Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Cvičné didaktické testy pro přípravu ke státní maturitní zkoušce z matematiky

Vypracoval: Jiří Pivoňka
Vedoucí práce: Mgr. Hana Štěpánková, Ph.D.

České Budějovice 2018

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Cvičné didaktické testy pro přípravu ke státní maturitní zkoušce z matematiky jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích ....   ……………………….

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval paní doktorce Mgr. Haně Štěpánkové, Ph.D. za odborné vedení mé práce, cenné připomínky a dávku trpělivosti.

Anotace

Tato bakalářská práce se zabývá cvičnými didaktickými testy ke státní maturitní zkoušce z matematiky. Je rozdělena do dvou částí. První část je rozdělena do 7 kapitol. Každá kapitola se zabývá konkrétním tematickým okruhem ke státní maturitní zkoušce z matematiky. Druhá část obsahuje 3 didaktické testy. Ke každému didaktickému testu je přiloženo řešení. Cílem bakalářské práce je pomoci studentům zvládnout maturitní zkoušku z matematiky.

Annotation

This bachelor thesis deals with the practical didactic tests for the math matriculation examination. It is divided into two parts. The first part is divided into 7 chapters. Each chapter deals with a specific thematic subjects for the math matriculation examination. The second part includes 3 didactic tests. For each didactic test is assigned solution. The aim of this bachelor thesis is to help students perform math matriculation examination.

Obsah

Úvod

Má bakalářská práce, která se zabývá cvičnými didaktickými testy ke státní maturitní zkoušce z matematiky, je rozdělena do dvou částí.

První část je rozdělena na 7 kapitol. Zabývám se v nich tematickými okruhy ke státní maturitní zkoušce z matematiky. Okruhy jsou vybrané podle požadavků katalogu CERMAT. Jedná se o kapitoly Algebraické výrazy; rovnice a nerovnice; grafy funkcí; analytická geometrie; planimetrie a stereometrie; posloupnosti; pravděpodobnost, kombinatorika a statistika. Každá kapitola je dále rozdělena na jednotlivé podkapitoly. Každé jednotlivé téma obsahuje základní definice, důležité vzorečky a vybraný typický příklad doplněný slovním komentářem.

Druhá obsahuje 3 cvičné didaktické testy ke státní maturitní zkoušce z matematiky. Každý didaktický test obsahuje 15 příkladů a všechny příklady jsou bodově ohodnoceny. Ke dvěma testům je přiloženo jejich řešení i se slovním komentářem. U posledního didaktického testu jsou přiloženy pouze výsledky.

Bakalářská práce je určena především studentům posledních ročníků středních škol a gymnázií. Jejím cílem je pomoci studentům zvládnout státní maturitní zkoušku z matematiky. Práce může sloužit jako pomůcka učitelům na středních školách nebo gymnáziích.

Bakalářská práce je vypracována v programu Microsoft Word. Doplňující obrázky a grafy byly vytvořeny v programu GeoGebra 5.0.

0. Maturitní zkouška z matematiky

Státní maturitní zkouška z matematiky má formu didaktického testu. Ten je tvořený dvěma typy úloh. První část otázek je tvořena otevřenými úlohami se stručnou odpovědí. V některých případech je součástí odpovědi i postup řešení. Druhou část otázek tvoří uzavřené úlohy, kde student vypočítá příklad a vybere jednu z nabízených možností. Správná odpověď je vždy jen jedna. Za nesprávnou odpověď se neudělují záporné body. Otázky, které didaktický test obsahuje, jsou vybírány z tematických okruhů, které se probírají na středních školách či gymnáziích. Tematické okruhy a jejich zastoupení v didaktickém testu jsou uvedeny v následující tabulce.

Tematické okruhy	Zastoupené v testu (v %)
1. Číselné množiny	4–12
2. Algebraické výrazy	8–18
3. Rovnice a nerovnice	12–20
4. Funkce	10–20
5. Posloupnosti a finanční matematika	4–14
6. Planimetrie	8–18
7. Stereometrie	4–12
8. Analytická geometrie	4–14
9. Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika	4–14

Zastoupení tematických okruhů ve státní maturitní zkoušce z matematiky. ([10], str. 13)

Každá otázka je bodově ohodnocena. Maximální bodové ohodnocení činí 50 bodů. Hranice úspěšnosti je stanovena na 33%.

Student má na vypracování didaktického testu 105 minut. K dispozici může mít Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro střední školy, kalkulátor (bez grafického režimu, řešení rovnic a úprav algebraických výrazů) a rýsovací potřeby. ([10], str. 13)

1. Algebraické výrazy

Algebraický výraz je výraz skládající se z čísel a z písmen označujících proměnné, jež jsou spojeny znaky operací sčítání, odčítání, násobení, dělení, umocňování a odmocňování. $([7], \text{str. } 120)$

Proměnná označuje libovolné písmeno, které zastupuje číslo z určité množiny.

Konkrétní čísla, které se objevují ve výrazech, nazýváme **konstanty**.

Příklady algebraických výrazů:

1. $V(x) = 4x + 6, D(V) = R, kde\ D(V)$je definiční obor výrazu V.

2. $V(x) = 6x^2 + 2x + 1, D(V) = \ R.$

3. $V(x) = \frac{\sqrt{4x^4+2x^2}}{x+1}, D(V) = R - \{-1\}.$

Ad. 3 U každého lomeného výrazu je třeba vyšetřit podmínky výrazu, nebo určit jeho definiční obor.

Než začneme počítat algebraické výrazy je potřeba uvést základní matematické vzorce pro počítání algebraických výrazů.

Mocniny a odmocniny

1. $a^r * a^s = a^{r+s},\ \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

2. $(a^r)^s = a^{r*s},\ a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{a^r}$

3. $(a * b)^r = a^r * b^r,\ \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$

4. $\sqrt[r]{a} * \sqrt[r]{b} = \sqrt[r]{a * b},\ \frac{\sqrt[r]{a}}{\sqrt[r]{b}} = \sqrt[r]{\frac{a}{b}}$

5. $\sqrt[r]{\sqrt[s]{a}} = \sqrt[r*s]{a},\ \left(\sqrt[r]{a}\right)^s = \sqrt[r]{a^s}$

Rozklad mnohočlenů

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. $a^2 - b^2 = (a+b) * (a-b)$

4. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

5. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

6. $a^3 + b^3 = (a+b) * (a^2 - ab + b^2)$

7. $a^3 - b^3 = (a-b) * (a^2 + ab + b^2)$

Příklad 1: Pro $a \in \mathbf{R} / \{-5,5\}$ zjednodušte**:**

$$\frac{5a}{5-a} - \frac{10a^2}{25-a^2}$$

([8], jaro 2016)

Řešení:

V prvním kroku se zaměříme na výraz $25 - a^2$. Víme, že číslo 25 lze napsat jako 5^2. Dostaneme výraz $5^2 - a^2$, který již umíme rozložit podle vzorečku $a^2 - b^2$.

$$\frac{5a}{5-a} - \frac{10a^2}{5^2-a^2} = \frac{5a}{5-a} - \frac{10a^2}{(5-a)*(5+a)} =$$

Společný jmenovatel je $(5-a)(5+a)$. Výrazy od sebe odečteme.

$$\frac{5a*(5+a)-10a^2}{(5-a)*(5+a)} = \frac{25a+5a^2-10a^2}{(5-a)*(5+a)} = \frac{25a-5a^2}{(5-a)*(5+a)} =$$

Z výrazu $25a - 5a^2$ vytkneme $5a$.

$$\frac{5a*(5-a)}{(5-a)*(5+a)} =$$

Po vytknutí už jen zkrátíme výraz $(5-a)$ a máme výsledek.

$$\frac{5a}{(5+a)}$$

Příklad 2: Zjednodušte:

$$\sqrt{\frac{\sqrt{a} * \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^4} * \sqrt{a^3}}}$$

Řešení:

Nejprve se musíme zbavit velké odmocniny. Použijeme pravidlo $\sqrt[r]{\sqrt[s]{a}} = \sqrt[r*s]{a}$.

$$\frac{\sqrt[4]{a} * \sqrt[6]{a}}{\sqrt[6]{a^4} * \sqrt[4]{a^3}}$$

Nyní můžeme postupovat dvěma způsoby. Buď půjdeme cestou odmocnin, nebo si převedeme odmocniny na mocniny. Ukážeme si obě cesty.

1. způsob (odmocniny):

Najdeme si nejmenší společný násobek odmocnin. Ve výrazu se nám objevuje $\sqrt[4]{\ }$ a $\sqrt[6]{\ }$. Nejmenší společný násobek čísel 4 a 6 je číslo 12. Každou odmocninu převedeme na odmocninu dvanáctou.

$$\frac{\sqrt[4]{a} * \sqrt[6]{a}}{\sqrt[6]{a^4} * \sqrt[4]{a^3}}$$

Z každé odmocniny musíme udělat $\sqrt[12]{\ }$.

$$\frac{\sqrt[12]{a^3} * \sqrt[12]{a^2}}{\sqrt[12]{a^8} * \sqrt[12]{a^9}}$$

Teď již vše můžeme napsat pod jednu společnou dvanáctou odmocninu.

$$\sqrt[12]{\frac{a^3 * a^2}{a^8 * a^9}}$$

Sečteme proměnné uvnitř výrazu. Využijeme pravidlo $a^r * a^s = a^{r+s}$.

$$\sqrt[12]{\frac{a^5}{a^{17}}}$$

Následně odečteme proměnné uvnitř výrazu. Využijeme pravidlo $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$.

$$\sqrt[12]{a^{-12}}$$

Odmocnina a mocnina se nám vykrátí a máme výsledek.

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

2. způsob (mocniny):

Každou odmocninu si převedeme na mocninu.

$$\frac{\sqrt[4]{a} * \sqrt[6]{a}}{\sqrt[6]{a^4} * \sqrt[4]{a^3}} = \frac{a^{\frac{1}{4}} * a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{4}{6}} * a^{\frac{3}{4}}}$$

Výrazy sečteme podle pravidla $a^r * a^s = a^{r+s}$ a následně odečteme.

$$\frac{a^{\frac{5}{12}}}{a^{\frac{17}{12}}} = a^{-\frac{12}{12}}$$

Následně odečteme podle pravidla $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ a máme výsledek.

$$a^{-\frac{12}{12}} = a^{-1} = \frac{1}{a}$$

Příklad 3: Zjednodušte:

$$\frac{2m^2 - 20m + 50}{4m - 20 + 6ym - 30y} \qquad ([4], \text{str. } 45)$$

Řešení:

Nejprve si musíme určit podmínky.

$$4m - 20 + 6ym - 30y \neq 0$$

Uplatníme postupné vytýkání. Konkrétně vytkneme proměnou $2m$ a konstantu (-10).

$$2m * (2 + 3y) - 10 * (2 + 3y) \neq 0$$

$$(2m - 10) * (2 + 3y) \neq 0$$

Získaný součin nebude roven nule, když žádná ze závorek nebude rovna nule. Tedy:

$2m - 10 \neq 0$ $\quad\quad$ $2 + 3y \neq 0$

$2m \neq 10$ $\quad\quad$ $3y \neq -2$

$m \neq 5$ $\quad\quad$ $y \neq -\frac{2}{3}$

Podmínky máme hotové, můžeme začít řešit samotný výraz.

Vidíme, že jak v čitateli, tak ve jmenovateli jsou všechny hodnoty sudé. Tudíž si vytkneme číslo 2, abychom si usnadnili práci. Ve jmenovateli použijeme rozklad z podmínek.

$$\frac{2*(m^2-10m+25)}{2*(2m-10+3ym-15y)}$$

$$\frac{(m^2-10m+25)}{(m-5)*(2+3y)}$$

Výraz v čitateli je vzorec $(a-b)^2$.

$$\frac{(m-5)^2}{(m-5)*(2+3y)}$$

Výraz $(m-5)$ se nám vykrátí a máme výsledek.

$$\frac{(m-5)}{(2+3y)}$$

2. Rovnice a nerovnice

2.1 Lineární rovnice

Lineární rovnicí s neznámou x nazýváme každou rovnici tvaru

$$ax + b = 0$$

kde a, b jsou libovolná reálná nebo komplexní čísla. $([7], \text{str. } 205)$

Po vyřešení lineární rovnice mohou nastat pouze tři případy:

1. Je-li $a \neq 0 \ a \ ax = -b$, pak má rovnice $ax + b = 0$ **právě jedno** řešení.

2. Je-li $a = b = 0$, pak má rovnice $ax + b = 0$ **nekonečně mnoho** řešení.

3. Je-li $a = 0 \ a \ b \neq 0$, pak rovnice $ax + b = 0$ **nemá** řešení.

Příklad 1: V oboru **R** řešte:

$\frac{8x}{4x-8} + \frac{16}{2x^2-4x} = 2$

Řešení:

Vždy, než začneme počítat rovnice je zapotřebí si udělat podmínky.

$4x - 8 \neq 0$	$2x^2 - 4x \neq 0$
$4x \neq 8$	$x * (2x - 4) \neq 0$
$x \neq 2$	$x \neq 0, \ \ x \neq 2$

S podmínek je jasné že rovnice se nesmí rovnat 0 a 2. Teď již můžeme řešit rovnici.

V prvním kroku si v prvním jmenovateli vytkneme 2 a ve druhém jmenovateli x.

$\frac{8x}{2*(2x-4)} + \frac{16}{x*(2x-4)} = 2$

Po vytknutí celou rovnici vynásobíme $2 * x * (2x - 4)$ a sečteme společné výrazy. Na závěr se musíme podívat, jestli je výsledek v souladu s podmínkami.

$8x * x + 16 * 2 = 2 * 2 * x * (2x - 4)$

$8x^2 + 36 = 8x^2 - 16x$

$36 = -16x \ \ => \ \underline{x = -2}$

Příklad 2: V oboru **R** řešte:

$$\frac{6x-24}{x^2-16}+\frac{4x}{x+4}=\frac{(2x+4)^2}{(x+4)*(x-4)}$$

Řešení:

Opět, než začneme řešit rovnici je potřeba udělat si podmínky.

$x+4 \neq 0 \qquad x-4 \neq 0$

$x \neq -4 \qquad x \neq 4$

Podmínku musíme udělat i u výrazu x^2-16. Stačí si uvědomit, že číslo 16 lze napsat jako 4^2 a pak už jen použít vzorec $a^2-b^2=(a+b)*(a-b)$. Po této úpravě nám vyjde součin $(x-4)*(x+4)$. Čísla 4 a -4 jsme již vyloučili v předchozím kroku. Podmínky máme vyřešené, můžeme začít počítat rovnici. V prvním kroku uděláme stejnou úpravu jako u podmínek.

$$\frac{6x+24}{(x+4)*(x-4)}+\frac{4x}{x+4}=\frac{(2x-4)^2}{(x+4)*(x-4)}$$

Nyní si z výrazu $6x+24$ vytkneme číslo 6.

$$\frac{6*(x+4)}{(x+4)*(x-4)}+\frac{4x}{x+4}=\frac{(2x-4)^2}{(x+4)*(x-4)}$$

V prvním zlomku se nám vykrátí výraz $(x+4)$. Následně vynásobíme celou rovnici výrazem $(x-4)*(x+4)$ a roznásobíme závorky.

$$6*(x+4)+4x*(x-4)=(2x-4)^2$$

$$6x+24+4x^2-16x=(2x-4)^2$$

Použijeme vzorec $(a+b)^2$ a sečteme výrazy.

$$6x+24+4x^2-16x=4x^2-16x+16$$

$$6x=-8 \ => \ x=-\frac{8}{6} \ => \ x=-\frac{4}{3}$$

Na závěr jen zkontrolujeme, jestli se výsledek neshoduje s podmínkami.

2.2 Lineární nerovnice

Příklad 1: V oboru **R** řešte soustavu nerovnic:

$\frac{2x-7}{6} < \frac{4x+8}{3}$

$\frac{x-5}{4} + (x+3) \geq \frac{4x}{3}$

Řešení:

Při soustavě nerovnic postupujeme stejným způsobem, jako když řešíme lineární rovnici. Tedy vyřešíme si v každé rovnici neznámou x.

$\frac{2x-7}{6} < \frac{4x+8}{3} \quad /\cdot 6$

$2x - 7 < 2 * (4x + 8)$

$2x - 7 < 8x + 16$

$-23 < 6x$

$-\frac{23}{6} < x$

$\frac{x-5}{4} + (x+3) \geq \frac{4x}{3} \quad /\cdot 12$

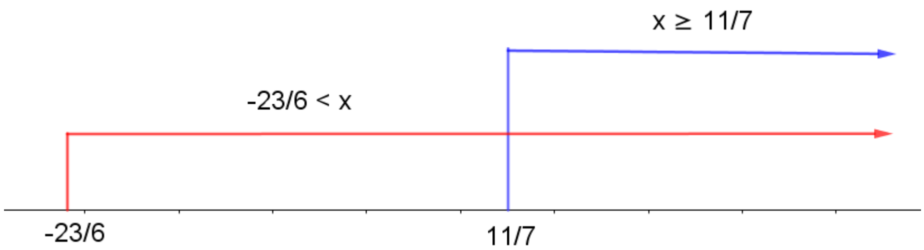
$3 * (x - 5) + 12 * (x + 3) \geq 4 * (4x + 8)$

$3x - 15 + 12x + 36 \geq 8x + 32$

$7x \geq 11$

$x \geq \frac{11}{7}$

Nyní si obě informace vyneseme na osu. Červeně si vyznačíme všechny možnosti pro $-\frac{23}{6} < x$ a modře všechny možnosti pro $x \geq \frac{11}{7}$.



Všechna reálná čísla, která spadají pod obě vyšrafované plochy, jsou řešením nerovnice. A to včetně čísla $\frac{11}{7}$, protože nám vyšlo že x je **větší** nebo **rovno** $\frac{11}{7}$.

Výsledek nerovnice tedy zní: $x \in \langle\frac{11}{7}, \infty)$.

2.3 Kvadratické rovnice

Kvadratickou rovnicí s neznámou x nazýváme každou rovnici tvaru

$$ax^2 + bx + c = 0$$

kde a, b, c jsou libovolná reálná, resp. komplexní čísla, $a \neq 0$. ([7], str. 211)

Kvadratickou rovnici $ax^2 + bx + c = 0$ řešíme buď vhodným rozkladem, nebo metodou diskriminantu:

$$D = b^2 - 4ac.$$

Reálné kořeny x_1, x_2 pak určíme vzorcem:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Po vyřešení kvadratické rovnice mohou nastat pouze tři případy:

1. Je-li $D > 0$, pak má rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ **dva různé** kořeny.

2. Je-li $D = 0$, pak má rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ **dva sobě rovné** kořeny.

3. Je-li $D < 0$, pak rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ **nemá** řešení.

Příklad 1: V oboru **R** řešte**:**

$$(x + 4)^2 + (x - 8)^2 = 90$$

Řešení:

Při řešení postupujeme stejným způsobem jako u řešení lineárních rovnic. Potřebujeme každou rovnici dostat do námi požadovaného tvaru, tedy $ax^2 + bx + c = 0$. Nejprve si tedy rozložíme oba součiny a výrazy sečteme.

$$x^2 + 8x + 16 + x^2 - 16x + 64 = 90$$

$$2x^2 - 8x - 10 = 0$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

Rovnici jsme dostali do tvaru, kdy již můžeme dosadit do diskriminantu, kde $a = 1, b = -4, c = -5$.

$D = (-4)^2 - 4 * 1 * (-5)$

$D = 16 + 20$

$D = 36$

Diskriminant je větší než 0 to znamená, že rovnice bude mít dva reálné kořeny. Pro jejich výpočet použijeme výše zmíněný vzorec.

$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{36}}{2*1}$

$x_1 = \frac{4+6}{2}$ $\quad$ $x_2 = \frac{4-6}{2}$

$x_1 = 5$ $\quad$ $x_1 = -1$

Rovnice má řešení $K = \{-1,\ 5\}$.

Příklad 2: V oboru **R** řešte:

$(x + 3)^2 - (x + 4)^2 = (x - 10)^2 - 26$

Řešení:

Postupujeme stejně jako u příkladu 1. Rozložíme si vzorce a rovnici dostaneme do námi požadovaného tvaru.

