Univerzita Hradec Králové

Přírodovědecká fakulta

Katedra matematiky

Komplexní čísla a kvaterniony

Bakalářská práce

Autor: Martina Stefanová

Studijní program: B1101 Matematika

Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání

Historie se zaměřením na vzdělávání

Vedoucí práce: RNDr. Jitka Kühnová, Ph.D.

Hradec Králové duben 2015

Univerzita Hradec Králové

Přírodovědecká fakulta

Zadání bakalářské práce

Autor:	**Martina Stefanová**
Studijní program:	B1101 Matematika
Studijní obor:	Matematika se zaměřením na vzdělávání
	Historie se zaměřením na vzdělávání
Název práce:	Komplexní čísla a kvaterniony
Název práce v AJ:	Complex numbers and Quaternions
Cíl a metody práce:	Cílem práce je popsat historický vývoj komplexních čísel, konstrukci tělesa komplexních čísel. Dále definovat kvaterniony spolu se základními operacemi a jejich vlastnostmi.
Garantující pracoviště:	katedra matematiky Přírodovědecké fakulty UHK
Vedoucí práce:	RNDr. Jitka Kühnová, Ph.D.
Konzultant:	
Oponent:	doc. RNDr. Seibert Jaroslav, CSc.
Datum zadání práce:	2. 4. 2013
Datum odevzdání práce:	

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny prameny, z kterých jsem vycházela.

V Hradci Králové dne Martina Stefanová

Poděkování

Děkuji tímto paní RNDr. Jitce Kühnové, Ph.D. za ochotu, vstřícnost a trpělivost při vedení mé práce a poskytování cenných rad. Děkuji též ostatním, kteří přispěli pomocí k jejímu dokončení.

Anotace

STEFANOVÁ, Martina. Komplexní čísla a kvaterniony. Hradec Králové, 2015. Bakalářská práce na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové. Vedoucí bakalářské práce Jitka Kühnová. 64 s.

Cílem práce je popsat historický vývoj komplexních čísel, konstrukci tělesa komplexních čísel. Dále definovat kvaterniony spolu se základními operacemi a jejich vlastnostmi. Práce nejprve popisuje historický vývoj komplexních čísel a následný objev kvaternionů. Dále je zde definována Caley-Dicksonova konstrukce a důležité základní pojmy používané v jednotlivých kapitolách. Třetí část se věnuje poznatkům o komplexních číslech, jejich vlastnostem a geometrickému významu. V poslední části se práce zaměřuje na kvaterniony. Je zde konstruováno nekomutativní těleso kvaternionů a popsány vlastnosti, goniometrický a exponenciální tvar kvaternionů. Dále je nastíněno jejich využití v praxi.

Klíčová slova

Caley-Dicksonova konstrukce, algebraická struktura, historie kvaternionů, těleso, komplexní číslo, kvaternion.

Annotation

STEFANOVÁ, Martina. Complex numbers and Quaternions. Hradec Králové, 2015. Bachelor Thesis at Faculty of Science University of Hradec Králové. Thesis Supervisor Jitka Kühnová. 64 p.

The aim of this thesis is to describe the historical development of complex numbers, to focus on the construction of the field of the complex numbers and define the quaternions together with the basic operations and its properties. Firstly the thesis describes the historical development of complex numbers and discovery of quaternions. After it, there is defined Caley-Dickson construction and some important basic terms used in the folowing chapters. The third part is devoted to knowledge about complex numbers, their characteristics and geometric meaning. The last part of this thesis is focused on quaternions. Noncommutative division ring of quaternions is constructed in this part, as well as the describtion of goniometric and exponential form of quaternions and their characteristics are mentioned. This thesis also suggests their using in practice.

Klíčová slova

Caley-Dickson construction, algebraic structure, history of quaternions, field, complex number, quaternion.

Obsah:

Úvod

Práce, kterou držíte v rukou, vznikla na základě upřímného zaujetí komplexními čísly. Tato zvláštní čísla, mě neznámá až do studia na vysoké škole, si velmi dlouho hledala své místo v matematice i v běžném životě. Jejich objev a vývoj v průběhu staletí byl složitý a často byla tato čísla odmítána jako „nedostatečná“ či „neskutečná“. Přesto jsou dnes hojně využívaná a tvoří základ pro další vývoj a objevování nového. Dá se říci, že ačkoliv je běžný člověk sotva postřehne, mají své nezaměnitelné místo na poli matematiky a dalších oborů. Skrývají se v geometrii ale také v elektronice či programování. Jejich vlastností využívají také architekti, inženýři a hlavně fyzikové.

Vedle komplexních čísel ovšem existují i další velmi zajímavá čísla, nazývaná kvaterniony. Jejich název pochází z anglického slova *„Quaternion“* znamenající doslova „čtveřice“. A skutečně jsou tato čísla čtyřčleny vycházející z výše zmíněných komplexních čísel. S těmito čísly se, na rozdíl od komplexních čísel, ve škole neseznámíme, a proto se staly hlavním tématem mé práce. Vedle popisu komplexních čísel a jejich vlastností se tedy cílem práce stalo vysvětlení historického vývoje kvaternionů, shrnutí poznatků o kvaternionech, popis jejich vlastností a využití v praxi.

Text samotný je rozdělen do 4 hlavních kapitol. V první kapitole je stručně shrnut historický vývoj komplexních čísel a kvaternionů, jejichž objev je přirozeným navázáním na vývoj komplexních čísel. První část této kapitoly je převážně čerpána ze zdrojů [3], [4], [5], [15], [30], [43] a [60]. Druhá část první kapitoly je čerpána převážně z [3], [4], [45], [59] a [60]. Druhá kapitola zavádí nezbytné pojmy pro zkoumání a popis komplexních čísel a kvaternionů, které jsou užívané v dalších kapitolách a lze je nalézt také v literatuře zabývající se algebraickými strukturami a lineární algebrou. Hlavními zdroji této kapitoly byly [2], [21], [35], [37], [47], [51], [54] a [66]. Následující kapitola se zaměřuje na shrnutí poznatků o komplexních číslech. Vedle základních vlastností je zde vysvětlen geometrický význam komplexních čísel a jejich běžné využití v praxi. Zdrojem pro tuto kapitolu se staly hlavně texty [2], [6], [8], [16], [17], [22], [24], [28], [31], [32], [39], [42], [46], [48], [56], [65], [67] a [76]. Poslední kapitola je cele zaměřena na kvaterniony. Je zde zkonstruováno těleso kvaternionů, zavedeny vlastnosti a význam kvaternionů a jejich různé tvary. V této kapitole jsou použité pojmy převážně z [2], [8], [13], [25], [29], [34], [44], [45], [51], [52], [53], [54], [55], [58], [62], [63], [64], [66], [74], [75] a [77]. Dále v této práci budeme pro ilustraci používat obrázků vytvořených v programu GeoGebra a tabulky či schémata převážně čerpaná z výše uvedených zdrojů.

1 Historie

1.1 Historie komplexních čísel

1.1.1 Vývoj vedoucí k objevu komplexních čísel

Historie, nebo spíše prehistorie, komplexních čísel začala již v 7. století, kdy indický matematik Brahmagupta, který jako první využíval nulu jako plnoprávnou číslici, stanovil pravidla pro počítání se zápornými čísly a zavedl vzorce pro řešení kvadratické rovnice (poznamenejme, že uznání záporných čísel bylo předpokladem k objevu čísel komplexních).

Na práci indických matematiků navázali matematici arabského světa (například Mohammed ibn Musa Al-Khowârizmî (780-850) ve své *Algebře*). Důkazy v arabské matematice byly běžně prováděny geometricky. Tímto pravidlem se řídil i Omar Khayyam (1048-1131). Tento perský matematik se mezi prvními pokoušel o řešení obecné kubické rovnice, ovšem pouze geometrickou cestou. Protože mu z konstrukcí pro jednotlivé typy kubických rovnic vycházela „nesmyslná“ čísla, usoudil, že řešit obecnou kubickou rovnici lze pouze geometricky a přiznával, že v jeho době výsledná čísla nemohou být přesně stanovena.

Postupem času se začal arabský svět a jeho kultura stále více setkávat s křesťanskou Evropou. Díla arabských matematiků se stále častěji překládala do latiny a byla studována křesťanskými učenci. Díky překladům Al-Khowârizmîho Algebry a díla Omara Khayyama se křesťanský svět seznamoval s výsledky arabského bádání, s číslem nula i se zápornými čísly, která byla v obou světech dlouhou dobu odmítána jako plnohodnotná.

Prvním Evropanem, který v souvislosti se zrodem komplexních čísel stojí za zmínku, je Leonardo da Pisa (1170-1250) známý dnes jako Fibonacci. Tento matematik z dvora sicilského krále Friedricha II., císaře římského, navázal na perské matematiky a stejně jako Omar Khayyam tvrdil, že obecnou kubickou rovnici nelze řešit algebraicky, ale pouze geometricky. Nicméně dokázal, že kupříkladu rovnici $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ nelze řešit pouze pomocí pravítka a kružítka.

Ke konci 14. století už bylo známo, že obecnou kubickou rovnici $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ lze redukovat na jednodušší formu $x^3 + px + q = 0$, a tedy, jsou-li koeficienty a hodnota neznámé kladná čísla, lze rozlišit tři základní typy kubické rovnice:

$$(1)\ \ x^3 + px = q;$$
$$(2)\ \ x^3 = px + q;$$
$$(3)\ \ x^3 + q = px;$$

Okruh hledání vzorce pro řešení kubických rovnic se zúžil pouze na tyto tři typy kubických rovnic.

O několik desítek let později, přesněji roku 1453, byla dobyta Konstantinopol. Tato událost, pro Byzantskou říši znamenající konec její existence, přinesla neočekávaný rozvoj vědy. Díla antického světa, dosud bezpečně uložená v Konstantinopoli, byla převezena do Itálie, kde spolu s přeloženými díly perských matematiků a objevem knihtisku podnítila počátek Renesance. Věda, dosud vyhrazená pro úzký okruh vzdělanců, si pomalu nacházela cestu k prostším lidem. Kubické rovnice však stále zůstaly nevyřešeny.[1]

Prvním matematikem, který vyvrátil starou domněnku o neřešitelnosti kubických rovnic algebraickou cestou, se stal Scipione del Ferro (1465-1526). Tento profesor na univerzitě v Bologni

---

[1] V roce 1494 Luca Pacioli (1445-1514) vydal dílo *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportione et Proportionalita*, které bylo jakýmsi kompendiem dosavadních poznatků, založeném na práci Fibonacciho. V tomto díle Pacioli poznamenal, že v současném stavu vývoje matematiky, není možné vyřešit obecné kubické rovnice.

našel řešení pro rovnici typu (1) a možná i řešení pro druhé dva typy rovnic. Svůj objev si, jak bylo v této době zvykem, nechal pro sebe. V období Renesance se totiž vědění velice cenilo. Profesoři a vědci měli své donátory, kteří je finančně podporovali a ochraňovali. Výměnou za to jim jejich oblíbenci získávali věhlas a slávu na veřejných soutěžích a disputacích s širokým publikem. K vítězstvím využívali právě vlastní často tajný výzkum. Tajemství, jak řešit kubické rovnice daného typu, proto Scipione del Ferro předal až před svou smrtí. Vybral si svého zetě Annibala della Nave a Antonia Maria Fiore, jednoho ze svých nadaných žáků.

Fiore využil del Ferrovo tajemství k získání slávy ve veřejných soutěžích. Sám inicioval taková klání, ukládal soupeřům zdánlivě neřešitelné rovnice a nakonec v roce 1535 vyzval i Niccolo Fontanu z Brescie (1499-1557). Nepředpokládal, že bylo ho tento „Koktal“[2] mohl porazit navzdory tvrzením, že Fontana rovněž ovládá řešení určitých kubických rovnic. Fontana, který správně odhadl, jaké rovnice mu Fiore zadá, se po nějaké době dopracoval od řešení rovnic typu (2) ke způsobu, jak řešit rovnice typu (1), s jehož pomocí soutěž nad Fiorem vyhrál. Navzdory očekávání si však své vědomosti nechal ještě několik let pro sebe.

Sdělil je až v roce 1539 milánskému matematikovi Girolamo Cardanovi (1501-1576), který ho ujistil, že jeho poznatky nezveřejní dříve, než to udělá Fontana sám. V roce 1542 se ovšem Cardano a jeho žák Lodovicco Ferrari (1522-1565) od Annibale della Navea dozvěděli, že stejnou metodu jako Fontana objevil už del Ferro. Na základě tohoto faktu se Cardano necítil být vázán slibem mlčení a uveřejnil vzorce pro řešení kubických rovnic v díle Ars Magna (1545). Shrnul v něm poznatky o řešení rovnic prvního až čtvrtého stupně (ty objevil jeho žák Lodovicco Ferrari) a u kubických rovnic uvedl vzorec dnes známý jako Cardanův, či Cardano-Tartagliův. Dílo Ars Magna obsahuje také jeden pro nás velmi významný objev, tzv. *casus irreducibilis*.[3] Tato čísla obsahující odmocniny ze záporných čísel, budoucí komplexní čísla, se objevují i u kvadratických rovnic, jak si Cardano při svém studiu rovnic správně všiml. Pro jejich „nesmyslnost“ je ale odsoudil a označil jako „neužitečná“.

1.1.2 Rozvoj představ o komplexních číslech

Na Cardanovo dílo navázal později Rafael Bombelli (1530-1590), další z matematiků na univerzitě v Bologni, který v roce 1572 vydal třísvazkový spis *l’Algebra*. V této knize Bombelli uvedl výpočet odmocnin pomocí řetězových zlomků, pravidla pro počítání se zápornými čísly a pro počítání s odmocninami ze záporných čísel, které na rozdíl od Cardana sice považoval za čísla, ale nadále je označoval jako neužitečná. Ve své práci rozlišil čísla $+\sqrt{-1}$ a $-\sqrt{-1}$ a pro počítání s nimi zavedl osm pravidel, v současné symbolice vyjádřené jako:

$$(+1)(+i) = +i; \quad (-1)(+i) = -i; \quad (+1)(-i) = -i; \quad (-1)(-i) = +i;$$
$$(+i)(+i) = -1; \quad (+i)(-i) = 1; \quad (-i)(+i) = 1; \quad (-i)(-i) = -1.$$

Postupem času s těmito zvláštními čísly počítalo stále více matematiků. Běžně je začal používat například Thomas Harriot (1560-1621) nebo Albert Girard (1595-1632). Druhý ze jmenovaných v roce 1629 vydal knihu *L'Invention nouvelle en l'algèbre*, ve které připustil, že kubické rovnice mají, formálně vzato, záporné a „nemožné“ (komplexní) kořeny a jejich používání dokonce zdůvodnil. Přesto je odmítal jako užitečné a plnohodnotné řešení rovnic. Vedle toho také formuloval tzv. *základní větu algebry*, která nutně znamená uznání záporných a komplexních čísel.

[2] Když bylo Niccolovi šest let, byl zraněn francouzskými vojáky při plenění vesnice. Měl rozseknutá ústa a klenbu ústní dutiny. Zranění sice přežil, ale špatně srostlé rány mu způsobily vadu řeči a přinesly mu přízvisko Tartaglia, „Koktal“. Přesto se stal výborným matematikem, hlavně díky své píli a samostudiu. Jeho přínosem je mimo jiné i první překlad Euklidových *Základů* do italštiny a šestidílný kurz matematiky *General Trattato de numeri e misure* (1556).

[3] Případ, kdy se v Cardanově vzorci vyskytují odmocniny ze záporného čísla, přestože má rovnice reálné kořeny.

Také René Descartes (1596-1650) odmítl uznat tato čísla jako plnohodnotné řešení rovnic a jejich výskyt považoval za znamení neřešitelnosti problému. Označil je jako *„imaginární“* (1637, ve spise *La Géométrie*) a tento název výrazům, obsahujícím odmocninu ze záporných čísel, už zůstal. Ani Isaac Newton (1643-1727) či Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), ačkoliv s nimi běžně pracovali, nechápali podstatu komplexních čísel ani jejich význam. Leibniz o nich dokonce tvrdil, že jsou *„divem analýzy, netvorem světa idejí a obojživelníkem mezi bytím a nebytím“*.[4]

Prvním, kdo se více zabýval pochopením komplexních čísel, byl anglický matematiky John Wallis (1616-1703). Tento profesor Oxfordské univerzity věnoval pozornost hlavně otázkám číselných interpretací. Ve své *Treatise of algebra* uznal záporná čísla a jako první naznačil smysluplnou geometrickou interpretaci komplexních čísel. Jeho myšlenka o vztahu těchto čísel s body roviny ale bohužel neměla velký ohlas.

Jinak tomu bylo u výzkumu Abrahama de Moivre (1667-1754). Tento francouzský vědec, který opustil Francii po zrušení Ediktu nantského (1685) a přesídlil do Anglie, vycházel z poznatků Rodgera Cotese[5] (1682-1716). V roce 1722 zveřejnil formuli, dnes známou jako Moivreův vzorec:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\ \sin n\varphi.$$

Číslo n užité v této formuli mohlo být podle Moivrea pouze kladné. Důkaz platnosti formule pro všechna reálná čísla provedl až Leonhard Euler (1707-1783). Tento matematik se, kromě Moivreovy formule, zabýval problémy s logaritmy, o kterých si v letech 1727-1731 dopisoval s Johannem Bernoullim (1667-1748). Euler svými výpočty odhalil vztah mezi exponenciálou, logaritmem a goniometrickými funkcemi a roku 1740 stanovil, že funkce

$$y = 2\cos x \quad \text{a} \quad y = e^{ix} + e^{-ix}$$

náleží téže diferenciální rovnici a musí si být rovny. Toto pozorování zveřejnil v roce 1743 jako vzorce:

$$\cos t = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin t = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Nakonec dospěl i k formuli, kterou již dříve objevil R. Cotes, a v roce 1748 publikoval spis *Introductio in analysin infinitorum*, kde uvedl mimo jiné i vztah

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Sám Euler vyjadřoval komplexní čísla pomocí goniometrického tvaru

$$x + yi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

a chápal je jako body roviny s kartézskými souřadnicemi x, y a kořeny rovnice $z^n = 1$ reprezentoval jako vrcholy pravidelného n-úhelníka. Vedle již zmíněného od Eulera pochází také označení imaginární jednotky (do té doby značené jako $\sqrt{-1}$) symbolem i (1777). Eulerova práce vedla k rozvoji teorie funkcí komplexní proměnné, které se věnoval například Jean-Baptist le Rond d'Alembert (1717-1783). Koncem 18. století se komplexní čísla už běžně používala k počítání a byla uznávána jako téměř plnohodnotná čísla. Chybělo už „jen“ objevit smysluplnou geometrickou interpretaci.

Jak už bylo zmíněno, první kdo se geometrickou interpretací komplexních čísel zabýval, byl anglický matematik John Wallis. Podobný osud jako jeho dílo měla i práce norského kartografa a geodeta Caspara Wessela (1745-1818) nazvaná *Om Directionens analytiske Betegning, et Forsøg anvendt fornemmeling til plane og sphaeriske Polygoners Opløsning* (1799). Ve spolupráci s Dánskou akademií věd je zde rozpracován vektorový počet v rovině a zavedena geometrická interpretace komplexních čísel a jejich operací jako bodů či vektorů v rovině. C. Wessel dále zavedl imaginární osu, vektory reprezentoval jako komplexní čísla a operace s vektory prováděl jako operace s komplexními čísly. Dospěl také ke goniometrickému tvaru komplexního čísla a

---

[4] Z dopisu Leibnitze Christiaanu Huygensovi (1629-1695) roku 1675.

[5] Byl první, kdo poznamenal vztah $-i\varphi = \ln(cos\ \varphi - i\ sin\ \varphi)$ v traktátu *Logometria* (1714). Jeho formule se ale nestala všeobecně známou a podobně jako Wallisova práce zcela zapadla.

k Moivreově větě. Jeho práce, snad proto, že ji psal dánsky, zcela zapadla. Přeložena byla až po sto letech, v roce 1897, do francouzštiny a v angličtině poprvé vyšla až roku 1999.[6]

Zásadní zlom ve vztahu ke komplexním číslům přišel až v roce 1799, kdy Carl Friedrich Gauss (1779-1855) zveřejnil první důkaz tzv. *základní věty algebry*. Pozice komplexních čísel byla posílena a na počátku 19. století se geometrickou představou komplexních čísel zabývalo hned několik matematiků současně. Ve Francii to byl Lazare Nicolas Marquerite Carnot (1753-1823), který ve svých pracích diskutoval problematiku záporných a komplexních čísel. Od něj pochází i termín „*komplexní číslo*“. Jeho myšlenky ovlivnily dalšího francouzského matematika žijícího v Londýně, abbého Adriena-Quentina Buéeho (1748-1826). Ten si uvědomoval rozdíl mezi znakem operace a znaménkem čísla. Tvrdil, že číslo má svou „velikost“ a svůj „směr“, přičemž „velikost“ lze chápat aritmeticky a „směr“ geometricky. Symbol i považoval za znak kolmosti a číslo $a + bi$ bral jako vektor v rovině. Své poznatky vydal v roce 1806, ale jeho dílo zastínila práce vydaná v témže roce v Paříži pod názvem *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*. Tato kniha švýcarského matematika Jeana Roberta Arganda (1768-1822) vyvolala v letech 1813-1814 velkou diskusi o povaze a chápání komplexních čísel. Argand vyslovil podobné myšlenky jako Caspar Wessel či abbé Buée a interpretoval symbol i jako otočení roviny o $90°$ inspirován rovností $i \cdot i = -1$. Mimo to zavedl dodnes užívaný termín „*modul*“, resp. „*modulus*“ pro absolutní hodnotu.

Z dalších matematiků, kteří psali o geometrické interpretaci komplexních čísel, jmenujme anglického Johna Warrena (1768-1822) a francouzského C. V. Moureya. Oba nezávisle na ostatních matematicích v roce 1828 publikovali podobné poznatky, nicméně zůstali v pozadí věhlasnějších jmen. Dílo Warrena ale později ovlivnilo výzkum irského matematika, sira Williama R. Hamiltona (1805-1865). Mezitím Augustin Louis Cauchy (1789-1857) a Siméon-Denis Poisson (1781-1840) publikovali své práce o funkcích komplexní proměnné a o integraci v komplexní rovině.[7]

Vývoj představ o geometrické interpretaci komplexních čísel nakonec dovršil Carl Friedrich Gauss.[8] Komplexním číslům se dostalo všeobecného uznání po vydání Gaussovy práce *Theoria residuorum biquadraticorum* v roce 1831. Rovina komplexních čísel, kterou Gauss zavedl, je proto dodnes nazývána po něm.[9] Komplexní čísla ztratila tajuplnost a byla zavedena základní aritmetika komplexních čísel daná algebraicky:

$$(x + yi) + (x' + y'i) = (x + x') + (y + y')i,$$
$$(x + yi) \cdot (x' + y'i) = (xx' - yy') + (xy' + yx')i,$$

nebo v goniometrickém tvaru pro násobení:

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi') = rr'(\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')),$$

kde r znamená *modul* (normu) komplexního čísla.

Gaussovo pojetí komplexních čísel upravil William Rowan Hamilton v roce 1833. Komplexní čísla zavedl jako dvojice reálných čísel s operacemi sčítání a násobení a takto upravenou aritmetickou teorii komplexních čísel publikoval v roce 1837 jako druhou část práce *Theory of conjugate functions, or algebraic couples; with a preliminary and elementary essey on algebra as the science of pure time*. Vedle toho zde uvedl tzv. *zákon modulů*

$$\|\alpha\| \cdot \|\beta\| = \|\alpha \cdot \beta\|,$$

kde $\alpha = x + yi$ a $\|\alpha\| = x^2 + y^2$.

[6] V angličtině dílo dostalo název *On the Analytic Representation of Direction: An Attempt*.

[7] Léta 1825-1850 jsou brána jako počátek moderní komplexní analýzy.

[8] Geometrické představy komplexních čísel využil již v roce 1799 ve své disertaci, při důkazu tzv. *základní věty algebry*.

[9] I když podobnou představu prezentoval již v roce 1821 A. L. Cauchy.

1.2 Historie kvaternionů

1.2.1 Prehistorie

Chceme-li zkoumat vývoj kvaternionů, je třeba se napřed vrátit sto let před W. R. Hamiltona, kterému je jejich objev připisován. Základní ideu kvaternionového násobení totiž znal už L. Euler. Svědčí o tom jeho dopis Christianu von Goldbachovi z roku 1748, ve kterém uvádí skládání čtveřic reálných čísel odpovídající násobení kvaternionů.[10] Součin čtveřic reálných čísel znal také C. F. Gauss, který si své poznatky nechával pro sebe, a Olinde Rodrigues (1795-1851), který jej využíval pro popis obecných rotací.

Nicméně vývoj vedoucí k objevu kvaternionů skutečně započal až po zavedení algebry komplexních čísel, přesněji v roce 1831, kdy Gauss ve svém díle *Theoria residuorum biquadraticorum* zaznamenal problém rozšíření komplexních čísel na větší číselný obor, ve kterém by stále platily všechny aritmetické zákony (tj. *axiomy komutativního tělesa*). Tímto problémem se přirozeně začali matematikové zabývat ihned po vyřešení otázek týkajících se komplexních čísel. Postupně se rodila *teorie hyperkomplexních čísel* založená na procesu *„zdvojení“*[11] a úvahách o strukturách vícesložkových čísel. Touto problematikou se zabývali například George Peacock (1791-1858), Augustus De Morgan (1806-1871) Arthur Caley (1821-1895) či bratři Charles a John Thomas Gravesovi (1810-1860 a 1806-1870). První jmenovaný již v roce 1834 uvedl v díle *Report on the Recent Progress and Present State of Certain Branches of Analysis* myšlenku, že algebry mohou být konstruovány axiomaticky, bez ohledu na jejich určenou interpretaci. De Morgan na to navázal v roce 1841, kdy publikoval *On the Foundation of Algebra*. V tomto díle zavedl symbolickou algebru pro vysvětlení operací specifických algeber s ohledem na sčítání, odčítání, násobení a dělení, jednotkový a nulový prvek, komutativnost, asociativnost, distributivnost a axiom rovnosti (tj. zabýval se definicí komutativního tělesa a jeho axiomy).

