tečný směr  $s$  je kladný, jestliže při pohybu tímto směrem leží materiál po pravé straně. Situace je zobrazena na obr. 5.3.

Celkové napětí podél hranice je vyjádřeno jako

$$\int_{s_1}^{s_2} \mathbf{t} \, ds = \phi(s_2) - \phi(s_1). \quad (5.70)$$

Užitím vztahu (5.42) a předepsáním  $\hat{\mathbf{t}} = (\hat{t}_1, \hat{t}_2, \hat{t}_3)$  můžeme okrajové podmínky výsledných sil psát ve tvaru

$$\frac{d\phi}{ds} = 2\Re \left\{ \mathbf{B} \frac{d\mathbf{f}(z)}{ds} \right\} = \hat{\mathbf{t}} \quad (5.71a)$$

nebo

$$\phi(s_2) - \phi(s_1) = 2\Re \{ \mathbf{B} \mathbf{f}(z) \} \Big|_{s_1}^{s_2} = \int_{s_1}^{s_2} \hat{\mathbf{t}} \, ds \quad (5.71b)$$

Pokud je na hranici směr  $s$  volen ve směru osy  $x_1$  nebo  $x_2$ , tak se vztah (5.69) redukuje na (5.56), což jsou vztahy důležité pro výpočet napětí z funkce napětí  $\phi$ . K výpočtu složek napětí v jiných souřadnicových osách se používá transformační pravidlo tenzoru druhého řádu. Alternativní přístup k určení těchto složek je popsán v [26]. Nechť  $(\mathbf{s}, \mathbf{n})$  jsou jednotkové vektory tečného a normálového směru hranice oblasti a nechť  $\mathbf{t}_s$  a  $\mathbf{t}_n$  jsou výsledné síly předepsané v tečném a normálovém směru. Pak rovnice (5.69) přejde

$$\mathbf{t}_n = \phi_{,s}, \quad \mathbf{t}_s = -\phi_{,n} \quad (5.72)$$

kde  $(,k)$  znamená derivaci podle složky  $k$ . Složky napětí jsou v souřadnicovém systému  $s$  stanoveny pomocí rovnic

$$\begin{aligned}\sigma_{nn} &= \mathbf{n}^T \mathbf{t}_n = \mathbf{n}^T \phi_{,s}, & \sigma_{ns} &= \mathbf{s}^T \mathbf{t}_n = \mathbf{s}^T \phi_{,s}, & \sigma_{n3} &= \mathbf{i}_3^T \mathbf{t}_n = (\phi_{,s})_3, \\ \sigma_{ss} &= \mathbf{s}^T \mathbf{t}_s = -\mathbf{s}^T \phi_{,n}, & \sigma_{sn} &= \mathbf{n}^T \mathbf{t}_s = -\mathbf{n}^T \phi_{,n} = \sigma_{ns}, & \sigma_{s3} &= \mathbf{i}_3^T \mathbf{t}_s = -(\phi_{,n})_3,\end{aligned}\quad (5.73a)$$

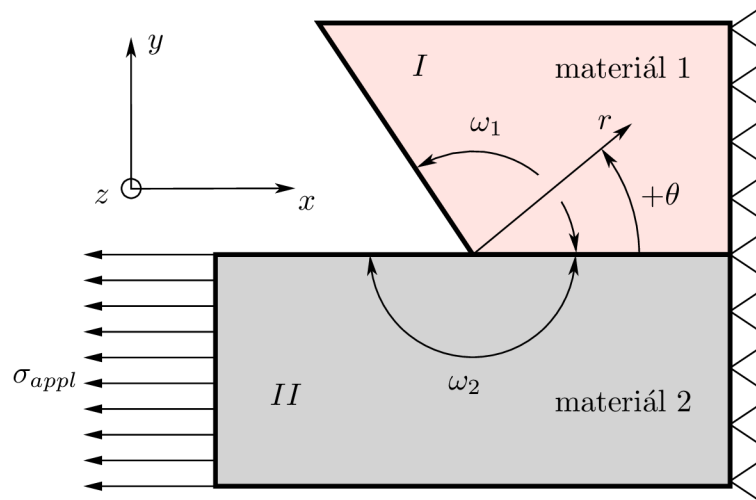
kde

$$\mathbf{s}^T = (\cos \theta, \sin \theta, 0), \quad \mathbf{n}^T = (-\sin \theta, \cos \theta, 0), \quad \mathbf{i}_3 = (0, 0, 1). \quad (5.73b)$$

Úhel  $\theta$  je orientován proti směru hodinových ručiček vzhledem ke kladné ose  $x$  a ke kladnému  $s$ .

Uvažujeme-li polární souřadnicový systém  $(r, \theta)$ , pak  $\mathbf{s}$  a  $\mathbf{n}$  označuje  $\mathbf{r}$  a  $\boldsymbol{\theta}$ , derivace  $\partial s$  a  $\partial n$  jsou nahrazeny  $\partial r$  a  $r\partial\theta$ . Pak mohou být předepsány nové vztahy mezi vektory výsledných sil a funkcí napětí v polárním souřadnicovém systému jako [6]

$$\begin{aligned}\mathbf{t}_\theta &= \phi_{,r}, & \mathbf{t}_r &= \phi_{,\theta}/r, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \mathbf{n}^T \phi_{,r}, & \sigma_{rr} &= -\mathbf{s}^T \phi_{,\theta}/r, & \sigma_{r\theta} &= \mathbf{s}^T \phi_{,r} = -\mathbf{n}^T \phi_{,\theta}/r, \\ \sigma_{\theta 3} &= (\phi_{,r})_3, & \sigma_{r3} &= (\phi_{,\theta})_3/r.\end{aligned}\quad (5.74)$$



**Obr. 6.1:** Bimateriálový vrub s parametry:  $\omega_1 \in (90^\circ, 180^\circ)$  a  $\omega_2 = 180^\circ$ , materiály 1, 2 jsou transversálně ortotropní. Kladný směr úhlu  $\theta$  je proti směru hodinových ručiček.

## 6. Řešení problému

Cílem následující kapitoly je sestavení výpočtových modelů pro stanovení vlastní hodnoty exponentu singularity a zobecněného faktoru intenzity napětí, které jsou nutné pro určení napětí a deformace v okolí bimateriálového vrubu. Objekt – bimateriálový vrub je určen systémem podstatných veličin (viz kapitola 2.4). Při tvorbě dílčích modelů a dílčích systémů podstatných veličin je postupováno v souladu s [9, s. 227].

Uvažujme konfiguraci bimateriálového vrubu podle obrázku 6.1. Hodnota úhlu  $\omega_1$  se pohybuje v intervalu od  $90^\circ$  do  $180^\circ$ , úhel  $\omega_2$  je roven  $180^\circ$ . Bimateriálovým rozhraním je těleso rozděleno na dvě oblasti s indexy  $I$  a  $II$  a zatíženo napětím  $\sigma_{appl}$ . Pro určení zobecněného faktoru intenzity napětí a rozložení napjatosti v okolí vrubu jsou vytvořeny 2 výpočtové modely:

- Výpočtový model vrubu pro stanovení vlastní hodnoty exponentu singularity
- Výpočtový model vrubu pro stanovení zobecněného faktoru intenzity napětí.

### 6.1. Výpočtový model vrubu pro stanovení vlastní hodnoty exponentu singularity

#### 6.1.1. Model geometrie a topologie vrubu

Model je uvažován jako rovinný. Pro určení vlastních čísel materiálu jsou podstatné veličiny úhly líce  $\omega_1$  a  $\omega_2$ . Dále je to orientace vláken kompozitu, která nabývá dvou úhlů, a to  $0^\circ$  u vláken rovnoběžných s rozhraním a  $90^\circ$  pro vlákna kolmá na rozhraní.

### 6.1.2. Model okolí objektu

Bimateriálový vrub je vázán k okolí na pravé linii obecnou vazbou. Vztahy pro určení vlastní hodnoty  $\delta$  jsou vyjádřeny pomocí posuvů a napětí, které musí splňovat okrajové podmínky. Hodnoty těchto veličin ovšem nejsou podstatné z hlediska určení  $\delta$ , proto je model okolí objektu tvořen prázdnou množinou.

### 6.1.3. Model aktivace vrubu z okolí

Obdobně jako u předchozího modelu okolí nehraje velikost zatížení roli při stanovení  $\delta$  a model aktivace je tvořen prázdnou množinou.

### 6.1.4. Model vlastností struktury vrubu

Materiálový model je lineárně pružný. Bimateriál se skládá ze dvou transversálně ortotropních materiálů s 5 nezávislými elastickými charakteristikami (viz oddíl 4.3.3), tj.  $E_L$ ,  $E_T$ ,  $\nu_{LT}$ ,  $\nu_{TT}$ ,  $G_{LT}$ . Při zadávání v globálním souřadnicovém systému  $x, y$  je nutné brát ohled na orientaci vláken. Při změně směru z  $0^\circ$  na  $90^\circ$  je nutné přepočítat Poissonovo číslo  $\nu_{LT}$  na hodnotu v globálním souřadném systému  $x, y$  pomocí rovnice (4.9). Postup je uveden v 6.3.5.

### 6.1.5. Model projevů vrubu

Podle podmnožiny S7 na straně 20 dochází u zatíženého tělesa k deformaci a vzniku napjatosti. Množina je opět prázdná, protože úkolem algoritmu je stanovení vlastní hodnoty exponentu singularity  $\delta$ .

## 6.2. Numericko-analytický algoritmus pro určení exponentu singularity

V druhé polovině minulého století byla formulována teorie rovinné anizotropní pružnosti, která byla vystavěna na vlastnostech funkcí komplexní proměnné, viz např. [26]. Tato teorie je nazvána podle jmen autorů jako tzv. Lechnicky-Eshelby-Strohův formalismus (LES formalismus). Existují dva důvody využití charakteristických vlastností funkcí komplexní proměnné. Prvním je, že diferencovanost v oboru komplexních čísel je ekvivalentem harmoničnosti, tzn., jestliže má funkce v komplexním oboru derivaci (v teorii komplexních čísel se takové funkce nazývají analytické), splňuje automaticky tzv. biharmonickou rovnici a tudíž může být použita pro vyjádření Airyho funkce napětí. Druhým důvodem použití komplexního oboru je zjednodušení popisu elastických vlastností materiálu, které jsou v LES formalismu popsány pouze třemi konstantami, tzv. charakteristickými (vlastními) čísly daného materiálu. Anizotropní materiál je charakterizován třemi komplexními čísly  $\mu_i$ , kde  $i = 1, 2, 3$  a jejich komplexně sdruženými protějšky. Čísla  $\mu_i$  jsou vlastní (charakteristická) čísla matice  $3 \times 3$ , jejíž prvky závisí na elastických konstantách materiálu. V případě ortotropního materiálu dochází k zjednodušení v důsledku symetričnosti



matice tuhosti, příp. poddajnosti (viz kapitola 4.3.2). Počet charakteristických čísel materiálu sníží na dvě<sup>1</sup> a nenulové složky tenzoru napjatosti a deformace se redukuje pouze na složky v rovině  $xy$  [25]. Ortotropie je jediný případ anizotropie, kdy jsou Lechnického a Strohův formalismus formálně nerozlišitelné.

### 6.2.1. Napětí a posuvy v okolí koncentrátoru typu vrub

Pro formulaci rovnic pro výpočet exponentu singularity vyjdeme z inverzního tvaru Hookeova zákona

$$\varepsilon_i = S_{ij}\sigma_j, \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (6.1)$$

kde bylo použito zkrácené indexování tenzorů, tj.,

$$1 \longleftrightarrow 11, \quad 2 \longleftrightarrow 22, \quad 6 \longleftrightarrow 12 \longleftrightarrow 21$$

Matice  $S_{ij}$  se nazývá matice poddajnosti. Rovnice (6.1) platí pro stav rovinné napjatosti. Pro případ rovinné deformace je nutné prvky matice poddajnosti přepočítat podle vztahu [25]

$$S'_{ij} = S_{ij} - \frac{S_{i3}S_{j3}}{S_{33}}, \quad i, j = 1, 2, 6. \quad (6.2)$$

Vlastní čísla materiálu  $\mu_i$  závisí na materiálových charakteristikách a jsou kořeny rovnice čtvrtého řádu

$$\lambda\mu^4 + 2\rho\lambda^{\frac{1}{2}}\mu^2 + 1 = 0, \quad (6.3a)$$

kde

$$\lambda = \frac{S_{11}}{S_{22}}, \quad \rho = \frac{2S_{12} + S_{66}}{2\sqrt{S_{11}S_{22}}}. \quad (6.3b)$$

Rovnice (6.3) je zvláštním případem charakteristické rovnice šestého řádu (5.23) danou Lechnickým, kapitola 5.2. Kořeny charakteristické rovnice (6.3) jsou

$$\mu_1 = \lambda^{-1/4}(n + m), \quad \mu_2 = \lambda^{-1/4}(n - m), \quad \text{pro } 1 < \rho < \infty, \quad (6.4)$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \lambda^{-1/4}\sqrt{n^2 + m^2}, \quad \text{pro } -1 < \rho < 1, \quad (6.5)$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \lambda^{-1/4}, \quad \text{pro } \rho = 1, \quad (6.6)$$

kde

$$n = \sqrt{\frac{1 + \rho}{2}}, \quad m = \sqrt{\left|\frac{1 - \rho}{2}\right|}. \quad (6.7)$$

Případ  $\rho = 1$  odpovídá materiálu s kubickou symetrií a případ  $\lambda = \rho = 1$  materiálu izotropnímu. Jde o tzv. degenerované případy anizotropie, které neumožňují aplikaci Lechnického a Strohova formalismu.

<sup>1</sup>Obecně se ortotropní materiál neliší od anizotropního, má tedy také 6 charakteristických čísel. Nicméně v případě úlohy formulované pro ortotropní materiál je možné ji rozdělit na rovinnou („in-plane“) charakterizovanou 4 vlastními čísly a mimorovinnou („anti-plane“) danou 2 vlastními čísly.

Pro případ anizotropního materiálu, tj.  $\rho \neq 1$ , se vztahy pro posuvy  $u_i$ , napětí  $\sigma_{ij}$  a výslednou sílu podél polopřímky vedoucí z počátku souřadnic  $T_i$  mohou psát ve tvaru

$$u_i = 2\Re \left\{ \sum_{j=1}^2 A_{ij} f_j(z_j) \right\}, \quad (6.8a)$$

$$T_i = -2\Re \left\{ \sum_{j=1}^2 L_{ij} f_j(z_j) \right\}, \quad (6.8b)$$

$$\sigma_{1i} = -2\Re \left\{ \sum_{j=1}^2 L_{ij} \mu_j f'_j(z_j) \right\}, \quad \sigma_{2i} = 2\Re \left\{ \sum_{j=1}^2 L_{ij} f'_j(z_j) \right\}, \quad (6.8c)$$

kde<sup>2</sup>  $z_j = x_1 + \mu_j x_2$  a symbol  $(')$  značí derivaci podle komplexní proměnné  $z_j$ . Pro matice  $A_{ij}$  a  $L_{ij}$  platí

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} s_{11}\mu_1^2 + s_{12} & s_{11}\mu_2^2 + s_{12} \\ s_{12}\mu_1 + s_{22}/\mu_1 & s_{12}\mu_2 + s_{22}/\mu_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} -\mu_1 & -\mu_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

Vektorové funkce  $f_j(z)$  závisí na konkrétní úloze a musí být zvoleny tak, aby vyhovovaly okrajovým podmínkám dané úlohy.

### 6.2.2. Stanovení komplexních potenciálů

Napětí v okolí vrcholu trhliny jsou úměrná  $r^{\delta-1}$  a posuvy  $r^\delta$ , kde  $r$  značí vzdálenost od čela vrubu a  $\delta$  je charakteristická (vlastní) hodnota exponentu singularity  $p_k$ . Aby byla deformační energie kladná, musí být  $\delta > 0$  a aby mělo napětí singulární charakter, pak  $\delta < 1$ . Charakteristická hodnota  $\delta$  závisí na lokální geometrii a na materiálových charakteristikách bimateriálu. Neznámé potenciály  $f_j(z_j)$  se hledají ve tvaru

$$f_j^J(z_j^J) = V_j^J Z_j^{J\delta}, \quad j = 1, 2, J = I, II. \quad (6.10)$$

Horní index  $J$  značí příslušnost k jednotlivým oblastem bimateriálu (viz obr. 3.3),  $V_j^J$  jsou vektory komplexních koeficientů. Souřadnice  $Z_j$  a  $z$  se uvažují jako polární a pomocí polárních souřadnic se zapisují v následujícím tvaru

$$Z_j^J = r(\cos \theta + \mu_j^J \sin \theta). \quad (6.11)$$

<sup>2</sup>Kartézské souřadnice  $x_1, x_2$  jsou ekvivalentní se souřadnicovým systémem  $x, y$ , se kterým se pracuje v dalších kapitolách.