$x^2 + 6x + 9 - (x^2 + 8x + 16) = x^2 - 20x + 100 - 26$

$-x^2 + 18x - 81 = 0$

Provedeme výpočet diskriminantu. Tentokrát $a = -1, b = 18, c = -81$.

$D = 18^2 - 4 * (-1) * (-81)$

$D = 324 - 324$

$D = 0$

Využijeme stejný vzorec pro výpočet kořenů, ale jelikož nám diskriminant vyšel 0, budeme hledat pouze jeden kořen. Jelikož $\sqrt{0} = 0$.

$x = \frac{-18}{2*(-1)}$

$x = \frac{-18}{-2}$

$x = 9$

Rovnice má řešení $K = \{9\}$.

Příklad 3: V oboru **R** řešte:

$5 = (4x + 3)^2 - 16x$

Řešení:

Rozložíme si výraz a sečteme hodnoty.

$5 = 16x^2 + 24x + 9 - 16x$

$0 = 16x^2 + 8x + 4 \ /:4$

$0 = 4x^2 + 2x + 1$

Použijeme diskriminant. Vidíme, že $a = 4, b = 2, c = 1$.

$D = 2^2 - 4 * 4 * 1$

$D = 4 - 16$

$D = -12$

Diskriminant nám vyšel menší než 0 a to znamená, že rovnice nemá řešení na množině reálných čísel.

2.4 Iracionální rovnice

Iracionální rovnicí nazýváme rovnici v níž se vyskytuje neznáma pod odmocninou. Při řešení takových rovnic zpravidla užíváme jednu neekvivalentní úpravu, která může způsobit, že řešení rovnice nemusí být správným řešením. Musíme tedy na konci udělat zkoušku.

Příklad 1: Řešte v **R** iracionální rovnici:

$$\sqrt{2x-5}+2=x$$

$([4], \mathrm{str.}\, 72)$

Řešení:

Nejprve si převedeme číslo 2 na druhou stranu rovnice.

$$\sqrt{2x-5}=x-2$$

Nyní celou rovnici umocníme na druhou. Pozor, jde o úpravu, kterou provádíme s celou pravou i levou stranou rovnice.

$$\sqrt{2x-5}=x-2 \quad /\,(\,)^2$$

$$\left(\sqrt{2x-5}\right)^2=(x-2)^2$$

Mocnina a odmocnina se nám vykrátí. Druhý výraz rozložíme podle vzorečku.

$$2x-5=x^2-4x+4$$

$$x^2-6x+9=0$$

Provedeme stejnou úpravu jako u kvadratické rovnice.

$$D=6^2-4*1*9$$

$$D=36-36$$

$$D=0$$

$$x=\frac{6\pm\sqrt{0}}{2*1}=3$$

Nyní musíme provést zkoušku, abychom zjistili, zda výsledek vyhovuje.

Jak už jsme v úvodu kapitoly zmínili, u iracionální rovnice je zkouška součástí řešení! Zkoušku provádíme dosazením výsledku do původní rovnice!

$L = \sqrt{2 * 3 - 5} + 2 = \sqrt{6 - 5} + 2 = \sqrt{1} + 2 = 1 + 2 = 3$

$P = 3$

Levá strana vyhovuje pravé straně.

Rovnice má řešení $K = \{3\}$.

2.5 Exponenciální a logaritmické rovnice

Exponenciální rovnicí nazýváme rovnici, ve které je neznáme $x \in R$ v exponentu nějaké mocniny tvaru a^x, kde $a > 0$, $a \neq 1$ je daná konstanta.

Základní exponenciální rovnice s neznámou $x \in R$ jsou rovnice ve tvaru

$a^x = b,$ kde $a \in R^+/\{1\}, b \in R^+.$ ([7], str. 231)

Exponenciální rovnice se řeší převodem na stejný základ a s následným porovnáním exponentů, tedy:

$$a^m = a^n \ => m = n.$$

Při řešení exponenciální rovnice můžeme využít následující věty:

1. $a^0 = 1$

2. $a^r * a^s = a^{r+s}, \ a^r : a^s = a^{r-s}$

3. $(a^r)^s = \ a^{r*s}$

4. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-r} = \left(\frac{b}{a}\right)^r$, kde $a \in R^+$ a $r, s \ \in R$.

Příklad 1: Řešte v **R** následující rovnici:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2x+1}{x-1}} = \left(\frac{125}{8}\right)^{3-x} \qquad ([4], \text{str.}\,144)$$

Řešení:

Nejprve si zlomky převedeme na stejný základ. Vidíme, že druhý zlomek je mocninou toho prvého. První zlomek máme $\frac{2}{5}$ a víme, že číslo 8 lze napsat jako 2^3 a číslo 125 jako 5^3.

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2x+1}{x-1}} = \left(\frac{5^3}{2^3}\right)^{3-x}$$

Využijeme pravidlo $(a^r)^s = (a)^{r*s}$.

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2x+1}{x-1}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{3*(3-x)}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2x+1}{x-1}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{9-3x}$$

Převrátíme druhý zlomek s tím, že exponent vynásobíme (-1).

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2x+1}{x-1}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{3x-9}$$

Nyní máme stejné základy a tak počítáme pouze exponenty jako klasickou rovnici. Nesmíme zapomenout na podmínky.

$\frac{2x+1}{x-1} = 3x - 9$, přičemž $x \neq 1$

$$2x + 1 = (x - 1) * (3x - 9)$$

$$2x + 1 = 3x^2 - 9x - 3x + 9$$

$$0 = 3x^2 - 14x + 8$$

Dopočítáme jako kvadratickou rovnici.

$D = 14^2 - 4 * 3 * 8$

$D = 100$

$x_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{100}}{2*3}$

$x_1 = 4, \;\; x_2 = \frac{2}{3}$

Rovnice má řešení $K = \left\{\frac{2}{3}, 4\right\}$.

Logaritmickou rovnici nazýváme rovnici, v níž jsou logaritmy výrazů s neznámou $x \in R^+$.

Základní logaritmická rovnice s neznámou $x \in R^+$ jsou rovnice tvaru

$\log_a x = b,$ kde $a \in R^+/\{1\}, b \in R^+$. ([7], str. 233)

Při řešení logaritmické rovnice můžeme využít následující věty:

1. $\log_a 1 = 0, \;\; \log_a a = 1$

2. $\log_a r = \log_a s => r = s$

3. $\log_a(r * s) = \log_a r + \log_a s, \;\; \log_a(\frac{r}{s}) = \log_a r - \log_a s$

4. $\log_a r^s = s * \log_a r$, kde $a \in R^+$ a $r, s \in R$.

Při řešení logaritmů daného čísla využíváme tzv. logaritmické kolečko.

$$\log_a x = y => \; a^y = x$$

Příklad 2: Řešte v **R** následující rovnici:

$\log_2 16 = y$

Řešení:

Využijeme tzv. logaritmické kolečko $\log_a x = y => \ a^y = x$.

$\log_2 16 = y$

$2^y = 16$

Zde využijeme stejný postup jako u exponenciální rovnice.

$2^y = 2^4$

$y = 4$

Příklad 3: Řešte v **R** následující rovnici:

$\log_{\frac{1}{5}}(x+8) - \log_{\frac{1}{5}}(3+2x) = -1 - \log_{\frac{1}{5}} x$

Řešení:

Vždy než začneme řešit logaritmickou rovnici, musíme udělat podmínky. Logaritmované číslo musí být vždy kladné.

$x + 8 > 0, \quad 3 + 2x > 0, \quad x > 0$

$x > -8, \qquad x > -\frac{3}{1}$

Řešením rovnice může být jen číslo větší než nula. Nyní můžeme začít řešit samotnou rovnici.

Nejprve se pokusíme zbavit se konstanty (-1). Využijeme pravidlo $\log_a a = 1$.

$\log_{\frac{1}{5}}(x+8) - \log_{\frac{1}{5}}(3+2x) = -\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{5} - \log_{\frac{1}{5}} x$

Pro usnadnění práce převeďme si logaritmy tak, aby se neodečítaly, ale sčítaly.

$\log_{\frac{1}{5}}(x+8) + \log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{5} + \log_{\frac{1}{5}} x = \log_{\frac{1}{5}}(3+2x)$

Nyní na levé straně rovnice logaritmy sečteme. Jelikož máme logaritmy o stejném základu, využijeme pravidla $\log_a r + \log_a s = \log_a r * s$, kde $r, s \in R^{+}$.

$$\log_{\frac{1}{5}}((x+8) * \frac{1}{5} * x) = \log_{\frac{1}{5}}(3+2x)$$

$$\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{x^2+8x}{5}\right) = \log_{\frac{1}{5}}(3+2x)$$

Máme logaritmy o stejném základu na obou stranách rovnice. Nyní je můžeme vypustit a počítat klasickou rovnici. Využíváme jedné vlastnosti logaritmické funkce, že je to funkce prostá.

$$\frac{x^2+8x}{5} = 3+2x \ \ /*5$$

$$x^2 + 8x = 5 * (3+2x)$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

Počítáme kvadratickou rovnici.

$$D = 2^2 - 4 * 1 * (-15)$$

$$D = 64$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2*1}$$

$$x_1 = 5, \ \ x_2 = -3$$

Zkontrolujeme, jestli je výsledek v souladu s podmínkami. Vidíme, že číslo (-3) nám nevyhovuje.

Rovnice má řešení $K = \{5\}$.

Příklad 4: Řešte v **R** následující rovnici:

$$\left(\frac{9}{25}\right)^{2x} * \left(\frac{125}{27}\right)^{x-1} = \frac{\log 8}{\log 32}$$

Řešení:

Opět provedeme úpravu na stejný základ. V prvním zlomku si všimneme, že jde o základ $\frac{3}{5}$ a na stejný základ zkusíme napsat i druhý zlomek. Stejnou úpravu uděláme i u logaritmů.

$$\left(\frac{3^2}{5^2}\right)^{2x} * \left(\frac{5^3}{3^3}\right)^{x-1} = \frac{\log 2^3}{\log 2^5}$$

U zlomků využijeme úpravu $(a^r)^s = (a)^{r*s}$ a u logaritmů $\log a^n = n * \log a$.

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{4x} * \left(\frac{5}{3}\right)^{3x-3} = \frac{3*\log 2}{5*\log 2}$$

Logaritmy se nám vykrátí. Všechny výrazy dostaneme na společný základ.

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{4x} * \left(\frac{3}{5}\right)^{(-1)*(3x-3)} = \frac{3}{5}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{4x} * \left(\frac{3}{5}\right)^{3-3x} = \left(\frac{3}{5}\right)^{1}$$

Na levé straně rovnice oba zlomky vynásobíme. Použijeme pravidlo $(a)^r * (a)^s = (a)^{r+s}$.

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{4x+3-3x} = \left(\frac{3}{5}\right)^{1}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x+3} = \left(\frac{3}{5}\right)^{1}$$

Máme společné základy, počítáme klasickou rovnici.

$$x + 3 = 1$$

$$x = -2$$

Rovnice má řešení $K = \{-2\}$.

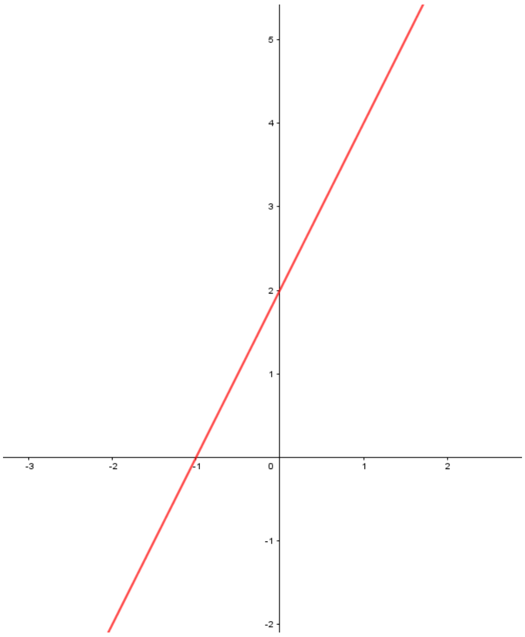
3. Funkce

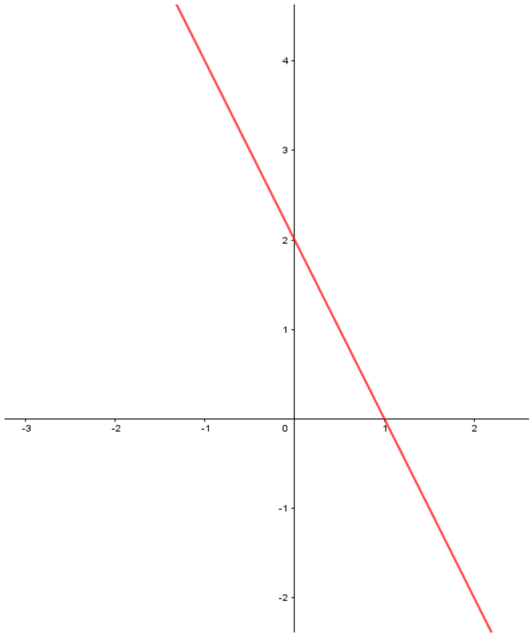
3.1 Lineární funkce

Předpis: $f: y = ax + b$, kde $a, b \in R$. Grafem funkce f je přímka.

Jestliže: $a > 0$, je f rostoucí.

$a < 0$, je f klesající.





Lineární funkce: $f: y = 2x + 2$

$D(f) = R$

$H(f) = R$

Lineární funkce: $f: y = -2x + 2$

$D(f) = R$

$H(f) = R$

Průsečíky: $f(x): y = 2x + 2$

$f \cap \text{osa } x = [x, 0]$

$0 = 2x + 2$

$2x = -2$

$x = -1$

$f \cap x = [-1,0]$

$f \cap \text{osa } y = [0, y]$

$y = 2 * 0 + 2$

$y = 2$

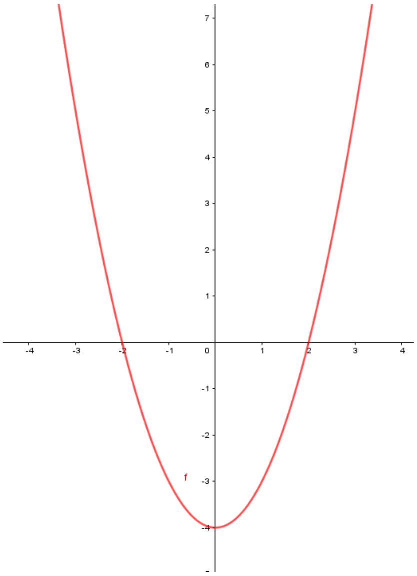
$f \cap y = [0,2]$

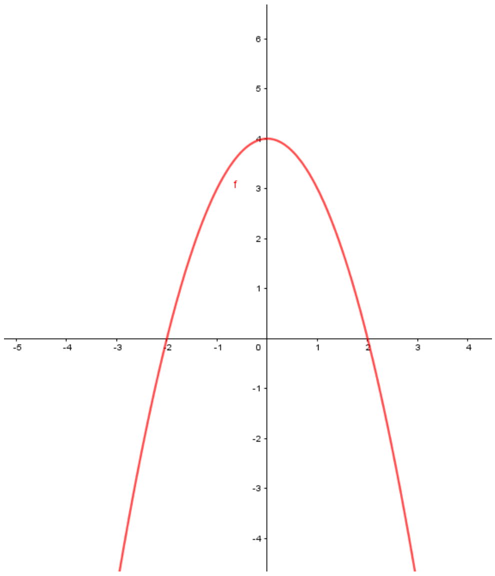
3.2 Kvadratická funkce

Předpis: $f: y = ax^2 + bx + c$, kde $a, b, c \in R$. Grafem funkce f je parabola.

Jestliže: $a > 0$, je f konvexní.

$a < 0$, je f konkávní.





Kvadratická funkce: $f: y = x^2 - 4$

$D(f) = R$

$H(f) = \langle -4, \infty)$

Kvadratická funkce: $f: y = -x^2 + 4$

$D(f) = R$

$H(f) = \langle 4, -\infty)$

Průsečíky: $f: y = x^2 - 4$

$f \cap \text{osa } x = [x, 0]$

$0 = x^2 - 4$

$0 = x^2 - 2^2$

$0 = (x - 2) * (x + 2)$

$x_1 = 2, \;\; x_2 = -2$

$f \cap x = [-2,0], [2,0]$

$f \cap \text{osa } y = [0, y]$

$y = 0^2 - 4$

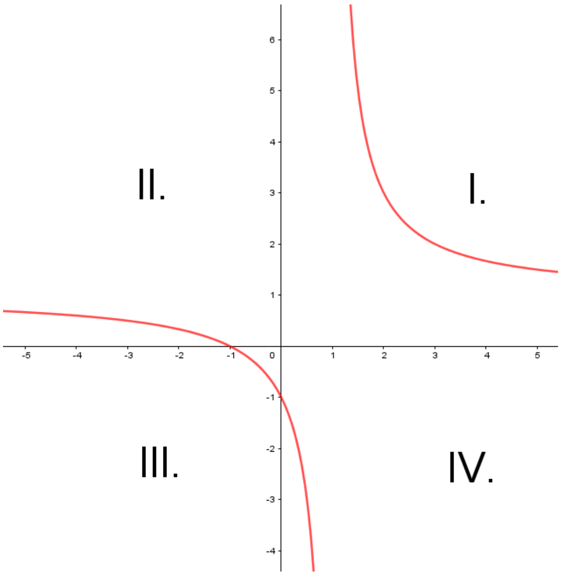
$y = -4$

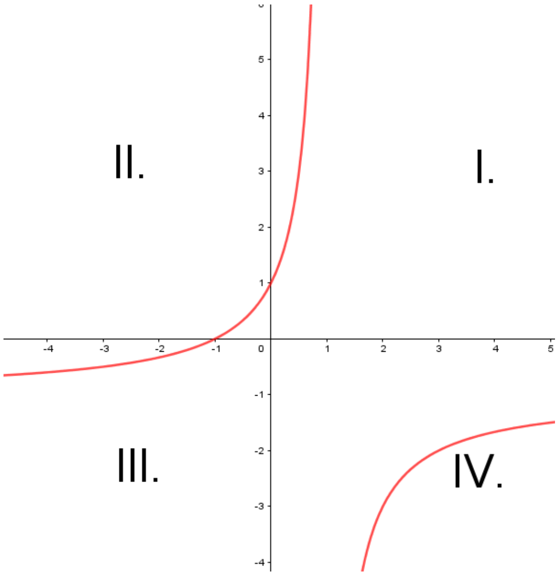
$f \cap y = [0, -4]$

Pokud vrchol paraboly neleží na ose y, použijeme vzorec: $V = \frac{-b}{2a}$, tím zjistíme souřadnici *x*, kterou následně dosadíme do původní rovnice pro zjištění souřadnice *y*.

3.3 Lineární lomená funkce

Předpis: $f(x): y = \frac{ax+b}{cx+d}$, kde $a, b, c, d \in R, c \neq 0$. Grafem funkce f je hyperbola.





Lineární lomená funkce: $f: y = \frac{x+1}{x-1}$

Lineární lomená funkce: $f: y = -\frac{x+1}{x-1}$

$D(f)$ vychází s podmínky výrazu, tedy $x - 1 \neq 0$

$D(f) = R\ /\{1\}$

$D(f) = R\ /\{1\}$

$H(f)$ vychází ze vzorečku $H(f) = R\ / \left\{\frac{a}{c}\right\}$. V našem případě $H(f) = R\ / \left\{\frac{1}{1}\right\}$.