Vraťme se nyní k *teorii hyperkomplexních čísel*. Bylo jasné, že sčítání ve struktuře vícesložkových čísel bude prováděno po složkách a že bude mít všechny potřebné vlastnosti (tj. bude asociativní, komutativní, bude existovat nulový prvek a čísla opačná). Násobení v této struktuře bylo třeba definovat tak, aby splňovalo všechny, nebo alespoň téměř všechny, aritmetické zákony. Takový požadavek ovšem stanovení definice násobení velice komplikoval. Někteří matematici se snažili rozšířit obor komplexních čísel na větší číselný obor, jiní brali problém obecněji a studovali struktury hyperkomplexních čísel bez požadavku vlastností jiných číselných oborů.

1.2.2 Algebra trojic

Bylo přirozené, že hledání oboru hyperkomplexních čísel se, po úspěchu pro $n = 2$ (obor komplexních čísel), zaměřil na $n = 3$, tedy na „aritmetizaci bodů trojrozměrného prostoru“. První pokusy o takovou aritmetizaci lze nalézt již v 18. století v práci C. Wessela. Tato práce, jak víme, ovlivnila výzkum W. R. Hamiltona. Ten se po roce 1837, kdy publikoval reprezentaci komplexních čísel jako dvojice reálných čísel, zaměřil na nalezení rozumného vzorce pro násobení trojic reálných čísel (a, b, c), resp. trojsložkových čísel. Ta začal po doporučení svého přítele Charlese Gravese psát jako $a + bi + cj$, kde $a = a \times 1 = a \times (1,0,0)$, $i = (0,1,0)$, $j = (0,0,1)$. Podle tohoto měla být čísla $1, i, j$ základ nové struktury a čísla i, j jakési nové jednotky. Při definování operací sčítání a násobení Hamilton zachoval přirozenou definici pro sčítání a definici pro modul

[10] Tento fakt vzpomenul Wilhelm Blaschke (1885-1962) u příležitosti oslav 250 let od Eulerova narození.
[11] Způsob, jakým Hamilton „vytvořil“ komplexní čísla z čísel reálných.

($\|a + bi + cj\| = a^2 + b^2 + c^2$), ale nalézt takové násobení, které by zachovalo distributivnost vzhledem ke sčítání a navíc splňovalo *zákon modulů*, se mu nedařilo.[12]

Hamilton bral v úvahu, že je násobení definované jako
$$(a_1, b_1, c_1) \times (a_2, b_2, c_2) = (a_1 + b_1 i + c_1 j) \times (a_2 + b_2 i + c_2 j) =$$
$$= a_1 a_2 + b_1 b_2 i^2 + c_1 c_2 j^2 + b_1 c_2\, ij + c_1 b_2 ji + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i + (a_1 c_2 + c_1 a_2) j.$$
Problémem u takového násobení se stala čísla i^2, j^2, ij a ji. Usoudil, že $i^2 = j^2 = -1$, ale netušil, co má dělat s čísly ij a ji v algebře trojic. Snažil se najít případ, kdy jsou si tyto součiny rovny, pokoušel se s nimi počítat. Pro příklad uveďme pokus položit $ij = ji = 1$ a zároveň s tím zachovat pravidlo $i^2 = j^2 = -1$. Potom:
$$(a_1, b_1, c_1) \times (a_2, b_2, c_2) =$$
$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 + b_1 c_2 + c_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i + (a_1 c_2 + c_1 a_2) j$$
Položíme-li nyní $(a_1, b_1, c_1) = (0,1,1) = (a_2, b_2, c_2)$ dostaneme následující:
$$(0,1,1) \times (0,1,1) = (0 - 1 - 1 + 1 + 1) + (0)i + (0)j = 0.$$

Ač o to nestál, vycházely mu stále ze součinu dvou nenulových čísel i nuly. Takové struktury, ve kterých nelze bez omezení dělit, Hamiltona neskutečně rozčilovaly. Ani u hledání součinu, který by splňoval *zákon modulů*, se mu nevedlo lépe. Nakonec se v roce 1843 rozhodl svůj téměř třináctiletý boj s trojicemi vzdát[13] a zaměřit se na čtveřice reálných čísel s jednotkami i, j, k (tj. čísla $a + bi + cj + dk$).

1.2.3 Kvaterniony

Je jasné, že Hamilton nehodlal zahodit svůj dlouholetý výzkum a zpočátku se snažil algebru čtveřic naroubovat na nepodařený pokus s trojicemi. Pohrával si s myšlenkou položit $i^2 = -1$, $j^2 = -1$ a $ij = k = -ji$, kde číslo k je zatím nedefinovaná konstanta rovná 1 nebo -1 (Hamilton tak byl prvním, kdo zvážil použití nekomutativního násobení). Použil nově definované vztahy na násobení obecných trojic, ale místo nové trojice mu vycházela čtveřice, u které si nebyl jist, zda ji lze vyjádřit jako trojici. Nakonec tento problém na čas odložil a zabýval se funkčností *zákona modulů*. Ale ani zde nedospěl k uspokojivému výsledku. Kriticky poznamenal, že součin dvou trojic bude skutečně čtveřice. Vzhledem k tomu, co mu stále vycházelo, si Hamilton uvědomil, že jeho trojice jsou jen určitým „degenerovaným“ případem toho, co nazýval *„kvaterniony“* (tj. čtveřice (a, b, c, d) nad základními čísly $1, i, j, k$).

Hamilton se dále trojicemi nezabýval a rozhodl se pokračovat v upevnění pravidel pro *„kvaterniony“*. Zachoval předpoklad, že $i^2 = -1, j^2 = -1$ a $ij = k = -ji$, ale nyní musel vypočítat hodnoty ik, ki, jk, kj a k^2. Protože pracoval se vztahem $ij = k = -ji$, usoudil, že ani ik a ki nebo jk a kj nebudou nutně komutativní. Předpokládal ale, že nová algebra bude zachovávat zákon asociativity a tak stanovil následující:
$$ki = j = -ik; \qquad jk = i = -kj; \qquad k^2 = -1.$$

Poslední vzorec, násobení čtyř základních jednotek $1, i, j, k$, Hamilton objevil dne 16. října 1843, když šel, v doprovodu své ženy, na zasedání Královské irské akademie podél Royal Canal v Dublinu. Blízko Broughamského mostu dostal nápad jak vyřešit zbývající problém. Nadšen svým objevem vzal Hamilton kapesní nožík a formuli
$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

[12] Na svůj boj s trojicemi vzpomínal Hamilton roku 1865 v dopise svému synovi Archibaldovi. Připomínal mu, jak se ho s bratrem ptali u každé snídaně roku 1843, zda již umí násobit trojice a on musel s politováním říci, že ne.
[13] Dnes již víme, že jeho boj byl marný (viz [3]).

kterou měl zatím jen v hlavě, vyryl do kamene Broughamského mostu (dnes toto místo označuje pamětní deska).[14] Třináct let dlouhá cesta od komplexních čísel ke kvaternionům úspěšně skončila.

Zbytek svého života Hamilton zasvětil zkoumání nových čísel, jejich vlastnostem a aplikaci.[15] Byl tak nadšen svým objevem, že o kvaternionech začal přednášet v Královské akademii věd ještě téhož roku a své výsledky publikoval na pokračování v sérii *On quaternions; or on a new systém of imaginaries in algebra*, která vycházela v letech 1844-1850. Právem se domníval, že kvaterniony jsou nejmenším rozšířením komplexních čísel a očekával od nich stejně důležité výsledky. Dokázal pro kvaterniony platnost aritmetických zákonů (ovšem s výjimkou komutativity pro násobení). V roce 1846 publikoval spis, ve kterém představil pojmy „*skalární*“ a „*vektorová*“ část pro reálnou a imaginární složku kvaternionů a zavedl i značení těchto dvou částí. Dále v tomto spise řešil případ násobení kvaternionů, které mají „*skalární*“ část rovnou nule. O rok později získal dvě ceny za svůj výzkum (první od Královské irské akademie a druhou od Královské společnosti Edinburghu).

Hamilton poté napsal ještě dvě rozsáhlé monografie o kvaternionech. V první z nich, nazvané *Lectures on quaternions*[16] (1853), zveřejňuje veškeré dosavadní objevy, co se kvaternionů týče, mimo jiné také fakt, že pomocí kvaternionů lze vyjádřit třírozměrný vektorový prostor nad tělesem reálných čísel (položil tím základy vektorového počtu). Tato práce obsahovala také jeho objev *skalárního* a *vektorového* násobení, které Hamilton definoval jako části součinu dvou obecných kvaternionů.

Jak již bylo zmíněno, Hamilton měl velká očekávání od kvaternionů. Jeho představy ani představy jeho následovníků, kteří se pokoušeli o geometrickou reprezentaci kvaternionů,[17] o rozvinutí matematiky založené na kvaternionech se nenaplnily. Význam komplexních čísel zůstal nepřekonán, i když nelze popřít, že kvaterniony mají své místo, zvláště pak ve vyjadřování 3D rotací.

---

[14] O svém objevu, psal hned druhý den svému příteli Johnovi T. Gravesovi, který problematiku kvaternionů pochopil velmi rychle. „Nová“ čísla ho zaujala natolik, že ještě v prosinci téhož roku nalezl další systém hyperkomplexních čísel s osmi základními jednotkami. Svůj objev publikoval až v roce 1848, kdy už byl znám stejný obor sestrojený nezávisle na Gravesovi A. Caleyem (1845). Tato čísla dnes nazýváme jako oktávy, oktoniony či Caleyho oktety.

[15] Jejich těleso se, z úcty k jejich objeviteli, dnes označuje písmenem $\mathbb{H}$.

[16] Druhá kniha, *Elements of quaternions*, byla vydána roku 1866.

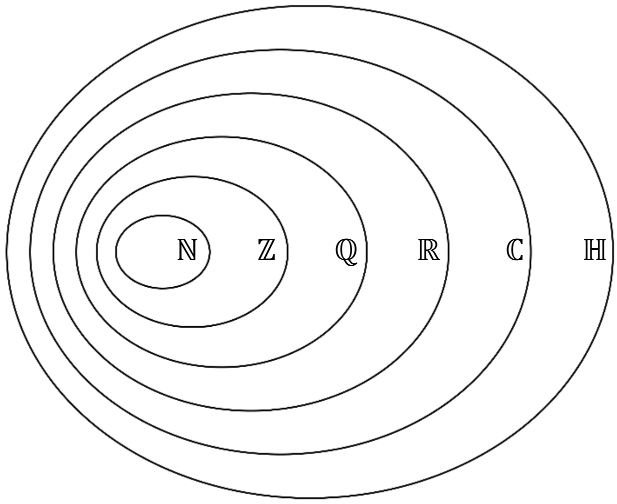
[17] Z prací na toto téma uveďme dílo W. F. Donkina *On the geometrical interpretation of quaternions* (1850).

2 Úvodní pojmy:

Předtím, než se začneme zabývat tělesem komplexních čísel a tělesem kvaternionů, je třeba zavést základní pojmy. Nejprve ale připomeňme nejdůležitější množiny čísel a jejich značení. Symbolem $\mathbb{N}$ značíme množinu všech přirozených čísel a symbolem $\mathbb{Z}$ značíme množinu čísel celých. Množina přirozených čísel je podmnožinou $\mathbb{Z}$. Nadmnožinu celých čísel budeme značit $\mathbb{Q}$ a její prvky nazývat racionální čísla. Tato čísla lze zapisovat jako podíl dvou celých čísel. Vedle racionálních čísel existují čísla iracionální, která jako podíl dvou celých čísel vyjádřit nelze (protože mají neukončený a neperiodický desetinný rozvoj). Sjednocením čísel racionálních a iracionálních získáme množinu $\mathbb{R}$, jejíž prvky nazýváme reálná čísla. Existují ještě další nadmnožiny množiny $\mathbb{R}$, jmenujme například množinu $\mathbb{C}$ a $\mathbb{H}$. O těch budeme mluvit v následujících kapitolách. Pro jmenované množiny platí vztah

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H},$$

který pro názornost uvádíme na Obrázku 2.1.



Obrázek 2.1 Vztahy mezi množinami $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

Poznámka:

- Číslo 0 budeme chápat jako prvek množiny přirozených čísel, tj. $0 \in \mathbb{N}$.

Nyní uvedeme nejdůležitější pojmy, které budeme běžně používat v následujících kapitolách bez odkazu na příslušné definice.

Definice 2.1: Nechť $\mathcal{A}$ je neprázdná množina. **Operaci (binární)** na množině budeme chápat jako zobrazení množiny $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ do množiny $\mathcal{A}$. Je-li $*$ operace na množině $\mathcal{A}$, pak pro všechna $x, y \in \mathcal{A}$ budeme místo $*\big((x,y)\big)$ psát $x * y$.

Poznámka:

- Je-li na libovolné neprázdné množině $\mathcal{A}$ definována binární operace $*$, pak říkáme, že je množina $\mathcal{A}$ **uzavřená vzhledem k operaci** $*$.

Definice 2.2: Nechť $\mathcal{A}$ je neprázdná množina a $*,\circ$ jsou binární operace na $\mathcal{A}$. Pak budeme uspořádanou dvojici (resp. trojici) $(\mathcal{A},*)$ (resp. $(\mathcal{A},\circ,*)$) nazývat **algebraickou strukturou (algebrou)** s jednou operací (resp. se dvěma operacemi).

Definice 2.3: Nechť $*,\circ$ jsou binární operace na $\mathcal{A}$ a $x, y, z \in \mathcal{A}$ jsou libovolné prvky. Potom

(i) algebraická struktura $(\mathcal{A},*)$ je **asociativní**, právě když platí
$$x * (y * z) = (x * y) * z.$$
(ii) algebraická struktura $(\mathcal{A},*)$ je **komutativní**, právě když platí
$$x * y = y * x.$$
(iii) algebraická struktura $(\mathcal{A},*,\circ)$ je $(*,\circ)$ **- distributivní**, právě když platí
$$x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z) \quad \wedge \quad (y * z) \circ x = (y \circ x) * (z \circ x).$$
(iv) prvek $e \in \mathcal{A}$ je **neutrální** vzhledem k operaci $*$, právě když platí
$$e * x = x \quad \wedge \quad x * e = x.$$
(v) prvek $\bar{x}$ je **inverzní** k prvku x vzhledem k operaci $*$, právě když platí
$$x * \bar{x} = e \quad \wedge \quad \bar{x} * x = e.$$

Poznámka:

- Existuje-li v algebraické struktuře $(\mathcal{A},*)$ prvek neutrální (resp. inverzní), budeme ji nazývat **algebraickou strukturou s neutrálním (resp. inverzním) prvkem**.
- Každá struktura má nejvýše jeden neutrální prvek a pro každou asociativní strukturu existuje ke každému prvku nejvýše jeden inverzní prvek.
- Prvek, který má k sobě prvek inverzní, nazýváme **invertibilním** prvkem.
- Velmi často u binárních operací narazíme na **multiplikativní** (resp. **aditivní**) symboliku. V takovém případě se binární operace značí $\cdot$ (resp. $+$) a nazýváme ji **násobení** (resp. **sčítání**). Neutrální prvek e potom nazýváme **jednotkovým** (resp. **nulovým**) a značíme jej 1 (resp. 0). Prvek $\bar{x}$ inverzní k x značíme x^{-1} (resp. $-x$).

Definice 2.4: Nechť $(\mathcal{A},*)$ je algebraickou strukturou s jednou binární operací. Pak ji budeme nazývat

(i) **grupoid**, je-li uzavřená vzhledem k operaci $*$.
(ii) **pologrupa**, je-li asociativním grupoidem.
(iii) **monoid**, je-li pologrupou s neutrálním prvkem.
(iv) **grupa**, je-li pologrupou s neutrálním prvkem a inverzními prvky.

Poznámka:

- Je-li navíc grupa komutativní, nazýváme ji **Abelova (abelovská) grupa**.
- Pro komutativní pologrupu platí navíc obecný komutativní zákon.
- V libovolné grupě platí pro každé x, y:
$$\overline{(\bar{x})} = x \quad \wedge \quad \overline{(xy)} = \bar{y} \cdot \bar{x}.$$

Definice 2.5: Nechť $(\mathcal{A},*)$ je algebraická struktura. Pak řekneme, že

(i) struktura $(\mathcal{A},*)$ je s **krácením**, právě když
$$(\forall x, y, z \in \mathcal{A})\ x * y = x * z \Longrightarrow y = z \quad \wedge \quad (\forall x, y, z \in \mathcal{A})\ y * x = z * x \Longrightarrow y = z$$
(pak říkáme, že lze prvkem x krátit ve struktuře $(\mathcal{A},*)$).
(ii) struktura $(\mathcal{A},*)$ je s **dělením**, právě když
$$(\forall x, y \in \mathcal{A})(\exists z, z' \in \mathcal{A})\ z * x = y \ \wedge \ x * z' = y$$
(pak říkáme, že prvkem x lze dělit ve struktuře $(\mathcal{A},*)$).

Poznámka:

- Existují-li ve vztahu (ii) jediná $z, z' \in \mathcal{A}$, pak říkáme, že struktura je s **jednoznačným dělením**.

Definice 2.6: Nechť $(\mathcal{A},*)$, $(\mathcal{B},\circ)$ jsou struktury. Pak $\mathcal{B}$ je **podstrukturou** $\mathcal{A}$, právě když platí:

(1) $\mathcal{B} \neq \emptyset \quad \wedge \quad \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$;
(2) Operace $\circ$ je restrikcí operace $*$, tj. platí
$$(\forall x, y \in \mathcal{B})\ x * y = x \circ y.$$

Definice 2.7: Nechť $(\mathcal{A},*)$, $(\mathcal{B},\circ)$ jsou struktury. Říkáme, že zobrazení $f\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ je **homomorfní** (**homomorfismus**) struktury $(\mathcal{A},*)$ na strukturu $(\mathcal{B},\circ)$, pokud platí

(1) f je surjekce (zobrazení množiny $\mathcal{A}$ na množinu $\mathcal{B}$);
(2) $(\forall x, y \in \mathcal{A})\ f(x * y) = f(x) \circ f(y)$.

Je-li navíc zobrazení f prosté (tj. je-li f bijekce), pak je to zobrazení **izomorfní** (**izomorfismus**).

Poznámka:

- V homomorfním zobrazení $f\colon (\mathcal{A},*) \longrightarrow (\mathcal{B},\circ)$ platí:
  - $f(e_{\mathcal{A}}) = e_{\mathcal{B}}$;
  - $(\forall x \in \mathcal{A})\ f(\bar{x}) = \overline{f(x)}$.
  - Je-li $*$ komutativní (resp. asociativní) operací, pak i operace $\circ$ je komutativní (resp. asociativní) operací.
- Homomorfním obrazem grupy je grupa.
- Je-li $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ izomorfní zobrazení, je zobrazení f^{-1} také izomorfismus. Pak říkáme, že struktury $(\mathcal{A},*)$, $(\mathcal{B},\circ)$ jsou **vzájemně izomorfní** a píšeme $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

Definice 2.8: Nechť $(\mathcal{A},*)$, $(\mathcal{B},\circ)$ jsou struktury. Řekneme, že $(\mathcal{B},\circ)$ lze **izomorfně vnořit** do $(\mathcal{A},*)$, pokud existuje podstruktura struktury $(\mathcal{A},*)$ taková, že je vzájemně izomorfní se strukturou $(\mathcal{B},\circ)$. Pak píšeme $(\mathcal{B},\circ) \lhd (\mathcal{A},*)$.

Definice 2.9: Nechť $(\mathcal{A},\circ,*)$ je algebraická struktura se dvěma binárními operacemi. Pak tuto strukturu budeme nazývat

(i) **polookruh**, je-li struktura $(\mathcal{A},\circ)$ komutativní pologrupa, $(\mathcal{A},*)$ je pologrupa a struktura $(\mathcal{A},\circ,*)$ je $(\circ,*)$ - distributivní.
(ii) **okruh**, je-li struktura $(\mathcal{A},\circ)$ Abelova grupa, $(\mathcal{A},*)$ je pologrupa a struktura $(\mathcal{A},\circ,*)$ je $(\circ,*)$ - distributivní.

Definice 2.10: Nechť $(\mathcal{A},\circ,*)$ je okruh a $a, b \in \mathcal{A}$ jsou libovolné prvky a $a \neq e_\circ, b \neq e_\circ$. Tyto prvky a, b nazýváme **dělitelé nuly**, právě když platí

$$a * b = e_\circ.$$

Definice 2.11: Nechť $(\mathcal{A},\circ,*)$ je okruh. Pak jej budeme nazývat

(i) **obor integrity**, pokud je $(\mathcal{A},\circ,*)$ netriviální, komutativní, s jednotkovým prvkem a bez dělitelů nuly.
(ii) **těleso**, je-li struktura $(\mathcal{A} \setminus \{e_\circ\},*)$ grupa.
(iii) **pole**, pokud je $(\mathcal{A},\circ,*)$ komutativní těleso.

Podobně jako u struktur s jednou operací můžeme definovat podstrukturu také u struktur se dvěma operacemi:

Definice 2.12: Nechť $(\mathcal{A},\circ,*)$, $(\mathcal{B},\star,\diamond)$ jsou struktury. Pak $\mathcal{B}$ je **podstrukturou** $\mathcal{A}$, právě když platí:

(1) $\mathcal{B} \neq \emptyset \quad \wedge \quad \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$;
(2) $\mathcal{B}$ je uzavřená vzhledem k operacím $\circ,*$ a platí

$$(\forall x, y \in \mathcal{B})\ x \circ y = x \star y \ \wedge\ x * y = x \diamond y$$

(tj. operace $\star$ je restrikcí operace $\circ$ a operace $\diamond$ je restrikcí operace $*$).

Definice 2.13: Nechť $(\mathcal{A},\circ,*)$, $(\mathcal{B},\star,\diamond)$ jsou polookruhy. Říkáme, že zobrazení $f\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ je **homomorfní** (**homomorfismus**) struktury $(\mathcal{A},\circ,*)$ na strukturu $(\mathcal{B},\star,\diamond)$, pokud platí

(1) f je surjekce;
(2) $(\forall x, y \in \mathcal{A})\ f(x \circ y) = f(x) \star f(y) \ \wedge\ (\forall x, y \in \mathcal{A})\ f(x * y) = f(x) \diamond f(y)$.

Je-li zobrazení f bijekce, pak jej nazýváme **izomorfním** (**izomorfismem**). Struktury $(\mathcal{A},\circ,*)$, $(\mathcal{B},\star,\diamond)$ jsou potom **vzájemně izomorfní** a píšeme $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

Poznámka:

- V homomorfním zobrazení $f: (\mathcal{A},\circ,*) \longrightarrow (\mathcal{B},\star,\diamond)$ platí:
    - pokud existují $e_\circ, e_*$, pak
    $$f(e_\circ) = e_\star \;\wedge\; f(e_*) = e_\diamond;$$
    - pokud pro $x \in \mathcal{A}$ existují prvky $\overline{x_\circ}, \overline{x_*}$ pak
    $$f(\overline{x_\circ}) = \overline{f(x)_\star} \;\wedge\; f(\overline{x_*}) = \overline{f(x)_\diamond}$$
    - Je-li $\circ$ (resp. $*$) komutativní operací, pak i operace $\star$ (resp. $\diamond$) je komutativní.
    - Je-li $\circ$ (resp. $*$) asociativní operací, pak i operace $\star$ (resp. $\diamond$) je asociativní.

Definice 2.14: Nechť $(\mathcal{A},\circ,*)$, $(\mathcal{B},\star,\diamond)$ jsou struktury. Řekneme, že $(\mathcal{B},\star,\diamond)$ lze **izomorfně vnořit** do $(\mathcal{A},\circ,*)$, pokud existuje podstruktura struktury $(\mathcal{A},\circ,*)$ taková, že je vzájemně izomorfní se strukturou $(\mathcal{B},\star,\diamond)$. Pak píšeme $(\mathcal{B},\star,\diamond) \lhd (\mathcal{A},\circ,*)$.

Poznámka:

- Nechť $(\mathcal{A},*)$, resp. $(\mathcal{A},\circ,*)$, je algebraická struktura s jednou, resp. se dvěma operacemi. Nadále budeme operaci $\circ$ značit aditivně „$+$“ a operaci $*$ budeme značit multiplikativně„$\cdot$“. Strukturu $(\mathcal{A},*)$, resp. $(\mathcal{A},\circ,*)$ nyní budeme chápat jako strukturu $(\mathcal{A},\cdot)$, resp. $(\mathcal{A},+,\cdot)$.

Definice 2.15: Nechť struktura $(\mathcal{T},+,\cdot)$ je pole a $\mathcal{V}$ je neprázdná množina. Množinu $\mathcal{V}$, na které je definováno

(i) **Sčítání:** $\big(\forall \underline{u},\underline{v} \in \mathcal{V}\big)\,\big(\exists!\, \underline{z} \in \mathcal{V}\big)\; \underline{u} + \underline{v} = \underline{z};$

(ii) **Násobení prvkem z $\mathcal{T}$:** $(\forall \alpha \in \mathcal{T})\,\big(\forall \underline{u} \in \mathcal{V}\big)\; \alpha\underline{u} \in \mathcal{V},$

nazveme **vektorovým prostorem nad polem $\mathcal{T}$**, právě když splňuje následující vlastnosti:

(1) struktura $(\mathcal{V},+)$ je komutativní grupou;

(2) násobení prvkem z $\mathcal{T}$ je asociativní, tj.
$$(\forall \alpha,\beta \in \mathcal{T})\,\big(\forall \underline{u} \in \mathcal{V}\big)\; (\alpha\beta)\underline{u} = \alpha\big(\beta\underline{u}\big);$$

(3) definované sčítání a násobení je distributivní:
$$(\forall \alpha,\beta \in \mathcal{T})\,\big(\forall \underline{u} \in \mathcal{V}\big)\; (\alpha+\beta)\underline{u} = \alpha\underline{u} + \beta\underline{u},$$
$$(\forall \alpha \in \mathcal{T})\,\big(\forall \underline{u},\underline{v} \in \mathcal{V}\big)\; \alpha\big(\underline{u}+\underline{v}\big) = \alpha\underline{u} + \alpha\underline{v};$$

(4) ve struktuře $\mathcal{V}$ existuje jednotkový prvek vzhledem k násobení prvkem z $\mathcal{T}$:
$$\big(\forall \underline{u} \in \mathcal{V}\big)\; 1\cdot\underline{u} = \underline{u}.$$

Poznámka:

- Prvky $\mathcal{V}$ nazýváme **vektory**.
- Prvky $\mathcal{T}$ nazýváme **skaláry**.
- Neprázdnou podmnožinu $\mathcal{W}$ vektorového prostoru $\mathcal{V}$ nad polem $\mathcal{T}$ nazveme vektorovým **podprostorem prostoru** $\mathcal{V}$, právě když je $\mathcal{W}$ vektorovým prostorem nad polem $\mathcal{T}$ spolu s operacemi definovanými prostoru $\mathcal{V}$ (tj. pro každé $\alpha \in \mathcal{T}$ a každé $\underline{u},\underline{v} \in \mathcal{W}$ je $\underline{u}+\underline{v} \in \mathcal{W}$, $\alpha\underline{u} \in \mathcal{W}$).
- Lineárně nezávislý systém (soubor) vektorů, který generuje celý prostor $\mathcal{V}$ nazýváme **bází vektorového prostoru $\mathcal{V}$**. Počet jeho prvků nazýváme **dimenzí prostoru $\mathcal{V}$**, kterou značíme $dim\mathcal{V}$.
- Vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ resp. nad $\mathbb{C}$ nazveme reálným, resp. komplexním vektorovým prostorem.

