



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV AUTOMOBILNÍHO A DOPRAVNÍHO INŽENÝRSTVÍ

INSTITUTE OF AUTOMOTIVE ENGINEERING

VÝPOČTOVÉ MODELY DYNAMIKY PŘEVODOVÝCH ÚSTROJÍ

COMPUTATIONAL MODELS OF TRANSMISSION DYNAMICS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Alexander Czakó

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Aleš Prokop, Ph.D.

BRNO 2018

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav automobilního a dopravního inženýrství
Student: **Alexander Czako**
Studijní program: Strojírenství
Studijní obor: Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce: **Ing. Aleš Prokop, Ph.D.**
Akademický rok: 2017/18

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č. 111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Výpočtové modely dynamiky převodových ústrojí

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Práce je zaměřena na shromáždění a zpracování informací o užívaných typech výpočtových modelů pro popis dynamiky převodových ústrojí.

Cíle bakalářské práce:

Cílem bakalářské práce je vypracování rešerše v oblasti výpočtových modelů, užívaných pro popis dynamiky převodových ústrojí.

Práce musí obsahovat:

Současný přehled používaných výpočtových modelů.

Rozdělení jednotlivých metod dle zvolených kritérií.

Zhodnocení jednotlivých metod.

Seznam doporučené literatury:

SMITH, Derek J. Gear noise and vibration. 2nd edition. New York: Marcel Dekker, 2003, 297 s. ISBN 824741293.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2017/18.

V Brně, dne 26. 10. 2017



prof. Ing. Václav Píštěk, DrSc.
ředitel ústavu



doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

ABSTRAKT

Táto bakalárska práca sa zaoberá zhrnutím poznatkov o výpočtovom modelovaní dynamiky prevodových ústrojenstiev. Modelovanie dynamiky má rozdielne stupne zložitosti. Od modálnej, harmonickej analýzy riešenej v MKP až po vytváranie virtuálneho prototypu v MBS prostredí. V úvode sú uvedené základy analytickej dynamiky a mechanického kmitania, ktoré sú základom jednotlivých analýz. Popísané sú aj zdroje vibrácií v prevodových ústrojenstvách.

KLÍČOVÉ SLOVÁ

Výpočtový model, dynamika, vibrácie, metóda konečných prvkov, multi-body prístup, ozu-
benie, prevodové ústrojenstva, analýza

ABSTRACT

This bachelor thesis deals with a summary of knowledge about the computational models of transmission dynamics. Dynamics modelling has different levels of complexity. From the modal, harmonic analysis solved in the FEM, up to creating a virtual prototype in the MBS softwares. In the introduction, there are presented the basics of analytical dynamics and mechanical oscillation which are the basis of individual analysis. Vibration sources in transmission are described as well.

KEYWORDS

Computational model, dynamics, vibration, finite element method, multi-body system, gear, transmission, analysis

BIBLIOGRAFICKÁ CITÁCIA

CZAKÓ, A. *Výpočtové modely dynamiky převodových ústrojí*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2018. 40 s. Vedúci bakalárskej práce Ing. Aleš Prokop, Ph.D..



ČESTNÉ PREHLÁSENIE

Prehlasujem, že táto práca je mojím pôvodným dielom, spracoval som ju samostatne pod vedením Ing. Aleša Prokopa, Ph.D. a s použitím literatúry uvedenej v zozname.

V Brne dňa 25. mája 2018

.....

Alexander Czako

POĎAKOVANIE

Týmto by som sa chcel poďakovať vedúcemu bakalárskej práce pánovi Ing. Alešovi Prokopovi, Ph.D. za odbornú pomoc, za cenné rady a pripomienky a za usmernenie pri písaní mojej práce. Ďalej sa chcem poďakovať všetkým, ktorí ma pri práci podporovali.

OBSAH

Úvod	9
1 Základy analytickej dynamiky	10
1.1 Klasifikácia väzieb.....	10
1.2 Druhy posunutí	10
1.3 Zovšeobecnená sila	11
1.4 D'Alembertov princíp.....	13
1.5 Lagrangeove rovnice II. druhu.....	13
2 Mechanické kmitanie.....	16
2.1 Rozdelenie kmitania	16
2.2 Kmitanie s jedným stupňom voľnosti.....	17
3 Zdroje vibrácií a hluku prevodových ústrojenstiev	21
3.1 Záber ozubenia.....	21
3.2 Chyba prevodu.....	24
3.3 Ložiská.....	26
4 Výpočtové modely.....	28
4.1 Modálna analýza	28
4.2 Harmonická analýza	29
4.3 Výpočtové modelovanie pomocou MKP.....	30
4.4 MBS prístup.....	31
Záver.....	36
Zoznam použitých skratiek a symbolov	39

ÚVOD

Prevodové ústrojenstvo je jednou z najdôležitejších častí motorových vozidiel. Jednotlivé komponenty ústrojenstva sú značne namáhané pri relatívne vysokých otáčkach, čo môže spôsobiť nežiadúce vibrácie a dosiahnutie rezonančného stavu. Vibrácie, spôsobujúce hluk, sa môžu priečnym vlnením preniesť aj na iné časti vozidla. Rezonancia nie je spojená iba s hlučným chodom, ale má taktiež negatívny vplyv na funkčnosť ústrojenstva.

Tomuto nežiadúcemu stavu sa snažíme predísť použitím výpočtových modelov v MKP a MBS softwaroch, ktoré vychádzajú z analytickej dynamiky. Jednotlivé výpočtové modely, ako aj analytická dynamika, budú rešeršnou formou bližšie popísané v nasledujúcich kapitolách tejto práce.

1 ZÁKLADY ANALYTICKEJ DYNAMIKY

Analytickej dynamike predchádzala dynamika vektorová, ktorej základy položil Isaac Newton (1643 – 1727). Na základe jeho zákonov sa riešia problémy dynamiky v technickej praxi. Tvoria jednu z metód zostavenia pohybových rovníc sústavy, ktoré vyjadrujú súvislosť medzi vektorovými veličinami. [2]

V ďalšom období vznikajú nové metódy riešenia problémov dynamiky (J. L. Lagrange, 1788), ktoré pracujú s energiami - skalárnymi veličinami, a sú súčasťou analytickej dynamiky. Tieto metódy majú univerzálnu platnosť a úspešne sa používajú pri riešení konkrétnych problémov. Princíp vybraných metód bude vysvetlený v nasledujúcich podkapitolách. [2]

1.1 KLASIFIKÁCIA VÄZIEB

Na jednoznačné určenie polohy telesa je potrebné poznať v každom časovom okamihu šesť nezávislých parametrov (tri pravouhlé súradnice ťažiska a tri Eulerove uhly). Z hľadiska univerzálneho použitia sa v analytickej mechanike používa pojem zovšeobecnené súradnice. Je to množina ľubovoľných nezávislých parametrov, ktoré jednoznačne určujú okamžitú polohu telesa resp. sústavy telies. Označujú sa symbolom q_i , ich počet sa rovná počtu stupňov voľnosti n telesa resp. sústavy telies, teda $i = 1, 2, \dots, n$.

Obmedzením možnosti pohybu telesa znížime počet stupňov voľnosti. Kinematické veličiny charakterizujúce pohyb telesa musia potom spĺňať isté podmienky – väzobné podmienky. Vo všeobecnosti sú tieto podmienky funkcie obsahujúce súradnice, rýchlosti a čas. Väzby sa delia na:

- Holonómne – sú úplne zákonité väzby v tvare $f(x, y, z) = 0$
- Neholonómne – sú väzby v tvare $f(x, y, z) \leq 0$ alebo $f(x, y, z) \geq 0$
- Rheonómne – väzby závislé od času (nestacionárne)
- Skleronómne – väzby naopak nezávislé od času (stacionárne) [1], [2]

1.2 DRUHY POSUNUTÍ

Sústava N hmotných bodov s v holonómnymi väzbami má počet stupňov voľnosti $n = 3N - v$, teda na jednoznačné určenie okamžitej polohy sústavy je potrebné poznať n zovšeobecnených súradníc q_1, q_2, \dots, q_n . Pohyb sústavy pod účinkom hnacích síl pri daných väzbách sa nazýva skutočný pohyb. Je jednoznačne určený hnacími silami, väzbovými a počiatočnými podmienkami. [2]

Za predpokladu, že v určitej okamžitej polohe sústavy nepôsobia pôvodné hnacie sily a, že väzby v sústave sa s časom nemenia, potom všetky pohyby, ktoré môže sústava pri daných väzbách vykonať sa nazývajú virtuálne pohyby. V prípade stacionárnych väzieb je skutočný pohyb sústavy jedným z virtuálnych pohybov. Pri nestacionárnych väzbách skutočný pohyb sústavy nezodpovedá žiadnemu z virtuálnych pohybov. [2]

Elementárne posunutie hmotného bodu za čas dt pri jeho skutočnom pohybe sa nazýva skutočné posunutie hmotného bodu. Keď \mathbf{r} je polohový vektor a \mathbf{v} okamžitá rýchlosť hmotného bodu, tak jeho skutočné posunutie, ako je uvedené v [2], je

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt. \quad (1)$$

Elementárne posunutie hmotného bodu za čas dt pri jeho virtuálnom pohybe sa nazýva virtuálne posunutie hmotného bodu. Virtuálne posunutia sa považujú za možné posunutia, ale nepredpokladá sa, že by museli nutne nastať. V podstate sa jedná o myslené posunutia pri prechode hmotného bodu z jedného stavu do druhého. Z matematického hľadiska je virtuálne posunutie variáciou jeho polohového vektora a označuje sa $\delta\mathbf{r}$. [2]

Keď poloha sústavy N hmotných bodov s n stupňami voľnosti je určená pravouhlými súradnicami x_i, y_i, z_i jednotlivých hmotných bodov, ktoré spĺňajú väzbové podmienky určené holonómne-nestacionárnymi väzbami

$$f_r(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) = 0, \quad r = 1, 2, \dots, v, \quad (2)$$

potom veľkosti zložiek dx_j, dy_j, dz_j skutočných posunutí jednotlivých hmotných bodov musia spĺňať rovnice

$$\sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial f_r}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial f_r}{\partial y_j} dy_j + \frac{\partial f_r}{\partial z_j} dz_j \right) + \frac{\partial f_r}{\partial t} dt = 0 \quad r = 1, 2, \dots, v, \quad (3)$$

ktoré sú úplným diferenciálom väzbových rovníc (2). [2]

Pri virtuálnom pohybe väzby nezávisia od času, preto veľkosti zložiek $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ virtuálnych posunutí hmotných bodov vyhovujú rovniciam

$$\sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial f_r}{\partial x_j} \delta x_j + \frac{\partial f_r}{\partial y_j} \delta y_j + \frac{\partial f_r}{\partial z_j} \delta z_j \right) = 0 \quad r = 1, 2, \dots, v. \quad (4)$$

Keďže $\delta\mathbf{r}$ je variáciou polohového vektora \mathbf{r} , pri riešení problémov mechaniky založených na virtuálnych posunutiach sa používa variačný počet. Vo variačnom počte platia rovnaké pravidlá ako v diferenciálnom počte, ale čas je konštantná veličina. [2]