### 6.2.3. Okrajové podmínky pro sestavení matice soustavy

Uvažujme konfiguraci vrubu podle obrázku 3.3, kde indexy  $I, II$  značí jednotlivé oblasti materiálů. Potom můžeme předepsat okrajové podmínky a podmínky spojitosti napětí a výsledných sil následovně:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^I &= 0 & \text{pro } \theta &= \omega_1 \\ \mathbf{T}^I - \mathbf{T}^{II} &= 0 & \text{pro } \theta &= 0 \\ \mathbf{u}^I - \mathbf{u}^{II} &= 0 & \text{pro } \theta &= 0 \\ \mathbf{T}^{II} &= 0 & \text{pro } \theta &= -\omega_2. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Cílem je určit neznámé vlastní číslo exponentu singularity  $\delta$  a jemu odpovídající neznámé vektory  $\phi_j^J$  tak, aby byly splněny okrajové podmínky (6.12).

Dosazením předpokládaného tvaru potenciálů  $f_j(z_j)$  z (6.10) do (6.8a) a (6.8b) se dostane

$$\mathbf{u}^J = \mathbf{A}^J \mathbf{Z}^{J\delta} \mathbf{V}^J + \overline{\mathbf{A}}^J \overline{\mathbf{Z}}^{J\delta} \overline{\mathbf{V}}^J, \quad (6.13a)$$

$$-\mathbf{T}^J = \mathbf{L}^J \mathbf{Z}^{J\delta} \mathbf{V}^J + \overline{\mathbf{L}}^J \overline{\mathbf{Z}}^{J\delta} \overline{\mathbf{V}}^J, \quad (6.13b)$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}^{J\delta} &= \text{diag} [z_1^{J\delta}, z_2^{J\delta}] = \text{diag} [(x_1 + \mu_1^J x_2)^\delta, (x_1 + \mu_2^J x_2)^\delta] = \\ &= r^\delta \text{diag} [(\cos \theta + \mu_1^J \sin \theta)^\delta, (\cos \theta + \mu_2^J \sin \theta)^\delta]. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Operátor  $\text{diag}$  značí diagonální matici, tzn. všechny prvky mimo hlavní diagonálu jsou nulové. Pro bimateriál tvořený dvěma anizotropními prostředími se z okrajových podmínek (6.12) a vztahů pro posuvy a výslednou sílu (6.13) dostane homogenní soustava osmi algebraických rovnic

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_0^I & -\overline{\mathbf{B}}_0^I & -\mathbf{B}_0^{II} & \overline{\mathbf{B}}_0^{II} \\ \mathbf{X}_0^I & \overline{\mathbf{X}}_0^I & -\mathbf{X}_0^{II} & -\overline{\mathbf{X}}_0^{II} \\ \mathbf{X}_1^I & \overline{\mathbf{X}}_1^I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{X}_2^{II} & \overline{\mathbf{X}}_2^{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}^I \mathbf{V}^I \\ \overline{\mathbf{L}}^I \overline{\mathbf{V}}^I \\ \mathbf{L}^{II} \mathbf{V}^{II} \\ \overline{\mathbf{L}}^{II} \overline{\mathbf{V}}^{II} \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (6.15)$$

kde

$$\mathbf{B}_0^J = i\mathbf{A}^J \mathbf{Z}_0^{J\delta} (\mathbf{L}^J)^{-1}, \quad \mathbf{X}_j^J = \mathbf{L}^J \mathbf{Z}_j^{J\delta} (\mathbf{L}^J)^{-1}, \quad j = 0, 1, 2, \quad J = I, II, \quad (6.16a)$$

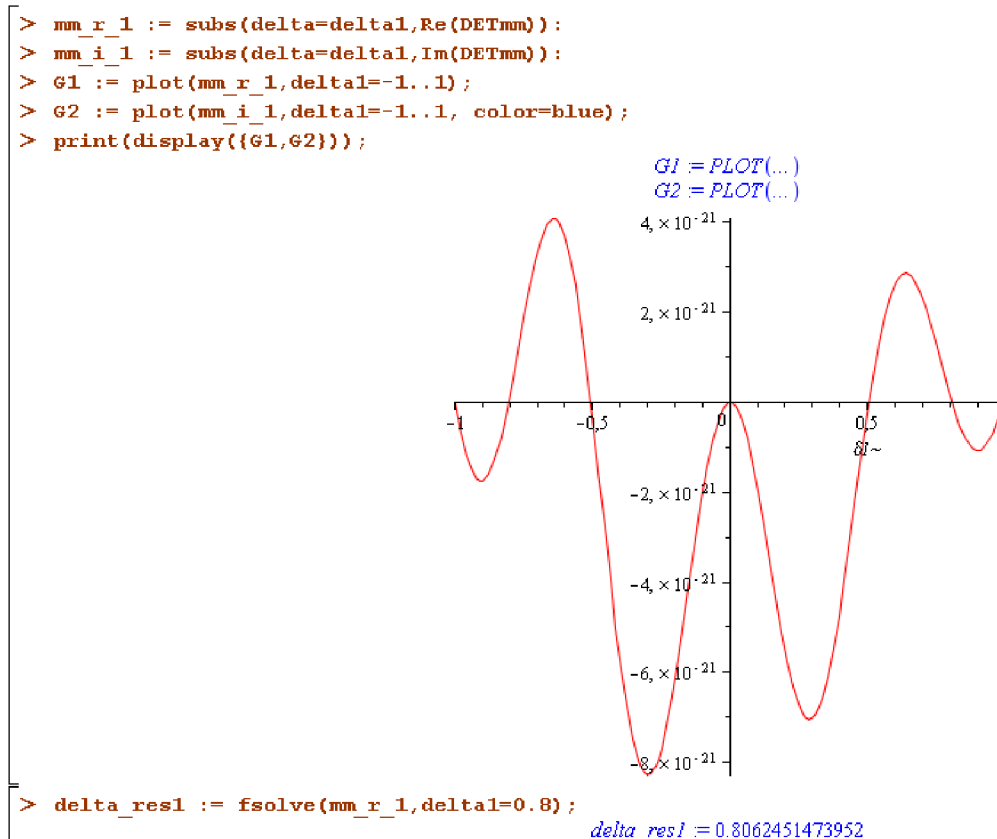
$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_0^J &= \text{diag} [1, 1], \quad \mathbf{Z}_1^J = \text{diag} [e^{i\pi\delta}, e^{i\pi\delta}], \\ \mathbf{Z}_2^J &= \text{diag} [|\mu_1^J|^\delta e^{-i\frac{\pi}{2}\delta}, |\mu_2^J|^\delta e^{-i\frac{\pi}{2}\delta}], \end{aligned} \quad (6.16b)$$

Vztah (6.15) se dá přepsat zkráceně jako

$$\mathbf{K}(\delta) \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (6.17)$$

kde

$$\mathbf{v}^J = [\mathbf{L}_1^J \mathbf{V}_1^J \quad \mathbf{L}_2^J \mathbf{V}_2^J]^T = [\mathbf{v}_1^J \quad \mathbf{v}_2^J]^T, \quad J = I, II. \quad (6.18)$$



**Obr. 6.2:** Grafické zobrazení rovnice (6.19) a řešení pomocí příkazu `fsolve` v softwaru *Maple*.

Matice  $\mathbf{K}$  je matice soustavy, jejíž prvky jsou funkcí vlastní hodnoty  $\delta$ . Aby soustava (6.17) měla nenulové řešení, musí platit

$$\det(\mathbf{K}(\delta)) = 0. \quad (6.19)$$

Výraz (6.19) vede na nelineární rovnici proměnné  $\delta$ , jež můžeme chápat jako vlastní číslo matice  $\mathbf{K}$ , tudíž je to rovnice charakteristická dané konfigurace vrubu a bimateriálového rozhraní a vektory  $\mathbf{v}^I$ ,  $\mathbf{v}^{II}$  jsou vlastní vektory odpovídající  $\delta$ , které se dostanou ze soustavy rovnic (6.17) po zpětném dosazení vlastní hodnoty  $\delta$  do matice  $\mathbf{K}$ . Rovnice (6.19) má alespoň dva kořeny v intervalu  $(0, 1)$ , tj. kořeny  $\delta_1$  a  $\delta_2$ . Dalším řešením rovnice (6.19) jsou pak pomocná řešení  $-\delta_1$  a  $-\delta_2$  a jim odpovídající vlastní vektory  $\mathbf{v}_{pom}^I$ ,  $\mathbf{v}_{pom}^{II}$  [25]. Pomocné řešení nemají fyzikální význam, nicméně jejich znalost umožňuje vyjádření hodnot zobecněných faktorů intenzity napětí  $H_i$  pomocí tzv.  $\Psi$ -integrálu<sup>3</sup>.

#### 6.2.4. Volba matematické teorie

Výše výpočtový algoritmus je řešen kombinací analytických a numerických metod v softwaru *Maple* 12. Vstupní hodnoty jsou Youngovy moduly pružnosti  $E_x$ ,  $E_y$ , Poissonova

<sup>3</sup>O  $\Psi$ -integrálu je pojednáno v kapitole 6.4.

čísla  $\nu_{xy}$ ,  $\nu_{yz}$ , moduly pružnosti ve smyku  $G_{xy}$  jednotlivých materiálů. Dále jsou to úhly čel vrubu od materiálového rozhraní  $\omega_1$  a  $\omega_2$ . Hlavní materiálové směry jsou totožné se směry zvoleného kartézského souřadnicového systému. Modul pružnosti ve smyku  $G_{yz}$  je závislá elastická konstanta a vypočte se podle rovnice (4.13). Přesnost výpočtu byla 13 číslic (příkaz `Digits`).

Funkce (6.19) je nelineární. K nalezení jejich kořenů bylo zvolena Newtonova metoda, k jejímu vyvolání slouží příkaz `fsolve`. Druhým parametrem příkazu je počáteční přiblížení [16], které volíme v blízkosti hledaného kořene. Přiblížení je možné zjistit z grafu funkce, tj. z průsečíků s vodorovnou osou  $\delta$  (viz obrázek 6.2). V odstavci 6.2.2 bylo řečeno, že se kořeny hledají na intervalu  $(0, 1)$ . Řešením jsou ale i kořeny na intervalu  $(-1, 0)$  [20]. Ty nazveme tzv. pomocným řešením a označíme je  $\delta_{pom}$ , přičemž vzhledem k symetrii řešení platí

$$\delta_{pom,i} = -\delta_i, \quad (6.20)$$

kde  $i = 1, \dots, n$  a  $n$  je počet kořenů na intervalu  $(0, 1)$ . Pomocné řešení nemá žádný fyzikální význam, ale je důležité pro výpočet zobecněného faktoru intenzity napětí metodou  $\Psi$ -integrálu, o čemž bude pojednáno v následujícím textu.

## 6.3. Výpočtový model vrubu pro stanovení zobecněného faktoru intenzity napětí

### 6.3.1. Volba matematické teorie

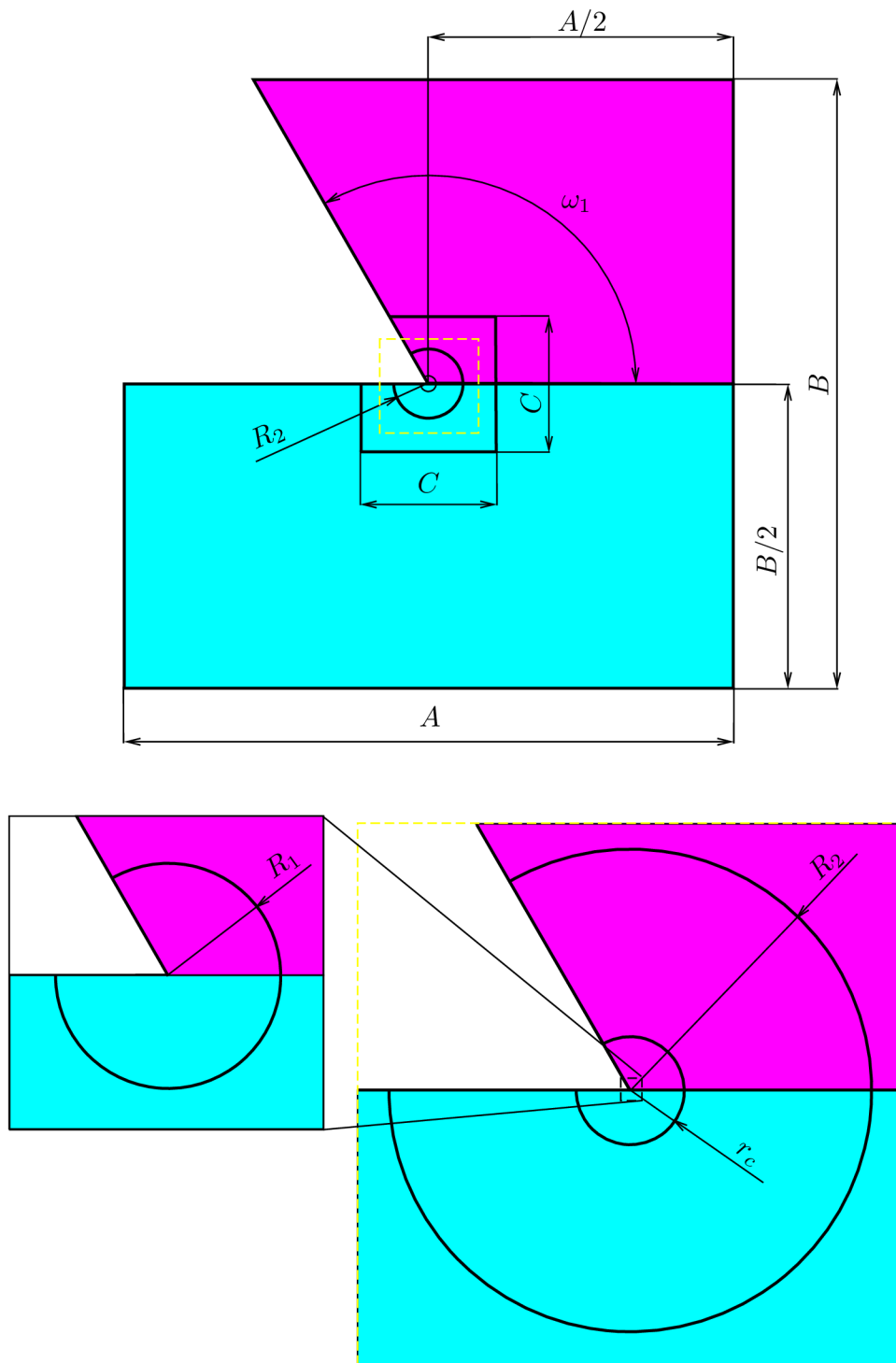
Zobecněný faktor intenzity napětí se určí na základě znalosti singulárního řešení vyplývajícího z numericko-analytického algoritmu 6.2 a numerického řešení získaného metodou konečných prvků. Výpočtový algoritmus se skládá ze dvou částí – z určení pole posuvů a napětí na vzdálenosti  $r_c$  od kořene vrubu a výpočtu zobecněného faktoru intenzity napětí metodou  $\Psi$ -integrálu.

Pole posuvů a napětí bylo vypočteno pomocí CAE softwaru ANSYS 12. Pro snadné opakování výpočtu bylo vytvořeno makro `Vrub_inp.mac`. Volitelnými vstupními parametry jsou elastické konstanty jednotlivých materiálů, úhel  $\omega_1$ , poloměr kružnice, na které mají být vypočteny posuvy a napětí, zatížení a hustota sítě, jež je řízena změnou počtu uzlů na kružnicích. Aby byla zachována požadovaná rovnoměrnost sítě, byly navrženy algoritmy pro přepočet dělení jednotlivých čar.

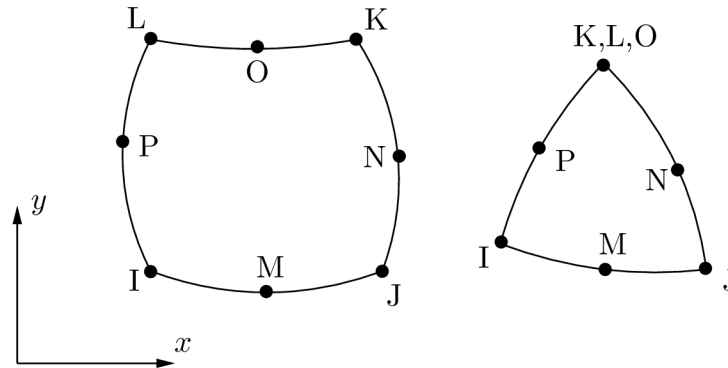
Stanovení zobecněného faktoru intenzity napětí bylo stanoveno numericky na základě teorie  $\Psi$ -integrálu. Výpočtový algoritmus byl naprogramován pomocí programovacího jazyka FORTRAN v softwaru Silverfrost FNT95. Vstupní veličiny jsou načítány ze souborů vytvořených při řešení v softwarech Maple a ANSYS. Výpočet integrálů je proveden Rombergovou metodou [22, s. 1054].