$H(f) = R\ /\{1\}$

$H(f) = R\ /\{-1\}$

Průsečíky: $f: y = \frac{x+1}{x-1}$

$f \cap \text{osa } x = [x, 0]$

$0 = \frac{x+1}{x-1}\ \ /* (x-1)$

$0 = x + 1$

$x = -1$

$f \cap x = [-1{,}0]$

$f \cap \text{osa } y = [0, y]$

$y = \frac{0+1}{0-1}$

$y = -1$

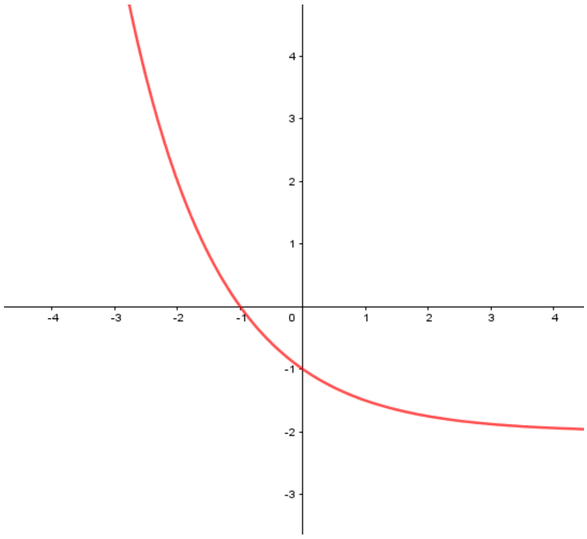
$f \cap y = [0, -1]$

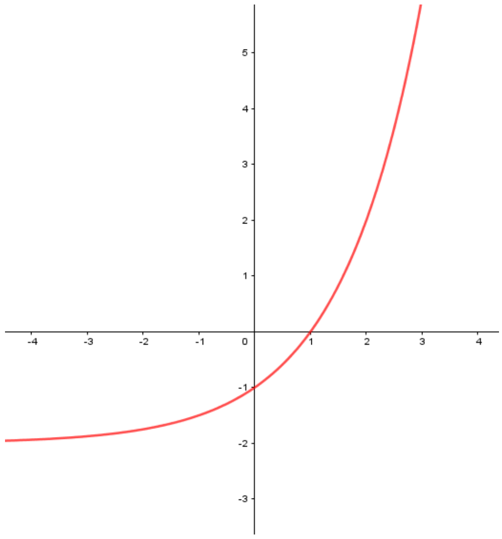
3.4 Exponenciální funkce

Předpis: $f: y = a^x$, kde $a \in R, a > 0, a \neq 1$.

Jestliže: $x > 0$, je f klesající.

$x < 0$, je f rostoucí.





Exponenciální funkce: $f: y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$

$D(f) = R$

$H(f)$ vychází s konstanty c.

$H(f) = \langle 2, \infty)$

Exponenciální funkce: $f: y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} - 2$

$D(f) = R$

$H(f) = \langle 2, \infty)$

Průsečíky: $f: y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$

$f \cap \text{osa } x = [x, 0]$

$0 = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$

$2 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$x = -1$

$f \cap x = [-1{,}0]$

$f \cap \text{osa } y = [0, y]$

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^0 - 2$

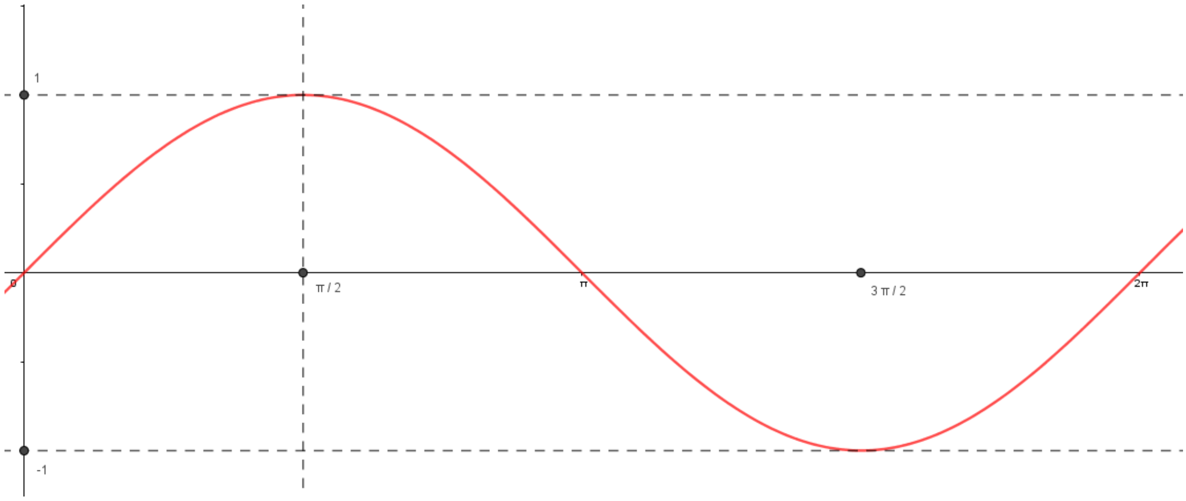
$y = 1 - 2$

$y = -1$

$f \cap y = [0, -1]$

3.5 Goniometrické funkce

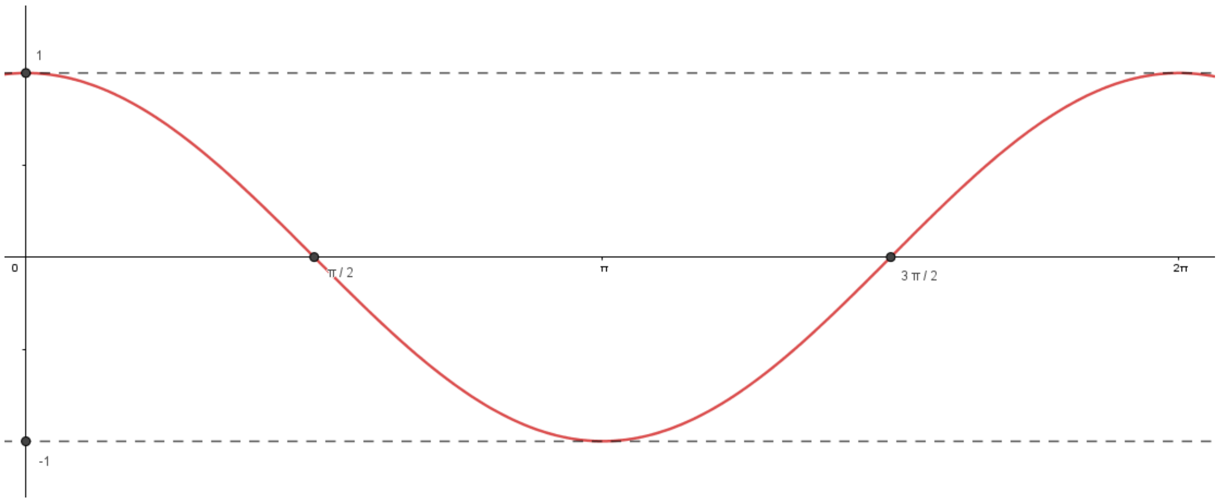
1. $f: y = \sin x$



$D(f) = R$

$H(f) = \langle -1, 1 \rangle$

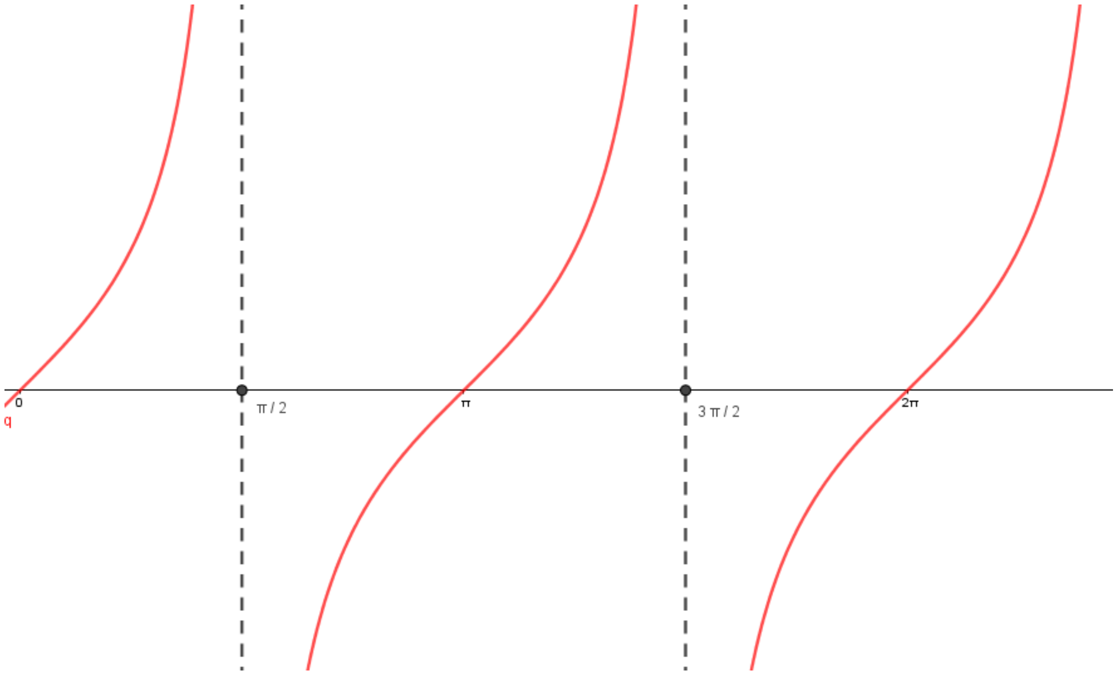
2. $f: y = \cos x$



$D(f) = R$

$H(f) = \langle -1, 1 \rangle$

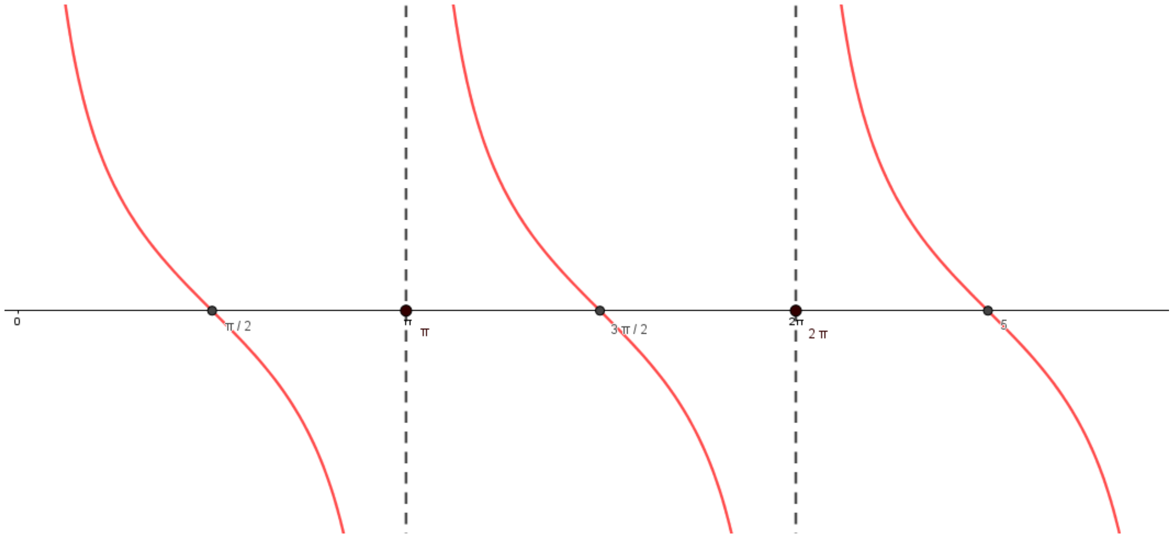
3. $f: y = \tan x$



$D(f) = R/\{90° + k * 180°\}$

$H(f) = R$

4. $f: y = \cot x$



$D(f) = R/\{k * 180°\}$

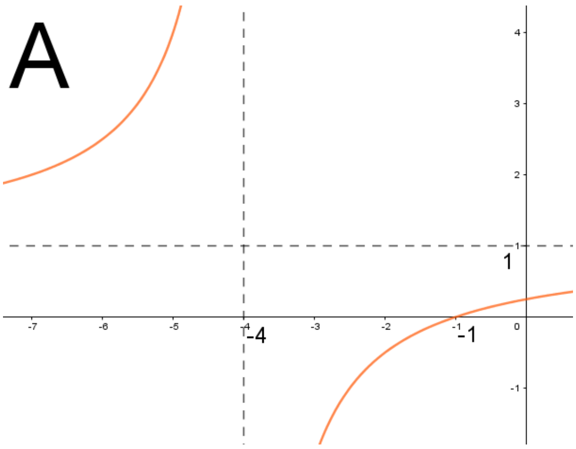
$H(f) = R$

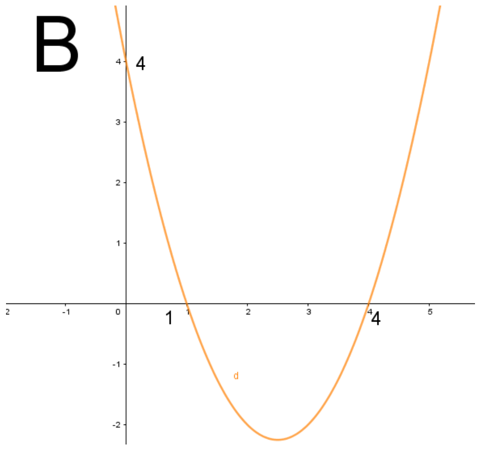
3.6 Cvičení

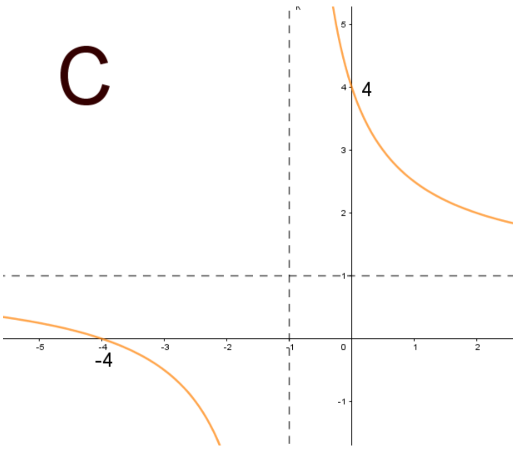
1. Ke každé funkci **1.1-1.4** přiřaďte správný graf **A-D**.

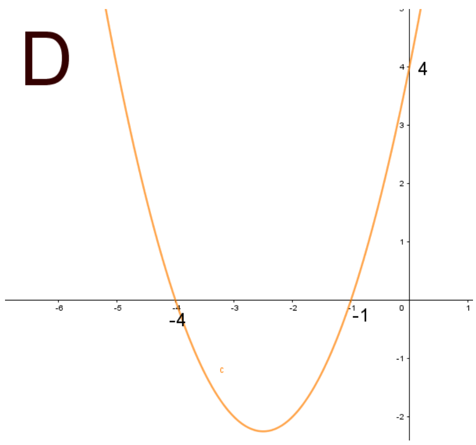
1.1 $f: y = (x + 4) : (x + 1)$ **1.2** $f: y = (x - 4) * (x - 1)$

1.3 $f: y = (x + 4) * (x + 1)$ **1.4** $f: y = (x - 4) : (x - 1)$









Řešení:

Každý výraz si upravíme do námi známých tvarů. Po úpravě stačí vypočítat souřadnici x.

1.1

$f: y = \frac{x+4}{x+1}$

$f \cap x = [x, 0]$

$0 = \frac{x+4}{x+1}$ $/* (x+1)$

$0 = x + 4$

$x = -4$

$f \cap x = [-4{,}0]$

Odpověď je **C.**

1.2

$f: y = (x-4) * (x-1)$

$f: y = x^2 - 5x + 4$

$0 = x^2 - 5x + 4$

$D = 5^2 - 4 * 1 * 4 = 25 - 16 = 9$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2*1}$, $x_1 = 4$, $x_2 = 1$

$f \cap x = [1{,}0], [4{,}0]$

Odpověď je **B.**

1.3

$f: y = (x+4) * (x+1)$

$f: y = x^2 + 5x + 4$

$0 = x^2 - 5x + 4$

$D = 5^2 - 4 * 1 * 4 = 25 - 16 = 9$

$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2*1}$, $x_1 = -4$, $x_2 = -1$

$f \cap x = [-1{,}0], [-4{,}0]$

Odpověď je **D.**

1.4

$f: y = \frac{x-4}{x-1}$

$f \cap x = [x, 0]$

$0 = \frac{x-4}{x-1}$ $/* (x-1)$

$0 = x - 4$

$x = 4$

$f \cap x = [4{,}0]$

Odpověď je **A.**

4. Analytická geometrie

4.1 Vektorová algebra

Orientovaná úsečka AB je úsečka AB doplněná o orientaci: bod A bereme jako počáteční bod a bod B jako koncový bod orientované úsečky AB. Orientovaná úsečka s počátečním bodem A a koncovým bodem B se značí $\overrightarrow{AB}$. $([7], \text{str.}\, 544)$

Operace s orientovanými úsečkami.

1. Délka úsečky AB:

$A[a_1, a_2], B[b_1, b_2]$

$|AB| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$

2. Střed úsečky AB:

$A[a_1, a_2], B[b_1, b_2], S[s_1, s_2]$

$S = \frac{A+B}{2}$

$s_1 = \frac{a_1+a_2}{2}$, $s_2 = \frac{b_1+b_2}{2}$

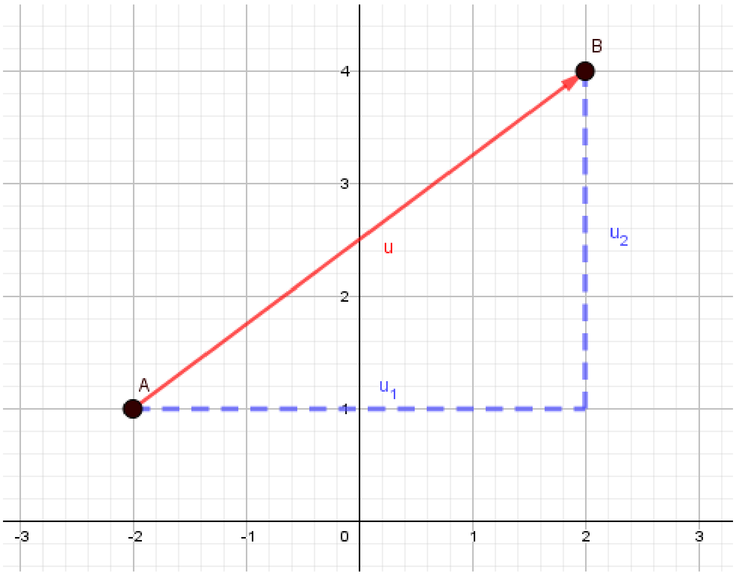
Množinu všech souhlasně orientovaných rovnoběžných úseček téže délky nazýváme **vektor**.

Máme-li bod $A[a_1, a_2]$ a bod $B[b_1, b_2]$, pak orientovanou úsečku $\overrightarrow{AB}$ nazýváme vektorem $\vec{u}(u_1, u_2)$. A platí, že:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2).$$

Příklad 1: Z bodu $A[-2{,}1]$ za pomoci vektoru $\vec{u}(4{,}3)$ nalezněte bod B.

Řešení: $\vec{u}(u_1, u_2) = \vec{u}(4{,}3)$



Operace s vektory:

$\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$

1. Velikost vektoru: $|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$, resp. $|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

2. Součet vektorů: $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1,\ u_2 + v_2)$.

3. Skalární součin vektorů: $\vec{u} * \vec{v} = u_1 * v_1 +\ u_2 * v_2$.

4. Velikost úhlu vektoru: $\cos\varphi = \frac{u_1 * v_1 + u_2 * v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} * \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$.

Příklad 2: Trojúhelník ABC je dán body $A[5,-2]$, $B[1{,}5]$, $C[1,-2]$.

a) Určete, zda je trojúhelník ABC pravoúhlý.

b) Určete obvod a obsah trojúhelníku ABC.

Řešení:

a) Vytvoříme si všechny 3 strany trojúhelníku. Každá strana bude orientovanou úsečkou mezi dvěma body.