1.3 ZOVŠEOBECNENÁ SILA

Podobne ako zovšeobecnené súradnice sa v analytickej dynamike uvažujú zovšeobecnené sily. Každé zovšeobecnenej súradnici q_j odpovedá zovšeobecnená sila Q_j (kde $j = 1, 2, \dots, n$), ktorá sa určí z elementárnej práce pracovných síl na virtuálnych posuvoch

$$\delta A = Q_j \cdot \delta q_j. \quad (5)$$

Sily, ktoré pôsobia na modelové telesa je vhodné rozdeliť na:

Väzbové sily \mathbf{v}_F – nepracovné zložky reakcií väzieb

Pracovné sily \mathbf{p}_F – všetky ostatné sily (akčné, trecie zložky reakcií väzieb). [1]

Pri ideálnych väzbách, ktoré sú bez pasívnych odporov, sú väzbové sily totožné s normálovými väzbovými silami a sily akčné sú totožné s pracovnými silami. [1], [2]

URČENIE ZOVŠEOBECNENÝCH SÍL

Virtuálna práca pre viazanú sústavu N hmotných bodov s n stupňami voľnosti ($n < N$) je

$$\delta A = \sum_{j=1}^N \mathbf{p}_{F_j} \cdot \delta \mathbf{r}_j, \quad (6)$$

kde virtuálne posunutia sú rovné

$$\delta \mathbf{r}_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i} \cdot \delta q_i. \quad (7)$$

Dosadením (7) do (6)

$$\delta A = \sum_{j=1}^N \mathbf{p}_{F_j} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i} \cdot \delta q_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N \mathbf{p}_{F_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i} \cdot \delta q_i = \sum_{i=1}^n Q_i \cdot \delta q_i. \quad (8)$$

Zovšeobecnená sila je definovaná vzťahom

$$Q_i = \sum_{j=1}^N \mathbf{p}_{F_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i} = \frac{\delta A}{\delta q_i}, \quad (9)$$

kde $i = 1, 2, \dots, n$. [1], [2]

Pre sily, ktoré majú potenciál (v prípade konzervatívnej modelovej sústavy) platí

$$\delta A = -\delta E_p, \quad (10)$$

$$Q_i = -\frac{\partial E_p}{\partial q_i}, \quad (11)$$

kde $i = 1, 2, \dots, n$. [1], [2]

Rozmer zovšeobecnenej sily závisí od rozmeru zovšeobecnenej súradnice. Pre dĺžkovú súradnicu má rozmer sily, pre uhlovú súradnicu rozmer momentu sily atď. Dôležité je aby súčin zovšeobecnenej sily a zovšeobecnenej súradnice mal vždy rozmer práce. [1], [2]

1.4 D'ALEMBERTOV PRINCÍP

D'Alembertov princíp zavádza novú silu do silového zat'aženia – fiktívnu zotrvačnú silu, ktorú možno definovať pre každé j -te bodové teleso sústavy nasledovne

$$\mathbf{s}_{F_j} = -m_j \mathbf{a}_j. \quad (12)$$

Ďalej možno napísať rovnice pre rovnováhu všetkých síl takto

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{p}_{F_j} + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \mathbf{p}_{F_{jk}} + \sum_{j=1}^N \mathbf{s}_{F_j} = 0, \quad (13)$$

s ohľadom na podmienku

$$\sum_{j=1}^N (\mathbf{p}_{F_j} + \mathbf{s}_{F_j}) = 0. \quad (14)$$

Aby boli sily pôsobiace na sústavu bodových telies v rovnováhe, musí sa tiež súčet prác všetkých akčných (pracovných) síl pri virtuálnych posunutíach rovnať nule, a teda platiť

$$\sum_{j=1}^N (\mathbf{p}_{F_j} + \mathbf{s}_{F_j}) \cdot \delta \mathbf{r}_j = \sum_{j=1}^N (\mathbf{p}_{F_j} - m_j \mathbf{a}_j) \cdot \delta \mathbf{r}_j = 0. \quad (15)$$

Uvedená rovnica sa nazýva všeobecnou rovnicou dynamiky pre sústavu bodových telies alebo d'Alembertovou-Ljapunovou rovnicou. [1]

1.5 LAGRANGEOVE ROVNICE II. DRUHU

Lagrangeove rovnice II. predstavujú jednu z najpoužívanejších metód analytickej mechaniky pri zostavovaní pohybových rovníc pre modelové telesá a predovšetkým pre modelové sústavy telies. Výhodou je, že postup pri zostavovaní pohybových rovníc je nezávislý na voľbe súradnicového systému. Ďalšou výhodou je, že sa nepracuje s vektorovými veličinami, ale stačí vyjadriť kinetickú a potenciálnu energiu sústavy.

Odvedenie vychádza zo všeobecnej rovnice dynamiky (15), ktorej prvý člen na ľavej strane sa upraví pomocou rovnice (7) do tvaru

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{p}_{F_j} \cdot \delta \mathbf{r}_j = \sum_{j=1}^N \mathbf{p}_{F_j} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i} \cdot \delta q_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^N \mathbf{p}_{F_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_{i=1}^n Q_i \cdot \delta q_i. \quad (16)$$

Druhý člen ľavej strany (15) sa upraví nasledovne

$$\sum_{j=1}^N m_j \ddot{\mathbf{r}}_j \cdot \delta \mathbf{r}_j = \sum_{j=1}^N m_j \dot{\mathbf{r}}_j \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i} \cdot \delta q_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^N m_j \dot{\mathbf{r}}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i} \right) \delta q_i. \quad (17)$$

Výraz v zátvorke na pravej strane predchádzajúcej rovnice (17) sa ďalej upraví

$$m_j \dot{\mathbf{r}}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(m_j \frac{d\mathbf{r}_j}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i} \right) - m_j \dot{\mathbf{r}}_j \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i} \right). \quad (18)$$

Pre rýchlosť j -teho bodového telesa platí

$$\dot{\mathbf{r}}_j = \frac{d\mathbf{r}_j}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i} \dot{q}_i. \quad (19)$$

Ďalej je známa relácia

$$\frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_j}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial \dot{q}_i}. \quad (20)$$

Dosadením rovnice (19) do (18) a s využitím (20)

$$m_j \dot{\mathbf{r}}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(m_j \mathbf{v}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial \dot{q}_i} \right) - m_j \mathbf{v}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{m_j v_j^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{m_j v_j^2}{2} \right). \quad (21)$$

Keďže výraz $\frac{m_j v_j^2}{2}$ predstavuje kinetickú energiu E_k , ďalej sa môže pôvodná rovnica (15) s prihliadnutím na (16) prepísať do tvaru

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N \left[\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{m_j v_j^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{m_j v_j^2}{2} \right) \delta q_i \right] \\ = \sum_{i=1}^n \left[Q_i - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial E_k}{\partial q_i} \right] \delta q_i = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Zovšeobecnené súradnice sú na sebe nezávislé, preto platí

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} = Q_i, \quad (23)$$

kde $i = 1, 2, \dots, n$. [1]

Rovnica (23) predstavuje obvyklý tvar Langrangeových rovníc II. druhu pre zovšeobecnené súradnice, ktorý je platný pre sústavu bodových telies s holonómnymi väzbami a s n stupňami voľnosti. Výpočtovým modelom je sústava n diferenciálnych rovníc druhého rádu, ktoré môžu byť nelineárne.

Ak sú všetky pracovné sily konzervatívne (potenciálne), platí $Q_i = -\frac{\partial E_P}{\partial q_i}$, ($i = 1, 2, \dots, n$), potom (23) prejde do tvaru

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} + \frac{\partial E_P}{\partial q_i} = 0, \quad (24)$$

kde $i = 1, 2, \dots, n$. [1]

V prípade, keď na sústavu pôsobia aj nekonzervatívne sily (sily, ktoré nemajú potenciál), pribudne na pravej strane Langrangeových rovníc II. druhu zovšeobecnená sila \tilde{Q}_i

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} + \frac{\partial E_P}{\partial q_i} = \tilde{Q}_i. \quad [1] \quad (25)$$

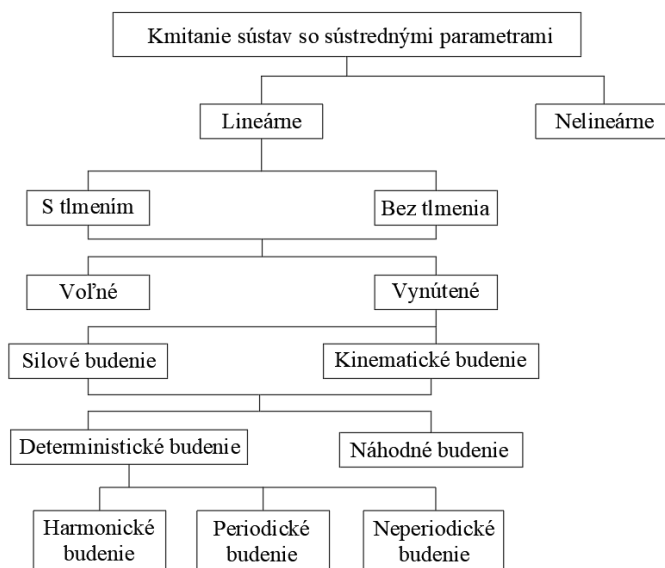
2 MECHANICKÉ KMITANIE

Mechanické kmitanie, skrátene kmitanie, je v technickej praxi veľmi dôležitý jav. Ide o pohyb telesa okolo rovnovážnej polohy. Vo väčšine prípadov je kmitanie a s ním spojené vibrácie nežiadúce. Výnimkou sú stroje využívajúce kmitavý pohyb ako napríklad vibračné dopravník, vibračné triediče a. i. V prevodových ústrojenstvách je obzvlášť nežiadúce. Môže spôsobiť nepokojný chod, hlučnosť, znižovanie životnosti a preniesť sa cez jednotlivé komponenty do celého vozidla. Preto je veľká snaha o jeho elimináciu, k tomu je však nutné najprv pochopiť jeho podstatu, spôsob modelovania a samotný výpočet, ktoré budú ďalej popísané v tejto kapitole. [1], [2]

2.1 ROZDELENIE KMITANIA

Analytické riešenia jednotlivých prípadov kmitania sa odlišujú, preto je vhodné mechanické kmitanie rozdeliť podľa rôznych hľadísk. Podľa charakteru riešenej sústavy a požadovaných výsledkov sa vytvárajú mechanické modely so sústrednými (diskrétnymi) parametrami – modely, ktoré majú konečný počet stupňov voľnosti; a modely so spojitými rozloženými parametrami (kontinuum) – majú nekonečný počet stupňov voľnosti. Pre prvý menovaný model je príznačné, že jednotlivé telesá sú považované za dokonale tuhé. V druhom prípade je dominantným javom deformácia telesa. [2]

Podľa vzniku sa rozoznáva kmitanie voľné, budené a samobudené. Podľa vlastností disipovanej (rozptýlenej) energie sa delí na tlmené a netlmené. Podľa druhu matematického modelu na lineárne a nelineárne. Jednotlivé delenia možno ďalej spresňovať. Nasledujúca schéma zobrazuje delenie kmitania so sústrednými parametrami, konkrétne lineárneho. Pre nelineárne kmitanie možno zaviesť podobné delenie, ako je uvedené v [2]. Rozdelenie kmitania je znázornené na obr. 1.