### 6.3.2. Model geometrie a topologie vrubu

Úloha je charakterizována jako rovinná. Geometrie vrubu je určena rozměry vzorku  $A$ ,  $B$ , úhly čel  $\omega_1$  a  $\omega_2$ . Celý model se skládá s dílčích submodelů, jejich topologie má vliv na homogenitu a rovnoměrnost sítě konečných prvků. Jsou ohraničeny kružnicemi kolem



**Obr. 6.3:** Rozměry modelu vzorku a jeho jednotlivých oblastí. Na poloměru  $r_c$  jsou vyhodnocovány posuvy a napětí.



**Obr. 6.4:** Kvadratický osmiuzlový a degenerovaný triangulární typ prvku sítě konečných prvků PLANE183.

kořene vrubu o poloměrech  $R_1$ ,  $R_2$ , mezi nimiž je další s volitelným poloměrem  $r_c$ , na kterém vyhodnocují posuvy a napětí sloužící pro výpočet  $\Psi$ -integrálu. Dále je to čtvercová oblast s předepsaným počtem uzlů s rozměrem  $C$  (obr. 6.3). Konkrétní hodnoty jsou uvedeny v tab. 6.1.

$A$ [mm]	$B$ [mm]	$C$ [mm]	$R_1$ [mm]	$R_2$ [mm]
180	180	40	0,0005	10

**Tab. 6.1:** Rozměry modelu vzorku pro MKP analýzu.

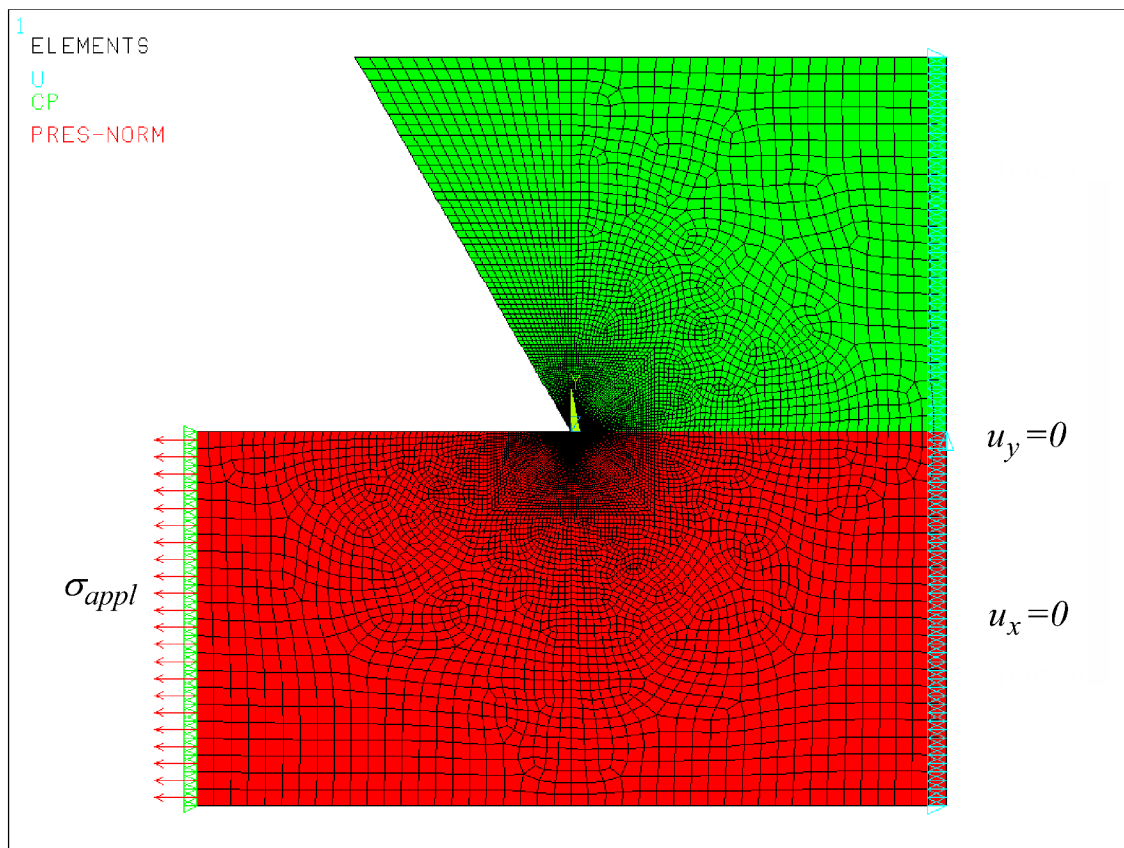
Při tvorbě sítě byly použity osmiuzlové kvadratické prvky PLANE183 (obrázek 6.4). Pro řešení singulárních úloh software ANSYS umožňuje použití příkazu `KSCON`, který vytvoří kolem koncentrátoru síť triangulárních prvků s posunutými uzly P a N do 1/4 délky hrany OI a OJ. Primárně tento příkaz není použit, protože má význam pouze v modelování singularity kolem čela trhliny v homogenním izotropním materiálu.

### 6.3.3. Model okolí objektu

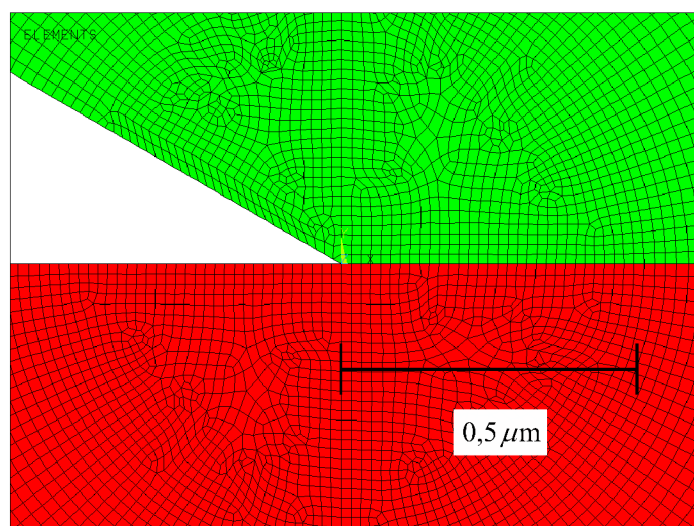
Vymezená uvolněná geometrie vzorku je součástí obecného celku materiálu. Na pravé linii jsou předepsány nulové posuvy  $u_x$  ve směru osy  $x$  a posuv jednoho uzlu ve směru osy  $y$  z důvodu statické určitosti. Uzlům na levé linii vzorku je zadán stejný posuv ve směru osy  $x$ , aby bylo zamezeno nežádoucí deformaci (obr. 6.5). To je realizováno příkazem `coupling`.

### 6.3.4. Model aktivace vrubu z okolí

Vzorek je silově zatěžován podle obrázku 6.1. Na levé linii je předepsána okrajová podmínka tlaku (příkaz `pressure`) o velikosti  $-\sigma_{appl}$  (obr. 6.5). Systém ANSYS pak přepočítá zatížení do jednotlivých uzlů.



Obr. 6.5: Síť konečných prvků v softwaru ANSYS s vazbami a zatížením.



Obr. 6.6: Konečnoprvková síť výpočtového modelu metody konečných prvků v blízkosti kořene vrubu.



### 6.3.5. Model vlastností struktury vrubu

Bimateriálový vrub se skládá ze dvou transverzálně ortotropních materiálů, které mají 5 nezávislých elastických konstant (viz kapitola 4.3.3). Materiálový model je lineárně pružný [8, s. 36]. Software ANSYS vyžaduje zadávání charakteristik v kartézském souřadnicovém systému  $x, y, z$  (obr. 3.2). Vstupy jsou moduly pružnosti  $E_x, E_y, E_z$ , Poissonova čísla  $\nu_{xy}, \nu_{yz}, \nu_{xz}$  a moduly pružnosti ve smyku<sup>4</sup>  $G_{xy}, G_{yz}, G_{xz}$ . Změna směru vláken se může provést dvěma způsoby: změnou globálního souřadnicového systému nebo změnou materiálových charakteristik. První ze způsobů je nevýhodný z hlediska nutnosti následné transformace zpět do původního systému. Proto byl zvolen druhý přístup, kdy změna směru vláken o  $90^\circ$  je provedena záměnou souřadnicových indexů  $x \leftrightarrow y$ . Poissonovo číslo  $\nu_{yx}$  je pak nutné přepočítat zpět na  $\nu_{xy}$  pomocí rovnice (4.9). Pro moduly pružnosti ve smyku platí  $G_{xy} = G_{yx}$ .

### 6.3.6. Model projevů vrubu

Podle podmnožiny S7 na straně 20 dochází u zatíženého tělesa k deformaci a vzniku napjatosti. Hodnoty těchto veličin jsou odečítány na kružnici poloměru  $r_c$ .

## 6.4. Určení zobecněného faktoru intenzity napětí metodou $\Psi$ -integrálu

Pro vyjádření posuvů a napětí v okolí singulárního koncentrátoru napětí je dále nutné určit hodnotu zobecněného faktoru intenzity napětí. Existuje několik různých metod [11] [13], např.:

- Metoda přímé extrapolace
- Metoda  $\Psi$ -integrálu

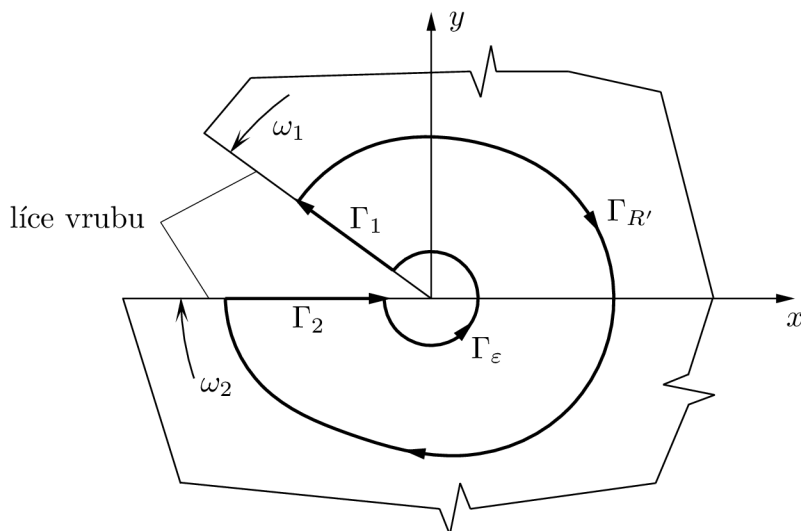
V dalším textu bude detailněji popsána metoda  $\Psi$ -integrálu a metoda přímé extrapolace, které jsou použity pro výpočet a ověření hodnoty faktoru intenzity napětí.

Řešení nelineární rovnice (6.19) poskytuje typově různá řešení vlastní hodnoty  $\delta$  v závislosti na geometrii a materiálu zkoumaného vrubu. Ty mohou být jak reálná, tak komplexní, řešením mohou být různé nebo násobné hodnoty. Počet kořenů závisí na typu singulárního koncentrátoru. Vyjdeme ze vztahů (5.60) Strohova formalismu, které se pro daná řešení  $\delta$  dají přepsat podle následujícího [6]:

**Případ 1:**  $\delta$  jsou různá a reálná,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(r, \theta) &= Hr^\delta \boldsymbol{\eta}(\theta), \\ \phi(r, \theta) &= Hr^\delta \boldsymbol{\lambda}(\theta), \end{aligned} \tag{6.21a}$$

<sup>4</sup>Pro případ rovinné úlohy by podle kapitoly 4.3.4 stačilo 5 nezávislých elastických konstant. Při jejich zadání do systému ANSYS docházelo k varovným hlášením a proto bylo nutné zadat elastické konstanty transverzálně ortotropního kompozitního materiálu.



**Obr. 6.7:** Integrační křivky  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_{R'}, \Gamma_\varepsilon$  kolem kořene bimateriálového vrubu s nezátíženými líci.

**Případ 2:**  $\delta$  jsou různá a komplexní,  $\delta = \delta_R \pm i\varepsilon$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(r, \theta) &= r^{\delta_R} \left\{ H r^{i\varepsilon} \boldsymbol{\eta}(\theta) + \overline{H} r^{-i\varepsilon} \overline{\boldsymbol{\eta}(\theta)} \right\}, \\ \boldsymbol{\phi}(r, \theta) &= r^{\delta_R} \left\{ H r^{i\varepsilon} \boldsymbol{\lambda}(\theta) + \overline{H} r^{-i\varepsilon} \overline{\boldsymbol{\lambda}(\theta)} \right\}, \end{aligned} \quad (6.21b)$$

Metoda  $\Psi$ -integrálu je matematický aparát pro stanovení zobecněného faktoru intenzity napětí založený na Bettiho recipročním teorému. Ten říká, že je-li těleso vystaveno působení dvou systémů sil, tak práce vykonaná prvním systémem na složkách deformace druhého systému je stejná jako práce, kterou vykoná druhý systém na složkách deformace prvního [14],[8, s. 38]. Zvolme první systém  $\mathbf{u}, \mathbf{t}$  jako singulární řešení (aktuální) a druhý systém  $\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{t}}$  jako řešení doplňkové (komplementární, pomocné), kde  $\mathbf{t}$  je vektor napětí působící na elementech  $ds$ . Při zanedbání objemových sil můžeme Bettiho teorém zapsat jako

$$\oint_{\Gamma} (\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} - \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{t}) ds = 0, \quad (6.22)$$

kde horní index  $T$  značí maticovou (vektorovou) transpozici a  $\Gamma$  je nějaká uzavřená křivka, která se skládá z hladkých křivek  $\Gamma_1, \Gamma_{R'}, \Gamma_2, \Gamma_\varepsilon$ , jak je vidět na obrázku 6.7. Protože platí předpoklad, že vektory napětí  $\mathbf{t}, \hat{\mathbf{t}}$  jsou na lících vrubu nulové (křivky  $\Gamma_1$  a  $\Gamma_2$ ), tak platí

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} (\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} - \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{t}) ds = - \int_{\Gamma_{R'}} (\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} - \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{t}) ds = \int_{\Gamma_R} (\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} - \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{t}) ds, \quad (6.23)$$

kde  $\Gamma_\varepsilon, \Gamma_R$  jsou cesty jdoucí od líce  $\theta = -\omega_2$  k líci  $\theta = \omega_1$  proti směru hodinových ručiček. Potom  $\Psi$ -integrál definován jako

$$\Psi = \int_{\Gamma_\varepsilon} (\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} - \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{t}) ds = -\Psi = \int_{\Gamma_R} (\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} - \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{t}) ds \quad (6.24)$$

je nezávislý na integrační cestě  $\Gamma$ . Přiblížením integrační cesty do oblasti dominující singularity a zvolením vhodného doplňkového řešení můžeme vyjádřit  $\Psi$ -integrál jako funkci koeficientů  $H$  – zobecněných faktorů intenzity napětí.