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = \big(1 - 5, 5 - (-2)\big) = (-4,7)$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (1 - 5, -2 - (-2)) = (-4,0)$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{BC} = C - B = (1 - 1, -2 - 5) = (0, -7)$$

Nyní si zjistíme velikost všech stran. Budeme tedy počítat velikosti jednotlivých vektorů.

$$|\vec{u}| = \sqrt{(-4)^2 + 7^2} = \sqrt{65}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{0^2 + 7^2} = \sqrt{49} = 7$$

Jestli je trojúhelník ABC pravoúhlý poznáme podle Pythagorovy věty. Nejdelší vektor je vektor $\vec{u}$. Pak tedy musí platit, že $|\vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2$.

$$\left(\sqrt{65}\right)^2 = 4^2 + 7^2$$

$$65 = 16 + 49$$

$65 = 65 =>$ Platí, trojúhelník ABC je pravoúhlý.

b) Z předchozího úkolu známe velikost stran. Teď jen použijeme vzorce pro obsah a obvod pravoúhlého trojúhelníku.

$$o = a + b + c = |\vec{u}| + |\vec{v}| + |w| = \sqrt{65} + 7 + 4 = 19{,}06$$

$$S = \frac{a*b}{2} = \frac{|\vec{v}|*|\vec{w}|}{2} = \frac{4*7}{2} = \frac{28}{2} = 14$$

4.2 Obecné a parametrické vyjádření přímky

Obecná rovnice přímky je zadána bodem $A[a_1, a_2]$ a normálovým vektorem $\vec{n}(a, b)$.

Obecná rovnice přímky má tvar: $ax + by + c = 0$.

Příklad 1: Přímka p je určena bodem $A[2,4]$ a normálovým vektorem $\vec{n}(3, -5)$. Napište obecnou rovnici přímky p.

Řešení:

Dosadíme souřadnice vektoru do rovnice.

$3x - 5y + c = 0$

Abychom zjistili konstantu c musíme za x, y dosadit souřadnice bodu, kterým přímka prochází.

$3 * 2 - 5 * 4 + c = 0$

$12 - 25 + c = 0$

$c = 13$

Obecná rovnice přímky p: $3x - 5y + 13 = 0$.

Parametrická rovnice přímky je zadána bodem $A[a_1, a_2]$ a normálovým vektorem $\vec{s}(s_1, s_2)$.

Parametrická rovnice přímky má tvar: $x = a_1 + s_1 * t$

$y = a_2 + s_2 * t$, kde $t \in R$.

Příklad 2: Přímka p je určena bodem $A[2,4]$ a směrnicovým vektorem $\vec{n}(5,3)$. Napište parametrickou rovnici přímky p.

Řešení:

U parametrické rovnice stačí jen dosadit souřadnice vektoru a bodu do rovnice.

$x: 2 + 5t$

$y: 4 + 3t$, kde $t \in R$.

Normálový vektor a směrnicový vektor jsou navzájem kolmé. To znamená, že $\vec{s} = (-n_2, n_1)$ a opačně.

Příklad 3: Přímka p je určena bodem A a směrovým vektorem $\vec{s}$. Přímka q je kolmá na přímku p a prochází bodem A. Napište obecnou rovnici přímky q.

$p: x = 1 - t$

$\quad y = -2 + 5t$

Řešení:

Ze zadané přímky p si vyjádříme bod A a směrový vektor $\vec{s}$.

$A[1, -2]$, $\vec{s} = (-1,5)$

Víme, že přímka q prochází bodem A. Protože máme napsat obecnou rovnici, musíme si vytvořit normálový vektor. Směrový vektor $\vec{s}$ je kolmý normálovému vektoru $\vec{n}$.

$A[1, -2]$, $\vec{s} = (5,1)$

Teď známe vše potřebné. Sestavíme obecnou rovnici.

$5x + y + c = 0$

$5 * 1 - 2 + c = 0$

$c = -3$

Obecná rovnice přímky q má tvar: $q: 5x - y - 3 = 0$.

4.3 Vzájemná poloha přímek

Vzájemná poloha dvou přímek p, q v rovině může dopadnout jen 3 způsoby:

1. Různoběžky: $p \cap q$ mají jeden společný bod, průsečík $[x, y]$.

2. Rovnoběžky: $p \cap q$ nemají žádný společný bod.

3. Totožné: $p \cap q$ mají nekonečně mnoho společných bodů.

Příklad 1: Určete vzájemnou polohu přímek p_1 a p_2.

$p_1: 4x + 4y - 5 = 0, p_2: x - y + 2 = 0$

Řešení:

Jedná se o dvě obecné rovnice. V této situaci použijeme metodu sčítací metodu.

$4x + 4y - 5 = 0$

$\underline{x - y + 2 \quad\; = 0}$ /* (-4)

$4x + 4y - 5 = 0$

$\underline{-4x + 4y - 8 = 0}$

$8y - 13 = 0$

$8y = 13$

$y = \frac{13}{8}$

Vypočítanou souřadnici dosadíme do libovolné původní rovnice.

$4x + 4 * \frac{13}{8} - 5 = 0$

$4x + \frac{13}{2} - \frac{10}{2} = 0$

$4x = -\frac{3}{2} \quad /* \left(\frac{1}{4}\right)$

$x = -\frac{3}{8}$

Přímky jsou různoběžné s průsečíkem $\left[-\frac{3}{8}, \frac{13}{8}\right]$.

Příklad 2: Určete vzájemnou polohu přímek p_1 a p_2.

$p_1\colon 5x + 2y - 11 = 0,\ p_2\colon x = 3 - 2t$

$y = -2 + 5t$

Řešení:

V tomto případě se jedná o kombinace obecné a parametrické rovnice. Využijeme dosazovací metodu. Dosadíme parametrické rovnice do obecné, vyjádříme t a následně dosadíme zpět do parametrické rovnice.

$5 * (3 - 2t) + 2 * (-2 + 5t) - 11 = 0$

$15 - 10t - 4 + 10t - 11 = 0$

$0 = 0$

Přímky mají nekonečně mnoho společných bodů. Jsou tudíž totožné.

Příklad 3: Určete vzájemnou polohu přímek p_1 a p_2.

$p_1\colon x = 1 - 3t = 0,\ p_2\colon x = 4 + 3s$

$y = 2 + t \qquad y = 8 - s$

Řešení:

Jedná se o dvě parametrické rovnice. Nejprve použijeme porovnávací metodu.

$x\colon 1 - 3t = 4 + 3s\ \Rightarrow\ 0 = 3t + 3s + 3$

$y\colon 2 + t = 8 - s\ \Rightarrow\ 0 = t + s - 6$

Nyní se snažíme vyřešit tuto soustavu dvou rovnic o dvou neznámých např. tak, že z jedné rovnic vyjádříme libovolnou neznámou. Vybereme si t.

$0 = 3t + 3s + 3\ \Rightarrow\ 0 = t + s + 1\ \Rightarrow\ t = -1 - s$

Neznámou dosadíme do druhé z rovnic. Rovnici upravíme a zjistíme s, které poté dosadíme do původní rovnice.

$0 = -1 - s + s - 6$

$0 = -7$

Rovnice nemá řešení. Nemá žádný společný bod. Jedná se o rovnoběžky.

5. Planimetrie a Stereometrie

5.1 Planimetrie

Maturitní otázky z planimetrie jsou založeny na znalosti o vlastnostech trojúhelníka. Ve většině případů se u maturity setkáváme se dvěma trojúhelníky. Je to pravoúhlý trojúhelník a obecný trojúhelník.

Pravoúhlý trojúhelník

Při řešení pravoúhlého trojúhelníku využíváme znalosti Pythagorovy věty a znalosti goniometrických funkcí.

Pythagorova věta

V každém pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem u vrcholu C platí:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Goniometrické funkce jsou definovány v pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C takto:

$$\sin \alpha = \frac{délka\ protilehlé\ odvěsny}{délka\ přepony}$$

$$\cos \alpha = \frac{délka\ přilehlé\ odvěsny}{délka\ přepony}$$

$$\tan \alpha = \frac{délka\ protilehlé\ odvěsny}{délka\ přilehlé\ odvěsny}$$

$$\cot \alpha = \frac{délka\ přilehlé\ odvěsny}{délka\ protilehlé\ odvěsny}$$

Obecný trojúhelník

Při řešení obecného trojúhelníku využíváme znalosti dvou trigonometrických vět.

Sinová věta

Pro každý trojúhelník ABC, jehož strany mají délky a, b, c a vnitřní úhly velikosti α, β, γ, platí

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r.$$

Kosinová věta

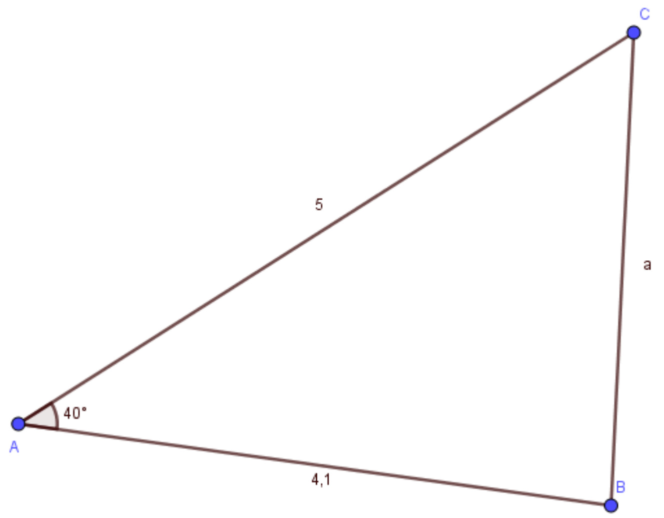
Pro každý trojúhelník ABC, jehož strany mají délky a, b, c a vnitřní úhly velikosti α, β, γ, platí

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta.$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Příklad 1: Máme obecný trojúhelník ABC. Vypočítejte velikost strany a, znáte-li velikost stran $b = 5$ cm , $c = 4{,}1$ cm a velikost úhlu $\alpha = 40°$.



Řešení:

Známe velikost dvou stran a velikost úhlu mezi nimi. Využijeme tedy kosinové věty.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 * b * c * \cos \alpha$

$a^2 = 5^2 + 4{,}1^2 - 2 * 5 * 4{,}1 * \cos 40°$

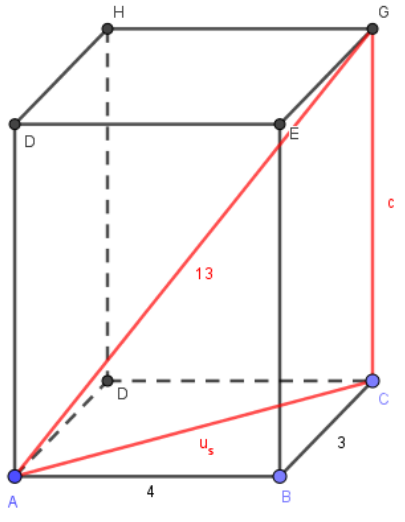
$a^2 = 10{,}4$

$a = \sqrt{10{,}4}$

$a = 3{,}23 \text{ cm}$

Strana a měří 3,23 cm.

Příklad 2: Kvádr o rozměrech $a = 4$ cm, $b = 3$ cm a $c = ?$ cm má tělesovou úhlopříčku $f = 13$ cm. Vypočítejte c.



Řešení:

Trojúhelník ACG je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C. Využijeme Pythagorovu větu. Platí, že $f^2 = c^2 + u_s^2$. Známe ale pouze tělesovou úhlopříčku f. Musíme tedy zjistit hodnotu stěnové úhlopříčky u_s. I zde použijeme Pythagorovu větu, protože trojúhelník ABC je také pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu B.

$u_s^2 = a^2 + b^2$

$u_s = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

Nyní stejným postupem zjistíme hodnotu c. Zde bude přeponou tělesová úhlopříčka.

$$f^2 = u_s^2 + c^2$$

$$13^2 = 5^2 + c^2$$

$$169 = 25 + c^2$$

$$c^2 = 144$$

$$c = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

Strana c měří 12 cm.

5.2 Stereometrie

Ve stereometrii jsou maturitní otázky položeny na základě znalostí vlastností o geometrických tělesech. Ve většině případů jsou otázky kladeny na výpočet objemu a povrchu.

Objem a povrch těles

Kvádr

$$V = abc$$

$$S = 2(ab + ac + bc)$$

Krychle

$$V = a^3$$

$$S = 6a^2$$

Hranol

$$V = S_{podstavy} * v$$

$$S = S_{podstavy} + S_{pláště}$$

Válec

$$V = \pi r^2 v$$

$$S = 2\pi r(r + v)$$

Jehlan

$$V = \frac{1}{3} S_{podstavy} * v$$

$$S = 2S_{podstavy} + S_{pláště}$$

Kužel

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$$

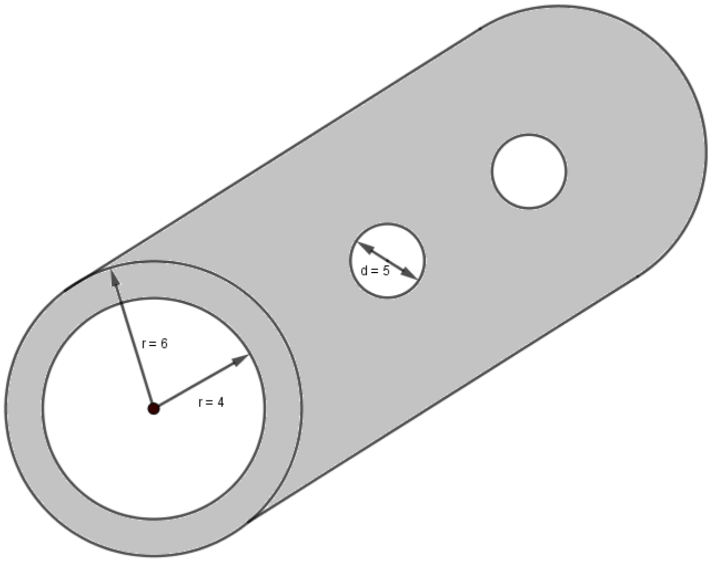
$$S = \pi r^2 + \pi r s$$

Koule

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$S = 4\pi r^2$$

Příklad 1: Ocelová trubka o délce 45 cm má vnější poloměr 6 cm a vnitřní poloměr 4 cm. V trubce jsou skrz na skrz vyvrtané dva otvory o průměru 5 cm. Vypočítejte objem materiálu.



Řešení:

Trubka má tvar válce. Určíme si objem velkého válce V_1 a od něj odečteme objem menšího válce V_2, čímž získáme objem materiálu V_{MK}.

$V_{válce} = \pi r^2 v$

$V_1 = \pi * 6^2 * 45 = 1620\pi \text{ cm}^3$

$V_2 = \pi * 4^2 * 45 = 720\pi \text{ cm}^3$

$V_{MK} = V_1 - V_2 = 1620\pi - 720\pi = 900\pi \text{ cm}^3$

V trubce jsou vyvrtané 2 díry skrz na skrz. Tedy 2 díry na jedné straně a 2 díry na druhé straně. Z vypočítaného objemu V_{MK} odečteme 4x objem vyvrtaného tělesa V_3. Těleso má opět tvar válce s průměrem $d = 5$ cm. Výšku zjistíme odečtením poloměrů vnější a vnitřního válce.

$d = 2 * r \ => \ r = 2{,}5 \text{ cm}$

$v = r_{vnější} - r_{vnitřní} = 6 - 4 = 2 \text{ cm}$

$V_3 = \pi * 2{,}5^2 * 2 = \frac{25}{2}\pi \text{ cm}^3$

$V_{VT} = 4 * V_3 = 4 * \frac{25}{2}\pi = 50\pi \text{ cm}^3$

Nyní jen odečteme objem mezikruží V_{MK} a objem vyvrtaného tělesa V_{VT}.

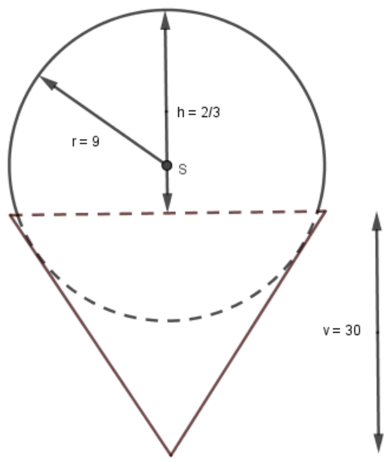
$V = V_{MK} - V_{VT} = 900\pi - 50\pi = 850\pi$ cm^3

Objem mezikruží je 850π cm^3.

Příklad 2: Nádoba ve tvaru kužele vysoká 30 cm je zaplněná plastelínou. Do nádoby je vtlačena třetina koule o poloměru 9 cm. Průměr kužele je stejný jako průměr koule.

2.1. Vypočítejte objem vytlačené plastelíny.

2.2. Vypočítejte povrch vytvořeného útvaru.



Řešení:

a) U toho příkladu ani nemusíme počítat objem kužele. Stačí využít Archimédův zákon. Díky němu víme, že stačí vypočítat objem vtlačené koule. Zjistíme si objem koule.

$V_{koule} = \frac{4}{3}\pi r^3$

$V_{KO} = \frac{4}{3} * \pi * 9^3 = 972\pi$ cm^3

Koule je do nádoby vtlačena jen z jedné třetiny. Vypočítáme tedy objem ponořené vtlačené koule do nádoby, tedy $V_2 = \frac{1}{3} * V_{KO}$.

$V_2 = \frac{1}{3} * 972\pi = 324\pi$ cm^3

Objem vytlačené plastelíny je 324π cm^3.

b) Útvar se skládá z kuželu a $\frac{2}{3}$ koule. Vypočítáme oba povrchy, které sečteme a máme výsledek.

$S_{kužele} = S_{podstavy} + S_{pláště}$, kde $S_{podstavy} = \pi r^2$ a $S_{pláště} = \pi rs$

Problémem je, že neznáme poloměr pláště s. Ovšem známe poloměr r a výšku v. Použijeme tedy Pythagorovu větu.

$s^2 = r^2 + v^2$

$s = \sqrt{9^2 + 30^2} = 31{,}32$ cm

$S_{podstavy} = \pi * 9^2 = 254{,}47$ cm^2

$S_{pláště} = \pi * 9 * 31{,}32 = 885{,}55$ cm^2

$S_{kužele} = 254{,}47 + 885{,}55 = 1140$ cm^2

Nyní si vypočítáme povrch koule. Ale pozor, útvar tvoří pouze $\frac{2}{3}$ povrchu.

$S_{celé\ koule} = 4\pi r^2 = 4 * \pi * 9^2 = 324\pi$

$S_{koule} = \frac{2}{3} * 324\pi = 678{,}6$ cm^2

Nyní obě hodnoty sečteme a máme výsledek.

$S = S_{kužele} + S_{koule} = 1140 + 678{,}6 = 1818{,}6$ cm^2.

6. Posloupnosti

6.1 Aritmetická posloupnost

Aritmetická posloupnost je každá posloupnost určená rekurentně vztahy

$$a_1 = a, \ \ a_{n+1} = a_n + d \quad \forall n \in N$$

kde a, d jsou reálná daná čísla. Číslo d se nazývá diference aritmetické posloupnosti.

([7], str. 293)

Vlastnosti aritmetické posloupnosti:

Vzorec pro n-tý člen: $a_n = a_1 + (n-1)d$

Vzorec pro získání diference: $d = a_{n+1} - a_n$

Součet prvních n členů: $s_n = \frac{n}{2} * (a_1 + a_n)$

Příklad: V aritmetické posloupnosti platí: $a_{10} = -24$, $a_8 = -12$. Vypočítejte prvních pět členů této posloupnosti.

Řešení:

Pro určení členů posloupnosti si musíme vyjádřit diferenci. Tu získáme odečtením dvou po sobě jdoucích členů. Vyjádříme tedy a_9. Každý člen posloupnosti je průměrem sousedních členů, tedy platí: $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$.

$$a_9 = \frac{a_8 + a_{10}}{2}$$

$$a_9 = \frac{-12+(-24)}{2} = \frac{-36}{2} = -18$$

Máme tři po sobě jdoucí členy posloupnosti. Vybereme si dva, které odečteme a získáme diferenci.

$$d = a_9 - a_8$$

$$d = -18 - (-12) = -6$$

Máme tři členy posloupnosti a diferenci. Nyní lze snadno vyjádřit první člen posloupnosti. Využijeme vzorec pro n-tý člen.