Obr. 1 Rozdelenie kmitania sústav so sústrednými parametrami [2]

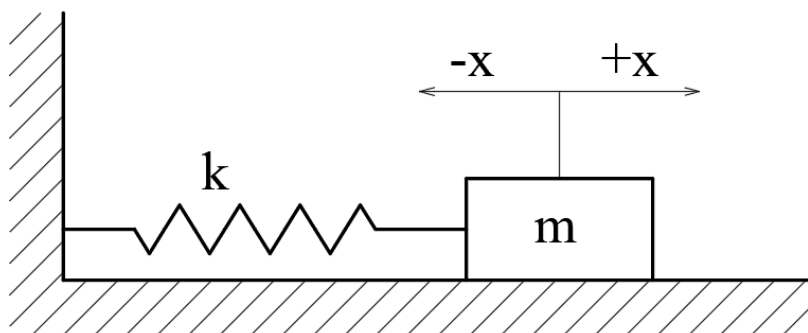
2.2 KMITANIE S JEDNÝM STUPŇOM VOĽNOSTI

Model s jedným stupňom voľnosti je najjednoduchší diskretný model. Často sa používa ako hrubé priblíženie zložitejších mechanických sústav, kedy sa zisťuje najnižšia vlastná frekvencia sústavy. Navyše je základom k pochopeniu riešenia zložitejších sústav s viac stupňami voľnosti.

2.2.1 VOĽNÉ KMITANIE BEZ TLMIENIA

V technickej praxi sa nevyskytujú čisté prípady netlmeného kmitania, avšak je potrebné začať práve touto analýzou, aby mohlo byť ďalej vysvetlené tlmené a vynútené kmitanie. Navyše z voľného kmitania bez tlmenia vychádza **modálna analýza** (kap. 4.1).

Najjednoduchší mechanický model popisujúci voľné netlmené kmitanie s jedným stupňom voľnosti je na obr. 2.



Obr. 2 Model voľného netlmeného kmitania [2]

Model sa skladá z telesa hmotnosti m , ktoré sa pohybuje po vodorovnej, dokonale hladkej podložke a je uchytené k nehmotnej pružine, v ktorej vzniká sila lineárne závislá na jej deformácii. Druhý koniec pružiny je pripevnený k nepohyblivému rámu.

Počiatok súradníc je zvolený v mieste stabilnej rovnovážnej polohy, teda v mieste najnižšej potenciálnej energie, ktorá je daná deformačnou energiou pružiny

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2, \quad (26)$$

kde k [N/m] je tuhosť pružiny a x je deformácia pružiny.

Je zrejmé, že minimum potenciálnej energie je pre $x = 0$, v tom prípade je to v polohe bodového telesa, pri ktorej je pružina nedeformovaná. Súradnica x je nezávislá a jednoznačne definuje polohu bodového telesa – je zovšeobecnenou súradnicou $q = x$. Sila v pružine je daná lineárnou závislosťou

$$F = kq \quad (27)$$

a pôsobí vždy proti deformácii pružiny. [1], [2]

Pohybová rovnica má tvar

$$-kq = m\ddot{q}^1, \quad (28)$$

kde \ddot{q} je zovšeobecnené zrýchlenie.

Po úprave

$$\ddot{q} + \frac{k}{m}q = 0. \quad (29)$$

Nahradením podielu konštantou

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (30)$$

prejde pohybová rovnica do tvaru

$$\ddot{q} + \Omega_0^2 q = 0. \quad (31)$$

Rovnica (31) je homogénna diferenciálna rovnica druhého rádu s konštantnými koeficientami, ktorej riešenie sa predpokladá v tvare

$$q = Ce^{\lambda t}. \quad (32)$$

Ďalšími úpravami a použitím Eulerovej závislosti prejde rov. (32) do používaného tvaru

$$q = A \cos \Omega_0 t + B \sin \Omega_0 \quad (33)$$

alebo

$$q = C \sin(\Omega_0 t + \varphi_0). \quad (34)$$

Parameter C predstavuje z fyzikálneho hľadiska amplitúdu výchylky kmitania. Fázový uhol φ_0 vyjadruje fázové posunutie kmitavého pohybu na začiatku pohybu ($t = 0$). Obidva parametre sú konštanty závislé od počiatočných podmienok. Aby nastalo voľné kmitanie, aspoň jedna počiatočná podmienka (výchylka alebo rýchlosť) musí byť nenulová. [1], [2]

V rovnici (34) sa vyskytuje harmonická funkcia sínus, to znamená, že ide o periodický pohyb, ktorý sa opakuje s istou periódou. Táto perióda, označovaná ako T , sa určí z podmienky

$$(\Omega_0 t + \varphi_0) + 2\pi = \Omega_0(t + T) + \varphi_0. \quad (35)$$

Po vyjadrení periódy

$$T = \frac{2\pi}{\Omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (36)$$

¹ K rovnakej rovnici sa možno dopracovať aj s využitím Lagrangeovej rovnice II. druhu, ktorá bola odvodená v prvej kapitole tejto práce

Periódou kmitania T je čas potrebný na vykonanie jedného kmitu (pohyb z rovnovážnej polohy do pravej krajnej polohy, potom do druhej krajnej polohy a naspäť do rovnovážnej polohy).

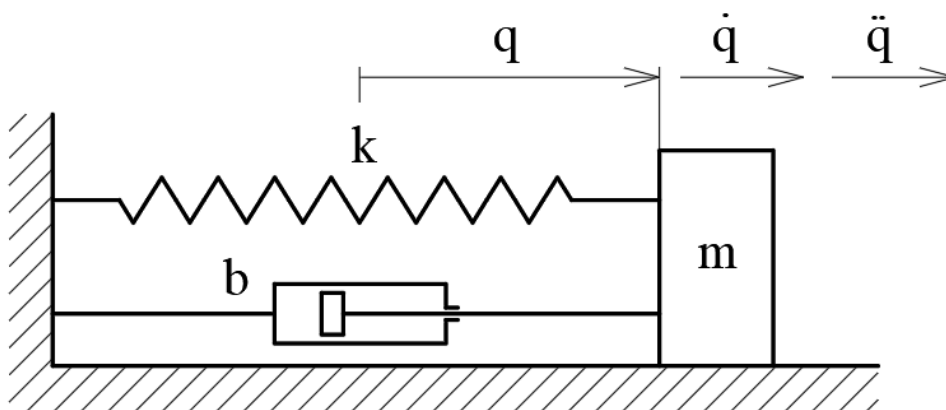
Ďalším dôležitým parametrom je vlastná frekvencia f_0 , ktorá vyjadruje počet kmitov za jednotku času [s]. V podstate ide o prevrátenú hodnotu periódou. Jednotkou je 1 hertz [Hz].

$$f_0 = \frac{1}{T} = \frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (37)$$

Vzťah (30) vyjadruje vlastnú uhlovú frekvenciu Ω_0 [s^{-1}]. V podstate je to počet kmitov za čas 2π [s]. Závisí iba od veličín k a m , ktoré charakterizujú dynamické vlastnosti sústavy. [1], [2]

2.2.2 VOLNÉ KMITANIE S TLMENÍM

Pri netlmenom kmitaní sa periodický pohyb opakoval nekonečne dlho s konštantnou amplitúdou. V skutočnosti sa však amplitúda kmitavého pohybu znižuje až zanikne. Spôsobuje to rozptyl energie vplyvom pôsobiacich odporov. Ďalej budú uvedené vzťahy iba pre tlmenie s odporom úmerným rýchlosti.



Obr. 3 Model voľného tlmeného kmitania [1]

Pohybová rovnica na obr. 3 mechanického modelu má tvar

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + kq = 0. \quad (38)$$

Pribudol člen reprezentujúci hydraulický tlmič, paralelne pripojený k pružine, ktorého odpor je lineárnou funkciou rýchlosti, kde b je tlmenie.

Zavedením konštanty doznievania $\delta = \frac{b}{2m}$ [s^{-1}], prejde rovnica (38) do tvaru

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \Omega_0^2 q = 0. \quad (39)$$

Úpravou na charakteristickú rovnicu a jej vyriešením dostaneme korene určené vzťahom

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \Omega_0^2}. \quad (40)$$

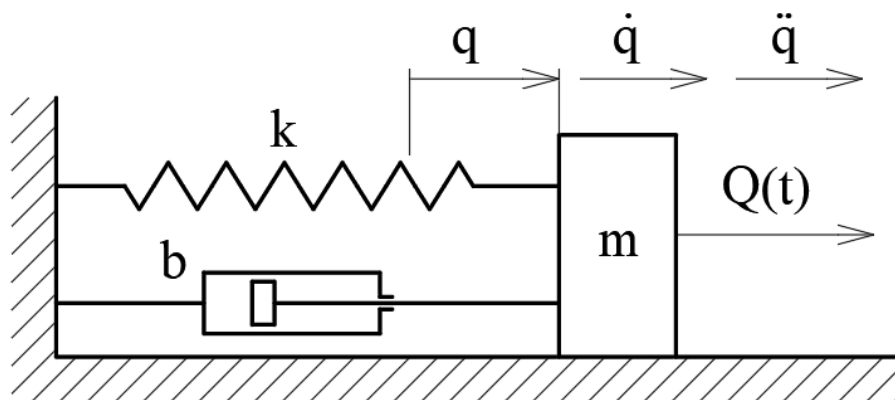
Korene v rovnici (40) závisia na hodnotách δ a Ω_0 . Je nimi určený charakter vzniknutého pohybu, ktorý závisí na vzájomnom pomere týchto hodnôt. Preto bol zavedený tzv. pomerný útlm, definovaný je bezrozmerným vzťahom

$$b_r = \frac{\delta}{\Omega_0}. \quad (41)$$

Podľa jeho veľkosti vzhľadom k hodnote jedna sa rozlišujú tri prípady pohybu – podkritické, kritické a nadkritické tlmenie. Periodický pohyb nastáva iba pri podkritickom tlmení. [1]

2.2.3 VYNÚTENÉ KMITANIE S TLMENÍM

V doterajších prípadoch bol kmitavý pohyb závislý iba na parametroch mechanickej sústavy (hmotnosť telesa, tuhosť pružiny, súčiniteľ tlmenia, počiatočné podmienky). V technickej praxi sa často vyskytujú prípady, kedy na sústavu pôsobí ešte sila závislá na čase – budiaca sila. Najčastejšie má táto sila harmonický priebeh. Z tohto typu kmitania, pri harmonickom priebehu budiacej sily, vychádza **harmonická analýza** (kap. 4.2).



Obr. 4 Model vynúteného tlmeného kmitania [1]

Model sústavy znázornenej na obr. 4 popisuje pohybová rovnica

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + kq = Q(t), \quad (42)$$

kde $Q(t)$ je budiaca sila ako funkciou času.

Použitím súčiniteľa doznievania δ a vlastnej uhlovej frekvencie netlmených kmitov Ω_0 možno rovnicu (42) napísať v tvare

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \Omega_0^2 q = \frac{Q(t)}{m}. \quad (43)$$

Pohybová rovnica je nehomogénna diferenciálna rovnica 2. rádu s konštantnými koeficientami. Všeobecné riešenie tejto rovnice sa skladá z riešenia homogénnej rovnice (kap. 2.2.2) a partikulárneho riešenia. O danej problematike existuje veľké množstvo publikácií, napr. [1], [2], z ktorých bolo čerpané v tejto (kap. 2) a predošlej (kap. 1) kapitole.