Definice 2.16: Vektorový prostor $\mathcal{V}$ nad $\mathbb{R}$ nazveme **vektorovým prostorem se skalárním součinem**, právě když je na něm definováno zobrazení $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ (skalární součin), které dvojici vektorů $\underline{u}, \underline{v} \in \mathcal{V}$ přiřazuje skalár $\underline{u} \cdot \underline{v} \in \mathbb{R}$ tak, že platí následující vztahy:

(1) **symetrie**: $(\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathcal{V})\ \underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$;

(2) **pozitivita**: $(\forall \underline{u} \in \mathcal{V})\ \underline{u} \cdot \underline{u} \geq 0 \quad \wedge \quad (\underline{u} \cdot \underline{u} = 0 \Leftrightarrow \underline{u} = 0)$;

(3) **bilinearita**: $(\forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathcal{V})\ (\underline{u} + \underline{v}) \cdot \underline{w} = \underline{u} \cdot \underline{w} + \underline{v} \cdot \underline{w}$,
$(\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathcal{V})\ (\forall r \in \mathbb{R})\ (r\underline{u}) \cdot \underline{v} = r(\underline{u} \cdot \underline{v})$.

Poznámka:

- Nechť $\mathcal{V}$ je vektorový prostor se skalárním součinem a $\mathcal{W}$ je jeho libovolný podprostor. Pak vektorový podprostor prostoru $\mathcal{V}$
$$\mathcal{W}^{\perp} = \{\underline{w} \in \mathcal{V}; (\forall \underline{u} \in \mathcal{W})\ \underline{w} \cdot \underline{u} = 0\}$$
budeme nazývat ortogonálním doplňkem podprostoru $\mathcal{W}$ v prostoru $\mathcal{V}$. Navíc platí
$$\mathcal{W} + \mathcal{W}^{\perp} = \mathcal{V}.$$

Definice 2.17: Nechť $\mathcal{V}$ je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Zobrazení $\|\cdot\|: \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ budeme nazývat **normou (absolutní hodnotou)** prvku prostoru $\mathcal{V}$, pokud splňuje podmínky:

(1) $(\forall \underline{u} \in \mathcal{V})\ \|\underline{u}\| \geq 0 \quad \wedge \quad (\|\underline{u}\| = 0 \Leftrightarrow \underline{u} = 0)$;

(2) $(\forall \underline{u} \in \mathcal{V})\ (\forall r \in \mathbb{R})\ \|\underline{u} \cdot r\| = \|\underline{u}\| \cdot |r|$;

(3) $(\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathcal{V})\ \|\underline{u} + \underline{v}\| \leq \|\underline{u}\| + \|\underline{v}\|$.

Definice 2.18: Nechť $\mathcal{V}$ je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ se skalárním součinem. Pak **normu** definujeme takto:
$$(\forall \underline{u} \in \mathcal{V})\ \|\underline{u}\| = \sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u}}.$$

Poznámka:

- Vektor s normou jedna ($\|\underline{u}\| = 1$) nazýváme **unitární** (jednotkový) **vektor**.

Definice 2.19: Nechť $\mathcal{V}$ je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, na kterém je definovaná norma. Pak tato **norma indukuje konkrétní skalární součin**:
$$(\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathcal{V})\ \underline{u} \cdot \underline{v} = \frac{1}{2}\left(\|\underline{u} + \underline{v}\|^2 - \|\underline{u}\|^2 - \|\underline{v}\|^2\right).$$

Definice 2.20: Reálný vektorový prostor $\mathcal{A}$ dimenze n budeme nazývat **reálnou algebraickou strukturou dimenze n**, jestliže jsou na množině $\mathcal{A}$ definovány binární operace „$+$“, „$\cdot$“, které splňují podmínky

(1) $(\forall x, y, z \in \mathcal{A})\ x \cdot (y + z) = xy + xz,\ \ (x + y) \cdot z = xz + yz$;

(2) $(\forall x, y \in \mathcal{A})\ (\forall r \in \mathbb{R})\ r(xy) = x(ry) = (rx)y$.

Definice 2.21: Nechť $\mathcal{A}$ je reálná algebraická struktura s normou $\|\cdot\|$. Strukturu $\mathcal{A}$ budeme nazývat **normovanou**, pokud norma $\|\cdot\|$ splňuje podmínku
$$(\forall x, y \in \mathcal{A})\ \|x \cdot y\| = \|x\| \cdot \|y\|.$$

Definice 2.22: Reálnou algebraickou strukturu $\mathcal{A}$ nazveme **podílovou strukturou**, pokud pro $\forall x, y \in \mathcal{A}$ takové, že $xy = 0$, platí
$$x = 0 \ \vee \ y = 0.$$

Poznámka:

- Každá normovaná struktura je zároveň podílová.

Definice 2.23: Nechť $\mathcal{A}$ je normovaná algebraická struktura. Potom vektorový prostor nad polem $\mathbb{R}$, který je generovaný jednotkovým prvkem struktury $\mathcal{A}$ nazveme **reálná část** struktury $\mathcal{A}$ (značíme $\mathbb{R}e(\mathcal{A})$). Ortogonální doplněk k $\mathbb{R}e(\mathcal{A})$ nazýváme **imaginární složka** struktury $\mathcal{A}$ (značíme $Im(\mathcal{A})$).
Každý prvek $x \in \mathcal{A}$ lze jednoznačně vyjádřit jako součet prvků z $\mathbb{R}e(\mathcal{A})$ a $Im(\mathcal{A})$:

$$x = \mathbb{R}e(x) + Im(x),$$

kde $\mathbb{R}e(x) \in \mathbb{R}e(\mathcal{A})$ a nazývá se **reálná část** prvku x. $Im(x) \in Im(\mathcal{A})$ a vyjadřuje **imaginární část** x.

Definice 2.24: Nechť $\mathcal{A}$ je algebraická struktura a nechť na $\mathcal{A}$ existuje zobrazení $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$, které každému prvku $x = \mathbb{R}e(x) + Im(x) \in \mathcal{A}$ přiřazuje prvek

$$x^* = \big(\mathbb{R}e(x) + Im(x)\big)^* = \mathbb{R}e(x) - Im(x)$$

a pro libovolné prvky $x, y \in \mathcal{A}$ splňuje podmínky:

(i) $(x^*)^* = x$;
(ii) $(xy)^* = y^*x^*$.

Pak takové zobrazení budeme nazývat **konjugace** a o struktuře $\mathcal{A}$ budeme mluvit jako o **struktuře s konjugací**.

Poznámka:

- Je zřejmé, že platí
$$\mathbb{R}e(x) = \frac{1}{2}(x + x^*), \qquad Im(x) = \frac{1}{2}(x - x^*).$$
- Algebraická struktura $\mathcal{A}$ je **reálná**, právě když pro $\forall x \in \mathcal{A}$ platí:
$$x = x^*.$$

Definice 2.25: Algebraická struktura $\mathcal{A}$ je **pěkně normovaná**, pokud pro $\forall x \in \mathcal{A}$ takový, že $x \neq 0$ platí

(1) $x + x^* \in \mathbb{R}$;
(2) $xx^* = x^*x \quad \wedge \quad x^*x > 0$.

Poznámka:

- Algebraická struktura $\mathcal{A}$ je alternativní, právě když pro $\forall a, b \in \mathcal{A}$ platí
$$(aa)b = a(ab), (ba)a = b(aa), (ab)a = a(ba)$$
(to znamená, že alternativita je oslabením asociativity).
- Je-li algebraická struktura $\mathcal{A}$ pěkně normovaná a alternativní, pak je normovaná algebra s dělením.

Definice 2.26: Nechť $\mathcal{A}$ je pěkně normovaná algebraická struktura. Potom **norma** každého prvku $x \in \mathcal{A}$ je rovna

$$\|x\| = \sqrt{xx^*}.$$

Poznámka:

- Je jasné, že $\|x\|^2 = xx^*$.

Věta 2.1: Nechť $\mathcal{A}$ je pěkně normovaná algebraická struktura. Pak pro nenulový prvek $x \in \mathcal{A}$ existuje **prvek inverzní** ve tvaru

$$x^{-1} = \frac{x^*}{\|x\|^2}.$$

2.1 Caley-Dicksonova konstrukce

Tato konstrukce (někdy uváděná jako Caley-Dicksonův proces) se používá pro konstrukci algebraických struktur komplexních čísel, kvaternionů či oktáv. Lze s ní vytvořit posloupnost algebraických struktur, která vychází ze struktury reálných čísel takzvaným zdvojováním. Na Caley-

Dicksonově konstrukci je zajímavé to, že s každou aplikací na libovolnou algebraickou strukturu ztratíme některou z vlastností původní struktury. Caley-Dicksonovu konstrukci zavedeme nejprve obecně, následující Větou 2.1.1.

Věta 2.1.1: Nechť $\mathcal{A}$ je pěkně normovaná algebraická struktura s konjugací. Položme $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \times \mathcal{A}$, kde prvky $\mathcal{A}'$ jsou uspořádané dvojice prvků z $\mathcal{A}$, tedy

$$\mathcal{A}' = \{(x, y); x, y \in \mathcal{A}\}.$$

Dále definujme pro $\forall (x, y), (w, z) \in \mathcal{A}'$ operace sčítání, násobení a konjugace předpisy

(1) $(x, y) + (w, z) = (x + w, y + z)$;
(2) $(x, y) \cdot (w, z) = (xw - z^* y, yw^* + zx)$;
(3) $(x, y)^* = (x^*, -y)$.

Pak platí:

(i) $\mathcal{A}'$ je pěkně normovaná algebraická struktura s konjugací.
(ii) Algebraická struktura $\mathcal{A}$ je přirozeným způsobem vnořena do struktury $\mathcal{A}'$ zobrazením, které každému $x \in \mathcal{A}$ přiřazuje prvek $(x, 0) \in \mathcal{A}'$.

Poznámka:

- Pro $\forall a, b \in \mathcal{A}'$, kde $a = (x, y), b = (w, z)$ platí
  (1) $\|a\|^2 = \|(x, y)\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$;
  (2) $a = \mathbb{R}e(a) + I(a)$, kde $\mathbb{R}e(a) = \frac{1}{2}(a + a^*) \in \mathbb{R}$ a $I(a) = \frac{1}{2}(a - a^*) \in \mathcal{A}' \setminus \mathbb{R}$;
  (3) $a \cdot b = \frac{1}{2}(\|a + b\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2)$.

Definice 2.1.1: Sestrojení algebraické struktury $\mathcal{A}'$ ze struktury $\mathcal{A}$ nazýváme **Caley-Dicksonovou konstrukcí** (procesem) a strukturu $\mathcal{A}'$ nazýváme **Caleyho interací** struktury $\mathcal{A}$.

Poznámka:

- Podle Caley-Dicksonovy konstrukce dostáváme interace:
  $\mathbb{R}' \cong \mathbb{C}$, tj. komplexní čísla;
  $\mathbb{R}'' \cong \mathbb{C}' \cong \mathbb{H}$, tj. kvaterniony;
  $\mathbb{H}' \cong \mathbb{O}$, tj. oktoniony.
- $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ jsou jediné podílové, normované algebraické struktury.
- Všechny podílové struktury jsou dimenze $1, 2, 4$, nebo 8.

Věta 2.1.2: Nechť $\mathcal{A}$ je pěkně normovaná algebraická struktura a $\mathcal{A}'$ její Caleyho interace. Pak je $\mathcal{A}'$

(i) komutativní, právě když $\mathcal{A} \cong \mathbb{R}$.
(ii) asociativní, právě když je $\mathcal{A}$ komutativní a asociativní.
(iii) alternativní, právě když je $\mathcal{A}$ asociativní.
(iv) pěkně normovaná, právě když je $\mathcal{A}$ alternativní.

Poznámka:

- Podle Věty 2.1.2 platí, že $\mathbb{R}$ je komutativní a asociativní pěkně normovaná, $\mathbb{C}$ je komutativní a asociativní pěkně normovaná, $\mathbb{H}$ je asociativní pěkně normovaná a $\mathbb{O}$ je alternativní pěkně normovaná algebraická struktura.

3 Komplexní čísla

3.1 Konstrukce tělesa komplexních čísel

Věta 3.1.1: Nechť $\mathbb{R}$ je komutativní těleso reálných čísel. Položme $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, kde prvky $\mathbb{C}$ jsou uspořádané dvojice reálných čísel, tedy

$$\mathbb{C} = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Dále definujme pro $\forall (x, y), (w, z) \in \mathbb{C}$ operace sčítání a násobení předpisy

(1) $(x, y) + (w, z) = (x + w, y + z)$;

(2) $(x, y) \cdot (w, z) = (xw - zy, yw + zx)$;

Pak struktura $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je komutativní těleso.

Důkaz:

(a) $(\mathbb{C}, +)$ je abelovská grupa:

- Nechť $(x, y), (w, z) \in \mathbb{C}$ jsou libovolné prvky. Protože $x, y, w, z \in \mathbb{R}$, tedy $x + w, y + z \in \mathbb{R}$, pak $(x, y) + (w, z) \in \mathbb{C}$ a množina $\mathbb{C}$ je uzavřená vzhledem k operaci sčítání.
- Nechť $(r, s), (x, y), (w, z) \in \mathbb{C}$ jsou libovolné prvky. Pak
$$[(r, s) + (x, y)] + (w, z) = (r + x, s + y) + (w, z) = \big((r + x) + w, (s + y) + z\big) =$$
$$= \big(r + (x + w), s + (y + z)\big) = (r, s) + [(x, y) + (w, z)],$$
tedy struktura $(\mathbb{C}, +)$ je asociativní.
- Analogicky bychom dokázali, že struktura $(\mathbb{C}, +)$ je komutativní.
- Nechť $(x, y) \in \mathbb{C}$ je libovolný prvek. Pak
$$(x, y) + (0,0) = (x + 0, y + 0) = (x, y),$$
tedy prvek $(0,0)$ je neutrální (nulový) prvek struktury $(\mathbb{C}, +)$.
- Nechť $(x, y) \in \mathbb{C}$ je libovolný prvek. Pak také $(-x, -y) \in \mathbb{C}$ a platí
$$(x, y) + (-x, -y) = (x - x, y - y) = (0,0),$$
tedy prvek $(-x, -y)$ je inverzní (opačný) prvek struktury $(\mathbb{C}, +)$.

(b) Analogicky bychom dokázali, že $(\mathbb{C}, \cdot)$ je komutativní pologrupa s neutrálním (jednotkovým) prvkem $(1,0)$.

(c) Struktura $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je $(+, \cdot)$ - distributivní:

- Nechť $(r, s), (x, y), (w, z) \in \mathbb{C}$ jsou libovolné prvky. Pak
$$[(r, s) + (x, y)] \cdot (w, z) = (r + x, s + y) \cdot (w, z) =$$
$$= \big((r + x)w - (s + y)z, (r + x)z + (s + y)w\big) =$$
$$= (rw + xw - sz - yz, rz + xz + sw + yw) =$$
$$= (rw - sz, rz + sw) + (xw - yz, xz + yw) =$$
$$= (r, s) \cdot (w, z) + (x, z) \cdot (w, z),$$
tedy struktura $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je $(+, \cdot)$ - distributivní.

(d) Ke každému nenulovému prvku z $\mathbb{C}$ existuje vzhledem k operaci násobení v množině $\mathbb{C}$ prvek inverzní:

- Nechť $(x, y) \in \mathbb{C}$ je libovolný prvek takový, že $(x, y) \neq (0,0)$. Hledáme prvek $(w, z) \in \mathbb{C}$ takový, že
$$(x, y) \cdot (w, z) = (1,0).$$
Pak
$$(xw - yz, xz + yw) = (1,0) \;\Rightarrow\; xw - yz = 1 \;\wedge\; xz + yw = 0.$$

Úpravou dostaneme

$$z = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad \wedge \quad x^2 + y^2 \neq 0 \ (x \neq 0 \vee y \neq 0),$$
$$w = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \wedge \quad x^2 + y^2 \neq 0 \ (x \neq 0 \vee y \neq 0).$$

Tedy ke každému nenulovému prvku $(x, y) \in \mathbb{C}$ existuje v $(\mathbb{C},\cdot)$ prvek inverzní tvaru

$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right).$$

□

Věta 3.1.2: Těleso reálných čísel $\mathbb{R}$ lze izomorfně vnořit do tělesa $(\mathbb{C}, +,\cdot)$.

Důkaz: viz [6].

Poznámka:

- Protože je těleso reálných čísel $\mathbb{R}$ izomorfně vnořeno do tělesa $\mathbb{C}$, můžeme ztotožnit vzory a obrazy, tj. můžeme psát
$$(\forall x \in \mathbb{R})\ x = (x, 0).$$

Věta 3.1.3: Těleso $(\mathbb{C}, +,\cdot)$ je pěkně normované.

Důkaz: viz [2].

Věta 3.1.4: Binomická rovnice $x^2 + 1 = 0$ má v tělese $(\mathbb{C}, +,\cdot)$ řešení.

Důkaz: viz [76].

3.2 Definice a vlastnosti komplexních čísel

Definice 3.2.1: Těleso $(\mathbb{C}, +,\cdot)$ zkonstruované z tělesa reálných čísel, ve kterém je rovnice $x^2 + 1 = 0$ řešitelná, nazýváme **tělesem komplexních čísel.** Jeho prvky (tj. uspořádané dvojice reálných čísel) budeme nazývat **komplexní čísla**.
Komplexní číslo $(0,1)$ se nazývá **imaginární jednotka** a značí se i. Pro tuto jednotku platí
$$i^2 = -1.$$

Poznámka:

- Těleso komplexních čísel je reálná algebraická struktura dimenze 2 s bází $\mathcal{B} = [1, i]$, které nelze uspořádat.
- Těleso komplexních čísel je až na izomorfismus jediná struktura, která je minimálním rozšířením struktury $\mathbb{R}$ a ve kterém je rovnice $x^2 + 1 = 0$ řešitelná.
- Rovnice $x^2 + 1 = 0$ má v tělese komplexních čísel právě dvě řešení, a to $\pm i$.
- Pro imaginární jednotku i platí:
$$i^2 = -1,\ \ i^3 = -i,\ \ i^4 = 1.$$
Obecně pro libovolné $n \in \mathbb{N}$:
$$i^{4n+1} = i,\ \ i^{4n+2} = -1,\ \ i^{4n+3} = -i,\ \ i^{4n} = 1.$$

Věta 3.2.1: Každé komplexní číslo lze psát ve tvaru
$$z = a + bi,$$
kde a, b jsou reálná čísla.

Poznámka:

- Platnost Věty 3.2.1 je zřejmá z definice komplexního čísla a imaginární jednotky:
$$(\forall a, b \in \mathbb{R})\ (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, b)(0,1) = a + bi.$$
- Výraz $z = a + bi$ budeme nazývat **algebraickým** (nebo také **kartézským**) **tvarem** komplexního čísla.

- Je-li $z = a + bi$ libovolné komplexní číslo a
  1. $b = 0$, pak číslo z nazýváme **reálné**.
  2. $b \neq 0$, pak z nazveme **imaginární číslo**. Je-li navíc $a = 0$ mluvíme o z jako o **ryze imaginárním čísle**.
- Komplexní čísla v algebraickém tvaru sčítáme a násobíme jako dvojčleny, tj. je-li $z = a + bi$ a $v = c + di$, pak
$$z + v = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$
$$zv = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Definice 3.2.2: Je-li $z = a + bi$ libovolné komplexní číslo, pak reálné číslo a se nazývá **reálná část** komplexního čísla z a reálné číslo b se nazývá **imaginární část** komplexního čísla z. Značíme $a = \mathbb{R}ez, b = Imz$.

Věta 3.2.2: Pro každé $z, v \in \mathbb{C}$, kde $z = a + bi$ a $v = c + di$, platí:

(1) $\mathbb{R}e(z \pm v) = \mathbb{R}ez \pm \mathbb{R}ev, \ Im(z \pm v) = Imz \pm Imv$;
(2) $(\forall t \in \mathbb{R}) \ \mathbb{R}e(tz) = t \cdot \mathbb{R}ez$;

Definice 3.2.3: Nechť $z = a + bi$ je libovolné komplexní číslo. Komplexní číslo
$$z^* = a - bi$$
se nazývá **komplexně sdružené číslo** k číslu z.

Poznámka:

- Číslo $z^* = a - bi$ nazýváme také **konjugované** k číslu z.

Věta 3.2.3: Pro každé $z, v \in \mathbb{C}$, platí:

(1) $(z \pm v)^* = z^* \pm v^*$;
(2) $(zv)^* = z^* v^*$;
(3) $(z^*)^* = z$;
(4) $(-z)^* = -z^*$;
(5) $\left(\frac{1}{z}\right)^* = \frac{1}{z^*}$;
(6) $z^2 = z^* z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \ (tj. Imz = 0)$;
(7) $z = -z^* \ \Leftrightarrow z \notin \mathbb{R} \ (tj. \mathbb{R}ez = 0)$;
(8) $z + z^* = 2\mathbb{R}ez, \ z - z^* = 2Imzi$;
(9) $\mathbb{R}ez = \frac{z+z^*}{2}, \ Imz = \frac{z-z^*}{2i}$.

Definice 3.2.4: Nechť $z = a + bi$ je libovolné komplexní číslo. Nezáporné reálné číslo
$$\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{zz^*}$$
budeme nazývat **norma (absolutní hodnota)** komplexního čísla z.
Komplexní číslo z takové, že $\|z\| = 1$ nazveme **komplexní jednotka**.

Věta 3.2.4: Pro každé $z, v \in \mathbb{C}$, platí:

(1) $\|z\| \geq 0 \quad \wedge \quad (\|z\| = 0 \Leftrightarrow z = 0)$;
(2) $\|zv\| = \|z\| \cdot \|v\|$;
(3) $\|z\| = \|z^*\| = \|-z\|$;
(4) $|\|z\| - \|v\|| \leq \|z \pm v\| \leq \|z\| + \|v\|$;
(5) $\left\|\frac{z}{v}\right\| = \frac{\|z\|}{\|v\|}; \qquad v \neq 0$;
(6) $zz^* = \|z\|^2$;
(7) $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{z^*}{zz^*} = \frac{z^*}{\|z\|^2}$
(8) $\|z^{-1}\| = \|z\|^{-1}$.

Poznámka:

- Z Vět 3.2.3 a 3.2.4 ihned plyne, že $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je pěkně normované těleso s konjugací.

Příklad:

a) Nalezněte pro číslo $z = 4 + 3i$ číslo opačné, konjugované, inverzní a jeho normu.

b) Pro čísla $z = 4 + 3i$ a $v = 1 + i$ součet, rozdíl, součin a podíl $\frac{v}{z}$.

Řešení.

a) $-z = -4 - 3i,\ z^* = 4 - 3i,$
$\|z\| = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5,$
$z^{-1} = \frac{z^*}{zz^*} = \frac{4-3i}{(4+3i)\cdot(4-3i)} = \frac{4-3i}{25} = \frac{4}{25} - \frac{3}{25}i.$

b) $z + v = (4 + 3i) + (1 + i) = 5 + 4i,$
$z - v = (4 + 3i) - (1 + i) = 3 + 2i,$
$z \cdot v = (4 + 3i) \cdot (1 + i) = (4 - 3) + (4 + 3)i = 1 + 7i,$
$\frac{v}{z} = v \cdot z^{-1} = \frac{(1+i)\cdot(4-3i)}{25} = \frac{(4+3)+(4-3)i}{25} = \frac{7}{25} + \frac{1}{25}i.$

Poznámka:

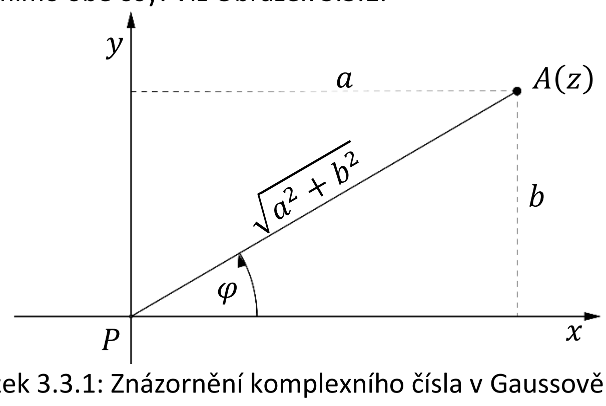
- Pro komplexní čísla lze definovat také jejich n-té mocniny, které se řídí stejnými pravidly jako reálná čísla:
  (i) Pro $(\forall n \in \mathbb{N})\ z^n = z \cdot z \cdot z \cdots z$, kde násobků z je právě n.
  (ii) $z^0 = 1,\ z^1 = z.$
  (iii) Je-li $n \in \mathbb{Z}$ a $n < 0$, pak $z^n = \left(\frac{1}{z}\right)^{-n} = \frac{1}{z^{-n}}$.