$a_1 = -18 - 8 * (-6) = 30$

Nyní jednoduše vyjádříme pět prvních členů posloupnosti. Využijeme definici.

$a_2 = 30 + (-6) = 24$ $\quad$ $a_3 = 30 + 2 * (-6) = 18$

$a_4 = 30 + 3 * (-6) = 12$ $\quad$ $a_5 = 30 + 4 * (-6) = 6$

6.2 Geometrická posloupnost

Geometrická posloupnost je každá posloupnost určená rekurentně vztahy

$$a_1 = a, \;\; a_{n+1} = a_n * q \quad \forall n \in N$$

kde a, q jsou daná reálná čísla. Číslo q se nazývá kvocient geometrické posloupnosti.

([7], str. 293)

Vlastnosti geometrické posloupnosti:

Vzorec pro n-tý člen: $a_n = a_1 * q^{n-1}$

Vzorec pro získání kvocientu: $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Součet prvních n členů: $s_n = a_1 * \frac{q^n - 1}{q - 1}$, je-li $q \neq 1$

Příklad: V geometrické posloupnosti platí: $a_4 = 81$, $a_7 = 2187$. Vypočítejte prvních pět členů posloupnosti.

Řešení:

Opět si nejprve musíme vyjádřit kvocient. Známe vzorec pro n-tý člen. Z něj si vyjádříme kvocient.

$a_7 = a_4 * q^3$

$q^3 = \frac{a_7}{a_4} = \frac{2187}{81} = 27$

$q = \sqrt[3]{27} = 3$

Stejný postup provedeme pro získání prvního členu posloupnosti. Nyní ale vyjádříme a_1.

$$a_4 = a_1 * q^3$$

$$a_1 = \frac{a_4}{q^3} = \frac{81}{3^3} = 3$$

Opět si podle definice vyjádříme prvních pět členů.

$$a_2 = a_1 * q = 3 * 3 = 9$$

$$a_3 = a_1 * q^2 = 3 * 3^2 = 27$$

$$a_5 = a_1 * q^4 = 3 * 3^4 = 243$$

7. Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika

7.1 Kombinatorika

Základem kombinatoriky je potřeba znát n faktoriál, který značíme $n!$, platí

$n! = 1 * 2 * ... * n$ pro každé $n \in N$.

Zároveň platí, že $0! = 1$.

Příklad *(počítání s n faktoriály)*: Zjednodušte:

$$\frac{(n+4)!}{(n+1)!}$$

Řešení:

Využijeme kombinatorické pravidlo. Čitatel budeme rozkládat do té doby, než nám nevyjde stejná hodnota jako ve jmenovateli.

$$\frac{(n+4)!}{(n+1)!} = \frac{(n+4)*(n+3)*(n+2)*(n+1)!}{(n+1)!}$$

Nyní můžeme stejné hodnoty krátit a zbytek roznásobit.

$$(n+1)*(n+2)*(n+3) = n^3 + 6n^2 + 11n + 2$$

Permutace bez opakování

Permutace z n prvků je každá uspořádaná n-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý prvek se v ní vyskytuje právě jednou.

$$P(n) = n!$$

Permutace s opakováním

Pro počet $P^{'}\ (k_1, k_2, ... k_n)$ všech permutací k prvků s opakování z n daných prvků $(k > n)$, přičemž 1. prvek se opakuje k_1-krát, .., n- tý prvek k_n-krát, platí

$$P^{'}(k_1, \dots, k_n) = \frac{k!}{k_1!\,k_2! \dots k_n!}$$

Variace bez opakování

k-členná variace z n prvků je každá uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý prvek se v ní vyskytuje nejvýše jednou.

$$V(k,n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Variace s opakováním

Pro počet $V'(k,n)$ všech k-členných variací s opakováním n prvků platí

$$V'(k,n) = n^k$$

Kombinace bez opakování

k-členná kombinace z n prvků bez opakování je každá neuspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý prvek se v ní vyskytuje nejvýše jednou.

$$K(k,n) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Příklad 1: Kolik možných slov lze sestavit zpřeházením písmen ve slově UMPALUMPA.

Řešení:

Jedná se o počítání permutace s opakováním. Spočítáme si, kolikrát se nám ve slově opakuje každé písmeno.

U - 2x, M - 2x, P - 2x, A - 2x, L - 1x.

Nyní si sečteme počet písmen, abychom zjistili k.

$k = 2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 9$

Využijeme vzorec pro permutace s opakováním.

$P = \frac{9!}{2!*2!*2!*2!*1!} = 22\,680$

Je možné sestavit 22 680 slov.

Příklad 2: Na schůzce se potkalo 6 kamarádů. Každý s každým si podá ruku. Kolik bylo celkem podání rukou.

Řešení:

V tomto případě se jedná o kombinaci bez opakování. Podat ruce si můžou vždy jen 2 lidé současně, tedy $k = 2$. Máme 6 lidí, tedy $n = 6$. Použijeme vzorec pro kombinaci bez opakování.

$$K(2,6) = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!*(6-2)!} = 15$$

Celkem bylo 15 podání rukou.

Příklad 3: Na základní škole se uvolnili 3 místa pro učitele. Panu řediteli se přihlásilo 5 uchazečů. Kolika způsoby může pan ředitel zaplnit volná místa.

Řešení:

Jedná se o variace bez opakování. Na první místo máme možnost dosadit 5 uchazečů. Na druhé místo už jen 4 uchazeče a na třetí místo už jen 3 uchazeče.

$$V(3,5) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5*4*3*2!}{2!} = 5*4*3 = 60$$

Pan ředitel může volná místa zaplnit 60 způsoby.

7.2 Pravděpodobnost

V maturitních otázkách se objevují otázky na klasickou pravděpodobnost.

Nechť náhodný pokus splňuje předpoklady:

a) všech možných výsledků je konečný počet,

b) všechny výsledky jsou stejně možné,

c) všechny výsledky se navzájem vylučují.

Pak pravděpodobnost jevu A se nazývá číslo ([7], str. 329)

$$P(A) = \frac{počet\ všech\ příznivých\ výsledků}{počet\ všech\ možných\ výsledků}.$$

Příklad 1: Ve třídě je 25 žáků, z toho 10 kluků. Závěrečné zkoušky udělalo 7 žáků. Jaká je pravděpodobnost, že zkoušku splnili právě 4 kluci.

Řešení:

Nejprve si určíme počet všech možností. Máme 25 žáků a zkoušku jich splnilo 7. Jedná se tedy o kombinaci bez opakování.

Počet všech možností: $m = K(7, 25) = \binom{25}{7} = \frac{25!}{7!*18!} = 480\ 700$

Nyní určíme počet příznivých možností. Ve třídě máme 10 kluků a příznivý výsledek znamená, že zkoušku jich splnilo 4. Opět použijeme tedy kombinaci bez opakování a platí tedy $\binom{10}{4}$. Po vyřazení 10 kluků nám ve třídě zbylo 15 žáků. Zároveň ale víme, že 3 kluci ze třídy zkoušku neudělali. Musíme tedy udělat kombinace $K(3kluci, 15\ žáků)$. Obě kombinace vynásobíme.

Počet příznivých možností: $m(A) = \binom{10}{4} * \binom{15}{3} = \frac{10!}{4!*6!} * \frac{15!}{3!*12!} = 95\ 550$

Použijeme vzorec pro klasickou pravděpodobnost a máme výsledek.

$P(A) = \frac{m(A)}{m} = \frac{95550}{480700} = 0{,}1988 = 19{,}88\%$

7.3 Statistika

Pro splnění maturitní otázky ze statistiky je potřeba znát aritmetický průměr, modus a medián.

Aritmetický průměr

Aritmetický průměr $\bar{x}$ hodnot x_1, x_2, ..., x_n kvantitativního znaku je definován jako podíl součtu hodnot znaku a jejich počtu, tedy je dán vzorcem

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{i.}$$

Modus

Modus znaku x je jeho hodnota, která má největší četnost. Značí se $Mod(x)$.

$([7], \text{str}. 354)$

Medián

Medián znaku x, jehož hodnoty x_1, x_2, ..., x_n jsou uspořádány podle velikosti, je prostřední hodnota znaku. Značí se $Med(x)$. V případě, že znaků lichý počet, je $Med(x) = x_{\frac{n+1}{2}}$. V případě, že znaků je sudý počet, je $Med(x) = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right)$.

$([7], \text{str}. 355)$

Příklad 1: Petr je studentem matematiky. Jeho známky za celé pololetí jsou: 3, 2, 3, 5, 5, 1, 3, 2, 4.

1.1. Vypočítejte $Mod(x)$.

1.2. Vypočítejte $Med(x)$.

1.3. Jakou známku dostane Petr na vysvědčení, pokud učitel známkuje podle průměru.

Řešení:

Seřaďme si známky vzestupně podle velikosti.

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5

1.1. Největší četnost má známka 3, která se nám objevuje 3x. $Mod(x) = 3$.

1.2. Prostřední hodnota znaku je také 3. $Med(x) = 3$.

1.3. Spočítáme si, kolik známek Petr dostal. Je jich 9. Nyní sečteme všechny známky a vydělíme je jejich počtem.

$$\bar{x} = \frac{1+2+2+3+3+3+4+5+5}{9} = 3{,}1 \doteq 3$$

Petr dostane na konci pololetí známku 3.

DIDAKTICKÝ TEST 1

1 Jsou dány množiny: **max. 2 body**

$A = \{x \in R;\ |x| > 3\}$,

$B = \{x \in R;\ -4 < x \leq 1\}$

Určete:

1.1 $A \cap B$

1.2 $A \cup B$

1.3 $B - A$

1.4 $A - B$

2 Zjednodušte: **max. 2 body**

$$\frac{3a^2-18a+27}{3b-12} : \frac{9-a^2}{3b-12+ab-4a}$$

3 V oboru **R** řešte rovnici: **max. 2 body**

$$\frac{x-2}{x-3} + \frac{15}{x^2-3x} = \frac{6}{x-3} - \frac{3}{2}$$

4 V oboru **R** řešte nerovnici: **max. 2 body**

$$\frac{x+3}{4} > x + 3$$

5 Funkce $f: y = x^2 - 2$ je definován pro všechna $x \in \mathbf{R^2}$.

5.1 Sestrojte graf funkce f. **1 bod**

5.2 Určete průsečíky se souřadnicovou osou x. **1 bod**

5.3 Určete vrchol paraboly. **1 bod**

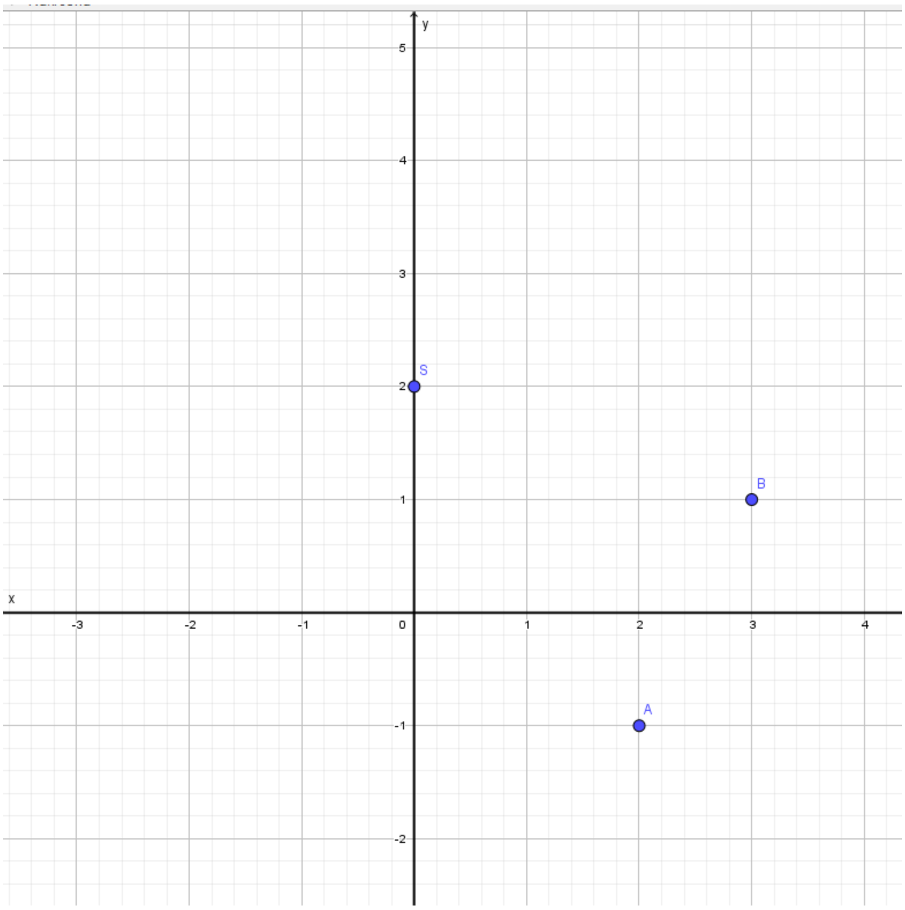
6 Řešte v **R** exponenciální rovnici: **max. 2 body**

$3^x + 3^{x+1} = 7 * 4^x - 4^{x+1}$

7 Je dán rovnoběžník $ABCD$, kde: **max. 2 body**

$A[2; -1]$, $B[3; 1]$, $S[0; 2]$.

Dopočtěte body C a D a rovnoběžník narýsujte.



Dopočtěte body C a D a rovnoběžník narýsujte.

8 Aritmetická posloupnost obsahuje 50 členů. **max. 3 body**

$a_1 = 184, a_3 = 176$

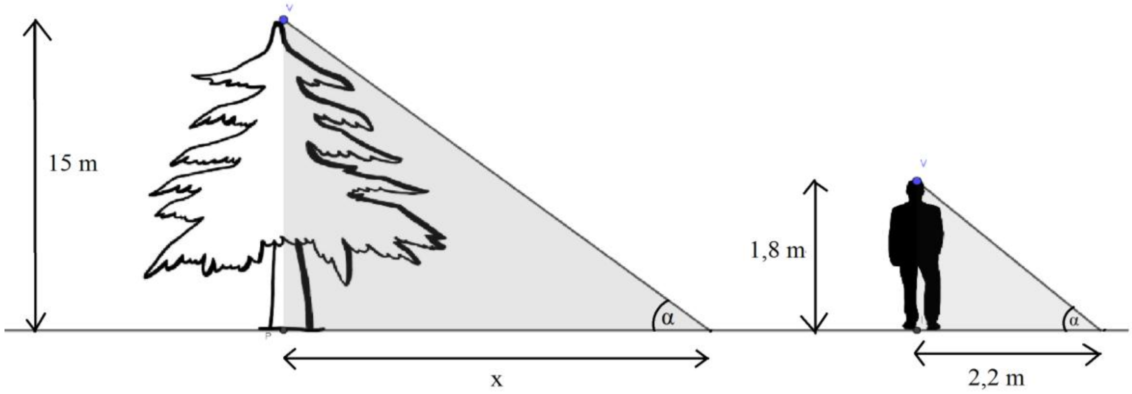
Určete:

8.1 Vypočtěte součet všech 50 členů posloupnosti.

8.2 Vypočtěte a_{25}.

8.3 Určete, kolikátým členem posloupnosti je číslo 120.

VÝCHOZÍ OBRÁZEK K ÚKOLU ČÍSLO 9-10



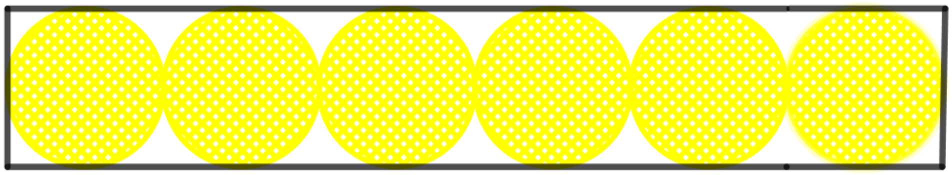
9 Jak dlouhý stín vrhá 15 m vysoký strom, když 1,8 m vysoký člověk vrhá stín 2,2 m? **1 bod**

10 Jaký úhel α svírá sluneční paprsek se zemí?

1 bod

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚKOLU ČÍSLO 11

V tenisovém pouzdru ve tvaru válce je uloženo 5 tenisových míčků *(viz obrázek)*.



11 Určete v jakém poměru je objem tenisových míčku ku objemu tenisového pouzdra? **max. 2 body**

12 Televize Samson stojí 28 000 Kč. V květnu prodejce vyhlásil akci 15% slevy na televize. V září přidal slevu 15% ze zlevněné ceny na televize. Vypočtěte kolik stála televize v září.

max. 2 body

VÝCHOZÍ TEXT A TABULKA K ÚKOLU ČÍSLO 13

Třída 8.B dostala 4 domácí úkoly. Všechny úkoly odevzdali 2 žáci, tři úkoly odevzdalo 8 žáků, dva úkoly odevzdalo 7 žáků, jeden úkol odevzdali 3 žáci a 5 žáků neodevzdalo žádný úkol.

Počet zadaných úkolů	0	1	2	3	4
Počet žáků					

13 **max. 2 body**

13. 1 Určete medián úkolů.

13. 2 Určete modus úkolů.

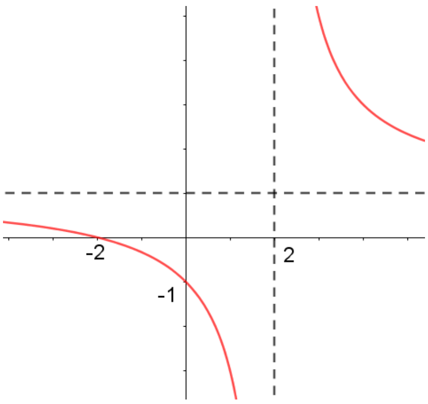
13. 3 Jaký průměr žáků odevzdalo právě dva úkoly.

14 Ve třídě 7. A je 30 žáků, z toho 18 chlapců. Paní učitelka se rozhodla, že si třída zvolí svého předsedu a dva místopředsedy třídy. Jaká je pravděpodobnost (zaokrouhlena na procenta), že všechny posty obsadí dívky? **max. 2 body**

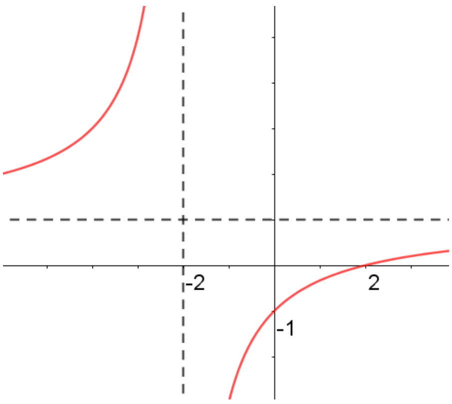
15 Z následující grafů $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{D}$ vyberte graf funkce f:

$y = \frac{x+2}{x-2}$ **max. 2 body**

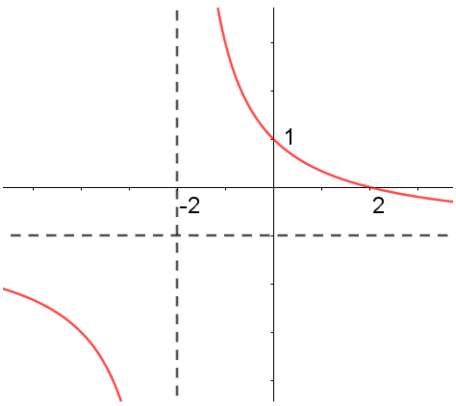
A



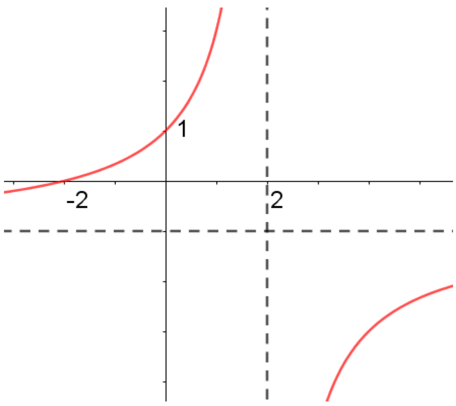
B



C



D



DIDAKTICKÝ TEST 1 - ŘEŠENÍ

1 Jsou dány množiny: **max. 2 body**

$A = \{x \in R;\ |x| > 3\}$

$B = \{x \in R;\ -4 < x \leq 1\}$

Určete:

1.1 $A \cap B$

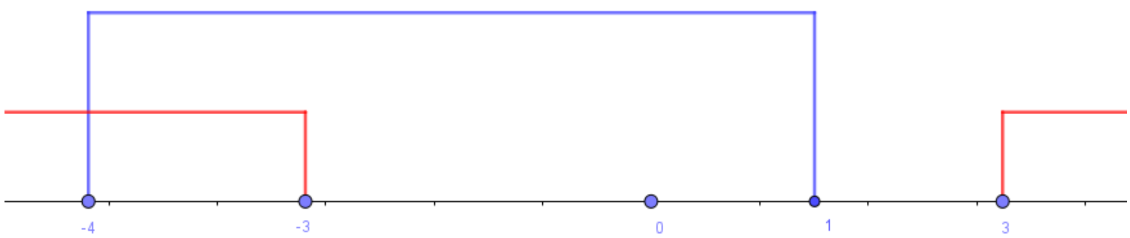
1.2 $A \cup B$

1.3 $B - A$

1.4 $A - B$

Řešení:

Obě hodnoty si vyneseme na časovou osu. Množinu A si označíme červeně a množinu B označíme modře.