3 ZDROJE VIBRÁCIÍ A HLUKU PREVODOVÝCH ÚSTROJENSTIEV

Prevodovka obsahuje radu komponentov, ktoré môžu byť samé zdrojom hluku a vibrácii alebo ich aspoň vybudia, príp. prenášajú a zosilňujú. Prvotným a dominantným zdrojom hluku v prevodových ústrojenstvách sú vibrácie od záberu ozubených kolies pôsobením vnútorných a vonkajších dynamických síl. Je nutné si však uvedomiť, že prevodovka je akusticky uzavretý systém a hluk, ktorý v nej vznikne sa z väčšej časti zatlmí vo vnútri. Vibrácie ozubených kolies sa prenesú cez hriadele a ložiská až na povrch skrine prevodovky a vzniká hluk, ktorý sa šíri do okolia. [6], [9], [20]

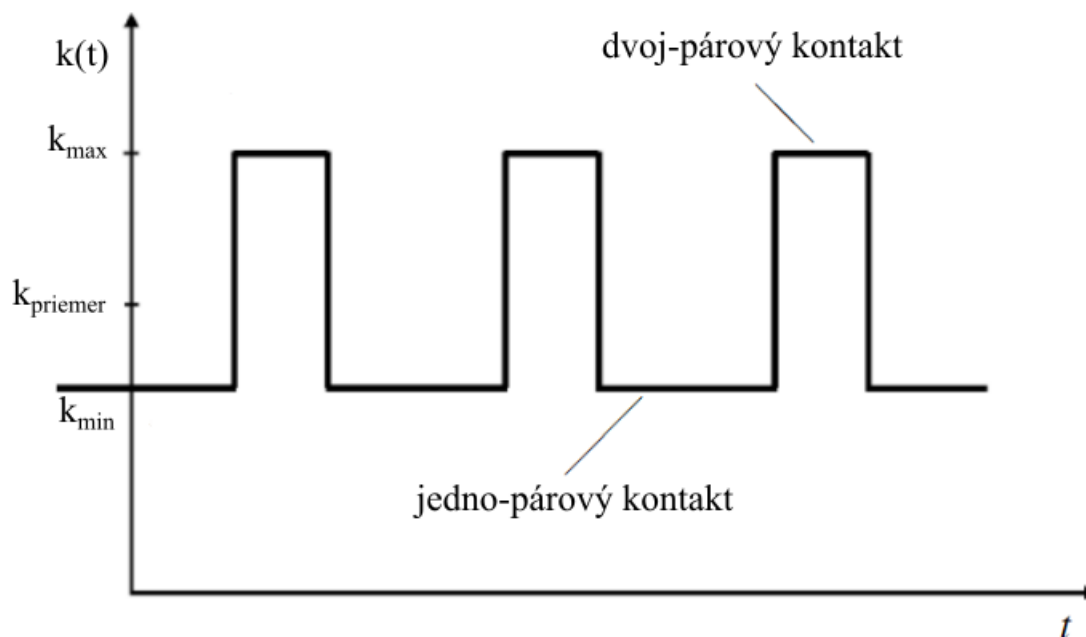
3.1 ZÁBER OZUBENIA

Vibrácie od záberu ozubených kolies prenášané na skriňu prevodovky sú najvýznamnejším zdrojom hluku prevodových ústrojenstiev. Príčinou vibrácií z fyzikálneho hľadiska je dynamická sila, ktorá mení svoju amplitúdu, smer alebo pôsobisko. Najvýznamnejšia pri evolventnom ozubení, ktoré sa používa v prevodovkách, je zmena amplitúdy sily. Jej hlavnou príčinou je premenlivá tuhosť a rázy pri vstupe zubov do záberu vplyvom deformácií, odchýlok roztečí a profilu zuba od teoretických. [9]

PREMENLIVÁ TUHOSŤ

Premenlivá tuhosť je spôsobená striedaním sa počtu zubov v zábere, inak povedané – po jedno-párovom zábere nasleduje záber dvoj-párový, potom sa celý proces opakuje. Jedná sa o periodický dej spôsobujúci vibrácie, ktoré sa šíria prostredníctvom hriadeľov k ložiskám. V ložiskách tak vznikajú reakčné sily, ktoré nie sú harmonické (keďže ide o reálne, nezidealizované budenie), môžu sa vyskytnúť aj rázy. Tieto sily spôsobia rozkmitanie domcov ložísk a rozšírenie vibrácii na celý povrch skrine. Potom je možné v akomkoľvek mieste skrine odčítať odozvu (výchylku, normálovú rýchlosť, zrýchlenie povrchu).

Ako kvantitatívna charakteristika pri čelnom súkolí s priamymi zubami sa zavádza *súčiniteľ záberu profilu* ε_α , ktorý vyjadruje priemerný počet zubov v zábere. Nízke hodnoty súčiniteľa záberu profilu zvyšujú možnosť vzniku rázov medzi zubami a hlučnosť súkolia. [5]

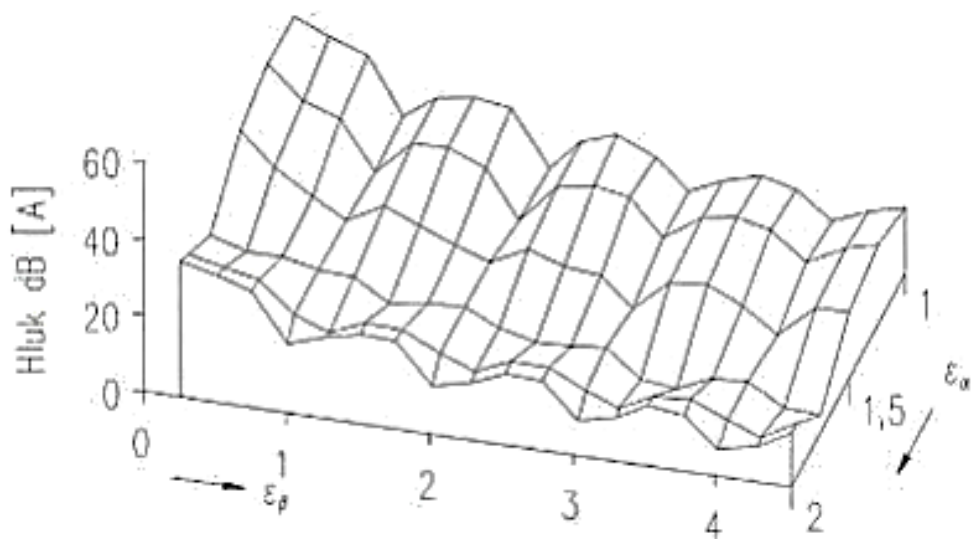


Obr. 5 Premenná tuhosť záberu ozubenia pre čelné súkolie s priamymi zubmi. [17]

Trvanie záberu kolies so šikmými zubami je vždy dlhší ako s priamymi zubami. Dráha záberu sa predlžuje o krok šikmých zubov, ktorému odpovedá *súčiniteľ záberu kroku* ε_β . Súčiniteľ záberu (celkový) je daný vzťahom

$$\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta, \quad (44)$$

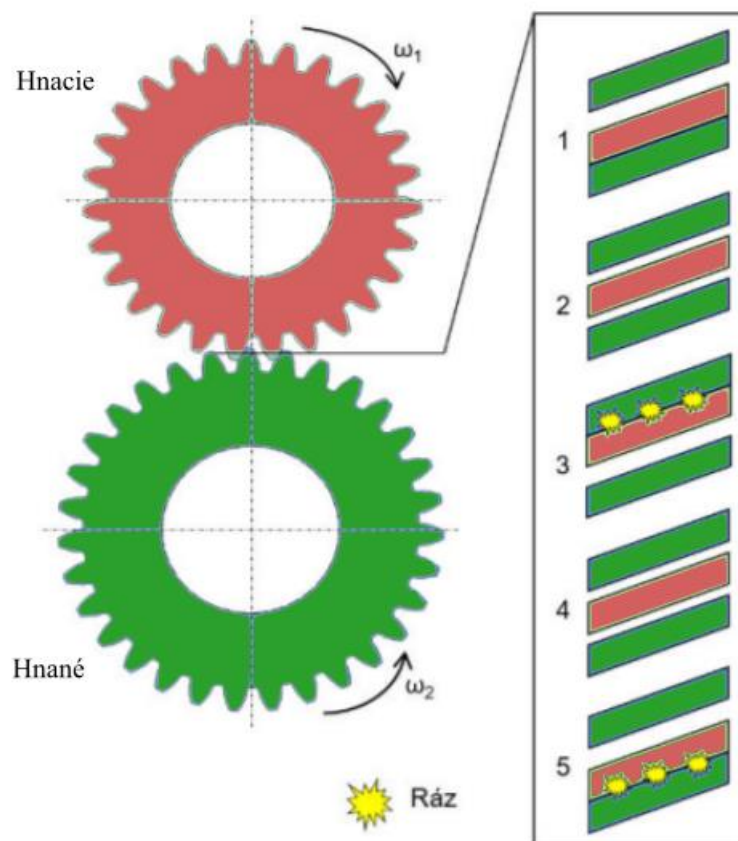
kde ε_α je súčiniteľ záberu profilu v čelnej rovine. Súčiniteľ záberu vyjadruje priemerný počet párov zubov nachádzajúcich sa súčasne v zábere, obvykle nadobúda hodnoty $\varepsilon_\gamma > 2$. Priebeh premenlivej tuhosti v čase (v závislosti na natočení kolies voči sebe) sa z obdĺžnikového (obr. 5) zmení na lichobežníkový (v ideálnom prípade). Vyššie hodnoty v porovnaní s čelným súkolím s priamymi zubami majú za následok pokojnejší a tichší chod. Ukazuje sa, že minimum vybudených vibrácií sa dosiahne pri celočíselnej hodnote súčiniteľa záberu kroku – obr. 6. [5]



Obr. 6 Závislosť hladiny hluku ozubenia na súčiniteloch záberu kroku a záberu profilu [14]

RÁZY

Ďalším zdrojom hluku je vznik rázov vplyvom axiálnej a bočnej (zubovej) vôle voľných ozubených kolies so šikmými zubami. Vzniká napr. pri voľnobežných otáčkach spaľovacieho motora, teda pri malom zaťažení ozubených kolies. Vnikat' môže taktiež naopak pri veľmi vysokom zaťažení a nízkych otáčkach. Prispieva k tomu nepravidelný chod hnacieho ústrojenstva, pri ktorom dochádza k torznému kmitaniu – zmena uhlového zrýchlenia v priebehu jednej otáčky. Tento hluk sa označuje ako rinčanie alebo klepanie. K zníženiu tohto prejavu sa v moderných automobiloch používajú dvojmotové zotrvačníky. Na obr. 7 je zobrazený vznik rázov vplyvom bočnej vôle. [9]