Pro uvažovaný bimateriálový vrub jsou na intervalu  $(0,1)$  dvě různé nenásobné reálné vlastní hodnoty exponentu singularity, vyjdeme proto z rovnic (6.21a). Zvolme pro zjednodušení jako integrační cestu oblouk kružnice směřující proti směru hodinových ručiček  $(-\omega_2 \rightarrow \omega_1)$ . Vektor napětí vyjádříme z rovnice (5.74), do které dosadíme (6.21a), tj.

$$\mathbf{t} = \phi_{,\theta}/r = Hr^{\delta-1}\boldsymbol{\lambda}'(\theta). \quad (6.25)$$

Připomeňme, že vektor výsledné síly působící na křivce mezi body  $s_1$  a  $s_2$  je definován pomocí funkce napětí  $\phi$  vztahem

$$\mathbf{T} = \Delta\phi = \phi(s_2) - \phi(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{t}(s) ds. \quad (6.26)$$

Jako doplňkové řešení zvolme to, které odpovídá pomocnému řešení (6.20). Rovnice (6.21a)<sub>1</sub> a (6.25) lze potom přepsat jako

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}(r, \theta) &= \hat{H}r^{-\delta}\hat{\boldsymbol{\eta}}(\theta), \\ \hat{\mathbf{t}}(r, \theta) &= \hat{H}r^{-\delta-1}\hat{\boldsymbol{\lambda}}'(\theta). \end{aligned} \quad (6.27)$$

Symboly  $(,)$  a  $(')$  značí derivaci podle úhlu  $\theta$ . Singulární a doplňkové řešení dosadíme do (6.24), kdy volíme  $\hat{H} = 1$ . Dostaneme  $\Psi$ -integrál

$$\begin{aligned} \Psi &= H \int_{-\omega_2}^{\omega_1} \left( r^\delta \boldsymbol{\eta}^T(\theta) r^{-\delta-1} \hat{\boldsymbol{\lambda}}'(\theta) - r^{-\delta} \hat{\boldsymbol{\eta}}^T(\theta) r^{\delta-1} \boldsymbol{\lambda}'(\theta) \right) r d\theta = \\ &= H \int_{-\omega_2}^{\omega_1} \left( r^{\delta-\delta-1+1} \boldsymbol{\eta}^T(\theta) \hat{\boldsymbol{\lambda}}'(\theta) - r^{-\delta+\delta-1+1} \hat{\boldsymbol{\eta}}^T(\theta) \boldsymbol{\lambda}'(\theta) \right) d\theta = \\ &= H \int_{-\omega_2}^{\omega_1} \left( \boldsymbol{\eta}^T(\theta) \hat{\boldsymbol{\lambda}}'(\theta) - \hat{\boldsymbol{\eta}}^T(\theta) \boldsymbol{\lambda}'(\theta) \right) d\theta, \end{aligned} \quad (6.28)$$

který je nezávislý na poloměru  $r$ . Funkce  $\boldsymbol{\eta}(\theta)$  a  $\boldsymbol{\lambda}'(\theta)$ , resp.  $\hat{\boldsymbol{\eta}}(\theta)$  a  $\hat{\boldsymbol{\lambda}}'(\theta)$  se získají z řešení (6.13a) a (6.13b) pro exponent vlastní hodnotu  $\delta$ , resp.  $-\delta$  (viz dodatek A). Pro ortotropní materiál tedy platí

$$\eta_i(\theta) = 2\Re \left\{ A_{i1}v_1 e^{\delta(\ln R_1(\theta) + i\Psi_1(\theta))} + A_{i2}v_2 e^{\delta(\ln R_2(\theta) + i\Psi_2(\theta))} \right\}, \quad (6.29a)$$

$$\begin{aligned} \lambda'_i(\theta) &= 2\Re \left\{ L_{i1}v_1 \delta e^{(\delta-1)(\ln R_1(\theta) + i\Psi_1(\theta))} (-\sin \theta + \mu_1 \cos \theta) + \right. \\ &\quad \left. + L_{i2}v_2 \delta e^{(\delta-1)(\ln R_2(\theta) + i\Psi_2(\theta))} (-\sin \theta + \mu_2 \cos \theta) \right\}, \end{aligned} \quad (6.29b)$$

kde

$$R_i^2(\theta) = (\cos \theta + \Re \{ \mu_i \})^2 + (\Im \{ \mu_i \} \sin \theta)^2, \quad (6.30a)$$

$$\Psi_i = \begin{cases} 0 & \text{pro } \theta = 0, \\ \operatorname{arccotg}(\cos \theta + \Re \{ \mu_i \}) / \Im \{ \mu_i \} \sin \theta & \text{pro } \theta \in (0, \pi), \\ \operatorname{arccotg}(\cos \theta + \Re \{ \mu_i \}) / \Im \{ \mu_i \} \sin \theta - \pi & \text{pro } \theta \in (-\pi, 0), \\ -\pi & \text{pro } \theta = -\pi. \end{cases} \quad (6.30b)$$

$\Re\{\mu\}$ , resp.  $\Im\{\mu\}$  značí reálnou, resp. imaginární část vlastního čísla materiálu. Obdobně se dospěje k funkcím pomocného řešení  $\hat{\boldsymbol{\eta}}(\theta)$ ,  $\hat{\boldsymbol{\lambda}}(\theta)$  dosazením vlastní hodnoty  $-\delta$ .

Nyní definujme druhý  $\Psi$ -integrál, kdy za pole posuvů  $\mathbf{u}$  a vektorů napětí  $\mathbf{t}$  zvolme hodnoty získané metodou konečných prvků (MKP)  $\mathbf{u}^{MKP}$  a  $\mathbf{t}^{MKP}$  (kapitola 6.3). Dosazením společně s (6.27) do (6.24) a položením  $\hat{H} = 1$  obdržíme

$$\Psi^* = \int_{-\omega_2}^{\omega_1} \left( \mathbf{u}^{MKP} r^{-\delta-1} \hat{\boldsymbol{\lambda}}'(\theta) - r^{-\delta} \hat{\boldsymbol{\eta}}^T(\theta) \mathbf{t}^{MKP} \right) r \, d\theta. \quad (6.31)$$

Integrační cesta se volí ve větší vzdálenosti  $r$  od kořene vrubu, kde numerické řešení MKP dosahuje dostatečné přesnosti<sup>5</sup>. Dosazením (6.31) a (6.28) do (6.23) díky nezávislosti na integrační cestě dostaneme vztah pro zobecněný faktor intenzity napětí

$$H = \frac{\Psi^*}{\Psi} = \frac{\int_{-\omega_2}^{\omega_1} \left( \mathbf{u}^{MKP} r^{-\delta-1} \hat{\boldsymbol{\lambda}}'(\theta) - r^{-\delta} \hat{\boldsymbol{\eta}}^T(\theta) \mathbf{t}^{MKP} \right) r \, d\theta}{\int_{-\omega_2}^{\omega_1} \left( \boldsymbol{\eta}^T(\theta) \hat{\boldsymbol{\lambda}}'(\theta) - \hat{\boldsymbol{\eta}}^T(\theta) \boldsymbol{\lambda}'(\theta) \right) d\theta}. \quad (6.32)$$

## 6.5. Určení zobecněného faktoru metodou přímé extrapolace

Metoda přímé extrapolace je další metodou stanovení zobecněného faktoru intenzity napětí, která kombinuje numerické a analytické metody. Napětí v okolí kořene vrubu vyjádřené pomocí jednotlivých singulárních složek může být zapsáno jako

$$\sigma_{ij} = H_1 r^{\delta_1} F_{ij1}(\theta) + H_2 r^{\delta_2} F_{ij2}(\theta), \quad (6.33)$$

kde  $(i, j)$  je uvažovaný souřadný systém a  $H_1, H_2$  jsou neznámé faktory intenzity napětí. Zvolme 2 libovolné úhly  $\theta_1, \theta_2$  a jím odpovídající napětí  $\sigma_{ij}$  z rovnice (6.33) získané pomocí metody konečných prvků. Dostaneme soustavu dvou rovnic, jež je možné zapsat maticově jako

$$\begin{bmatrix} r^{\delta_1} F_{ij1}(\theta_1) & r^{\delta_2} F_{ij2}(\theta_1) \\ r^{\delta_1} F_{ij1}(\theta_2) & r^{\delta_2} F_{ij2}(\theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{ij}(r, \theta_1) \\ \sigma_{ij}(r, \theta_2) \end{bmatrix}. \quad (6.34)$$

Zkoumá se závislost  $H_1, H_2$  na polární souřadnici  $r$  [11]. Požadované faktory intenzity napětí se získají extrapolací řešení (6.34) do  $r = 0$ .  $F_{ij}$  jsou funkce popsané rovnicí (A.11c).

<sup>5</sup>Volba integrační cesty pro  $\Psi$ -integrál s hodnotami získanými výpočtovým modelem metody konečných prvků bude diskutována v kapitole 7.2.

## 7. Diskuse

V následující kapitole byly diskutovány testované výpočtové modely na konkrétních materiálových konfiguracích. Jak již bylo uvedeno, materiál se předpokládá jako transverzálně ortotropní a je charakterizován 5 nezávislými elastickými konstantami  $E_L$ ,  $E_T$ ,  $\nu_{LT}$ ,  $\nu_{TT'}$  a  $G_{LT}$ . Index  $L$  značí longitudinální směr, tj. podélný a  $T$ ,  $T'$  transverzální (příčný) směr (viz kapitola 4). Směr vláken oblasti I je kolmý na materiálové rozhraní, u oblasti II rovnoběžný s rozhraním. Dále je studován vliv stavu rovinné napjatosti a rovinné deformace.

Pro uvažované materiálové konfigurace byly hodnoty Poissonových čísel  $\nu_{LT} = 0,3$ ,  $\nu_{TT'} = 0,3$  a modulů pružnosti ve smyku  $G_{LT} = 30 \text{ GPa}^1$ . Rozměry tělesa výpočtového modelu metody konečných prvků jsou uvedeny v odstavci 6.3.2 na straně 55.

### 7.1. Výpočet vlastní hodnoty exponentu singularity

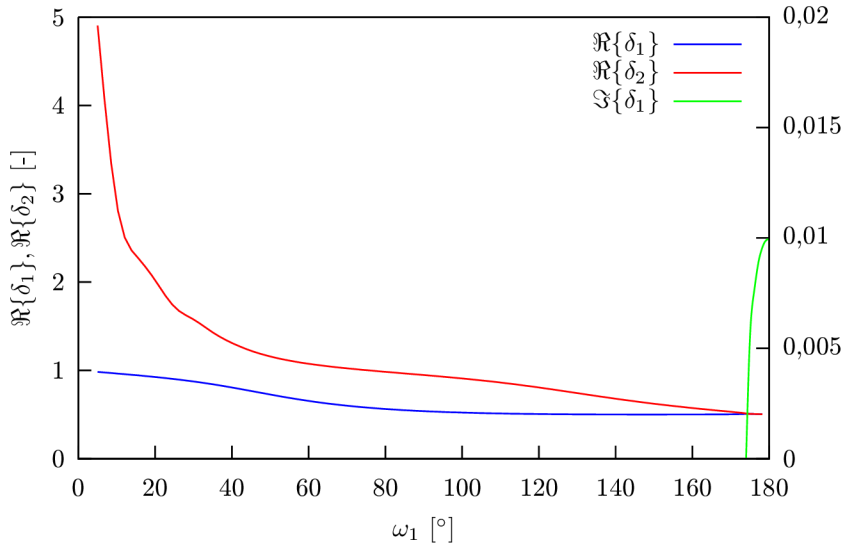
Vlastní hodnota exponentu singularity  $\delta$  byla stanovena pomocí numericko-analytického algoritmu popsaného v odstavci 6.2. Bylo zjištěno, že rovnice (6.17) pro úhel líce vrubu ( $90^\circ, \omega_{mez}$ ) má na intervalu  $(0, 1)$  dva reálné kořeny. Úhel  $\omega_{mez}$  nazveme mezní úhel, kdy je použitelný výpočtový model pro stanovení rozložení napětí. Úhel je závislý na dané materiálové konfiguraci a po jeho překročení se vlastní hodnota  $\delta$  stává komplexní. Zvláštním případem je materiálová konfigurace  $E_{x1} = 50 \text{ GPa}$ ,  $E_{y1} = 100 \text{ GPa}$ ,  $E_{x2} = 100 \text{ GPa}$ ,  $E_{y2} = 50 \text{ GPa}$ , kdy jsou vlastní hodnoty exponentu singularity až do úhlu  $\omega_1 = 180^\circ$  reálné. To může být zdůvodněno tím, že rozdíl materiálových charakteristik není tak rozdílný jako u ostatních případů a konfigurace se tak více blíží trhlině homogenního prostředí. Výsledky pro různé materiálové konfigurace jsou shrnuty v tab. 7.1.

materiál 1	$E_1$ [GPa]	50				
	$E_y$ [GPa]	100				
materiál 2	$E_x$ [GPa]	50	50	100	200	400
	$E_y$ [GPa]	400	200	50	50	50
$\omega_{mez}$ [°]		155	171	180	173	166

**Tab. 7.1:** Hodnoty mezních úhlů  $\omega_{mez}$  pro vybrané materiálové konfigurace. Stav rovinné deformace. Hodnota mezního úhlu je zaokrouhlena na jednotky.

Na obrázku 7.1 je závislost vlastních hodnot  $\delta$  na úhlu líce  $\omega_1$ . Zvětšováním tohoto úhlu se vlastní hodnoty  $\delta$  blíží číslu 0,5, což je vlastní hodnota exponentu singularity trhliny ležící na bimateriálovém rozhraní [23]. Dále je vidět, že po dosažení mezního úhlu  $\omega_{mez}$  se imaginární část stává nenulovou. K jejímu stanovení není výpočtový model použitelný.

<sup>1</sup>Software ANSYS umožňuje zadávání Poissonových čísel dvěma způsoby, a to PR – „major Poisson’s ratio“ a NU – „minor Poisson’s ratio“. První z uvedených možností je historicky starší a označuje Poissonovo číslo  $\nu_{LT}$ , které bylo získáno z podélné tahové zkoušky. Podobně je tomu u druhého případu, který odpovídá hodnotě  $\nu_{TL}$ .



**Obr. 7.1:** Závislost vlastních hodnot exponentu singularity na úhlu líce vrubu  $\omega_1$ . Materiál  $E_{x1} = 50$  GPa,  $E_{y1} = 100$  GPa,  $E_{x2} = 400$  GPa,  $E_{y2} = 50$  GPa, rovinná deformace.

Vlastní vektory se stanoví ze soustavy rovnic (6.17) dosažením vlastních hodnot  $\delta_1$  a  $\delta_2$  do matice  $\mathbf{K}$ . V tabulce 7.2 jsou shrnuty vlastní vektory pro 4 různé úhly  $\omega_1$ .

## 7.2. Výpočet zobecněného faktoru intenzity napětí

Zobecněný faktor intenzity napětí byl stanoven pomocí metody  $\Psi$ -integrálu popsané v kapitole 6.4. Byl studován vliv poloměru kružnice  $r_c$ , na které byly stanovovány posuvy a napětí metodou konečných prvků. Výpočtový model umožňuje zvolit poloměr  $r_c$  od  $1 \mu\text{m}$  do  $1 \text{cm}$ . Na obrázcích 7.2 a 7.3 je vidět, že hodnoty ZFIN vykazují značné oscilační vlastnosti v blízkosti kořene vrubu. To je způsobeno numerickou nepřesností metody konečných prvků z hlediska singularity. Proto je třeba volit pole posuvů a napětí dále od kořene. To je hlavní výhoda použití metody  $\Psi$ -integrálu, kdy se pro výpočet volí hodnoty napětí a posuvů, které přesněji odpovídají skutečnosti než v těsné blízkosti kořene. Pro stanovení ZFIN byly v dalších výpočtech voleny poloměry integračních cest  $2 \text{mm}$  a více.  $\Psi$ -integrály stanovené pro poloměry nad touto hodnotou mohou být považovány za nezávislé na integrační cestě. Jistou nestabilitu vykazovala hodnota ZFIN  $H_1$  při podmínce rovinné deformace, kdy hodnoty trvale klesaly. Uvedené závislosti byly testovány pro různé materiálové konfigurace a charakter reprezentuje stav rovinné napjatosti, resp. rovinné deformace.