Pro praktické počítání mocnin se nejčastěji používá tzv. goniometrický tvar komplexního čísla, který uvedeme v samostatné kapitole.

3.3 Geometrická reprezentace komplexních čísel

Protože množina komplexních čísel $\mathbb{C}$ je zároveň množinou uspořádaných dvojic reálných čísel, lze každé komplexní číslo zobrazovat jako body v Kartézském souřadnicovém systému Pxy. Rovinu všech komplexních čísel nazýváme Gaussova rovina. Osu x této roviny nazýváme **osa reálná** a vyznačujeme na ní reálnou část komplexního čísla. Osu y Gaussovy roviny budeme nazývat **osou imaginární** a vyznačovat na ní budeme imaginární část komplexního čísla. Průsečík těchto os budeme označovat P (počátek).

Je-li $z = a + 0i$, pak jeho obraz v Gaussově rovině leží na reálné ose. Je-li naopak $z = 0 + bi$, pak jeho obraz leží na ose imaginární. Pokud $z = a + bi$, kde $a \neq 0$ a $b \neq 0$, pak jeho obraz v Gaussově rovině leží mimo obě osy. Viz Obrázek 3.3.1.



Obrázek 3.3.1: Znázornění komplexního čísla v Gaussově rovině

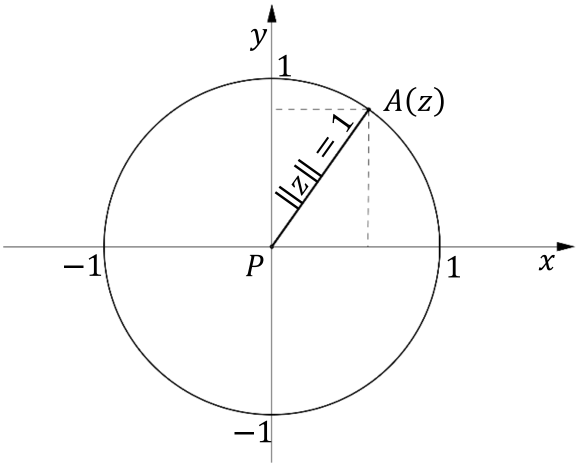
Z obrázku je jasné, že spojnice obrazu komplexního čísla a počátku P má podle Pythagorovy věty délku

$$\sqrt{|a^2| + |b^2|} = \sqrt{a^2 + b^2},$$

tedy je zřejmé, že je to **norma (absolutní hodnota)** komplexního čísla definovaná v Definici 3.2.4. Je-li číslo z komplexní jednotka, tedy

$$\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1,$$

pak množina všech takových čísel z vytvoří v Gaussově rovině **jednotkovou kružnici** se středem v počátku P. Viz Obrázek 3.3.2.



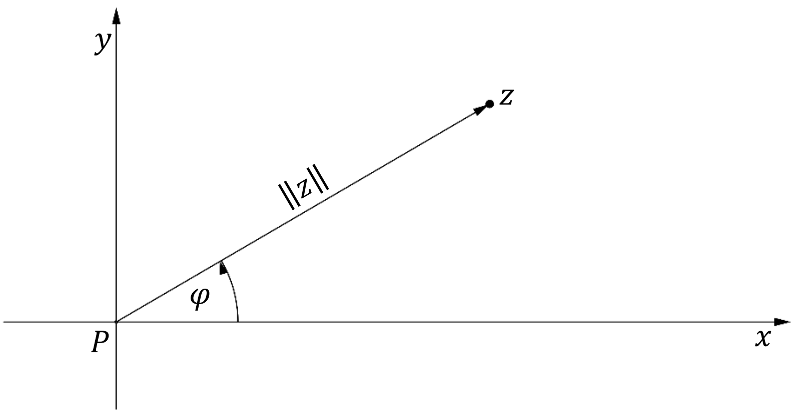
Obrázek 3.3.2: Množina všech komplexních jednotek (jednotková kružnice)

Dále ze zobrazení čísla $z = a + bi$ v Gaussově rovině plyne, že ke každému komplexnímu číslu je přiřazen orientovaný úhel φ s vrcholem v počátku P, který svírá spojnice obrazu komplexního čísla s počátkem P a kladná část reálné osy. Tento úhel budeme nazývat argument (amplituda) komplexního čísla a budeme jej značit $arg(z)$.

Věta 3.3.1: Množina všech komplexních čísel $\mathbb{C}$ tvoří vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$, který je izomorfní s euklidovským vektorovým prostorem $\mathbb{R}^2$.

Důkaz: viz [2].

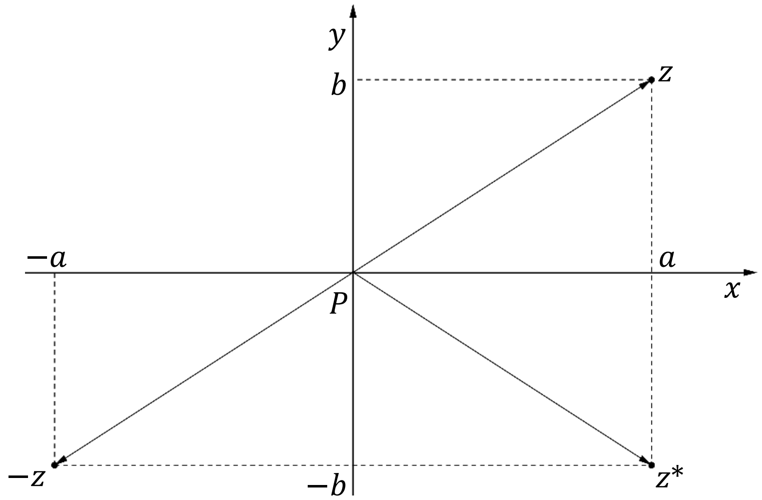
Ke každému komplexnímu číslu je tedy přiřazen právě jeden polohový vektor, stejně tak každému vektoru z $\mathbb{R}^2$ lze přiřadit právě jedno komplexní číslo. Velikost vektoru je rovna normě příslušného komplexního čísla (viz Obrázek 3.3.1).



Obrázek 3.3.1: Komplexní číslo jako vektor

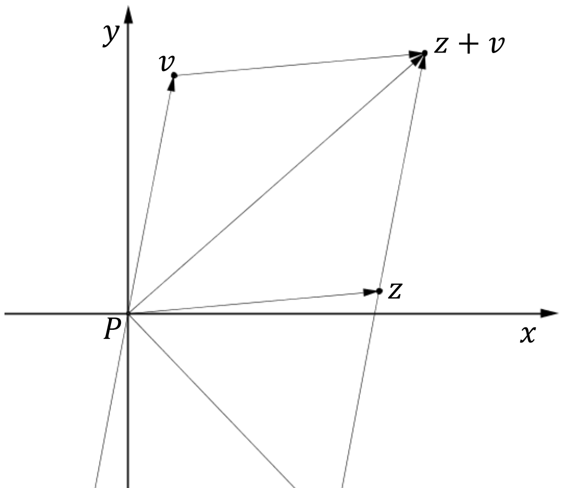
Protože lze ztotožňovat komplexní číslo s vektorem, lze v Gaussově rovině znázornit vlastnosti operace s komplexními čísly:

1. Je-li $z = a + bi$ zobrazeno v Gaussově rovině, pak čísla $-z, z^*$ jsou po řadě osově a středově souměrná s číslem z (viz Obrázek 3.3.2).



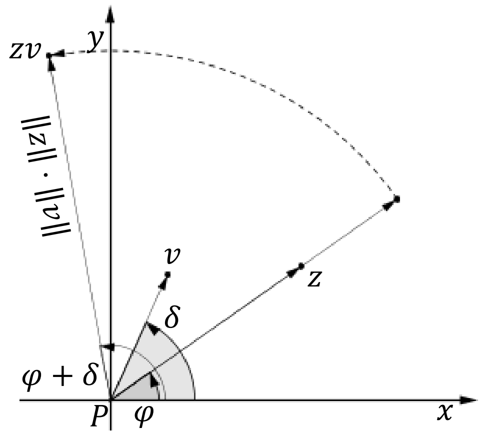
Obrázek 3.3.2: Obrazy čísel $-z, z^*$

2. Operace sčítání a odčítání komplexních čísel z, v znázorníme jako součet a rozdíl příslušných polohových vektorů (viz Obrázek 3.3.3).

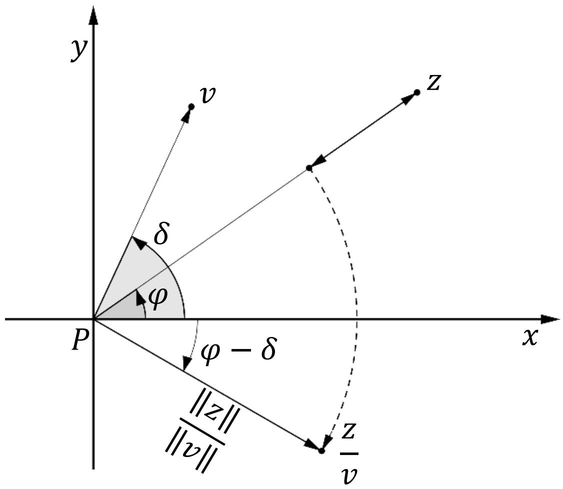


Obrázek 3.3.3: Sčítání a odčítání komplexních čísel v Gaussově rovině

3. Násobení a dělení komplexních čísel lze rovněž znázornit v Gaussově rovině. K tomu je zapotřebí znalost argumentů a norem násobených (dělených) čísel. Příklady znázornění těchto operací jsou na Obrázku 3.3.4 a 3.3.5.



Obrázek 3.3.4: Násobení v Gaussově rovině



Obrázek 3.3.5: Dělení v Gaussově rovině

Poznámka:

- Ze zobrazení násobení a dělení je jasné, že lze tyto operace chápat jako složení stejnolehlosti a rotace o konkrétní úhel kolem počátku P.
- Speciálními případy jsou násobení reálným či ryze imaginárním číslem a násobení komplexní jednotkou:
    1. Násobíme-li komplexní číslo $z = a + bi$ libovolným reálným číslem r, pak je výsledkem číslo rz, které má stejný směrový vektor jako číslo z. Změní se pouze norma o násobek r.
    2. Násobíme-li číslo $z = a + bi$ imaginární jednotkou, pak se norma z nezmění a obraz z se otočí kolem počátku P v kladném smyslu o pravý úhel.
    3. Je-li číslo $z = a + bi$ násobeno ryze imaginárním komplexním číslem v, pak se jeho norma zvětší o násobek normy čísla v a výsledný obraz se otočí kolem počátku P v kladném směru o pravý úhel.
    4. Je-li číslo $z = a + bi$ násobeno komplexní jednotkou, pak se norma z nezmění a obraz z se otočí o argument komplexní jednotky.

Nejběžnější geometrické interpretace úkonů s komplexními čísly lze zapsat následující větou:

Věta 3.3.2: Nechť $v, z \in \mathbb{C}$ jsou libovolná komplexní čísla. Pak transformaci, která je dána pravidlem:

(i) $z \longmapsto z^*$ odpovídá **osová souměrnost** podle osy x.
(ii) $z \longmapsto -z$ odpovídá **středová souměrnost** podle počátku$P$.
(iii) $z \longmapsto v + z$ odpovídá **posunutí** o vektor čísla v.

(iv) $z \longmapsto rz$, kde $r \in \mathbb{R}, r \neq 0$, odpovídá **stejnolehlost** se středem v počátku P a koeficientem r.
(v) $z \longmapsto kz$, kde k je komplexní jednotka, odpovídá **otočení** kolem počátku$P$ o argument čísla k.
(vi) $z \longmapsto vz$, kde $v \in \mathbb{C}, v \neq 0$, odpovídá **složení** stejnolehlosti a otočení kolem počátku P.

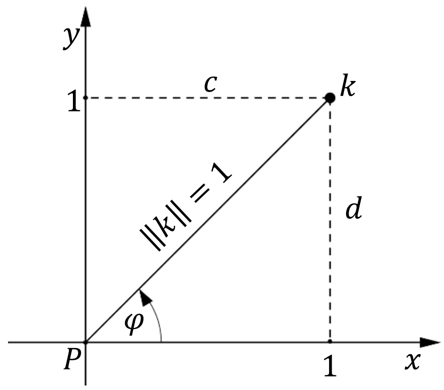
3.4 Goniometrický a exponenciální tvar komplexních čísel

V Gaussově rovině lze vyjádřit komplexní čísla dvěma způsoby:
1. Pomocí souřadnic reálné a imaginární osy roviny.
2. Pomocí normy komplexního čísla a jeho argumentu.

První způsob již známe (je jím algebraický tvar komplexního čísla). Podívejme se nyní na druhý způsob vyjádření komplexních čísel, tedy pomocí normy a argumentu. Nejprve se zaměříme na komplexní jednotky, které mají normu rovnou jedné.

Věta 3.4.1: Nechť $k \in \mathbb{C}$ je komplexní jednotka. Pak lze toto číslo psát ve tvaru
$$k = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$
kde φ je argument komplexní jednotky k.

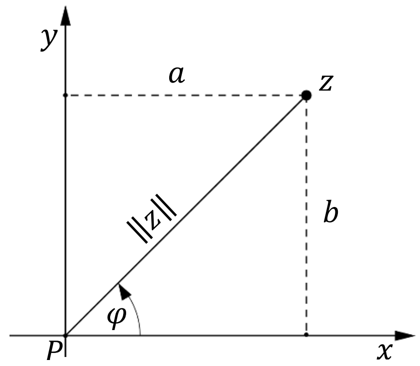
Důkaz:
Vycházejme ze zobrazení komplexní jednotky v Gaussově rovině (viz Obrázek 3.4.1). Víme, že komplexní jednotka má normu rovnou jedné a proto hned platí, že je-li $k = c + di$ komplexní jednotka, pak
$$c = \cos\varphi \cdot 1, \quad d = \sin\varphi \cdot 1.$$
Dosadíme-li tyto rovnosti za c, d získáme opravdu tvar $k = \cos\varphi + i\sin\varphi$. □



Obrázek 3.4.1

Poznámka:
- Pro násobení komplexních jednotek platí
$$(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot (\cos\delta + i\sin\delta) = \cos(\varphi + \delta) + i\sin(\varphi + \delta).$$

Nyní Větu 3.4.1 zobecníme pro všechna komplexní čísla:
Je-li $z = a + bi$ libovolné komplexní číslo, pak podle Obrázku 3.4.2 platí:
$$a = \cos\varphi \cdot \|z\|, \quad b = \sin\varphi \cdot \|z\|.$$
Dosadíme-li do $z = a + bi$, získáme tvar
$$z = \cos\varphi \cdot \|z\| + i \cdot \sin\varphi \cdot \|z\|.$$
Prostou úpravou získáme
$$z = \|z\|(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi).$$
Tím jsme dokázali následující větu:



Obrázek 3.4.2

Věta 3.4.2: Je-li $z \in \mathbb{C}$ libovolné komplexní číslo. Pak jej lze zapisovat
$$z = \|z\|(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi).$$

Poznámka:

- Tvar popsaný ve Větě 3.4.2 budeme nazývat **goniometrický (polární) tvar komplexního čísla** z.
- Je jasné, že $\cos\varphi = \frac{a}{\|z\|}$ a $\sin\varphi = \frac{b}{\|z\|}$. Protože jsou funkce sin a cos periodické s periodou 2π, není úhel φ jednoznačně určen. V praxi proto budeme počítat pouze s jedinou hodnotou, a to s úhlem z intervalu $\langle 0,2\pi\rangle$. Tento úhel budeme značit $Arg(z)$.
- Je-li $z = 0$, pak $\|z\| = 0$ a $Arg(z)$ není jednoznačně určen.

Příklad: Vyjádřete číslo $z = 2 + 2i$ v goniometrickém tvaru.
Řešení.

- Nejprve musíme najít normu a argument čísla z:
  $\|z\| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$;
  $\cos\varphi = \frac{a}{\|z\|} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$;
  $\sin\varphi = \frac{b}{\|z\|} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$;
  $\varphi = \frac{\pi}{4}$.
- Goniometrický tvar tedy bude
  $z = \sqrt{8}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Jsou-li komplexní čísla z, v v goniometrickém tvaru, lze pro ně lehce zavést operace sčítání a dělení.

Věta 3.4.3: Jsou-li z, v libovolná komplexní čísla, kde $z = \|z\|(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ a $v = \|v\|(\cos\delta + i \cdot \sin\delta)$, pak platí:

(i) $zv = \|z\| \cdot \|v\| \cdot (\cos(\varphi+\delta) + i \cdot \sin(\varphi+\delta))$.

(ii) $\frac{z}{v} = \frac{\|z\|}{\|v\|} \cdot (\cos(\varphi-\delta) + i \cdot \sin(\varphi-\delta))$, kde $v \neq 0$.

Důkaz: viz [17].

Poznámka:

- Podíváme-li se zpět na znázornění těchto operací v Gaussově rovině, je jasné, že Věta 3.4.3 skutečně platí (viz Obrázek 3.3.4 a 3.3.5).
- Pro libovolná dvě nenulová čísla z, v navíc platí:
  (1) $Arg\left(\frac{1}{z}\right) = Arg(z^*) = -Arg(z)$;
  (2) $Arg(-z) = \pi + Arg(z)$.

S vyjádřením komplexního čísla v goniometrickém tvaru lze spojit zavedení komplexního čísla v exponenciálního tvaru. Při odvozování tohoto tvaru vyjdeme z Eulerových vzorců:

(1) $e^{it} = \cos t + i \sin t\,, t \in \mathbb{R}$;

(2) $e^{-it} = \cos t - i \sin t\,, t \in \mathbb{R}$.

Máme-li libovolné komplexní číslo $z = \|z\|(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$, lze položit $\varphi = t$. Potom

$$z = \|z\|\, e^{it}.$$

Věta 3.4.4: Pro libovolné nenulové komplexní číslo $z \in \mathbb{C}$ platí

$$z = \|z\|\, e^{i\varphi}.$$

Poznámka:

- Pro libovolná dvě komplexní čísla z, v psaná v exponenciálním tvaru $z = \|z\|\, e^{i\varphi}, v = \|v\|\, e^{i\delta}$ platí
  (1) $zv = \|z\| \cdot \|v\|\, e^{i(\varphi+\delta)}$;
  (2) $\frac{z}{v} = \frac{\|z\|}{\|v\|}\, e^{i(\varphi-\delta)}$.
- Dále je-li $\varphi \in \mathbb{R}$, pak platí:
  (1) $\left\|e^{i\varphi}\right\| = 1$;
  (2) $e^{-i\varphi} = \frac{1}{e^{i\varphi}} = \left(e^{i\varphi}\right)^*$;
  (3) $Arg\left(e^{i\varphi}\right) = \varphi$.

Jsou-li komplexní čísla psána v goniometrickém či exponenciálním tvaru, lze pro ně jednoduše definovat jejich n-tou mocninu. Výpočet n-té mocniny komplexních čísla lze sice provádět, je-li komplexní číslo v algebraickém tvaru, ale tento postup je velmi zdlouhavý a náročný[18]:

Příklad: Nalezněte čtvrtou mocninu čísla $z = 3 + i$.
Řešení.
$z^4 = (3+i)^4 = 81 + 108i + 54(-1) + 12(-i) + 1 = 28 + 96i.$

Pro vyšší mocniny se proto pro jednoduchost používá goniometrický nebo exponenciální tvar komplexního čísla. Vzorec pro výpočet n-tých mocnin v těchto tvarech lze odvozovat pomocí Moivreovy formule[19] nebo pomocí součinu komplexních čísel (viz [76] nebo [17]).

[18] Výpočet n-té mocniny komplexního čísla v algebraickém tvaru provádíme jako n-tou mocninu dvojčlenu podle binomické věty. Protože se umocňuje také imaginární jednotka, musí se výsledek následně upravit zpět do tvaru $a + bi$.

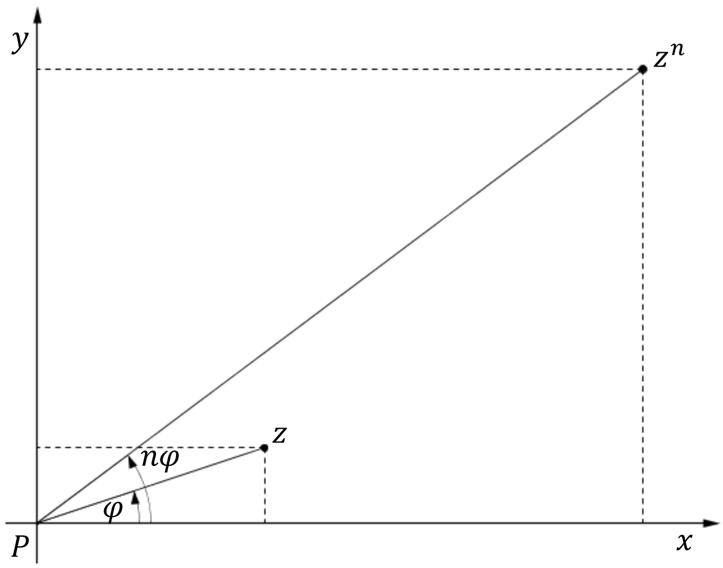
[19] Podle Abrahama de Moivre (1667-1754) platí: $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\ \sin n\varphi$.

Věta 3.4.5: Je-li $z = \|z\|(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ libovolné komplexní číslo a n libovolné celé číslo, pak platí

$$z^n = \|z\|^n(\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi).$$

Poznámka:

- Vztah popsaný ve Větě 3.4.5 lze psát Obecněji (viz Poznámka u Věty 3.4.2):
$$z^n = \|z\|^n(\cos n(\varphi + 2k\pi) + i \cdot \sin n(\varphi + 2k\pi)), k \in \mathbb{Z}.$$
- Je-li komplexní číslo psáno v exponenciálním tvaru, platí podle Věty 3.4.5
$$z^n = \|z\|^n\, e^{in\varphi}, n \in \mathbb{Z}.$$
- Pomocí Věty 3.4.5 lze n-té mocniny znázornit v Gaussově rovině:



Obrázek 3.4.3: Zobrazení n-té mocniny komplexního čísla

Speciálním případem mocnin komplexních čísel jsou n-té odmocniny. Pravidlo pro jejich výpočet popisuje následující věta:

Věta 3.4.6: Pro každé nenulové komplexní číslo $z = \|z\|(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ a každé nenulové $n \in \mathbb{N}$ má binomicnká rovnice $x^n = z$ právě n navzájem různých řešení. Řešení této rovnice lze zapsat ve tvaru

$$x_k = \sqrt[n]{\|z\|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\ \sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

kde $k = 0,1,2, \dots, (n-1)$.

Důkaz: viz [46].

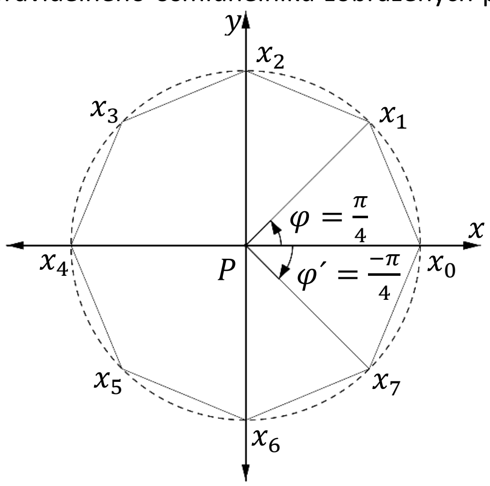
Poznámka:

- Všechny n-té odmocniny komplexního čísla mají stejnou absolutní hodnotu a jejich argumenty se liší o celočíselné násobky čísla $\frac{2\pi}{n}$. Tedy odmocniny komplexního čísla lze zobrazit v Gaussově rovině, kde všechny obrazy čísel $\sqrt[n]{z}$ se zobrazí na kružnici se středem v počátku P o poloměru $\sqrt[n]{\|z\|}$.
- Binomické rovnice lze výborně využívat k hledání pravidelných n-úhelníků.
- Je-li $\|z\| = 1$, pak obrazy čísel $\sqrt[n]{z}$ leží na jednotkové kružnici.
- Je-li $n = 2$, pak se $\sqrt[n]{z}$ zobrazí na středově souměrné body $z, -z$.

- Binomická rovnice $x^n - 1 = 0$ má následující vlastnosti:
  (i) Jejími kořeny jsou komplexní jednotky.
  (ii) Součin dvou libovolných kořenů je opět kořen této rovnice.
  (iii) Její kořeny nazveme n-té odmocniny z jedné.
- Dále pro n-té mocniny a odmocniny komplexních čísel platí:
  (1) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\|z\|}\, e^{i\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)},\ k = 0,1,\dots(n-1);$
  (2) $Arg(z^n) = n \cdot Arg(z);$
  (3) $Arg\left(\sqrt[n]{z}\right) = \frac{1}{n} \cdot Arg(z);$
  (4) $\|z\|^n = \|z^n\|,\quad \left\|\sqrt[n]{z}\right\| = \sqrt[n]{\|z\|}.$

Příklad: Nalezněte všechny osmé odmocniny z jedné a znázorněte je v Gaussově rovině.
Řešení.

- Nejprve vyjádříme číslo 1 v goniometrickém tvaru:
  $1 = \|1\|\,(\cos 0 + i\ \sin 0).$
- Nyní najdeme obecné řešení:
  $x_k = \sqrt[8]{1}\left(\cos\frac{0+2k\pi}{8} + i\ \sin\frac{0+2k\pi}{8}\right) = \cos\frac{k\pi}{4} + i\ \sin\frac{k\pi}{4}.$
- Dosazením za k dostaneme osm vrcholů pravidelného osmiúhelníku zobrazených pro názornost na Obrázku 3.4.4:
  $x_0 = \cos 0 + i\ \sin 0 = 1;$
  $x_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\ \sin\frac{\pi}{4};$
  $x_2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\ \sin\frac{\pi}{2} = i;$
  $x_3 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\ \sin\frac{3\pi}{4};$
  $x_4 = \cos\pi + i\ \sin\pi = -1;$
  $x_5 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\ \sin\frac{5\pi}{4};$
  $x_6 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\ \sin\frac{3\pi}{2};$
  $x_7 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\ \sin\frac{7\pi}{4}.$



Obrázek 3.4.4

Poznámka:

- Hledáme-li druhou odmocninu z komplexního čísla, můžeme docela dobře využít algebraického tvaru a následujícího vzorce:

Věta 3.4.7: Libovolné nenulové komplexní číslo $z = a + bi$ má právě dvě druhé odmocniny, a to

$$z_{1,2} = \pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{\|z\|}}{2}} + \varepsilon\sqrt{\frac{-a+\sqrt{\|z\|}}{2}}\,i\right),$$

Kde $\varepsilon = 1$, právě když $b \geq 0$ a $\varepsilon = -1$, právě když $b < 0$.