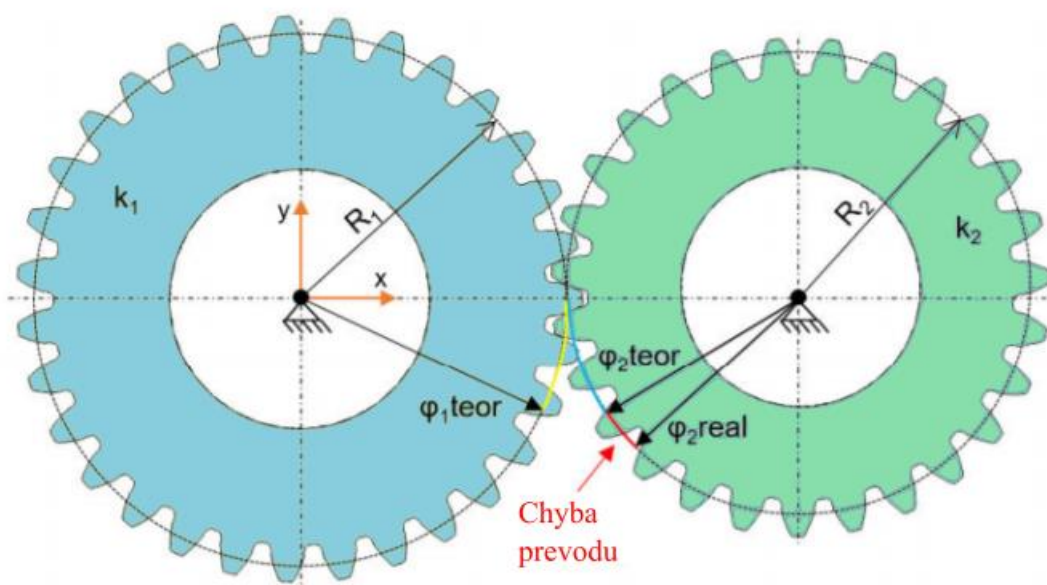
Obr. 7 Vznik rázov vplyvom bočnej vôle [20]

INÉ ZDROJE

Medzi ďalšie javy, ktoré spôsobujú vibrácie a hluk, možno zaradiť tzv. Lubricant Entrianment (prebytočné mazivo vplyvom malých vôlí nie je vytlačené zo záberu a namáha ozubenie dynamickými silami, ktoré spôsobujú nárast vibrácií) a tzv. Air Pocketing (má súvis so vzduchovými vačkami v mazive). [9]

3.2 CHYBA PREVODU

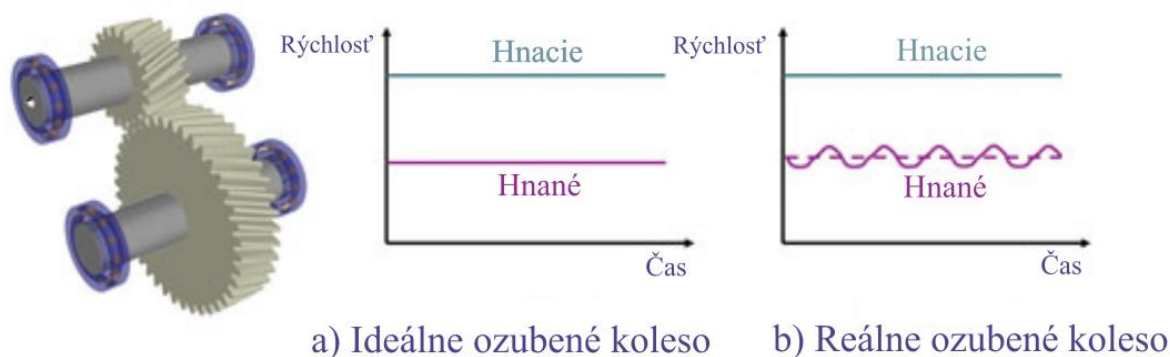
Nemenej významným zdrojom vibrácií v prevodových ústrojenstvách je chyba prevodu (angl. Transmission error, TE). Definuje sa ako rozdiel medzi skutočnou a teoretickou pozíciou hnaného ozubeného kolesa. Rozdiel môže byť vyjadrený v dĺžkových jednotkách (mikrometre) ako pohyb v smere dotýčnice ku roztečnej alebo základnej kružnici, alebo ako natočenie v uhlových jednotkách (sekundy). Takéto chyby, nepresnosti sú veľmi malé, v automobilových prevodovkách sa jedná o jednotky mikrometrov. Rotačná zložka chyby prevodu je na obr. 8. [6], [9]



Obr. 8 Rotačná zložka chyby prevodu [20]

V prípade dokonale tuhých a geometricky presných ozubení prenášajú kolesá rotačný pohyb bez chyby, to znamená, že konštantná rýchlosť na vstupnom hriadeľi vedie ku konštantnej rýchlosti na výstupnom hriadeľi. Za predpokladu nulového trenia je možné to isté tvrdiť aj o točivom momente. Za týchto okolností by nedochádzalo k zmenám pôsobiacich síl v zábere ozubenia, a teda nevznikali by žiadne vibrácie ani hluk. [7]

V skutočnosti však toto nemôže nastať. Reálne ozubené kolesá nie sú dokonalé. Nepresnosti vo výrobe, deformácia zubov pri zaťažení, vychýlenie (priehyb) hriadeľov z ideálnej polohy vplyvom zaťaženia a korekcie kolies majú za následok, že ozubenie nie je presne evolventné. Takže keď sa hnacie koleso otáča konštantnou uhlovou rýchlosťou, u hnaného tomu tak nie je, ako je znázornené aj na obr. 9. [19]



Obr. 9 Závislosť uhlovej rýchlosti hnacieho a hnaného a) ideálneho, b) reálneho kolesa na čase [19]

Chybu prevodu možno rozdeliť na statickú a dynamickú. Pri statickej sa uvažujú iba statické sily a je daná predovšetkým striedaním počtu zubov v zábere a spomínanými nepresnosťami výroby (chyba rozstupu, chyba profilu, opotrebenie a i.). Dynamická chyba prevodu vzniká pri zaťažení za rotácie vplyvom dynamických síl (ohyb zubov, priehyb hriadeľov). Jednotlivé chyby (statická, dynamická) sa navzájom sčítavajú. [9]

3.3 LOŽISKÁ

Valivé ložiská v prevodovke sú nie len významným prvkom v prenosovej ceste, ale na druhej strane aj samé o sebe produkujú vibrácie a hluk. Vibrácie vznikajú odvalovaním valivých elementov ložiska po vnútornej a vonkajšej dráhe (krúžku). Frekvencia vibrácií závisí na nerovnomernosti povrchu (pittinig) alebo nepravidelnosti funkčných plôch, ktoré vznikajú opotrebením a pri výrobe. [9]

Vlastné frekvencie valivého ložiska bývajú zvyčajne v pásme približne od 500 do 2000 Hz. Ak sa v ložisku vyskytuje porucha, sú tieto vlastné frekvencie vybudené periodickými nárazmi valivých prvkov na poruchy valivých dráh a možno ich detegovať. Pri zhoršovaní opotrebenia sa okolo týchto rezonančných frekvencií objavujú postranné pásma s odstupom o otáčkovú frekvenciu alebo majú odstup rovný frekvencii ložiskovej poruchy. [8]

Pri detekcii špecifických porúch vo valivých ložiskách môže byť nápomocných mnoho vzorcov, ktoré boli odvodené v priebehu rokov. Tieto vzorce sú založené na geometrii ložiska, na počte valivých elementov a na otáčkovej frekvencii ložiska. [8]

Na valivom ložisku sa rozlišujú štyri typy porúch podľa miesta, kde sa porucha vyskytuje. Každá z týchto porúch odpovedá tzv. frekvencia ložiskovej poruchy, ktorú je možno spočítať na základe parametrov ložiska a otáčkovej frekvencie. [8]

BPFI – porucha na vnútornom krúžku

$$BPFI = \frac{N}{2} \left(1 + \frac{B_d}{P_d} \cdot \cos \varphi \right) \cdot n \quad [Hz] \quad (45)$$

BPFO – porucha na vonkajšom krúžku

$$BPFO = \frac{N}{2} \left(1 - \frac{B_d}{P_d} \cdot \cos \varphi \right) \cdot n = N \cdot FTF \quad [Hz] \quad (46)$$

BSF – porucha na valivom teliesku

$$BSF = \frac{P_d}{2B_d} \left(1 - \left(\frac{B_d}{P_d} \cdot \cos \varphi \right)^2 \right) \cdot n \quad [Hz] \quad (47)$$

FTF – porucha na kletke

$$FTF = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{B_d}{P_d} \cdot \cos \varphi \right) \cdot n \quad [Hz] \quad (48)$$

kde jednotlivé symboly majú význam:

n – otáčky rotora [Hz]

N – počet valivých elementov [-]

B_d – priemer valivého elementu [mm]

P_d – roztečný priemer [mm]

φ – kontaktný uhol [°]

Vzťahy platia pre stojaci vonkajší krúžok. V prípade rotujúceho vonkajšieho krúžku sa zamení znamienko pri výpočte, okrem vzorca pre valivé telieska. [8]

4 VÝPOČTOVÉ MODELY

Hlavnou časťou tejto práce je popísanie jednotlivých typov analýz a výpočtových modelov prevodových ústrojenstiev. Výpočtový model je v podstate jednou z možností prevedenia danej analýzy. Nie vždy je k dispozícii reálny (fyzický) model, na ktorom by bolo možné uskutočniť experiment. Preto existujú aj tzv. výpočtové modely, teda modely, ktoré sú vytvorené a riešené v MKP a MBS softwaroch. Na týchto modeloch sa skúmajú dynamické vlastnosti daného systému, v tomto prípade prevodových ústrojenstiev. V nasledujúcich podkapitolách budú bližšie vysvetlené jednotlivé typy analýz a výpočtových modelov od jednoduchších po zložitejšie.

4.1 MODÁLNA ANALÝZA

Modálna analýza je oblasť dynamiky, ktorá má veľký význam v technickej diagnostike. Vďaka tejto metóde, ktorou sa určia výsledné modálne vlastnosti systému je možné získať základný dynamický popis prevodových ústrojenstiev alebo vo všeobecnosti akejkoľvek mechanickej sústavy či konštrukcie. Vibrácie a nadmerný hluk sú vo väčšine prípadov spôsobené vlastnosťami samotného systému, ktoré sa nazývajú modálne vlastnosti. K výsledným parametrom modálnej analýzy patria vlastné frekvencie sústavy, vlastné tvary kmitov a tlmenie. [10]

Pri strojných súčiastiach by nemalo dochádzať k ich prevádzkovaniam v režime, kedy je frekvencia budenia totožná (alebo blízka) s vlastnou frekvenciou stroja. Rovnako je tomu tak aj pri prevodových ústrojenstvách. V technickej praxi je však veľmi náročné sa týmto stavom vyhnúť. Pomocou modálnych analýz sa môžu konštrukcie upraviť tak, aby bol tento jav aspoň čiastočne zmiernený. [20]

Pri riešení modálnej analýzy nie je budenie priamo definované, ale je nutné mať o ňom aspoň základné informácie. Pomocou tejto metódy je možné zistiť v konštrukcii kritické miesta a porovnaním s budiacimi frekvenciami označiť tie, ktoré môžu byť najnebezpečnejšie. [20]

Existujú dva druhy modálnej analýzy – výpočtová a experimentálna. Výpočtová sa rieši buď pomocou analytických výpočtov alebo numericky – zostavením výpočtového modelu v MKP. Experimentálna spočíva v praktickom meraní reálnej štruktúry. Hodnoty výpočtové sa často porovnávajú s experimentálne nameranými hodnotami, avšak v technickej praxi nedávajú úplne rovnaké výsledky. [10]

4.1.1 ANALYTICKÝ PRÍSTUP

Analytická analýza sa zvyčajne používa pre telesá s jednoduchým tvarom (napr. rovná tyč, rovná doska). Nemôže však poskytnúť modálne vlastnosti pre telesá všeobecného (komplexného) tvaru. [15]

Pri výpočtovom, a teda aj analytickom prístupe je pre stanovenie modálnych vlastností potrebné poznať materiálové dáta.