Přesnost stanovení ZFIN je možné posoudit i z hlediska přesnosti stanovení jednotlivých  $\Psi$ -integrálů. Chyba integrace byla zvolena  $10^{-10}$ , což je možné z numerického hlediska považovat za nulu. Pro singulární a doplňkové řešení se integrál (6.28) pohyboval na této hranici. To je v souladu s teorií, neboť obě řešení jsou navzájem ortogonální vzhledem k integrálu (6.28), což způsobí, že jejich  $\Psi$ -integrál je nulový. Integrál regulárního řešení a MKP (6.31) nabýval nenulových hodnot, neboť řešení metodou konečných prvků v sobě

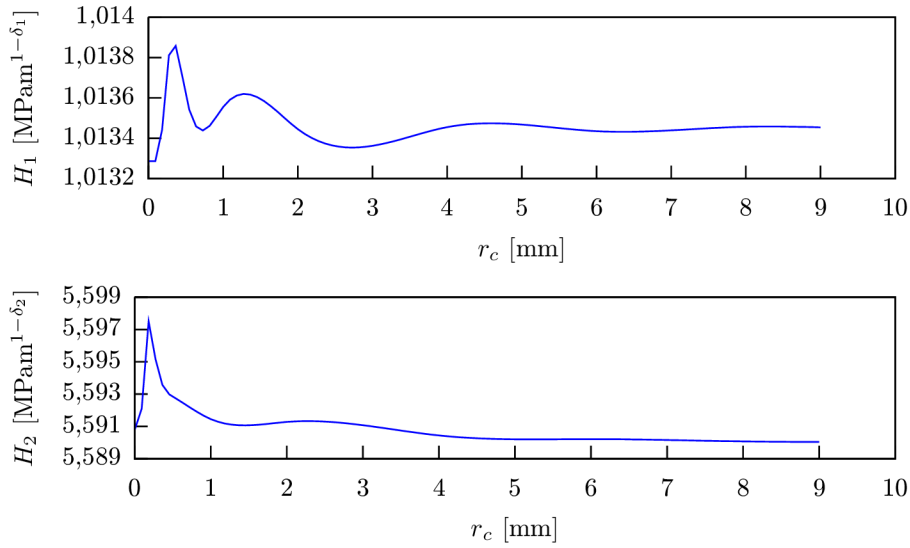
$\omega_1 [^\circ]$	$\delta_1 [-]$	$\delta_2 [-]$	$\mathbf{v}_1^I$ $\mathbf{v}_1^{II}$	$\mathbf{v}_2^I$ $\mathbf{v}_2^{II}$
35	0,874	1,552	$-0,3827240542-0,2766784357i$ $-0,2499559925-0,8452770808i$ $-0,3827240542-0,9121773264i$ $-0,2499559925-0,5957404205i$	$0,6821027272-0,0390670083i$ $0,6822002934+0,2604081374i$ $0,6821027272+0,1133443730i$ $0,6822002934+0,1133605855i$
90	0,567	0,946	$0,3287997113-0,0771684090i$ $0,8912517832+0,3026649061i$ $0,3287997113+0,0698969782i$ $0,8912517832+0,1894642978i$	$0,0387267384+0,0901511701i$ $-0,1294962956-0,9867135935i$ $0,0387267384+0,2260288272i$ $-0,1294962956-0,7558058594i$
130	0,516	0,732	$0,0324974771-0,1112334056i$ $0,9908600341+0,0690466239i$ $0,0324974771+0,0015909818i$ $0,9908600341+0,0485096212i$	$0,7248742498+0,2686359324i$ $-0,4674112538-0,4288575260i$ $0,7248742498+0,6460131411i$ $-0,4674112538-0,4165602687i$
165	0,523	0,533	$-0,6239285986-0,1027569909i$ $0,7742356443-0,0267071472i$ $-0,6239285986-0,0461552095i$ $0,7742356443+0,0572741952i$	$0,7504449525+0,1001003342i$ $-0,6525217516+0,0320571383i$ $0,7504449525+0,079283177i$ $-0,6525217516-0,0689377655i$

**Tab. 7.2:** Vlastní vektory odpovídající jednotlivým vlastním hodnotám  $\delta$  a oblastem bimateriálu I, II. Materiál  $E_{x1} = 50$  GPa,  $E_{y1} = 100$  GPa,  $E_{x2} = 400$  GPa,  $E_{y2} = 50$  GPa, rovinná deformace.

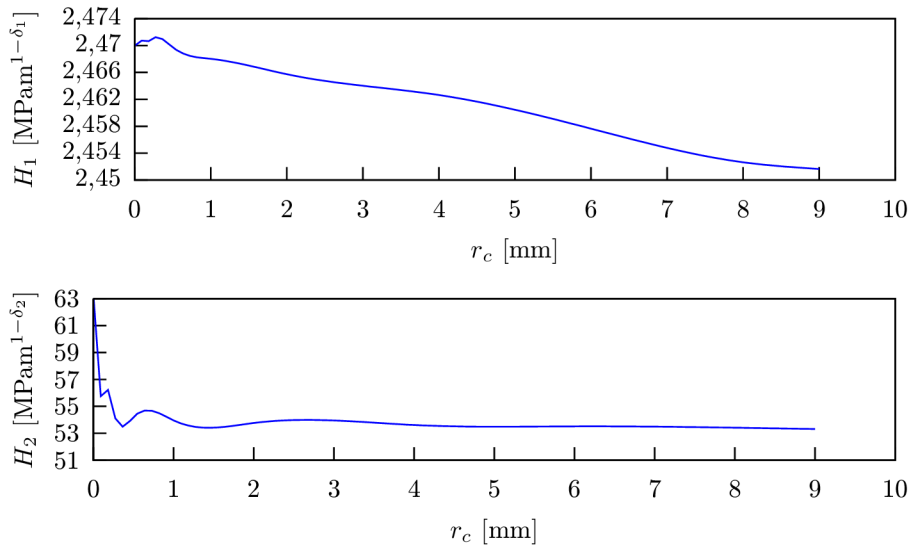
zahrnuje jak singulární řešení, tak i ostatní členy Williamsova asymptotického rozvoje, které jsou generovány geometrií a předepsanými okrajovými podmínkami.

Dále bylo nutné posoudit vliv velikosti sítě na hodnotu zobecněného faktoru intenzity napětí. Na obr. 7.4 jsou závislosti hustoty sítě na kružnici poloměru  $r_c$ , tedy na integrační cestě  $\Psi$ -integrálu. Jednotka zkoumané veličiny je počet prvků na oblouku kružnice s velikostí středového úhlu  $90^\circ$ . Optimální hodnota byla stanovena na 45 prvků/ $90^\circ$ . Dalším zjemňováním již nedocházelo zpřesňování hodnoty ZFIN. Navíc při dvojnásobném zjemnění sítě se výpočtový čas zvětšil čtyřikrát.

Z výsledků výpočtových modelů je patrné, že počet singulárních členů pro bimateriálový vrub je  $n = 2$  (rovnice (3.5)). Z toho vyplývá, že pole napětí se skládá z dvou polí napětí odpovídající daným vlastním hodnotám exponentu singularity a zobecněného faktoru intenzity napětí. Na dominantního chování s hlediska singularity má výraznější vliv vlastní hodnota exponentu singularity  $\delta$ . Např. v [6] je pro posuzování charakteru napjatosti vybrána větší hodnota  $\delta$  a k ní dopočten ZFIN. U speciálního případu trhliny kolmé na rozhraní ortotropních materiálů lze rozlišit jednotlivé zatěžující módy, kdežto u bimateriálového vrubu není možné z hodnot ZFIN usuzovat charakter namáhání.



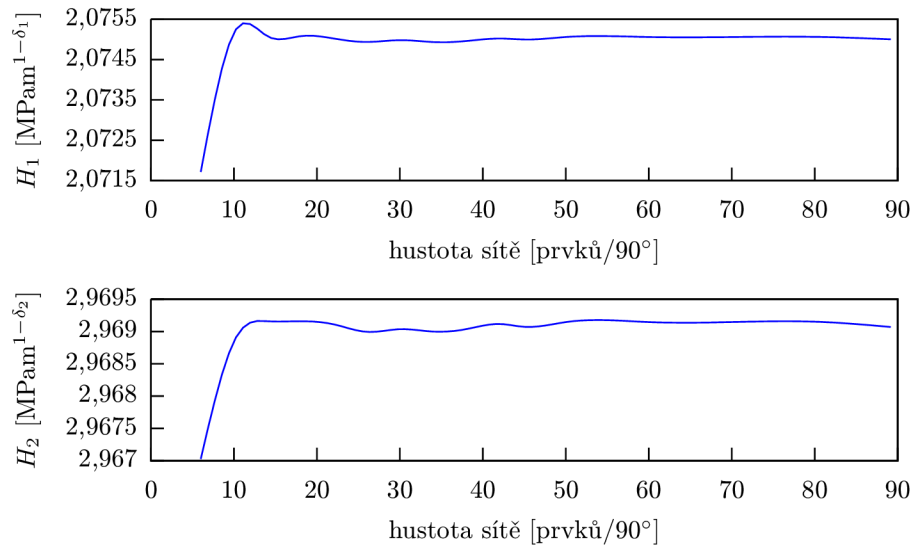
**Obr. 7.2:** Závislost zobecněných faktorů intenzity napětí na poloměru integrační cesty  $r_c$ . Materiál  $E_{x1} = 50$  GPa,  $E_{y1} = 100$  GPa,  $E_{x2} = 400$  GPa,  $E_{y2} = 50$  GPa,  $\omega_1 = 120^\circ$ , rovinná napjatost.



**Obr. 7.3:** Závislost zobecněných faktorů intenzity napětí na poloměru integrační cesty  $r_c$ . Materiál  $E_{x1} = 50$  GPa,  $E_{y1} = 100$  GPa,  $E_{x2} = 200$  GPa,  $E_{y2} = 50$  GPa,  $\omega_1 = 120^\circ$ , rovinná deformace.

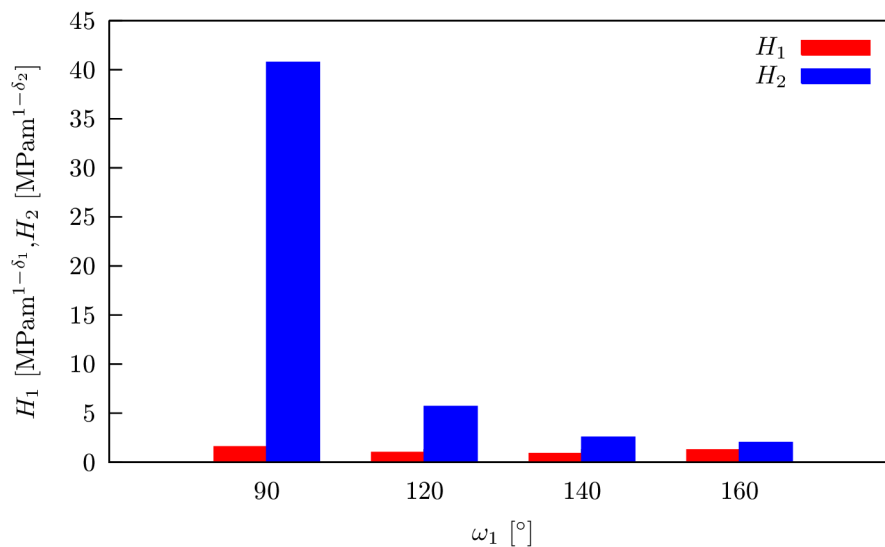
Na obr. 7.5 jsou hodnoty zobecněných faktorů intenzity napětí pro různé úhly líce  $\omega_1$ . Vzhledem k tomu, že nelze srovnávat dvě hodnoty zobecněných faktorů intenzity napětí, neboť fyzikální rozměr je závislý na úhlu líce a materiálových vlastnostech, je možné pouze sledovat jejich velikost a alespoň opticky rozlišovat jejich dominantní vliv v asymptotickém rozvoji napětí. Nicméně z obr. 7.5 je zřejmé, že se zvětšujícím se úhlem líce vrubu se





**Obr. 7.4:** Závislost zobecněných faktorů intenzity napětí na hustotě sítě na poloměru  $r_c$ . Materiál  $E_{x1} = 50$  GPa,  $E_{y1} = 100$  GPa,  $E_{x2} = 200$  GPa,  $E_{y2} = 50$  GPa,  $\omega_1 = 170^\circ$ , rovinná deformace.

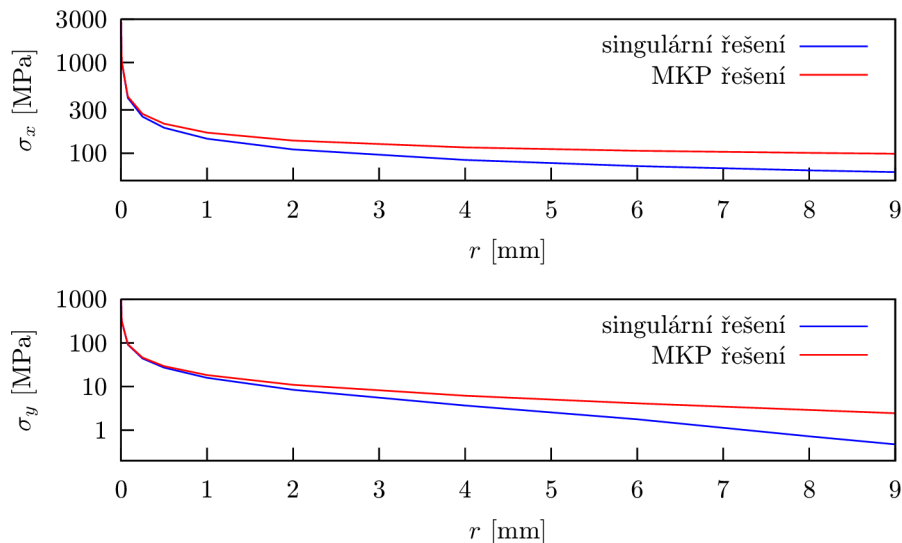
jejich vliv vyrovnává, stejně jako rozdíl mezi vlastními hodnotami  $\delta$  (viz obr. 7.1). Volbou pouze dominantní hodnoty pro stanovení rozložení napětí bychom se potom dopustili podstatné chyby.



**Obr. 7.5:** Zobecněné faktory intenzity napětí pro různé úhly  $\omega_1$ . Materiál  $E_{x1} = 50$  GPa,  $E_{y1} = 100$  GPa,  $E_{x2} = 400$  GPa,  $E_{y2} = 50$  GPa, rovinná deformace.

### 7.3. Rozložení napětí v okolí bimateriálového vrubu

Na obr. 7.6 jsou průběhy napětí singulárního řešení a napětí stanovené metodou konečných prvků. Oba průběhy lze považovat za shodné do poloměru  $r = 0,5$  mm, což odpovídá hodnotám vypočteným např. v [11] pomocí metody přímé extrapolace. Singulární řešení tedy vykazuje větší přesnost v těsné blízkosti kořene vrubu, naopak metoda konečných prvků poskytuje spolehlivé hodnoty mimo oblast dominující singularity. To je způsobeno vlivem ostatních členů Williamsova rozvoje pro mimo oblast singularity. Navíc záleží na hustotě a topologii sítě v blízkosti kořene, přičemž chyba ZFIN se pohybovala v řádech tisíců MPa  $m^{1-\delta}$ . V případě izotropního homogenního materiálu se singularita modeluje pomocí příkazu KSCON, který používá degenerované triangulární prvky s posunutými uzly [13]. Pro bimateriálový vrub složený z ortotropních materiálů to nemá význam, proto bylo nutné vyšetřit singularitu na radiálních vzdálenostech v řádech mikrometrů a zvolit tak odpovídající síť. Bylo zjištěno, že tento problém řeší volba osmiuzlového prvku PLANE183, který má kvadratické bázové funkce. Na obr. 7.7 jsou srovnány průběhy napětí s použitím čtyřuzlového PLANE182 a osmiuzlového kvadratického prvku PLANE183. U prvního uvedeného typu prvku dochází k poklesu napětí v několika prvních uzlech konečnoprvkové sítě vlivem numerické nestability, což by se negativně projevilo především u méně husté sítě. Velikost prvku ve vyšetřované oblasti byla  $0,02 \mu\text{m}$  (obr. 6.6). Průměrný počet prvků konečnoprvkové sítě byl 30322.



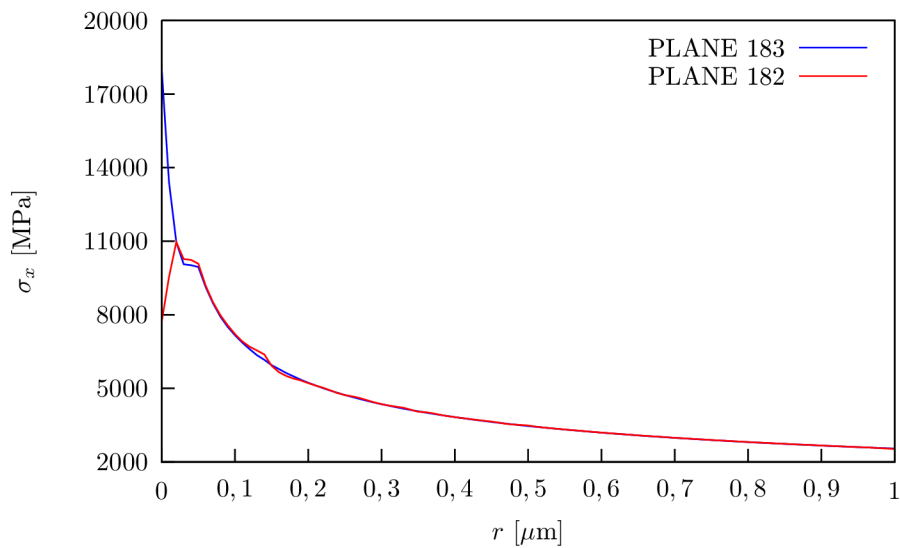
**Obr. 7.6:** Napětí v radiálním směru na úhlové souřadnici  $\theta = -10^\circ$ . Materiál  $E_{x1} = 50$  GPa,  $E_{y1} = 100$  GPa,  $E_{x2} = 200$  GPa,  $E_{y2} = 50$  GPa,  $\omega_1 = 150^\circ$ , rovinná deformace. Na svislé ose je logaritmická stupnice.

Za výše uvedených předpokladů je možné stanovit a posoudit rozložení napětí a posuvů v okolí bimateriálového vrubu. Byly posouzeny rozdíly singulárního řešení a řešení metodou konečných prvků v závislosti na úhlu líce  $\omega_1$ . Z obr. 7.8 a 7.9 je patrné, že na vzdálenosti  $r_c = 0,001$  mm jsou obě pole napětí a posuvů přibližně stejná. Při zvětšování úhlu líce  $\omega_1$  se obě řešení více přibližují, což je patrné na posuvech 7.8d, 7.8e, 7.9d a 7.9e.