Důkaz: viz [16].

Poznámka:

- Položíme-li $x = \sqrt{\frac{a+\sqrt{\|z\|}}{2}}$ a $y = \sqrt{\frac{-a+\sqrt{\|z\|}}{2}}$, pak
$$b = 2xy, \qquad x^2 - y^2 = a.$$

3.5 Maticové vyjádření komplexních čísel

Posledním způsobem vyjádření komplexních čísel, na který se zaměříme, je maticový zápis. Toto vyjádření je velmi jednoduché a je založeno na znalostech z maticového počtu.

Každé komplexní číslo $z = a + bi$ lze vyjádřit jako reálnou čtvercovou matici 2×2 ve tvaru
$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$
kde a, b jsou reálná čísla.

Poznámka:

- Pro imaginární jednotku i platí
$$i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
- Je-li komplexní číslo z vyjádřeno v maticovém tvaru, lze je normu chápat jako odmocninu z determinantu příslušné matice, tedy
$$\|z\| = \sqrt{\det z}.$$

Příklad: Vyjádřete číslo $z = 4 + 3i$ v maticovém tvaru a vypočtěte jeho normu pomocí determinantu příslušné matice.
Řešení.

- Nejprve vyjádříme komplexní číslo z v maticovém tvaru:
$z = 4 + 3i = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$
- Determinant příslušné matice je:
$\det z = 4 \cdot 4 - (-3) \cdot 3 = 16 + 9 = 25.$
- Nyní lehce spočítáme normu čísla z:
$\|z\| = \sqrt{\det z} = 5.$
- Pro kontrolu spočítáme normu čísla z v algebraickém tvaru:
$\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = 5.$

3.6 Užití komplexních čísel v praxi

Komplexní čísla mají v dnešní době velmi široké využití a snad nejčastěji se využívají v geometrii. Některé případy jsme již zmínili, a proto jen připomeneme nejčastější:

1. rotace okolo středu v rovině;
2. posunutí o vektor;
3. stejnolehlost a podobnost trojúhelníků;
4. vyšetřování n-úhelníků a dělení kruhu.

Vedle těchto příkladů lze uvést ještě další:

5. dělení úseček daného poměru;
6. měření úhlů;
7. řešení kvadratických rovnic a geometrické znázorňování množin.

Podívejme se nyní na poslední dvě uvedená využití komplexních čísel. Prvním je řešení kvadratických rovnic. Zde se komplexních čísel využívá speciálně pro rovnice, u kterých je $D < 0$. Pro takové rovnice řešení v oboru reálných čísel neexistuje. Ovšem bereme-li v úvahu, že rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, která má determinant záporný, má kořen (kořeny) v oboru komplexních čísel, získáme pro rovnici následující řešení:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{\|D\|}}{2a}.$$

Znamená to, že rovnice typu $ax^2 + bx + c = 0$ je v oboru komplexních čísel řešitelná a má v něm dokonce dvě řešení.

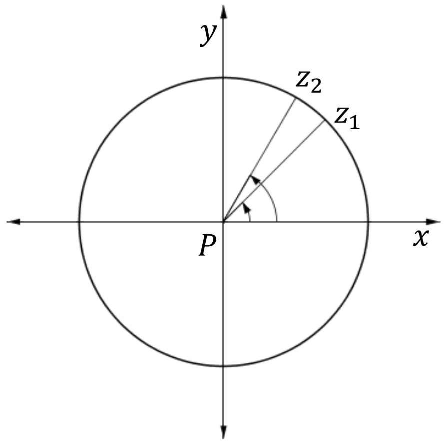
Druhým využitím je geometrické znázorňování množin. Připomeňme, že v Gaussově rovině lze znázorňovat body i početní operace. Vedle toho lze velice snadno v této rovině znázornit množiny bodů dané vlastnosti a řešit nerovnice obsahující komplexní čísla. Podrobně o tom lze nalézt například v [24] nebo [46]. Pro ilustraci zde uveďme dvě úlohy:

Příklad: Určete množinu všech bodů Gaussovy roviny, které

1. splňují podmínku $\|z\| = 2$.
2. vyhovující nerovnostem $0 \leq \mathbb{R}ez \leq Imz \leq 2$.

Řešení.

1. Protože platí $z = \|2\|(\cos\varphi + i\ \sin\varphi)$ a volíme-li φ libovolně z intervalu $\langle 0{,}2\pi\rangle$ zobrazí se číslo z v Gaussově rovině vždy jako bod kružnice se středem v počátku P a poloměrem 2. Volme pro příklad $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$:
   $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\ \sin\frac{\pi}{4}\right)$;
   $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\ \sin\frac{\pi}{3}\right)$.
   Zobrazením všech takových čísel získáme množinu zobrazenou na Obrázku 3.6.1.

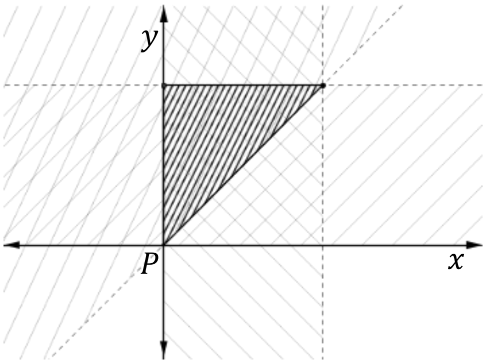


Obrázek 3.6.1

2. Tuto úlohu rozdělíme na 3 různé nerovnosti, které postupně zobrazíme v Gaussově rovině a konečný výsledek získáme jako jejich průnik:
   a. Musí platit podmínka $0 \leq \mathbb{R}ez \leq 2$, tedy výsledkem jsou ty body Gaussovy roviny, které mají reálnou část z intervalu $\langle 0{,}2\rangle$.
   b. Pro $0 \leq Imz \leq 2$ získáme množinu všech bodů, které mají imaginární část z intervalu $\langle 0{,}2\rangle$.

c. Poslední nerovností je $\mathbb{R}ez \leq Imz$. Všechny tyto body se zobrazí jako polorovina s hraniční přímkou $y = x$ obsahující kladnou poloosu y.

Průnikem všech tří množin získáme trojúhelník s vrcholy PXY, kde $X = [2,2]$ a $Y = [0,2]$, a všechny body ležící uvnitř tohoto trojúhelníku (viz Obrázek 3.6.2).



Obrázek 3.6.2

Vedle geometrie mají komplexní čísla i další využití, například v kinematice a při řešení elektrických obvodů. Podrobně k tomu lze najít v [8] a [65]. Jejich znalost je také podmínkou k pochopení zákonitostí algebry kvaternionů, o které pojednává následující kapitola.

4 Kvaterniony

4.1 Definice kvaternionu

Definice 4.1.1: Kvaternionem nazveme uspořádané čtveřice čísel (a, b, c, d), obvykle psané jako výraz

$$q = a + bi + cj + dk,$$

kde a, b, c, d jsou reálná čísla a i, j, k jsou imaginární jednotky,

$$\text{tj. } i^2 = -1, j^2 = -1, k^2 = -1,$$

které splňují následující vztahy:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

Poznámka:

- Každý kvaternion lze tedy chápat jako lineární kombinaci prvků $1, i, j, k$.
- Ze vztahů v Definici 4.1.1 lze pomocí asociativního zákona odvodit základní vztahy mezi jednotkami, například:

$$ij(-1) = -k$$
$$ij = k.$$

  Analogicky získáme následující:

$$\begin{aligned} ik &= -j & \qquad ki &= j, \\ kj &= -i & \qquad jk &= i, \\ ji &= -k & \qquad ij &= k.\text{[20]} \end{aligned}$$

  Z těchto rovností lze násobením jednotkami získat další vztahy:

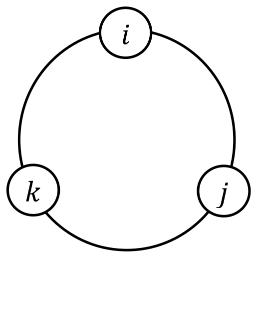
$$\begin{aligned} kji &= 1 & \qquad ijk &= -1, \\ ikj &= 1 & \qquad jki &= -1, \\ jik &= 1 & \qquad kij &= -1. \end{aligned}$$

- Uvedené vztahy pro jednoduchost píšeme v tabulce:

$\cdot$	1	i	j	k	-1	$-i$	$-j$	$-k$
1	1	i	j	k	-1	$-i$	$-j$	$-k$
i	i	-1	k	$-j$	$-i$	1	$-k$	j
j	j	$-k$	-1	i	$-j$	k	1	$-i$
k	k	j	$-i$	-1	$-k$	$-j$	i	1
-1	-1	$-i$	$-j$	$-k$	1	i	j	k
$-i$	$-i$	1	$-k$	j	i	-1	k	$-j$
$-j$	$-j$	k	1	$-i$	j	$-k$	-1	i
$-k$	$-k$	$-j$	i	1	k	j	$-i$	-1

- Pro snadnější zapamatování pravidel pro násobení imaginárních jednotek se používá následující schéma:

  Násobíme-li prvky i, j, k v kruhu, pak násobením dvou těchto prvků po směru (proti směru) hodinových ručiček dostaneme kladný (záporný) třetí prvek. Pokud provedeme součin všech tří prvků po směru (proti směru) ručiček, získáme číslo -1 $(+1)$.



[20] Pro jednotky i, j, k neplatí komutativní zákon, ale platí pro ně zákon antikomutativní (tj. $ij = -ji$).

4.2 Způsoby zápisu kvaternionů

Kvaterniony lze chápat různě, tedy existuje i několik způsobů jak tato čísla zapisovat:

1. Uspořádaná čtveřice reálných čísel
$$q = (a, b, c, d), \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$
Pak je kvaternion chápán jako vektor v prostoru $\mathbb{R}^4$.
2. Uspořádaná dvojice reálného čísla (skaláru) a trojrozměrného vektoru
$$q = (a, \underline{v}) = a + \underline{v}, \qquad a \in \mathbb{R}, \underline{v} \in \mathbb{R}^3,$$
kde $\underline{v} = ib + jc + kd$ a i, j, k tvoří ortonormální bázi v $\mathbb{R}^3$.
3. Uspořádaná dvojice komplexních čísel
$$q = (\alpha, \beta), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$
4. Lineární kombinace prvků $1, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$
$$q = a + bi + cj + dk, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$
S tímto způsobem jsme se setkali již v definici a nazýváme jej **algebraickým tvarem kvaternionu**. Připomíná nám komplexní čísla a je pravděpodobně nejčastěji používaným tvarem. Pokud je kvaternion vyjádřen v tomto tvaru, pak o číslech a, b, c, d hovoříme jako o **komponentech kvaternionu** q.

Poznámka:

- Je jasné, že je-li $c = d = 0$, kvaternion α se změní v obyčejné číslo komplexní
$$q = a + bi.$$
- Máme-li kvaternion q v algebraickém tvaru, pak jej lze rozdělit na dvě části. Reálné číslo a představuje **reálnou (skalární) část q** a značíme jej obvykle $\mathbb{R}q$ (nebo také $Sc(q)$). Výraz $bi + cj + dk$ představuje **imaginární (ideální, nebo také vektorovou) část kvaternionu q**. Značíme ji Imq (nebo $Vec(q)$). Každý kvaternion pak lze psát jako výraz
$$q = \mathbb{R}q + Imq,$$
kde
$$\mathbb{R}q = a,$$
$$Imq = bi + cj + dk.$$
- Je-li $Imq = 0$, pak se kvaternion q nazývá **skalární kvaternion** a ztotožňujeme jej s reálným číslem a.
- Je-li naopak $\mathbb{R}q = 0$, pak kvaternion q označujeme jako **ryze imaginární (ryzí) kvaternion**. **Množinu všech takových kvaternionů** označujeme $\mathbb{H}_p$.

4.3 Konstrukce tělesa kvaternionů

Nyní podle Caley-Dicksonovy konstrukce sestrojíme těleso kvaternionů z tělesa komplexních čísel.

Věta 4.3.1: Nechť $\mathbb{C}$ je pěkně normované těleso komplexních čísel s konjugací. Položme $\mathbb{C}' = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, kde prvky $\mathbb{C}'$ jsou uspořádané dvojice komplexních čísel, tedy
$$\mathbb{C}' = \{(x, y); x, y \in \mathbb{C}\} = \{(a + bi, c + di); a + bi, c + di \in \mathbb{C}\}.$$
Dále definujme pro $\forall (x, y), (w, z) \in \mathbb{C}'$ operace sčítání, násobení a konjugace předpisy

(1) $(x, y) + (w, z) = (x + w, y + z);$
(2) $(x, y) \cdot (w, z) = (xw - z^* y, yw^* + zx);$
(3) $(x, y)^* = (x^*, -y).$

Pak platí:

(i) $\mathbb{C}'$ je pěkně normovaná algebraická struktura s konjugací.
(ii) Algebraická struktura $\mathbb{C}$ je přirozeným způsobem vnořena do algebraické struktury $\mathbb{C}'$ zobrazením, které každému $x \in \mathbb{C}$ přiřazuje prvek $(x, 0) \in \mathbb{C}'$.

Důkaz:

(a) Algebraická struktura $\mathbb{C}'$ je těleso.

o Struktura $(\mathbb{C}', +)$ je komutativní grupa:

Nechť $(r,s),(x,y),(w,z) \in \mathbb{C}'$ jsou libovolné prvky, kde $r,s,x,y,w,z \in \mathbb{C}$. Pak:

1. $x+w, y+z \in \mathbb{C}$. Potom platí, že
$$(x,y)+(w,z)=(x+w,y+z) \in \mathbb{C}',$$
tedy množina $\mathbb{C}'$ je uzavřená vzhledem k operaci sčítání.
2. $(x,y)+(w,z)=(x+w,y+z)=(w+x,z+y)=(w,z)+(x,y)$;
tedy struktura $(\mathbb{C}', +)$ je komutativní.
3. $(r,s)+\big((x,y)+(w,z)\big)=(r,s)+(x+w,y+z)=$
$=\big(r+(x+w),s+(y+z)\big)=\big((r+x)+w,(s+y)+z\big)=$
$=(r+x,s+y)+(w,z)=\big((r,s)+(x,y)\big)+(w,z)$,
tedy struktura $(\mathbb{C}', +)$ je asociativní.
4. $(x,y)+(0{,}0)=(x+0,y+0)=(x,y)$,
tedy prvek $(0{,}0)$ je neutrální prvek struktury $(\mathbb{C}', +)$ vzhledem k operaci sčítání.
5. $(x,y)+(-x,-y)=\big(x+(-x),y+(-y)\big)=(0{,}0)$,
tedy prvek $(-x,-y)$ je inverzním prvkem struktury $(\mathbb{C}', +)$.

Tedy $(\mathbb{C}', +)$ je komutativní grupa.

o Struktura $(\mathbb{C}',\cdot)$ je nekomutativní pologrupa s neutrálním prvkem:

Nechť $(r,s),(x,y),(w,z) \in \mathbb{C}'$ jsou libovolné prvky, kde $r,s,x,y,w,z \in \mathbb{C}$. Pak:

1. $xw, z^*y, yw^* \in \mathbb{C}$. Potom platí, že
$(x,y)\cdot(w,z)=(xw-z^*y,yw^*+zx) \in \mathbb{C}'$,
tedy množina $\mathbb{C}'$ je uzavřená vzhledem k operaci násobení.
2. Protože
$$(x,y)\cdot(w,z)=(xw-z^*y,yw^*+zx)$$
$$\wedge\,(w,z)\cdot(x,y)=(xw-zy^*,x^*z+wy),$$
platí například pro $(x,y)=(1{,}0)$ a $(w,z)=(0,i)$
$$(x,y)\cdot(w,z)=(1{,}0)\cdot(0,i)=(0,i)$$
$$\neq$$
$$(w,z)\cdot(x,y)=(0,i)\cdot(1{,}0)=(0,-i),$$
tedy struktura $(\mathbb{C}',\cdot)$ není komutativní.
3. $(r,s)\cdot\big((x,y)\cdot(w,z)\big)=(r,s)\cdot(xw-z^*y,yw^*+zx)=$
$=(r(xw-z^*y)-(yw^*+zx)^*s,s(xw-z^*y)^*+(yw^*+zx)r)=$
$=(r(xw-z^*y)-(y^*w+z^*x^*)s,s(x^*w^*-zy^*)+(yw^*+zx)r)=$
$=\big((rx-y^*s)w-z^*(ry+x^*s),(sx^*-yr)w^*+z(-y^*s+xr)\big)=$
$=(rx-y^*s,ry+x^*s)\cdot(w,z)=\big((r,s)\cdot(x,y)\big)\cdot(w,z)$,
tedy struktura $(\mathbb{C}',\cdot)$ je asociativní.
4. Prvek $(1{,}0)$ je neutrálním prvkem struktury $(\mathbb{C}',\cdot)$ vzhledem k operaci násobení neboť platí:
$$(x,y)\cdot(1{,}0)=(x-0,y+0)=(x,y);$$
$$(1{,}0)\cdot(x,y)=(x-0,0+y)=(x,y).$$

Tedy struktura $(\mathbb{C}',\cdot)$ je nekomutativní pologrupa s neutrálním prvkem.

o Struktura $\mathbb{C}'$ je $(+,.)$ - distributivní:

Nechť $(r,s),(x,y),(w,z) \in \mathbb{C}'$ jsou libovolné prvky, kde $r,s,x,y,w,z \in \mathbb{C}$. Pak musí platit vztahy:

(1) $(r,s)\cdot\big((x,y)+(w,z)\big)=(r,s)\cdot(xy)+(r,s)\cdot(w,z)$;

(2) $\big((x,y)+(w,z)\big)\cdot(r,s)=(xy)\cdot(r,s)+(w,z)\cdot(r,s)$.

Skutečně:

(1) $(r,s)\cdot\big((x,y)+(w,z)\big)=$
$=(r,s)\cdot(x+w,y+z)=(r(x+w)-(y+z)^*s,s(x+w)^*+(y+z)r)=$

$$= (rx + rw - y^*s - z^*s, sx^* + sw^* + yr + zr) =$$
$$= (rx - y^*s, sx^* + yr) + (rw - z^*s, sw^* + zr) =$$
$$= (r, s) \cdot (x, y) + (r, s) \cdot (w, z).$$

(2) $\big((r, s) + (x, y)\big) \cdot (w, z) =$

$$= (r + x, s + y) \cdot (w, z) = \big((r + x)w - z^*(s + y), (s + y)w^* + z(r + x)\big) =$$
$$= (rw + xw - z^*s - z^*y, sw^* + yw^* + zr + zx) =$$
$$= (rw - z^*s, sw^* + zr) + (xw - z^*y, yw^* + zx) =$$
$$= (r, s) \cdot (w, z) + (x, y) \cdot (w, z).$$

Tedy struktura $\mathbb{C}'$ je $(+,.)$ - distributivní.

○ Ke každému nenulovému prvku (x, y) existuje ve struktuře $(\mathbb{C}',\cdot)$ prvek inverzní:
Nechť $(x, y) \in \mathbb{C}'$ je libovolný prvek takový, že $(x, y) \neq (0,0)$. Hledáme prvek $(w, z) \in \mathbb{C}'$ takový, že

$$(x, y) \cdot (w, z) = (1,0).$$

Pak

$$(x, y) \cdot (w, z) = (xw - z^*y, yw^* + zx) = (1,0).$$

Dostáváme tak soustavu dvou rovnic

$$xw - z^*y = 1$$
$$yw^* + zx = 0,$$

tj. soustavu

$$x^*w^* - zy^* = 1$$
$$yw^* + zx = 0.$$

První rovnici vynásobíme $-y$, druhou x^* a sečteme.
Máme

$$(yy^* + +xx^*)z = -y \Rightarrow z = \frac{-y}{yy^* + +xx^*}.$$

Z druhé rovnice vyjádříme $w^* = -\frac{x}{y}z$, tedy $w = \frac{x}{yy^* + +xx^*}$.
Ke každému nenulovému prvku $(x, y) \in \mathbb{C}'$ tedy existuje v $(\mathbb{C}',\cdot)$ inverzní prvek

$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{yy^* + +xx^*}, \frac{-y}{yy^* + +xx^*}\right).$$

Struktura $\mathbb{C}'$ je tedy těleso.

(b) Těleso komplexních čísel $\mathbb{C}$ lze přirozeně (izomorfně) vnořit do tělesa $\mathbb{C}'$.
Nechť $\mathbb{C}_0' = \{(x, y) \in \mathbb{C}'; y = 0\} \subseteq \mathbb{C}'$ a nechť jsou definovány pro všechny prvky z $\mathbb{C}_0'$ restrikce operací sčítání a násobení na množině $\mathbb{C}'$ jako vztahy

(1) $(x, 0) + (w, 0) = (x + w, 0)$;
(2) $(x, 0) \cdot (w, 0) = (xw, 0)$.

Struktura $(\mathbb{C}_0', +,\cdot)$ je tedy podstrukturou struktury $(\mathbb{C}', +,\cdot)$.
Dále definujme zobrazení $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}'$ takové, které každému prvku $x \in \mathbb{C}$ přiřazuje prvek $(x, 0) \in \mathbb{C}'$. Toto zobrazení je surjektivní a prosté (tj. bijekce), jak lze lehce dokázat, a platí pro něj podmínky homomorfismu:

(1) $(\forall x, y \in \mathbb{C})\, f(x + y) = (x + y, 0) = (x, 0) + (y, 0) = f(x) + f(y)$;
(2) $(\forall x, y \in \mathbb{C})\, f(x \cdot y) = (x \cdot y, 0) = (x, 0) \cdot (y, 0) = f(x) \cdot f(y)$.

Zobrazení f je izomorfismus a proto můžeme psát $(\mathbb{C}, +,\cdot) \cong (\mathbb{C}_0', +,\cdot)$. Protože $(\mathbb{C}_0', +,\cdot) \subseteq (\mathbb{C}', +,\cdot)$, lze psát $(\mathbb{C}, +,\cdot) \lhd (\mathbb{C}', +,\cdot)$. Pro každý prvek $x \in \mathbb{C}$ platí v zobrazení $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}'$:

$$x = (x, 0).$$

(c) $\mathbb{C}'$ je těleso s konjugací definovanou vztahem (3).
Nechť $(x,y),(w,z) \in \mathbb{C}'$ jsou libovolné prvky, kde $x,y,w,z \in \mathbb{C}$. Pak skutečně platí

(1) $\big((x,y)^*\big)^* = (x^*,-y)^* = (x,y)$.

(2) $\big((x,y)\cdot(w,z)\big)^* = (xw - z^*y, yw^* + zx)^* = \big((xw - z^*y)^*, -(yw^* + zx)\big) =$
$= \big((xw)^* - zy^*, -yw^* - zx\big) = (x^*w^* - (-z)(-y)^*, (-y)w^* + (-z)x) =$
$= (w^*x^* - (-y)^*(-z), (-z)x + (-y)w^*) = (w,z)^* \cdot (x,y)^*$.

Tedy těleso $\mathbb{C}'$ je s konjugací.

(d) $\mathbb{C}'$ je pěkně normované těleso.
Nechť $(x,y) \in \mathbb{C}'$ je libovolný nenulový prvek. Pak musí platit:

(1) $(x,y) + (x,y)^* \in \mathbb{R}$;

(2) $(x,y)\cdot(x,y)^* = (x,y)^*\cdot(x,y) \quad \wedge \quad (x,y)^*\cdot(x,y) > 0$.

Skutečně:

(1) $(x,y) + (x,y)^* = (x,y) + (x^*,-y) = (x + x^*, 0)$,
protože z izomorfního zobrazení f plyne
$$(\forall x \in \mathbb{C})\ x = (x,0),$$
pak $(x + x^*, 0) = x + x^*$. Jelikož $x \in \mathbb{C}$, platí $x + x^* = 2\mathbb{R}ex \in \mathbb{R}$.

(2) $(x,y)\cdot(x,y)^* = (x,y)\cdot(x^*,-y) = (xx^* - (-y^*)y, y(x^*)^* + (-y)x) =$
$= (xx^* + y^*y, yx - yx) = (xx^* + y^*y, 0)$.
$(x,y)^*\cdot(x,y) = (x^*x - y^*(-y), (-y)x^* + yx^*) = (xx^* + y^*y, 0)$.
Protože lze podle zobrazení f psát $(xx^* + y^*y, 0) = xx^* + y^*y$ a $xx^*, y^*y \in \mathbb{C}$, tedy $xx^* > 0$ a $y^*y > 0$, platí $(x,y)^*\cdot(x,y) = (xx^* + y^*y, 0) = xx^* + y^*y > 0$.

Tedy těleso $\mathbb{C}'$ je pěkně normované. □

Definice 4.3.1: Těleso $(\mathbb{C}', +, \cdot)$ zkonstruované z tělesa $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ nazýváme **tělesem kvaternionů** a značíme jej $(\mathbb{H}, +, \cdot)$.