Analytická modálna analýza vychádza z voľného netlmeného kmitania (kap. 2.2.1). Pri matematickom modelovaní tohto kmitavého chovania je pohybová rovnica pre sústavu v maticovom tvare zapísaná nasledujúcim spôsobom

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (49)$$

pri daných počiatočných podmienkach. Kde \mathbf{M} je matica hmotnosti a \mathbf{K} matica tuhosti sústavy (obe matice sú symetrické). Matice majú rozmer $n \times n$, pričom n je počet stupňov voľnosti danej sústavy.

Výsledné vlastnosti modálnej analýzy sú napočítané použitím tzv. modálnej transformácie. Táto transformácia spočíva v náhrade sústavy vzájomne viazaných homogénnych diferenciálnych rovníc sústavou nezávislých, izolovane riešiteľných diferenciálnych rovníc. Jedná sa o nájdenie vlastných čísel a vlastných vektorov sústavy diferenciálnych rovníc. [12], [21]

4.1.2 NUMERICKÝ PRÍSTUP - MKP

Druhým, častejším a používanejším prístupom je metóda konečných prvkoch – MKP (angl. finite element method – FEM). Pre numerické simulácie sa najčastejšie používa software ANSYS, NASTRAN, príp. iné. Oproti analytickej metóde umožňuje riešiť zložitejšie tvary telies pomocou výpočtovej techniky pri neporovnateľne menších výpočtových časoch.

Samotný výpočet modálnych parametrov pomocou MKP nie je postačujúci na to, aby bolo možné prehlásiť, že získané modálne parametre sú zhodné so skutočnými. Preto je vo väčšine prípadov potrebné overiť výsledky aj experimentálnou modálnou analýzou. [21]

4.2 HARMONICKÁ ANALÝZA

Harmonická analýza využíva ako vstup výstup z modálnej analýzy. Jedná sa o vynútené tlmené kmitanie, je nutné teda poznať budenie. V prevodovke je reálny charakter budenia od záberu zubov, ktorý má približne lichobežníkový tvar. Pri harmonickej analýze sa tento reálny signál budiacej sily zjednodušuje na harmonický – sínusový. Výsledky tvoria podmnožinu výstupov modálnej analýzy. Obdržíme základné informácie o odozve na budiaci signál, zahrnutím tlmenia možno navyše uvažovať aj reálnu veľkosť amplitúdy kmitania a kvantitatívne porovnávať medzi sebou, čo pri modálnej analýze nebolo možné.

4.2.1 ANALYTICKÝ PRÍSTUP

Harmonická analýza sa líši v pojatí Lagrangeovej pohybovej rovnice. Voľné netlmené kmitanie, z ktorého vychádzala modálna analýza, je nahradené vynúteným tlmeným kmitaním (kap. 2.2.3). Pohybové rovnice obsahujú všetky členy a ich riešenie primárne prebieha vo frekvenčnej doméne. Matematický zápis je v tvare

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F}. \quad (50)$$

Oproti modálnej analýze pribudla matica tlmenia \mathbf{B} a budiaca sila \mathbf{F} . Tlmenie je možno rozdeliť podľa matematického popisu na niekoľko typov: Coulombovo tlmenie, viskózne tlmenie,

hysterézne tlmenie, proporcionálne (Rayleighovo) tlmenie a tlmenie zadané pomerným súčiniteľom. Pri harmonickej analýze je dôležité zvoliť vhodný prístup ku stanoveniu koeficientov tlmenia. [20]

4.2.2 NUMERICKÝ PRÍSTUP - MKP

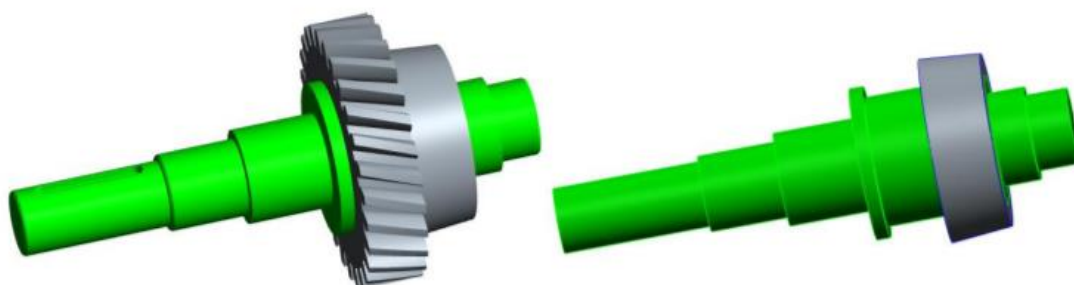
Numerický prístup k harmonickej analýze je veľmi podobný ako pri modálnej analýze. Navyše sa musí definovať miesto, smer, amplitúda a frekvencia budiacej sily. Taktiež sa musí nadefinovať tlmenie. Ako vstup slúžia výstupné modálne vlastnosti z modálnej analýzy.

Harmonicou analýzou možno stanoviť odozvu (chovanie) štruktúry ma presne definované budenie. Umožňuje to presnejšie kvantifikovať rozdiely medzi jednotlivými konštrukčnými variantami. Výstupom sú základné informácie na budiaci signál.

4.3 VÝPOČTOVÉ MODELOVANIE POMOCOU MKP

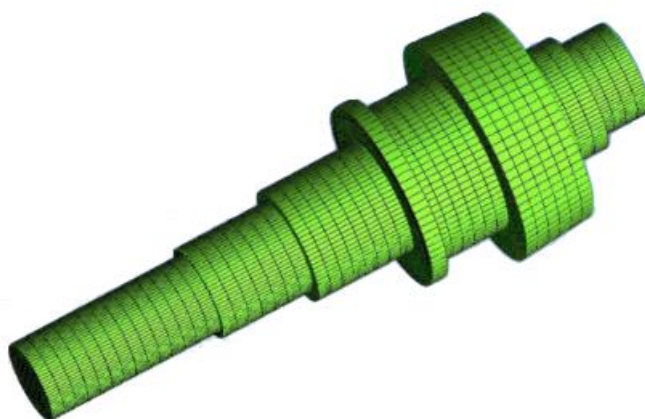
Pri riešení modálnej analýzy metódou konečných prvkov sa postupuje nasledovne:

1. Vytvorí sa geometria analyzovanej štruktúry – obr. 10.



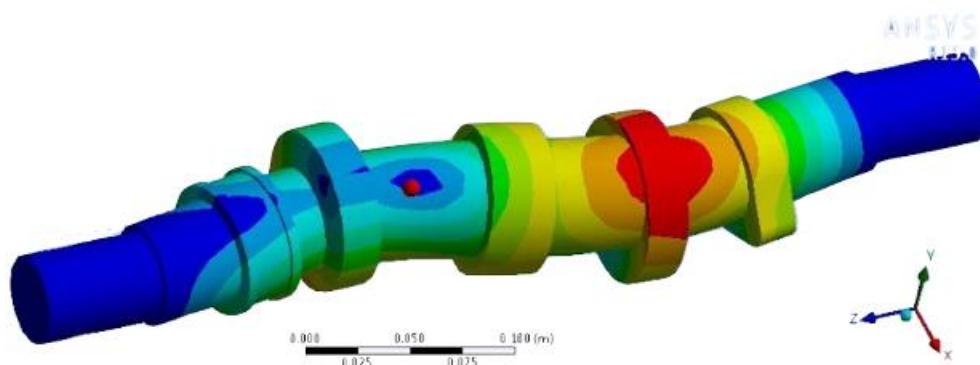
Obr. 10 Vytvorenie 3D modelu – skutočný (vľavo), zjednodušený (vpravo) [13]

2. Zadefinujú sa materiálové vlastnosti modelu (hustota, Poissonove číslo, Youngov modul pružnosti).
3. Zadefinujú sa okrajové podmienky potrebné pre vytvorenie výpočtového modelu – zohľadnenie mechanických väzieb vo výpočte.
4. Vytvorí sa konečno-prvková sieť, ktorá je tvorená vhodne zvoleným konečným prvkom a jeho veľkosťou – obr. 11. Čím je sieť jemnejšia, tým je výpočet presnejší avšak časovo náročnejší, je vhodné previesť analýzu citlivosti z hľadiska veľkosti prvkov.



Obr. 11 Tvorba siete [13]

5. Nastaví sa riešiteľ, ktorý obsahuje vhodný výpočtový algoritmus, zvolí sa frekvenčný rozsah a počet hľadaných vlastných tvarov kmitov mechanickej štruktúry.
6. Exportujú sa hľadané modálne parametre analyzovanej mechanickej štruktúry – obr. 12. [21]



Obr. 12 Vlastné tvary kmitov [22]

Výhodou numerického prístupu pomocou MKP, ktorý je už dnes bežne používaný, je jeho rýchlosť riešenia zložitých a rozsiahlych geometrických modelov. Nevýhodou je potreba znalosti materiálových dát a geometrie, ktorá sú nevyhnutné pre dosiahnutie presných výsledkov. [21]

4.4 MBS PRÍSTUP

Multi-body system, v skratke MBS, je pojem, ktorý v preklade znamená systém sústavy telies. Môže sa jednať o sústavu tuhých (rigid) alebo pružných (flexible) telies. Medzi jednotlivými telesami sa definujú kinematické väzby a analyzujú sa silové resp. dynamické účinky. [11]

MBS programy sú teda určené pre vyšetovanie kinematických veličín a dynamického chovania priestorovo viazaných mechanických systémov tvorených sústavou telies, ktoré sú navzájom spojené kinematickými väzbami a pružne tmiacimi členmi. Vďaka tomuto systému sa telesá môžu voľne pohybovať v priestore. Väzby spoločne s vonkajším zaťažením, či už silovým alebo momentovým, sú realizované v bodoch, ktoré sa vytvárajú priamo na každom telese. [13]

Na Ústave automobilového a dopravného inžinierstva na VUT v Brne sa používa jeden z najrozšírenejších MBS softwarov, a to MSC ADAMS (Automatic Dynamic Analysis of Mechanical Systems). Program umožňuje modelovať, analyzovať a optimalizovať virtuálne prototypy budúcich výrobkov a skúmať ich vlastnosti ešte pred realizáciou reálneho prototypu. [23]

Hlavnou výhodou MBS modelov je možnosť riešiť dané úlohy v časovej doméne. Odvodenie pohybových rovníc je založené na základe Euler-Lagrangeho prístupu. Systém je popísaný sústavou diferenciálnych rovníc, ktoré umožňujú do modelu zahrnúť veľké množstvo reálnych problémov (aj nelineárneho charakteru). Tieto rovnice sú riešené pomocou pokročilých numerických metód, ktoré sú súčasťou každého MBS softwaru. [20]