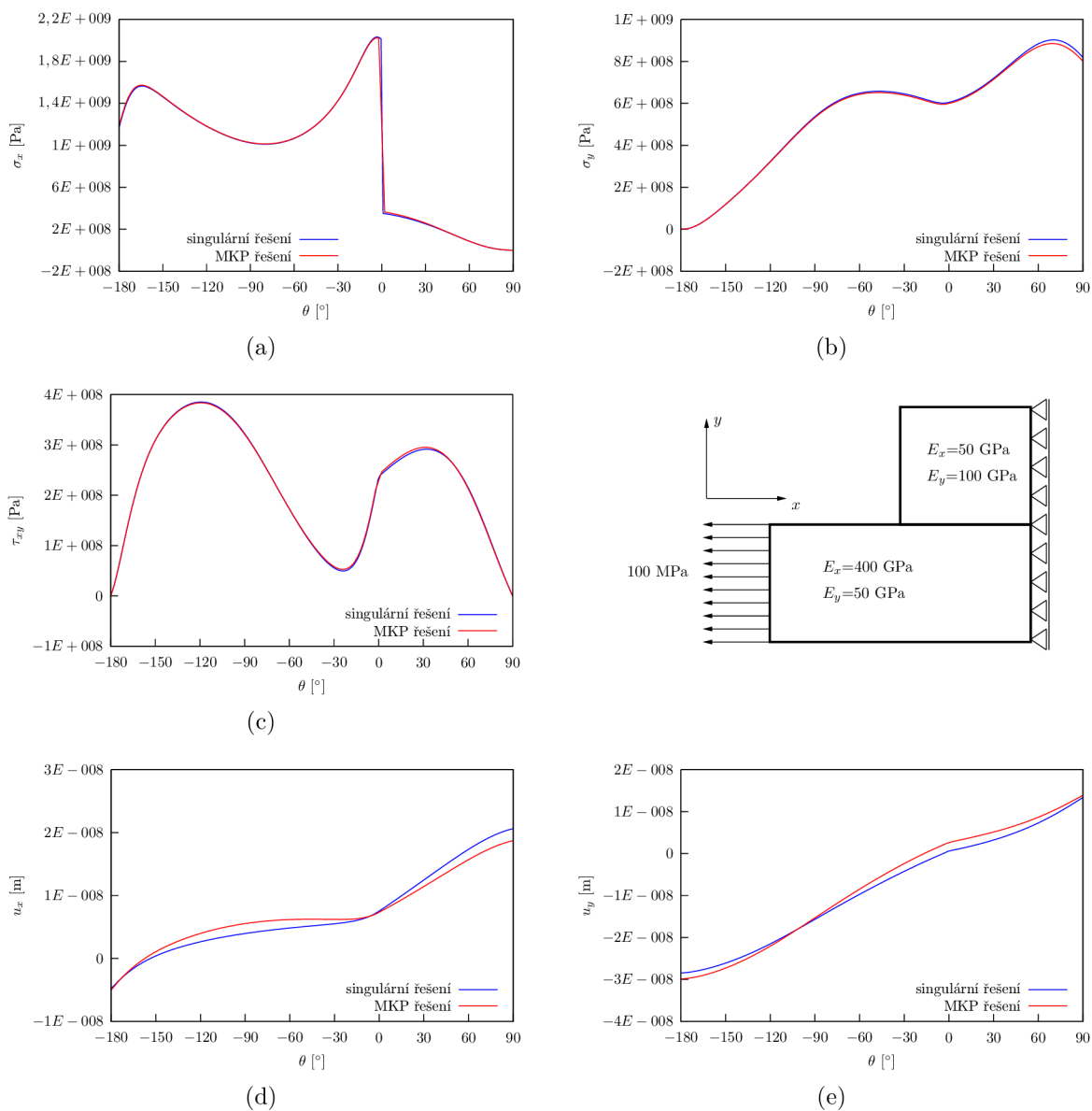
Na bimateriálovém rozhraní jsou splněny okrajové podmínky (6.12). To znamená, že všechny složky napětí s nenulovým průmětem do osy  $x$ , tj. osy rovnoběžné s bimateriálovým rozhraním, musí být současně s posuvy spojité. Tomu odpovídají všechna napětí s výjimkou  $\sigma_x$  (obr. 7.8a a 7.9a). Na lících vrubu jsou nulová normálová napětí, což patrně u smykových napětí  $\sigma_{xy}$  (obr. 7.8c a 7.9c) a  $\sigma_y$  pro úhel  $-\omega_2$ .

Bylo zjištěno, že zpřesňováním řešení, tj. přiblížením ke kořeni vrubu, se hodnoty napětí v určitých úsecích nepřibližují (např. úhel  $70^\circ$  obr. 7.8b). V [24] byl zkoumán vliv T-napětí na odchylky výše uvedených řešení pro případ trhlin kolmých na rozhraní ortotropních materiálů, kde je popsáno podobné chování. T-napětí popisuje vliv dalšího členu Williamsova rozvoje a má vliv na další iniciaci a šíření trhliny. Vystává tak nutnost další studie, jestli podobné chování nevykazuje i uvažovaný bimateriálový vrub. Předkládaná práce se tímto dále nezabývá.

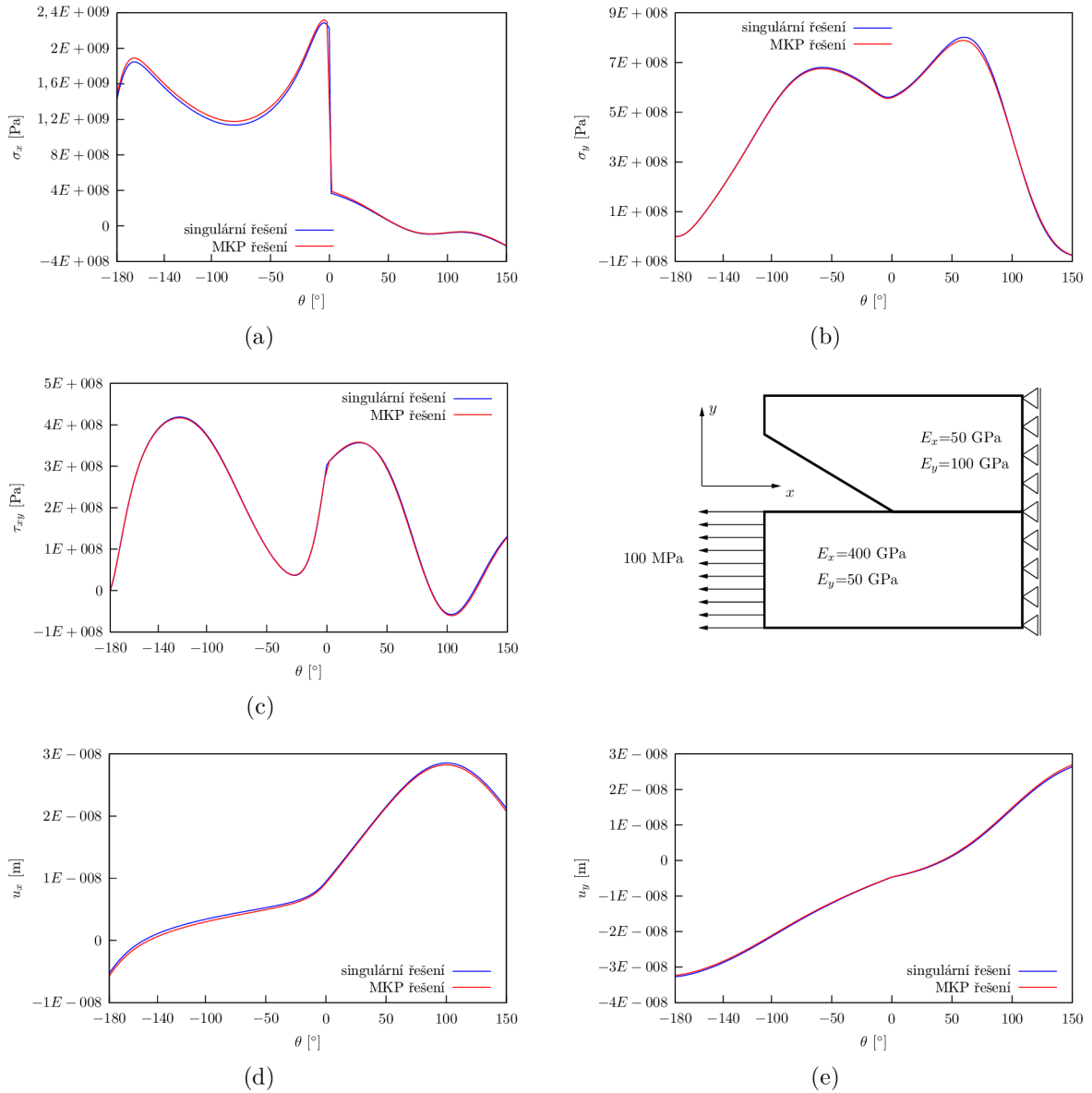
Následně byla vykreslena napětí a posuvy na poloměru  $r_c = 0,5$  mm (obr. 7.10). Je vidět, že singulární řešení se značně liší od řešení metodou konečných prvků. To odpovídá situaci ilustrované na obr. 7.6. Okrajové podmínky ale zůstávají splněny. Singulární řešení poskytuje mimo oblast singularity nižší hodnoty napětí  $\sigma_x$  a  $\sigma_y$  než metoda konečných prvků.



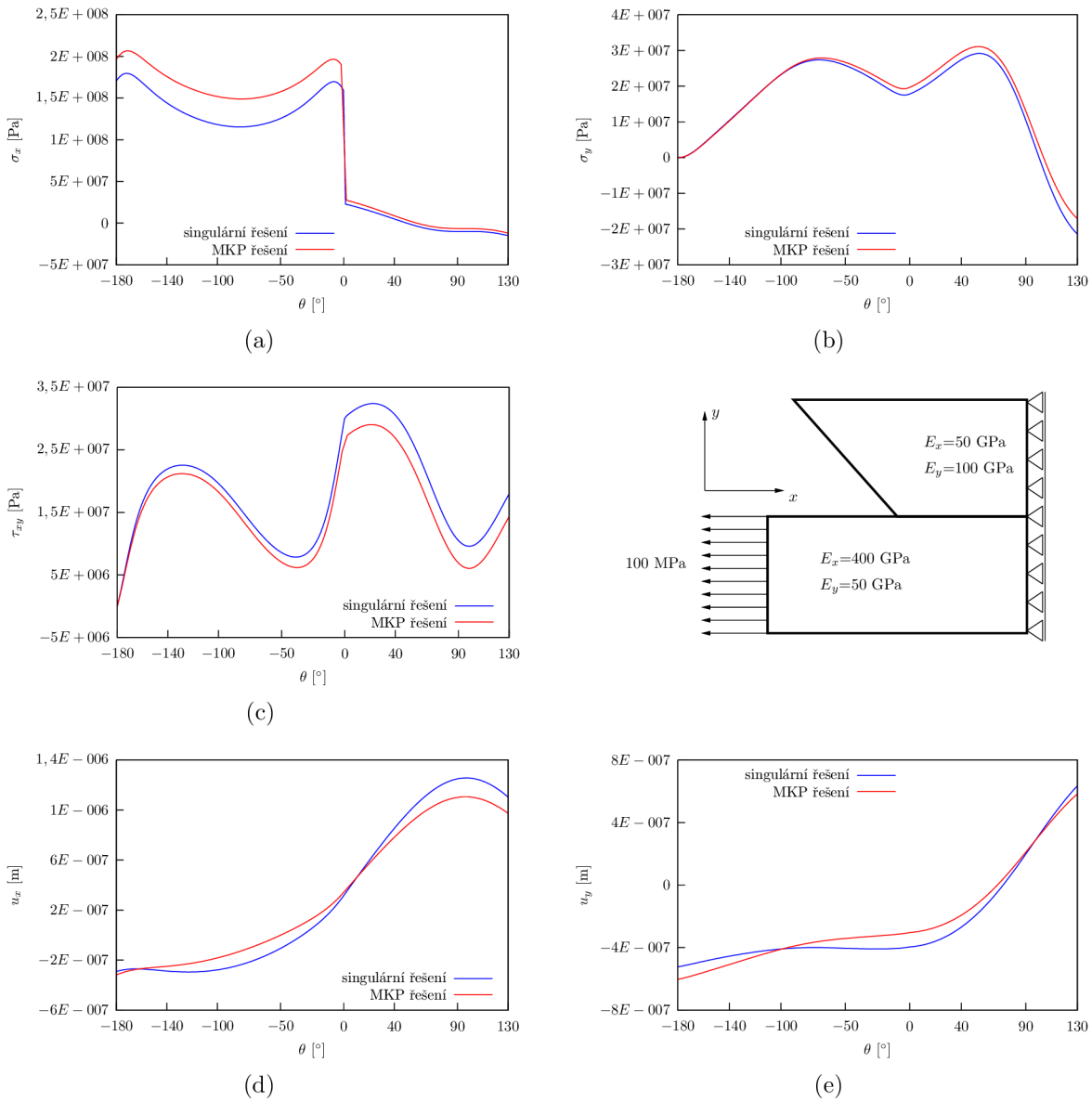
**Obr. 7.7:** Singularita napětí v těsné blízkosti kořene vrubu výpočtového modelu metody konečných prvků za použití prvků sítě konečných prvků PLANE182 a PLANE183. Materiál  $E_{x1} = 50$  GPa,  $E_{y1} = 100$  GPa,  $E_{x2} = 200$  GPa,  $E_{y2} = 50$  GPa,  $\omega_1 = 150^\circ$ , rovinná deformace,  $\theta = -20^\circ$ .



**Obr. 7.8:** Průběh napětí a posuvů po kružnici o poloměru  $r_c = 0,001$  mm. Materiál  $E_{x1} = 50$  GPa,  $E_{y1} = 100$  GPa,  $E_{x2} = 400$  GPa,  $E_{y2} = 50$  GPa,  $\omega_1 = 90^\circ$ , rovinná deformace.



**Obr. 7.9:** Průběh napětí a posuvů po kružnici o poloměru  $r_c = 0,001$  mm. Materiál  $E_{x1} = 50$  GPa,  $E_{y1} = 100$  GPa,  $E_{x2} = 400$  GPa,  $E_{y2} = 50$  GPa,  $\omega_1 = 150^\circ$ , rovinná deformace.

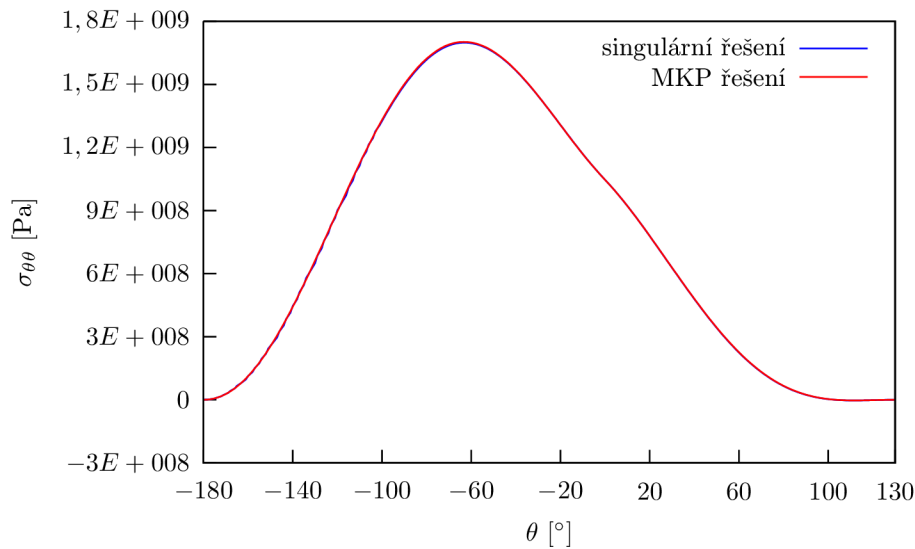


**Obr. 7.10:** Průběh napětí a posuvů po kružnici o poloměru  $r_c = 0,5$  mm. Materiál  $E_{x1} = 50$  GPa,  $E_{y1} = 100$  GPa,  $E_{x2} = 400$  GPa,  $E_{y2} = 50$  GPa,  $\omega_1 = 130^\circ$ , rovinná deformace.