1.1 Průnik množin jsou taková čísla, které patří do obou množin. $(-4; 3)$.

1.2 Sjednocení množin jsou taková čísla, které patří do jedné nebo do druhé množiny. $(-\infty; 1\rangle \cup (3; \infty)$.

1.3 Máme množinu B a od ní odečteme všechna čísla, která patří do množiny A. $(-3; 1\rangle$

1.4 Máme množinu A a od ní odečteme všechna čísla, která patří do množiny B. $(-\infty; -4) \cup (3; \infty)$.

2 Zjednodušte: **max. 2 body**

$$\frac{3a^2-18a+27}{3b-12} : \frac{9-a^2}{3b-12+ab-4a}$$

Řešení:

V první řadě si musíme udělat podmínky výrazu. Ve jmenovateli druhého zlomku použijeme postupné vytýkání. Konkrétně si vytkneme konstantu 3 a proměnnou a.

$$3b-12 \neq 0 \qquad 3*(b-4)+a*(b-4) \neq 0$$

$$b-4 \neq 0 \qquad (3+a)*(b-4) \neq 0$$

$$b \neq 4 \qquad a \neq -3,\ b \neq 4$$

Výraz si musíme upravit tak, aby se nám některé členy vykrátili. Zde použijeme vytknutí čísla 3 v prvním zlomku. Ve druhém zlomku provedeme stejnou úpravu jako u podmínek.

$$\frac{3*(a^2-6a+9)}{3*(b-4)} : \frac{3^2-a^2}{3*(b-4)+a*(b-4)} =$$

Konstanta 3 se nám vykrátí. Po vytknutí nám zbyl výraz, který je rozkladem vzorečku. Podle vzorečku upravíme i čitatel druhého zlomku.

$$\frac{(a-3)^2}{(b-4)} : \frac{(3+a)*(3-a)}{(b-4)*(3+a)} =$$

Dělit zlomkem, znamená násobit jeho převrácenou hodnotu.

$$\frac{(a-3)^2}{(b-4)} * \frac{(b-4)*(3+a)}{(3-a)*(3+a)} =$$

Výrazy $(b-4)$ a $(3+a)$ se nám zkrátí. Zkrátit můžeme i výraz $(3+a)$ s $(a-3)^2$, ale pozor, po vykrácení nám musí zůstat (-1).

$$\frac{a-3}{1} * \frac{1}{(-1)} = (a-3)*(-1) = \underline{3-a}$$

3 V oboru **R** řešte rovnici: **max. 2 body**

$$\frac{x-2}{x-3}+\frac{15}{x^2-3x}=\frac{6}{x-3}-\frac{3}{2}$$

Řešení:

Opět si nejprve uděláme podmínky. Z výrazu (x^2-3x) si vytkneme x.

$x-3 \neq 0$ $\qquad$ $x*(x-3) \neq 0$

$x \neq 3$ $\qquad$ $x \neq 0,\ \ x \neq 3$

Podmínky máme určený, můžeme celou rovnici vynásobit. Po roznásobení si rovnici upravíme.

$$\frac{x-2}{x-3}+\frac{15}{x*(x-3)}=\frac{6}{x-3}-\frac{3}{2}\ \ / \, x*(x-3)*2$$

$$(x-2)*2*x+15*2=6*x*2-3*x*(x-3)$$

$$2x^2-4x+30=12x-3x^2+9x$$

$$5x^2-25x+30=0\ \ /(5)$$

$$x^2-5x+6=0$$

Vyhází kvadratická rovnice. Spočítáme diskriminant.

$$D=\ 5^2-4*1*6=25-24$$

$$D=\ 1$$

$$x_{1,2}=\frac{25\pm\sqrt{1}}{2*1}$$

$$x_1 \neq 3,\ \ x_2=2$$

Pozor, číslo 3 se neshoduje s podmínkami. Výsledek je tak pouze číslo 2.

$$K=\{2\}$$

4 V oboru **R** řešte nerovnici: **max. 2 body**

$$\frac{x+3}{4} > x + 3$$

Řešení:

Rovnici vynásobíme číslem 4 a následně upravíme.

$$\frac{x+3}{4} > x + 3 \quad /(4)$$

$$x + 3 > 4 * (x + 3)$$

$$x + 3 > 4x + 12$$

$$-3x > 9$$

Při násobení záporným číslem se znaménko nerovnosti otáčí.

$$x < -3$$

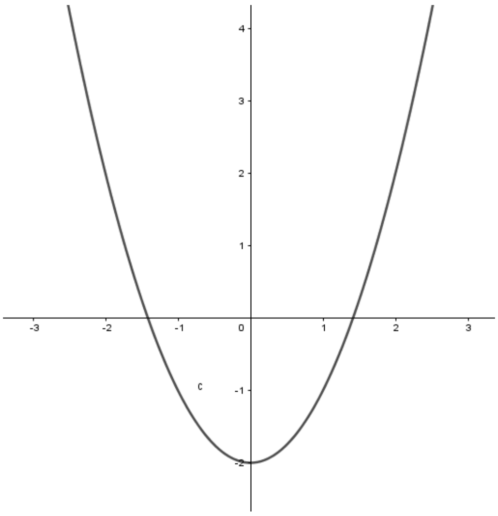
$$K = (-\infty; -3)$$

5 Funkce $f: y = x^2 - 2$ je definován pro všechna $x \in \mathbf{R}^2$.

5.1 Sestrojte graf funkce f. **1 bod**

Řešení:

Jedná se o kvadratickou funkci. Grafem je parabola. Protože $a > 0$ funkce bude konvexní. Po vypočítání vrcholu a průsečíků můžeme graf jednoduše nakreslit.



5.2 Určete průsečíky se souřadnicovou osou x. **1 bod**

Řešení:

Za souřadnici y dosadíme nulu a počítáme rovnici.

$f \cap x = [x, 0]$

$0 = x^2 - 2$

$2 = x^2$

$x_1 = -\sqrt{2}, \; x_2 = \sqrt{2}$

5.3 Určete vrchol paraboly. **1 bod**

Řešení:

Použijeme vzoreček pro určení vrcholu kvadratické funkce.

$V = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2} = 0$

Pro určení souřadnice y dosadíme výsledek do původní rovnice.

$f(0): y = 0^2 - 2 = -2$

$V = [0; -2]$

6 Řešte v **R** exponenciální rovnici: **max. 2 body**

$3^x + 3^{x+1} = 7 * 4^x - 4^{x+1}$

Řešení:

V prvním kroku si rovnici upravíme podle vzoru $a^{r+s} = a^r * a^s$.

$3^x + 3^x * 3^1 = 7 * 4^x - 4^x * 4^1$

Vytkneme 3^x a 4^x.

$3^x * (1 + 3) = 4^x * (7 - 4)$

$3^x * 4 = 4^x * 3$

Rovnici vydělíme $4 * 4^x$.

$3^x * 4 = 4^x * 3 \qquad /(4 * 4^x)$

$\left(\frac{3^x}{4^x}\right) = \frac{3}{4}$

Použijeme pravidlo $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$,

$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^1$

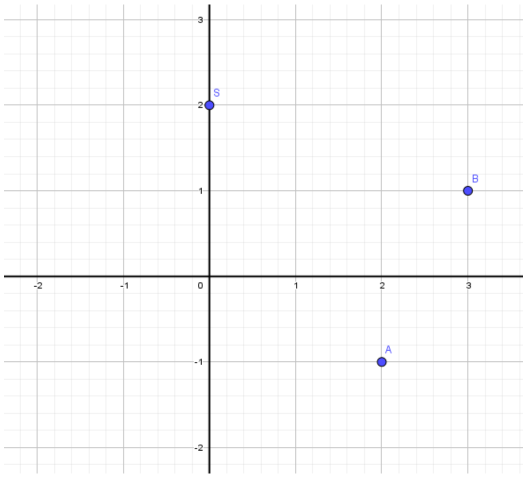
Základ můžeme vypustit a počítat s exponenty.

$x = 1$

7 Je dán rovnoběžník $ABCD$, kde: **max. 2 body**

$A[2; -1]$, $B[3; 1]$, $S[0; 2]$.

Dopočtěte body C a D a rovnoběžník narýsujte.



Dopočtěte body C a D a rovnoběžník narýsujte.

Řešení:

Rovnoběžník má vlastnost, že platí $|AC| = |BD|$ a zároveň jsou rovnoběžné. Musí teda platit $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{CS}$. Vypočítáme vektor $\overrightarrow{AS}$, který následně přičteme ke středu S.

$\vec{u} = \overrightarrow{AS} = S - A = (-2{,}3)$

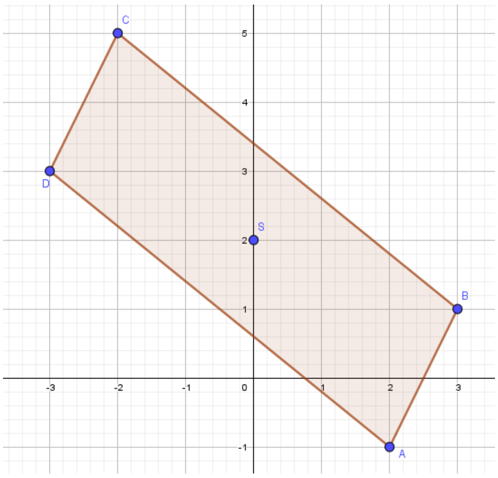
$C = S + \vec{u} = (-2{,}5)$

Stejný postup uděláme i pro bod D.

$\vec{v} = \overrightarrow{BS} = S - B = (-3{,}1)$

$D = S + \vec{v} = (-3{,}3)$

Body si zakreslíme a vytvoříme rovnoběžník.



8 Aritmetická posloupnost obsahuje 50 členů. **max. 3 body**

$a_1 = 184,\ a_3 = 176$

Určete:

8.1 Vypočtěte součet všech 50 členů posloupnosti.

Řešení:

Každý člen posloupnosti je průměrem sousedních členů. Spočítáme a_2.

$a_2 = \frac{a_1+a_3}{2}$

$a_2 = \frac{a_1+a_3}{2} = \frac{184+176}{2} = 180$

Odečteme dva po sobě jdoucí členy posloupnosti a tím zjistíme diferenci.

$$d = a_2 - a_1 = 180 - 184 = -4$$

Nyní použijeme vzorec pro n-tý člen $a_n = a_1 + (n-1)d$, abychom zjistili poslední člen posloupnosti. Poté vypočítáme součet 50 členů.

$$a_{50} = a_1 + 49 * d = 184 + 49 * (-4) = -12$$

$$S_{50} = \frac{50}{2} * (184 - 12) = 4300$$

8.2 Vypočtěte a_{25}.

Řešení:

Použijeme vzorec pro n-tý člen $a_n = a_1 + (n-1)d$.

$$a_{25} = a_1 + 24 * d = 184 + 24 * (-4) = 84$$

8.3 Určete, kolikátým členem posloupnosti je číslo 120.

Řešení:

Použijeme vzorec pro n-tý člen $a_n = a_1 + (n-1)d$ s tím, že známe $a_n = 120$. Poté vypočítáme n.

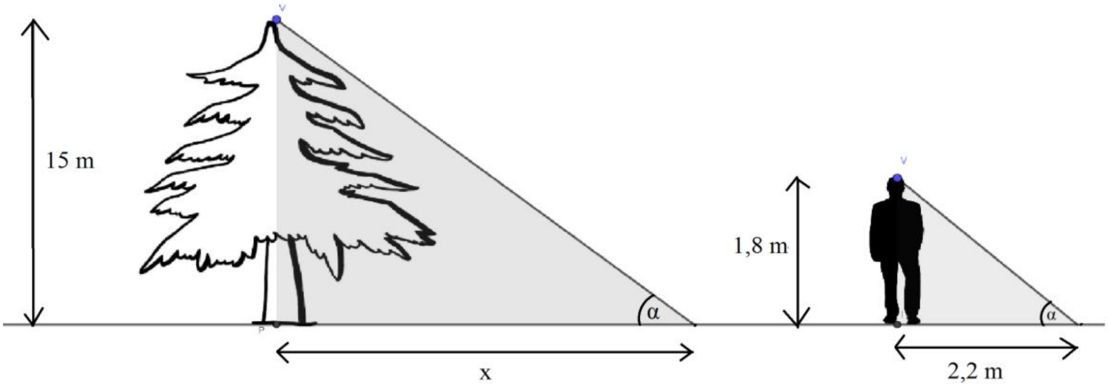
$$120 = a_1 + (n-1) * d$$

$$120 = 184 + (n-1) * (-4)$$

$$120 = 184 - 4n + 4$$

$$n = 17$$

VÝCHOZÍ OBRÁZEK K ÚKOLU ČÍSLO 9-10



9 Jak dlouhý stín vrhá 15 m vysoký strom, když 1,8 m vysoký člověk vrhá stín 2,2 m? **1 bod**

Řešení:

Jedná se o pravoúhlý trojúhelník. Použijeme funkci $\cot\alpha = \frac{délka\ přilehlé\ odvěsny}{délka\ protilehlé\ odvěsny}$.

Hodnota $\cot\alpha$ je stejná. Vytvoříme si rovnici a zjistíme x.

$$\text{člověk} - \cot\alpha = \frac{2{,}2}{1{,}8}$$

$$\text{strom} - \cot\alpha = \frac{x}{15}$$

$$\frac{x}{15} = \frac{2{,}2}{1{,}8}$$

$$x = \frac{2{,}2}{1{,}8} * 15$$

$$x = 18{,}33$$

10 Jaký úhel α svírá sluneční paprsek se zemí? **1 bod**

Řešení:

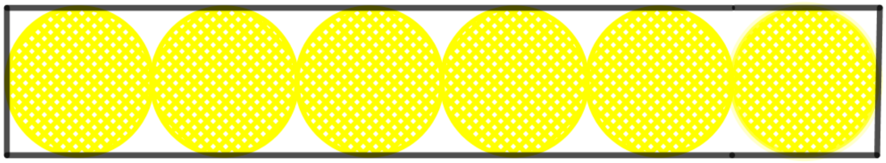
Známe obě odvěsny, použijeme funkci $\tan\alpha = \frac{délka\ protilehlé\ odvěsny}{délka\ přilehlé\ odvěsny}$.

$$\text{člověk} - \tan\alpha = \frac{1{,}8}{2{,}2} \qquad \text{strom} - \tan\alpha = \frac{15}{18{,}33}$$

$$\text{člověk} - \alpha \cong 47° \qquad \text{strom} - \alpha \cong 47°$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚKOLU ČÍSLO 11

V tenisovém pouzdru ve tvaru válce je uloženo 6 tenisových míčků *(viz obrázek)*.



11 Určete v jakém poměru je objem tenisových míčku ku objemu tenisového pouzdra? **max. 2 body**

Řešení:

Dosadíme do vzorců objemu koule a válce. Objem koule vynásobíme 6, protože máme 6 míčků.

$$V_{koule} = \frac{4}{3}\pi r^3, \ V_{válce} = \pi r^2 v$$

$$V_{koule} = 6 * \frac{4}{3}\pi r^3 = 8\pi r^3$$

$$V_{válce} = \pi r^2 12r = 12\pi r^3$$

Obě hodnoty podělíme a dostaneme poměr.

$$\frac{V_{koule}}{V_{válce}} = \frac{8\pi r^3}{12\pi r^3} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

12 Televize Samson stojí 28 000 Kč. V květnu prodejce vyhlásil akci 15% slevy na televize. V září přidal slevu 15% ze zlevněné ceny na televize. Vypočtěte kolik stála televize v září.

max. 2 body

Řešení:

Cena 28 000 Kč je 100%. Vytvoříme trojčlenku pro zjištění 15%.

100%..............................28 000 Kč

15%...............................x Kč

$\frac{15}{100} = \frac{x}{28\ 000}$

$\frac{15}{100} * 28\ 000 = x$

$x = 4200$

Výsledek odečteme od původní ceny televize. Tím získáme, kolik stála televize po zlevnění.

$28\ 000 - 4200 = 23\ 800$

Zlevněná cena činí 23 800 Kč.

Nyní uděláme stejný postup, ale 100% je tentokrát zlevněná cena 23 800Kč.

100%...........................23 800 Kč

15%............................x Kč

$x = \frac{15}{100} * 23\ 800$

x = 3570

V září cena televize činila 20 230 Kč.

VÝCHOZÍ TEXT A TABULKA K ÚKOLU ČÍSLO 13

Třída 8. B dostala 4 domácí úkoly. Všechny úkoly odevzdali 2 žáci, tři úkoly odevzdalo 8 žáků, dva úkoly odevzdalo 7 žáků, jeden úkol odevzdali 3 žáci a 5 žáků neodevzdalo žádný úkol.

Počet zadaných úkolů	0	1	2	3	4
Počet žáků					

13 **max. 2 body**

Řešení:

Hodnoty si doplníme do tabulky.

Počet zadaných úkolů	0	1	2	3	4
Počet žáků	5	3	7	8	2

13. 1 Určete medián úkolů.

Řešení:

Medián je prostřední hodnota znaků.

$Mod_{(x)} = 3$

13. 2 Určete modus úkolů.

Řešení:

Modus je nejčastější hodnota znaků.

$Med_{(x)} = 2$

13. 3 Jaký průměr žáků odevzdalo právě dva úkoly.

Řešení:

Dva úkoly odevzdalo 7 žáků. Celkem je ve třídě žáků 25. Provedeme klasickou pravděpodobnost.

$$P = \frac{7}{25} = 0{,}28 = 28\%$$

14 Ve třídě 7. A je 30 žáků, z toho 18 chlapců. Paní učitelka se rozhodla, že si třída zvolí svého předsedu a dva místopředsedy třídy. Jaká je pravděpodobnost (zaokrouhlena na procenta), že všechny posty obsadí dívky ? **max. 2 body**

Řešení:

Budeme provádět klasickou pravděpodobnost. Určíme počet všech možných výsledků. Z 30 žáků vybíráme 3. Jedná se kombinaci bez opakování, takovou že $\binom{30}{3}$.