Poznámka:

- Prvku $(a + bi, c + di) \in \mathbb{C}'$ odpovídá kvaternion $a + bi + cj + dk$. Vynásobením dvou kvaternionů $a + bi + cj + dk$ a $r + xi + yj + zk$, kde
$a,b,c,d,r,x,y,z \in \mathbb{R}$ dostaneme
$$(a + bi + cj + dk)\cdot(r + xi + yj + zk) =$$
$$= (ar - bx - cy - dz) + (ax + br + cz - dy)i +$$
$$+(ay - bz + cr + dx)j + (az + by - cx + dr)k,$$
vynásobením odpovídajících prvků z $\mathbb{C}'$ dostaneme
$$(a + bi, c + di)\cdot(r + xi, y + zi) =$$
$$= ((ar - bx - cy - dz) + (ax + br + cz - dy)i,$$
$$(ay - bz + cr + dx) + (az + by - cx + dr)i),$$
tedy součiny si odpovídají.
- Konjugovaný prvek k prvku $(a + bi, c + di) \in \mathbb{C}'$, kde $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ je prvek
$\big((a + bi)^*, -c - di\big) = (a - bi, -c - di)$. Tomu odpovídá kvaternion
$a - bi - cj - dk$, který je konjugovaný k prvku $a + bi + cj + dk$.
- Algebraická struktura $\mathbb{H}$ má, mimo výše zmíněné, také další vlastnosti. Například tvoří podílovou algebraickou strukturu a je normovaná (viz [54], [66] nebo [2]).

4.4 Operace a vlastnosti kvaternionů

Pro počítání s kvaterniony je důležité znát zákonitosti základních operací (tedy sčítání, odčítání, násobení a dělení) a základní vlastnosti kvaternionů (jako je kvaternion konjugovaný, inverzní či jednotkový, norma kvaternionu, aj.). Vedle těchto základních operací uvedeme i další početní operace a vlastnosti, důležité pro práci s kvaterniony.

Definice 4.4.1: Nechť $p, q \in \mathbb{H}$ jsou libovolné kvaterniony, kde
$p = (a, \underline{v}) = a + bi + cj + dk$, $q = (r, \underline{u}) = r + xi + yj + zk$. **Součet $\boldsymbol{p+q}$** je definován takto:

$$\begin{aligned} p + q &= (a, \underline{v}) + (r, \underline{u}) = \\ &= (a + bi + cj + dk) + (r + xi + yj + zk) = \\ &= (a + r) + (b + x)i + (c + y)j + (d + z)k = \\ &= (a + r, \underline{v} + \underline{u}). \end{aligned}$$

Poznámka:

- Je-li $p = a + bi + cj + dk$ a $a = b = c = d = 0$, pak kvaternion p nazýváme **nulovým**. Tento kvaternion je neutrálním prvkem vzhledem ke sčítání v $\mathbb{H}$.

Příklad: Vypočtěte součet $p + q$ pro $p = 15 + 3i - j + 2k$, $q = 2 + 6i + 8j - k$.
Řešení:

$$\begin{aligned} p + q &= (a + r) + (b + x)i + (c + y)j + (d + z)k = \\ &= (15 + 2) + (3 + 6)i + (-1 + 8)j + (2 + (-1))k = 17 + 9i + 7j + k. \end{aligned}$$

Definice 4.4.2: Nechť $p, q \in \mathbb{H}$, kde $p = (a, \underline{v}) = a + bi + cj + dk$ a
$q = (r, \underline{u}) = r + xi + yj + zk$, jsou libovolné kvaterniony. **Násobení** kvaternionů v algebraickém tvaru definujeme jako vztah

$$\begin{aligned} pq &= (a, \underline{v}) \cdot (r, \underline{u}) = (a + bi + cj + dk) \cdot (r + xi + yj + zk) = \\ &= a(r + xi + yj + zk) + bi(r + xi + yj + zk) + \\ &\quad + cj(r + xi + yj + zk) + dk(r + xi + yj + zk) = \\ &= ar + axi + ayj + azk + bri - bx + byij + bzik + \\ &\quad + crj + cxji - cy + czjk + drk + dxki + dykj - dz = \\ &= (ar - bx - cy - dz) + (ax + br + cz - dy)i + \\ &\quad + (ay - bz + cr + dx)j + (az + by - cx + dr)k \end{aligned}$$

(viz Poznámka u Definice 4.3.1).

Poznámka:

- **Neutrálním prvkem vzhledem k násobení** v $\mathbb{H}$ je, podle Věty 4.3.1, kvaternion $q = (1,0)$, tj. $q = a + bi + cj + dk$, kde $a = 1 \wedge b = c = d = 0$.

Věta 4.4.1: Nechť $p, q \in \mathbb{H}$ jsou libovolné prvky, kde $p = (a, \underline{v})$ a $q = (r, \underline{u})$. Pak lze násobení kvaternionů psát následujícím způsobem

$$pq = (ar - \underline{v} \cdot \underline{u}, a\underline{u} + r\underline{v} + \underline{v} \times \underline{u}) = ar - \underline{v} \cdot \underline{u} + a\underline{u} + r\underline{v} + \underline{v} \times \underline{u},$$

kde $\cdot$ značí skalární a $\times$ značí vektorové násobení v $\mathbb{R}^3$.

Důkaz:
Vychází přímo z definice násobení:

$$\begin{aligned} pq &= (a, \underline{v}) \cdot (r, \underline{u}) = (a + bi + cj + dk) \cdot (r + xi + yj + zk) = \\ &= ar + axi + ayj + azk + bri - bx + byij + bzik + \\ &\quad + crj + cxji - cy + czjk + drk + dxki + dykj - dz = \\ &= ar - (bx + cy + dz) + a(xi + yj + zk) + r(bi + cj + dk) + \\ &\quad + [(cz - dy)i + (dx - bz)j + (by - cx)k] = \\ &= ar - \underline{v} \cdot \underline{u} + a\underline{u} + r\underline{v} + \underline{v} \times \underline{u}. \end{aligned}$$

□

Poznámka:

- Vztah $pq = ar - \underline{v} \cdot \underline{u} + a\underline{u} + r\underline{v} + \underline{v} \times \underline{u}$ označujeme jako **Grassmanův produkt** (násobení). Toto násobení je obecně nekomutativní. Avšak v celém jeho vzorci existuje pouze jediná nekomutativní část, a to vektorový součin. Proto bude-li komutativní tento součin, bude komutativní celý výsledek. Komutativní je například násobení skalárem (reálným číslem).

- Důležité u nekomutativního násobení je, že $\mathbb{R}(pq) = \mathbb{R}(qp)$.

Definice 4.4.3: Nechť $q \in \mathbb{H}$ a $r \in \mathbb{R}$, kde $q = \left(a, \underline{v}\right)$ je libovolný kvaternion. **Násobení** kvaternionu **skalárem** (reálným číslem) definujeme jako

$$rq = qr = (r, 0) \cdot \left(a, \underline{v}\right) = \left(ar, \underline{v}r\right).$$

Poznámka:

- Píšeme-li kvaternion q v algebraickém tvaru pak je toto násobení definováno takto:
$$rq = qr = ra + rbi + rcj + rdk.$$

Příklad: Nalezněte součin pq a qp kvaternionů $p = 1 + i + j + k$; $q = 2 + 3i - 2j + k$.
Řešení:

- Nejprve vypočteme pq podle definice násobení:
$$pq = (ar - bx - cy - dz) + (ax + br + cz - dy)i +$$
$$+(ay - bz + cr + dx)j + (az + by - cx + dr)k = 8i + 2j - 2k.$$
- Nyní vypočítáme qp:
$$qp = (ar - bx - cy - dz) + (ax + br - cz + dy)i +$$
$$+(ay + bz + cr - dx)j + (az - by + cx + dr)k = 2i - 2j + 8k.$$
- Pro kontrolu použijeme předpis Grassmanova násobení
$$pq = 2 - (3 - 2 + 1) + (3i - 2j + k) + (2i + 2j + 2k) + (3i + 2j - 5k) =$$
$$= 8i + 2j - 2k;$$
$$qp = 2 - (3 - 2 + 1) + (2i + 2j + 2k) + 3i - 2j + k) + (-3i - 2j + 5k) =$$
$$= 2i - 2j + 8k.$$

Poznámka:

- Nechť $q \in \mathbb{H}$. Pak kvaternion $-q$ je **opačným** ke kvaternionu $q = \left(a, \underline{v}\right)$, jestliže platí
$$-q = \left(-a, -\underline{v}\right) = -a - bi - cj - dk.$$

- Nechť $p, q \in \mathbb{H}$ jsou libovolné prvky. Operace **odčítání** je vlastně přičítání opačného prvku, tj.
$$p - q = p + (-q).$$
- Máme-li dva kvaterniony $p = \left(a, \underline{v}\right) = a + bi + cj + dk$ a
$q = \left(r, \underline{u}\right) = r + xi + yj + zk$, pak platí
$$\begin{aligned} p - q &= \left(a, \underline{v}\right) - \left(r, \underline{u}\right) = \left(a, \underline{v}\right) + \left(-r, -\underline{u}\right) = \\ &= (a + bi + cj + dk) + (-r - xi - yj - zk) = \\ &= (a - r) + (b - x)i + (c - y)j + (d - z)k = \\ &= \left(a - r, \underline{v} - \underline{u}\right). \end{aligned}$$
- Odčítání kvaternionů není komutativní, ale platí
$$p - q = -(q - p).$$

Příklad: Odečtěte kvaterniony z Příkladu na předchozí straně (43).
Řešení:

$$p - q = (15 + 3i - j + 2k) - (2 + 6i + 8j - k)$$
$$= (15 + 3i - j + 2k) + (-2 - 6i - 8j + k) = 13 - 3i - 9j + 3k.$$

Poznámka:

- Nechť $q \in \mathbb{H}$, kde $q = \left(a, \underline{v}\right)$. Pak kvaternion q^* nazýváme **konjugovaným (sdruženým)** ke q právě když
$$q^* = \left(a, \underline{v}\right)^* = \left(a, -\underline{v}\right).$$
- Z Věty 4.3.1 víme, že ke každému $q \in \mathbb{H}$ existuje právě jeden kvaternion q^*.
- Kvaternion q^* lze značit také $\tilde{q}, \overline{q}, q^c$.

- Máme-li kvaternion $q = (a, \underline{v}) = a + bi + cj + dk$, pak bude prvek q^* vypadat takto:
$$q^* = (a, -\underline{v}) = a - bi - cj - dk.$$
- Je-li kvaternion chápán jako čtveřice $q = (a, b, c, d)$, je jasné, že k němu konjugovaný prvek bude mít následující tvar
$$q^* = (a, -b, -c, -d).$$
- Z Definice 4.4.6 přímo vyplývá následující Věta 4.4.2.

Věta 4.4.2: Nechť $p, q \in \mathbb{H}$ jsou libovolné kvaterniony. Pak
(1) $(p \pm q)^* = p^* \pm q^*$;
(2) $p \in \mathbb{R} \Leftrightarrow p = p^*$;
(3) $p = -p^* \Leftrightarrow p$ je ryzí kvaternion.
Je-li $p = a + bi + cj + dk$, pak
(4) $p + p^* = 2a$;
(5) $pp^* = p^*p = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Poznámka:
- Vztah (1) Věty 4.4.2 lze aplikovat též na tři a více prvků.

Příklad: Nalezněte konjugovaný kvaternion ke kvaternionu $q = 4 + 3i - 2j - k$.
Řešení.
$q^* = a - bi - cj - dk = 4 - (3i - 2j - k) = 4 - 3i + 2j + k.$

Normu kvaternionu zavedeme pomocí Definice 2.26 a konjugovaného kvaternionu.

Definice 4.4.4: Nechť $q \in \mathbb{H}$. Reálné číslo
$$\|q\| = \sqrt{qq^*} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$
budeme nazývat **normou (absolutní hodnotou)** kvaternionu q.
Platí-li navíc, že
$$\|q\| = 1,$$
budeme kvaternion q nazývat **jednotkovým** (unitárním) kvaternionem a **množinu** všech takových kvaternionů **budeme označovat** $\mathbb{H}_1$.

Poznámka:
- Je-li $\|q\|$ normou kvaternionu, pak její druhou mocninu můžeme zapisovat
$$\|q\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a^2 + \|\underline{v}\|^2$$
- Pro libovolné kvaterniony p, q platí
$$\|pq\| = \|qp\|.$$
- Dá se dokázat, že každý jednotkový kvaternion $q \in \mathbb{H}_1$ lze psát ve tvaru
$$q = (\cos\varphi, \hat{v}\sin\varphi),$$
kde $\hat{v}$ je jednotkový vektor z $\mathbb{R}^3$ a φ je úhel z intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ (viz Kapitola 4.6).
- Součinem dvou jednotkových kvaternionů je opět jednotkový kvaternion.
- Inverzní kvaternion k jednotkovému je opět jednotkový kvaternion.
- Je jasné, že množina jednotkových kvaternionů $\mathbb{H}_1$ tvoří grupu spolu s operací násobení a tato grupa je podgrupou grupy $(\mathbb{H} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Příklad: Pro kvaternion $q = 2 + i - 2k + 4j$ nalezněte normu.
Řešení.
$$\|q\| = \sqrt{qq^*} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} =$$
$$= \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 1 + 4 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

Věta 4.4.3: Nechť $p, q \in \mathbb{H}$ jsou libovolné kvaterniony, kde $p = (a, \underline{v})$ a $q = (r, \underline{u})$, a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak platí:

(1) $\|q\| \geq 0 \quad \wedge \quad (\|q\| = 0 \Leftrightarrow q = 0)$;
(2) $\|\alpha q\| = \|\alpha\| \cdot \|q\|$;
(3) $\|pq\| = \|p\| \cdot \|q\|$;
(4) $\|q\| = \|q^*\| = \|-q\|$;
(5) $-\|p\| \leq a \leq \|p\| \ \wedge \ -\|p\| \leq \|\underline{v}\| \leq \|p\|$;
(6) $|(\|p\| - \|q\|)| \leq \|p \pm q\| \leq \|p\| + \|q\|$.

Důkaz: viz [45], [52], [13] a [25].

Poznámka:

- Vynásobíme-li libovolný kvaternion jednotkovým kvaternionem, pak se jeho norma nezmění (vyplývá ze vztahu (3) Věty 4.4.3).
- Pro násobení kvaternionů pq a qp platí
$$\|pq\| = \|qp\|.$$
- Ze vztahu (5) ve Větě 4.4.3 vyplývá $\|a\| \leq \|p\| \ \wedge \ \|\underline{v}\| \leq \|p\|$.
- Protože $(\mathbb{H} \setminus \{0\}, \cdot)$ je grupa, pak ke každému $q \in \mathbb{H}$, $q \neq 0$ existuje **inverzní kvaternion** $q^{-1} \in \mathbb{H}$ daný vztahem
$$q^{-1} = \frac{q^*}{\|q\|^2}.$$
- Je-li q unitární (jednotkový) kvaternion, platí $q^{-1} = q^*$ (důkaz viz [13]).

Příklad: Nalezněte inverzní kvaternion pro $q = 1 + i - j + k$.
Řešení.

- Nejprve nalezneme kvaternion konjugovaný a normu kvaternionu q:
$q^* = 1 - i + j - k$,
$\|q\| = \sqrt{4} = 2$.
- Nyní vypočítáme kvaternion inverzní:
$q^{-1} = \frac{q^*}{\|q\|^2} = \frac{1-i+j-k}{4} = \frac{1}{4} - \frac{i}{4} + \frac{j}{4} - \frac{k}{4}$.
- Nakonec provedeme kontrolu (musí platit $qq^{-1} = q^{-1}q = 1$):
$$\begin{aligned} qq^{-1} &= (1 + i - j + k) \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{i}{4} + \frac{j}{4} - \frac{k}{4}\right) = \\ &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{-1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) i + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) j + \\ &\quad + \left(\frac{-1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) k = 1. \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} q^{-1}q &= \left(\frac{1}{4} - \frac{i}{4} + \frac{j}{4} - \frac{k}{4}\right) \cdot (1 + i - j + k) = \\ &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) i + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) j + \\ &\quad + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) k = 1. \end{aligned}$$

Definice 4.4.5: Nechť $p, q \in \mathbb{H}$ jsou libovolné prvky, kde $q \neq 0$. **Dělení** kvaternionů je dáno předpisem
$$\frac{p}{q} = pq^{-1} = p\frac{q^*}{\|q\|^2}.$$

Poznámka:

- Je jasné, že stejně jako násobení, ani dělení není obecně komutativní, tj.
$$pq^{-1} \neq q^{-1}p.$$
- Pro normu podílu platí
$$\left\|\frac{p}{q}\right\| = \frac{\|p\|}{\|q\|}; \quad q \neq 0.$$

Příklad: Vypočtěte $\frac{p}{q}$ pro $p = 1 + 2i + 4j + 6k$ a $q = 1 - i - j - k$.

Řešení:

- Nejprve nalezneme kvaternion q^{-1}:
  $q^{-1} = \frac{q^*}{\|q\|^2} = \frac{1+i+j+k}{\left(\sqrt{1+1+1+1}\right)^2} = \frac{1+i+j+k}{4}$.
- Nyní můžeme nalézt pq^{-1} a $q^{-1}p$:
  $pq^{-1} = \frac{(1+2i+4j+6k)\cdot(1+i+j+k)}{4} = \left(-2\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{4}i + \frac{9}{4}j + 1\frac{1}{4}k$;
  $q^{-1}p = \frac{(1+i+j+k)\cdot(1+2i+4j+6k)}{4} = \left(-2\frac{3}{4}\right) + 1\frac{1}{4}i + \frac{1}{4}j + \frac{9}{4}k$.

Definice 4.4.6: Nechť $p, q \in \mathbb{H}$, kde $p = a + bi + cj + dk$ a $q = r + xi + yj + zk$. **Skalární součin** kvaternionů p, q definujeme jako

$$p \cdot q = ar + bx + cy + dz.$$

Poznámka:

- Z definice je jasné ze tento součin je komutativní.
- Skalární součin lze psát jako

$$p \cdot q = \frac{p^*q + q^*p}{2} = \frac{pq^* + qp^*}{2}.$$

Definice 4.4.7: Nechť $p, q \in \mathbb{H}$. Jestliže platí

$$p \cdot q = 0,$$

pak budeme o p, q hovořit jako o kvaternionech **ortogonálních** (kolmých).

Poznámka:

- Platí-li rovnost $p \cdot q = 0$ a zároveň jsou p, q jednotkovými kvaterniony, pak říkáme že p, q jsou **ortonormální**.

Definice 4.4.8: Nechť $p, q \in \mathbb{H}$, kde $p = a + bi + cj + dk$ a $q = r + xi + yj + zk$. **Vektorový součin** kvaternionů p, q definujeme jako vztah

$$p \times q = (cz - dy)i + (dx - bz)j + (by - cx)k.$$

Poznámka:

- Vztah z předchozí definice lze psát $p \times q = \frac{pq - qp}{2}$.
- Vektorový součin ryze imaginárních kvaternionů je antikomutativní, tj. $p \times q = -q \times p$.
- Pro ryze imaginární kvaterniony platí distributivnost vektorového násobení vzhledem ke sčítání, tj. $p \times (q + r) = (p \times q) + (p \times r)$.
- Dále pro ryze imaginární kvaterniony platí vztahy
  (1) $p \times (q \times r) + q \times (r \times p) + r \times (p \times q) = 0$ (Jacobiho identita);
  (2) $(p \times s) \cdot (q \times r) = (p \cdot q)(s \cdot r) - (p \cdot r)(s \cdot q)$ (Lagrangeova identita)
  (viz [45]).

Definice 4.4.9: Nechť $p, q \in \mathbb{H}$. Řekneme, že p, q jsou **rovnoběžné** kvaterniony, jestliže

$$p \times q = 0.$$

Poznámka:

- Jsou-li $p, q \in \mathbb{H}$ ryze imaginární kvaterniony, které jsou kolmé, pak

$$p \times q = p \cdot q.$$

Příklad: Vypočtěte (a) skalární součin, (b) vektorový součin kvaternionů
$p = 1 + i + j + k$ a $q = 1 - i - j - k$. Rozhodněte, zda jsou kolmé nebo rovnoběžné.

Řešení.

(a) $p \cdot q = ar + bx + cy + dz = 1 + (-1) + (-1) + (-1) = -2;$
tedy kvaterniony p, q nejsou kolmé.

(b) $p \times q = (cz - dy)i + (dx - bz)j + (by - cx)k =$
$= (-1 + 1)i + (-1 + 1)j + (-1 + 1)k = 0.$
Kvaterniony p, q jsou rovnoběžné.

Definice 4.4.10: Nechť $p, q \in \mathbb{H}$. Říkáme, že $q = \left(a, \underline{v}\right) = a + bi + cj + dk$, $p = \left(r, \underline{u}\right) = r + xi + yj + zk$ jsou si **vzájemně rovné**, právě když platí

$$(a = r) \wedge (b = x) \wedge (c = y) \wedge (d = z).$$

Tedy

$$q = p \iff a = r \wedge \underline{v} = \underline{u}.$$

Definice 4.4.11: Nechť $p, q \in \mathbb{H}$. Řekneme, že $\boldsymbol{p}$ **je ekvivalentní s** $\boldsymbol{q}$, značeno $p \sim q$, jestliže existuje $\alpha \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ tak, že

$$\alpha p = q\alpha.$$

Poznámka:

- Z předchozí rovnosti vyplývá, že $p \sim q$, právě když $p = \alpha^{-1} q \alpha$.

Příklad: Rozhodněte, zda kvaterniony $q = i + j, p = i + k$ jsou ekvivalentní. Pokud ano, nalezněte prvek α.

Řešení.

- Musíme nalézt takový kvaternion $\alpha = a + bi + cj + dk$, aby platila rovnost
$$(a + bi + cj + dk)(i + j) = (i + k)(a + bi + cj + dk).$$
- Nejprve upravíme levou stranu rovnosti:
$L = (a + bi + cj + dk)(i + j) = ai - b + cji + dki + aj + bij - c + dkj =$
$= (-b - c) + (a - d)i + (a + d)j + (b - c)k.$
- Nyní obdobně upravíme druhou stranu:
$P = (i + k)(a + bi + cj + dk) = ai - b + cij + dik + ak + bki + ckj - d =$
$= (-b - d) + (a - c)i + (b - d)j + (a + c)k.$
- $L = P$, právě když $c = d \wedge a = b$. Tedy kvaternion α takový, že $\alpha p = q\alpha$ existuje a $p \sim q$.
- Volíme-li např. $a = b = 1, c = d = 0$, máme
$$\alpha = 1 + i.$$
Ověříme, že $(1 + i)(i + j) = (i + k)(1 + i)$:
$L = (1 + i) \cdot (i + j) = i + j - 1 + ij = -1 + i + j + k;$
$P = (i + k) \cdot (1 + i) = i + k - 1 + ki = -1 + i + j + k.$

Poznámka:

- Dá se dokázat, že každý kvaternion tvaru $q = a + bi + cj + dk$ je ekvivalentní s konkrétním komplexním číslem
$$q^{\alpha} = a + i\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}.$$
- Dále lze dokázat (viz [45]), že platí $p \sim q$ právě tehdy a jenom tehdy, platí-li
$$\mathbb{R}p = \mathbb{R}q \;\wedge\; \|p\| \;=\; \|q\|.$$

4.5 Maticový zápis kvaternionů

Kvaterniony lze psát pomocí matic tak, aby sčítání a násobení kvaternionů odpovídalo sčítání a násobení matic. Uvedeme nyní dva způsoby zápisu, a to zápis v komplexní matici a zápis v matici reálné.

1. Kvaternion $q = a + bi + cj + dk$ lze psát jako **komplexní matici $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$** ve tvaru

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y^* & x^* \end{pmatrix},$$

kde x, y jsou komplexní čísla ve tvaru $x = a + bi$, $y = c + di$.

Pro imaginární jednotky $1, i, j, k$ definujeme matice takto:

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Skutečně platí $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$:

$$i^2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$
$$j^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$
$$k^2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$
$$ijk = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Každý kvaternion psaný jako komplexní matice lze tedy vyjádřit jako lineární kombinaci těchto čtyř prvků. Skutečně:

$$q = a + bi + cj + dk = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a + bi & 0 \\ 0 & a - bi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c + di \\ -c + di & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ -y^* & x^* \end{pmatrix},$$

kde $x = a + bi$ a $y = c + di$.

Takto vyjádřené kvaterniony tvoří množinu matic $\mathcal{M}$ a pro všechna $A, B \in \mathcal{M}$, kde $A = \begin{pmatrix} x & y \\ -y^* & x^* \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} w & z \\ -z^* & w^* \end{pmatrix}$, platí

(1) $\begin{pmatrix} x & y \\ -y^* & x^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w & z \\ -z^* & w^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + w & y + z \\ -(y^* + z^*) & x^* + w^* \end{pmatrix};$

(2) $\begin{pmatrix} x & y \\ -y^* & x^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w & z \\ -z^* & w^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xw - yz^* & xz + yw^* \\ -(x^*z^* + y^*w) & x^*w^* - y^*z \end{pmatrix}.$

Pro tyto matice platí také

(1) $\begin{pmatrix} x & y \\ -y^* & x^* \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} x^* & -y \\ y^* & x \end{pmatrix};$

(2) $\begin{vmatrix} x & y \\ -y^* & x^* \end{vmatrix} = xx^* - (-y^*y) = xx^* + y^*y = \parallel x \parallel^2 + \parallel y \parallel^2.$

(3) Je-li kvaternion unitární, pak determinant příslušné matice je roven jedné.

Příklad: Vyjádřete kvaterniony $p = 2 + 3i - 5j + 8k$ a $q = -4 + 3i + j + k$ jako komplexní matice a nalezněte jejich součet a součin.

Řešení.

- Nejprve nalezneme obě komplexní matice:
  $$p = 2 + 3i - 5j + 8k = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 3i & -5 + 8i \\ 5 + 8i & 2 - 3i \end{pmatrix},$$
  $$q = -4 + 3i + j + k = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 + 3i & 1 + 1i \\ -1 + 1i & -4 - 3i \end{pmatrix}.$$
- Nyní obě matice sečteme a vynásobíme:
  $$\begin{pmatrix} 2 + 3i & -5 + 8i \\ 5 + 8i & 2 - 3i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 + 3i & 1 + 1i \\ -1 + 1i & -4 - 3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 6i & -4 + 9i \\ 4 + 9i & -2 - 6i \end{pmatrix};$$
  $$\begin{pmatrix} 2 + 3i & -5 + 8i \\ 5 + 8i & 2 - 3i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 + 3i & 1 + 1i \\ -1 + 1i & -4 - 3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 - 19i & 43 - 12i \\ -43 - 12i & -20 + 19i \end{pmatrix}.$$
- Pro kontrolu provedeme také klasický součet a součin kvaternionů:
  $p + q = (2 + 3i - 5j + 8k) + (-4 + 3i + j + k) = -2 + 6i - 4j + 9k;$
  $pq = (2 + 3i - 5j + 8k) \cdot (-4 + 3i + j + k) = -20 - 19i + 43j - 12k.$

2. Kvaternion $q = a + bi + cj + dk$ lze psát jako **reálnou matici $\mathbf{4} \times \mathbf{4}$**.
Skutečně, je-li $\begin{pmatrix} x & y \\ -y^* & x^* \end{pmatrix}$ komplexní matice kvaternionu q a $x = a + bi, y = c + di$ jsou čísla komplexní, která lze vyjádřit jako reálné matice $x = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ a $y = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$, pak lze kvaternion q psát jako reálnou matici 4×4

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix},$$

kde a, b, c, d jsou reálná čísla.