Existují metody stanovující kritéria šíření trhliny z kořene obecného singulárního koncentrátoru napětí, např. [11], [12]. K vyhodnocování se používá napětí  $\sigma_{\theta\theta}$  polárního souřadnicového systému, tj. napětí kolmé na radiální směr (viz obr. 3.2b). To se přepočte ze složek kartézského souřadnicového systému  $x, y, z$  pomocí vztahu

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta. \quad (7.1)$$

Na obr. 7.11 jsou vykreslena napětí  $\sigma_{\theta\theta}$  na vzdálenosti  $r_c = 0,001$  mm.



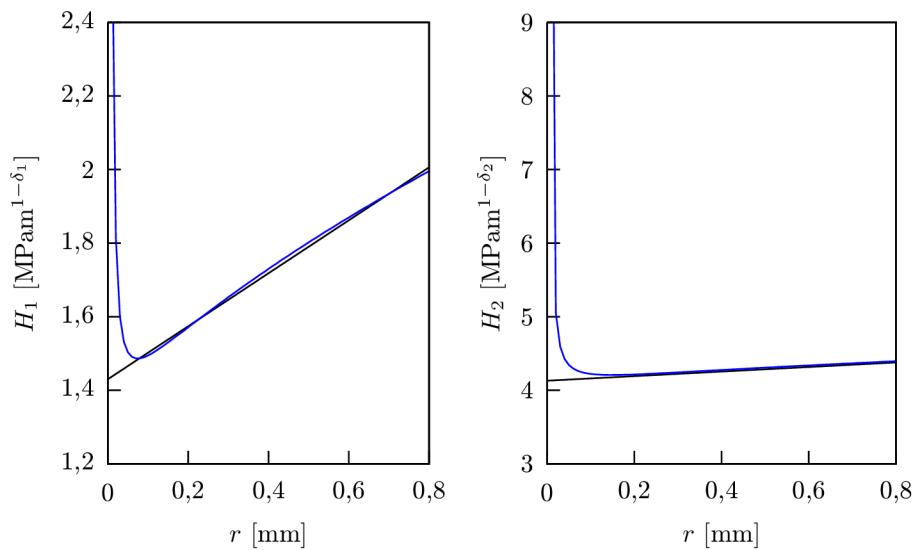
**Obr. 7.11:** Průběh napětí  $\sigma_{\theta\theta}$  na kružnici o  $r_c = 0,001$  mm. Materiál  $E_{x1} = 50$  GPa,  $E_{y1} = 100$  GPa,  $E_{x2} = 200$  GPa,  $E_{y2} = 50$  GPa,  $\omega_1 = 130^\circ$ , rovinná napjatost.

## 7.4. Výpočet zobecněného faktoru intenzity napětí metodou přímé extrapolace

Hodnota ZFIN určeného pomocí  $\Psi$ -integrálu byla ověřena metodou přímé extrapolace popsané v odstavci 6.5. V [11] je doporučena volba napětí  $\sigma_{\theta\theta}$ , nicméně v našem případě byla testována volba napětí  $\sigma_x$ . Na obr. 7.12 je závislost ZFIN  $H_1$  a  $H_2$  na polární souřadnici  $r$ . Hodnoty ZFIN pro konkrétní materiálové charakteristiky stanovené oběma uvažovanými metodami jsou uvedené v tab. 7.3. Obě hodnoty se řádově shodují a je tedy možné konstatovat, že je vhodné zvolit i složky napětí kartézského souřadnicového systému. Rozdíl je způsoben tím, že metoda  $\Psi$ -integrálu zahrnuje všechny členy Williamsova rozvoje díky polím napětí a posuvů získaných metodou konečných prvků, přičemž určujeme pouze první dva členy a ostatní zanedbáme. Kdežto u přímé metody je zahrnut vliv dalších členů Williamsova rozvoje do hodnot ZFIN. Stejně hodnoty bychom dostali pro napětí  $\sigma_y$ . Použitý typ prvků konečnoprvkové sítě byl PLANE183.

Metoda	$H_1$ [MPa m <sup>1-<math>\delta_1</math>]</sup>	$H_2$ [MPa m <sup>1-<math>\delta_2</math>]</sup>
$\Psi$ -integrál	1,272153	3,750523
Přímá extrapolace	1,431243	4,131153

**Tab. 7.3:** Hodnoty zobecněných faktorů intenzity napětí stanovené metodou  $\Psi$ -integrálu a přímé extrapolace. Materiál  $E_{x_1} = 50$  GPa,  $E_{y_1} = 100$  GPa,  $E_{x_2} = 200$  GPa,  $E_{y_2} = 50$  GPa,  $\omega_1 = 140^\circ$ , rovinná deformace.



**Obr. 7.12:** Stanovení zobecněných faktorů intenzity napětí  $H_1$ ,  $H_2$  metodou přímé extrapolace. Materiál  $E_{x_1} = 50$  GPa,  $E_{y_1} = 100$  GPa,  $E_{x_2} = 200$  GPa,  $E_{y_2} = 50$  GPa,  $\omega_1 = 140^\circ$ , rovinná deformace.

## 7.5. Použitý hardware

Výpočet vlastní hodnoty exponentu singularity softwarem Maple a zobecněného faktoru intenzity napětí softwarem Silverfrost:

- Hardware: procesor AMD Athlon 64 X2 Dual-Core TK-55 1,80 GHz 32 bitů, operační paměť RAM 2 GB
- Čas výpočtu: 34 s (Maple)
- Čas výpočtu: 25 s (Silverfrost)

Výpočet pole napětí a posuvů softwarem ANSYS:

- Hardware: procesor Intel Core i5 2,80 GHz 64 bitů, operační paměť RAM 8 GB
- Čas výpočtu: 35 s (při hustotě sítě 45 prvků/90°)



## 8. Závěr

Cílem předkládané diplomové práce byla aplikace lomové mechaniky na bimateriálový vrub složený ze dvou ortotropních materiálů, analytický popis napětí v jeho okolí a následné stanovení zobecněného faktoru intenzity napětí. Pro tento účel byla nastudována problematika lineární lomové mechaniky trhlin a obecných singulárních koncentrátorů napětí. Omezení lineární lomové mechaniky spočívá v rozměrech plastické zóny vzhledem k rozměrům trhliny, přičemž v případě nezanedbatelné velikosti plastické zóny před čelem trhliny je nutné použít teorii elastoplastické lomové mechaniky [17].

V rámci rešeršní části bylo pojednáno o základních pojmech lineárně elastické lomové mechaniky trhliny v homogenním izotropním materiálu, jež poskytuje základ pro zobecnění na problém vrubu. Dále byly uvedeny analytické přístupy řešení rovinné anizotropní pružnosti, tzv. Lechnického a Strohův formalismus, který s výhodou využívá vlastnosti funkcí komplexní proměnné. Z důvodu historického významu byla uvedena také teorie Mušelišviliho komplexních potenciálů, jež uvažuje materiál izotropní. Vztahy z ní vyplývající jsou základem Lechnického formalismu. V kapitole 4 bylo provedeno rozdělení kompozitů z hlediska použitého materiálu a geometrie. Následně byly uvedeny konstitutivní vztahy pro anizotropní, ortotropní materiál. Jednotlivé materiály bimateriálového vrubu se složeného ze dvou dlouhovláknových jednosměrných a dvousložkových kompozitů a pro jejich popis byl zvolen model transverzálně ortotropní.

Dále byl na základě výše uvedených poznatků sestaven výpočtový model pro stanovení exponentu singularity. Bylo zjištěno, že v případě ortotropního bimateriálového vrubu existují v intervalu  $(0, 1)$  dvě nenásobná řešení vlastní hodnoty exponentu singularity  $\delta$ . Jejich počet se postupně sníží na jedna s rostoucím úhlem líce vrubu  $\omega_1$ . Navíc existují i tzv. pomocná řešení odpovídající vlastním hodnotám exponentu singularity na intervalu  $(0, -1)$ . Nemají žádný fyzikální význam, jsou ovšem potřebná pro výpočet ZFIN pomocí  $\Psi$ -integrálu. Vlastní hodnota exponentu singularity  $\delta$  je obecně komplexní a je funkcí geometrie a materiálových vlastností. Aby byl výpočtový algoritmus použitelný, musí být hodnota  $\delta$  reálná. To je splněno pro úhly menší než  $\omega_{mez}$ , po jehož dosažení začne být nenulová imaginární složka vlastní hodnoty exponentu singularity. Popis napjatosti v případě komplexních exponentů singularity se práce nezabývala. V případě vrubu složeného z dvou stejným materiálů s vzájemně otočenými vlákny o  $90^\circ$  existuje reálná hodnota  $\delta$  až do úhlu  $\omega_1=180^\circ$  a je rovna hodnotě 0,5, což odpovídá také trhlíně na rozhraní těchto materiálů.

Následně byl sestaven výpočtový model pro stanovení zobecněného faktoru intenzity napětí metodou  $\Psi$ -integrálu. Zjistilo se, že optimální poloměr kružnice  $r_c$ , na které jsou odečítány posuvy a napětí z modelu metody konečných prvků je 2 mm a více, neboť v menší vzdálenosti vykazuje hodnota ZFIN oscilační vlastnosti. Horší stabilita byla při stavu rovinné deformace, kdy hodnota  $H_1$  měla se zvětšujícím se poloměrem klesající charakter. Dále bylo zjištěno, že zvětšujícím se úhlem líce vrubu  $\omega_1$  se rozdíl číselných hodnot ZFIN zmenšuje. Je nutné si uvědomit, že obě hodnoty nelze kvantitativně porovnávat, protože mají jiné fyzikální jednotky, ovšem z hlediska jejich číselné hodnoty lze usoudit jejich příspěvek do celkové napjatosti. Největší rozdíl vykazovaly ZFIN pro úhel líce  $\omega_1 = 90^\circ$ . V případě dominance jednoho singulárního členu v asymptotickém rozvoji napětí v okolí vrubu má větší vliv vlastní hodnota exponentu singularity než ZFIN, proto z hlediska

posouzení mezních stavů je nejnebezpečnější právě konfigurace s úhlem líce  $\omega_1 = 90^\circ$ . Optimální hustota sítě na poloměru  $r_c$  je 45 prvků/90°. Při zvětšování zvětšování dělení poloměru  $r_c$  již nedocházelo ke změně ZFIN, přičemž výpočtový čas se měnil s kvadrátem stupně zjemnění. Následně byla porovnány hodnoty ZFIN stanovené metodou  $\Psi$ -integrálu a pomocí metody přímé extrapolace.

Analytické a numerické řešení metodou konečných prvků vykazovaly dobrou shodu do vzdálenost  $r = 0,5$  mm od kořene vrubu. Ve větších vzdálenostech se singulární řešení stává méně přesné, naopak MKP poskytuje reálnější výsledky. Na bimateriálovém rozhraní je skoková změna napětí  $\sigma_x$ . To je v souladu s podmínkami spojitosti normálových složek napětí. Software ANSYS tuto skutečnost modeluje jako spojitý průběh s velkým gradientem, kdežto analytickým řešením získáme nespojitost. Dále byl posuzován vliv volby typu prvku na napětí jako funkci radiální souřadnice. Ukázalo se, že kvadratický osmiuzlový prvek PLANE183 lépe postihuje singulární pole napětí. Čtyřuzlový prvek PLANE182 způsoboval větší poddajnost materiálu v kořeni koncentrátoru. Popsané závěry mají výraznější vliv u řidších konečnoprvkových sítí, protože změna poddajnosti nastává u několika prvních uzlů. Z průběhů napětí a posuvů na obr. 7.8 a 7.9 je možné usoudit, že napětí stanovená analyticky a numericky na vzdálenosti od čela vrubu dané hodnotu poloměru  $r$  vykazují menší odchylky při vzrůstajícím úhlu líce vrubu  $\omega_1$ . Existují hodnoty úhlů  $\omega_1$ , kdy nedocházelo dalším zmenšováním poloměru  $r$  k zmenšování rozdílu mezi analytickým a numerickým řešením. To by mohlo být způsobeno vlivem dalších členů asymptotického rozvoje napětí odpovídajících vlastním hodnotám exponentu  $\delta$  blízkých 1, jako je tomu u T-napětí. Pro případ trhlín kolmých na rozhraní věnuje [24].

Závěrem je možné říci, že se podařilo splnit zadané cíle práce. Metoda  $\Psi$ -integrálu poskytuje vhodný aparát pro popis singulárních řešení. Výhodou je možnost vyjádření ZFIN z pole napětí a posuvů dále od oblasti dominující singularity, kde není vlivem numerické nestability zaručena přesnost výsledků. Tento důsledek byl částečně zmírněn volbou kvadratického prvku PLANE183. Z hlediska posouzení singularity v okolí kořene vrubu poskytuje kombinace analytických a numerických metod stabilní a uspokojivé výsledky. Pro stanovení zobecněného faktoru intenzity napětí pouze numerickým přístupem vyžaduje potřebu výrazně hustší sítě v okolí kořene vrubu. To implikuje vyšší výpočtové časy. Řešení tohoto problému by spočívalo v metodě hraničních prvků, u které je hustota sítě irelevantní. Stanovení napjatosti v okolí bimateriálového vrubu je prvním krokem ke stanovení kritérií iniciace trhliny z kořene vrubu, což je cílem další práce včetně rozšíření o úlohy zahrnující reziduální napětí a piezoelektrické vlastnosti materiálů.

## 9. Seznam použitých veličin a symbolů

$I, II, III$		Index oblasti materiálu/mód zatěžování
$A, B, C$	[m]	Rozměry tělesa výpočtového modelu MKP
$C_{ijkl}$	[Pa]	Tenzor materiálových konstant
$E_i$	[Pa]	Youngův modul pružnosti v tahu daného směru
$f_i$	[N m <sup>-3</sup> ]	Objemová síla
$f_j(z_j)$	[Pa m]	Mušelišviliho komplexní potenciál
$\hat{F}$		Potenciál objemových sil
$G_{ij}$	[Pa]	Modul pružnosti ve smyku daných směrů
$H$	[MPa m <sup>1-δ</sup> ]	Zobecněný faktor intenzity napětí
$K$	[MPa m <sup>1/2</sup> ]	Faktor intenzity napětí
$L, T, T'$		Index longitudinálního a transverzálních směrů
$n_i$	[-]	Složka normálového vektoru
$p$	[-]	Exponent singularity
$r$	[m]	Polární souřadnice
$r_c$	[m]	Poloměr integrační cesty
$R$	[m]	Polární souřadnice v komplexní rovině
$R_1, R_2$	[m]	Poloměry kružnic submodelů výpočtového modelu MKP
$s_i$	[-]	Složka tečného vektoru
$S_{ijkl}$	[Pa]	Tenzor elastických modulů
$t_i$	[Pa]	Složky vektoru napětí
$t_i^{MKP}$	[m]	Složky vektoru napětí stanovené metodou konečných prvků
$\hat{t}_i$	[m]	Složky doplňkového řešení vektoru napětí
$T_i$	[N]	Vektor výsledné síly
$u_i, u, v, w$	[m]	Složky vektoru posuvů
$u_i^{MKP}$	[m]	Složky vektoru posuvů stanovené metodou konečných prvků
$\hat{u}_i$	[m]	Složky doplňkového řešení vektoru posuvů
$v_i$	[-]	Objemový podíl dané komponenty
$v_i^J$		Složka vlastního vektoru dané oblasti $J$

$V_i$	[m <sup>3</sup> ]	Objem dané komponenty
$V_j^J$		Vektor komplexních koeficientů dané oblasti $J$
$x_1, x_2$	[m]	Rovinné kartézské souřadnice
$x, y, z$	[m]	Kartézské souřadnice
$z_j, Z_j$	[m]	Polární souřadnice v komplexní rovině
$\delta$	[-]	Vlastní hodnota exponentu singularity
$\delta_{pom}$	[-]	Pomocné řešení vlastní hodnoty exponentu singularity
$\delta_{ij}$	[-]	Kroneckerovo delta
$\Gamma$		Obecná integrační cesta
$\Delta$		Laplaceův operátor
$\varepsilon_{ij}, \gamma_{ij}$	[-]	Složka tenzoru přetvoření
$\eta_i$		Bázová funkce
$\theta$	[rad]	Polární souřadnice
$\kappa$	[Pa]	Modul pružnosti v tlaku
$\lambda_i$		Bázová funkce
$\mu_i$	[-]	Vlastní číslo materiálu
$\nu_{ij}$	[-]	Poissonovo číslo v daných směrech
$\rho$	[kg m <sup>3</sup> ]	Hustota materiálu
$\sigma_{appl}$	[Pa]	Napětí působící na bimateriálový vrub
$\sigma_{ij}, \tau_{ij}$	[Pa]	Složka tenzoru napětí
$\sigma_{Pd,i}$	[Pa]	Tlaková pevnost v daném směru
$\sigma_{Pt,i}$	[Pa]	Tahová pevnost v daném směru
$\tau_{P,ij}$	[Pa]	Smyková pevnost v daném směru
$\phi_i$	[Pa m <sup>-1</sup> ]	Složka funkce napětí
$\Phi$		Airyho funkce napětí
$\Psi_i, \Psi_i^*$		$\Psi$ -integrál
$\Psi_i$	[rad]	Polární souřadnice v komplexní rovině
$\omega_1, \omega_2$	[°]	Úhel líce vrubu daného materiálu
LELM		Lineárně elastická lomová mechanika
MKP		Metoda konečných prvků
ZFIN		Zobecněný faktor intenzity napětí