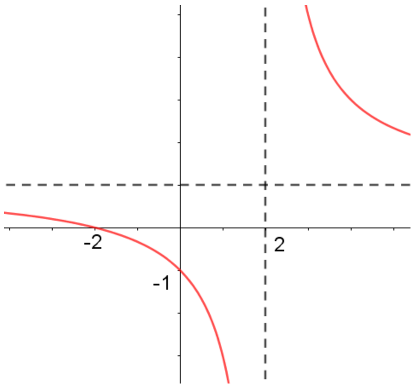
Ve třídě máme 12 dívek a z nich vybíráme 3. Počet všech příznivých výsledků bude $\binom{12}{3}$.

$$P(A) = \frac{m(A)}{m} = \frac{\binom{12}{3}}{\binom{30}{3}} = \frac{220}{4060} = 0{,}054 = 5{,}4\%$$

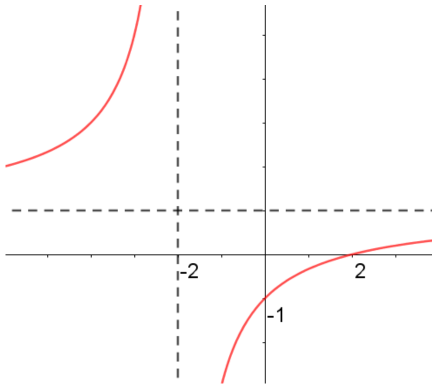
15 Z následující grafů $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{D}$ vyberte graf funkce f:

$y=\frac{x+2}{x-2}$ **max. 2 body**

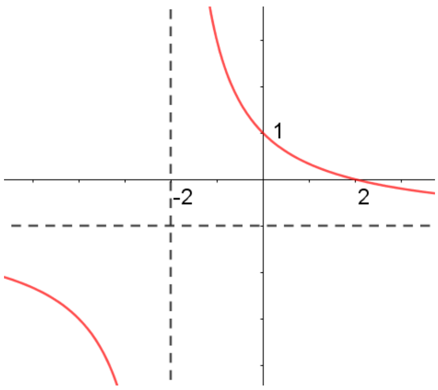
A



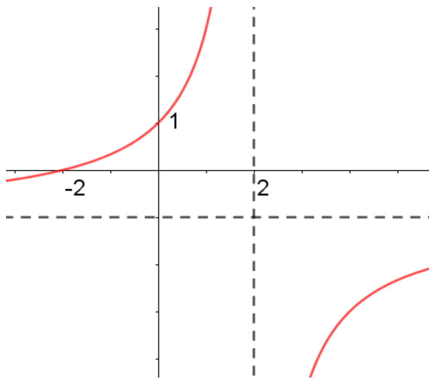
B



C



D



Řešení:

Pro určení grafů si vypočítáme průsečíky se souřadnicovými osami.

$f\cap x=[x,0]$

$0=\frac{x+2}{x-2}\quad /*\,(x-2)$

$0=x+2$

$f\cap x=[-2,0]$

$f\cap y=[0,y]$

$y=\frac{0+2}{0-2}$

$y=-1$

$f\cap y=[0,-1]$

Řešení je A

HODNOCENÍ					
celkem bodů	5	4	3	2	1
30	10 - 15	11 - 15	16 - 20	21 - 25	26 - 30

DIDAKTICKÝ TEST 2

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 1

Firma dostala zakázku. Pět strojů stihne zakázku za 6 dní. Třetí den se rozbili dva stroje.

1 Vypočítejte, o kolik dní se zakázka zpozdí. **1 bod**

2 Zjednodušte: **max. 2 body**

$$\left(\frac{2mn+4m+6}{n}+3\right)*\frac{2mn-3n}{n+2}$$

3 V oboru **R** řešte rovnici: **max. 2 body**

$$\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}=\sqrt{2x}$$

4 V oboru $\boldsymbol{R}$ řešte rovnici: **max. 2 body**

$$\frac{(x+4)^2}{2x+6}=2$$

5 V oboru $\boldsymbol{R}$ řešte rovnici: **1 bod**

$$\frac{\log_3 9}{4}=y$$

6 Vyjádřete z následujících vzorců neznámou r. **max. 2 body**

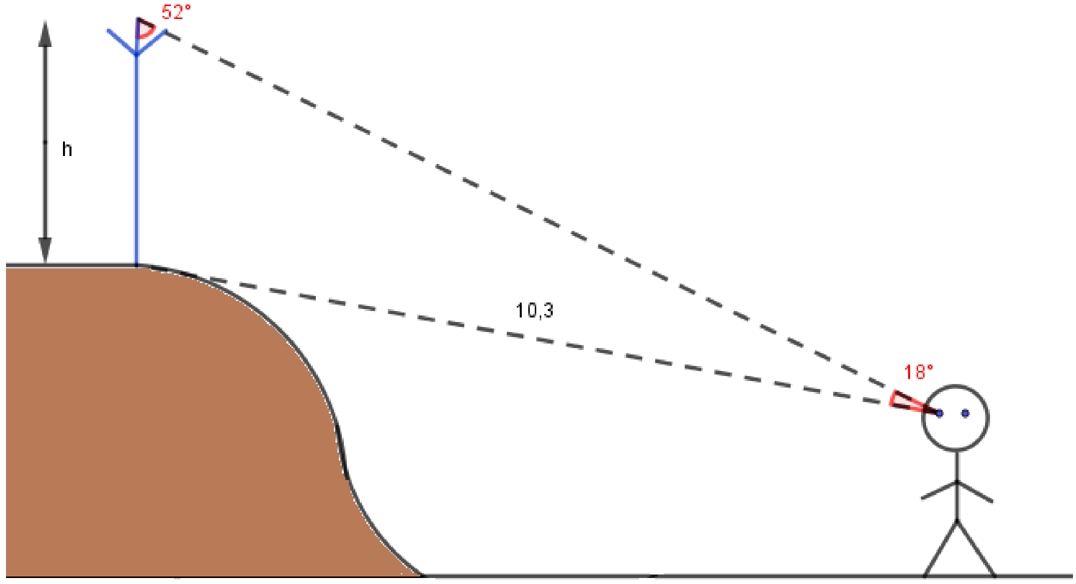
6.1 $\frac{4r}{2}=\sqrt{5s-1}$

6.2 $\frac{3rs}{6}=2rs+1$

7 Pan Novák vložil do banky částku 20 000 Kč. Za kolik let si bude moci vybrat částku 40 000 Kč, jestliže úrok v bance tvoří $2{,}8\%$. *(Počítáme bez daně).* **max. 2 body**.

8 Petr si chtěl půjčit od kamaráda 500 Kč. Ten souhlasil s tím, že za každý den bude platit Petr úrok. První den dlužná částka činila 502 Kč, druhý den 506 Kč a třetí den 518 Kč. Po n dnech Petr splatil dluh ve výši 742 Kč. Vypočtěte n. **max. 2 body**.

VÝCHOZÍ OBRÁZEK K ÚLOZE 9



9 Vysílač je umístěný na kopci. Vzdálenost od paty vysílače k pozorovateli je 10,3 m. Úhel pod kterým je vidět celý vysílač je $\alpha = 18°$ a úhel, ze kterého je vidět z vrcholu do očí pozorovatele je $\gamma = 52°$ *(viz obrázek)*. Vypočítejte výšku h vysílače. **max. 2 body**

10 Akvárium ve tvaru kvádru o rozměrech $a = 15\text{ cm}, b = 10\text{ cm}$, $c = 21\text{cm}$ je do $\frac{4}{5}$ napuštěno vodou. Kolik kuliček o průměru 6 cm je možné vhodit do akvária, aby voda nepřetekla. *(Předpokládejme stejnou hustotu vody a kuličky)*.

max. 2 body

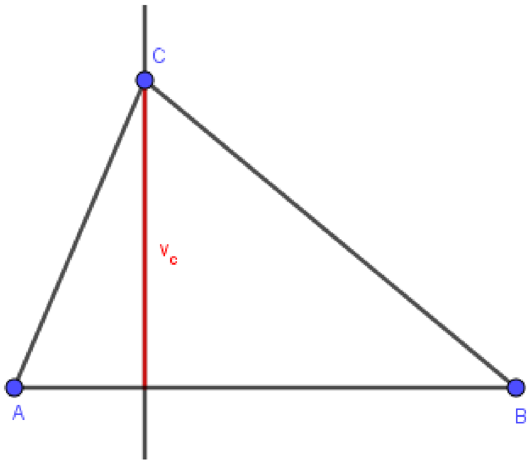
11 Rozhodněte, jsou-li následující tvrzení pravdivá (**ANO**), nebo nepravdivá (**NE**). **max. 3 body**

11.1 $\sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{a}*\sqrt{b^3}}{\sqrt{ab}}} = a^{\frac{1}{10}} * b, a \geq 0, b \geq 0$ **ANO NE**

11.2 $\left(\frac{a^{\frac{1}{2}} * b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{3}{2}} * b^{\frac{4}{3}}}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{-\frac{1}{3}} * b^{-\frac{2}{9}},\ a \geq 0, b \geq 0$ **ANO NE**

11.3 $\left(\frac{\sqrt{a^3} * b}{b^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[8]{a^6 * b}, b \geq 0$ **ANO NE**

VÝCHOZÍ OBRÁZEK K ÚLOZE 12



12 Je dán obecný trojúhelník ABC tak, že platí:

$A[-1,2], B[2,3], C[1,4]$. Výška v_c leží na přímce: **max. 2 body**

A) $3x - y + 5 = 0$

B) $x - 3y + 11 = 0$

C) $3x + y - 7 = 0$

D) $x + 3y + 13 = 0$

VÝCHOZÍ TEXT A TABULKA K ÚKOLU ČÍSLO 13

Den	Pondělí	Úterý	Středa	Čtvrtek	Pátek	Sobota	Neděle
Teplota	22°C	23°C	18°C	??	18°C	20°C	23°C

13 Průměrná týdenní teplota činila $20°\mathrm{C}$. Ve čtvrtek činila denní teplota: **max. 2 body**

A) 18°C

B) 16°C

C) 20°C

D) 17°C

E) jiný výsledek

14 Kolik možných čtyřciferných čísel můžeme složit z čísle 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9 tak aby platilo, že na řádech tisíců a desítek jsou sudá čísla a na řádech stovek a jednotek jsou lichá čísla.

max. 2 body

A) 144

B) 139

C) 108

D) 960

E) jiný výsledek

15 Ke každému funkci **15.1 - 15.4** přiřaďte odpovídající definiční obor $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{D}$. **max. 3 body**

A $D(f) = R$ **C** $D(f) = (1, \infty)$

B $D(f) = R/\{1\}$ **D** $D(f) = \langle 1, \infty)$

15.1 $f\colon \frac{x^2+4}{x-1}$ **15.3** $f\colon \left(\frac{1}{4}\right)^x - 1$

15.2 $f\colon \frac{2x+4}{\sqrt{x-1}}$ **15.4** $f\colon \log(x-1)$

DIDAKTICKÝ TEST 2 - ŘEŠENÍ

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 1

Firma dostala zakázku. Pět strojů stihne zakázku za 6 dní. Třetí den se rozbili dva stroje.

1 Vypočítejte, o kolik dní se zakázka zpozdí. **1 bod**

Řešení:

Pět strojů by zakázku udělalo za 6 dní, tedy: $5 * 6$. Všech 5 strojů pracovalo 3 dny, tedy $3 * 5$. Pak se rozbily dva stroje, tedy $5 - 2$, které pracovaly zbytek dnů, tedy $x - 3$. Rovnici si dáme dohromady a upravíme.

$$5 * 6 = 3 * 5 + (5 - 2) * (x - 3)$$

$$15 = 3x - 9$$

$$3x = 24$$

$$x = 8$$

Zakázka se udělala za 8 dní. Původní plán byl 6 dní. Zakázka měla zpoždění 2 dny.

2 Zjednodušte: **max. 2 body**

$$\left(\frac{2mn+4m+6}{n} + 3\right) * \frac{2mn-3n}{n+2}$$

Řešení:

Určíme si podmínky výrazu.

$$n \neq 0,\ n \neq -2$$

Nejprve si výraz upravíme.

$$\left(\frac{2mn+4m+6+3n}{n}\right) * \frac{2mn-3n}{n+2} =$$

V prvním zlomku provedeme postupné vytýkání. Ve druhém zlomku vytkneme v čitateli n.

$$\left(\frac{2m*(n+2)+3*(2+n)}{n}\right)*\frac{n*(2m-3)}{n+2}=$$

$$\left(\frac{(2m+3)(n+2)}{n}\right)*\frac{n*(2m-3)}{n+2}=$$

Výrazy $(n+2)$ a n se nám zkrátí.

$$(2m+3)(2m-3)=$$

Jedná se o rozklad vzorečku $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

$$\underline{(2m)^2-3^2}$$

3 V oboru **R** řešte rovnici: **max. 2 body**

$$\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}=\sqrt{2x}$$

Řešení:

Vytvoříme si podmínky.

$$4-x\geq 0 \qquad 4+x\geq 0 \qquad 2x\geq 0$$

$$4\geq x \qquad -4\geq x \qquad x\geq 0$$

Jedná se o iracionální rovnici. Tedy celý zlomek umocníme 2. Ale pozor, pokud máme součet odmocnin, nemůžeme každou odmocninu umocnit zvlášť.

$$\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)^2=\left(\sqrt{2x}\right)^2$$

Levou stranu rovnici rozložíme podle vzorečku.

$$\left(\sqrt{4+x}\right)^2+2\sqrt{4-x}\sqrt{4+x}+\left(\sqrt{4-x}\right)^2=2x$$

$$4+x+2\sqrt{4-x}\sqrt{4+x}+4-x=2x$$

$$2\sqrt{4-x}\sqrt{4+x}=2x-8$$

Rovnici vydělíme 2. Obě odmocniny si dáme pod jednu společnou odmocninu.

$$\sqrt{(4-x)(4+x)} = x - 4$$

Výrazy pod odmocninou si roznásobíme.

$$\sqrt{16-x^2} = x - 4$$

Nyní opět celou rovnici umocníme 2 a upravíme ji.

$$16 - x^2 = (x-4)^2$$

$$16 - x^2 = x^2 - 8x + 16$$

$$2x^2 - 8x = 0 \ \ /\{2\}$$

$$x^2 - 4x = 0$$

Vytkneme x.

$$x * (x-4) = 0$$

$$x_1 = 0, \ x_2 = 4$$

Provedeme zkoušku, která je u iracionální rovnice součástí řešení.

$$L(0) = \sqrt{4+0} + \sqrt{4-0} = \sqrt{4} + \sqrt{4} = 4$$

$$P(0) = \sqrt{2 * 0} = 0, \ \ L(0) \neq P(0)$$

$$L(4) = \sqrt{4+4} + \sqrt{4-4} = \sqrt{8}$$

$$P(4) = \sqrt{2 * 4} = \sqrt{8}, \ L(4) = P(4)$$

$$K = \{4\}$$

4 V oboru $\boldsymbol{R}$ řešte rovnici: **max. 2 body**

$$\frac{(x+4)^2}{2x+6} = 2$$

Řešení:

Vytvoříme si podmínky.

$2x + 6 \neq 0$

$x \neq -3$

Celou rovnici vynásobíme $2x + 6$.

$(x + 4)^2 = 4x + 12$

Rozložíme podle vzorečku a rovnici upravíme.

$x^2 + 8x + 16 = 4x + 12$

$x^2 + 4x + 4 = 0$

Použijeme diskriminant.

$D = 4^2 - 4 * 1 * 4 = 0$

Diskriminant vyšel 0, rovnice bude mít jeden dvojnásobný kořen.

$x = \frac{-4}{2} = -2$

$K = \{-2\}$

5 V oboru $\boldsymbol{R}$ řešte rovnici: **1 bod**

$$\frac{\log_3 9}{4} = y$$

Řešení:

Rovnici vynásobíme 4.

$\log_3 9 = 4y$

Použijeme tzv. logaritmické kolečko.

$3^{4y} = 9$

$3^{4y} = 3^2$

Základy vypustíme a řešíme rovnici s exponenty.

$4y = 2$

$y = \frac{1}{2}$

6 Vyjádřete z následujících vzorců neznámou r. **max. 2 body**

6.1 $\frac{4r}{2} = \sqrt{5s - 1}$

6.2 $\frac{3rs}{6} = 2rs + 1$

Řešení:

6.1 Vzorec vynásobíme 2.

$4r = 2\sqrt{5s - 1}$

Nyní umocníme 2.

$16r^2 = 4 * (5s - 1)$

$16r^2 = 20s - 4$

$4r^2 = 5s - 1$

Vydělíme 4 a odmocníme 2.

$r^2 = \frac{5s-1}{4} \;=>\; r = \sqrt{\frac{5s-1}{4}}$

6.2 Vzorec vynásobíme 6 a upravíme.

$3rs + 4 = 12rs + 6$

$9rs = -2$

Nyní umocníme je vydělíme $9s$.

$r = -\frac{2}{9s}$

7 Pan Novák vložil do banky částku 20 000 Kč. Za kolik let si bude moci vybrat částku 40 000 Kč, jestliže úrok v bance tvoří 2,8%. *(Počítáme bez daně).* **max. 2 body**.

Řešení:

Využijeme následující vzoreček: $a_n = a_0 * \left(1 + \frac{P}{100}\right)^n$, kde a_n – cílová částka, a_0 – počáteční vklad, P – úrok, n – počet úrokovacích období.

Pokud bychom počítali s daní, vzoreček by vypadal: $a_n = a_0 * \left(1 + 0{,}85 * \frac{P}{100}\right)^n$

$$40000 = 20000 * \left(1 + \frac{2{,}8}{100}\right)^n$$

Vydělíme 20 000.

$$2 = (1{,}028)^n$$

Rovnici zlogaritmujeme.

$$\log 2 = \log(1{,}028)^n$$

Využijeme pravidlo $\log x^n = n * \log x$.

$$\log 2 = n * \log 1{,}028$$

Vyjádříme n.

$$n = \frac{\log 2}{\log 1{,}028}$$

$$n = 25{,}1$$

Pan Novák si bude moci částku 40 000 Kč vybrat za 26 let.

8 Petr si chtěl půjčit od kamaráda 500 Kč. Ten souhlasil s tím, že za každý den bude platit Petr úrok. První den dlužná částka činila 502 Kč, druhý den 506 Kč a třetí den 518 Kč. Po n dnech Petr splatil dluh ve výši 742 Kč. Vypočtěte n. **max. 2 body**.

Řešení:

Částka 500 Kč je půjčená částka. Zaměříme se na úroky. První den byl úrok 2 Kč, druhý den 6 Kč a třetí den 18 Kč. Tedy:

$$a_1 = 2, a_2 = 6, a_3 = 18$$

Jedná se o geometrickou posloupnost s kvocientem 3.