Pro kvaternion $q = a + bi + cj + dk$ existuje také druhá reálná matice:

$$A_2 = \begin{pmatrix} a & -b & d & -c \\ b & a & -c & -d \\ -d & c & a & -b \\ c & d & b & a \end{pmatrix}.$$

Tento tvar budeme nadále považovat za pravou reprezentaci kvaternionu reálnou maticí.

Konjugovaný kvaternion k $q = a + bi + cj + dk$ (tedy $q^* = a - bi - cj - dk$) lze psát jako matici

$$A^*{}_1 = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix},$$

resp.

$$A^*{}_2 = \begin{pmatrix} a & b & -d & c \\ -b & a & c & d \\ d & -c & a & b \\ -c & -d & -b & a \end{pmatrix}.$$

Je jasné, že matici konjugovaného kvaternionu q^* získáme transpozicí matice kvaternionu q.

Příklad: Vyjádřete kvaternion $q = -4 + 3i + j + k$ jako reálnou matici.
Řešení.

$$q = -4 + 3i + j + k = \begin{pmatrix} a & -b & d & -c \\ b & a & -c & -d \\ -d & c & a & -b \\ c & d & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -4 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

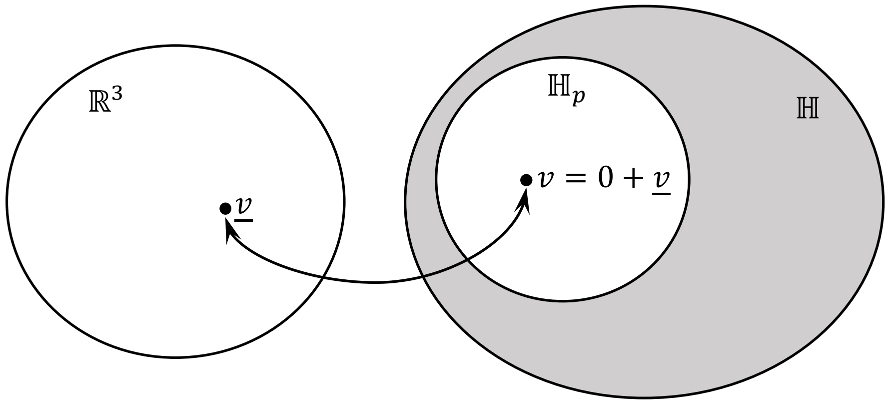
Vyjádření kvaternionu pomocí matice se využívá k jednoduššímu násobení kvaternionů (viz [52] nebo [58]) a také k vyjádření rotace pomocí kvaternionů. Vedle jmenovaných, má maticové vyjádření kvaternionů i další vlastnosti. Lze je nalézt například v [53].

4.6 Geometrický význam kvaternionů

Podívejme se nyní na unitární a ryze imaginární kvaterniony a jejich význam. Tyto kvaterniony mají speciální vlastnosti a tvoří zvláštní podstruktury algebry $\mathbb{H}$. Připomeňme jejich vlastnosti:

- Unitární kvaterniony mají normu (absolutní hodnotu) rovnou jedné a jejich množinu označujeme $\mathbb{H}_1$.
- Ryze imaginární kvaterniony, jejichž množinu značíme $\mathbb{H}_p$, mají reálnou část rovnou nule (tedy obsahují pouze vektorovou část).

Vycházíme-li z definice ryze imaginárního kvaternionu, je jasné, že jej lze zapisovat jako uspořádanou trojici reálných čísel. Každému konkrétnímu ryze imaginárnímu kvaternionu proto odpovídá konkrétní vektor z prostoru $\mathbb{R}^3$. Tedy kvaternion $v = (0, \underline{v}) = xi + yj + zk$ reprezentuje vektor $\underline{v} = (x, y, z)$ (viz Obrázek 4.6.1) a dá se dokázat, že množina všech ryze imaginárních kvaternionů $\mathbb{H}_p$ tvoří vektorový prostor nad tělesem reálných čísel a že je tento vektorový prostor izomorfní s euklidovským vektorovým prostorem $\mathbb{R}^3$ (důkaz viz [2]).



Obrázek 4.6.1: Vztah mezi vektory z prostoru $\mathbb{R}^3$ a ryze imaginárními kvaterniony

Ryze imaginární kvaterniony tedy popisují vektorový součin:
Máme-li dva vektory $\underline{u}, \underline{v}$, kterým odpovídají dva kvaterniony $u = ri + sj + tk$ a $v = xi + yj + zk$, můžeme jejich součin psát jako

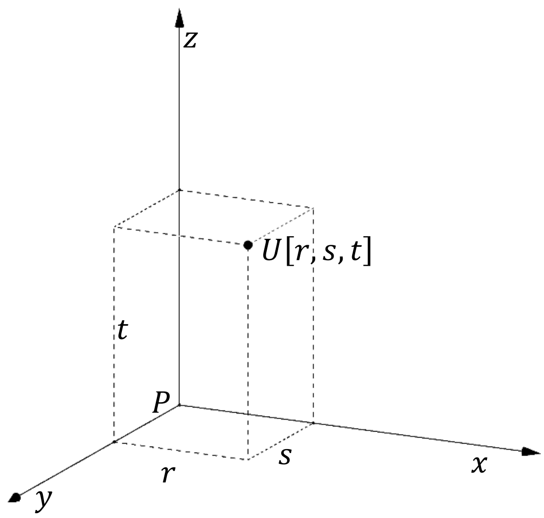
$$\underline{u}\,\underline{v} = -(rx + sy + tz) + [(sz - ty)i + (tx - rz)j + (ry - sx)k].$$

Vezmeme-li imaginární část součinu $\underline{u}\,\underline{v}$, dostaneme ekvivalenci k vektorovému součinu $u \times v$, pro který platí (bereme-li u, v z prostoru $\mathbb{R}^3$) následující

$$u \times v = \begin{vmatrix} r & s & t \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} sz - ty \\ tx - rz \\ ry - sx \end{pmatrix}.$$

Z toho vyplývá, že součin dvou ryze imaginárních kvaternionů definuje vektorový součin odpovídajících vektorů z prostoru $\mathbb{R}^3$.

Pro nás je ovšem důležité, že je kvaterniony z množiny $\mathbb{H}_p$ možné chápat jako obrazy bodů trojdimenzionálního prostoru (právě díky izomorfismu vektorového prostoru $\mathbb{H}_p$ s prostorem $\mathbb{R}^3$). Každý kvaternion $u = ri + sj + tk$ se tedy jednoznačně zobrazí v kartézském souřadnicovém systému $Pxyz$ jako bod U o souřadnicích $[r, s, t]$ (viz Obrázek 4.6.2).



Obrázek 4.6.2: zobrazení kvaternionu u v Kartézském souřadnicovém systému $Pxyz$

Pro libovolné dva ryze imaginární kvaterniony $u = ri + sj + tk$ a $v = xi + yj + zk$ proto platí následující věta:

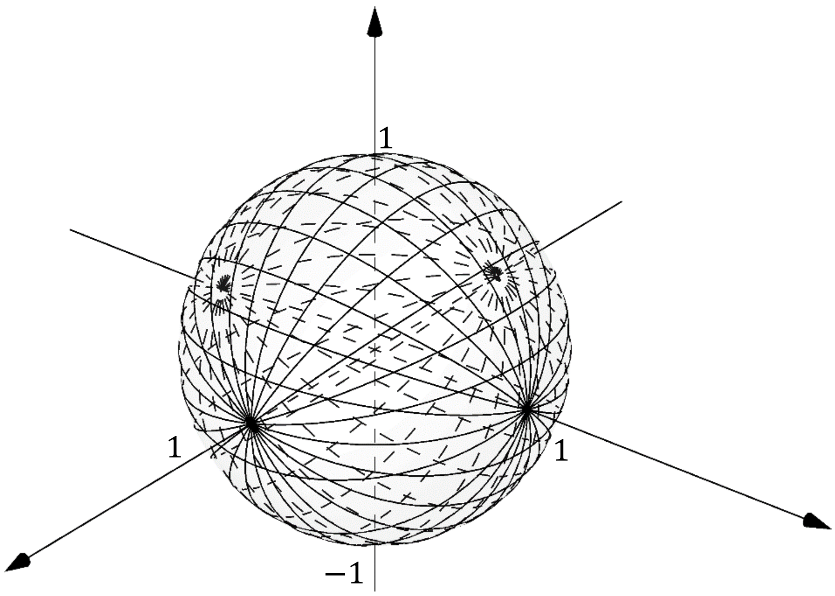
Věta 4.6.1: Vzdálenost obrazů U, V ryze imaginárních kvaternionů $u = ri + sj + tk$, $v = xi + yj + zk$ se rovná normě jejich rozdílu, tj.

$$d(U, V) = \sqrt{(r-x)^2 + (s-y)^2 + (t-z)^2} = \|u - v\|.$$

Podobně můžeme definovat vzdálenost od počátku P, součet a rozdíl či souměrnost podle počátku pro obrazy U, V kvaternionů $u = ri + sj + tk, v = xi + yj + zk$:

- Pro vzdálenost U od počátku P platí
$$d(P, U) = \sqrt{r^2 + s^2 + t^2} = \|u\|.$$
- Součet $U + V$ definujeme jako bod Z, pro který platí
$$Z = U + V = [r, s, t] + [x, y, z] = [r + x, s + y, t + z].$$
- Rozdíl $U - V$ lze psát jako součet $U + (-V)$.
- Obraz $-U$ souměrný podle počátku P obrazu U má souřadnice $[-r, -s, -t]$.

Nyní se podívejme na unitární kvaterniony a jejich geometrický význam. Připomeňme, že unitární (jednotkové) kvaterniony mají normu jedna. Pak lze v množině ryze imaginárních $\mathbb{H}_p$ nalézt takové kvaterniony, které jsou ryze imaginární a současně unitární. Tyto unitární kvaterniony tvoří množinu (podmnožinu $\mathbb{H}_p$ a průnik množin $\mathbb{H}_p$ a $\mathbb{H}_1$), kterou lze znázornit v Kartézském souřadnicovém systému $Pxyz$. Množina obrazů všech unitárních ryze imaginárních kvaternionů vytvoří v prostoru kulovou plochu se středem v počátku P a o poloměru 1 (tj. jednotkovou sféru, viz Obrázek 4.6.3).



Obrázek 4.6.3: Zobrazení množiny všech unitárních ryze imaginárních kvaternionů

Dalším důležitým významem ryze imaginárních a unitárních kvaternionů je schopnost popsat rotaci v trojdimenzionálním prostoru. Rotaci pomocí kvaternionů lze nalézt například v [23], [45], [29], [8] nebo [73].

4.7 Goniometrický tvar kvaternionu, signum a argument

Pro další práci s kvaterniony bude třeba uvést další ze způsobů zápisu kvaternionů, který nazýváme **goniometrickým tvarem** nebo také **polární formou** kvaternionu. Tento tvar se užívá při výpočtu mocniny či odmocniny kvaternionů, pro geometrickou reprezentaci a vyjadřování rotací pomocí kvaternionů.

Nejprve se zaměříme na kvaterniony unitární (tedy ty, jejichž norma se rovná jedné). **Goniometrický tvar** takových kvaternionů popisuje následující věta:

Věta 4.7.1: Nechť $q \in \mathbb{H}$ je unitární kvaternion $q = a + \underline{v}$. Pak existuje právě jeden úhel $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$ takový, že $\cos\varphi = a$ a $\sin\varphi = \|\underline{v}\|$. Kvaternion q proto lze psát pomocí úhlu φ a unitárního (jednotkového) vektoru $\hat{v} \in \mathbb{R}^3$ jako

$$q = \cos\varphi + \hat{v}\sin\varphi,$$

kde vektor $\hat{v} = \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|}$.

Důkaz: viz [34] nebo [13].

Poznámka:

- Existence úhlu φ plyne z definice unitárního kvaternionu a jeho normy, kdy pro unitární (jednotkový) kvaternion $q = a + \underline{v}$ platí rovnost $a^2 + \|\underline{v}\|^2 = 1$.
- Protože $\hat{v}$ je unitární vektor, tj. $\|\hat{v}\| = 1$, pak je $\hat{v}^2 = -1$. To znamená, že vektor $\hat{v}$ je imaginární jednotkou.

Příklad: Vyjádřete unitární kvaternion $q = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} - \frac{j}{2} - \frac{k}{2}$ v goniometrickém tvaru.

Řešení.

- Je-li $q = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} - \frac{j}{2} - \frac{k}{2}$ unitární, pak jeho norma se rovná jedné:
  $\|q\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1.$
- Pro tento kvaternion dostaneme goniometrický tvar postupným dosazováním do vzorce $q = \cos\varphi + \hat{v}\sin\varphi$:
  $\cos\varphi = a = \frac{1}{2}$;
  $\sin\varphi = \|\underline{v}\| = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
  $\hat{v} = \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|} = \frac{\frac{i}{2} - \frac{j}{2} - \frac{k}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{i - j - k}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(i - j - k)}{3}$;
  Protože $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ a $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, je úhel $\varphi = \frac{\pi}{3}$.
- Goniometrický tvar kvaternionu q tedy bude
  $q = \cos\varphi + \hat{v}\sin\varphi = \cos\frac{\pi}{3} + \left(\frac{\sqrt{3}(i - j - k)}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}.$

Nyní Větu 4.7.1 zobecníme pro všechny kvaterniony $q \in \mathbb{H}$.

Věta 4.7.2: Nechť $q \in \mathbb{H}$ je libovolný kvaternion $q = a + \underline{v}$. Pak lze takový kvaternion vyjádřit v **goniometrickém tvaru**:

$$q = \|q\| \, (\cos\varphi + \hat{v}\sin\varphi),$$

kde $\hat{v} = \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|}$ a $\varphi = \arccos\left(\frac{a}{\|q\|}\right)$.

Důkaz: viz [63].

Poznámka:

- Je jasné, že $\cos\varphi = \frac{a}{\|q\|}$ a $\sin\varphi = \frac{\|\underline{v}\|}{\|q\|}$. Vyplývá to ze vztahu:
  $$q = a + \underline{v} = \|q\| \left(\frac{a}{\|q\|} + \frac{\underline{v}}{\|q\|}\right) = \|q\| \left(\frac{a}{\|q\|} + \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|} \cdot \frac{\|\underline{v}\|}{\|q\|}\right).$$
- Úhel φ budeme chápat jako úhel mezi vektorem $q \in \mathbb{R}^4$ a reálnou osou, výraz $\hat{v}\sin\varphi$ budeme chápat jako projekci q na podprostor $\mathbb{R}^3$ ryze imaginárních kvaternionů.
- Úhel φ se vždy vyjadřuje v radiánech, obvykle jako násobek čísla π. Pro jednoznačnost budeme úhel φ brát z intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$.

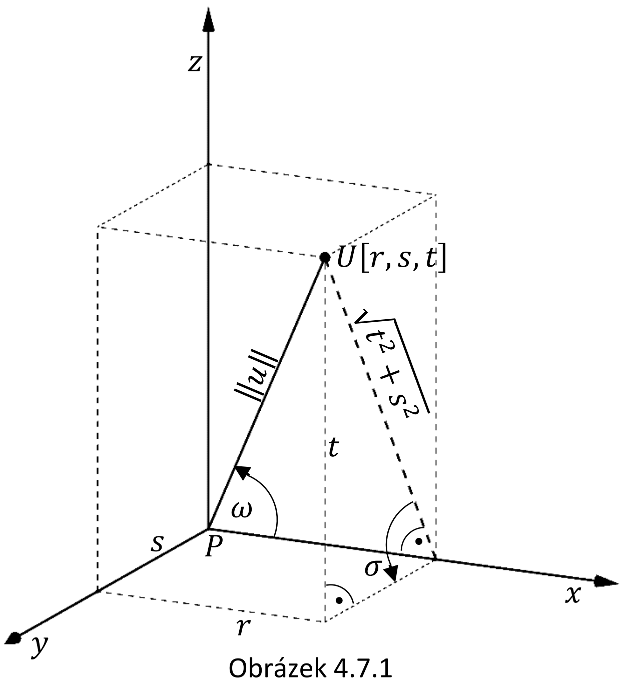
- Je jasné, že úhel φ je orientovaný, tj. je-li měřen proti směru hodinových ručiček, pak je jeho hodnota kladná, je-li naopak měřen po směru hodinových ručiček, je jeho hodnota záporná.
- U kvaternionů můžeme zavést funkci **signum**
$$sgn(q) = \frac{q}{\|q\|},$$
která ke kvaternionu q přiřazuje jednotkový kvaternion se stejným směrem v čtyřdimenzionálním prostoru.
V souvislosti s tím lze kvaternion $q = a + \underline{v} = \|q\| \left(\cos\varphi + \hat{v}\sin\varphi\right)$ zapisovat i tímto způsobem:
$$q = \|q\| \left(\cos\varphi + sgn(\underline{v})\sin\varphi\right).$$

Příklad: Nalezněte goniometrický tvar kvaternionu $q = 2 + 2i - 2j + 2k$.
Řešení.

- Postupujeme podle Věty 4.7.2 o goniometrickém tvaru a postupně dosazujeme do vzorce $q = \|q\| \left(\cos\varphi + \hat{v}\sin\varphi\right)$:
$\|q\| = \sqrt{4+4+4+4} = 4;$
$\sin\varphi = \frac{\|\underline{v}\|}{\|q\|} = \frac{\sqrt{4+4+4}}{4} = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2};$
$\hat{v} = \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|} = \frac{2i-2j+2k}{2\sqrt{3}} = \frac{2(i-j+k)}{2\sqrt{3}} = \frac{i-j+k}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(i-j+k)}{3};$
$\cos\varphi = \frac{a}{\|q\|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2};$
$\varphi = \frac{\pi}{3}.$
- Goniometrický tvar kvaternionu tedy bude vypadat takto:
$q = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}(i-j+k)}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).$

Definice 4.7.1: Nechť $q \in \mathbb{H}$ je libovolný kvaternion ve tvaru $q = \|q\| \left(\cos\varphi + \hat{v}\sin\varphi\right)$. Úhel φ budeme nazývat **argumentem (amplitudou) kvaternionu** q a značit jej budeme $Arg(q) = \varphi$.

Je třeba poznamenat, že ryze imaginární kvaterniony vyjadřujeme v goniometrickém tvaru jinak. Jejich vyjádření získáme pomocí jejich obrazu v Kartézském souřadnicovém systému, kterému se věnovala Kapitola 4.6. Mějme tedy libovolný ryze imaginární kvaternion $u = ri + sj + tk$, který je zobrazen v Kartézském souřadnicovém systému $Pxyz$, a který s osou x svírá úhel ω. Zvolíme-li pro tento kvaternion druhý určující úhel, například σ, pak podle vztahů na Obrázku 4.7.1 získáme následující:
$\sin\omega = \frac{\sqrt{t^2+s^2}}{\|u\|}$, tedy $\sqrt{t^2+s^2} = \|u\|\sin\omega;$
$\cos\omega = \frac{r}{\|u\|}$, tedy $r = \|u\|\cos\omega;$
$\sin\sigma = \frac{t}{\sqrt{t^2+s^2}}$, tedy $t = \sqrt{t^2+s^2}\sin\sigma;$
$\cos\sigma = \frac{s}{\sqrt{t^2+s^2}}$, tedy $s = \sqrt{t^2+s^2}\cos\sigma.$
Po dosazení do $u = ri + sj + tk$ a následné úpravě získáme
$$u = ri + sj + tk = \|u\|(i\cos\omega + j\sin\omega\cos\sigma + k\sin\omega\sin\sigma).$$
Tím jsme dokázali Větu 4.7.3:



Obrázek 4.7.1

Věta 4.7.3: Každý nenulový ryze imaginární kvaternion $u = ri + sj + tk$ lze psát v goniometrickém tvaru

$$u = \|u\|(i\cos\omega + j\sin\omega\cos\sigma + k\sin\omega\sin\sigma),$$

kde uspořádaná dvojice (ω, σ) je argument kvaternionu u ($Arg(u) = (\omega, \sigma)$).

Poznámka:

- Zvolíme-li jiný druhý řídící úhel σ, vyjde nám pořadí výrazů $\cos\omega$, $\sin\omega\cos\sigma$ a $\sin\omega\sin\sigma$ ve Větě 4.7.3 jinak (viz [77]).
- Je-li kvaternion u navíc unitární, pak pro něj lze psát
$$u = (i\cos\omega + j\sin\omega\cos\sigma + k\sin\omega\sin\sigma).$$
Tento výraz je ovšem také vyjádřením imaginární vektorové jednotky $\hat{v}$ (viz [78]).
- Je-li $q = \|q\|\,(\cos\varphi + \hat{v}\sin\varphi)$ goniometrický tvar libovolného nenulového kvaternionu $q = a + \underline{v}$, pak lze za imaginární vektorovou jednotku $\hat{v}$ dosadit výraz $(i\cos\omega + j\sin\omega\cos\sigma + k\sin\omega\sin\sigma)$. Získáme **úplný goniometrický tvar kvaternionu**[21]
$$q = \|q\|\,(\cos\varphi + \ (i\cos\omega + j\sin\omega\cos\sigma + k\sin\omega\sin\sigma)\sin\varphi).$$

4.8 Exponenciální tvar a mocnina kvaternionu

Zde zavedeme s pomocí Eulerova vztahu **exponenciální tvar** kvaternionu. Tento tvar spolu s goniometrickým tvarem využijeme pro výpočet mocnin a odmocnin kvaternionů.

Věta 4.8.1: Nechť $q \in \mathbb{H}$ je jednotkový (unitární) kvaternion ve tvaru
$q = a + \underline{v} = \cos\varphi + \hat{v}\sin\varphi$, kde vektor $\hat{v} = \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|}$. Pak lze kvaternion q zapisovat ve tvaru

$$q = \cos\varphi + \hat{v}\sin\varphi = e^{\hat{v}\varphi}.$$

[21] Tento výraz se ovšem z praktických důvodů pro reprezentaci kvaternionů nevyužívá.

Poznámka:

- Věta 4.8.1 vyplývá ze zavedení goniometrického tvaru pro unitární kvaternion a z Eulerova vzorce.
- Pro $n \in \mathbb{N}$ (dokonce i pro $n \in \mathbb{R}$) v tomto případě zůstává v platnosti obdoba Moivreovy věty, tj.
$$\left(e^{\hat{v}\varphi}\right)^n = (\cos\varphi + \hat{v}\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \hat{v}\sin n\varphi = e^{\hat{v}n\varphi}.$$

Příklad: Nalezněte exponenciální tvar unitárního kvaternionu $q = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} - \frac{j}{2} - \frac{k}{2}$.

Řešení.

- Z předchozího příkladu víme, že goniometrický tvar kvaternionu je
$q = \cos\varphi + \hat{v}\sin\varphi = \cos\frac{\pi}{3} + \left(\frac{\sqrt{3}(i-j-k)}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}.$
- Exponenciální tvar se získá snadno dosazením příslušných výrazů do vzorce $e^{\hat{v}\varphi}$:
$\varphi = \frac{\pi}{3}$;
$\hat{v} = \frac{\frac{i}{2}-\frac{j}{2}-\frac{k}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{i-j-k}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(i-j-k)}{3}.$
- Tedy:
$e^{\hat{v}\varphi} = e^{\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}(i-j-k)}{3}} = e^{\frac{\sqrt{3}(i-j-k)\pi}{9}}.$

Následující větou zavedeme exponenciální tvar pro libovolný kvaternion q tvaru $q = \|q\|\,(\cos\varphi + \hat{v}\sin\varphi)$:

Věta 4.8.2: Nechť $q \in \mathbb{H}$ je libovolný kvaternion ve tvaru $q = a + \underline{v} = \|q\|\,(\cos\varphi + \hat{v}\sin\varphi)$, kde vektor $\hat{v} = \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|}$. Pak **exponenciálním tvarem kvaternionu** q budeme rozumět vztah
$$q = \|q\|\,(\cos\varphi + \hat{v}\sin\varphi) = \|q\|\,e^{\hat{v}\varphi}.$$

Důkaz: viz [2] nebo [64].

Příklad: Kvaternion $q = 2 + 2i + 2j + 2k$ vyjádřete v exponenciálním tvaru.

Řešení.

- Pro exponenciální tvar bude nutné nalézt nejprve normu kvaternionu q, vektor $\hat{v}$ a úhel φ:
$\|q\| = \sqrt{4+4+4+4} = 4$;
$\hat{v} = \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|} = \frac{2i+2j+2k}{2\sqrt{3}} = \frac{2(i+j+k)}{2\sqrt{3}} = \frac{i+j+k}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(i+j+k)}{3}$;
$\varphi = \frac{\pi}{3}$, protože
$\cos\varphi = \frac{a}{\|q\|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$;
$\sin\varphi = \frac{\|\underline{v}\|}{\|q\|} = \frac{\sqrt{4+4+4}}{4} = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$
- Exponenciální tvar kvaternionu tedy bude:
$q = \|q\|\,e^{\hat{v}n\varphi} = \|4\|\,e^{\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}(i+j+k)}{3}} = \|4\|\,e^{\frac{\sqrt{3}(i+j+k)\pi}{9}}.$

Pro kvaterniony platí obdoba Moivreovy věty:

Věta 4.8.3: Je-li $q \in \mathbb{H}$ libovolný kvaternion v goniometrickém tvaru, tj. $q = \|q\|\,(\cos\varphi + \hat{v}\sin\varphi)$. Pak pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí
$$q^n = \|q\|^n\,(\cos\varphi + \hat{v}\sin\varphi)^n = \|q\|^n\,(\cos n\varphi + \hat{v}\sin n\varphi).$$

Důkaz: viz [45], [2] nebo [64].