STAVBA MODELU

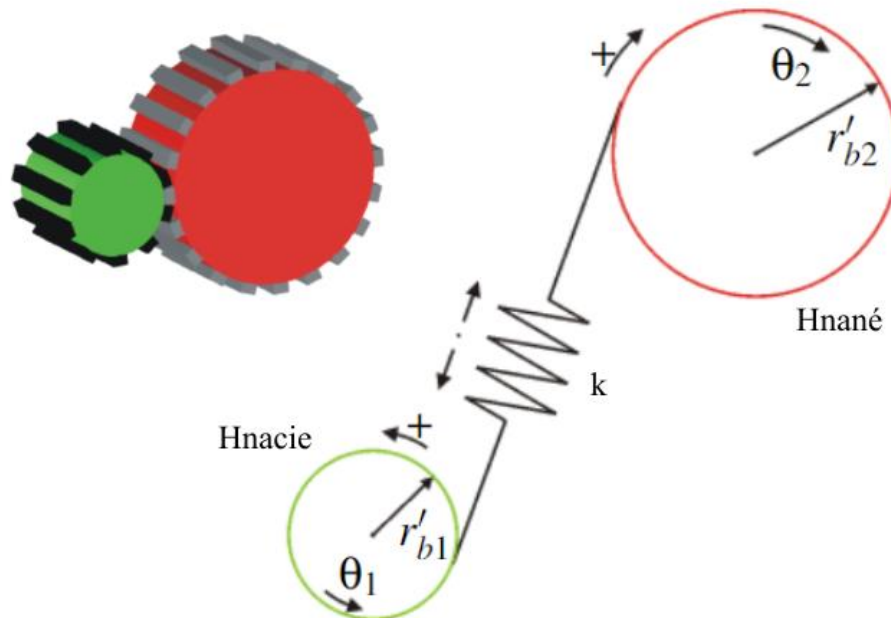
V MBS softwaroch možno vytvárať modely rôznej úrovne zložitosti. Od použitých typov telies a ich matematickej definície sa odvíja komplexnosť modelu. Jednoduchšie modely sú napríklad tvorené niekoľkými hmotnými bodmi, naopak za zložitejší model možno považovať tuhé telesá, ktoré sú určené hmotnosťami a momentami zotrvačnosti. Použitím pružných telies vzniká ešte komplexnejší model. Pružné telesá sú v podstate tuhé telesá doplnené o modálne vlastnosti, ktoré boli výstupom modálnej analýzy. Tuhé telesá sú ideálne objekty s nekonečne veľkou tuhosťou, preto u nich nemôže dôjsť ku kmitaniu. Používajú sa v prípade, keď kmitanie súčiastky nemá veľký vplyv na výsledky. V opačnom prípade sa musia zaviesť pružné (modálne redukované) telesá. Modálna redukcia pružných telies bude popísaná ďalším textom. [20]

Medzi typické súčasti, pri ktorých sa predpokladá výrazný vplyv kmitania (a teda aj vyžarovanie hluku) od budiacich síl v prevodových ústrojenstvách patrí skriňa prevodovky. Z tohto dôvodu sa modeluje ako pružné teleso. Jednotlivé telesá sú vzájomne medzi sebou prepojené väzbami (kinematické a dynamické), ktoré slúžia pre prenos silových účinkov. Silové pôsobenia môžu byť použité aj formou okrajových podmienok. Z objemových 3D modelov možno získať geometriu a dáta (hmotnosť, momenty zotrvačnosti), aby mohli byť definované tuhé telesá. Pružné telesá sú importované prostredníctvom modálne redukovaných telies. [20]

MBS programy na rozdiel od MKP riešia úlohy v časovej doméne. Umožňujú zadať mechanizmy vzniku reálneho budenia a tým pádom spresňujú model.

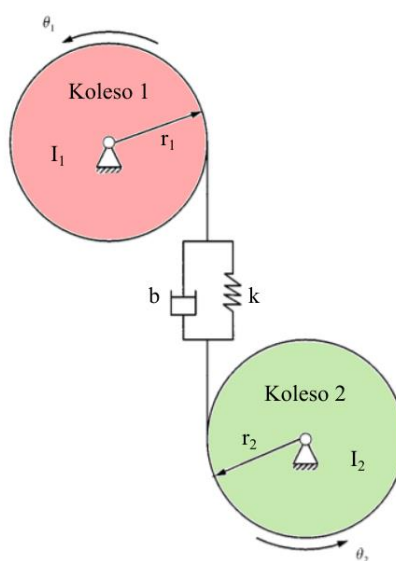
Z predchádzajúceho textu je zrejmé, že existuje viacero variant ako zostaviť výpočtový model, ktoré sa líšia náročnosťou a presnosťou. Ďalej sa bude bližšie pojednávať iba o tuhých

telesách, kde sú kontakty medzi nimi reprezentované kombináciou lineárnej tuhosti a tlmenia. Na miere komplexnosti výpočtového modelu závisí počet stupňov voľnosti. Najjednoduchší model zubového kontaktu je model, kde každé ozubené koleso v zábere má jeden stupeň voľnosti – rotáciu okolo jeho osi symetrie, ako je znázornené na obr. 13. [18]



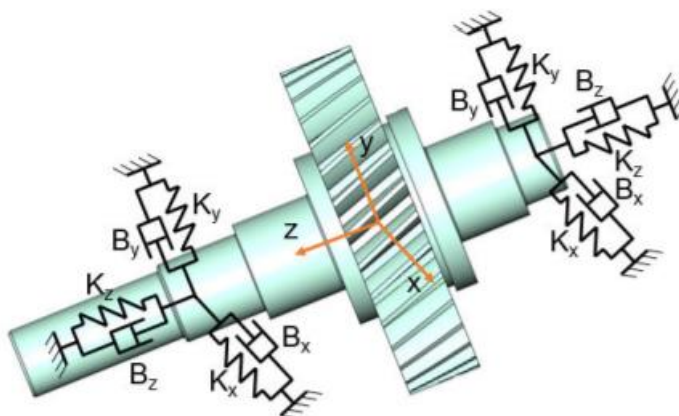
Obr. 13 Modelovanie zubového kontaktu (pružina o tuhosti k) [18]

Zvyšných päť stupňov voľnosti je pevných. Tieto modely sa taktiež nazývajú ako čisto torzné multi-body modely. Ako vstup pre tuhé telesá sú potrebné iba jednotlivé momenty zotrvačnosti. K spresneniu modelu sa môže k pružine paralelne vložiť tlmič – obr. 14. [18]



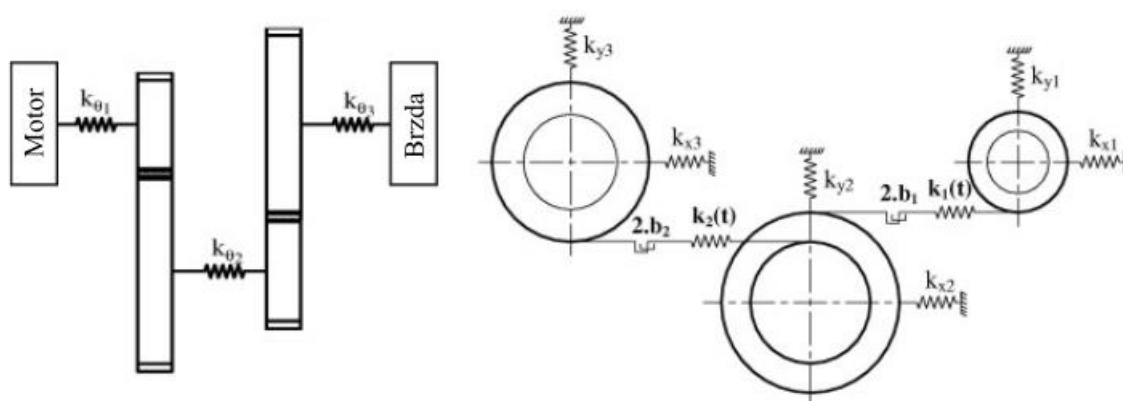
Obr. 14 Modelovanie zubového kontaktu (pružina, tlmič) [16]

Ďalším dôležitým komponentom v prevodových ústrojenstvách sú ložiská. Môžu byť samé zdrojom vysokofrekvenčných vibrácií, ale vo výpočtových modeloch plnia predovšetkým funkciu prenosového člena vibrácií od hriadeľov. Detailné modelovanie valivých ložísk sa väčšinou nevykonáva, keďže je výpočtovo náročné. Modelovanie týchto súčastí sa v MBS uskutočňuje pomocou lineárnej pružiny a tlmiča (paralelne zapojenie) pre jeden axiálny a dva radiálne smery. Pre stanovenie potrebných parametrov tuhosti sa používa výpočet s reálnou geometriou v MKP. Príklad modelu ložiska je na obr. 15. [4], [20]



Obr. 15 Modelovanie ložiskových väzieb [20]

Oveľa komplexnejším a zložitejším modelom, oproti doposiaľ uvedeným, môže byť napríklad nelineárny model dvojstupňového prevodu na obr. 16. Do úvahy sa berie deformácia zubov a strata kontaktu zubov počas záberu. Ozubené kolesá sú okrem ich zubov modelované ako tuhé. Ložiská sú modelované lineárnou pružinou. Hriadele sa uvažujú ako pružné so zanedbanými hmotnosťami. [17]



Obr. 16 Model dvojstupňového prevodu [17]

Z predchádzajúcich príkladov je zrejmé, že pri vytváraní výpočtových modelov dochádza vždy k istému zjednodušeniu. Približovaním sa k reálnemu stavu narastá množstvo nelinearít, ktoré rapídne navyšujú výpočtový čas. Nutné je zvážiť do akej miery sú jednotlivými zjedno-

dušeniami ovplyvnené výsledky, a či sa blížia k skutočnosti (napríklad porovnaním s experimentom).

METÓDA REDUKCIE PRUŽNÝCH TELIES

Ako už bolo spomenuté vyššie, ak chceme, aby mal model vyššiu úroveň komplexnosti je nutné vykonať modálnu redukciu. Tento termín znamená úpravu štandardných MKP modelov obsahujúcich veľké množstvo uzlov (a teda aj stupňov voľnosti) do formy, kedy budú tieto modely vykazovať podobné modálne vlastnosti (dynamické chovanie). Zároveň sa tým zníži výpočtová náročnosť pri ich riešení v MBS v časovej doméne. Príkladom, kedy je toto nutné uskutočniť je opäť spomínaná prevodová skriňa alebo aj blok motora. Tieto úlohy je možné riešiť aj pomocou MKP, avšak výpočet bude veľmi rozsiahli, čo vedie k neúmerne dlhým výpočtovým časom. Preto sa na výpočet dynamiky v časovej doméne používajú MBS systémy. [20]

Modálna redukcia využíva známu metódu Craig-Bampton (CB). Vo väčšine MKP programoch je zapracované jej prevedenie. Na druhej strane MBS softwary umožňujú importovanie týchto redukovaných telies. [20]

TYPY VÝSLEDKOV

Simulácia na základe virtuálnych prototypov v MBS prostredí nám môže poskytnúť rôzne typy výsledkov. Popri parametroch vibrácii povrchu jednotlivých súčastí prototypu možno získať veľa ďalších potrebných priebehov veličín, ako napríklad osová vzdialenosť ozubených kolies, priebeh krútiacich momentov, deformačný posuv v ložiskách, reakčné sily v ložiskách alebo reakčné sily v miestach úchytovej prevodovky. Všetky tieto informácie sa vykresľujú v reálnom čase a pre určité okrajové podmienky. [20]

ZÁVER

Táto bakalárska práca popisuje najčastejšie prístupy vytvárania výpočtových modelov dynamiky prevodových ústrojenstiev pomocou dostupných MKP a MBS softwarov a prepája ich s analytickými metódami, z ktorých vychádzajú.