Petr po n dnech splatil 742 Kč. Budeme počítat součet členů. Od částky 742 Kč musíme odečíst částku 500 Kč, která představuje půjčenou částku.

$$S_n = a_1 * \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$242 = 2 * \frac{3^n - 1}{3 - 1}$$

$$242 = 3^n - 1$$

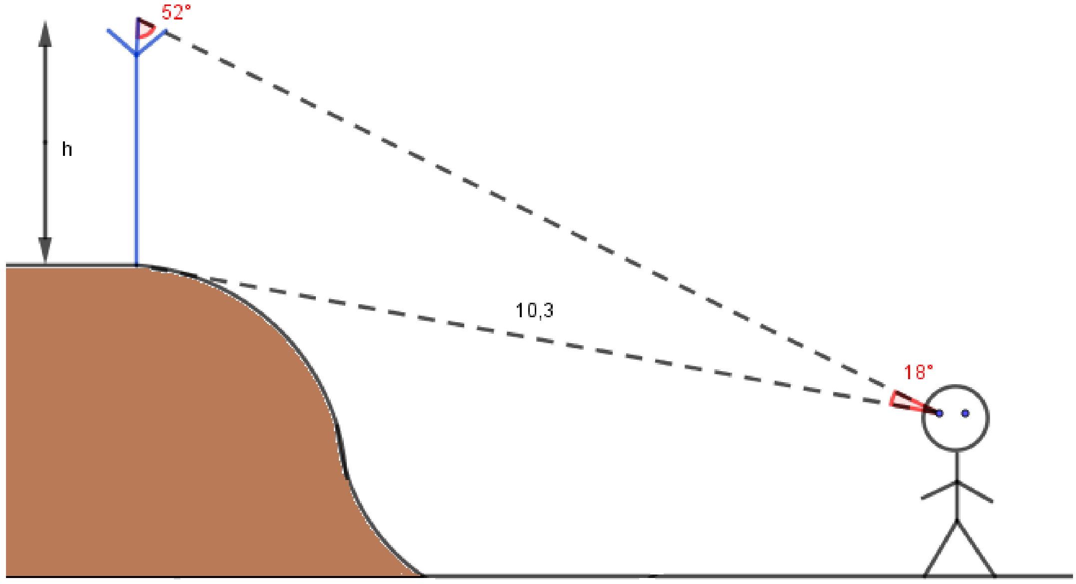
$$243 = 3^n$$

Číslo 243 musíme dostat na základ 3.

$$3^5 = 3^n$$

$$n = 5$$

VÝCHOZÍ OBRÁZEK K ÚLOZE 9



9 Vysílač je umístěný na kopci. Vzdálenost od paty vysílače k pozorovateli je 10,3 m. Úhel pod kterým je vidět celý vysílač je $\alpha = 18°$ a úhel, ze kterého je vidět z vrcholu do očí pozorovatele je $\gamma = 52°$ *(viz obrázek)*. Vypočítejte výšku h vysílače. **max. 2 body**

Řešení:

Známe úhly α a γ a stranu c. Máme zjistit délku strany a. Využijeme sinovou větu.

$$\frac{10{,}3}{\sin 52°} = \frac{a}{\sin 18°}$$

$$a = \frac{10{,}3}{\sin 52°} * \sin 18°$$

$$a = 4$$

Vysílač je vysoký 4 m.

10 Akvárium ve tvaru kvádru o rozměrech $a = 15\ \mathrm{cm}, b = 10\ \mathrm{cm}, c = 21\mathrm{cm}$ je do $\frac{4}{5}$ napuštěno vodou. Kolik kuliček o průměru $6\ \mathrm{cm}$ je možné vhodit do akvária, aby voda nepřetekla. *(Předpokládejme stejnou hustotu vody a kuličky)*.

max. 2 body

Řešení:

Vypočítáme si objem akvária.

$$V_{kvádru} = a * b * c$$

$$V_{kvádru} = 15 * 10 * 21$$

$$V_{kvádru} = 3150\ \mathrm{cm}^3$$

Akvárium je naplněno do $\frac{4}{5}$. Musíme zjistit volného prostoru do kterého můžeme pouštět kuličky. Vypočítáme si objem volného prostoru v akváriu.

$$V_1 = \frac{1}{5} * V_{kvádru} = \frac{1}{5} * 3150 = 630\ \mathrm{cm}^3$$

Nyní zjistíme objem kuličky. Neplést poloměr a průměr.

$$V_{koule} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V_2 = \frac{4}{3} * \pi * 3^3 = 36\pi = 113{,}1\ \mathrm{cm}^3$$

Vydělíme objem volného prostoru v akváriu objemem kuličky a máme výsledek.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{630}{113{,}1} = 5{,}57$$

Do akvária můžeme spustit maximálně 5 kuliček.

11 Rozhodněte, jsou-li následující tvrzení pravdivá (**ANO**), nebo nepravdivá (**NE**). **max. 3 body**

11.1 $\sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{a} * \sqrt{b^3}}{\sqrt{ab}}} = a^{\frac{1}{10}} * b, a \geq 0, b \geq 0$ **ANO NE**

11.2 $\left(\frac{a^{\frac{1}{2}} * b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{3}{2}} * b^{\frac{4}{3}}}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{-\frac{1}{3}} * b^{-\frac{2}{9}},\ a \geq 0, b \geq 0$ **ANO NE**

11.3 $\left(\frac{\sqrt{a^3} * b}{b^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[8]{a^6 * b}, b \geq 0$ **ANO NE**

Řešení:

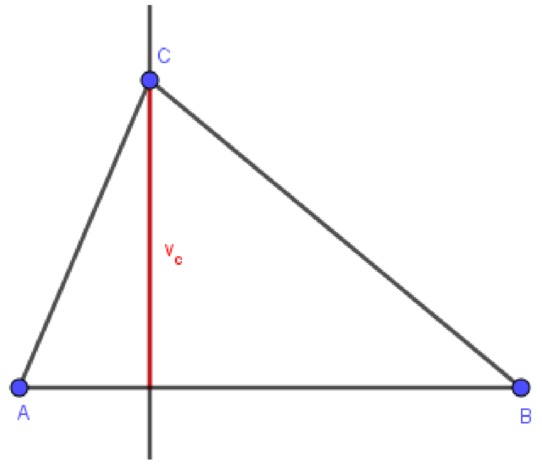
Odmocniny si převedeme na mocniny. Využíváme následujících pravidel: $(a^r)^s = a^{r*s}, \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$.

11.1 $\left(\frac{a^{\frac{1}{3}} * b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} * b^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{5}} = \frac{a^{\frac{1}{15}} * b^{\frac{3}{10}}}{a^{\frac{1}{10}} * b^{\frac{1}{10}}} = a^{-\frac{1}{30}} * b^{\frac{1}{5}}$ **NE**

11.2 $\frac{a^{\frac{1}{6}} * b^{\frac{2}{9}}}{a^{\frac{3}{6}} * b^{\frac{4}{9}}} = a^{-\frac{1}{3}} * b^{-\frac{2}{9}}$ **ANO**

11.3 $\frac{a^{\frac{3}{4}} * b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{3}{8}}} = a^{\frac{3}{4}} * b^{\frac{1}{8}} = a^{\frac{6}{8}} * b^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{a^6 b}$ **ANO**

VÝCHOZÍ OBRÁZEK K ÚLOZE 12



12 Je dán obecný trojúhelník ABC tak, že platí:

$A[-1,2], B[2,3], C[1,4]$. Výška v_c leží na přímce: **max. 2 body**

A) $3x - y + 5 = 0$

B) $x - 3y + 11 = 0$

C) $3x + y - 7 = 0$

D) $x + 3y + 13 = 0$

E) jiný výsledek

Řešení:

Vytvoříme si směrový vektor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (3, 1)$

Normálový vektor je kolmý k vektoru směrovému.

$\vec{n} = (1, -3)$

$x - 3y + c = 0$

Přímka na které leží v_c, prochází bodem C. Dosadíme do obecné rovnice bod C.

$1 * 1 - 3 * 4 + c = 0$

$\underline{x - 3y + 11 = 0}$

Odpověď je B.

VÝCHOZÍ TEXT A TABULKA K ÚKOLU ČÍSLO 13

Den	Pondělí	Úterý	Středa	Čtvrtek	Pátek	Sobota	Neděle
Teplota	22°C	23°C	18°C	??	18°C	20°C	23°C

13 Průměrná týdenní teplota činila 20°C. Ve čtvrtek činila denní teplota: **max. 2 body**

A) 18°C

B) 16°C

C) 20°C

D) 17°C

E) jiný výsledek

Řešení:

Jedná se o vážený průměr, kde teplota ve čtvrtek je x.

$$\frac{22+23+18+x+18+20+23}{7} = 20$$

Upravíme rovnici a vypočítáme x.

$124 + x = 140$

$x = 140 - 124$

$\underline{x = 16}$

Odpověď je B.

14 Kolik možných čtyřciferných čísel můžeme složit z čísle 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9 tak aby platilo, že na řádech tisíců a desítek jsou sudá čísla a na řádech stovek a jednotek jsou lichá čísla.

max. 2 body

A) 144

B) 139

C) 108

D) 960

E) jiný výsledek

Řešení:

Budeme počítat permutaci bez opakování.

Máme k dispozici 4 sudá a 4 lichá čísla. Na řád tisícovek nemůžeme dosadit nulu. Na řád tisícovek můžeme dosadit 3 čísla. Na řád stovek libovolné liché číslo, tedy 4 čísla. Na řád desítek již nemůžeme dosadit číslo, které je na řádu tisíců, ale můžeme dosadit nulu. Máme tedy 3 čísla. Na řád jednotek můžeme dosadit také 3 čísla.

$$P(n) = 3 * 4 * 3 * 3 = 108$$

Odpověď je C.

15 Ke každému funkci **15.1 - 15.4** přiřaďte odpovídající definiční obor $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{D}$.

max. 3 body

A $D(f)=R$

B $D(f)=R/\{1\}$

C $D(f)=(1,\infty)$

D $D(f)=\langle 1,\infty)$

15.1 $f\colon \frac{x^2+4}{x-1}$

15.2 $f\colon \frac{2x+4}{\sqrt{x-1}}$

15.3 $f\colon \left(\frac{1}{4}\right)^x-1$

15.4 $f\colon \log(x-1)$

Řešení:

Ke každé funkci vytvoříme definiční obor. Vytvoříme vlastně podmínky.

15.1	**15.2**	**15.3**	**15.4**
$x-1\neq 0$	$x-1>0$	R	$x-1\geq 0$
$x\neq 1$	$x>1$		$x\geq 1$
Řešení je B	Řešení je C	Řešení je A	Řešení je D

HODNOCENÍ					
celkem bodů	5	4	3	2	1
30	10 - 15	11 - 15	16 - 20	21 - 25	26 - 30

DIDAKTICKÝ TEST 3

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 1

Zvýšíme-li cenu výrobku o 20 Kč, zvětší se cena výrobku o 4%.

1 Vypočítejte, kolik činí původní cena výrobku. **max. 2 body**

2 Zjednodušte: **max. 2 body**

$$\frac{\sqrt{a^{50} * b^{200}} * a^{50}}{(ab^2)^{50}}$$

3 V oboru **R** řešte rovnici: **max. 2 body**

$$\log_3(x-4) = 3 - \log_3(x+2)$$

4 V oboru $\boldsymbol{R}^2$ řešte nerovnici: **max. 2 body**

$$\frac{x^2+10x+16}{x^2-5x+4} \leq 0$$

5 Určete, pro které hodnoty má výraz smysl. **1 bod**

$$\log_2\left(\frac{x-3}{4}\right) = 2x$$

6 Určete vzájemnou polohu přímek p, q. **max. 2 body**

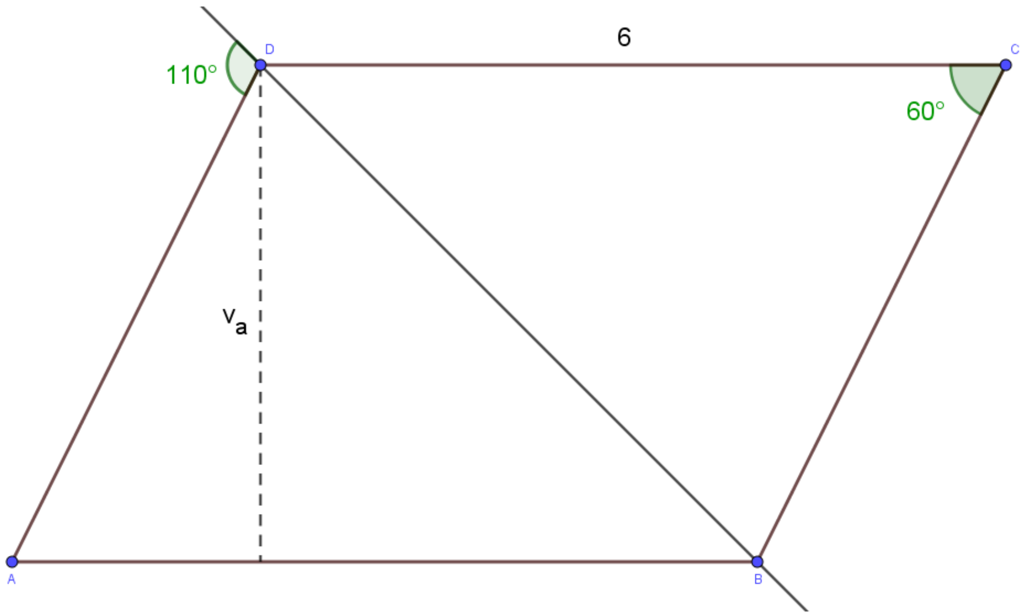
$$p: 3x + y + 5 = 0, \qquad q: x = 3 + 2t$$

$$y = 1 - t, t \in \mathbf{R}$$

7 Ve Vlašimi se koná sraz historických motocyklů. Na sjezd přijelo 32 klasických motocyklů a sajdkár *(motocykl s postranním vozíkem, mající celkem tři kola)*. Vypočítejte kolik přijelo motocyklů a kolik sajdkár, jestliže jsme napočítali 79 kol. **max. 2 body**

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOHÁM 8-9

Je dán rovnoběžník $ABCD$, kde $|CD| = 6\ \mathrm{cm}$ a $\gamma = 60°$.



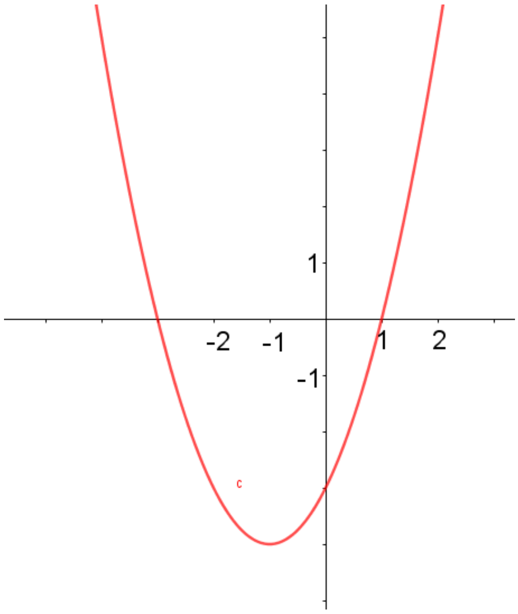
8 Vypočtěte $|BC|$. **max. 2 body**

9 Vypočtěte délku v_a, jestliže obsah rovnoběžníku ABCD je $24\ \mathrm{cm}^2$.

max. 2 body

VÝCHOZÍ OBRÁZEK A TEXT K ÚLOHÁM 10-11

Je dána funkce $f\colon x^2 + 2x - 3$, grafem funkce je parabola.



10 Funkce f má definiční obor $D(f) = \langle -4,4 \rangle$. Napište obor hodnot funkce $H(f)$. **max. 2 body**

11 Rozhodněte, jsou-li následující tvrzení pravdivá (**ANO**), nebo nepravdivá (**NE**). **max. 3 body**

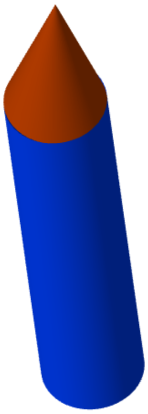
11.1 Funkce f je sudá podle $x = -1$. **ANO NE**

11.2 Funkce f je konkávní. **ANO NE**

11.3 Funkce f má vrchol $V[-1, -4]$. **ANO NE**

11.4 Funkce f je rostoucí na $\langle 0, \infty)$. **ANO NE**

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 12



Pastelka se skládá z válce a kužele. Celkem je vysoká 18 cm. Poměr výšky kužele a válce je 1:8. Průměr pastelky je 8 mm.

12 Kolik cm^2 papíru budeme potřebovat, jestliže chceme celou pastelku zabalit. *(výsledky zaokrouhlujte)* **max. 2 body**

A) $90\ \mathrm{cm}^2$

B) $43\ \mathrm{cm}^2$

C) $88\ \mathrm{cm}^2$

D) $44\ \mathrm{cm}^2$

E) jiný výsledek

13 Je dána rovnice: **max. 2 body**

$$13! * \frac{14!+15!}{14!}$$

Výsledek rovnice je:

A) 15

B) 13

C) 14

D) 30

E) jiný výsledek

14 Na šachový turnaj je potřeba mít 5-členný tým. Šachový kroužek mající 7 členů se chce na turnaj přihlásit. Petr a Zuzana, kteří jsou členy kroužku jsou do týmu zařazeni automaticky. Určete, kolika způsoby lze tým složit. **max. 2 body**

A) 6

B) 21

C) 35

D) 10

E) jiný výsledek

15 V aritmetické posloupnosti platí: **max. 2 body**

$a_3 + a_4 + a_5 = 45, \quad a_7 = 62 - a_9$

Jaká je diference této posloupnosti.

A) 3

B) 4

C) 5

D) 2

E) jiný výsledek

DIDAKTICKÝ TEST 3 - ŘEŠENÍ

Úloha	Správné řešení	Body
1	500 Kč	**max. 2 body**
2	a^{25}, pro $a > 0, b > 0$	**max. 2 body**
3	$x = 4$, pro $x > -2$	**max. 2 body**
4	$K = \langle -8, -2 \rangle \cup (1, 4)$	**max. 2 body**
5	$K = (3, \infty)$	**1 bod**
6	Různoběžky s $P[-3, 4]$	**max. 2 body**
7	15 sajdkár, 17 motocyklů	**max. 2 body**
8	$\lvert BC \rvert = 5{,}3\ cm$	**max. 2 body**
9	$v_a = 4\ cm$	**max. 2 body**
10	$H(f) = \langle -4, 21 \rangle$	**max. 2 body**
11		**max. 3 body**
11.1	ANO	
11.2	NE	
11.3	ANO	
11.4	NE	
12	B	**max. 2 body**
13	E	**max. 2 body**
14	D	**max. 2 body**
15	B	**max. 2 body**

HODNOCENÍ					
celkem bodů	5	4	3	2	1
30	10 - 15	11 - 15	16 - 20	21 - 25	26 - 30

Závěr

Tato bakalářská práce se věnovala cvičným didaktickým testům k přípravě na maturitní zkoušku z matematiky. Cílem práce bylo pomoci maturantům, procvičit si své znalosti ze středoškolského studia či gymnázia a zároveň ukázat klíč k řešení některých úloh. V první části práce bylo záměrem ukázat studentům postupy, vzorečky a pravidla, které by jim mohly pomoci při řešení jednotlivých úkolů. Ve druhé části práce jsem vytvořil typické příklady, které se objevují u maturitní zkoušky z matematiky. Úkoly byly vybírány záměrně tak, aby při jejich řešení mohli studenti využívat znalosti získané v první části bakalářské práce. Zároveň byly vytvořeny i takové úlohy, které se v první části neprobíraly, ale u maturitní zkoušky se objevují. I přesto má bakalářská práce neobsahuje a ani nemůže obsáhnout veškeré středoškolské studium.

Při zpracovávání této práce jsem si procvičil středoškolskou látku z matematiky a vyzkoušel si slovní vysvětlování jednotlivých příkladů. Zároveň jsem zjistil, jak složité je vymýšlení příkladů a převážně slovních úloh. Při vytváření bakalářské práce jsme odhalil, jak těžká ale záslužná je práce učitele.

Seznam použité literatury, internetové a další zdroje

[1] HEJNÝ, Milan a František KUŘINA. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. 2., aktualiz. vyd. Praha: Portál, 2009. Pedagogická praxe (Portál). ISBN 978-80-7367-397-0.

[2] HEJNÝ, Milan. *Teória vyučovania matematiky 2*. 2. vyd. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1990.

[3] HEJNÝ, Milan, Jarmila NOVOTNÁ a Naďa VONDROVÁ, ed. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta, 2004. ISBN 80-7290-189-3.

[4] HUDCOVÁ, Milada a Libuše KUBIČÍKOVÁ. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ, SOU a nástavbové studium*. Praha: Prometheus, 2011. Učebnice pro střední školy.

[5] KALHOUS, Zdeněk a Otto OBST. *Školní didaktika*. Praha: : Portál, 2009. Pedagogická praxe (Portál). ISBN 978-80-7367-571-4.

[6] KUŘINA, František. *Umění vidět v matematice*. Praha: SPN, 1990. Odborná literatura pro učitele. ISBN 80-04-23753-3.

[7] POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 9., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-356-1.

Internetové a další zdroje

[8] http://www.novamaturita.cz/

[9] http://www.msmt.cz/vzdelavani/skolstvi-v-cr/skolskareforma/ramcove-vzdelavaci-programy

[10] Matematika: katalog požadavků ke společné části maturitní zkoušky v roce 2014. Praha: Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy, 2014.