Poznámka:

- Věta 4.8.3 platí i pro $n \in \mathbb{Z}$ (důkaz viz [45]).
- Nesmíme zapomínat, že násobení kvaternionů není komutativní, proto pro výrazy $(p+q)^2$, $(p+q)^3$, atd. budeme psát
$$(p+q)^2 = p^2 + pq + qp + q^2;$$
$$(p+q)^3 = p^3 + p^2q + pqp + qp^2 + q^2p + qpq + pq^2 + q^3;$$
atd.
- Protože lze kvaternion q vyjádřit v exponenciálním tvaru, pak i mocnina q lze vyjádřit v exponenciálním tvaru jako
$$q^n = \|q\|^n\,(\cos\varphi + \hat{v}\sin\varphi)^n = \|q\|^n\,e^{\hat{v}n\varphi}.$$

Příklad: Vypočtěte pátou mocninu kvaternionu $q = 4\,\left(\cos\frac{\pi}{3} + \hat{v}\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

Řešení.

- Podle vzorce pro mocnění kvaternionů získáme pátou mocninu snadno:
$q^5 = \|q\|^5\,(\cos 5\varphi + \hat{v}\sin 5\varphi) = 4^5\,\left(\cos\frac{5\pi}{3} + \hat{v}\sin\frac{5\pi}{3}\right).$

V poslední části této podkapitoly se zaměříme na odmocniny kvaternionů jako na speciální případ mocnění. Pro takové případy ovšem obecně Věta 4.8.3 neplatí, neboť odmocňování kvaternionů není jednoznačné (tj. u jedné odmocniny, stejně jako u komplexních čísel, vyjde více různých výsledků).

Máme-li toto na zřeteli, pak pro libovolný kvaternion $q = \|q\|\,(\cos\varphi + \hat{v}\sin\varphi) \in \mathbb{H}$, jehož vektorová (imaginární) část není rovna nule, platí:
$$\sqrt[k]{q} = \sqrt[k]{\|q\|}\,\left(\cos\frac{(\varphi + 2\pi m)}{k} + \hat{v}\sin\frac{(\varphi + 2\pi m)}{k}\right),$$
pro $m = 0, 1, \dots, k-1$. (viz [45]).

Dosazením za m získáme postupně k navzájem různých odmocnin, které mají stejné odmocniny z $\|q\|$ a vektor $\hat{v}$, ale rozdílné argumenty.

Příklad: Nalezněte všechny páté odmocniny z kvaternionu $q = 2 + 2i + 2j + 2k$.

Řešení.

- Nejprve vyjádříme kvaternion v goniometrickém tvaru:
$q = \|q\|\,(\cos\varphi + \hat{v}\sin\varphi) = \|q\|\,\left(\frac{a}{\|q\|} + \frac{v}{\|v\|}\cdot\frac{\|v\|}{\|q\|}\right) =$
$= \sqrt{4+4+4+4}\,\left(\frac{2}{4} + \frac{2i+2j+2k}{\sqrt{4+4+4}}\cdot\frac{\sqrt{12}}{4}\right) = 4\,\left(\frac{1}{2} + \frac{2i+2j+2k}{\sqrt{12}}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{4}\right) =$
$= 4\,\left(\frac{1}{2} + \frac{2(i+j+k)}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\,\left(\frac{1}{2} + \frac{(i+j+k)}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$
$= 4\,\left(\cos\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}(i+j+k)}{3}\sin\frac{\pi}{3}\right) = 4\,\left(\cos\frac{\pi}{3} + \hat{v}\sin\frac{\pi}{3}\right)$
- Nyní dosadíme do vzorce pro odmocňování a získáme vzorec pro nalezení všech pěti odmocnin z q:
$\sqrt[k]{q} = \sqrt[k]{\|q\|}\,\left(\cos\frac{(\varphi+2\pi m)}{k} + \hat{v}\sin\frac{(\varphi+2\pi m)}{k}\right),$
$\sqrt[5]{q} = \sqrt[5]{4}\,\left(\cos\frac{\left(\frac{\pi}{3}+2\pi m\right)}{5} + \hat{v}\sin\frac{\left(\frac{\pi}{3}+2\pi m\right)}{5}\right).$
- Všechny páté odmocniny z q jsou tedy:
$\sqrt[5]{q}_0 = \sqrt[5]{4}\,\left(\cos\frac{\left(\frac{\pi}{3}+2\pi 0\right)}{5} + \hat{v}\sin\frac{\left(\frac{\pi}{3}+2\pi 0\right)}{5}\right) = \sqrt[5]{4}\,\left(\cos\frac{\pi}{15} + \hat{v}\sin\frac{\pi}{15}\right);$
$\sqrt[5]{q}_1 = \sqrt[5]{4}\,\left(\cos\frac{\left(\frac{\pi}{3}+2\pi\right)}{5} + \hat{v}\sin\frac{\left(\frac{\pi}{3}+2\pi\right)}{5}\right) = \sqrt[5]{4}\,\left(\cos\frac{7\pi}{15} + \hat{v}\sin\frac{7\pi}{15}\right);$

$$\sqrt[5]{q}_2 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\left(\frac{\pi}{3}+4\pi\right)}{5} + \hat{v}\sin\frac{\left(\frac{\pi}{3}+4\pi\right)}{5}\right) = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{13\pi}{15} + \hat{v}\sin\frac{13\pi}{15}\right);$$

$$\sqrt[5]{q}_3 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\left(\frac{\pi}{3}+6\pi\right)}{5} + \hat{v}\sin\frac{\left(\frac{\pi}{3}+6\pi\right)}{5}\right) = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{19\pi}{15} + \hat{v}\sin\frac{19\pi}{15}\right);$$

$$\sqrt[5]{q}_4 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\left(\frac{\pi}{3}+8\pi\right)}{5} + \hat{v}\sin\frac{\left(\frac{\pi}{3}+8\pi\right)}{5}\right) = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{25\pi}{15} + \hat{v}\sin\frac{25\pi}{15}\right).$$

Závěr

Tato bakalářská práce ve své úvodní části přinesla vývoj základních matematických představ od uznání nuly a záporných čísel, přes komplexní čísla, až k objevu kvaternionů. Kvaterniony byly přijaty záhy po svém objevení. Vzápětí bylo na tento objev navázáno konstruováním dalších čísel, oktonionů. Vývoj v matematice poté pokračoval dál, chápání nových čísel se zdokonalovalo a principy jejich využití byly nakonec nalezeny.

S konstrukcí nových čísel se ovšem ztrácely jednotlivé algebraické vlastnosti. Komplexní čísla ztratila vlastnost $x = x^*$, kvaterniony ztratily komutativitu pro násobení a oktávy asociativitu. Tyto zákonitosti dodržuje Caley-Dicksonův proces, užívaný pro konstrukci nových těles z tělesa reálných čísel, který byl v této práci využit.

Práce dále připomenula poznatky o komplexních číslech, jejich geometrickém významu a praktickém využití. Uvedla vyjádření komplexních čísel v různých tvarech, kupříkladu v goniometrickém či algebraickém. Výklad byl podpořen ilustrativními příklady a obrázky pro co nejlepší pochopení zákonitostí komplexních čísel, které tvoří základ pro studium kvaternionů a jejich vlastností.

Hlavní část práce byla věnována právě kvaternionům. Práce uvedla způsoby zápisu těchto čísel, jejich konstrukci, vlastnosti a operace. V ilustrativních příkladech byla demonstrována funkčnost definovaných zákonů a ukázány nejdůležitější vlastnosti. Dále byla v této části popsána geometrická reprezentace kvaternionů a nastíněno jejich praktické využití a význam.

Práce si kladla za cíl shrnout poznatky o komplexních číslech a seznámit s kvaterniony. Tento cíl považuji za splněný. Bakalářská práce obsahuje ucelený přehled poznatků o komplexních číslech a kvaternionech. Díky ilustrativním obrázkům (vytvořených v programu GeoGebra) přináší jasný výklad geometrického významu jak komplexních čísel, tak kvaternionů.

Za nejpřínosnější, nejzajímavější a zároveň nejobtížnější část práce považuji předcházející studium kvaternionů. Důležitost těchto čísel podle mne spočívá v zejména v jejich schopnosti popsat třírozměrný prostor a rotace, jež se využívá především k animaci. Vedle prohloubení poznatků o komplexních číslech, mě tato práce obohatila o zcela nové poznatky z oblasti teorie hyperkomplexních čísel a o nové chápání souvislostí matematiky s reálným světem.

Seznam použité literatury

[1]. Algebraická struktura. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001-, 7. 4. 2013 [cit. 2015-03-21]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Algebraick%C3%A1_struktura

[2]. BÁRTA, Čestmír. *Komplexní čísla a kvaterniony.* Hradec Králové, 2011. Bakalářská práce. Univerzita Hradec Králové, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky.

[3]. BEČVÁŘ, Jindřich. 150 let od objevu kvaternionů. In: *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* [online]. 1993, č. 6. [cit. 2013-04-22]. Dostupné z: http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/137554/PokrokyMFA_38-1993-6_1.pdf

[4]. BEČVÁŘ, Jindřich. *Z historie lineární algebry. Komplexní a hyperkomplexní čísla, lineární algebry* [online]. Praha: Matfyzpress, 2007 [cit. 2015-03-05]. Dostupné z: http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/400929/DejinyMat_35-2007-1_10.pdf

[5]. BERLINGHOFF, William a GOUVEA, Fernando. *Math through the Ages: A Gentle History for Teachers and Others.* Hardbound, 2004. ISBN: 978-0-88385-736-6. Dostupné z: http://books.google.cz/books?id=4ru6F85wGK4C&printsec=frontcover&hl=cs&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false (cit. 2014-03-27).

[6]. BLAŽEK, Jaroslav el al. *Algebra a teoretická aritmetika I*. Praha: SPN, 1983.

[7]. Brahmagupta. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001-, 5. 4. 2013 [cit. 2015-05-02]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Brahmagupta

[8]. BRDLÍK, Pavel. *Komplexní čísla, kvaterniony a jejich aplikace.* České Budějovice, 2013. Bakalářská práce. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky. Dostupné z: http://theses.cz/id/cifst8/Brdlk_Pavel_BAKALSK_PRCE.pdf (cit. 2015-01-10).

[9]. BŘEZINA, Jan. *Vektorové prostory* [online]. [cit. 2015-03-21]. Dostupné z: http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/~morf/vyuka/ula/3.pdf

[10]. Caley-Dickson construction. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001-, 26. 12. 2014 [cit. 2015-03-02]. Dostupné z: http://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion

[11]. COUTSIAS, Evangelos a ROMERO, Louis. *The Quaternions with an Application to Rigid Body Dynamics* [online]. University of New Mexico, Department of Mathematics and Statistics, 12. 2. 1999 [cit. 2015-03-04]. Dostupné z: http://www.math.unm.edu/~vageli/papers/rrr.pdf

[12]. CROWE, Michael. *A History of Vector Analysis* [online]. University of Louisville, 2002 [cit. 2015-02-04]. Dostupné z: https://www.math.ucdavis.edu/~temple/MAT21D/SUPPLEMENTARY-ARTICLES/Crowe_History-of-Vectors.pdf

[13]. DAM, Erik, KOCH, Martin a LILLHOLM, Martin. *Quaternions, Interpolation and Animation* [online]. University of Copenhagen in Denmark, Department of Computer Science, 17. 6. 1998 [cit. 2015-01-10]. Dostupné z: http://web.mit.edu/2.998/www/QuaternionReport1.pdf

[14]. DELVENTHAL, Katka Maria, KULICK, Malte a KISSNER, Alfred. *Kompendium matematiky: Vzorce a pravidla.* Četné příklady včetně řešení. Od základních operací po vyšší matematiku. Praha: Knižní klub, 2008. ISBN 978-80-242-2101-4.

[15]. *Dějiny matematiky* [online]. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky. [cit. 2014-03-05]. Dostupné z: https://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/DejinyM.pdf

[16]. DLAB, Vlastimil. *Komplexní čísla: Tří hodinový úvod, či spíše „letmý pohled" do komplexních čísel* [online]. Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, 26. 5. 2010 [cit. 2015-03-27]. Dostupné z: http://www.talnet.cz/documents/18/ffe5d266-8894-4377-8a24-7582d8205e8f

[17]. DOSTÁLOVÁ, Marie. *Základy matematiky*. 1. Ostrava: Vysoká škola báňská - Technická univerzita, 2006. ISBN 80-248-1196-0.
[18]. EBERLY, David. *Quaternions Algebra and Calculus* [online]. Geometric Tools, LLC, 18. 8. 2010 [cit. 2015-01-10]. Dostupné z: http://www.geometrictools.com/Documentation/Quaternions.pdf
[19]. HAŠEK, Roman. *Skalární součin* [online]. Pedagogická fakulta JU v Č. Budějovicích, Katedra matematiky [cit. 2015-03-21]. Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~hasek/LAG/Pr6/Pr_6_SkalarniSoucin.pdf
[20]. HAŠEK, Roman. *Vektorový prostor* [online]. Pedagogická fakulta JU v Č. Budějovicích, Katedra matematiky [cit. 2015-03-21]. Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~hasek/LAG/Pr2/Pr_2_VektorovyProstor.pdf
[21]. HOLUBOVÁ, Růžena. *Grupy* [online]. 2010 [cit. 2015-03-21]. Dostupné z: http://files.mfgio.webnode.cz/200000003-b558eb6530/Grupy.pdf
[22]. CHAJDA, Ivan. *Vybrané kapitoly z algebry*. 2. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého, 2000. ISBN 80-244-0205-x.
[23]. *Chapter 10: The Quaternions and the Spaces S3 , SU(2), SO(3), and RP3* [online]. [cit. 2015-01-10]. Dostupné z: http://www.cis.upenn.edu/~cis610/cis610sl7.pdf
[24]. JARNÍK, Jiří. *Komplexní čísla a funkce*. 1. vyd. Praha: Mladá fronta, 1967.
[25]. JIA, Yan-Bin. *Quaternions and Rotations* [online]. 2014 [cit. 2015-01-10]. Dostupné z: https://www.cs.iastate.edu/~cs577/handouts/quaternion.pdf
[26]. JOYCE, David. *Notes on Quaternions* [online]. Clark University, Department of Mathematics and Computer Science, 2013 [cit. 2015-02-04]. Dostupné z: http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/ma130/quaternions.pdf
[27]. KAĎOUREK, Jiří. *Euklidovské prostory* [online]. Masarykova univerzita v Brně, Přírodovědecká fakulta, Ústav matematiky a statistiky [cit. 2015-03-21]. Dostupné z: http://www.math.muni.cz/~kadourek/euklprost.pdf
[28]. KALAS, Josef. *Analýza v komplexním oboru*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2006. ISBN 80-210-4045-9.
[29]. KATRIŇÁK, Tibor. *Algebra a teoretická aritmetika I.* 1. vyd. Praha: SNTL, 1985.
[30]. KLINE, Morris. *Mathematical Throught from Ancient to Modern TImes*. Oxford University Press, 1972.
[31]. KOLÁŘOVÁ, Edita. *Matematika 2: Sbírka úloh* [online]. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Ústav matematiky [cit. 2015-03-20]. Dostupné z: http://www.umat.feec.vutbr.cz/~svobodaz/BMA2/bma2cviceni.pdf
[32]. *Komplexní čísla I* [online]. Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta UK, Matematický korespondenční seminář, 2010 [cit. 2015-04-04]. Dostupné z: http://mks.mff.cuni.cz/archive/30/9.pdf
[33]. KOSINA, Jan. *Kvaterniony a Möbiovy transformace v dimenzi 4.* Praha, 2012. Bakalářská práce. Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, Matematický ústav UK. Dostupné z: https://is.cuni.cz/webapps/zzp/download/130081838/?lang=cs (cit. 2015-01-10).
[34]. KUBAS, Pavel. *Kvaterniony, oktoniony a dál?* Praha, 2009. Bakalářská práce. Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra Algebry. Dostupné z: https://is.cuni.cz/webapps/zzp/download/130015921/?lang=cs (cit. 2015-03-20).
[35]. KUČEROVÁ, Šárka. *Algebraické struktury*. Brno, 2012. Bakalářská práce. Masarykova univerzita v Brně, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky. Dostupné z: http://is.muni.cz/th/350220/pedf_b/BP_-_konecna_verze.pdf. (cit. 21. 3. 2015).
[36]. KUIPERS, Jack. *Quaternions and Rotation Sequences* [online]. Calvin College, Department of Mathematics, 25. 6. 2006 [cit. 2015-01-10]. Dostupné z: http://www.emis.de/proceedings/Varna/vol1/GEOM09.pdf

[37]. KUŘIL, Martin. *Základy teorie grup* [online]. Univerzita Jana Evangelisty Purkyně v Ústí nad Labem, Přírodovědecká fakulta, Katedra matematiky [cit. 2015-01-10]. Dostupné z: http://katmatprf.ujepurkyne.com/materialy/kuril_grupy.pdf
[38]. *Lineární algebra a geometrie I: 2. cvičení* [online]. Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, Matematická sekce, 2010 [cit. 2015-03-21]. Dostupné z: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~vald/Cviceni_2.pdf
[39]. MARKUŠEVIČ, Aleksej Ivanovič. *Komplexní čísla a konformní zobrazení*. 2. vyd. Praha: SNTL, 1957.
[40]. MARVAN, Michal. *Učební texty k přednášce ALGEBRA II: Vektorové prostory* [online]. Slezská univerzita v Opavě, Matematický ústav, 2000 [cit. 2015-03-21]. Dostupné z: http://www.slu.cz/math/cz/knihovna/docs/algebra1/9.-vektorove-prostory
[41]. MASON, Matt. *7. Quaternions: Mechanics of Manipulation* [online]. 27. 8. 2006 [cit. 2015-01-10]. Dostupné z: http://www.cs.rpi.edu/~trink/Courses/RobotManipulation/lectures/lecture7.pdf
[42]. MATTHEWS, Keith. *Elementary Linear Algebra* [online]. University of Queensland, Department of mathematics, 24. 4. 2013 [cit. 2014-03-27]. Dostupné z: http://www.numbertheory.org/book/
[43]. MERINO, Orlando. *A Short History of Complex Numbers* [online]. University of Rhode Island, 2006 [cit. 2015-05-01]. Dostupné z: http://www.math.uri.edu/~merino/spring06/mth562/ShortHistoryComplexNumbers2006.pdf
[44]. MIROVÁ, Aneta. *Komplexní čísla a kvaterniony v geometrii.* Praha, 2009. Bakalářská práce. Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra didaktiky matematiky. Dostupné z: https://is.cuni.cz/webapps/zzp/download/130012973/?lang=en (cit. 2015-01-10).
[45]. MORAIS, João Pedro, GEORGIEV, Svetlin Georgiev a SPRÖSSI, Wolfgang. *Real Quaternionic Calculus Handbook*. Basel: Birkhauser, 2014. ISBN 978-3-0348-0621-3.
[46]. MÜLLEROVÁ, Jana. *Komplexní čísla: pro 3. ročník gymnázií se zaměřením na matematiku.* 1. vyd. Praha: SPN, 1977.
[47]. NĚMEC, Petr. *Úvod do algebry a aritmetiky.* 1. vyd. Ústí nad Labem: Univerzita Jana Evangelisty Purkyně v Ústí nad Labem, Přírodovědecká fakulta, 2006. ISBN 80-7044-764-8.
[48]. NOVÁK, Ludvík et al. *Algebra a geometrie.* 5. vyd. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2006. Učební texty vysokých škol. ISBN 80-7318-498-2.
[49]. NOVOTNÁ, Vilma a PISKLÁK, Bohuslav. *Matematika: ve studiu učitelství 1. stupně základní školy* [online]. Ostrava, 2003 [cit. 2015-03-21]. Dostupné z: http://www.osu.cz/fpd/kmd/dokumenty/1stzs.pdf
[50]. Obor integrity. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001-, 10. 11. 2014 [cit. 2015-03-21]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Obor_integrity
[51]. PAZOUREK, Karel. *Kontaktní geometrie typu F4.* Praha, 2007. Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, Matematický ústav UK. Dostupné z: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~krysl/KPdiplom.pdf (cit. 2015-03-20).
[52]. PROŠKOVÁ, Jitka. *Kvaterniony a jejich užití v geometrii.* Plzeň, 2006. Bakalářská práce. Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, Katedra matematiky. Dostupné z: http://www.aldebaran.cz/studium/vnp/docs/kvaterniony.pdf (cit. 2015-01-10).
[53]. PROŠKOVÁ, Jitka. *Kvaterniony duální kvaterniony a jejich aplikace.* Plzeň, 2009. Diplomová práce. Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, Katedra matematiky. Dostupné z: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~sir/soubory/DPMA.pdf (cit. 2015-01-10).
[54]. PROVAZNÍKOVÁ, Marie. *Algebry s dělením: Jejich historie a aplikace.* Brno, 2010. Disertační práce. Masarykova univerzita v Brně, Přírodovědecká Fakulta. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/14305/prif_d/disertace.pdf (cit. 2015-03-07).

[55]. Quaternion. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001-, 16. 4. 2015 [cit. 2015-02-04]. Dostupné z: http://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion

[56]. RÁB, Miloš. *Komplexní čísla v elementární matematice.* 2., přeprac. vyd. Brno: Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, 1996. ISBN 80-210-1475-x.

[57]. REICHL, Jaroslav. *Aplikovaná matematika* [online]. Střední průmyslová škola sdělovací techniky v Praze, 2006 [cit. 2015-01-10]. Dostupné z: https://is.cuni.cz/webapps/zzp/download/130012973/?lang=en

[58]. SÄRKKÄ, Simo. *Notes on Quaternions* [online]. Aalto University, 28. 6. 2007 [cit. 2015-03-05]. Dostupné z: http://becs.aalto.fi/~ssarkka/pub/quat.pdf

[59]. SHUTTLEWORTH, Rupert. History of Mathematics. Theory: Quaternions [online]. 2009 [cit. 2015-03-05]. Dostupné z: http://www.optimuscopri.me/quaternions.pdf

[60]. Sketching the History of Hypercomplex Numbers. In: *HyperJeff Network* [online]. 1994-2011 [cit. 2015-03-05]. Dostupné z: http://history.hyperjeff.net/hypercomplex

[61]. STAHLKE, Dan. *Quaternions in Classical Mechanics* [online]. [cit. 2015-01-10]. Dostupné z: http://www.stahlke.org/dan/publications/quaternion-paper.pdf

[62]. STUDNIČKA, František Josef. O kvaternionech I. In: *Časopis pro pěstování matematiky a fyziky* [online]. 1876, č. 2 [cit. 2015-02-03]. Dostupné z: http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/121222/CasPestMatFys_005-1876-2_1.pdf

[63]. STUDNIČKA, František Josef. O kvaternionech II. In: *Časopis pro pěstování matematiky a fyziky* [online]. 1876, č. 3 [cit. 2015-02-03]. Dostupné z: http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/108849/CasPestMatFys_005-1876-3_1.pdf

[64]. STUDNIČKA, František Josef. O kvaternionech III. In: *Časopis pro pěstování matematiky a fyziky* [online]. 1876, č. 4 [cit. 2015-02-03]. Dostupné z: http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/121715/CasPestMatFys_005-1876-4_1.pdf

[65]. ŠINDELÁŘ, Karel. *Komplexní čísla a Moivreova věta.* 1. vyd. Praha: Československá akademie věd, 1955.

[66]. ŠRÁMEK, Milan. *Kvaterniony ve fyzice.* Praha, 2010. Bakalářská práce. Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, Ústav teoretické fyziky. Dostupné z: https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/78785/ (cit. 2015-01-10).

[67]. ŠULISTA, Milan. *Základy analýzy v komplexním oboru.* Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1981.

[68]. Těleso. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001-, 16. 11. 2014 [cit. 2015-03-21]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/T%C4%9Bleso_(algebra)

[69]. TŮMA, Jiří. *Kapitola 5: Vektorové prostory* [online]. Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, Matematická sekce, 2003 [cit. 2015-03-21]. Dostupné z: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~tuma/2003/NNLinalg5.pdf

[70]. Vektorový prostor. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001-, 6. 4. 2015 [cit. 2015-03-21]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Vektorov%C3%BD_prostor

[71]. VESELÝ, Jiří. *Komplexní analýza: pro učitele*. 1. vyd. Praha: Karolinum, 2000. ISBN 80-246-0202-4.

[72]. VESELÝ, Martin. *Algoritmus pro hledání vlastních čísel kvaternionových matic* [online]. České vysoké učení technické, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, Katedra softwarového inženýrství v ekonomii [cit. 2015-01-10]. Dostupné z: http://mat.fsv.cvut.cz/KomiseVSTEZ/19sk/files/vesely_prezentace.pdf

[73]. VOKŘÍNEK, Lukáš. *Kvaterniony a geometrie v R3* [online]. [cit. 2015-03-19]. Dostupné z: http://www.math.muni.cz/~koren/Kvaterniony.pdf

[74]. VÝRUT, Radek. *Kvaterniony* [online]. Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, Katedra matematiky, 1. 4. 2009 [cit. 2015-01-10]. Dostupné z: http://geometrie.kma.zcu.cz/index.php/www/content/download/918/2589/file/Kvaterniony.pdf

[75]. ZAREMSKY, Matthew. *Beyond Complex: An Inspection of Quaternions* [online]. Kenyon College, 2007 [cit. 2015-01-10]. Dostupné z: http://documents.kenyon.edu/math/Zaremsky07.pdf

[76]. ZEDNÍK, Josef. *Algebra a teoretická aritmetika II.* 3. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého, 1993. ISBN 80-7067-293-5.

[77]. ZLATOŠ, Pavol. *Lineárna algebra a geometria: cesta z troch rozmerov s presahmi do príbuzných odborov.* 1. vyd. Bratislava: Marenčin PT, 2011. ISBN 978-80-8114-111-9. Dostupné z: http://thales.doa.fmph.uniba.sk/zlatos/la/LAG_A4.pdf (cit. 2015-02-03).