Najprv sú uvedené dôvody riešenia dynamiky prevodových ústrojenstiev, kde na vibrácie prevodovej skrine a následné akustické prejavy má dominantný vplyv budenie od záberu ozubených kolies. Vibrácie môžu byť nebezpečné, ak ich amplitúdy dosahujú veľkých hodnôt. Dôvodom je prienik vlastných frekvencií jednotlivých súčastí s frekvenciami budiacimi – nastáva rezonancia. Tento nežiadúci jav je nutné čo najviac potlačiť a riešiť už v štádiu návrhu konštrukcie pri zisťovaní modálnych vlastností jednotlivých komponentov pomocou modálnej analýzy. K tomu dopomáhajú simulácie na virtuálnych prototypoch. Výpočtové modely môžu mať rôznu úroveň komplexnosti. Jednotlivé prístupy sú zoradené postupne od jednoduchších ku komplexnejším a časovo náročnejším.

Základnou metódou je zisťovanie modálnych vlastností telesa v MKP softwaroch (ANSYS) pomocou modálnej analýzy. Výstup z modálnej analýzy je mnohokrát nepostačujúci a má iba informatívny charakter, ktorý ďalej poslúži ako vstup pri harmonickej analýze. Spomenuté analýzy sú riešené vo frekvenčnej doméne a nezohľadňujú skutočné podmienky (priebeh budiacej sily). Ak sú potrebné ešte presnejšie výsledky, treba použiť o úroveň zložitejší prístup, a to simuláciu v MBS prostredí (ADAMS). Ako vstupné parametre slúžia výsledky modálnej analýzy. Presnejšie výsledky sú dosiahnuté vďaka možnosti zadania mechanizmov vzniku reálneho budenia v časovej doméne.

Výsledky z výpočtových simulácií sa môžu ďalej porovnať s experimentálnymi. Experimentálne výsledky sa môžu požiť k spresneniu výpočtového modelu.

Cieľom práce bolo oboznámiť čitateľa o problematike výpočtového modelovania prevodových ústrojenstiev a poskytnúť základný prehľad používaných metód.

POUŽITÉ INFORMAČNÉ ZDROJE

- [1] KRATOCHVÍL, Ctirad a Jaromír SLAVÍK. *Mechanika těles: dynamika*. Vyd. 4., V Akademickém nakl. CERM 2. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2007. ISBN 978-80-214-3446-2.
- [2] MEDVEC, Andrej. *Mechanika III: dynamika : celoštátna vysokoškolská učebnica pre strojnické fakulty vysokých škôl*. Bratislava: Alfa, 1988. Edícia matematicko-fyzikálnej literatúry.
- [3] MORAVEC, Vladimír. *Konstrukce strojů a zařízení II.: čelní ozubená kola : teorie, výpočet, konstrukce, výroba, kontrola*. Ostrava: Montanex, 2001. ISBN 80-722-5051-5.
- [4] PALERMO, Antonio, Domenico MUNDO, Antonino LENTINI, Rabah HADJIT, Peter MAS a Wim DESMET. Gear noise evaluation through multibody TE-based simulations. In: Proceedings of ISMA 2010. Leuven, 2010, s. 3033-3046.
- [5] SHIGLEY, Joseph Edward, Charles R. MISCHKE a Richard Gordon BUDYNAS. *Konstruování strojních součástí*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, 2010. Překlady vysokoškolských učebnic. ISBN 978-80-214-2629-0.
- [6] SMITH, Derek J. Gear noise and vibration. 2nd edition. New York: Marcel Dekker, 2003, 297 s. ISBN 824741293.
- [7] ÅKERBLOM, Mats. *GEAR NOISE AND VIBRATION – A LITERATURE SURVEY* [online]. [cit. 2018-05-24]. Dostupné z: <http://www.divaportal.org/smash/get/diva2:139878/FULLTEXT01.pdf>
- [8] BILOŠ, Jan a Alena BILOŠOVÁ. *Aplikovaný mechanik jako součást týmu konstruktérů a vývojářů: část Vibrační diagnostika* [online]. [cit. 2018-05-24]. Dostupné z: <http://projekty.fs.vsb.cz/147/ucebniopory/978-80-248-2755-1.pdf>
- [9] DOČKAL, Aleš. *Konstrukční optimalizace ozubené převodovky s ohledem na snižování hlukové emise: Design optimization of gearbox considering reduction of noise emission*. V Brně: Vysoké učení technické, Fakulta strojního inženýrství, Ústav konstruování, 2003. Vědecké spisy Vysokého učení technického v Brně. ISBN isbn80-214-2439-7.
- [10] DVOŘÁK, Vítězslav. *EXPERIMENTÁLNÍ MODÁLNÍ ANALÝZA* [online]. [cit. 2018-05-24]. Dostupné z: [https://www.old.fst.zcu.cz/_files_web_FST/_SP_FST\(SVOC\)/_2009/_sbornik/PapersPap/Ing/Dvorak_Vitezslav.pdf](https://www.old.fst.zcu.cz/_files_web_FST/_SP_FST(SVOC)/_2009/_sbornik/PapersPap/Ing/Dvorak_Vitezslav.pdf)
- [11] GULÁŠ, T. Dynamický výpočet rozvodu šestiválcového motoru s 24 ventily. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2013. 111 s. Vedoucí diplomové práce Ing. Radim Dundálek, Ph.D..

- [12] HLAVÁČ, Zdeněk. *Modální analýza a volné kmitání slabě tlumených lineárních kmitavých soustav* [online]. [cit. 2018-05-24]. Dostupné z: <https://www.kme.zcu.cz/download/predmety/273-fst5.pdf>
- [13] KRÁL, J. Simulace vibrací převodové skříně. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2014. 88 s. Vedoucí diplomové práce doc. Ing. Pavel Novotný, Ph.D.
- [14] MORAVEC, Vladimír. *Konstrukce strojů a zařízení II.: čelní ozubená kola: teorie, výpočet, konstrukce, výroba, kontrola*. Ostrava: Montanex, 2001. ISBN 80-722-5051-5.
- [15] NAKASONE, Y., T. A. STOLARSKI a S. YOSHIMOTO. *Engineering analysis with ANSYS software*. Burlington, MA: Butterworth-Heinemann, 2006.
- [16] *NON-LINEAR DYNAMIC RESPONSE OF A SPUR GEAR PAIR: MODELLING AND EXPERIMENTAL COMPARISONS* [online]. [cit. 2018-05-25]. Dostupné z: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X00930670>
- [17] Nonlinear dynamics of a two-stage gear system with mesh stiffness fluctuation, bearing flexibility and backlash [online]. [cit. 2018-05-25]. Dostupné z: https://ac.els-cdn.com/S0094114X08001080/1-s2.0-S0094114X08001080-main.pdf?_tid=db49f4e8-a875-4d38-ae6f-86163d9ff3ad&acdnat=1527275865_6358e0f032962b9afec234b851707802
- [18] PEETERS, Joris. *SIMULATION OF DYNAMIC DRIVE TRAIN LOADS IN A WIND TURBINE* [online]. [cit. 2018-05-24]. Dostupné z: https://lirias.kuleuven.be/bitstream/1979/344/2/PhD_dissertation_jpeeters.pdf
- [19] PLATTEN, Michael F. *Troubleshooting Gear Noise* [online]. [cit. 2018-05-24]. Dostupné z: <http://gearsolutions.com/features/troubleshooting-gear-noise/>
- [20] PROKOP, A. Modelování vibrací pohonných jednotek aplikací virtuálních prototypů. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2016. 160 s. Vedoucí dizertační práce doc. Ing. Pavel Novotný, Ph.D.
- [21] VYUŽITIE MODÁLNEJ ANALÝZY PRI DIAGNOSTIKE VIBRÁCIÍ STROJNÝCH ZARIADENÍ [online]. [cit. 2018-05-24]. Dostupné z: <https://www.sjf.tuke.sk/transferinovacii/pages/archiv/transfer/19-2011/pdf/178-184.pdf>
- [22] [online]. [cit. 2018-05-25]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=uxIL8qV6MVQ>
- [23] *Simulačný balík MSC.ADAMS* [online]. [cit. 2018-05-24]. Dostupné z: http://atc.sjf.stuba.sk/msc_adams.html

ZOZNAM POUŽITÝCH SKRATIEK A SYMBOLOV

<i>BPFI</i>		Porucha na vnútornom krúžku ložiska
<i>BPFO</i>		Porucha na vonkajšom krúžku ložiska
<i>BSF</i>		Porucha na valivom teliesku ložiska
<i>CB</i>		Craig-Bampton
<i>FEM</i>		Finite element method
<i>MBS</i>		Multi-body system
<i>MKP</i>		Metóda konečných prvkov
<i>ÚADI</i>		Ústav automobilového a dopravného inžinierstva
<i>a</i>	[m s ⁻²]	zrýchlenie
<i>a</i>	[m s ⁻²]	vektor zrýchlenia
<i>A, B, C</i>	[-]	integračné konštanty
<i>b</i>	[kg s ⁻¹]	tlmenie
<i>b_r</i>	[-]	pomerný útlm
<i>B</i>	[kg s ⁻¹]	matica tlmenia
<i>B_d</i>	[mm]	priemer valivého elementu
<i>C</i>	[m]	amplitúda výchylky kmitania
<i>E_k</i>	[J]	kinetická energia
<i>E_P</i>	[J]	potenciálna energia
<i>F</i>	[N]	sila v pružine
<i>F</i>	[N]	vektor budiacej sily
<i>f₀</i>	[Hz]	vlastná frekvencia
<i>k</i>	[N m ⁻¹]	tuhosť pružiny
<i>K</i>	[N m ⁻¹]	matica tuhosti
<i>m</i>	[kg]	hmotnosť
<i>M</i>	[kg]	matica hmotnosti
<i>n</i>	[Hz]	otáčky rotora
<i>N</i>	[-]	počet valivých elementov
<i>P_d</i>	[mm]	roztečný priemer
<i>p_F</i>	[N]	pracovné sily
<i>q</i>	[m], [rad]	zovšeobecnená súradnica
<i>q</i>	[m]	vektor zovšeobecnených súradníc
<i>q̇</i>	[m s ⁻¹]	vektor zovšeobecnených rýchlostí
<i>q̈</i>	[m s ⁻²]	zovšeobecnené zrýchlenie
<i>q̈</i>	[m s ⁻²]	vektor zovšeobecneného zrýchlenia
<i>Q</i>	[N], [Nm]	zovšeobecnená sila

Q	[N], [Nm]	budiaca zovšeobecnená sila
\tilde{Q}	[N], [Nm]	zovšeobecnené pracovné sily
r	[m]	polohový vektor
\dot{r}	[m s ⁻¹]	vektor rýchlosti
\ddot{r}	[m s ⁻²]	vektor zrýchlenia
s_F	[N]	zotrvačná sila
t	[s]	čas
T	[s]	perióda
δ	[s ⁻¹]	konštanta doznievania
δA	[-]	virtuálna práca
δq	[-]	virtuálne posunutie
δr	[-]	virtuálne posunutie (vektorový zápis)
ε_α	[-]	súčiniteľ záberu profilu
ε_β	[-]	súčiniteľ záberu kroku
ε_γ	[-]	celkový súčiniteľ záberu
$\lambda_{1,2}$	[s ⁻¹]	korene charakteristickej rovnice
v	[m s ⁻¹]	rýchlosť
\mathbf{v}	[m s ⁻¹]	vektor rýchlosti
\mathbf{v}_F	[N]	väzbové sily
φ	[°]	kontaktný uhol
φ_0	[rad]	fázový uhol
Ω_0	[rad s ⁻¹]	vlastná uhlová frekvencia netlmených kmitov