# Literatura

- [1] AGARWAL, B. D., BROUTMAN, L.J. *Vláknové kompozity*. Praha : SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1987. 294 s.
- [2] ANDERSON, T. L. *Fracture mechanics : Fundamental Applications*. Third edition. Boca Raton : CRC Press, 2005. 625 s. ISBN 0-8493-1656-1.
- [3] BRDIČKA, Miroslav. *Mechanika kontinua*. Vydání 3. Praha : Academia, 2005. 799 s. ISBN 80-200-1344-X.
- [4] BROBERG, Bertram K. *Cracks and fracture*. San Diego: Academic Press, 1999, xvi, 752 s. ISBN 01-213-4130-5.
- [5] CHAWLA, K. K., *Composite materials : Science and Engineering*. Second edition. New York : Springer, 1998. 491 s. ISBN 0-387-98409-07.
- [6] HWU, C. *Anisotropic elastic plates*. New York: Springer, 2010. 673 s. ISBN 978-1-4419-5914-0.
- [7] HRSTKA, M. *Popis rozložení napětí v okolí bimateriálového vrubu*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2010. 30 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Tomáš Profant, Ph.D.
- [8] JANÍČEK, Přemysl, Emanuel ONDRÁČEK, Jan VRBKA a Jiří BURŠA. *Mechanika těles : Pružnost a pevnost I*. Třetí přepracované. Brno: Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., 2004. ISBN 80-214-2592-X.
- [9] JANÍČEK, Přemysl. *Systémové pojetí vybraných oborů pro techniky : Hledání souvislostí*. Brno : Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., 2007. ISBN 978-80-7204-554-9.
- [10] KLUSÁK, Jan, KNĚSL, Zdeněk, NÁHLÍK, Luboš. Crack initiation criteria for singular stress concentrations : Part II: Stability of Sharp and Bi-Material Notches. *Engineering mechanics*, 2007, roč. 14, č. 6, s. 409-422. ISSN 1802-1484.
- [11] KLUSÁK, Jan, PROFANT, Tomáš, KOTOUL, Michal. Various method of numerical estimation of generalized stress intensity factor of bi-material notches. *Applied and Computational Mechanics*, Vol 3, No 2 (2009). ISSN 1802-1484.
- [12] KNĚSL, Zdeněk, KLUSÁK, Jan, NÁHLÍK, Luboš. Crack initiation criteria for singular stress concentrations : Part I: A Universal Assessment of Singular Stress Concentrations. *Engineering mechanics*, 2007, roč. 14, č. 6, s. 399-408. ISSN: 1802-1484.
- [13] KOPP, D. *Stanovení podmínek porušení bi-materiálových vrubů při kombinovaném módu zatížení*. Diplomová práce. Brno : Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2011. 68 s. Vedoucí diplomové práce Ing. Jan Klusák, Ph.D.
- [14] KOTOUL, Michal. *Vybrané matematické metody v mechanice*. (přednáška) Brno : Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky, FSI VUT, 14.2.2011.

- [15] Kroneckerovo delta. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2012, 21. 4. 2012 [cit. 2012-02-19]. Dostupné z: [http://cs.wikipedia.org/wiki/Kroneckerovo\\_delta](http://cs.wikipedia.org/wiki/Kroneckerovo_delta).
- [16] Maple online help. *Maplesoft: A Cybernet Group Company* [online]. 2012 [cit. 2012-04-29]. Dostupné z: <http://www.maplesoft.com/support/help/Maple/view.aspx?path=Student/Calculus1/NewtonsMethod>
- [17] NÁHLÍK, Luboš. Únava a lomová mechanika: Základy lomové mechaniky. Student.chytrak.cz [online]. 2007 [cit. 2012-03-12]. Dostupné z: [http://www.student.chytrak.cz/unava/08%20zaklady\\_LM.pdf](http://www.student.chytrak.cz/unava/08%20zaklady_LM.pdf)
- [18] ONDRÁČEK, Emanuel, Jan Vrbka, Přemysl Janíček a Jiří Burša. *Mechanika těles: Pružnost a pevnost II*. 4. přepracované. Brno : Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., 2006. 262 s. ISBN 80-214-3260-8.
- [19] PADĚLEK, P. *Problematika komplexních potenciálů v izotropní rovinné pružnosti*. Bakalářská práce. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky, 2010. 37 s. Vedoucí práce Ing. Tomáš Profant, Ph.D.
- [20] PAPADAKIS, P., BABUŠKA, I. A numerical procedure for determination of certain quantities related to the stress intensity factors in two-dimensional elasticity. Computer methods in applied mechanics and engineering. 1995. Volume 122. Stránky 69–92.
- [21] PAPKOVIČ, P. F. Vyráženie obščeho integrals osnovnykh uravnenii teorii uprugosti cherez garmonicheskie funktsii. (Expression of the general integral of the basic equations of the theory of elasticity in terms of harmonic functions.) *Izv. Akad. Nauk SSSR, ser. fiz.-met.*, No. 10, 1932.
- [22] PRESS, William H. *Numerical Recipes in Fortran 90: The Art of Parallel Scientific Computing. Volume 2 of Fortran Numerical Recipes*. 2nd Ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1996. ISBN 05-215-7439-0.
- [23] SUO, Z. Singularities, Interfaces and Cracks in Dissimilar Anisotropic Media. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* [online]. 1990-02-08, roč. 427, č. 1873, s. 331-358 [cit. 2012-05-18]. ISSN 1364-5021. DOI: 10.1098/rspa.1990.0016. Dostupné z: <http://rspa.royalsocietypublishing.org/cgi/doi/10.1098/rspa.1990.0016>.
- [24] ŠEVEČEK, O. *Solution of general stress concentrators in anisotropic media by combination of FEM and the complex potential theory*. Disertační práce. Brno : Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2009. 121 s.
- [25] ŠEVEČEK, Oldřich, PROFANT, Tomáš, KOTOUL, Michal. Stress field analysis near the semi-infinite crack tip terminating to the interface between two orthotropic materials. In *Engineering Mechanics 2006. Nezařazené články*. První vyd. Svratka: Academy of Sciences of the Czech Republic, Prague, 2006. s. 304-305. ISBN: 80-86246-27-2.

- 
- [26] TING, T. C. T. *Anisotropic Elasticity : Theory an Applications*. New York : Oxford University Press, 1996. 571 s. ISBN 0-19-507447-5.
- [27] VLK, Miloš. *Mezní stavy a spolehlivost*. Brno : Nakladatelství VUT v Brně, 1991. 185 s. ISBN 80-214-0386-1.
- [28] VRBKA, Jan. *Mechanika kompozitů*. (přednáška) Brno : Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky, FSI VUT, 22.9.2011.
- [29] WESTERGAARD H. M. Bearing Pressures and Crack. *International Journal of Applied Mechanics*. 1939. 6. stránky 49–53. ISSN: 1758-8251.
- [30] WILLIAMS M. L. On the stress distribution at the base of stationary crack. *Journal of Applied Mechanics*. 1957. Sv. 24. str. 109. ISSN: 1758-8251.





## A. Dodatek

### A.1. Aplikace teorie funkcí komplexní proměnné na ortotropní materiály

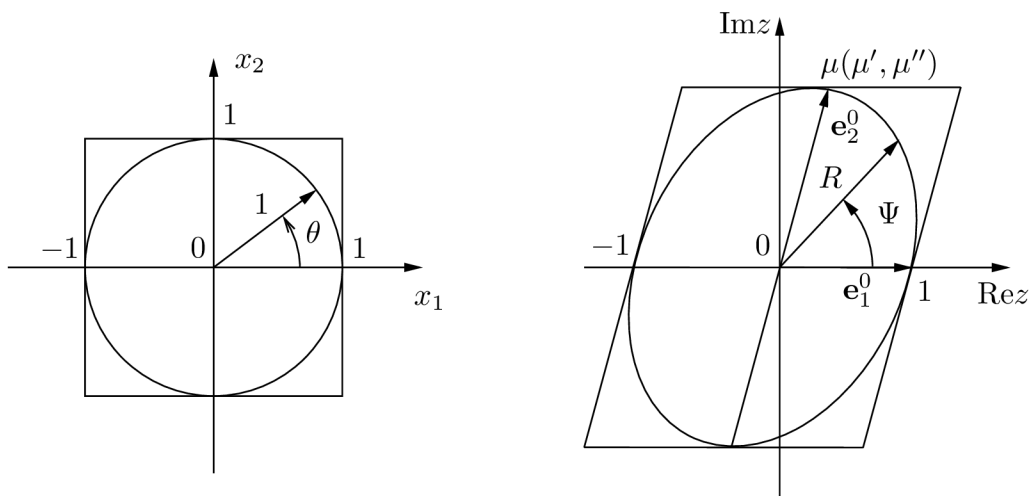
Při popisu ortotropních vlastností materiálu se s výhodou využívá transformace kartézského systému do komplexní roviny. Uvažujme komplexní vlastní číslo materiálu  $\mu$ , jehož reálná část, resp. imaginární část se značí  $\mu'$ , resp.  $\mu''$ , tj.

$$\mu = \mu' + i\mu'' \quad (\text{A.1})$$

Komplexní proměnná

$$z = x_1 + \mu x_2 = (x_1 + \mu' x_2) + i\mu'' x_2 \quad (\text{A.2})$$

transformuje prostor daný rovinou  $x_1, x_2$  do komplexní roviny  $z$ . Transformaci si můžeme představit jako deformaci. Potom  $\mu'$  značí zkos ve směru neměnné  $x_1$  a  $\mu''$  přetvoření ve směru  $x_2$ . Přímky se transformují na přímky, a rovnoběžky opět na rovnoběžky. Bod  $(0, 1)$  se přesune na bod  $(\mu', \mu'')$ . Poloha ostatních bodů se mění paralelně s bodem  $(\mu', \mu'')$  a úměrně vzdálenosti od osy  $x_1$ . Pak čtverec je transformuje na rovnoběžník, jednotková kružnice na elipsu s jednotkovými vektory poloos  $e_1^0, e_2^0$ , jak je vidět na obrázku A.1.



**Obr. A.1:** Transformace roviny  $x_1, x_2$  do komplexní roviny  $z$ . Jednotková kružnice se transformuje na elipsu.

V polárním souřadném systému

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta, \\ x_2 &= r \sin \theta \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

může být rovnice (A.2) přepsána do tvaru

$$z = r \{(\cos \theta + \mu' \sin \theta) + i(\mu'' \sin \theta)\} = r R e^{i\Psi} \quad (\text{A.4})$$

kde nové polární souřadnice komplexní roviny  $(R, \Psi)$  jsou [26]

$$\begin{aligned} R \cos \Psi &= \cos \theta + \mu' \sin \theta, \\ R \sin \Psi &= \mu'' \sin \theta. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Potenciál  $\mathbf{f}$  má v případě vrubu tvar

$$\mathbf{f} = H \mathbf{z}^\delta \mathbf{V}, \quad (\text{A.6})$$

kde  $\mathbf{V}$  je vektor komplexních čísel nastavený tak, aby byly splněny okrajové podmínky, příp. podmínky spojitosti posuvů a napětí na rozhraní materiálů.  $H$  je libovolná konstanta, na základě které je v kapitole 6.4 odvozen zobecněný faktor intenzity napětí. Výraz  $\mathbf{z}^\delta$  je diagonální matice definovaná vztahem (6.14). Pro  $f$  tedy platí

$$\begin{aligned} f_1(z_1) &= H v_1 z_1^\delta = H v_1 r^\delta R_1^\delta e^{i\delta\Psi_1}, \\ f_2(z_2) &= H v_2 z_2^\delta = H v_2 r^\delta R_2^\delta e^{i\delta\Psi_2}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Dále je třeba zavést vztahy mezi polárními souřadnicemi  $(r, \theta)$  a souřadnicemi  $(rR_i, \Psi_i)$  komplexní roviny  $\text{Re}z$  a  $\text{Im}z$

$$R_i^2(\theta) = (\cos \theta + \mu'_i)^2 + (\mu''_i \sin \theta)^2, \quad (\text{A.8a})$$

$$\Psi_i = \begin{cases} 0 & \text{pro } \theta = 0, \\ \text{arccotg}(\cos \theta + \mu'_i) / \mu''_i \sin \theta & \text{pro } \theta \in (0, \pi), \\ \text{arccotg}(\cos \theta + \mu'_i) / \mu''_i \sin \theta - \pi & \text{pro } \theta \in (-\pi, 0), \\ -\pi & \text{pro } \theta = -\pi. \end{cases} \quad (\text{A.8b})$$

Podle vztahů (6.8a), (6.8b) a (A.6) platí

$$\begin{aligned} u_i(r, \theta) &= 2\Re \{A_{i1}f_1(z_1) + A_{i2}f_2(z_2)\} = \\ &= 2\Re \{A_{i1}Hv_1z_1^\delta + A_{i2}Hv_2z_2^\delta\} = \\ &= 2\Re \{A_{i1}Hv_1r^\delta R_1^\delta(\theta) e^{i\delta\Psi_1(\theta)} + A_{i2}Hv_2r^\delta R_2^\delta(\theta) e^{i\delta\Psi_2(\theta)}\} = \\ &= 2r^\delta \Re \{A_{i1}Hv_1 e^{\delta(\ln R_1(\theta) + i\Psi_1(\theta))} + A_{i2}Hv_2 e^{\delta(\ln R_2(\theta) + i\Psi_2(\theta))}\}, \end{aligned} \quad (\text{A.9a})$$

$$\begin{aligned} \phi_i(r, \theta) &= 2\Re \{L_{i1}f_1(z_1) + L_{i2}f_2(z_2)\} = \\ &= 2\Re \{L_{i1}Hv_1z_1^\delta + L_{i2}Hv_2z_2^\delta\} = \\ &= 2r^\delta \Re \{L_{i1}Hv_1 e^{\delta(\ln R_1(\theta) + i\Psi_1(\theta))} + L_{i2}Hv_2 e^{\delta(\ln R_2(\theta) + i\Psi_2(\theta))}\}, \end{aligned} \quad (\text{A.9b})$$

$$\begin{aligned} \phi_{i,\theta}(r, \theta) &= 2r^\delta \Re \{L_{i1}Hv_1\delta z_1^{\delta-1}(-\sin \theta + \mu_1 \cos \theta)\} + \\ &\quad + L_{i2}Hv_2\delta z_2^{\delta-1}(-\sin \theta + \mu_2 \cos \theta)\} = \\ &= 2r^\delta \Re \{L_{i1}Hv_1\delta e^{(\delta-1)(\ln R_1(\theta) + i\Psi_1(\theta))}(-\sin \theta + \mu_1 \cos \theta) + \\ &\quad + L_{i2}Hv_2\delta e^{(\delta-1)(\ln R_2(\theta) + i\Psi_2(\theta))}(-\sin \theta + \mu_2 \cos \theta)\}, \end{aligned} \quad (\text{A.9c})$$

To se může zkráceně zapsat jako

$$u_i(r, \theta) = Hr^\delta \eta_i(\theta), \quad (\text{A.10a})$$

$$\phi_i(r, \theta) = Hr^\delta \lambda_i(\theta), \quad (\text{A.10b})$$

$$\phi_{i,\theta}(r, \theta) = Hr^\delta \lambda'_i(\theta), \quad (\text{A.10c})$$

kde

$$\eta_i(\theta) = 2\Re \left\{ A_{i1} v_1 e^{\delta(\ln R_1(\theta) + i\Psi_1(\theta))} + A_{i2} v_2 e^{\delta(\ln R_2(\theta) + i\Psi_2(\theta))} \right\}, \quad (\text{A.11a})$$

$$\lambda_i(\theta) = 2\Re \left\{ L_{i1} v_1 e^{\delta(\ln R_1(\theta) + i\Psi_1(\theta))} + L_{i2} v_2 e^{\delta(\ln R_2(\theta) + i\Psi_2(\theta))} \right\}, \quad (\text{A.11b})$$

$$\begin{aligned} \lambda'_i(\theta) = & \left\{ L_{i1} v_1 \delta e^{(\delta-1)(\ln R_1(\theta) + i\Psi_1(\theta))} (-\sin \theta + \mu_1 \cos \theta) + \right. \\ & \left. + L_{i2} v_2 \delta e^{(\delta-1)(\ln R_2(\theta) + i\Psi_2(\theta))} (-\sin \theta + \mu_2 \cos \theta) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.11c})$$